MATH-H204 - Calcul des probabilités et statistiques
Yves De Smet
Résumé du cours

Rodrigue Van Brande

18 juillet 2015

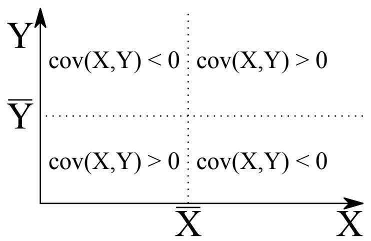
Table des matières

1 Première partie

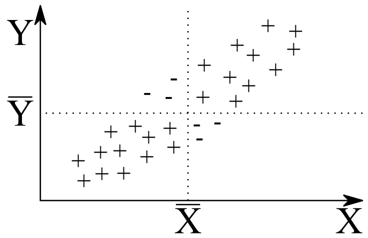
1.1 Statistique descriptive en 1D

1.2 Statistique descriptive en 2D

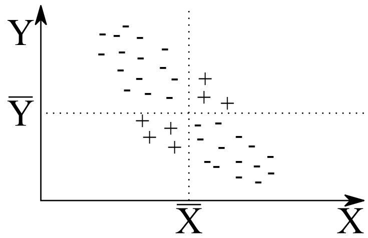
1.2.1 Covariance



Allure générale



$n_{11} > 0$



$n_{11} < 0$

1.2.1.1 La covariance $|m_{11}| \leq s_1 s_2$

La covariance est le moment d'ordre (1,1) :

$$m_{11} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} n_{ij} (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} n_{ij} \underbrace{((x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}))^2}_{^2 \text{ car toujours } \geq 0} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} n_{ij} (u^2 (x_i - \bar{x})^2 + 2a (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) + (y_j - \bar{y})^2) \\ &= u^2 s_1^2 + 2u \; m_{11} + s_2^2 \end{aligned}$$

Équation du second degré, on calcule son Δ :

$$\begin{aligned} \Delta &\leq 0 \\ m_{11}^2 - s_1^2 s_2^2 &\leq 0 \\ m_{11}^2 &\leq s_1^2 s_2^2 \\ |m_{11}| &\leq s_1 s_2 \end{aligned}$$

1.2.1.2 La covariance maximale $|m_{11}| = s_1 s_2$

La valeur absolue de la covariance est maximale et vaut $|m_{11}| = s_1 s_2$.
Si les points observés se trouvent sur une droite $ax + bx + c = 0$, on a $ax_i + by_i + c = 0$.
On multiplie par $\frac{n_{ij}}{n}$ et on somme sur ij.

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\frac{n_{ij}}{n}(ax_i + by_j + c) \\
&= a\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij}x_i + b\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij}y_j + c\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij} \\
&= a\bar{x} + b\bar{y} + c
\end{aligned}$$

On soustrait $ax_i + by_j + c = 0$ par $a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0$.

$$= a(x_i - \bar{x}) + b(y_j + \bar{y})$$

On utilise $u_0 = \frac{a}{b}$

$$\begin{aligned}
&= u_0 b(x_i - \bar{x}) + \frac{a}{u_0}(y_j - \bar{y}) \\
&= u_0 b(x_i - \bar{x}) + \frac{u_0 b}{u_0}(y_j - \bar{y}) \\
&= u_0(x_i - \bar{x}) + (y_j - \bar{y})
\end{aligned}$$

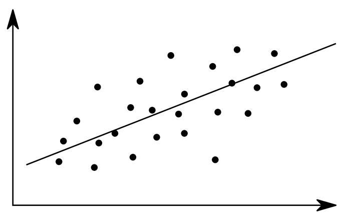
L'équation a la même forme que α, du coup...

$$\begin{aligned}
0 &= \Delta \\
&= m_{11}^2 - s_1^2 s_2^2 \\
m_{11}^2 &= s_1^2 s_2^2 \\
|m_{11}| &= s_1 s_2
\end{aligned}$$

