

TTI109 – Estatística

Aula 09 – Distribuições Discretas de Probabilidade 01

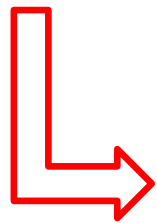


Variáveis aleatórias

Definição

Uma **variável aleatória** x representa um valor numérico associado a cada resultado de um experimento probabilístico (ou aleatório).

é função de um objeto escolhido ao acaso



Uma variável aleatória é **discreta** quando tem um número finito ou contável de resultados possíveis que podem ser enumerados.



Número de ligações
que um vendedor faz
em um único dia

Número de ligações (discreta).

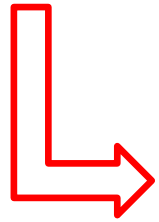


x só pode assumir valores inteiros: 0, 1, 2, 3, ...

Variáveis aleatórias

Definição

Uma **variável aleatória** x representa um valor numérico associado a cada resultado de um experimento probabilístico (ou aleatório).

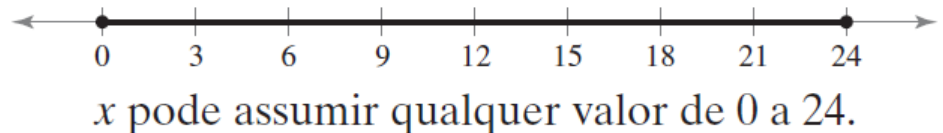


Uma variável aleatória é **contínua** quando tem um número incontável de resultados possíveis, representados por um intervalo na reta numérica.



Tempo diário (h) que um vendedor passa em ligações

Horas gastas em ligações (contínua).



Variáveis aleatórias

Variáveis discretas e variáveis contínuas

Determine se a variável aleatória x é discreta ou contínua. Explique seu raciocínio.

1. x representa o número de empresas, da lista das 500 maiores, que perderam dinheiro no ano passado.
2. x representa o volume de gasolina em um tanque de 21 galões.



Como
decidir?

- 1 O número de empresas que perderam dinheiro no ano passado pode ser contado, sendo o resultado um número pertencente ao conjunto . Logo, é uma **variável aleatória discreta**.

Variáveis aleatórias

Variáveis discretas e variáveis contínuas

Determine se a variável aleatória x é discreta ou contínua. Explique seu raciocínio.

1. x representa o número de empresas, da lista das 500 maiores, que perderam dinheiro no ano passado.
2. x representa o volume de gasolina em um tanque de 21 galões.



Como
decidir?

2 A volume de gasolina no tanque pode assumir qualquer valor entre e galões. Portanto, é uma **variável aleatória contínua**.

Distribuições discretas de probabilidade

Definição

Uma **distribuição discreta de probabilidade** lista cada valor possível que a variável aleatória pode assumir, com sua respectiva probabilidade. Uma distribuição de probabilidade discreta deve satisfazer às seguintes condições:

EM PALAVRAS

1. A probabilidade de cada valor da variável aleatória discreta está entre 0 e 1, inclusive.
2. A soma de todas as probabilidades é 1.

EM SÍMBOLOS

$$0 \leq P(x) \leq 1$$

$$\sum P(x) = 1$$

| x | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $P(X = x)$ | $\frac{4}{90}$ | $\frac{9}{90}$ | $\frac{16}{90}$ | $\frac{25}{90}$ | $\frac{36}{90}$ |
| $P(X \leq x)$ | $\frac{4}{90}$ | $\frac{13}{90}$ | $\frac{29}{90}$ | $\frac{54}{90}$ | $\frac{90}{90}$ |

← **EXEMPLO**

Distribuições discretas de probabilidade

Instruções

Construindo uma distribuição discreta de probabilidade

Seja x uma variável aleatória discreta com resultados possíveis x_1, x_2, \dots, x_n

