CONDUÇÃO 1D - RESOLUÇÃO ANALÍTICA E NUMÉRICA (DIFERENÇAS FINITAS E VOLUMES FINITOS)

Rodrigo Veloso

February 2025

1 Apresentação do problema

O objetivo deste material, é demonstrar três diferentes abordagens de resolução para um problema de condução unidimensional com geração variável e em regime permanente.
O problema descrito a seguir, foi obtido no material do curso CFD Básico Online do Prof. Carlos Marchi.

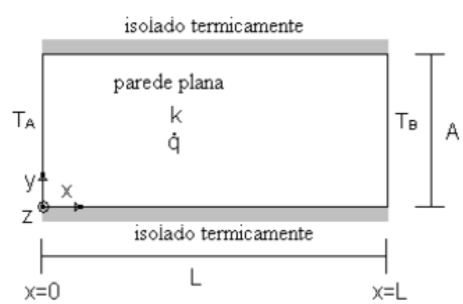

Figure 1: REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DO PROBLEMA ADAPTADO DE MARCHI, CARLOS

Onde:

$$T_A = 20°\text{C}$$

$$T_B = 30°\text{C}$$

$$L = 0,1m$$

$$k = 400\frac{W}{mK}$$

$$q = \frac{10^5}{x}(\frac{W}{m})$$

$$A = 10^{-2}m$$

Hipóteses gerais:
- Difusão unidimensional ao longo do eixo x
- Regime permanente
- condutividade térmica constante

As hipóteses gerais serão válidas para todas abordagens, as considerações específicas serão indicadas ao longo das resoluções.

2 Equação da condução

Partindo da equação da condução térmica em três dimensões em coordenadas cartesianas, serão aplicadas as hipóteses gerais.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + q_v = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Difusão do calor unidimensional ao longo de x, implica em:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

$$q_v = q_x$$

Regime permanente implica em:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

Condutividade térmica constante implica em:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) = k\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

Sendo assim, a equação da condução apresenta-se da seguinte forma:

$$k\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + q_x = 0$$

Sendo esta definida como uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, linear e homogênea.

Substituindo os termos na equação da condução:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \left(\frac{250}{x}\right) = 0$$

2.1 Resolução analítica

A solução analítica desta equação, pode ser obtida usando o método de separação de variáveis, resultando na seguinte expressão:

$$T(x) = (-250)(ln(x)x - x + C_1x + C_2)$$

Aplicando as condições de contorno $T(x = 0) = 293,15K$ e $T(x = L) = 303,15K$ e resolvendo o sistema linear, determina-se as constantes C_1 e C_2.