1.2.2 Le coefficient de corrélation

$$r = \frac{m_{11}}{s_1 s_2}$$

1.2.3 Les droites de régression



La droite de régression de y en x est la droite qui minimise la somme des carrés des écarts (parallèles à l'axe y) des points observés à cette droite.

$$\boxed{g(a,b) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij}(y_j - a\ x_i - b)^2}$$

Dérivée par rapport à a.

$$\begin{aligned}
0 &= g(a,b)|_a \\
&= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij}\ 2(y_j - a\ x_i - b)(-x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} -2n_{ij}\ x_i(y_j - a\ x_i - b) \\
&= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij}\ x_i(-y_j + a\ x_i + b) \\
&= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} -n_{ij}\ x_i\ y_j + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij}\ a\ x_i^2 + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij}\ b\ x_i \\
&= -1\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij}\ x_i\ y_j + a\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij}\ x_i^2 + b\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij}\ x_i \\
\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij}\ x_i\ y_j &= \underbrace{a\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij}\ x_i^2 + b\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij}\ x_i}_{\text{Il n'existe aucun terme en } j} \\
\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij}\ x_i\ y_j &= \overbrace{a\sum_{i=1}^{p} n_{i.}\ x_i^2 + b\sum_{i=1}^{p} n_{i.}\ x_i}^{\text{Donc on peut supprimer la somme } \sum_{j=1}^{q}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij}\ x_i\ y_j = a\sum_{i=1}^{p} n_{i.}\ x_i^2 + b\sum_{i=1}^{p} n_{i.}\ x_i}$$

Dérivée par rapport à b.

$$\begin{aligned}
0 &= g(a,b)|_b \\
&= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij}\ 2(y_j - a\ x_i - b)(-1) \\
&= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} -2n_{ij}(y_j - a\ x_i - b) \\
&= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij}(-y_j + a\ x_i + b) \\
&= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} -n_{ij}\ y_j + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij}\ a\ x_i + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij}\ b \\
&= -1\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij}\ y_j + a\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij}\ x_i + b\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij} \\
\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij}\ y_j &= a\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij}\ x_i + b\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij} \\
n\ \bar{y} &= a\ n\ \bar{x} + b\ n
\end{aligned}$$

$$\boxed{n\ \bar{y} = a\ n\ \bar{x} + b\ n}$$

On a obtenu ces deux réponses

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij}\ x_i\ y_j = a\sum_{i=1}^{p} n_{i.}\ x_i^2 + b\sum_{i=1}^{p} n_{i.}\ x_i & (1) \\ n\ \bar{y} = a\ n\ \bar{x} + b\ n & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bar{x}\ (2) &: n\ \bar{y}\ \bar{n} = a\ n\ \bar{x}^2 + b\ n\ \bar{n} \\ (1) - \bar{x}\ (2) &: \end{aligned}$$

2 Deuxième partie

2.1 Probabilités

2.1.1 Axiomes de la théorie des probabilités

$$\begin{cases} P(A) \geq 0 \\ P(E) = 1 \\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) \end{cases}$$

2.1.2 Probabilité conditionnelle et indépendance

Probabilité conditionnelle de A sous la condition B ("sachant B") :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Si A est indépendant de B :

$$P(A|B) = P(A)$$

alors

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

2.1.3 Formule de Bayes

$$\begin{array}{rcccccccc} B & = & (A_1 \cap B) & \cup & (A_2 \cap B) & \cup & \dots & \cup & (A_m \cap B) \\ P(B) & = & P(A_1 \cap B) & + & P(A_2 \cap B) & + & \dots & + & P(A_m \cap B) \\ & = & P(B|A_1)P(A_1) & + & P(B|A_2)P(A_2) & + & \dots & + & P(B|A_m)P(A_m) \end{array}$$

$$\boxed{P(A_k|B) = \frac{A_k \cap B}{P(B)} = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{j=1}^{m} P(B|A_j)P(A_j)}}$$

