MATH-H204 - Calcul des probabilités et statistiques
Yves De Smet
Résumé du cours

Rodrigue Van Brande

18 juillet 2015

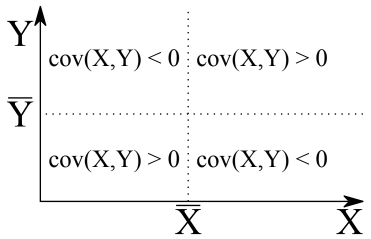
Table des matières

1 Première partie

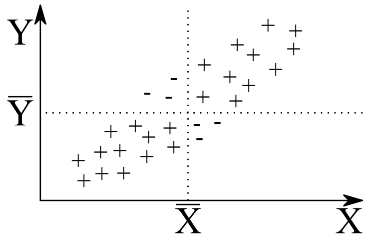
1.1 Statistique descriptive en 1D

1.2 Statistique descriptive en 2D

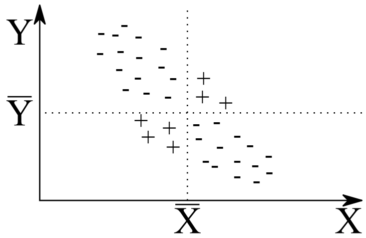
1.2.1 Covariance



Allure générale



$n_{11} > 0$



$n_{11} < 0$

1.2.1.1 La covariance $|m_{11}| \leq s_1 s_2$

La covariance est le moment d'ordre (1,1) :

$$m_{11} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} n_{ij} (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} n_{ij} ((x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}))^2 && (1) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} n_{ij} (u^2 (x_i - \bar{x})^2 + 2a(x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) + (y_j - \bar{y})^2) && (2) \\
&= u^2 s_1^2 + 2u \ m_{11} + s_2^2 && (3)
\end{aligned}$$

L'équation (1) est au carré car toujours ≥ 0.

$$\begin{aligned}
\Delta &\leq 0 \\
m_{11}^2 - s_1^2 s_2^2 &\leq 0 \\
m_{11}^2 &\leq s_1^2 s_2^2 \\
|m_{11}| &\leq s_1 s_2
\end{aligned}$$

1.2.1.2 La covariance maximale $|m_{11}| = s_1 s_2$

La valeur absolue de la covariance est maximaleet vaut $|m_{11}| = s_1 s_2$.
Si les points observés se trouvent sur une droite $ax + bx + c = 0$, on a $ax_i + by_i + c = 0$.
On multiplie par $\frac{n_{ij}}{n}$ et on somme sur ij.

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\frac{n_{ij}}{n}(ax_i + by_j + c) && (4)\\
&= a\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}n_{ij}x_i + b\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}n_{ij}y_j + c\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}n_{ij} && (5)\\
&= a\bar{x} + b\bar{y} + c && (6)
\end{aligned}
$$

On soustrait $ax_i + by_j + c = 0$ par $a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0$.

$$= a(x_i - \bar{x}) + b(y_j + \bar{y}) \tag{7}$$

On utilise $u_0 = \frac{a}{b}$

$$
\begin{aligned}
&= u_0 b(x_i - \bar{x}) + \frac{a}{u_0}(y_j - \bar{y}) && (8)\\
&= u_0 b(x_i - \bar{x}) + \frac{u_0 b}{u_0}(y_j - \bar{y}) && (9)\\
&= u_0(x_i - \bar{x}) + (y_j - \bar{y}) && (10)
\end{aligned}
$$

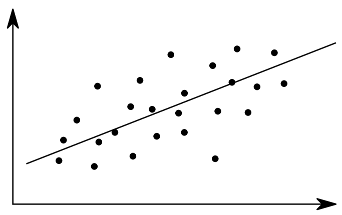
L'équation (10) a la même forme que α, du coup...

$$
\begin{aligned}
0 &= \Delta\\
&= m_{11}^2 - s_1^2 s_2^2\\
m_{11}^2 &= s_1^2 s_2^2\\
|m_{11}| &= s_1 s_2
\end{aligned}
$$

1.2.2 Le coefficient de corrélation

$$r = \frac{m_{11}}{s_1 s_2}$$

1.2.3 Les droites de régression



La droite de régression de y en x est la droite qui minimise la somme des carrés des écarts (parallèles à l'axe y) des points observés à cette droite.

