

Modelagem de Propagação do Fogo por meio de Equações Diferenciais Parciais

Rodrigo José Zonzin Esteves

Fevereiro de 2025

1 Introdução

As queimadas e o desmatamento são processos interligados que intensificam os efeitos da Crise Climática. Estudos indicam que o comprometimento da biodiversidade, do equilíbrio climático e da qualidade de vida das populações são os principais efeitos das queimadas no Brasil [Alencar et al., 2004]. Além disso, a remoção da vegetação nativa, muitas vezes impulsionada pela expansão agropecuária e pelo avanço urbano, não apenas reduz a capacidade dos ecossistemas de sequestrar carbono, mas também intensifica eventos climáticos extremos, como secas e chuvas intensas [Fearnside, 2017].

Além disso, a compreensão de fenômenos físicos, sociais, econômicos e ambientais tem sido uma das principais preocupações das sociedades ao longo do tempo. A busca por explicar, prever e sistematizar esses fenômenos impulsionou abordagens cada vez mais quantitativas dos problemas que envolvem a experiência humana. Nesse contexto, a criação de modelos matemáticos que representam com maior precisão os sistemas complexos observados na natureza é um dos estágios mais avançados de representação do conhecimento humano [Johnson et al., 2010].

Nesse contexto, modelos matemáticos como Equações Diferenciais, Cadeias de Markov, Modelos Bayesianos e Redes Neurais desempenham um papel fundamental na compreensão e previsão de fenômenos ambientais complexos. As EDPs são amplamente utilizadas na modelagem da dispersão de poluentes na atmosfera e nos corpos d'água, na dinâmica do desmatamento, no avanço da desertificação e na propagação de incêndios florestais [Le Quéré et al., 2018, Sayama, 2015]. Modelos baseados na equação do calor, por exemplo, ajudam a descrever a difusão térmica e a propagação de queimadas, enquanto a equação de advecção-difusão é essencial para estudar o transporte de partículas poluentes pelo vento e pelas correntes marítimas.

A combinação dessas abordagens matemáticas permite uma compreensão mais precisa dos processos naturais e antrópicos, contribuindo para estratégias mais eficazes de conservação ambiental e combate à Crise Climática. Dessa forma, o objetivo deste trabalho é adaptar um modelo de propagação do calor posposto na literatura e avaliar o seu desempenho mediante diferentes parâmetros e domínios de aplicação. As simulações

realizadas podem ser capazes de demonstrar aspectos importantes quanto à topografia, à convecção do calor e ao impacto do vento.

2 Metodologia

A modelagem utilizada neste trabalho é uma adaptação de modelos já apresentados na literatura. Esta Seção apresenta o modelo base utilizado [Bürger et al., 2020a], ao passo que a Subseção 2.1 apresenta as adaptações realizadas.

Conforme [Bürger et al., 2020b], um modelo de propagação do fogo pode ser compreendido como um problema de convecção-difusão-reação. Isso significa que, questões de convecção como a velocidade de propagação do vento devem ser levados em conta na construção no modelo. Da mesma forma, o modelo deve ser capaz de captar a difusão do calor ao longo de uma Região de Interesse (ROI). Por fim, os autores mencionam os aspectos termodinâmicos da matéria para a transição de fase e os efeitos ocasionados pela combustão.

A Equação 1 apresenta o modelo proposto pelos autores.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{w}(x, t) \cdot \nabla u = \nabla \cdot (K(u) \nabla u) + \mathbf{f}(u, v, \mathbf{x}), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = g(u, v) \quad (1)$$

2.1 Modelo matemático

A Equação 2 apresenta o modelo de propagação do fogo proposto neste trabalho. A variável u representa a temperatura de superfície, ao passo que v representa a fração de combustível disponível. Além disso, o termo f se refere ao fenômeno de reação que ocorre em cada ponto (x, y) do domínio. Ele é dado por um coeficiente β e pela concentração corrente de combustível, mapeada por v (Equação 3).

De forma similar, a variação da concentração de combustível em função do tempo é dada em função da concentração atual e de uma taxa $-\beta$. O termo de advecção ($\nabla \mathbf{w} u$) representa a influência do vento na propagação do fogo. Já o termo $\nabla \cdot (K(u) \nabla u)$ representa o processo de difusão do calor, que se propaga molécula a molécula.