2.2 Variables aléatoires

2.2.1 Opérations sur les variables aléatoires

2.2.1.1 Distribution d'une fonction monotone d'une variable aléatoire

$$\boxed{W = G(V)}$$

$$\begin{array}{rcccc|c} & & & & \text{croissante} & \text{décroissante} \\ & & F_W(x) & = & \multicolumn{2}{c}{P(W \leq x)} \\ & & & = & \multicolumn{2}{c}{P(G(V) \leq x)} \\ & & & = & P(V \leq G^{-1}(x)) & P(V \geq G^{-1}(x)) \\ & & & = & F_V(G^{-1}(x)) & 1 - F_V(G^{-1}(x)) \\ F'_W(x) & = & f_W(x) & = & F'_V(G^{-1}(x))\dfrac{1}{G'(G'(x))} & F'_V(G^{-1}(x))\dfrac{-1}{G'(G'(x))} \\ & & & = & f_V(G^{-1}(x))\dfrac{1}{G'(G'(x))} & f_V(G^{-1}(x))\dfrac{-1}{G'(G'(x))} \end{array}$$

2.2.1.2 Distribution de la somme de deux variables aléatoires

$$\boxed{Z = V + W}$$

2.2.1.2.1 Cas discret

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \sum_i \sum_j p_{ij} \\ &= \sum_i \sum_j P(V \leq v_i, W \leq w_i) \end{aligned}$$

2.2.1.2.2 Cas continu

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= P(Z \leq x) \\ F_{V+W}(x) &= P(V \leq x, W \leq x) \\ &= \iint\limits_{\xi+\eta \leq x} f_{(V,W)}(\xi, \eta)\ \delta\xi\ \delta\eta \end{aligned}$$

On remplace par $\begin{cases} \xi &= u \\ \eta &= v - u \\ J &= \begin{pmatrix} \dfrac{\delta\xi}{\delta u} & \dfrac{\delta\xi}{\delta v} \\ \dfrac{\delta\eta}{\delta u} & \dfrac{\delta\eta}{\delta v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1.1 - 0.(-1) = 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} &= \iint\limits_{v \leq x} f_{(V,W)}(u, v-u)\,|1|\ \delta u\ \delta v \\ &= \int\limits_{-\infty}^{x} \delta v \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{(V,W)}(u, v-u)\ \delta u \end{aligned}$$

$$\boxed{f_Z(x) = \frac{\delta F_z(x)}{\delta x} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{(V,W)}(u, x-u)\ \delta u}$$

ou si indépendant

$$\boxed{f_Z(x) = \frac{\delta F_z(x)}{\delta x} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_V\,(u)\,.\ f_W\,(x-u)\ \ \delta u}$$

2.2.1.3 Distribution du produit de deux variables aléatoires

$$\boxed{Z = VW}$$

2.2.1.3.1 Cas continu

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= P(Z \leq x) \\ F_{V.W}(x) &= P(V \leq x, W \leq x) \\ &= \iint\limits_{\xi.\eta \leq x} f_{(V,W)}(\xi, \eta)\ \delta\xi\ \delta\eta \end{aligned}$$

On remplace par $\left\{ \begin{array}{ll} \xi & = u \\ \eta & = \dfrac{v}{u} \\ J & = \begin{pmatrix} \dfrac{\delta\xi}{\delta u} & \dfrac{\delta\xi}{\delta v} \\ \dfrac{\delta\eta}{\delta u} & \dfrac{\delta\eta}{\delta v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{-1}{u^2} & \dfrac{1}{u} \end{pmatrix} = 1.\dfrac{1}{u} - 0.\dfrac{-1}{u^2} = \dfrac{1}{u} \end{array} \right.$

$$= \iint\limits_{v \leq x} f_{(V,W)}(u, v-u)\ \delta u\ \delta v$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{x} \delta v \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{(V,W)}(u, v-u)\ \delta u$$

$$\boxed{f_Z(x) = \frac{\delta F_z(x)}{\delta x} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{(V,W)}\left(u, \frac{x}{u}\right) . \left|\frac{1}{u}\right|\ \delta u}$$

ou si indépendant

$$\boxed{f_Z(x) = \frac{\delta F_z(x)}{\delta x} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_V\left(u\right) .\ f_W\left(\frac{x}{u}\right) . \left|\frac{1}{u}\right|\ \delta u}$$

