

Colônia de formigas - PCV

Carolina Ribeiro Xavier

Maio de 2025

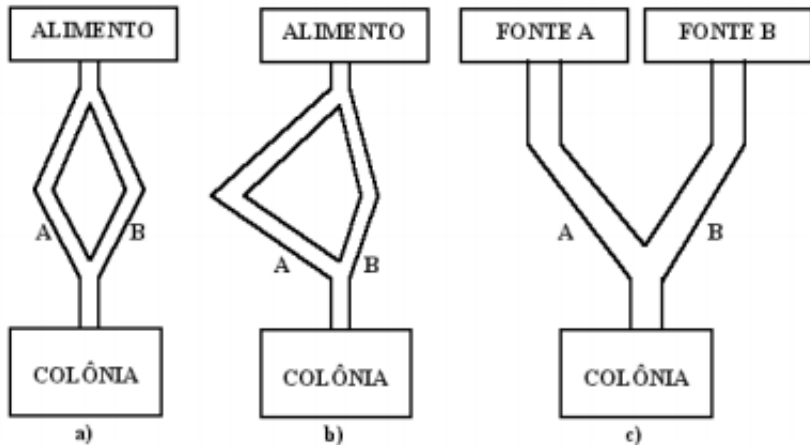
Inspiração biológica

Colônia de formigas é uma meta-heurística baseada em população e inspirada no comportamento forrageiro das formigas. Muitas espécies de formigas são quase cegas, logo a comunicação entre as formigas é realizada através de uma substância química denominada de feromônio. Em algumas espécies, o feromônio é usado para criar trilhas de formigas.

Ao caminhar, as formigas depositam no chão o feromônio, formando, deste modo, uma trilha de feromônios. Outras formigas sentem o cheiro do feromônio, e quando elas têm que escolher um caminho, escolhem, com maior probabilidade, o caminho com maior quantidade de feromônio (análogo ao cheiro mais forte). Essa trilha ajuda a própria formiga a achar o seu caminho de volta, e ajuda as demais formigas a encontrar a fonte de alimentos.

Inspiração biológica

Experimentos realizados por Denebourg et al., 1989 e Bonabeau et al., 1999 mostraram o comportamento na formação de trilhas pelas formigas reais.



Experimento

Para os casos em que os caminhos alternativos tem tamanho diferente e chegam na mesma fonte de alimento (b), foi possível observar a escolha pelo caminho mais curto, o caminho curto é percorrida em menos tempo, fazendo com que mais formigas atravessem ele. Logo, mais feromônio é depositado.

Por fim, quando foi mantido o mesmo tamanho dos caminhos e variada a qualidade das fontes de alimento (c), foi possível observar a convergência pelo caminho que levava à melhor fonte. Quando a fonte foi modificada após a formação da trilha as formigas não conseguem verificar que a fonte melhorou.

Proposta inicial - Dorigo e Gambardella

A otimização por colônia de formigas foi proposta por Dorigo e Gambardella em 1997 e baseia-se no comportamento das formigas para formação de suas trilhas do experimento descrito anteriormente.

As formigas artificiais são heurísticas construtivas, as soluções são construídas de forma probabilística utilizando duas informações: a trilha de feromônios (artificial), que muda dinamicamente durante a execução do programa, e a informação heurística específica do problema a ser resolvido.

Aplicação

Para exemplificar o Ant System iremos aplicá-lo no problema de caminhos mais famoso da computação, o Problema do Caixeiro Viajante (PCV).

O problema PCV consiste na busca por um circuito que possua a menor distância, começando numa cidade qualquer, entre várias, e visitando todas cidades, cada uma precisamente uma vez, voltando então para a cidade de origem.

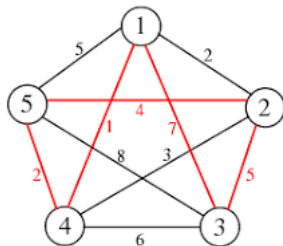


Figura: Grafo completo para aplicação do problema do caixeiro viajante

Aplicação

Dado um conjunto $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ de n cidades c_i e uma matriz de distâncias (ρ_{ij}) , onde $\rho_{ij} = \rho(c_i, c_j)$ ($(i, j) \in \{1, \dots, n\}$, $\rho_{ij} = \rho_{ji}$, $\rho_{ii} = 0$), a tarefa passa por encontrar a permutação $\pi \in S_n = \{s : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}\}$ que faça com que a função objetivo (distância do circuito) $f : S_n \rightarrow \mathbb{R}$, onde:

$$f(\pi) = \sum_{i=1}^{n-1} \rho(\pi(i), \pi(i+1)) + \rho(\pi(n), \pi(1)), \quad (1)$$

seja mínima.

Ant System e suas variantes

O Ant System é o primeiro algoritmo que surgiu inspirado em colônia de formigas naturais.