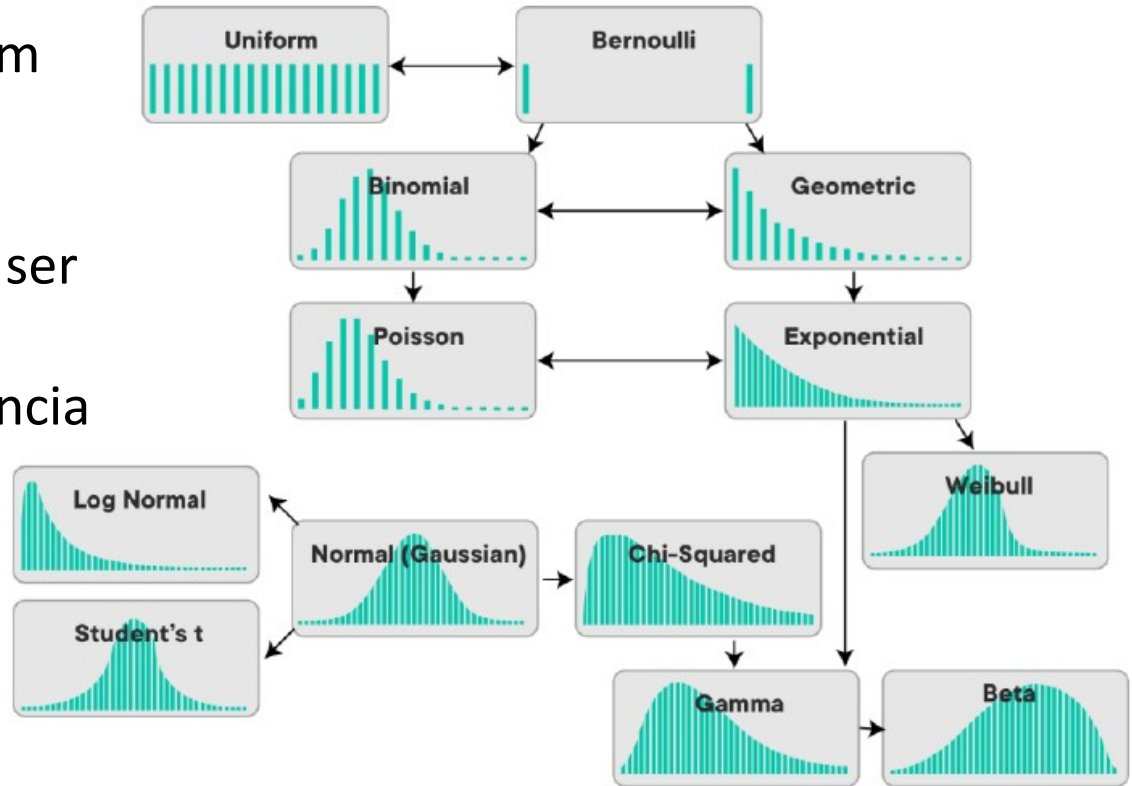
1. Construa uma distribuição de frequências para os resultados possíveis.
2. Calcule a soma das frequências.
3. Determine a estimativa da probabilidade de cada resultado possível dividindo sua frequência pela soma das frequências.
4. Verifique que cada probabilidade esteja entre 0 e 1, inclusive, e que a soma seja 1.



Frequência relativa, examinada em outro ponto de vista...

Distribuições discretas de probabilidade

- Como probabilidades podem ser indicadas por frequências relativas, uma distribuição de probabilidades discreta pode ser representada graficamente em um histograma de frequência relativa (o usual é um gráfico de barras ou segmentos verticais).



Distribuições discretas de probabilidade

EXEMPLO Um psicólogo aplicou um teste de personalidade para identificar características passivo-agressivas em 150 colaboradores de uma indústria, com pontuações variando de 1 (extremamente passivo) a 5 (extremamente agressivo).

| Pontuação, x | Frequência, f |
|----------------|-----------------|
| 1 | 24 |
| 2 | 33 |
| 3 | 42 |
| 4 | 30 |
| 5 | 21 |

Construa uma distribuição de probabilidade para a variável aleatória e represente-a graficamente usando um histograma.