3 Autres aides

3.1 Tableau du formulaire

	μ	σ^2	$\psi(t)$
$\mathcal{B}(n,p)$	np	$np(1-p)$	$(pe^t+q)^n$
$\mathcal{P}_\lambda$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t-1)}$
Exp_λ	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$
Indicatrice(p)	p	$p(1-p)$	$1+p(e^t-1)$
Uniforme[a,b]	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{1}{t}\frac{e^{tb}-e^{ta}}{b-a}$
$\mathcal{N}(\mu,\sigma)$	μ	σ^2	$e^{\mu t+(\sigma^2t^2)/2}$
$\chi^2_{(n)}$	n	$2n$	$(1-2t)^{-n/2}$
t_n	$0 \quad n>1$	$\frac{n}{n-2} \quad n>2$	aucun
$\mathcal{F}_{(m,n)}$	$\frac{n}{n-2} \quad n>2$	$\frac{2n^2(n+m-2)}{m(n-2^2(m-4)} \quad n>2$	aucun

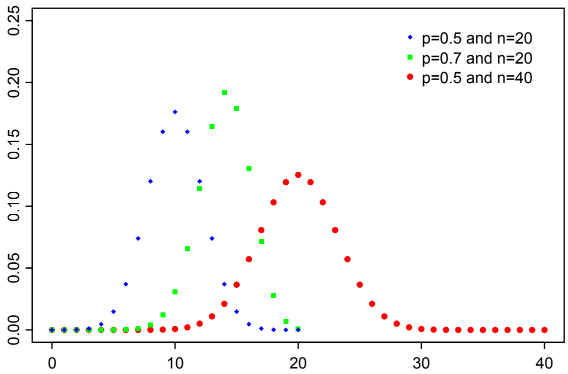
Tableau dans le formulaire disponible à l'examen écrit (en rouge à connaître)

3.2 Densité et répartition

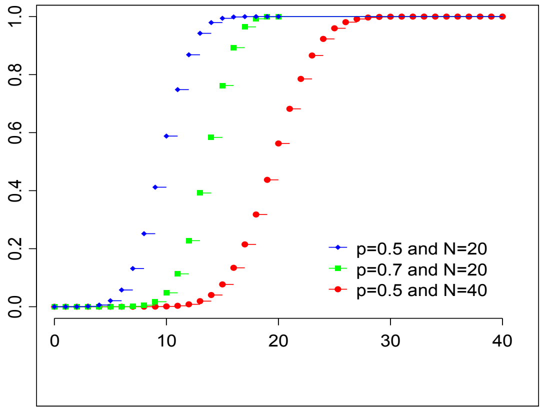
	Fonction de densité $f(x)$	Fonction de répartition $F(x)$
$\mathcal{B}(n,p)$	$P[B(n,p)=k]$	$\sum_{k=0}^{x} P[B(n,p)=k]$
$\mathcal{P}_\lambda$	$P[\mathcal{P}_\lambda=k]=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	$\sum_{k=0}^{x} P[\mathcal{P}_\lambda=k]$
Exp_λ	$\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$	$\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$
Indicatrice(p)	$V_A \Rightarrow \begin{cases}P(V_A=1)=p\\ P(V_A=0)=1-p\end{cases}$	$\begin{cases}0 & x<0\\ 1-p & 0\leq x<1\\ 1 & x\geq 1\end{cases}$
Uniforme[a,b]	$\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\leq x\leq b\\ 0 & sinon\end{cases}$	$\begin{cases}0 & x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & a\leq x<b\\ 1 & x\geq b\end{cases}$
$\mathcal{N}(\mu,\sigma)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}}du$
$\chi^2_{(n)}$	$\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{x^2}{2}} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{\frac{x^2}{2}}du$
t_n	Densité indépendante de σ	
$\mathcal{F}_{(m,n)}$	Densité indépendante de σ	