$$T(x) = 250(ln(x)x - x + 2,904x - 1,17)$$

Notar que a função não é definida para x=0

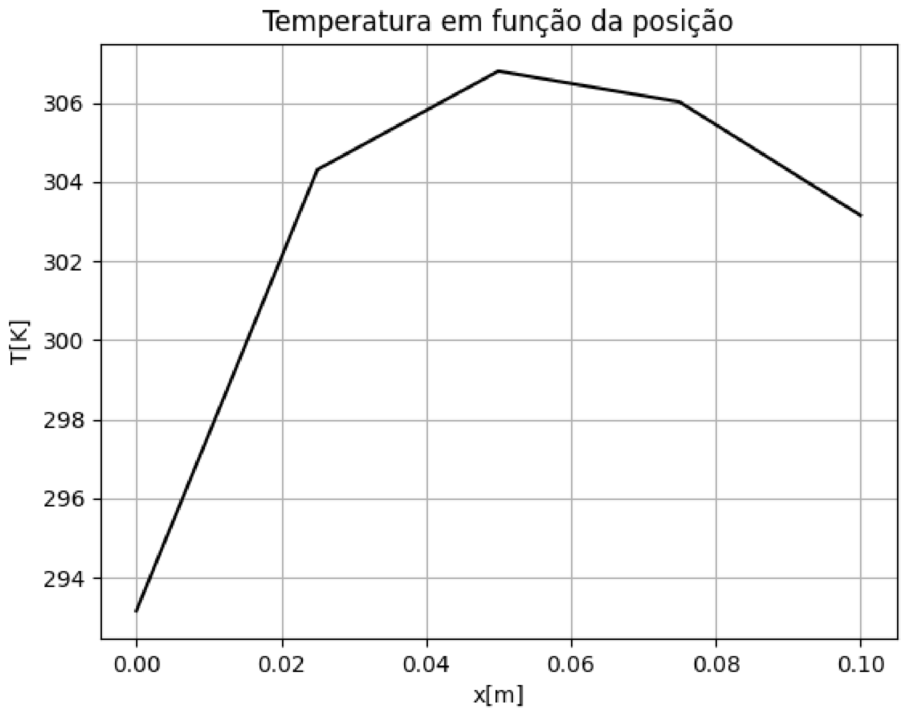

Figure 2: Temperatura vs posição solução analítica

2.2 Solução numérica com o método de diferenças finitas

O método de diferenças finitas aplica decomposição em série de Taylor, para aproximar as derivadas ao longo do domínio discretizado.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

onde:

n - a ordem da derivada
x - variável independente da função
a - ponto da origem do domínio.

A partir da série de Taylor, pode-se obter uma aproximação da derivada de

segunda ordem presente na equação da condução.
Utiliza-se um esquema de diferenças centrais, no qual utiliza-se dois pontos, sendo um ponto imediatamente posterior e o outro imediatamente anterior, para aproximar a derivada no ponto.

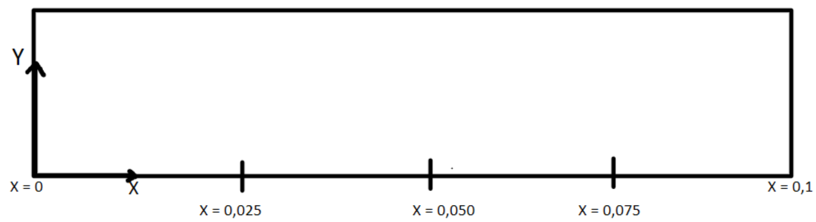

Figure 3: Domínio de calculo diferenças finitas

2.2.1 Revisão decomposição em Série de Taylor

Discretização de uma Derivada de Segunda Ordem usando Expansão em Série de Taylor
Considere uma função $f(x)$ suave. Queremos discretizar a derivada de segunda ordem $f''(x)$ usando a expansão em série de Taylor.

Passo 1: Expansão em Série de Taylor

A expansão em série de Taylor para $f(x+h)$ e $f(x-h)$ em torno de x é dada por:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \mathcal{O}(h^4)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \mathcal{O}(h^4)$$

Passo 2: Somando as Expansões

Somando as duas equações, os termos ímpares ($f'(x)$ e $f'''(x)$) se cancelam:

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \mathcal{O}(h^4)$$

Passo 3: Isolando a Derivada de Segunda Ordem

Isolando $f''(x)$, obtemos:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

Passo 4: Discretização

A fórmula discretizada para a derivada de segunda ordem é:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Essa é a aproximação de diferenças finitas centradas para a segunda derivada, com erro de truncamento da ordem de $\mathcal{O}(h^2)$.

Desta forma a equação da difusão aproximada, pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\frac{T_{i+1} + T_{i-1} - 2T_i}{\Delta x^2} + \frac{10^5}{x_i} = 0$$

Sendo assim, temos uma equação algébrica, que pode ser utilizada para definir os valores de T ao longo do domínio.

$$T_i = 0,5(\frac{-200\Delta x^2}{x_i} - T_{i+1} - T_{i-1})$$

Número de elementos:5
Estimativa inicial temperaturas[K]: [293.15, 273.15,273.15,273.15,303.15]
Número de iterações: 100

2.3 Solução numérica com o método dos volumes finitos

Para resolução utilizando o método dos volumes finitos, serão utilizados os seguintes métodos e considerações:

- Volumes fictícios para aplicação de condições de contorno
- Esquema de diferença central para discretização termo condutivo
- Método do retângulo para aproximar integral do termo de geração
- 5 volumes de controle reais e 2 volumes de controle fictícios
- Método TDMA (TriDiagonal Matrix Algorithm) para resolução do sistema linear

