DCA0204, Módulo 8
Grafos

Daniel Aloise

baseado em slides do prof. Leo Liberti, École Polytechnique, França

DCA, UFRN

Sumário

- Definições
- Operações em grafos
- Problemas combinatórios em grafos
- Problemas fáceis e difíceis
- Modelagem para um método de solução genérico

Definições

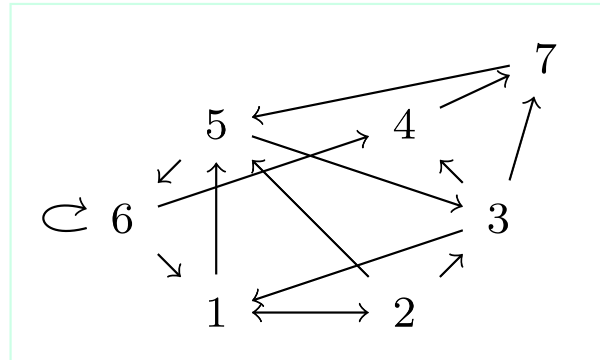
Motivação

A estrutura de dados final

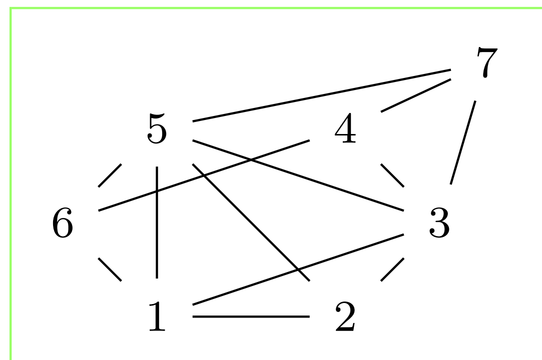
Toda vez que você vir arcos conectando caixas, círculos ou pontos pretos em um curso, você pode pensar em grafos e dígrafos!

Grafos e dígrafos

- Dígrafo $G = (V, A)$: relação A sob o conjunto V
  - V: conjunto de **nós**
  - A: conjunto de **arcos** (u, v) com $u, v \in V$



- Grafo $G = (V, E)$: relação simétrica E sob o conjunto V
  - V: conjunto de **vértices**
  - E: conjunto de **arestas** $\{u, v\}$ com $u, v \in V$



- (Dí)grafos **simples**: a relação é *irreflexiva*
  (I.e., *para todo* $v \in V$, v não está relacionado a ele mesmo)

Observações

- Apresentaremos principalmente resultados para grafos **não-dirigidos**
- A **maioria** dos resultados se extende trivialmente para grafos **dirigidos** (*dígrafos*)

Exemplo

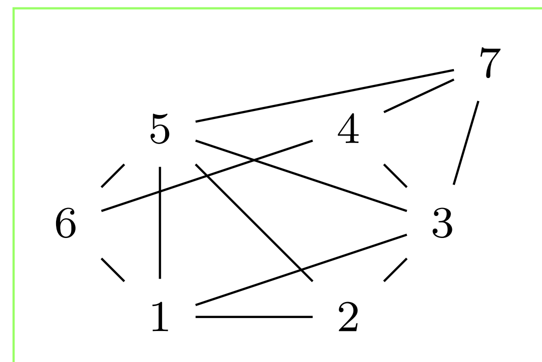
- Se G é um grafos, indicamos o seu conjunto de vértices por $V(G)$ e o seu conjunto de arcos por $E(G)$
- **Exemplo de extensão para dígrafos**:
  Se G é um dígrafo, indicamos o seu conjunto de nós por $V(G)$ e o seu conjunto de arcos por $A(G)$

Stars

Stars: conjunto de nós/vértices ou arcos/arestas adjacente a um dado nó

$\forall v \in V(G)$,

- Se G é não-dirigido,

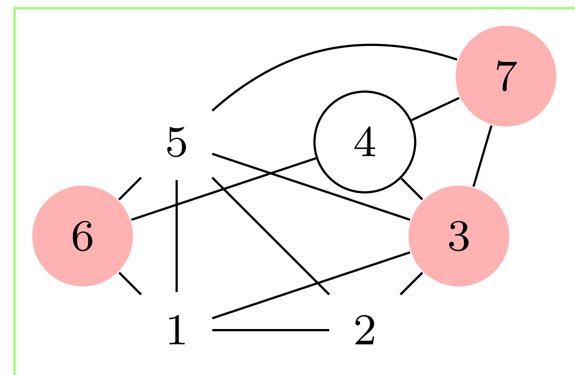


Stars

Stars: conjunto de nós/vértices ou arcos/arestas adjacente a um dado nó

$\forall v \in V(G)$,

- Se G é não-dirigido,
  - $N(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E(G)\}$

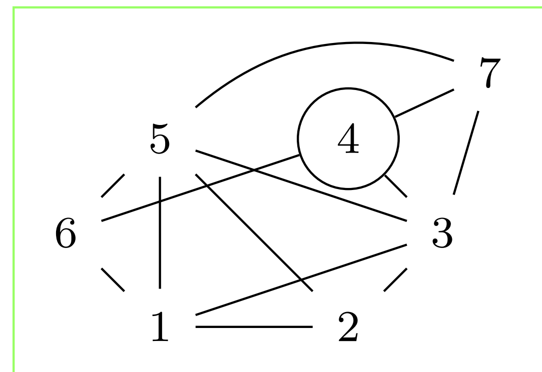


Stars

Stars: conjunto de nós/vértices ou arcos/arestas adjacente a um dado nó

$\forall v \in V(G)$,

- Se G é não-dirigido,
  - $N(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E(G)\}$
  - $\delta(v) = \{\{u, v\} \mid u \in N(v)\}$

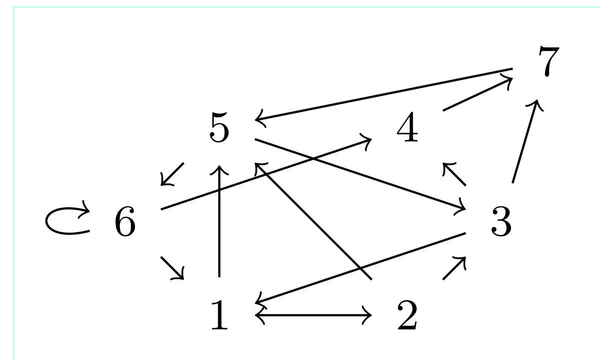


Stars

Stars: conjunto de nós/vértices ou arcos/arestas adjacente a um dado nó

$\forall v \in V(G)$,

- Se G é não-dirigido,
  - $N(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E(G)\}$
  - $\delta(v) = \{\{u, v\} \mid u \in N(v)\}$
- Se G é dirigido,

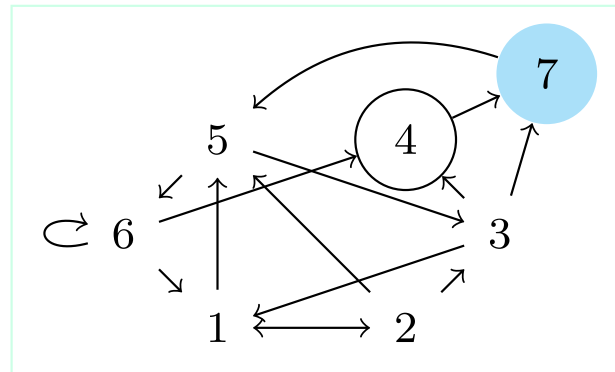


Stars

Stars: conjunto de nós/vértices ou arcos/arestas adjacente a um dado nó

$\forall v \in V(G)$,

- Se G é não-dirigido,
  - $N(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E(G)\}$
  - $\delta(v) = \{\{u, v\} \mid u \in N(v)\}$
- Se G é dirigido,
  - $N^+(v) = \{u \in V \mid (v, u) \in E(G)\}$