A Equação 4 apresenta o termo $w(x, y, t)$, que é inversamente proporcional à topografia do terreno ($A(x, y)$). Isso ocorre de forma que quanto maior a altura, maior a temperatura a ser atingida.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = f(u, v, x, y, t) + \nabla \cdot (K(u) \nabla u) - \nabla \cdot \mathbf{w} u \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -\beta v \end{cases} \quad (2)$$

$$f(u, v, x, y, t) = \beta v \quad (3)$$

$$w(x, y) = \frac{1}{1 + A(x, y)} \quad (4)$$

2.2 Definição do ambiente para as simulações

Para a simulação do modelo, definiu-se um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ com dimensão 200×200 . Para avaliar o impacto dos parâmetros e da condição inicial, foi definido diferentes cenários de aplicação.

Para o método numérico, foi definido um intervalo temporal $dt = 0.1$ e tamanhos de célula $dx = dy = 1.0$. A duração total da simulação foi estabelecida em $D_{tot} = 10$. Dessa forma, $D_{tot}/dt = 100$ imagens das variáveis u e v foram selecionadas.

2.3 Cenário 1

Para isso, no Cenário 1, a altura do terreno foi considerada nula em todos os pontos de Ω . Além disso, definiu-se o coeficiente de difusão do modelo segundo o proposto por [Bürger et al., 2020a] (Equação 5). Para os termos de $\frac{\partial v}{\partial t}$, definiu-se $\beta = 0.001$. Esses valores foram obtidos mediante simulações preliminares.

$$K(u) = \kappa(1 + \epsilon u)^3 + 1 \quad (5)$$

onde $\epsilon = 0.3$ e $\kappa = 0.95$.

Além disso, foi definido um campo vetorial $w(x, y) = (1, 0.5)$. Como $w_x = -1$, os valores de u se movem uma unidade para a esquerda ao longo do tempo, ao passo que w_y faz os valores de determinada subir 0.5 na direção y . Isso ocorre pois, se não houvesse difusão, u apenas seria transportado ao longo do domínio, sem se espalhar. A presença da difusão, portanto, faz com que u se espalhe ao longo do caminho, suavizando o transporte de energia.

2.4 Cenário 2

Já no cenário 2, definiu-se a altura do terreno de acordo com a Equação 6. A escolha se justifica pois as duas funções gaussianas em porções opostas do domínio são capazes de mimetizar nuances topográficas reais. Os parâmetros $K(u)$ e β são os mesmos da Seção 2.3.

$$A(x, y) = 10e^{-\frac{(x-10)^2}{10^2}} + 30e^{-\frac{(x-60)^2}{18^2}} \quad (6)$$

A Figura 1 apresenta o formato da superfície gerada pela Equação 6. Os valores de temperatura u foram inicializados como zero, exceto o inicial, e os valores de fração de combustível como 5.

2.5 Simulação Computacional

Para as simulações computacionais, foi utilizado o FiPy¹, uma biblioteca em Python baseada no método de volumes finitos para resolver EDPs em malhas estruturadas. Seu

