

Relatório: Estimando parâmetros do modelo SIR para o caso de São João del-Rei, MG, em 2021

Rodrigo José Zonzin Esteves

Dezembro de 2024

1 O Modelo SIR e estratégias adotadas

O modelo Suscetível-Infetado-Recuperado (SIR) é dado pelo sistema de EDO's apresentado pela Equação 1. Os parâmetros α e β podem ser estimados através de um processo de ajuste de curvas não-lineares.

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \alpha I(t) \end{cases} \quad (1)$$

Para o ajuste de curvas, considerou-se a Norma 2 $\|\cdot\|_2$ como medida de erro.

$$\|erro\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2} \quad (2)$$

Os dados para o ajuste consistem em uma série temporal com o número de infectados acumulado diariamente em São João del-Rei. Esse dado é representado pelo vetor \mathbf{I} .

Portanto, para que se estime α e β , é preciso minimizar a função-objetivo dada pela Equação 3.

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{erro}(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{\sum_{i \in \mathbf{I}} (\hat{i} - i)^2}{\sum_{i \in \mathbf{I}} i^2}} \\ & \alpha, \beta \in [0, 1] \end{aligned} \quad (3)$$

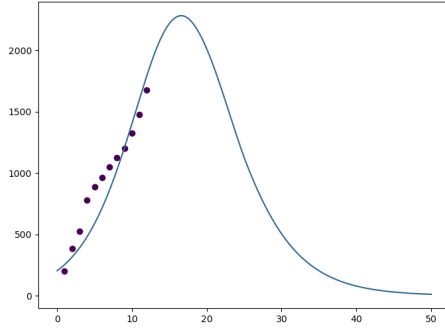
A otimização da Equação 3 foi obtida através do método de Evolução Diferencial. Considerou-se ainda, para cada ajuste, as seguintes estratégias de mutação e cruzamento:

1. rand1bin
2. rand2bin
3. best1bin
4. best2bin

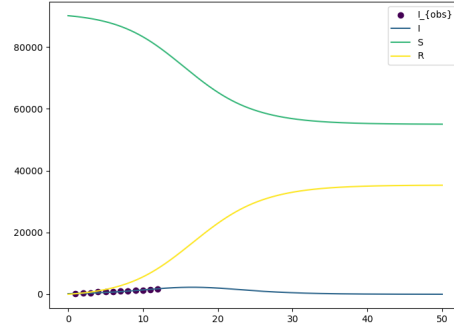
2 Resultados

2.1 Primeiras doze semanas de 2021

Estrategia	Erro Associado	α	β
rand1bin	0.16339400	0.00001169	0.83307879
rand2bin	0.16156398	0.00001189	0.84978616
best1bin	0.21111678	0.00001204	0.84661256
best2bin	11.61501726	0.02000000	0.85000000