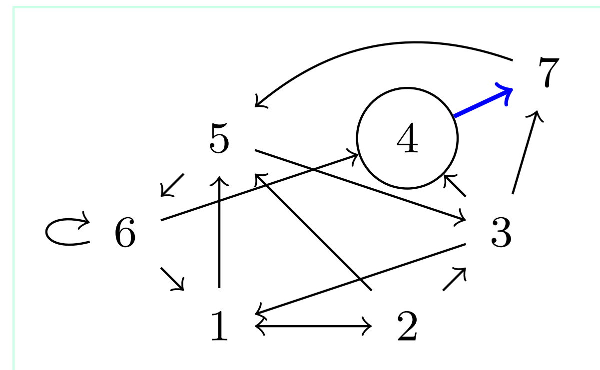


Stars

Stars: conjunto de nós/vértices ou arcos/arestas adjacente a um dado nó

$\forall v \in V(G)$,

- Se G é não-dirigido,
  - $N(v) = \{u \in V \mid \{u,v\} \in E(G)\}$
  - $\delta(v) = \{\{u,v\} \mid u \in N(v)\}$
- Se G é dirigido,
  - $N^{+}(v) = \{u \in V \mid (v,u) \in E(G)\}$
  - $\delta^{+}(v) = \{(v,u) \mid u \in N^{+}(v)\}$

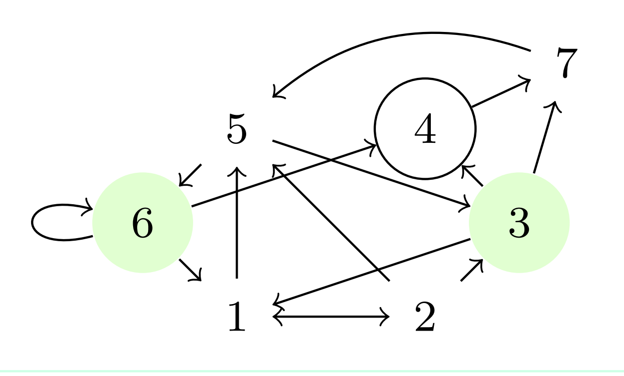


Stars

Stars: conjunto de nós/vértices ou arcos/arestas adjacente a um dado nó

$\forall v \in V(G)$,

- Se G é não-dirigido,
  - $N(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E(G)\}$
  - $\delta(v) = \{\{u, v\} \mid u \in N(v)\}$
- Se G é dirigido,
  - $N^+(v) = \{u \in V \mid (v, u) \in E(G)\}$
  - $\delta^+(v) = \{(v, u) \mid u \in N^+(v)\}$
  - $N^-(v) = \{u \in V \mid (u, v) \in E(G)\}$

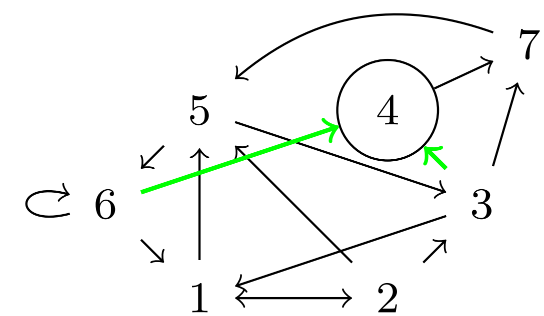


Stars

Stars: conjunto de nós/vértices ou arcos/arestas adjacente a um dado nó

$\forall v \in V(G)$,

- Se G é não-dirigido,
  - $N(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E(G)\}$
  - $\delta(v) = \{\{u, v\} \mid u \in N(v)\}$
- Se G é dirigido,
  - $N^+(v) = \{u \in V \mid (v, u) \in E(G)\}$
  - $\delta^+(v) = \{(v, u) \mid u \in N^+(v)\}$
  - $N^-(v) = \{u \in V \mid (u, v) \in E(G)\}$
  - $\delta^-(v) = \{(u, v) \mid u \in N^-(v)\}$



Stars

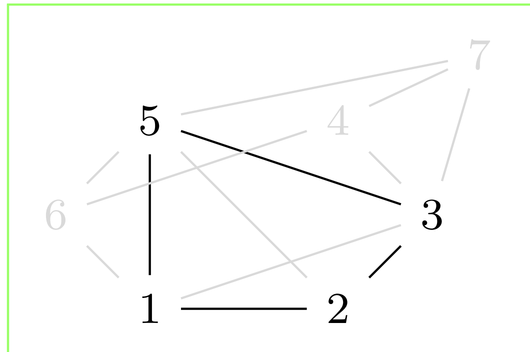
Stars: conjunto de nós/vértices ou arcos/arestas adjacente a um dado nó

$\forall v \in V(G)$,

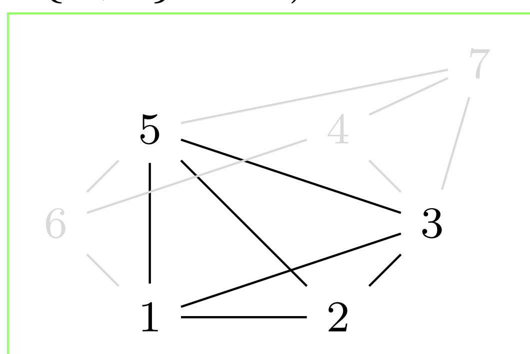
- Se G é não-dirigido,
  - $N(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E(G)\}$
  - $\delta(v) = \{\{u, v\} \mid u \in N(v)\}$
- Se G é dirigido,
  - $N^+(v) = \{u \in V \mid (v, u) \in E(G)\}$
  - $\delta^+(v) = \{(v, u) \mid u \in N^+(v)\}$
  - $N^-(v) = \{u \in V \mid (u, v) \in E(G)\}$
  - $\delta^-(v) = \{(u, v) \mid u \in N^-(v)\}$
- $|N(v)| =$**grau**, $|N^+(v)| =$**grau de saída**, $|N^-(v)| =$**grau de entrada** of v

Subgrafos

- Um grafo $H = (U, F)$ é um **subgrafo** de $G = (V, E)$ se $U \subseteq V$, $F \subseteq E$ e $\forall \{u, v\} \in F\ (u, v \in U)$



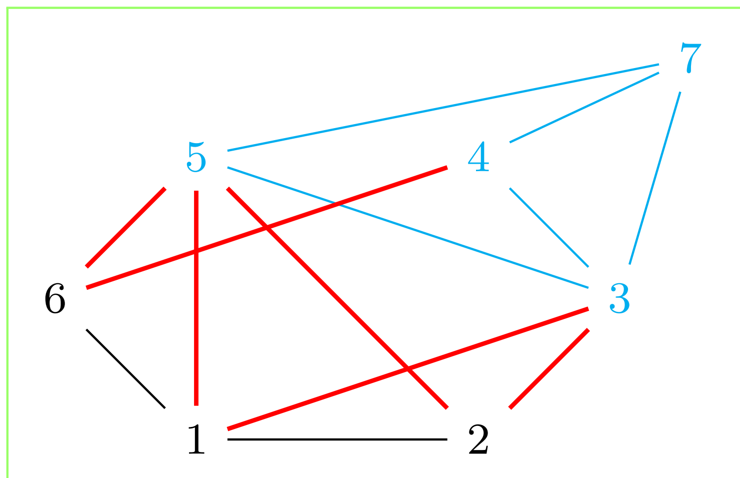
- Um subgrafo $H = (U, F)$ de $G = (V, E)$ é **gerador** se $U = V$
- Um subgrafo $H = (U, F)$ de $G = (V, E)$ é **induzido** por U se $\forall u, v \in U\ (\{u, v\} \in E \rightarrow \{u, v\} \in F)$



Notação de subgrafo induzido: $H = G[U]$

Corte

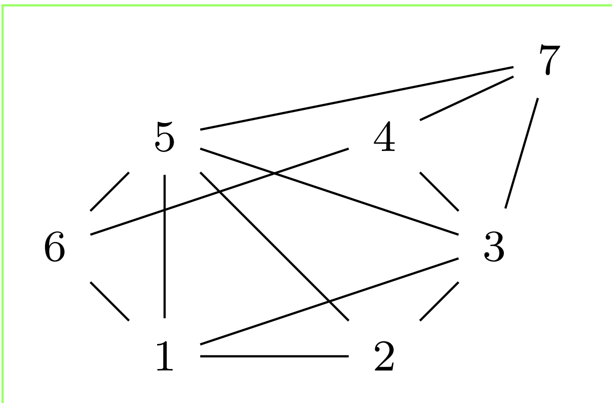
- Seja $H = (U, F)$ um subgrafo de $G = (V, E)$ (i.e. $U \subsetneq V$)
- O **corte** $\delta(H) = \left(\bigcup_{u \in U} \delta(u) \right) \setminus F$
  é o conjunto de arestas “separando” U e $V \setminus U$
- Ex. seja $U = \{1, 2, 6\}$ e $H = G[U]$, então $\delta(H)$ é mostrado pelas arestas vermelhas abaixo



