

MATH-H204 - Calcul des probabilités et statistiques

Yves DE SMET

Résumé du cours

Rodrigue VAN BRANDE

Dylan GONZALEZ

25 juillet 2015

Table des matières

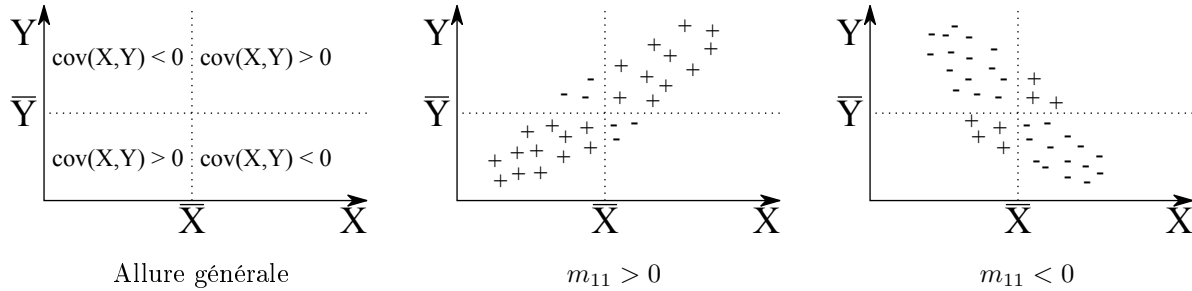
1	La statistique descriptive	3
1.1	Statistique descriptive en 1D	3
1.2	Statistique descriptive en 2D	3
1.2.1	Covariance	3
1.2.2	Le coefficient de corrélation	4
1.2.3	Les droites de régression	5
1.2.4	Variances résiduelles	7
2	La théorie des probabilités	8
2.1	Probabilités	8
2.1.1	Axiomes de la théorie des probabilités	8
2.1.2	Probabilité indépendance	8
2.1.3	Probabilité conditionnelle et indépendance	8
2.1.4	Probabilité conditionnelle inverse et indépendant	8
2.1.5	Formule de Bayes	9
2.2	Variables aléatoires	10
2.2.1	Distribution d'une fonction monotone d'une variable aléatoire	10
2.2.2	Distribution de la somme de deux variables aléatoires	11
2.2.3	Distribution du produit de deux variables aléatoires	12
2.2.4	Distribution de la somme des espérances	13
2.2.5	Distribution du produit des espérances	14
2.3	Variables aléatoires particulières	15
2.3.1	Variable binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	15
2.3.2	Variable de Poisson \mathcal{P}_λ	15
2.3.3	Variable exponentielle négative	15
2.3.4	Variable Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	15
2.3.5	Variable Khi ²	15
2.3.6	Variable Student t_n	15
2.3.7	Variable Snedecor $\mathcal{F}_{(m,n)}$	15
2.4	Théorèmes fondamentaux	16
2.4.1	Inégalité de Bienaymé-Tchebycheff	16
2.4.2	Théorème de Bernoulli ou loi des grands nombres	17
2.4.3	Théorème Central-Limite	18
2.4.4	Théorème de De Moivre	21
3	L'inférence statistique	22
3.1	Distributions échantillonnées	22
3.1.1	Distribution échantillonnées de la moyenne \bar{X}	22
3.1.2	Distribution échantillonnées de la variance S^2	22
3.1.3	Distribution échantillonnées d'une fonction de \bar{X} et s^2	23
3.2	Test d'hypothèse	24
3.3	Intervalles de confiance et tests d'hypothèses	25
3.3.1	Comparaison des moyennes de deux populations normales de deux écart-type σ connu	25
3.3.2	Comparaison des moyennes de deux populations normales de même écart-type σ inconnu	26
3.3.3	Comparaison des moyennes de deux populations quelconques	27
4	Autres	28
4.1	Tableau du formulaire	28
4.2	Densité et répartition	28
4.3	Distributions	29

1 La statistique descriptive

1.1 Statistique descriptive en 1D

1.2 Statistique descriptive en 2D

1.2.1 Covariance



La covariance $|m_{11}| \leq s_1 s_2$

La covariance est le moment d'ordre (1,1) :

$$m_{11} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})$$

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \alpha \\
 &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} \underbrace{(u(x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}))^2}_{\substack{2 \text{ car toujours } \geq 0}} \\
 &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} (u^2(x_i - \bar{x})^2 + 2u(x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) + (y_j - \bar{y})^2) \\
 &\leq u^2 s_1^2 + 2u m_{11} + s_2^2
 \end{aligned}$$

Équation du second degré, on calcule son Δ :

$$\begin{aligned}
 \Delta &\leq 0 \\
 (2m_{11})^2 - 4s_1^2 s_2^2 &\leq 0 \\
 m_{11}^2 - s_1^2 s_2^2 &\leq 0 \\
 m_{11}^2 &\leq s_1^2 s_2^2
 \end{aligned}$$

$$\boxed{|m_{11}| \leq s_1 s_2}$$

La covariance maximale $|m_{11}| = s_1 s_2$

La valeur absolue de la covariance est maximale et vaut $|m_{11}| = s_1 s_2$.