$$g(a,b) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}n_{ij}(y_j - a\ x_i - b)^2$$

$$
\begin{aligned}
g(a,b)|_a &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}2n_{ij}(y_j - a\ x_i - b)(-x_i) && (11)\\
&= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}2n_{ij}(-y_j + a\ x_i^2 + b\ x_i) && (12)
\end{aligned}
$$

$$g(a,b)|_b = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} 2n_{ij}(y_j - a\ x_i - b)(-1) \tag{13}$$

$$= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} 2n_{ij}(-y_j + a\ x_i + b) \tag{14}$$

2 Deuxième partie

2.1 Probabilités

2.1.1 Formule de Bayes

2.2 Variables aléatoires

2.2.0.1 Distribution d'une fonction monotone d'une variable aléatoire

$$W = G(V)$$

2.2.0.2 Distribution de la somme de deux variables aléatoires

$$Z = V + W$$

2.2.0.3 Distribution de la différence de deux variables aléatoires

$$Z = V - W$$

2.2.0.4 Distribution du produit de deux variables aléatoires

$$\begin{aligned} Z &= VW \\ F_Z(x) &= \iint\limits_{\xi.\eta \leq x} f_{(V,W)}(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned}$$

3 Autres aides

3.1 Tableau du formulaire

	μ	σ^2	$\psi(t)$
$\mathcal{B}(n,p)$	np	$np(1-p)$	$(pe^t+q)^n$
$\mathcal{P}_\lambda$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t-1)}$
Exp_λ	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$
Indicatrice(p)	p	$p(1-p)$	$1+p(e^t-1)$
Uniforme[a,b]	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{1}{t}\frac{e^{tb}-e^{ta}}{b-a}$
$\mathcal{N}(\mu,\sigma)$	μ	σ^2	$e^{\mu t+(\sigma^2t^2)/2}$
$\chi^2_{(n)}$	n	$2n$	$(1-2t)^{-n/2}$
t_n	$0 \quad n>1$	$\frac{n}{n-2} \quad n>2$	aucun
$\mathcal{F}_{(m,n)}$	$\frac{n}{n-2} \quad n>2$	$\frac{2n^2(n+m-2)}{m(n-2^2(m-4)} \quad n>2$	aucun

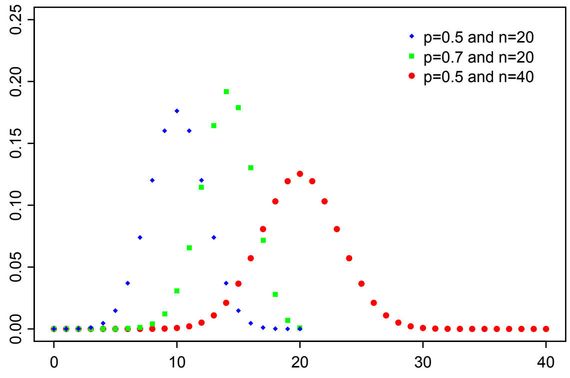
Tableau dans le formulaire disponible à l'examen écrit (en rouge à connaître)

