Université Ibn Khaldoun - Tairet
Faculté Mathématique et Informatique
Département d'informatique
Module : Algèbre II

Année Universitaire 2022-2023
1 Année LMD - MI
Date : 24/05/2023
Durée : 01h :30 m

Examen final semestre 2

Exercice 01 :(06 points)

Soient les ensembles suivants:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \text{ et } F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = x + z = 0\}$$

❶ Montrer que E et F sont des sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

❷ Donner une base de E et une base de F et en déduire $dimE$ et $dimF$.

❸ Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 02 :(09 points)

On considère l'application f définie de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ par: $f((x, y, z)) = (y - z, x + z, z)$

❶ Montrer que l'application f est linéaire.

❷ Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$, puis calculer $dim\,\mathrm{Ker}(f)$ et $dim\,\mathrm{Im}(f)$

❸ En déduire que f est un automorphisme.

Soient $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

❹ Donner la matrice M associée à f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

❺ Montrer que M est inversible et donner M^{-1}.

Exercice 03 :(05 points)

Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

❶ Calculer A^2.

❷ Montrer que $A^2 = A + 2I_3$.

❸ En déduire A^{-1}.

Université Ibn Khaldoun - Tairet
Faculté des Maths-Info
Département d'informatique

Année Universitaire 2022-2023
Module : Algèbre II
Date : 24/05/2023

1^{ere} Année LMD - MI

Durée : 01^h :30 ^{m}

Corrigé de l'examen semestre 2

Exercice 01 :(06 points)

❶ Montrer que E et F sont des sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. (1.5 points)

Soient les ensembles suivants:

$E = \{(x,\ y,\ z)\ \in \mathbb{R}^3; x+y+z\ = 0\}$ *et* $F = \{(x,\ y,\ z)\ \in \mathbb{R}^3; x-y = x+z = 0\}$

1. • *Commençons par* E

soit $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ *et* $0+0+0 = 0$ *alors* $0_{\mathbb{R}^3} \in E$...........(0.25pt)

Soit $X = (x,\ y,\ z)$, $Y = (x',\ y',\ z') \in E$, *et soit* $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, *il est clair que*

$\alpha X + \beta Y \in E$ *alors* $\alpha(x+y+z) + \beta(x'+y'+z') = 0$ *car* $X,\ Y \in E$...........(0.5pt)

2. • *soit* $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ *et* $0-0 = 0+0 = 0$ *alors* $0_{\mathbb{R}^3} \in F$...........(0.25pt)

Soit $X = (x,\ y,\ z)$, $Y = (x',\ y',\ z') \in F$, *et soit* $\alpha,\ \beta$ *deux réels quelconques.*

Par hypothèse on a d'une part $x-y = x+z$, *alors*

$$\alpha(x-y) = \alpha(x+z) = 0.\ (1)$$

Et d'autre part $x'-y' = x'+z'$, *d'où*

$$\beta(x'-y') = \beta(x'+z') = 0\ (2)$$

$(1)+(2)$ *donne* :

$$\alpha x + \beta x' - (\alpha y + \beta y') = \alpha x + \beta x' + \alpha z\ + \beta z' = 0.$$

Ainsi $\alpha X + \beta Y \in F$., ...(0.5pt)

❶ Donner une base de E et une base de F et en déduire $dimE$ et $dimF$. (2.5 points)

• *La base de* E, *on a* $X \in E$ *alors* $x+y+z = 0 \Rightarrow x = -y-z$

alors $(x,\ y,\ z) = (-y-z,\ y,\ z) = (-y,\ y,\ 0) + (-z,\ 0,\ z) = y(-1,1,0) + z(-1,0,1)$, ...(0.25pt)

Posons $a_E = (-1,1,0) \in E$ et $b_E = (-1,0,1) \in E$,

donc $B_E = \{a_E,\ b_E\}$ est une partie génératrice de E...........(0.25pt)

Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, on a:

$\lambda_1 \bullet a_E + \lambda_2 \bullet b_E = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$...........(0.25pts)

Donc B_E est libre. *et par suite la base de* E *est* $\{(-1,1,0),\ (-1,0,1)\}$ *alors la* $dim(E) = 2$............(0.5pt)

• *La base de* F*, soit* $X \in F$ *alors* $x - y = x + z = 0 \Rightarrow z = -y$ *et* $y = x$

alors $(x,\ y,\ z) = (y,\ y,\ -y) = y(1, 1,\ -1)$, ...(0.25pt)

Posons $c_F = (1, 1,\ -1) \in F$, donc $B_F = \{c_F\}$ est une partie génératrice de F...........(0.25pt)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a: $\lambda \bullet c_F = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \lambda = 0$...........(0.25pts)

Donc B_F est libre. *et par suite la base de* F *est* $\{(1, 1,\ -1)\}$ *alors la* $dim(F) = 1$. ....(0.5pt)

❸ Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. (2 points)

Pour l'intersection entre E *et* F*, soit* $X \in E \cap F$ *donc* $X \in E$ *et* $X \in E$*, ce qui donne*