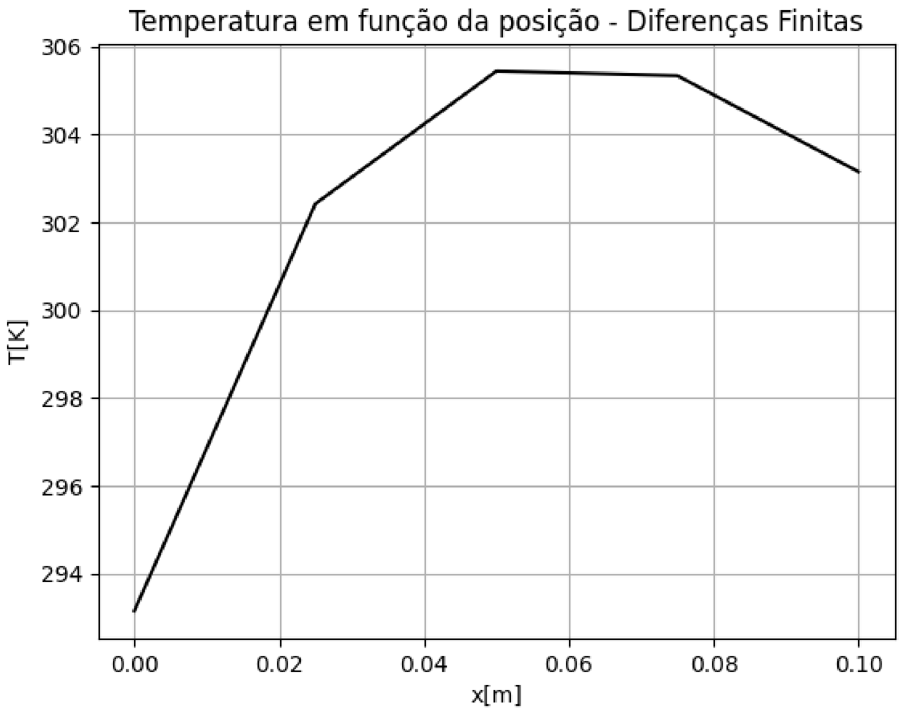

Figure 4: Perfil de temperaturas ao longo do domínio obtido por diferenças finitas

$$\int_{x_w}^{x_e} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + q \right]_P dx = 0$$

Aplicando a condição de condutividade térmica constante, e separando a integral da soma na soma das integrais, a equação apresenta-se da seguinte maneira:

$$k \int_{x_w}^{x_e} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \right]_P dx + \int_{x_w}^{x_e} q_P \, dx = 0$$

$$f = \frac{\partial T}{\partial x}$$

Seguem os passos de integração:

$$k\int_{x_w}^{x_e}\frac{\partial f}{\partial x}dx+\int_{x_w}^{x_e}q_P dx=0$$

$$k\Big|_{x_w}^{x_e} f+\Big|_{x_w}^{x_e} qx=0$$

$$k(f_e-f_w)+q_P(x_e-x_w)=0$$

$$k(f_e-f_w)+q_P x_P=0$$

$$k\left(\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x_w}-\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x_e}\right)+q_P x_P=0$$

Seguem as aproximações com diferenças centrais, para os dois termos de derivada e a aproximação da integral do termo de geração, utilizando o método do retângulo.

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x_e}=\frac{T_e-T_P}{\Delta x_e}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x_w}=\frac{T_P-T_w}{\Delta x_w}$$

$$k\left(\frac{T_e-T_P}{\Delta x_e}-\frac{T_P-T_w}{\Delta x_w}\right)+q_P\Delta x_P=0$$

A partir da equação discretizada, vamos reescrever a mesma de forma que seja possível representá-la matricialmente na forma $a_P T_P=a_w T_w+a_e T_E+b_p$, para aplicar o método TDMA para resolução do sistema linear.

