# Aboragem estocástica para o Modelo Lotka-Volterra

Rodrigo José Zonzin Esteves

Janeiro de 2025

# 1 Descrição

## 1.1 Introdução

O Modelo Predador-Presa, ou Lotka-Volterra (LV), é descrito pelas Equações Diferenciais Ordinárias 1. A variável $H$ representa a população de presas e $P$ mapeia a população de predadores.

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = rH - aHP \\ \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = bHP - mP \end{cases} \tag{1}$$

Conforme a Figura 1, pode-se mapear os seguintes fenômenos: (1) o nascimento de uma presa depende de uma taxa de reprodução (coeficiente $r$), (2) a queda na população de predadores ocorre conforme uma taxa de mortalidade $m$ e (3) o incremento da população de predadores ocorre devido à natalidade e à predação.

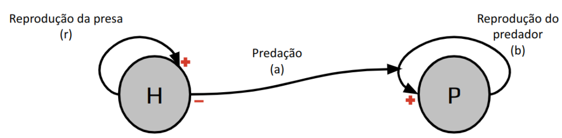



Figura 1: Representação gráfica do modelo Predador-Presa

De forma sucinta, tem-se que:

- Uma presa nasce: depende apenas de $H$ e $r$.
- Um predador morre: depende apenas de $P$ e $b$.
- Um predador se reproduz: depende da taxa de predação $a$, que diminui $H$, e da taxa de reprodução ($b$).

## 1.2 Métodos para a simulação

Simulações Estocásticas são estratégias para modelos computacionais que buscam descrever sistemas dinâmicos sujeitos a incertezas e variações aleatórias. Como exemplo, cita-se os métodos de Monte Carlo costumeiramente utilizado em áreas da física e engenharia para a resolução de problemas numéricos complexos. De forma similar, o Algoritmo de Gillespie foi proposto para a modelagem de processos químicos e biológicos onde eventos discretos e raros ocorrem em intervalos temporais aleatórios. Estratégias como as Cadeias de Markov e Equações Diferenciais Estocásticas também podem ser empregadas neste sentido.

O código 1 apresenta a adaptação do método de Gillespie para a simulação computacional do modelo LV.

```
for k in range(5):
    H = 30          #presa
    P = 5           #predador
    tresult = [0]
```

```python
    hresult = [H]
    presult = [P]


    for t in range(50):
        p = random.rand()

        if(H == 0.0 and P == 0.0): break

        p1 = r*H        #reproducao das presas
        p2 = a*H*p      #predacao
        p3 = m*p        #morte dos predadores
        s = p1+p2+p3

        """ EDO:
            dHdt = rH - aHP
            dPdt = bHP - mP
        """

        #aconteceu reproducao da presa
        #H aumenta 1 individuo
        if p <= p1/s:
            H += 1

        #predacao
        #uma presa morre e um predador nasce
        elif p <= (p1+p2)/s:
            H -= 1
            P += 1

        #morte do predador. Diminui P em 1 individuo
        else:
            P -= 1

        hresult.append(H)
        presult.append(P)
        tresult.append(t)

    hresult = np.array(hresult)
    presult = np.array(presult)
    tresult = np.array(tresult)
```

Listing 1: Modelo Predador-Presa por meio do método de Gillespie

### 1.3 Análise proposta

Analiticamente, se uma taxa de predação é muito baixa e os predadores se reproduzem pouco, espera-se que a população de presas fique estável ou domine o ambiente.

De forma similar, uma taxa de predação muito alta e uma reprodução de presas muito baixa pode levar à morte prematura da população de presas e, em seguida, à morte dos predadores por falta de reprodução-alimentação.

Elenca-se ainda, como hipótese, que uma taxa de predação muito alta associada à uma taxa de reprodução de presas também muito alta pode levar ao equilíbrio populacional entre as duas espécies.

Dessa forma, para se avaliar diferentes hipóteses captadas pelo modelo LV, utilizando-se a estratégia apresentada na seção 1.2, testou-se combinações dos coeficientes $a$, $r$ e $m$ para estados de variáveis "alto"(A) e "baixo"(B). A Tabela 1 apresenta os coeficientes testados e os resultados esperados.

## 2 Resultados

A Figura 2 apresenta os resultados obtidos após as simulações.

Conforme se observa na Figura 2a, para o cenário 0, a hipótese elencada se confirma: tanto as populações de presa quanto de predadores estão em equilíbrio, isto é, não há domínio de uma sob a outra. Para o

| Cenário | $a$ | $r$ | $m$ | Hipótese |
|---|---|---|---|---|
| 0 | A | A | A | Apesar de muita predação, espera-se uma compensação pela alta mortalidade. Equilíbrio da população. |
| 1 | A | A | B | Domínio dos predadores devido à pouca mortalidade. |
| 2 | A | B | A | Morte prematura das presas e morte consequente dos predadores. |
| 3 | A | B | B | Morte prematura das presas e morte consequente dos predadores (ainda mais rápida). |
| 4 | B | A | A | Domínio das pesas em razão da baixa predação. |
| 5 | B | A | B | Domínio das presas e morte dos preadores. |
| 6 | B | B | A | Indeterminado. |
| 7 | B | B | B | Indeterminado. |

Tabela 1: Cenários hipotéticos do modelo LV

cenário 1, conforme teorizado, observou-se que ambas as espécies sobrevivem, mas com um número maior de predadores em relação ao cenário anterior. Para aquele cenário, o número máximo de predadores não ultrapassou 25, enquanto neste chegou a 30. Isso ocorre devido à menor mortalidade dos predadores.