$x + y + z = 0$ *et* $x - y = x + z = 0 \Rightarrow x = y = z = 0$

alors $E \cap F = \{(0, 0, 0)\}$. (et par conséquent, $dim(E \cap F) = 0$), ...(0.5pt)

on utilise la dimension, puisque

$dim(E + F) = dim(E) + dim(F) - dim(E \cap F) = 2 + 1 - 0 = 3 = dim(\mathbb{R}^3)$ *et d'autre part* on à $E + F \subset \mathbb{R}^3$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, donc $E + F = \mathbb{R}^3$ ....(1pt)

Par suite E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$............(0.5pt)

Exercice 02 :(09 points)

❶ Montrer que l'application f est linéaire. (1.5 points)

Soit $u = (x, y, z), v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$,

On vérifie que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a : $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$.

$$\begin{aligned} f(\alpha u + \beta v) &= f\left(\alpha(x, y, z) + (x', y', z')\right) \\ &= f\left(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z'\right) \\ &= \left(\alpha y + \beta y' - (\alpha z + \beta z'), \alpha x + \beta x' + \alpha z + \beta z', \alpha z + \beta z'\right) \\ &= \alpha(y - z, x + z, z) + \beta\left(y' - z', x' + z', z'\right) \\ &= \alpha f(u) + \beta f(v). \end{aligned}$$

L'application f est alors linéaire. ....(1.5pt)

❷ Déterminer Ker(f) et Im(f). (2.5 points)

• $\ker f = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 / f(x,\ y,\ z) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$.

On a: $f(x,\ y,\ z) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y - z = 0 \\ x + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$\ker f = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z = 0\} = \{(0,0,0)\}$, ...(0.5pt)

Par suite $\dim \ker f = 0$...........$(0, 25pt)$

• $\mathrm{Im} f = \{f(x,\ y,\ z)/(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3\} = \{(y - z, x + z, z)/(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3\}$.

$\mathrm{Im} f = \{(y - z, x + z, z)/(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3\} = \{x(0,1,0) + y(1,0,0) + z(-1,1,1)/(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3\}$,

...........(0.5pt)

On à: $f = (e_1) = (0,1,0)$, $f = (e_2) = (1,0,0)$ et $f = (e_3) = (-1,1,1)$

Posons $a = (0,1,0) \in \mathrm{Im} f$; $b = (1,0,0) \in \mathrm{Im} f$ et $c = (-1,1,1) \in \mathrm{Im} f$,

donc $B = \{a,\ b,\ c\}$ est une partie génératrice de E'...........(0.5pt)

Soit $\lambda_1, \lambda_2 \text{et} \lambda_3 \in \mathbb{R}$, on a:

$\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$...........(0.25pts)

Donc B est libre. Par suite B est une base de $\mathrm{Im} f$ et $\dim \mathrm{Im} f = 3$ ....$(0, 5pt)$

❸ Montrer que l'application f est un Automorphisme. (1.5 points)

• f est injective (car : $\dim \ker f = 0_{\mathbb{R}^3}$) $\cdots\cdots$ (0.25pts)

• Comme $\dim \mathrm{Im} f = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, et puisque $\mathrm{Im} f$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, alors $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3$, donc f est surjective$\cdots\cdots$ (0.25pts)

ce implique que f est bijective.$\cdots\cdots$ (0.25pts)

• Et comme f est linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ et bijective, donc f est un **Automorphisme**............(0.75pt

❹ Donner la matrice M associée à f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. (1 points)

$B_{\mathbb{R}^3} = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$

On a: $\begin{cases} f(e_1) = f(1,0,0) = (0,1,0) \\ f(e_2) = f(0,1,0) = (1,0,0) \\ f(e_3) = f(-1,1,1) = (-1,1,1) \end{cases}$ donc $M = Mat_f(B_{\mathbb{R}^3},\ B_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

est la matrice de f relativement aux bases $B_{\mathbb{R}^3}$ et $B_{\mathbb{R}^3}$.......(1pt)

❹ Montrer que M est inversible et donner M^{-1} . (2.5 points)

) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cherchons $M' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ telle que $M.M' = I_3$, on a:

$$M.M' = I_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ldots\ldots(0,5\text{pt})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 0 \\ -a + b + c = 0 \\ e = 0 \\ d = 1 \\ -d + e + f = 0 \\ h = 0 \\ g = 0 \\ -g + h + i = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = -1 \\ d = 1 \\ e = 0 \\ f = 1 \\ g = 0 \\ h = 0 \\ i = 1 \end{cases}$$

d'où $M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ldots\ldots(0,5\text{pt})$

et puisque $M.M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \ldots\ldots(0,5\text{pt})$

Alors M est inversible et $M^{-1} = M'$...........(01pt)

Exercice 03 :(05 points)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. ❶ Calculons A^2. (1.5 points)

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Donc

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \ldots\ldots\ldots..(1.5\text{pt})$$

2. ❷ Montrer que $A^2 = A + 2I_3$. (1.5 points)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Alors : $A^2 = A + 2I_3$ ....(1.5pt)

3. ❸ En déduire A^{-1}. (2 points)

$A^2 = A + 2I_3 \Rightarrow A^2 - A = 2I_3 \Rightarrow A(A - I_3) = 2I_3$

Ce qui implique que:

$A^{-1} = 1/2(A - I_3)$ ....(1pt)

donc: $A^{-1} = 1/2 \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ....(1pt)