3.2 Densité et répartition

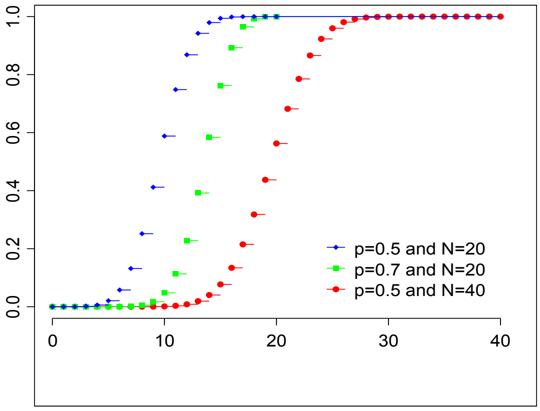
	Fonction de densité $f(x)$	Fonction de répartition $F(x)$
$\mathcal{B}(n,p)$	$P[B(n,p)=k]$	$\sum_{k=0}^{x} P[B(n,p)=k]$
$\mathcal{P}_\lambda$	$P[\mathcal{P}_\lambda=k]=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	$\sum_{k=0}^{x} P[\mathcal{P}_\lambda=k]$
Exp_λ	$\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$	$\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$
Indicatrice(p)	$V_A \Rightarrow \begin{cases}P(V_A=1)=p\\ P(V_A=0)=1-p\end{cases}$	$\begin{cases}0 & x<0\\ 1-p & 0\leq x<1\\ 1 & x\geq 1\end{cases}$
Uniforme[a,b]	$\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\leq x\leq b\\ 0 & sinon\end{cases}$	$\begin{cases}0 & x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & a\leq x<b\\ 1 & x\geq b\end{cases}$
$\mathcal{N}(\mu,\sigma)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}}du$
$\chi^2_{(n)}$	$\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{x^2}{2}} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{\frac{x^2}{2}}du$
t_n	Densité indépendante de σ	
$\mathcal{F}_{(m,n)}$	Densité indépendante de σ	