A Figura 2c apresenta um resultado interessante: das 5 execuções pretendidas, apenas 3 ocorreram. Isso ocorre pois, considerando uma taxa tão baixa de reprodução das presas, elas logo chegaram a zero e o *loop for* não foi executado.

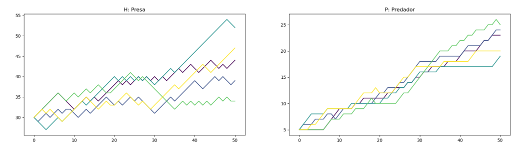
O cenário 4 apresentou o resultados esperado: em razão da baixa reprodução e alta natalidade, as presas morrem muito rapidamente e logo em seguida os predadores também apresentam uma retração populacional. Possivelmente, para um tempo maior do que 50, chegar-se-á a zero indivíduos predadores.

Da mesma forma, o cenário 5 favoreceu o crescimento acelerado das presas e a morte dos predadores, que se deve à baixa natalidade (Figura 2f).

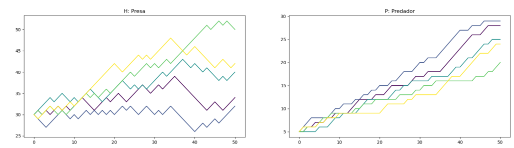
Os cenários 6 e 7 apresentaram comportamentos distintos. Enquanto no primeiro há morte prematura das presas, no segundo há equilíbrio populacional. Constatou-se que o cenário 7 é equivalente ao cenário 0, já que todas as taxas apresentam uma mesma proporção ($^a/_r = ^r/_m = 1$). Esse fato só ficou evidenciado após a exeução das simulações.

# 3 Conclusão

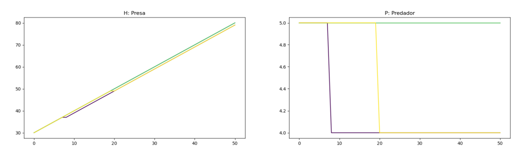
Os resultados obtidos validam as hipóteses formuladas e demonstram a capacidade dos métodos estocásticos de capturar fenômenos complexos em sistemas dinâmicos. Cenários como 0 e 7 evidenciaram equilíbrio entre as espécies, destacando que proporções específicas entre as taxas podem estabilizar o sistema. Por outro lado, os cenários 2 e 3 mostram como uma reprodução insuficiente das presas leva a uma dinâmica populacional de estabilidade crítica. Os cenários 4 e 6 destacam a interdependência entre as espécies, já que a morte prematura das presas levou à extinção dos predadores. O cenário 5 confirmou a hipótese de que uma baixa taxa de predação leva ao domínio das presas no ambiente quando também se observa uma baixa taxa de reprodução dos predadores. Dessa forma, constata-se que o uso de estratégias estocásticas nos processos populacionais reproduz comportamentos realistas, corroborando a importância de tais abordagens para modelar este e outros fenômenos científicos.



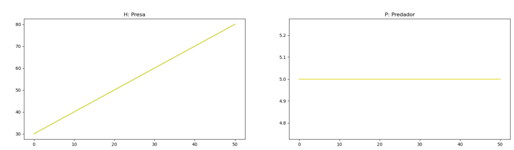

(a) Cenário 0



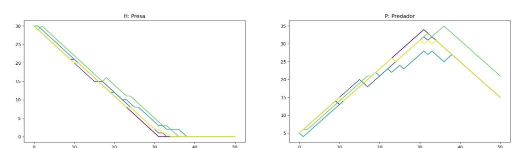

(b) Cenário 1



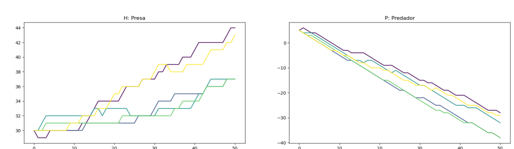

(c) Cenário 2



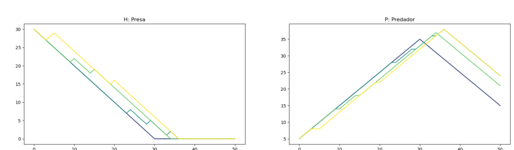

(d) Cenário 3



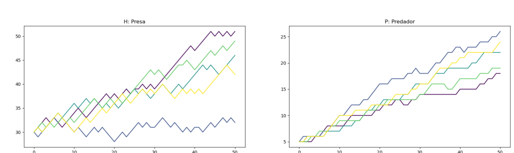

(e) Cenário 4




(f) Cenário 5




(g) Cenário 6




(h) Cenário 7

Figura 2: Resultados