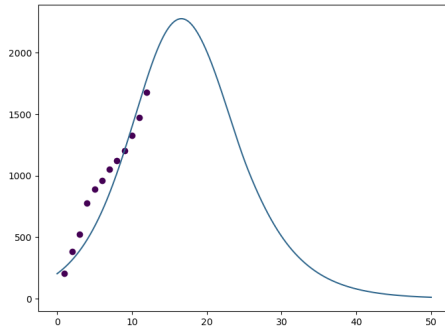


(a) Curva I

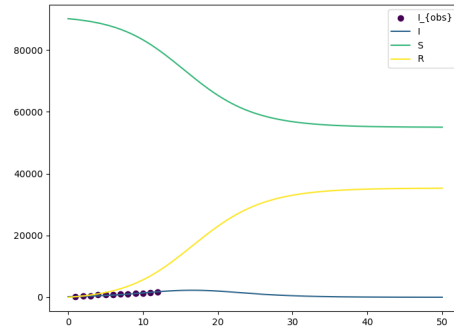


(b) Todas as Curvas

Figura 1: Resultados para rand1bin



(a) Curva I



(b) Todas as Curvas

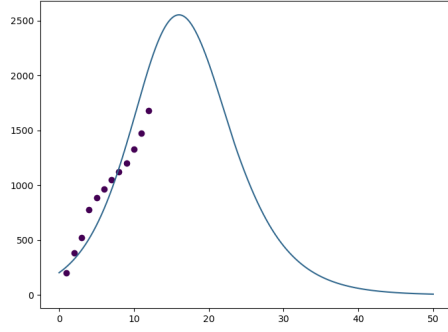
Figura 2: Resultados para rand2bin

2.2 Ano de 2021

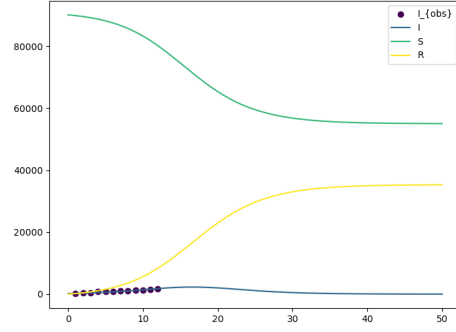
Estrategia	Erro Associado	α	β
rand1bin	1.43433162	0.02000000	0.85000000
rand2bin	1.43433162	0.02000000	0.85000000
best1bin	0.89975065	0.00001000	0.69827012
best2bin	0.89975065	0.00001000	0.69827012

3 Conclusão

Conforme [1], “A estratégia a ser adotada para um problema é determinada por tentativa e erro”. Para o caso em tela, observou-se que a estratégia que apresentou o menor erro é foi a rand2bin.