3.3 Distributions

Distribution Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

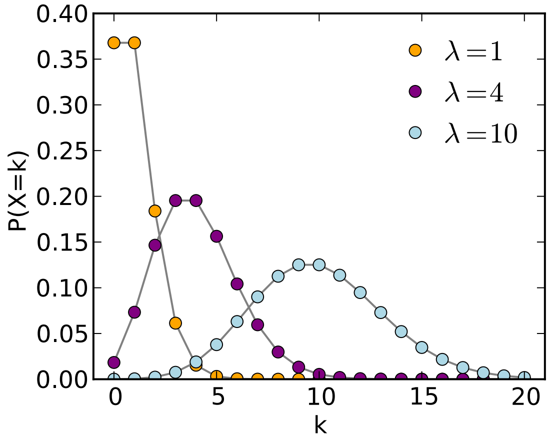


Densité de probabilité

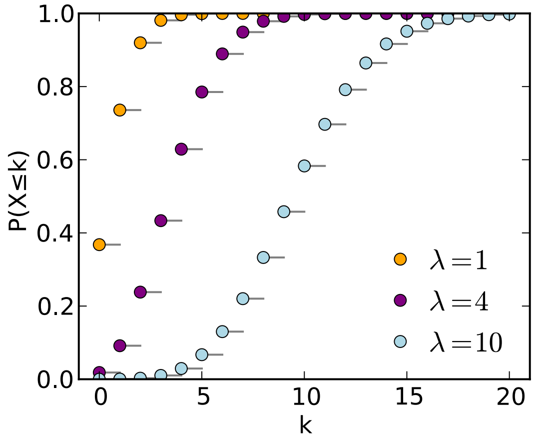


Fonction de répartition

Distribution Poisson $\mathcal{P}_\lambda$

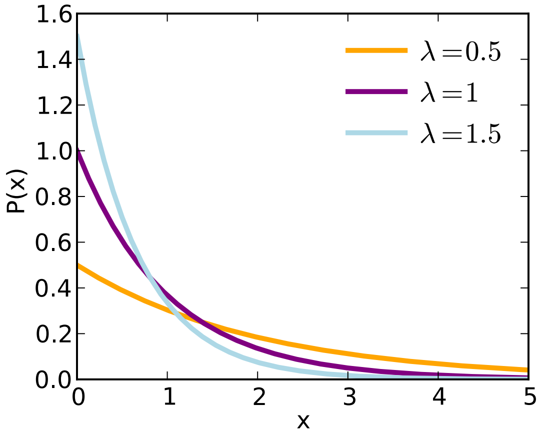


Densité de probabilité

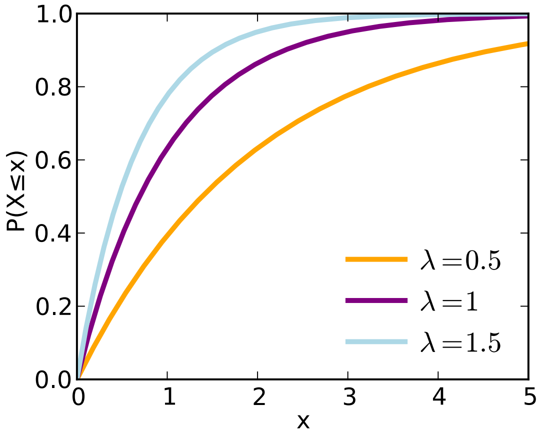


Fonction de répartition

Distribution Exponentielle Exp_λ



Densité de probabilité

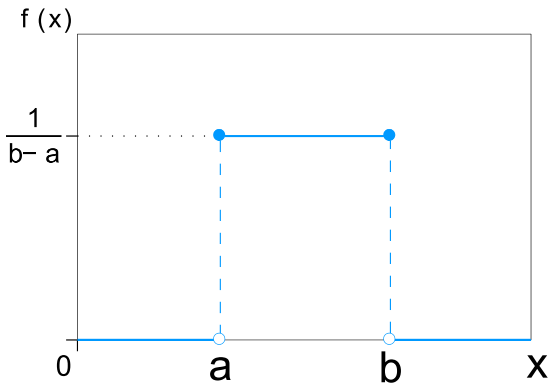


Fonction de répartition

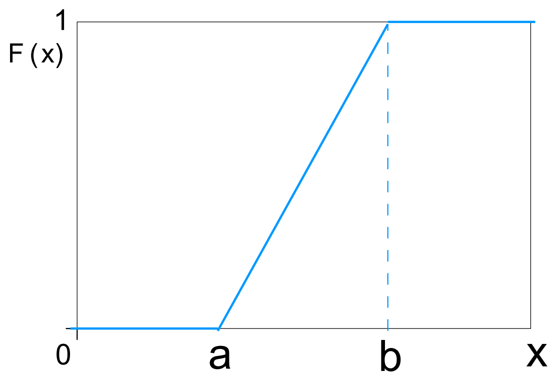
Distribution Indicatrice $\mathcal{V}_p$

images/indicatrice_probability_density_function.pdf	images/indicatrice_cumulative_distribution_function.pdf
Densité de probabilité	Fonction de répartition