3.3 Distributions

Distribution Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$

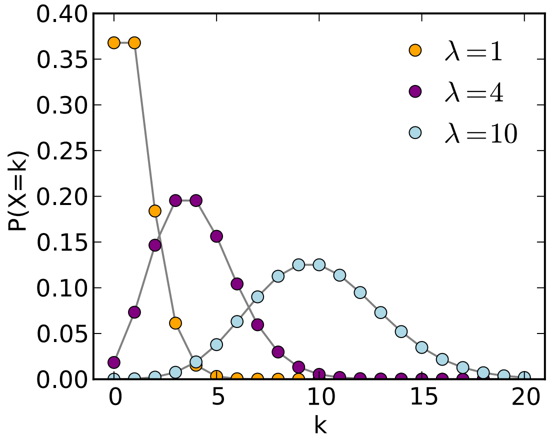


Densité de probabilité

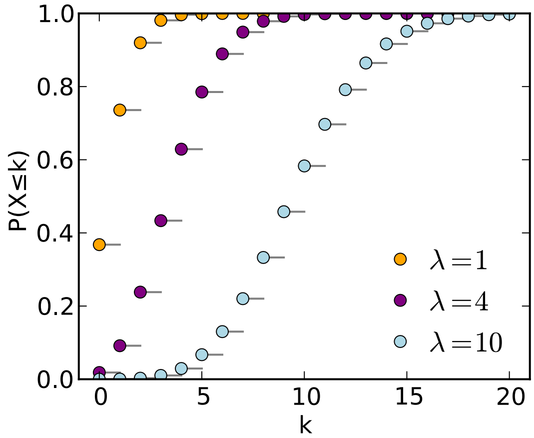


Fonction de répartition

Distribution Poisson $\mathcal{P}_\lambda$

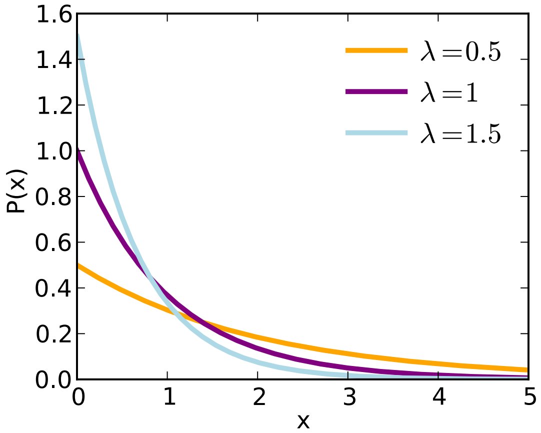


Densité de probabilité

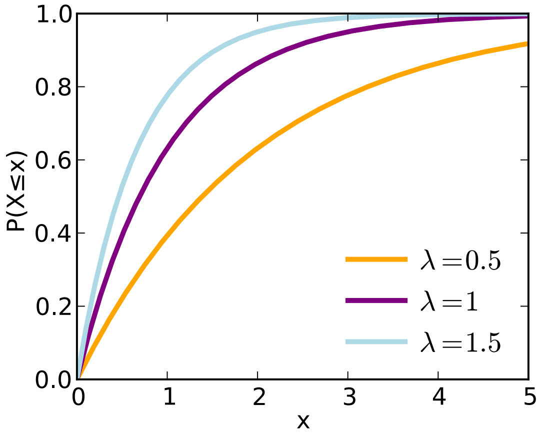


Fonction de répartition

Distribution Exponentielle Exp_λ



Densité de probabilité



Fonction de répartition

Distribution Indicatrice $\mathcal{V}_p$

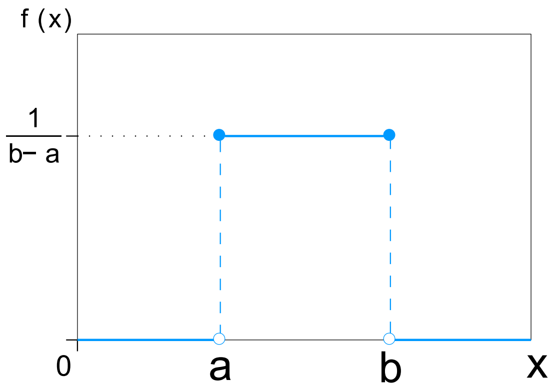
images/indicatrice_probability_density_function.pdf

Densité de probabilité

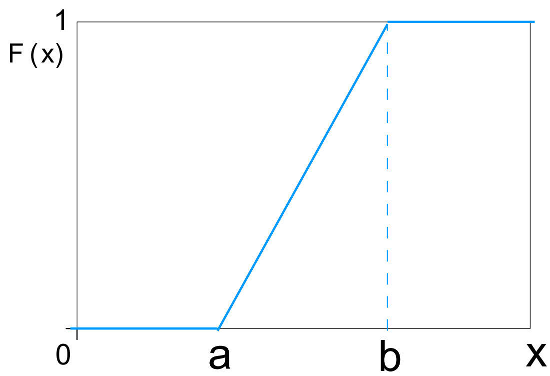
images/indicatrice_cumulative_distribution_function.pdf