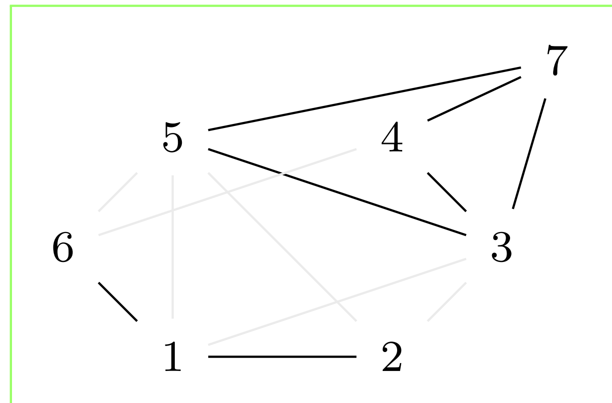
- Difinições similares são válidas para **cortes dirigidos**
- Se G é dirigido, $\delta(U) = \delta(V \setminus U)$ para todo $U \subseteq V(G)$

Conectividade

- Um grafo é **conexo** se não existem cortes (não-triviais) vazios.



Connected

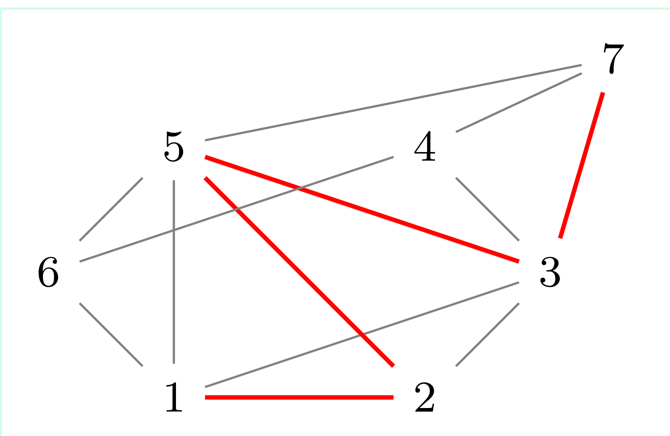


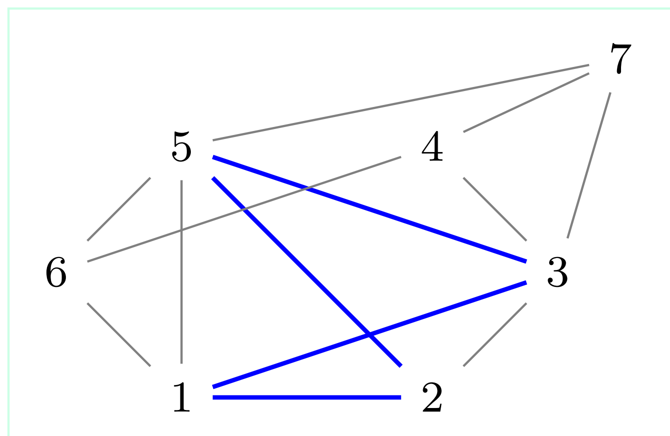
Desconexo: $\delta(\{1, 2, 6\}) = \varnothing$

- Cada subgrafo conexo maximal de um grafo é uma **componente conexa**
- A maioria dos algoritmos em grafos assume que o grafo de entrada é conexo, senão eles são aplicados para cada componente conexa

Caminhos e ciclos

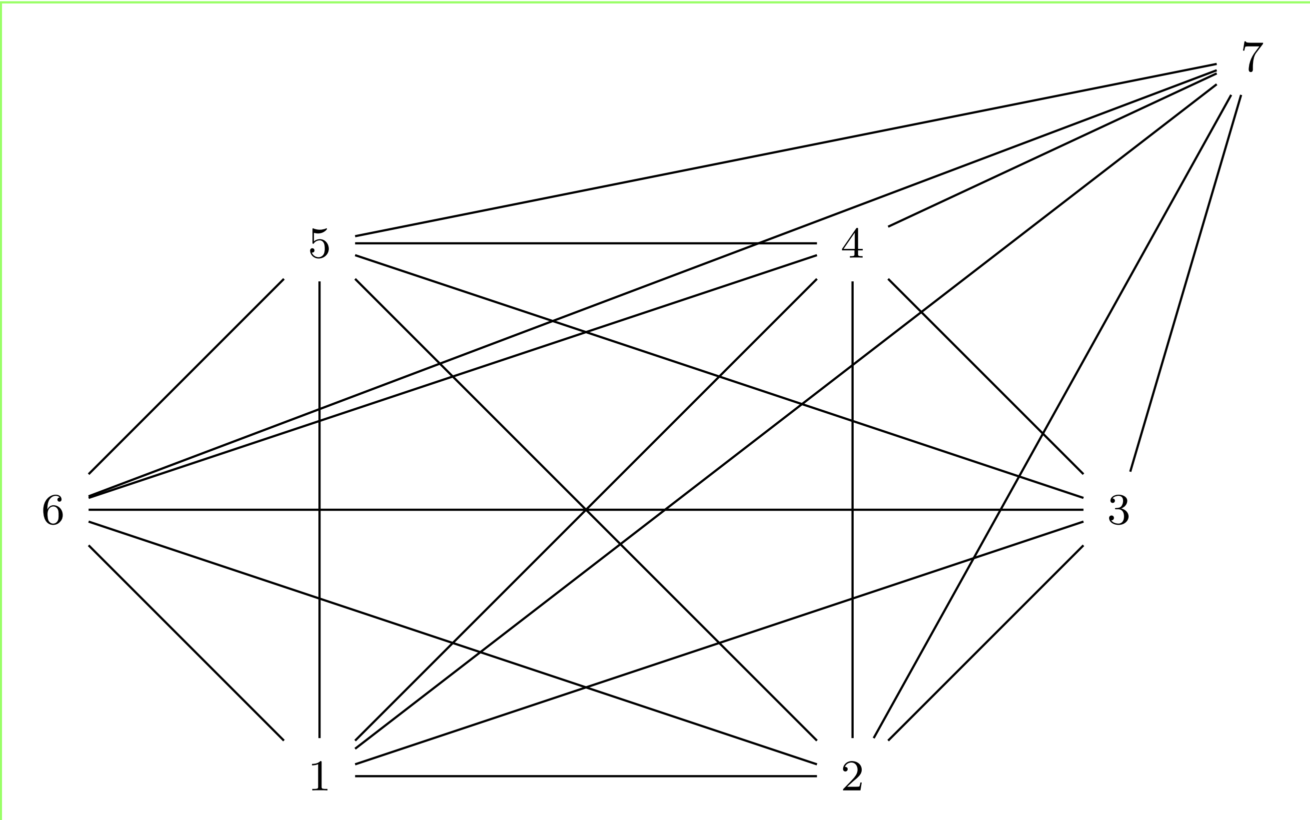
- Seja G um grafo e $u, v \in V(G)$
- Um **caminho simples** P de u até v em G é um subgrafo conexo de G s.t.:
  1. cada vértice w em P diferente de u, v tem $|N(w)| = 2$
  2. se $u \neq v$ então $|N(u)| = |N(v)| = 1$
  3. se $u = v$ então ou $E(P) = \varnothing$ ou $|N(u)| = |N(v)| = 2$
- Um caminho de u até v é denotado $u \to v$
- Se P é um caminho $u \to v$, então u, v são denominadas **extremidades** do caminho
- Um **ciclo simples** é um caminho simples com extremidades iguais