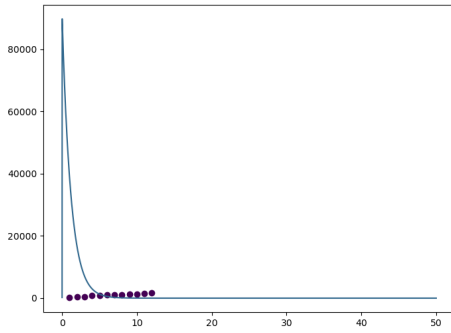


(a) Curva I

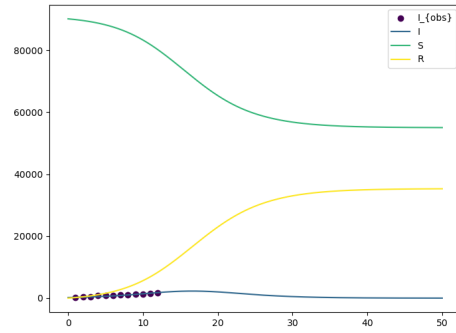


(b) Todas as Curvas

Figura 3: Resultados para best1bin

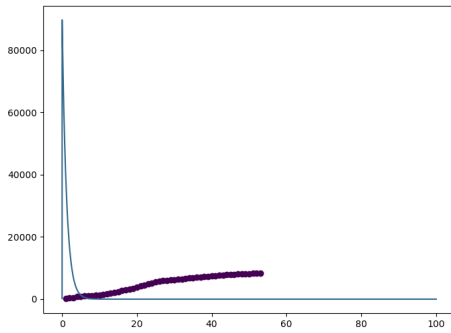


(a) Curva I

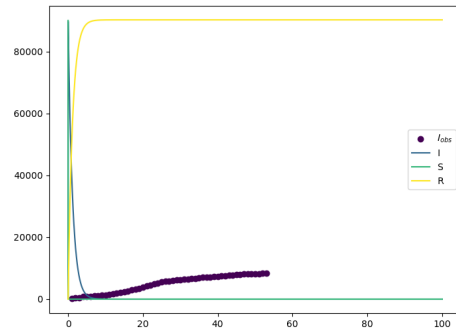


(b) Todas as Curvas

Figura 4: Resultados para best2bin



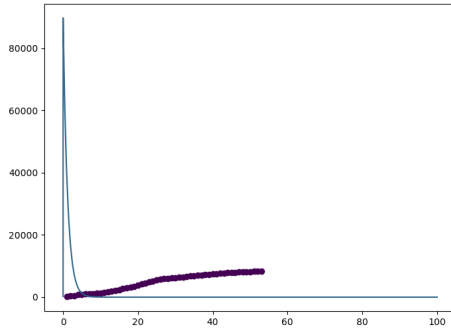
(a) Curva I



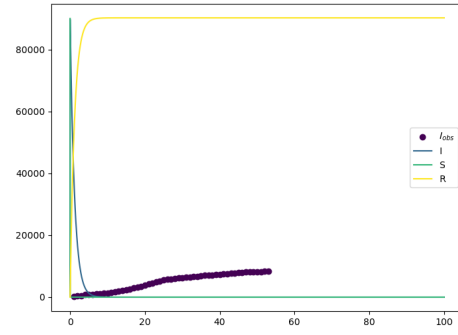
(b) Todas as Curvas

Figura 5: Resultados para rand1bin

Para o ano de 2021, observa-se uma subestimação do número de infectados em relação ao dado observado. Isso ocorre pois o modelo SIR não considera a inclusão de recuperados no grupo de Suscetíveis. De fato, já se sabe que a reinfeção por Covid-19 é um fato importante no comportamento epidemiológico da doença [2], não sendo mapeado pelo modelo em estudo.

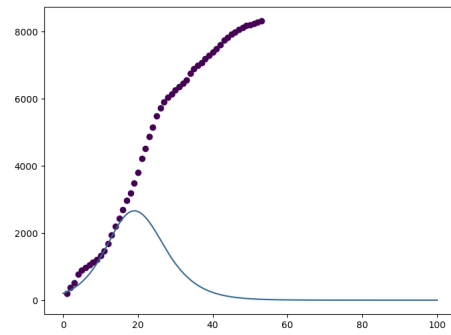


(a) Curva I

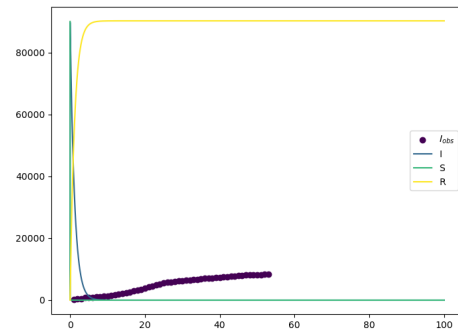


(b) Todas as Curvas

Figura 6: Resultados para rand2bin

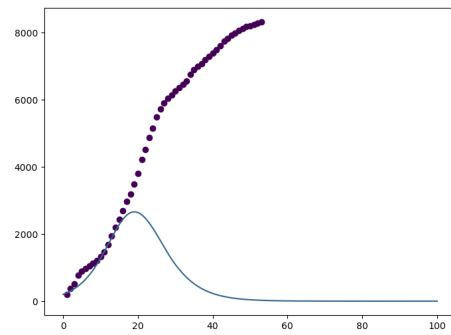


(a) Curva I

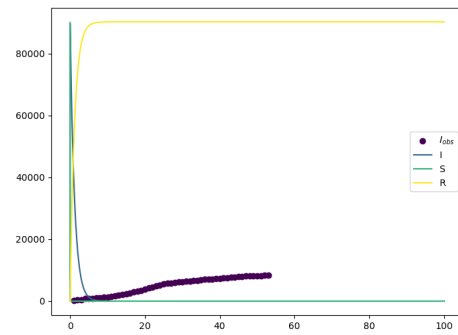


(b) Todas as Curvas

Figura 7: Resultados para best1bin



(a) Curva I



(b) Todas as Curvas

Figura 8: Resultados para best2bin

Referências

- [1] Célia A. Zorzo Barcelos, Eliana X. L. de Andrade, and Maurilio Boaventura. *Métodos Estocásticos de Otimização: Algoritmos Genéticos e Evolução Diferencial*. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, 2011.

- [2] Wellington Manoel da Silva, Maria Eduarda da Silva, Jociéllen Maria Gomes de Lima, Analice Pereira Canejo Ferreira, and Francisca Vanessa de Oliveira. Reinfecção por covid-19: Uma revisão das novas evidências. *Research, Society and Development*, 10, 2021.