Si les points observés se trouvent sur une droite $ax + by + c = 0$, on a $ax_i + by_i + c = 0$.

On multiplie par $\frac{n_{ij}}{n}$ et on somme sur ij .

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \frac{n_{ij}}{n} (ax_i + by_j + c) \\
&= a \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} x_i + b \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} y_j + c \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} \\
&= a\bar{x} + b\bar{y} + c
\end{aligned}$$

On soustrait $ax_i + by_j + c = 0$ par $a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0$.

$$= a(x_i - \bar{x}) + b(y_j - \bar{y})$$

On utilise $u_0 = \frac{a}{b}$

$$\begin{aligned}
&= u_0 b(x_i - \bar{x}) + \frac{a}{u_0} (y_j - \bar{y}) \\
&= u_0 b(x_i - \bar{x}) + \frac{u_0 b}{u_0} (y_j - \bar{y}) \\
&= u_0 (x_i - \bar{x}) + (y_j - \bar{y})
\end{aligned}$$

L'équation a la même forme que α , du coup...

$$\begin{aligned}
0 &= \Delta \\
&= m_{11}^2 - s_1^2 s_2^2 \\
m_{11}^2 &= s_1^2 s_2^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{|m_{11}| = s_1 s_2}$$

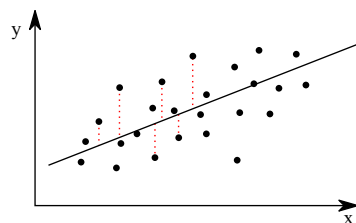
1.2.2 Le coefficient de corrélation

$$\boxed{r = \frac{m_{11}}{s_1 s_2}}$$

Propriétés

1. r sans dimensions ;
2. $r' = r$;
3. $-1 \leq r \leq 1$;
4. $|r| = 1$ car les points observés se trouvent sur une droite non parallèle aux axes.

1.2.3 Les droites de régression



La droite de régression de y en x est la droite qui minimise la somme des carrés des écarts des points observés à cette droite, les écarts étant pris parallèlement à l'axe y . C'est donc la droite d'équation $y = ax + b$ qui minimise la quantité.

$$g(a, b) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} (y_j - a x_i - b)^2$$

Dérivée par rapport à a :

$$\begin{aligned} 0 &= g(a, b)|_a \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} 2(y_j - a x_i - b)(-x_i) \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q -2n_{ij} x_i (y_j - a x_i - b) \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} x_i (-y_j + a x_i + b) \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q -n_{ij} x_i y_j + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} a x_i^2 + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} b x_i \\ &= -1 \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} x_i y_j + a \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} x_i^2 + b \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} x_i \\ \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} x_i y_j &= \underbrace{a \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} x_i^2 + b \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} x_i}_{\substack{\text{Il n'existe aucun terme en } j \\ \text{Donc on peut supprimer la somme } \sum_{j=1}^q}} \\ \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} x_i y_j &= a \sum_{i=1}^p n_{i.} x_i^2 + b \sum_{i=1}^p n_{i.} x_i \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} x_i y_j = a \sum_{i=1}^p n_{i.} x_i^2 + b \sum_{i=1}^p n_{i.} x_i$$

Dérivée par rapport à b :

$$\begin{aligned}
0 &= g(a, b)|_b \\
&= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} 2(y_j - a x_i - b)(-1) \\
&= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q -2n_{ij}(y_j - a x_i - b) \\
&= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij}(-y_j + a x_i + b) \\
&= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q -n_{ij} y_j + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} a x_i + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} b \\
&= -1 \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} y_j + a \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} x_i + b \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} \\
\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} y_j &= a \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} x_i + b \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} \\
n \bar{y} &= a n \bar{x} + b n
\end{aligned}$$

$$\boxed{n \bar{y} = a n \bar{x} + b n}$$

On a obtenu ces deux réponses :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} x_i y_j = a \sum_{i=1}^p n_{i.} x_i^2 + b \sum_{i=1}^p n_{i.} x_i & (1) \\ n \bar{y} = a n \bar{x} + b n & (2) \end{cases}$$