Grafo completo

- O **grafo completo** K_n em n vértices tem todas as possíveis arestas

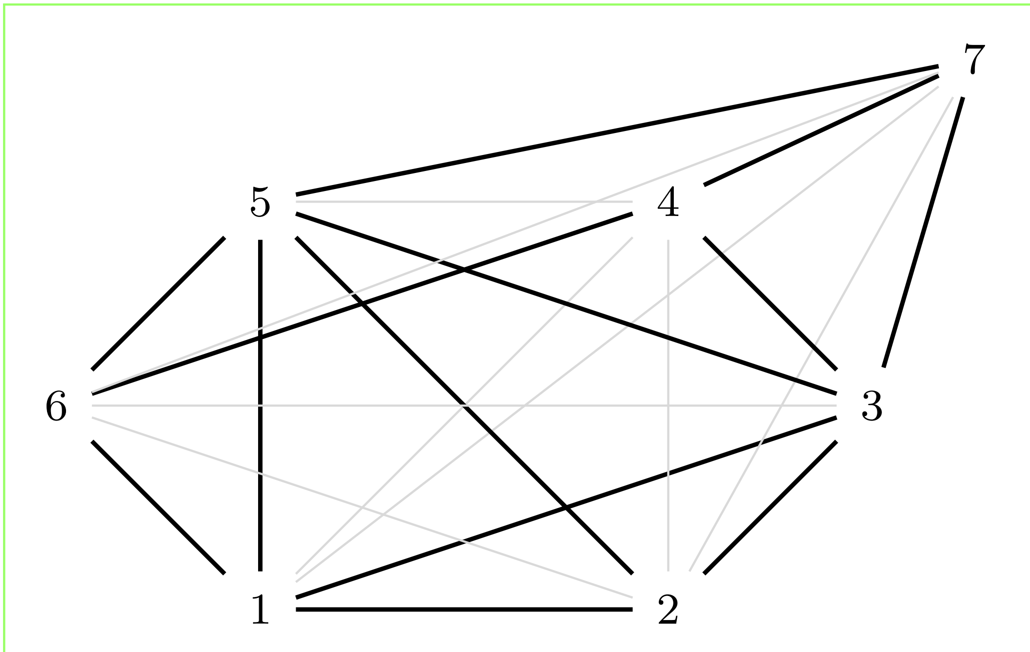


- K_n é também chamado n-**clique**; um grafo completo em um conjunto U de vértices é denotado por $K(U)$

Grafo complementar

- Dado $G = (V, F)$ com $|V| = n$, o **complemento** de G é $\bar{G} = (V, E(K_n) \setminus F)$

G

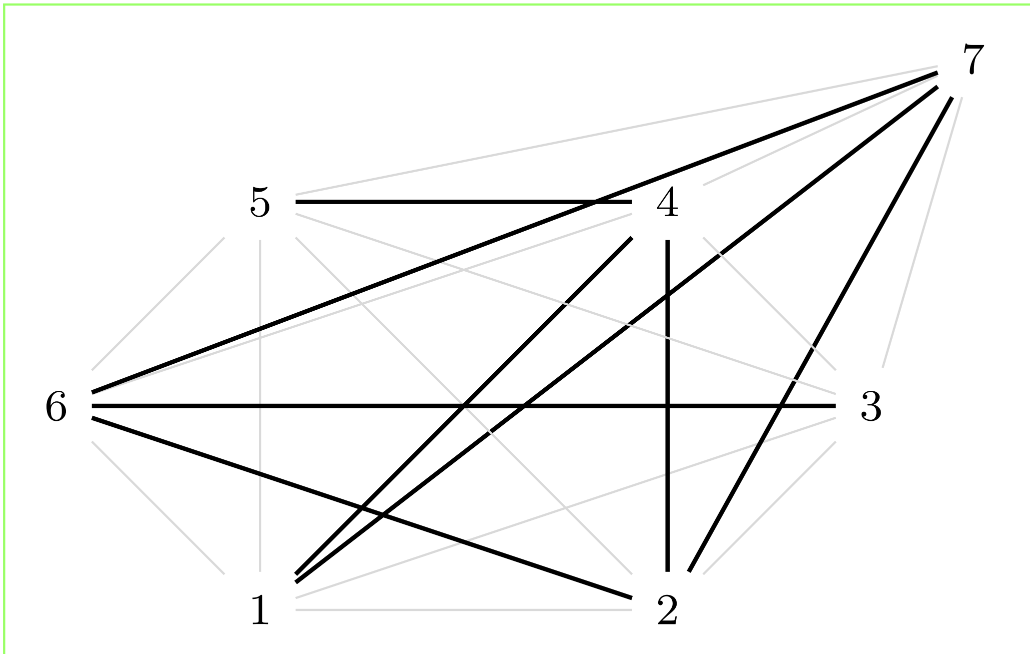


- O complemento de K_n é o **grafo vazio** $(V, \varnothing)$ em n vértices

Grafo complementar

- Dado $G = (V, F)$ com $|V| = n$, o **complemento** de G é $\bar{G} = (V, E(K_n) \setminus F)$

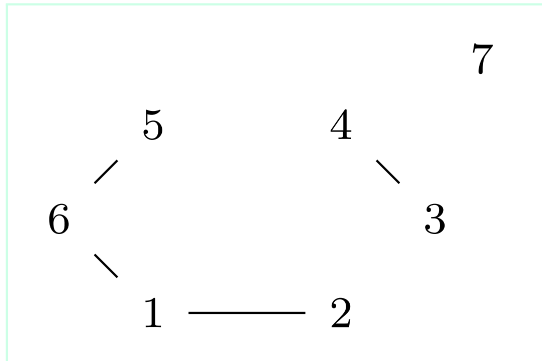
$\bar{G}$



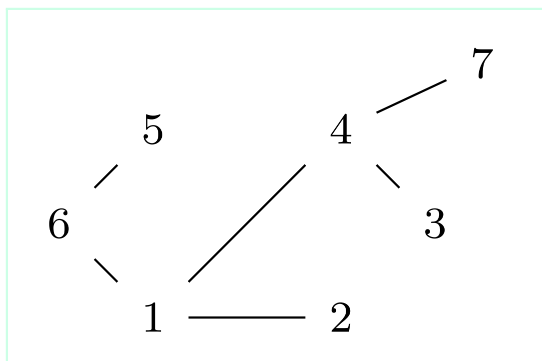
- O complemento de K_n é o **grafo vazio** $(V, \emptyset)$ em n vértices

Florestas e árvores

- Uma **floresta** é um grafo sem ciclos



- Uma **árvore** é uma floresta conexa



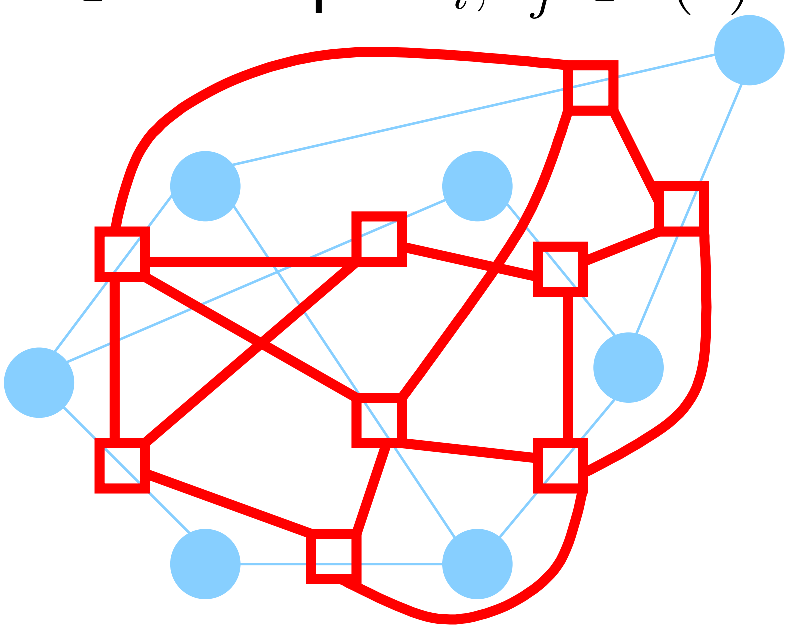
- Se uma árvore é um subgrafo gerador de outro grafo G, ela é denominada uma **árvore geradora**