Detalhes do ambiente das formigas a serem utilizadas:

1. Ao tomar um caminho a formiga deixa no mesmo uma certa quantidade de feromônio;
2. Uma formiga escolhe determinado caminho de acordo com uma função probabilística envolvendo a distância deste caminho e a quantidade de feromônio presente neste;
3. As formigas "lembram" os pontos por onde já passaram e não retornam a estes pontos até que tenham chegado à fonte de alimento;
4. O feromônio evapora.

Pseudocódigo

```
Coloque cada formiga em uma cidade aleatória
Para  $t = 1$  até o número de iterações
  Para  $k = 1$  até  $m$  (nº de formigas)
    Enquanto a formiga  $k$  não construir a viagem  $S_k$ 
      Selecione a próxima cidade pela regra da probabilidade
    Fim
    Calcule a distância  $L_k$  da viagem  $S_k$ 
    Se  $L_k < L^*$  então
       $S^* = S_k$ ,  $L^* = L_k$ 
    Fim
  Fim
  Atualize os feromônios
Fim
Retornar  $S^*$ 
```

Figura: Pseudocódigo do Ant System

Questões de projeto

As principais questões para o Ant System estão as listadas a seguir:

- ▶ Configuração inicial;
- ▶ Função objetivo;
- ▶ Representação;
- ▶ **Função de probabilidade;**
- ▶ Atualização de feromônio.

Configuração inicial

Durante o processo, cada formiga irá construir uma solução movendo-se de uma cidade para outra. No início, cada formiga é colocada em uma cidade diferente (ou são colocadas aleatoriamente).

O número sugerido de formigas (m) deve ser proporcional à instância, sugere-se $m = \text{número de vértices}$.

É preciso também que você distribua uma quantidade igual de feromônio em todas as arestas τ_0 , sugestão 10^{-16} .

Função objetivo

A função objetivo do problema do caixeiro viajante será direta, basta fazer o cálculo da distância do percurso dado por 1.

Função de probabilidade

Aqui está a parte mais importante dos algoritmos baseados no comportamento das formigas.

A escolha da formiga é feita de forma probabilística, a probabilidade da formiga k que está na cidade i de escolher a cidade j é dada pela Equação 2.

$$p_{ij}^k = \frac{(\tau_{ij})^\alpha (\eta_{ij})^\beta}{\sum_{l \in \mathcal{N}_i^k} (\tau_{il})^\alpha (\eta_{il})^\beta} \quad (2)$$

Onde τ_{ij} é o feromônio associado à aresta (i,j) , \mathcal{N}_i^k é a vizinhança factível da formiga k (o conjunto de cidades ainda não visitadas por ela) e η_{ij} é um fator inversamente proporcional ao custo da aresta (i,j) , para o PCV:

$$\eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$$

Parâmetros da Equação de P

Os valores de α e β são parâmetros ajustáveis, o α pondera a influência do feromônio e o β pondera a influência do custo do caminho no cálculo da probabilidade. Se $\alpha = 0$ então cidades mais próximas tenderão a ser escolhidas, enquanto que se $\beta = 0$, as cidades associadas a arestas com maior quantidade de feromônio tenderão a ser escolhidas.

A partir de uma cidade i , a escolha da cidade candidata j é feita de acordo com a probabilidade de transição, com ideia similar à escolha por roleta de AG.

Parâmetros da Equação de P

Para outra variante do AS, a Ant Colony System, uma estratégia de intensificação é feita, com uma probabilidade q_0 a cidade de maior probabilidade é escolhida, com probabilidade $1 - q_0$ usa-se a regra do AS.

Parâmetros da Equação de P

Os melhores valores para os parâmetros α e β da equação de P² podem ser encontrados com um experimento fatorial, inicialmente você pode colocar $\alpha = 1$ e $\beta = 5$ para desenvolver sua primeira implementação.

Atualização do Feromônio

Em cada posição da matriz de feromônio τ_{ij} associado a aresta (i,j) ocorrem dois eventos:

- ▶ Evaporação - evita que o feromônio acumulado cresça indefinidamente, permitindo esquecer decisões ruins e encontrar soluções diversificadas;
- ▶ O depósito de feromônio, que varia de acordo com a variante do algoritmo baseado em colônia de formigas.

No **Ant System** o depósito de feromônio é feito por todas as formigas que passaram sobre (i,j) .

Depois que todas as formigas construíram suas viagens, o feromônio é atualizado da forma:

$$\tau_{ij} = (1 - \rho)\tau_{ij} + \sum_{k=1}^m \Delta\tau_{ij}^k \quad (3)$$

Atualização do Feromônio - Ant System

- ▶ $\Delta\tau_{ij}^k = \frac{Q}{L_k}$ quando a aresta (i,j) pertence S_k ;
- ▶ $\Delta\tau_{ij}^k = 0$, caso contrário
- ▶ Q é uma variável definida pelo usuário;
- ▶ $0 < \rho \leq 1$ é a taxa de evaporação de feromônio.

Sugere-se usar o $Q = 100$ e $\rho = 0,5$ para os testes iniciais.