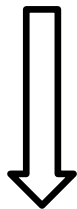
Distribuições discretas de probabilidade

| Pontuação, x | Frequência, f |
|----------------|-----------------|
| 1 | 24 |
| 2 | 33 |
| 3 | 42 |
| 4 | 30 |
| 5 | 21 |

$$\sum f = 150$$

$$P(1) = \frac{24}{150} = 0,16 \quad P(2) = \frac{33}{150} = 0,22 \quad P(3) = \frac{42}{150} = 0,28$$

$$P(4) = \frac{30}{150} = 0,20 \quad P(5) = \frac{21}{150} = 0,14$$



Distribuição discreta de probabilidades para as possíveis pontuações.

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|------|------|------|------|------|
| $P(x)$ | 0,16 | 0,22 | 0,28 | 0,20 | 0,14 |

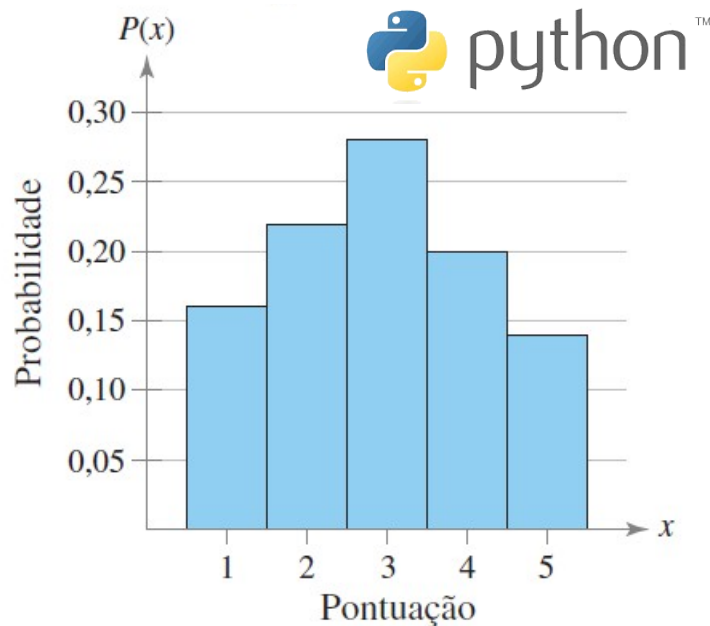
Note que $0 \leq P(x) \leq 1$

$\sum P(x) = 1.$

Distribuições discretas de probabilidade

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|------|------|------|------|------|
| $P(x)$ | 0,16 | 0,22 | 0,28 | 0,20 | 0,14 |

- Nesse caso, a largura de cada barra é unitária. Logo, a área de cada barra é igual à probabilidade de um resultado particular.
- Além disso, a probabilidade de um evento corresponde à soma de áreas dos resultados incluídos no evento.



É como se desse um tratamento contínuo a uma variável discreta...

Média, Variância e Desvio Padrão

Média de uma variável aleatória discreta

A **média** de uma variável aleatória discreta é dada por:

$$\mu = \sum xP(x).$$

Cada valor de x é multiplicado por sua correspondente probabilidade e os produtos são adicionados.

Importante!

- A média de uma variável aleatória representa a *média teórica* de um experimento probabilístico que, quando realizado, não apresenta necessariamente essa média.
- Se o experimento fosse repetido milhares de vezes, a média de todos os resultados, provavelmente, seria próxima à média da variável aleatória.

Média, Variância e Desvio Padrão

EXEMPLO Voltando ao teste de personalidade...