Grafo linha

- Dado um grafo $G = (V, E)$ onde $E = \{e_1, \dots, e_m\}$
- O **grafo linha** de G é

$$L(G) = (E, \{\{e_i, e_j\} \mid e_i \cap e_j \neq \varnothing\})$$

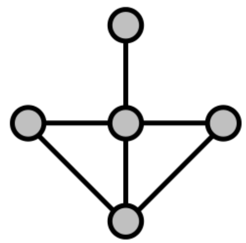
- Todo vértice de $L(G)$ é uma aresta de G
- Dois vértices e_i, e_j de $L(G)$ são adjacentes se existe $v \in V$ tal que $e_i, e_j \in \delta(v)$



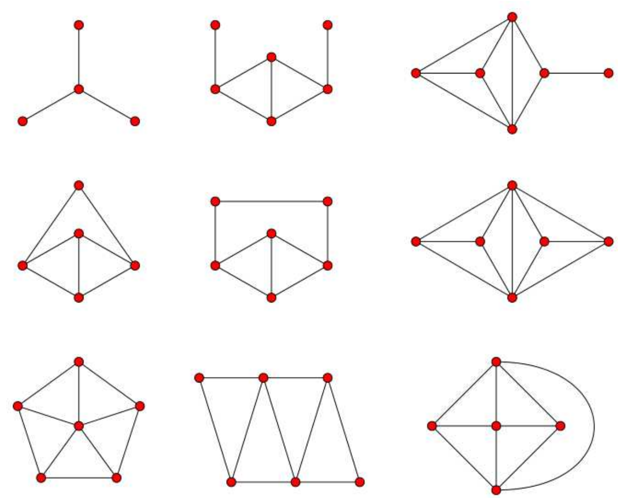
Propriedade: o grau $|N_{L(G)}(e)|$ de um vértice $e = \{u, v\}$ de $L(G)$ é $|N_G(u)| + |N_G(v)| - 2$.

Grafo linha

- Tente encontrar o grafo original do grafo linha abaixo



- Nove grafos minimais de *Beineke*



- Um grafo é um grafo linha sse ele não possui um destes nove grafos como subgrafo induzido.

Operações em grafos

Adição e remoção

- Adicione um vértice v:

  atualize $V \leftarrow V \cup \{v\}$

- Adicione um arco $e = \{u, v\}$:

  adicione vértices u, v, atualize $E \leftarrow E \cup \{e\}$

- Remova uma aresta $e = \{u, v\}$:

  atualize $E \leftarrow E \setminus \{e\}$

- Remova um vértice v:

  atualize $V \leftarrow V \setminus \{v\}$ e $E \leftarrow E \setminus \delta(v)$

Problemas combinatórios em grafos

O problema do subgrafo

- Seja $\mathbb{G}$ a classe de todos os grafos
- Para um conjunto de proposições válidas $P(G)$ (para $G \in \mathbb{G}$), um problema típico de decisão em teoria dos grafos é:

  PROBLEMA DE SUBGRAFO (SP$_P$). Dado um grafo G, ele tem um subgrafo H com propriedade P?

- **Problema de decisão**: questão do tipo SIM/NÃO para qualquer instância do problema (i.e., a entrada)
- Requer que problemas de decisão sempre forneçam um **certificado** (uma prova que certifica a resposta)
- Ex. se $P(H) \equiv (H$ é um ciclo$)$ o certificado é o ciclo
- **NP** é a classe de problemas de decisão cujos certificados para instâncias SIM podem ser verificados em tempo polinomial com respeito ao tamanho da instância.

Problemas de otimização em grafos

- Para a maioria dos problemas de decisão em grafos existe um *problema de otimização* correspondente
- Seja $\mu : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ uma função de “medida” para grafos
- Ex. μ pode ser o número de vértices, ou de arestas

PROBLEMA DE SUBGRAFO, *versão de otimização* ($\mathrm{SP}_{P,\mu}$). Dado um grafo G, ele tem um subgrafo H com propriedade P tendo uma medida mínima/máxima μ?

- Dada uma propriedade P e uma medida do grafo μ, o **problema de otimização** considera todas as instâncias possíveis.

Problemas fáceis

- Seja **P** a classe de problemas de decisão ou de otimização que podem ser resolvidos em tempo polinomial.
- Chamamos os problemas em **P** de "fáceis"
  - ÁRVORE GERADORA MÍNIMA

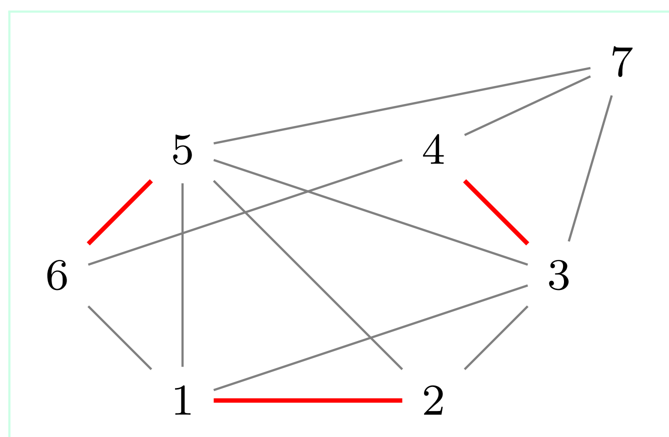
    Vista no Módulo 6
  - PROBLEMA DO CAMINHO MAIS CURTO de um vértice v para todos os outros vértices

    será visto no Módulo 9
  - PROBLEMA DO MATCHING MÁXIMO (MATCHING)

Matching: subgrafo dado por um conjunto de arestas mutualmente não-adjacentes

Um matching máximo M,

$\mu(M) = |E(M)|$

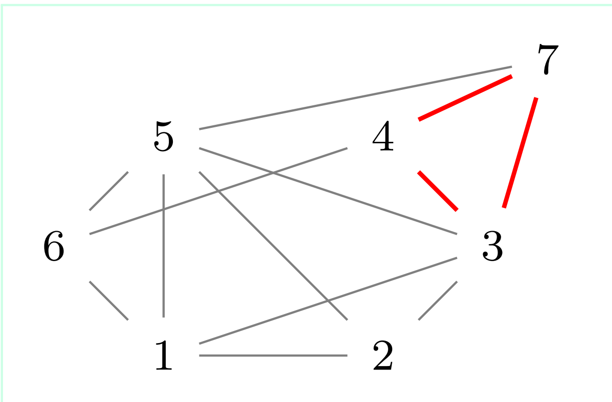


Problemas (mais) difíceis

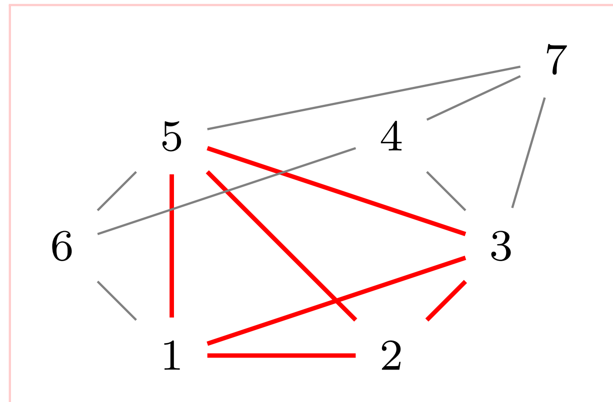
Clique máximo

PROBLEMA DE CLIQUE (CLIQUE). Dado um grafo G, qual é o maior n tal que G tem um K_n como um subgrafo?

- In CLIQUE, $\mu(H) = |V(H)|$ and $P(H) \equiv H = K(V(H))$



Um clique em G



O maior clique em G

- Exemplo de aplicação: Redes sociais
  - Pessoas em uma clique podem indicar um grupo de colegas em uma sala de aula ou uma célula terrorista

Clique e NP-completude

- A versão de decisão da CLIQUE é:

  PROBLEMA DA k-CLIQUE (k-CLIQUE). Dado um grafo G e um inteiro $k > 0$, G tem K_k como um subgrafo?