¹<https://www.ctcms.nist.gov/fipy/README.html>

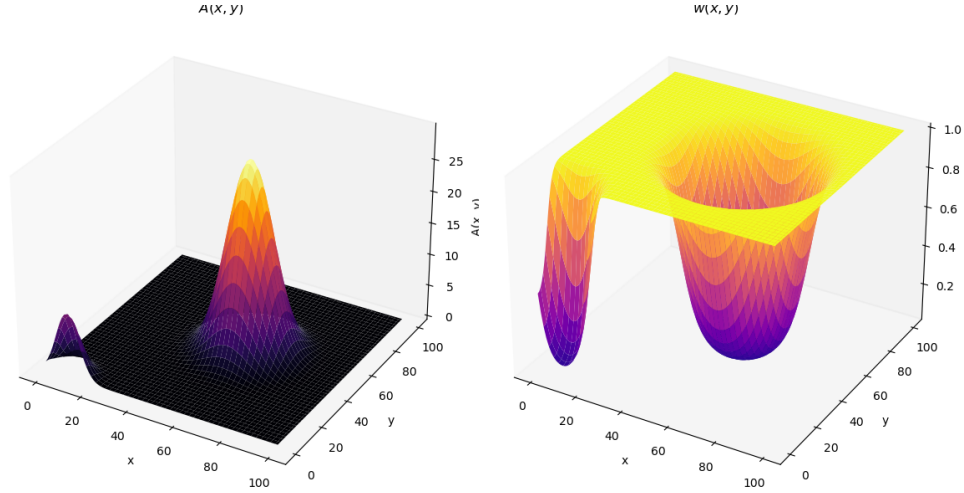


Figura 1: Superfície gerada e campo vetorial $w(x, y)$ correspondente

uso é ideal para problemas de difusão, advecção e equações elípticas. Além disso, sua escolha se justifica pelo ambiente facilitado de implementação oferecido pela linguagem *Python*, com bibliotecas como *Numpy*, *Pandas*, *Matplotlib* etc.

Após a implementação de cada cenário de uso, os plots dos cenários foram exportados para análise posterior.

3 Resultados

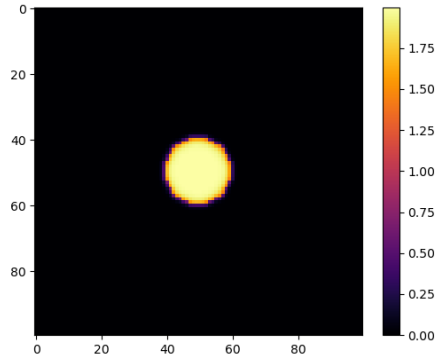
3.1 Cenário 1

Neste caso, um foco de incêndio foi posicionado na posição $(50, 50)$ com todos os valores em um raio de 10 pixels inicializados para 2 UTs (Unidades Térmicas).

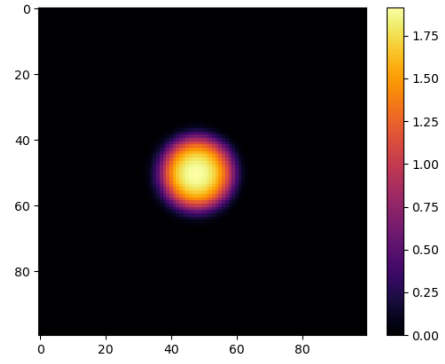
Como se observa em 2(b), os valores da borda do incêndio sofrem uma diminuição de temperatura, provavelmente influenciados pelo termo $-\beta v$ da segunda EDP. O decaimento exponencial deste termo limita o processo de difusão do fogo.

O termo de advecção do modelo, no entanto, foi facilmente observado. Como se nota nas Figuras 2e e 2f, o centro do foco se desloca da posição $(50, 50)$ para posições próximas ao ponto $(40, 55)$. Esse fato está em linha com o campo vetorial $w(x, y)$ inicializado, que é contante e tem sentido noroeste (para a esquerda e para cima).

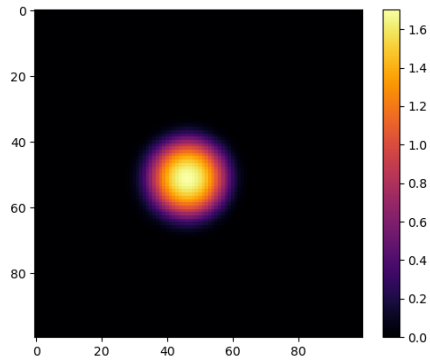
A intensidade dos processos de reação, que tem caráter exponencial, diminui muito fortemente o processo de difusão. Esse fato inviabiliza o uso do modelo para aplicações reais, mas modificações nos termos f e g podem fazer com que ele responda bem aos processos de difusão-reação.