Fonction de répartition

Distribution Uniforme $\mathcal{U}[a, b]$

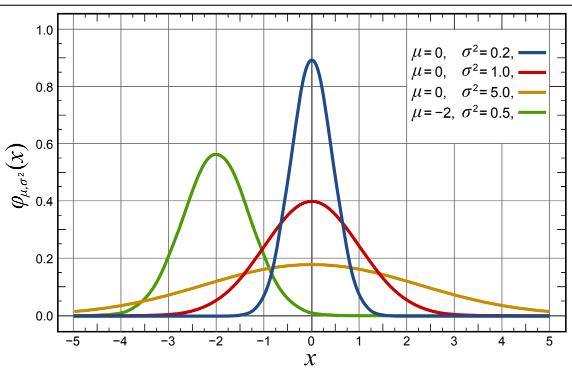


Densité de probabilité

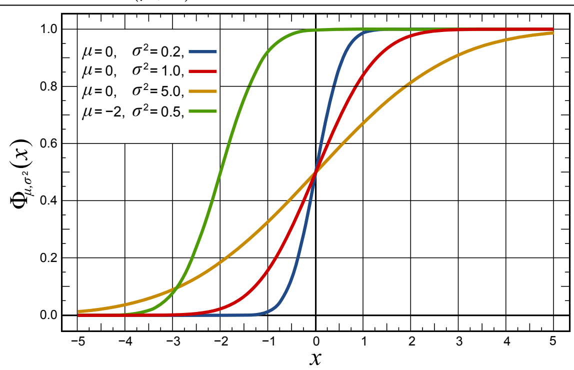


Fonction de répartition

Distribution Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$

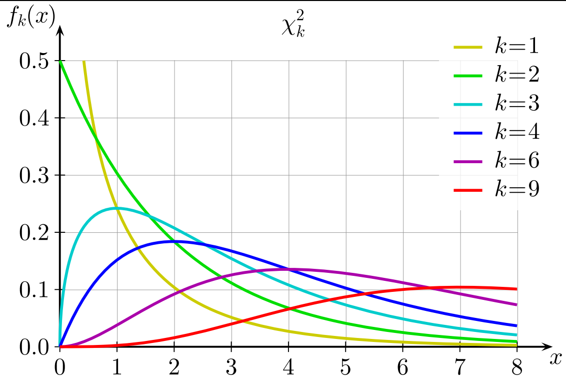


Densité de probabilité

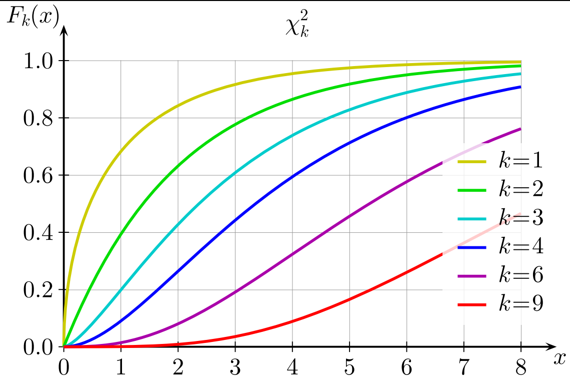


Fonction de répartition

Distribution Khi carré χ^2

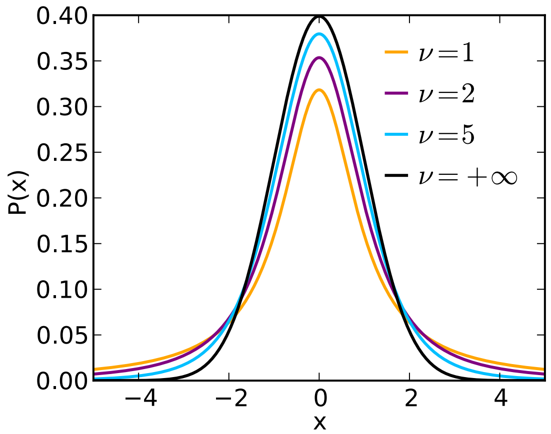


Densité de probabilité

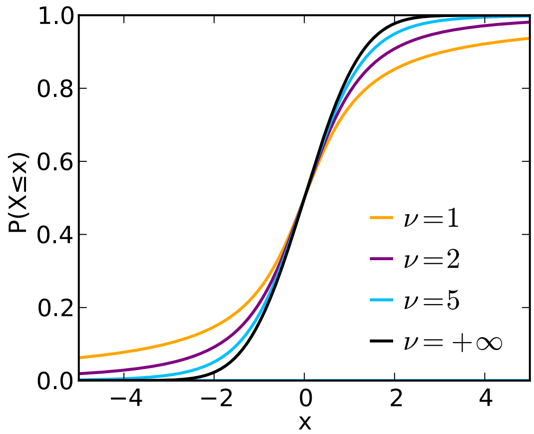


Fonction de répartition

Distribution Student t_n

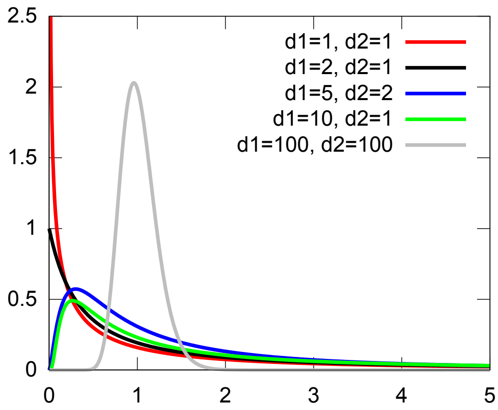


Densité de probabilité

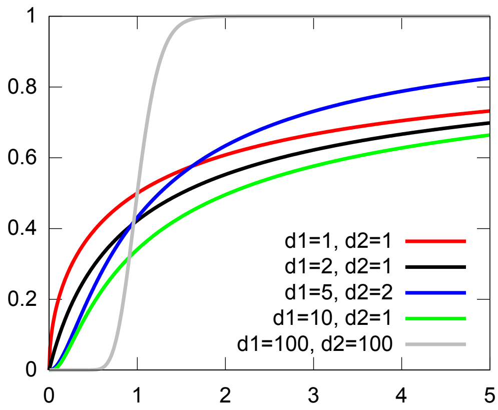


Fonction de répartition

Distribution Fisher-Snedecor $\mathcal{F}_{m,n}$



Densité de probabilité



Fonction de répartition