- Considere o resultado a seguir (que não iremos provar) Thm.

  [Karp 1972] Se CLIQUE $\in$ **P** então **P** $=$ **NP**

- Qualquer problema de decisão para o qual tal resultado é válido é chamado **NP**-completo

- Não se sabe se problemas **NP**-completos podem ser resolvidos em tempo polinomial; o palpite geral é que NÃO

Resolvendo problemas NP-completos

- Essencialmente, provar a **NP**-completude de um problema é igual a dizer que "ele é realmente difícil"

  Se ele fosse fácil, qualquer problema em **NP** seria fácil, o que é improvável: portanto ele é provavelmente difícil mesmo

- Métodos de solução para problemas **NP**-completos incluem:
  - algoritmos **exatos** mas com complexidade **exponencial** de pior caso
  - **heurísticas**

    sempre que oferecem uma resposta SIM elas fornecem um certificado, mas não há garantia de que elas forneçam uma resposta NÃO em um horizonte de tempo finito

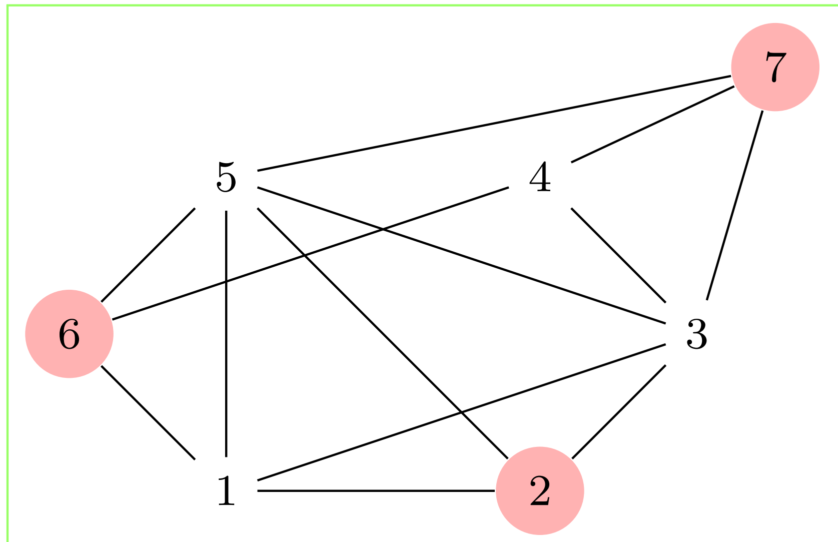
- Um problema de otimização é dito **NP-difícil** se caso ele seja resolvido em tempo polinomial $\Rightarrow$ **P** $=$ **NP**.

Conjuntos Independentes

- Um conjunto independente CI de um grafo $G = (V, E)$ é um subconjunto $U \subseteq V$ tal que $\forall u, v \in U \ (\{u, v\} \notin E)$
  Thm.

  U é um CI em G se e somente se $\bar{G}[U]$ é uma clique

  um CI em G



- Problema de decisão: k-CI

  Dados G e $k \in \mathbb{N}$, existe um CI $U \subseteq V(G)$ de tamanho k?

- Problema de otimização: CI

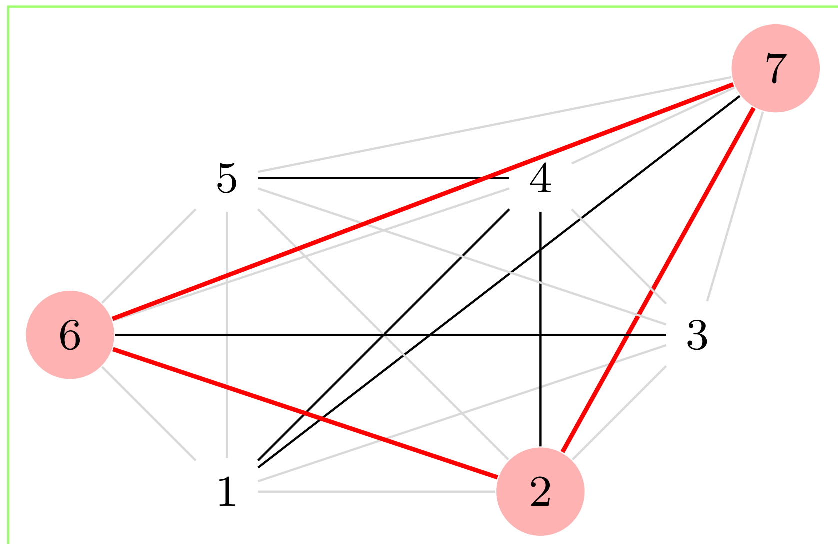
  Dado G, encontre o CI de G de tamanho máximo

Conjuntos Independentes

- Um conjunto independente **CI** de um grafo $G = (V, E)$ é um subconjunto $U \subseteq V$ tal que $\forall u, v \in U \ (\{u, v\} \notin E)$
Thm.

U é um CI em G se e somente se $\bar{G}[U]$ é uma clique

$\bar{G}[U]$ *é uma clique*



- Problema de decisão: k-CI

Dados G e $k \in \mathbb{N}$, existe um CI $U \subseteq V(G)$ de tamanho k?

- Problema de otimização: CI

Dado G, encontre o CI de G de tamanho máximo

NP-completude de k-CI

Thm.

k-CI é **NP**-completo

Proof

Considere uma instância (G, k) de k-CLIQUE

O grafo complementar $\bar{G}$ pode ser obtido em tempo polinomial $(*)$

É fácil mostrar que $\bar{\bar{G}} = G$ $(**)$

Devido a $(**)$ e o thm. anterior,

(G, k) é uma instância SIM de k-CLIQUE sse $(\bar{G}, k)$ é uma instância SIM de k-CI

Por $(*)$, se k-CI $\in$ **P** então k-CLIQUE $\in$ **P**

NP-completude de k-CLIQUE, k-CI $\in$ **P** implica **P** $=$ **NP**

Portanto, k-CI é **NP**-completo

- Como demonstrar que um problema $\mathcal{P}$ é **NP**-completo:
  - Pegue outro problema sabidamente **NP**-completo $\mathcal{Q}$ "similar" a $\mathcal{P}$
  - Transforme em tempo polinom. uma instância de $\mathcal{Q}$ em uma instância de $\mathcal{P}$
  - Mostre que a transformação preserva a resposta SIM/NÃO

Heurística CI

- O método **guloso** a seguir encontra um CI *maximal*

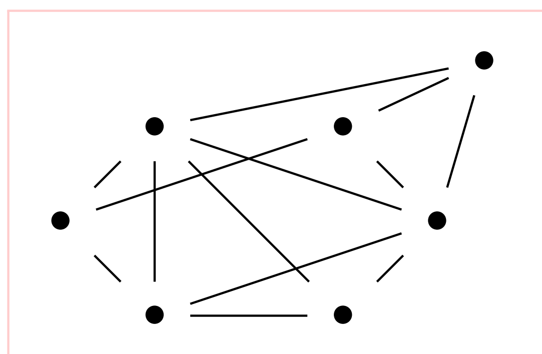
$U = \varnothing$;
ordene V por valores crescentes de $|N(v)|$;

while $V \neq \varnothing$ **do**
  $v = \min V$;
  $U \leftarrow U \cup \{v\}$;
  $V \leftarrow V \setminus (\{v\} \cup N(v))$
end while

- Pior caso: $O(n)$ (dado por um grafo sem arestas)

sequência de graus

$(3, 3, 3, 3, 4, 5, 5)$



Heurística CI

- O método **guloso** a seguir encontra um CI *maximal*

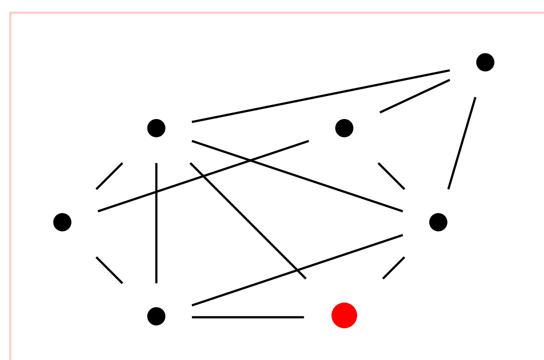
$U = \varnothing$;
ordene V por valores crescentes de $|N(v)|$;

while $V \neq \varnothing$ **do**
  $v = \min V$;
  $U \leftarrow U \cup \{v\}$;
  $V \leftarrow V \setminus (\{v\} \cup N(v))$
end while