Distribution Uniforme $\mathcal{U}[a, b]$

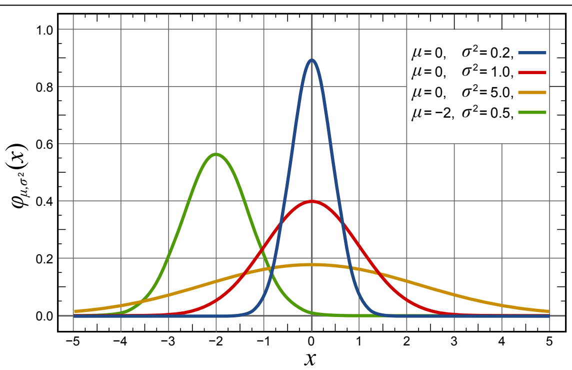


Densité de probabilité

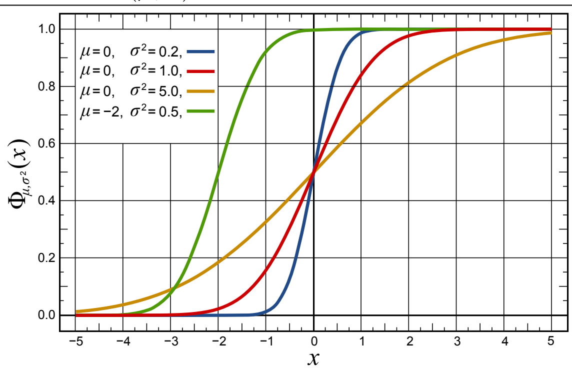


Fonction de répartition

Distribution Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$

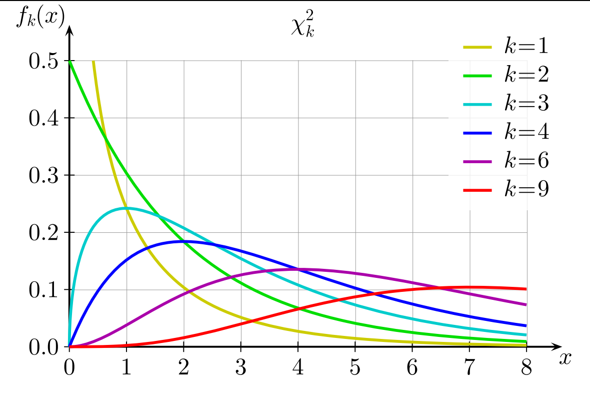


Densité de probabilité

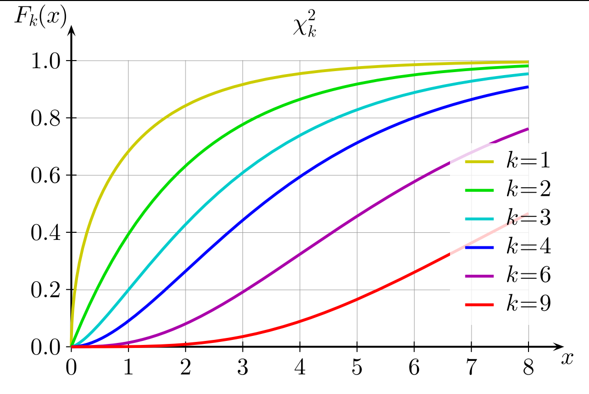


Fonction de répartition

Distribution Khi carré χ^2