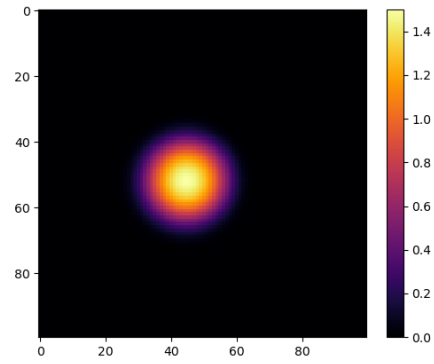
(a) $t = 1$



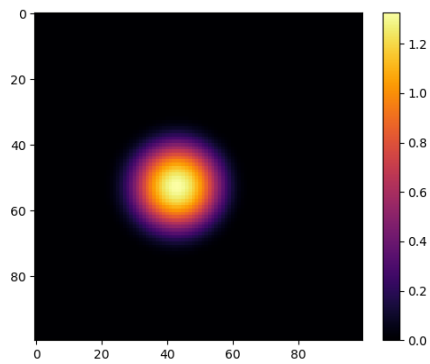
(b) $t = 17$



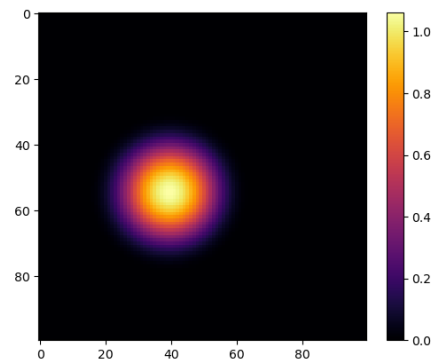
(c) $t = 49$



(d) $t = 66$



(e) $t = 83$

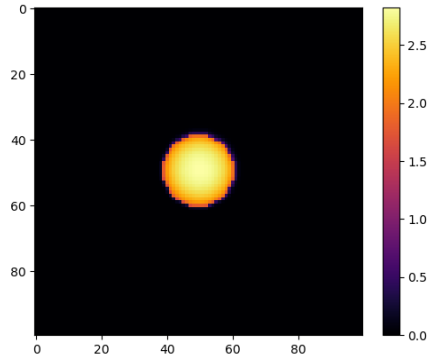


(f) $t = 100$

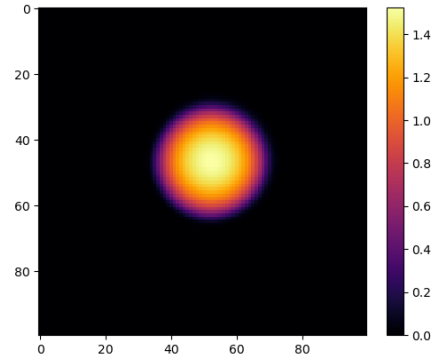
Figura 2: Resultados da simulação para o primeiro cenário: sem topologia

3.2 Cenário 2

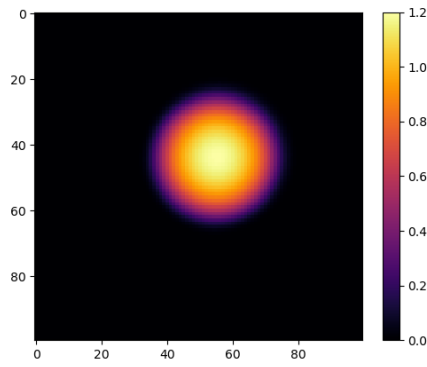
Os resultados da segunda simulação indicam que o vetor $A(x, y)$ movimentou a mancha de propagação do fogo para próximo do seu maior pico (Figura 3). Isso ocorre pois o gradiente envolvido na advecção transporta o fogo para a região de maior dimensão do vetor. Esse comportamento é coerente com a formulação do termo de advecção no modelo (2), uma vez que a velocidade $w(x, y)$ é inversamente proporcional a $1 + A(x, y)$, conforme definido em (4). Dessa forma, em regiões onde $A(x, y)$ é menor, $w(x, y)$ é mais intenso, resultando em um deslocamento preferencial da frente de propagação para áreas de menor resistência ao transporte. Além disso, como observado na simulação anterior, a influência do termo $-\beta v$ na segunda equação leva a um decaimento exponencial da temperatura ao longo do tempo, o que também pode modular a dinâmica da propagação do fogo.