- Pior caso: $O(n)$ (dado por um grafo sem arestas)

selecione $\min V$

coloque-o em U



Heurística CI

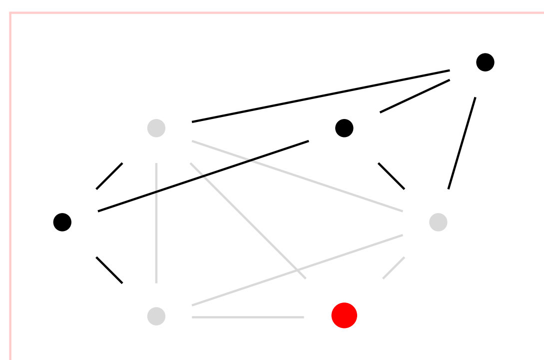
- O método **guloso** a seguir encontra um CI *maximal*

1: $U = \varnothing$;
2: ordene V por valores crescentes de $|N(v)|$;

3: **while** $V \neq \varnothing$ **do**
4: $\quad v = \min V$;
5: $\quad U \leftarrow U \cup \{v\}$;
6: $\quad V \leftarrow V \setminus (\{v\} \cup N(v))$
7: **end while**

- Pior caso: $O(n)$ (dado por um grafo sem arestas)

remova v e sua estrela de V



Heurística CI

- O método **guloso** a seguir encontra um CI *maximal*

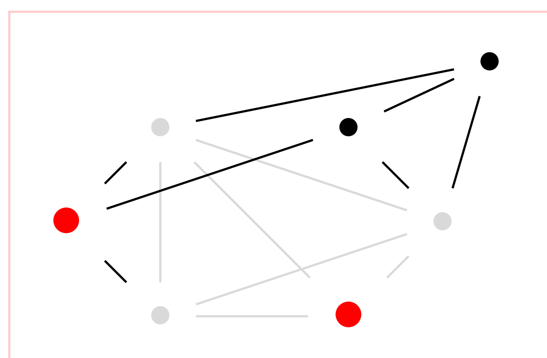
  $U = \varnothing$;
  ordene V por valores crescentes de $|N(v)|$;

  while $V \neq \varnothing$ **do**
      $v = \min V$;
      $U \leftarrow U \cup \{v\}$;
      $V \leftarrow V \setminus (\{v\} \cup N(v))$
  end while

- Pior caso: $O(n)$ (dado por um grafo sem arestas)

selecione $\min V$

coloque-o em U



Heurística CI

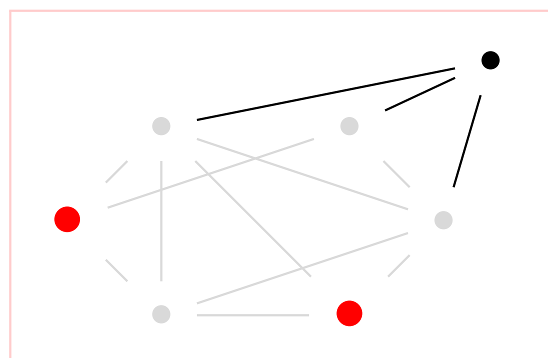
- O método **guloso** a seguir encontra um CI *maximal*

```
U = ∅;
ordene V por valores crescentes de |N(v)|;

while V ≠ ∅ do
    v = min V;
    U ← U ∪ {v};
    V ← V ∖ ({v} ∪ N(v))
end while
```

- Pior caso: $O(n)$ (dado por um grafo sem arestas)

remova v e sua estrela de V



Heurística CI

- O método **guloso** a seguir encontra um CI *maximal*

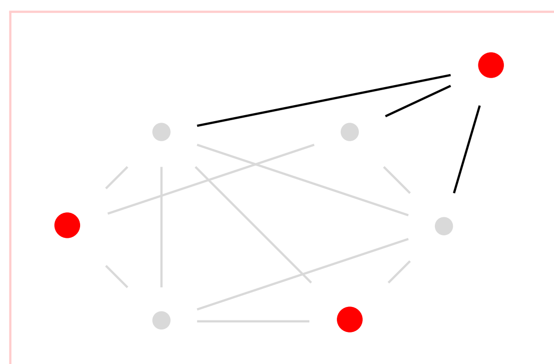
```
U = ∅;
ordene V por valores crescentes de |N(v)|;

while V ≠ ∅ do
   v = min V;
   U ← U ∪ {v};
   V ← V ∖ ({v} ∪ N(v))
end while
```

- Pior caso: $O(n)$ (dado por um grafo sem arestas)

selecione $\min V$

coloque-o em U



Heurística CI

- O método **guloso** a seguir encontra um CI *maximal*

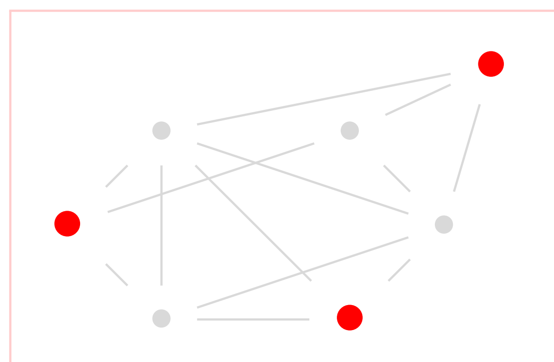
$U = \varnothing$;
ordene V por valores crescentes de $|N(v)|$;

while $V \neq \varnothing$ **do**
  $v = \min V$;
  $U \leftarrow U \cup \{v\}$;
  $V \leftarrow V \setminus (\{v\} \cup N(v))$
end while

- Pior caso: $O(n)$ (dado por um grafo sem arestas)

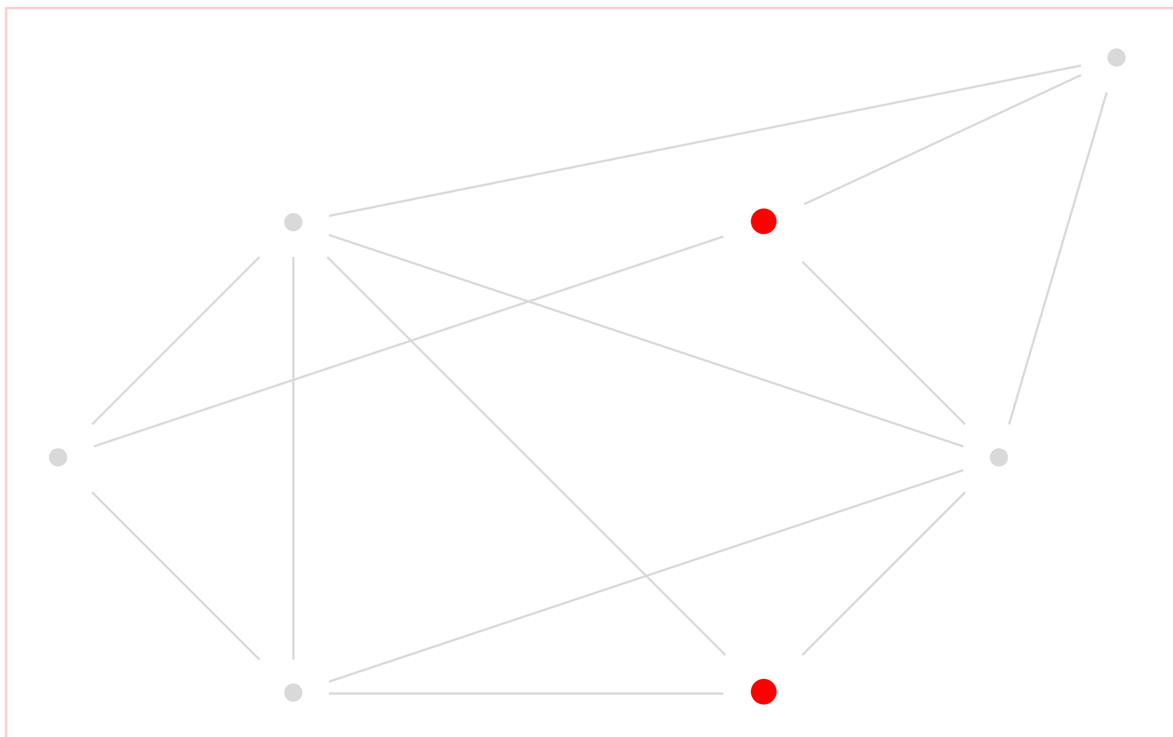
remova v e sua estrela de V

stop: CI maximal



Heurística falha

- O algoritmo acima pode falhar em encontrar um CI <u>máximo</u>
- Ao se escolher o segundo elemento de U, ao invés do vértice mais à esquerda, temos:

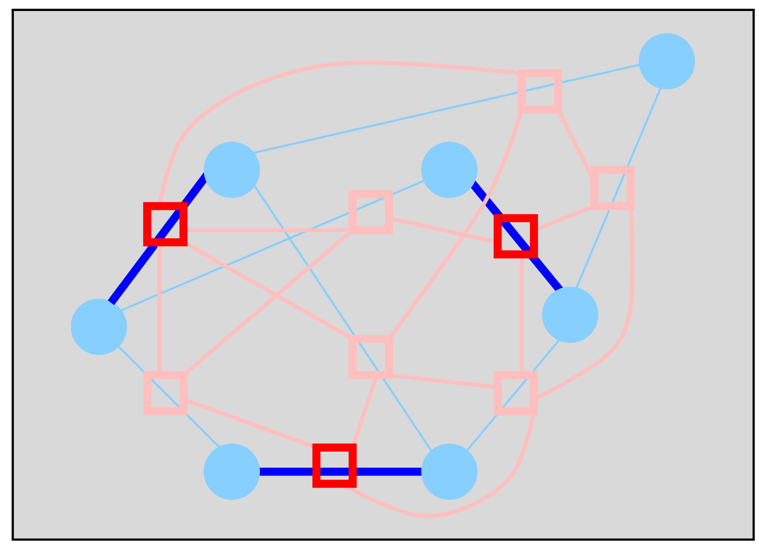


- O algoritmo para imediatamente com um CI de cardinalidade 2

Um caso polinomial

- Nem todas as instâncias de um problema **NP**-completo são difíceis
- Seja P um problema de decisão e C⊆P um conjunto infinito de instâncias para as quais existe um algoritmo polinomial
- Então C∈**P**, e C é um **caso polinomial** de P
- Por exemplo, seja $\mathcal{L} = \{H \in \mathbb{G} \mid \exists G \in \mathbb{G}\ (H = L(G))\}$ a classe de grafos que são grafos linha de outro grafo

Proof



Thm.

Um matching máximo em G é um CI máximo em $L(G)$

- Uma vez que MATCHING∈**P** e podemos encontrar $L(G)$ em tempo polinom., CI$_{\mathcal{L}}$ ∈**P**

Coloração de vértices

- Problema de decisão

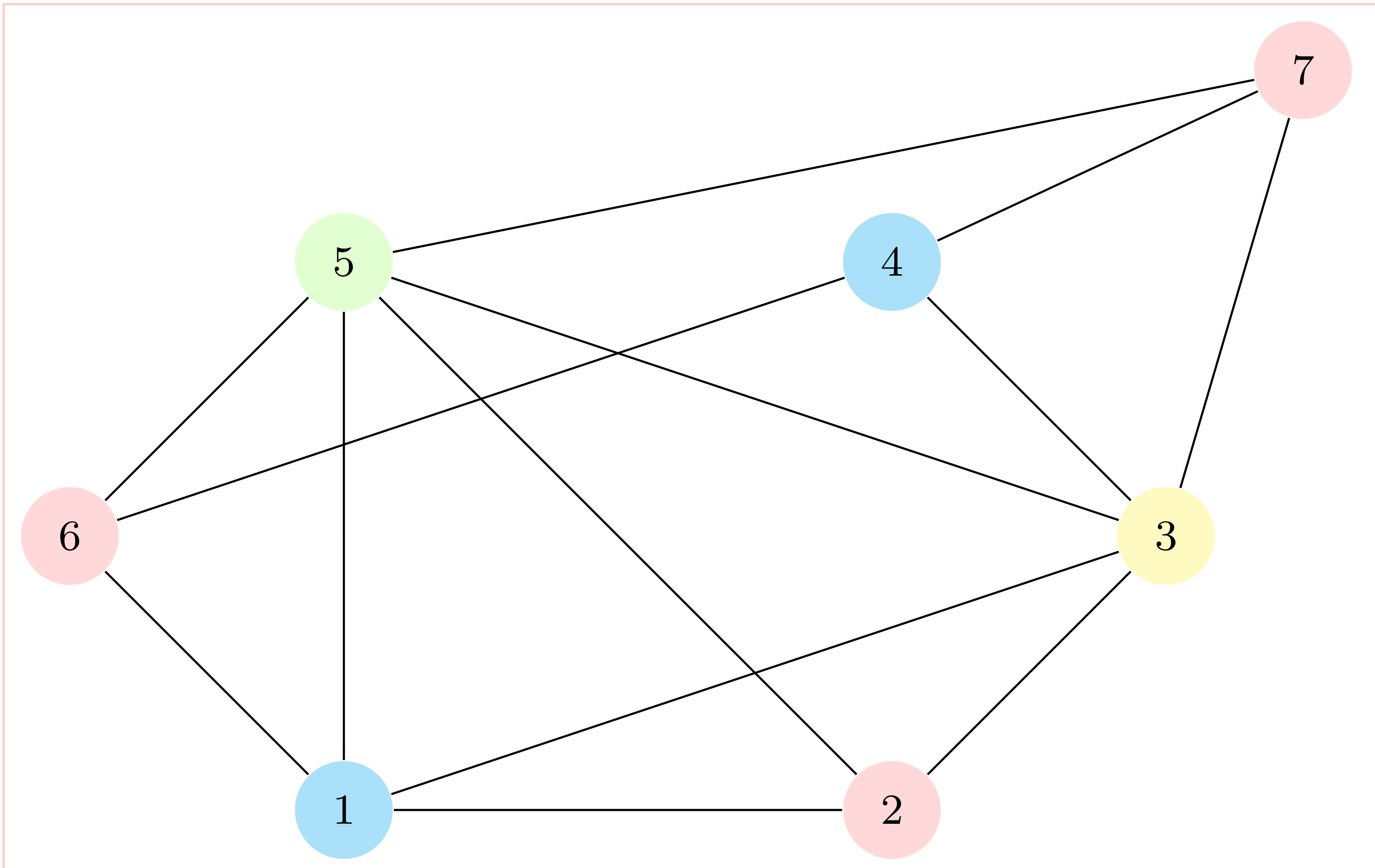
  PROBLEMA DE k-COLORAÇÃO. Dado um grafo $G = (V, E)$ e um inteiro $k > 0$, encontre uma função $c : V \to \{1, \ldots, k\}$ tal que $\forall \{u, v\} \in E \; (c(u) \neq c(v))$

- Problema de otimização

  PROBLEMA DE COLORAÇÃO. Dado um grafo $G = (V, E)$, encontre o $k \in \mathbb{N}$ mínimo tal que existe uma função $c : V \to \{1, \ldots, k\}$ with $\forall \{u, v\} \in E \; (c(u) \neq c(v))$

- Aplicações em scheduling e em redes sem fio.
- Sudoku!

Exemplo de coloração de vértices



Heurística de coloração de vértices

Thm.

Cada conjunto de cores $C_k = \{v \in V \mid c(v) = k\}$ é um CI

- Usa heurística CI como subpasso

```
k = 1;
U = V;
while U ≠ ∅ do
    C_k = maximalCI(G[U]);
    U ← U \ C_k;
    k ← k + 1;
end while
```

- Pior caso: $O(n)$ (dado por um grafo completo ou um grafo sem arestas)

Fim do Módulo 8