$$\left(\frac{k}{\Delta x_e}+\frac{k}{\Delta x_w}\right)T_P=\left(\frac{k}{\Delta x_e}\right)T_e+\left(\frac{k}{\Delta x_w}\right)T_w+q_P\Delta x_p$$

$$a_e = \left(\frac{k}{\Delta x_e} \right)$$

$$a_w = \left(\frac{k}{\Delta x_w} \right)$$

$$(a_e + a_w)T_P = a_e T_e + a_w T_w + q_P \Delta x_p$$

Rearranjando os termos, para que a equação possa ser representada matricialmente na forma $Ax = B$:

$$-a_w Tw + (a_e + a_w)T_P - a_e T_e = q_P \Delta x_p$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 \times 10^4 & 4 \times 10^4 & 2 \times 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \times 10^4 & 4 \times 10^4 & 2 \times 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \times 10^4 & 4 \times 10^4 & 2 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \times 10^4 & 4 \times 10^4 & 2 \times 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \times 10^4 & 4 \times 10^4 & 2 \times 10^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 586.3 \\ 200000 \\ 66666.67 \\ 40000 \\ 28571.43 \\ 22222.22 \\ 606.3 \end{bmatrix}$$

2.4 Análise e comparação dos métodos

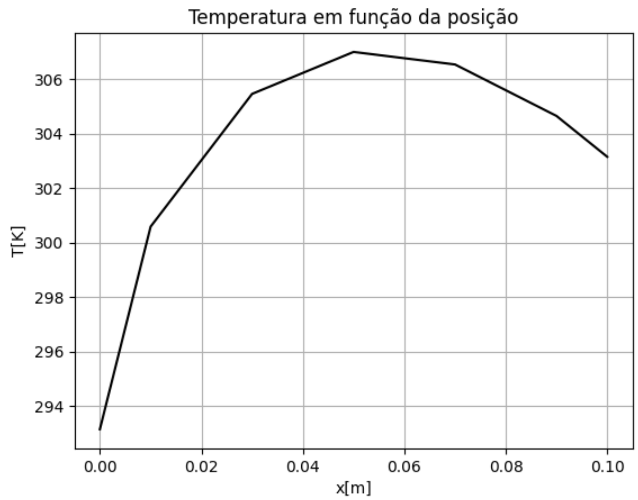

Figure 5: Perfil de temperaturas ao longo do domínio obtido por volumes finitos

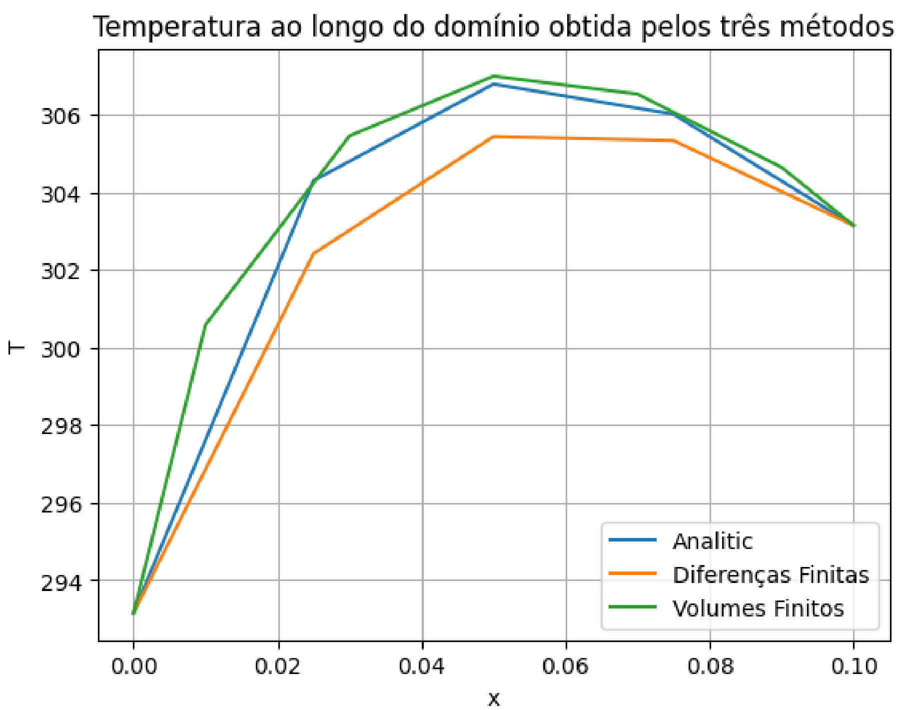

Figure 6: Resultados obtidos em cada método