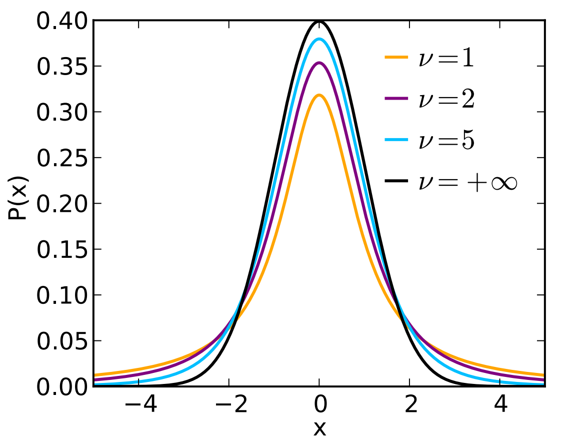


Densité de probabilité

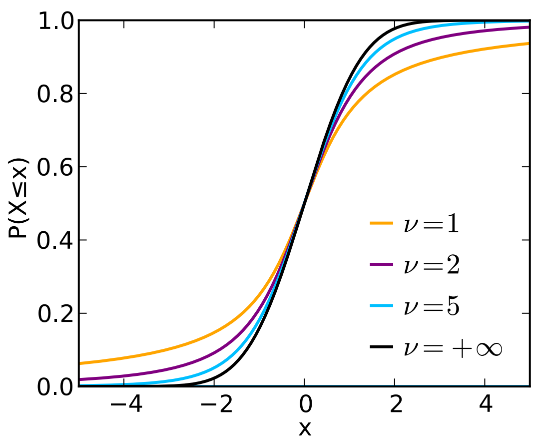


Fonction de répartition

Distribution Student t_n

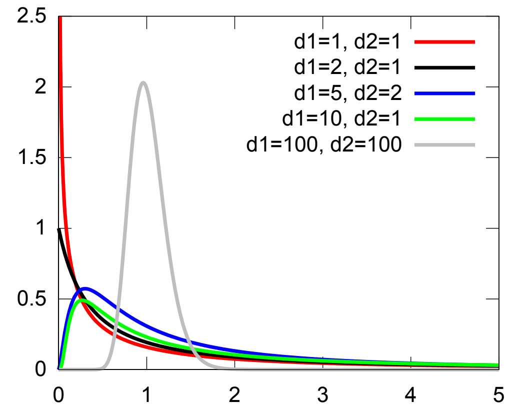


Densité de probabilité

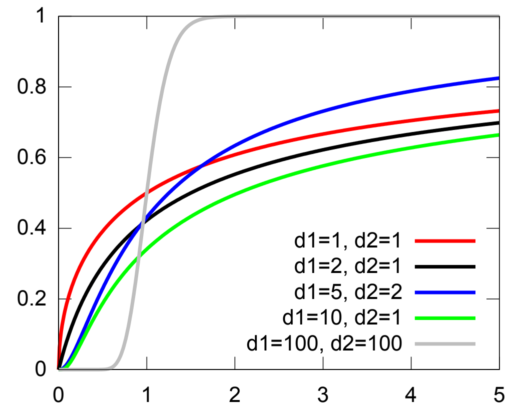


Fonction de répartition

Distribution Fisher-Snedecor $\mathcal{F}_{m,n}$



Densité de probabilité



Fonction de répartition