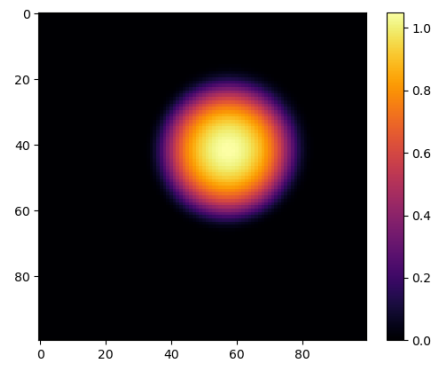
(a) $t = 1$



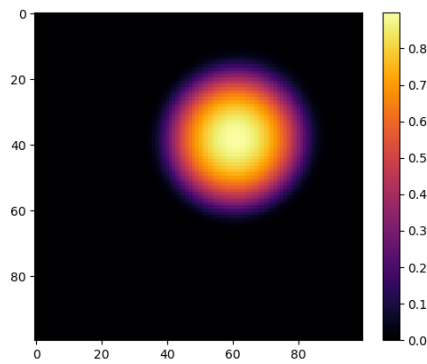
(b) $t = 17$



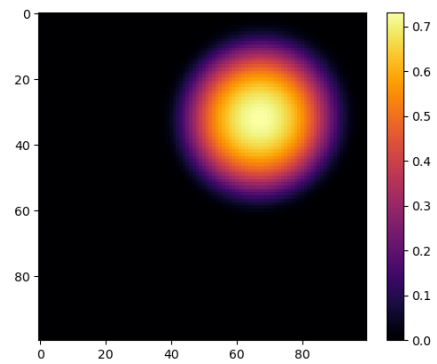
(c) $t = 49$



(d) $t = 66$



(e) $t = 83$



(f) $t = 100$

Figura 3: Resultados da simulação para o primeiro cenário: sem topologia

4 Conclusão

Os modelos matemáticos baseados em Equações Diferenciais Parciais são consolidados na literatura científica por sua capacidade de descrever, simular e compreender fenômenos complexos. No caso em questão, uma abordagem inicial buscou reproduzir um modelo já proposto em estudos anteriores, mas não foi capaz de simular de forma satisfatória os resultados esperados. Isso ocorre pela simplificação proposta para o modelo, uma vez que a implementação de [Bürger et al., 2020a] fugiria do escopo deste trabalho. Como limitações deste trabalho, citam-se o decaimento exponencial da variável v , que pode ser contornada com a implementação de um modelo logístico, por exemplo, e o fato de que uma vez atingida determinada temperatura, isto é, a queima florestal se consuma, não é possível que a mera movimentação da mancha do fogo faça a variável voltar ao estado anterior. Uma vez consumada a queima, permanece-se queimado. Dessa forma, trabalhos futuros podem preencher as lacunas aqui apresentadas e reproduzir um modelo mais fiel às complexidades do fenômeno de queima florestal.

Código

O código implementado pode ser obtido no seguinte repositório: github.com/rodrigozonzin/modelagem_computacional

Referências

- [Alencar et al., 2004] Alencar, A., Nepstad, D., and de Carvalho, R. (2004). Desmatamento e queimadas na amazônia: Efeitos ambientais e sociais. *Revista Brasileira de Meteorologia*, 19:15–29.
- [Bürger et al., 2020a] Bürger, R., Gavilán, E., Inzunza, D., Mulet, P., , and Villada, L. M. (2020a). Exploring a convection–diffusion–reaction model of the propagation of forest fires: Computation of risk maps for heterogeneous environments. *Mathematics*.
- [Bürger et al., 2020b] Bürger, R., Gavilán, E., Inzunza, D., Mulet, P., , and Villada, L. M. (2020b). Implicit-explicit methods for a convection-diffusion-reaction model of the propagation of forest fires. *Mathematics*.
- [Fearnside, 2017] Fearnside, P. M. (2017). *Desmatamento na Amazônia Brasileira e suas Consequências Globais*. Editora Acadêmica, São Paulo.
- [Johnson et al., 2010] Johnson, D. A., Heffernan, M. L. H., and Wang, J. T. (2010). *Mathematical Models in Environmental Science*. Springer, New York.
- [Le Quéré et al., 2018] Le Quéré, C., Andrew, R. M., Friedlingstein, P., Sitch, S., Hauck, J., and Canadell, J. G. (2018). Global carbon budget 2018. *Earth System Science Data*, 10:405–448.

[Sayama, 2015] Sayama, H. (2015). *Introduction to the Modeling and Analysis of Complex Systems*. Open SUNY Textbooks.