Atualização do Feromônio - Elitism Ant System (EAS)

No **Elitism Ant System (EAS)** a formiga com o melhor percurso T_{bs} , denominado best-so-far Tour reforça a sua trilha.

$$\tau_{ij} = (1 - \rho)\tau_{ij} + \sum_{k=1}^m \Delta\tau_{ij}^k + \epsilon\Delta\tau_{ij}^{bs} \quad (4)$$

- ▶ $\Delta\tau_{ij}^{bs} = \frac{Q}{T_{bs}}$ quando a aresta (i,j) pertence S_{bs} ;
- ▶ $\Delta\tau_{ij}^{bs} = 0$, caso contrário
- ▶ $\Delta\tau_{ij}^k = \frac{Q}{L_k}$ quando a aresta (i,j) pertence S_k ;
- ▶ $\Delta\tau_{ij}^k = 0$, caso contrário
- ▶ Q é uma variável definida pelo usuário;
- ▶ $0 < \rho \leq 1$ é a taxa de evaporação de feromônio.

Atualização do Feromônio - Rank-Based Ant System (AS_{rank})

No **Rank-Based Ant System** (AS_{rank}), somente as w melhores formigas depositam uma quantidade de feromônio, que proporcional ao seu rank, a formiga best-so-far pode reforçar a trilha Equação 5.

$$\tau_{ij} = (1 - \rho)\tau_{ij} + \sum_{r=1}^{w-1} (w - r)\Delta\tau_{ij}^r + w\Delta\tau_{ij}^{bs} \quad (5)$$

- ▶ $\Delta\tau_{ij}^{bs} = \frac{Q}{T_{bs}}$ quando a aresta (i, j) pertence S_{bs} ;
- ▶ $\Delta\tau_{ij}^{bs} = 0$, caso contrário;
- ▶ $\Delta\tau_{ij}^r = \frac{Q}{L_k}$ quando a aresta (i, j) pertence S_r ;
- ▶ $\Delta\tau_{ij}^r = 0$, caso contrário
- ▶ Q é uma variável definida pelo usuário;
- ▶ $0 < \rho \leq 1$ é a taxa de evaporação de feromônio;
- ▶ w é definido pelo usuário e é o número de formigas que farão o depósito de feromônio. Sugestão de $w = 5$.

Atualização do Feromônio - **Ant Colony System**

Existe ainda o **Ant Colony System**, que somente a melhor formiga deposita feromônio depois de cada iteração, sendo o valor uma média ponderada entre o valor antigo e valor dado pelo novo percurso da formiga best-so-far. Somente esta formiga faz a evaporação.

$$\tau_{ij} = (1 - \rho)\tau_{ij} + \rho\Delta\tau_{ij}^{bs} \quad (6)$$

- ▶ $\Delta\tau_{ij}^{bs} = \frac{Q}{L_{bs}}$ quando a aresta (i, j) pertence S_{bs} ;
- ▶ $\Delta\tau_{ij}^{bs} = 0$, caso contrário
- ▶ Q é uma variável definida pelo usuário;
- ▶ $0 < \rho \leq 1$ é a taxa de evaporação de feromônio;

É aplicado pelas demais formigas uma regra de atualização local do feromônio.

Atualização do Feromônio - **Ant Colony System**

$$\tau_{ij} = (1 - \xi)\tau_{ij} + \xi\tau_0 \quad (7)$$

onde τ_0 é o nível inicial de feromônio e $0 < \xi \leq 1$ é um parâmetro dado pelo usuário.

Na prática o que as formigas fazem é reduzir o feromônio na aresta, a fim de dar diversidade para as soluções, reduzindo a atratividade das arestas frequentemente visitadas.

Critério de parada

- ▶ Número máximo de iterações
- ▶ Estagnação (mínimo local)
- ▶ Convergência (mínimo global)

Implementação

Agora vamos implementar um algoritmo baseado em colônia de formigas para o problema do caixeiro viajante

Você deve definir a estrutura de dados que você irá armazenar as formigas, suas soluções e seus respectivos valores de *fitness*. Você deve armazenar ainda a quantidade de feromônio por aresta, de forma que seja viável a atualização desses valores.

Use alguma instância encontrada em:

aqui ou **aqui**.

As instâncias que melhor representam o problema no primeiro link são:

LAU15 - que possui o resultado da solução ótima e a matriz de distâncias (lau15_dist.txt)

SGB128 - que não traz a solução ótima, mas possui a matriz de distâncias (sgb128_dist.txt)

Por simplicidade, no segundo link você deve se atentar aos dados que possuam problemas simétricos.

Experimento fatorial

Defina 3 dos valores listados a seguir com um experimento fatorial:

- ▶ α ;
- ▶ β ;
- ▶ ρ
- ▶ Q
- ▶ ϵ - caso do EAS
- ▶ w - caso do *AS_rank*

Relembrando as sugestões $\alpha = 1$, $\beta = 5$, $\rho = 0,5$, $m = |V|$, $Q = 100$, $\tau_0 = 10^{-6}$, $w = 5$ e $\xi = 0,1$.