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|------|------|------|------|------|
| $P(x)$ | 0,16 | 0,22 | 0,28 | 0,20 | 0,14 |

Cálculo da média para o teste de personalidade.

| x | $P(x)$ | $xP(x)$ |
|-----|-------------------|-----------------------------------|
| 1 | 0,16 | $1(0,16) = 0,16$ |
| 2 | 0,22 | $2(0,22) = 0,44$ |
| 3 | 0,28 | $3(0,28) = 0,84$ |
| 4 | 0,20 | $4(0,20) = 0,80$ |
| 5 | 0,14 | $5(0,14) = 0,70$ |
| | $\Sigma P(x) = 1$ | $\Sigma xP(x) = 2,94 \approx 2,9$ |

← Média

Interpretação:

A característica de personalidade média não é nem extremamente passiva, nem extremamente agressiva, mas é levemente mais próxima à passividade

Média, Variância e Desvio Padrão

Variância e desvio padrão de uma variável aleatória discreta

A **variância** de uma variável aleatória discreta é:

$$\sigma^2 = \sum (x - \mu)^2 P(x)$$

O **desvio padrão** é:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\sum (x - \mu)^2 P(x)}$$

Uma fórmula abreviada para a variância de uma distribuição de probabilidade é:

$$\sigma^2 = [\sum x^2 P(x)] - \mu^2.$$

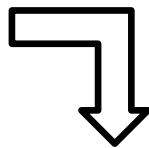
EXEMPLO Voltando ao teste de personalidade...

| | | | | | |
|--------|------|------|------|------|------|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $P(x)$ | 0,16 | 0,22 | 0,28 | 0,20 | 0,14 |

Qual a variância da distribuição?
E o desvio padrão?

Média, Variância e Desvio Padrão

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|------|------|------|------|------|
| $P(x)$ | 0,16 | 0,22 | 0,28 | 0,20 | 0,14 |



| x | $P(x)$ | $x - \mu$ | $(x - \mu)^2$ | $(x - \mu)^2 P(x)$ |
|-----|-----------------|-----------|---------------|----------------------------------|
| 1 | 0,16 | -1,94 | 3,7636 | 0,602176 |
| 2 | 0,22 | -0,94 | 0,8836 | 0,194392 |
| 3 | 0,28 | 0,06 | 0,0036 | 0,001008 |
| 4 | 0,20 | 1,06 | 1,1236 | 0,224720 |
| 5 | 0,14 | 2,06 | 4,2436 | 0,594104 |
| | $\Sigma P(x)=1$ | | | $\Sigma (x - \mu)^2 P(x)=1,6164$ |

Variância

Conclusão:

Variância

Desvio Padrão

Valor Esperado

Definição

O **valor esperado** de uma variável aleatória discreta é igual à média da variável aleatória.

$$\text{Valor esperado} = E(x) = \mu = \sum xP(x).$$



Encontrando um valor esperado

Em um sorteio, 1.500 bilhetes são vendidos a \$ 2 cada, para prêmios de \$ 500, \$ 250, \$ 150 e \$ 75. Você compra um bilhete. Qual é o valor esperado do seu ganho?

Distribuição de probabilidade da variável Ganho.

Ganho por prêmio =
Prêmio - bilhete

| Ganho, x | \$ 498 | \$ 248 | \$ 148 | \$ 73 | -\$ 2 |
|-----------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-----------------------|
| Probabilidade, $P(x)$ | $\frac{1}{1.500}$ | $\frac{1}{1.500}$ | $\frac{1}{1.500}$ | $\frac{1}{1.500}$ | $\frac{1.496}{1.500}$ |

-\$ 2 representa
uma perda de \$ 2



Valor Esperado

-\$ 2 representa
uma perda de \$ 2

Distribuição de probabilidade da variável Ganho.

| | | | | | |
|-----------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-----------------------|
| Ganho, x | \$ 498 | \$ 248 | \$ 148 | \$ 73 | -\$ 2 |
| Probabilidade, $P(x)$ | $\frac{1}{1.500}$ | $\frac{1}{1.500}$ | $\frac{1}{1.500}$ | $\frac{1}{1.500}$ | $\frac{1.496}{1.500}$ |

Interpretação:

Como o valor esperado é negativo, devemos esperar perder, em média, \$ 1,35 para cada bilhete que comprarmos.

Negativo??



TTI109 – Estatística

Aula 09 – Distribuições Discretas de Probabilidade 01