On soustrait le (1) par le double du (2) :

$$\begin{aligned}
&\bar{x} \cdot (2) : \quad n \bar{y} \bar{x} = a n \bar{x}^2 + b n \bar{x} \\
(1) - \bar{x} \cdot (2) : \quad \left(\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} x_i y_j \right) - (n \bar{y} \bar{x}) &= \left(a \sum_{i=1}^p n_{i.} x_i^2 + b \sum_{i=1}^p n_{i.} x_i \right) - (a n \bar{x}^2 + b n \bar{x}) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Pour obtenir à la fin :

$$\boxed{a = \frac{m_{11}}{s_1^2}} \text{ et } \boxed{b = \bar{y} - \frac{m_{11}}{s_1^2} \bar{x}}$$

On remplace dans une droite :

$$\begin{aligned}
y &= ax + b \\
y &= \frac{m_{11}}{s_1^2} x + \bar{y} - \frac{m_{11}}{s_1^2} \bar{x}
\end{aligned}$$

Pour obtenir la droite de regression de y en x :

$$\boxed{y = \frac{m_{11}}{s_1^2} (x - \bar{x}) + \bar{y}}$$

Le raisonnement est symétrique pour le cas de la régression de x en y :

$$\boxed{x = \frac{m_{11}}{s_1^2} (y - \bar{y}) + \bar{x}}$$

1.2.4 Variances résiduelles

La variance résiduelle de y en x est :

$$s_{21}^2 = s_2^2(1 - r^2)$$

Propriété et interprétation

- $s_{21}^2 = 0$ ssi $r = \pm 1$ ssi tous les points observés sont sur une droite ;
- $s_{21}^2 = s_2^2$ ssi $r = 0$ ssi les droites de régression sont parallèles aux axes ;
- $s_2^2 r^2$ représente une certaine proportion de s_2^2 , d'autant plus grande que la dépendance linéaire entre x et y est forte : on peut donc la considérer comme la part de la variance de y qui est expliquée par le lien linéaire entre x et y , tandis que la variance résiduelle s_{21}^2 est la part de la variance de y qui n'est pas expliquée par ce lien linéaire (d'où son nom).

Démonstration

Nous partons de la variance de y en x :

$$\begin{aligned}
 s_{21}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} (y_i - ax_i - b)^2 \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{valeur minimum de } g(a,b)} \\
 &\quad \boxed{a = \frac{m_{11}}{s_1^2}} \text{ et } \boxed{b = \bar{y} - \frac{m_{11}}{s_1^2} \bar{x}} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} \left(y_i - \frac{m_{11}}{s_1^2} x_i - \bar{y} + \frac{m_{11}}{s_1^2} \bar{x} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} \left((y_i - \bar{y}) - \frac{m_{11}}{s_1^2} (x_i - \bar{x}) \right)^2 \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} (y_i - \bar{y})^2 - 2 \frac{m_{11}}{s_1^2} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + \frac{m_{11}^2}{s_1^4} (x_i - \bar{x})^2 \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} (y_i - \bar{y})^2 - 2 \frac{m_{11}}{s_1^2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + \frac{m_{11}^2}{s_1^4} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} (x_i - \bar{x})^2 \\
 &= s_2^2 - 2 \frac{m_{11}}{s_1^2} m_{11} + \frac{m_{11}^2}{s_1^4} s_1^2 \\
 &= s_2^2 - 2 \frac{m_{11}^2}{s_1^2} + \frac{m_{11}^2}{s_1^2} \\
 &= s_2^2 - \frac{m_{11}^2}{s_1^2}
 \end{aligned}$$

On utilise le coefficient de corrélation $r = \frac{m_{11}}{s_1 s_2}$, donc $\frac{m_{11}}{s_1} = r s_2$:

$$\begin{aligned}
 s_2^2 - \frac{m_{11}^2}{s_1^2} &= s_2^2 - (r s_2)^2 \\
 &= s_2^2(1 - r^2)
 \end{aligned}$$

$$s_{21}^2 = s_2^2(1 - r^2)$$

La variance résiduelle de x en y est similaire :

$$s_{12}^2 = s_1^2(1 - r^2)$$

2 La théorie des probabilités

2.1 Probabilités

2.1.1 Axiomes de la théorie des probabilités

$$\left\{ \begin{array}{l} P(E) = 1 \\ P(A) \geq 0 \\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) \end{array} \right. \quad \forall A \subset E$$

2.1.2 Probabilité indépendance

Si A et B sont indépendants alors

- A et \bar{B} sont indépendants ;
- \bar{A} et \bar{B} sont indépendants ;
- \bar{A} et B sont indépendants.

2.1.3 Probabilité conditionnelle et indépendance

Probabilité conditionnelle de A sous la condition B ("sachant B ") :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\text{Si } A \text{ est indépendant de } B : \left\{ \begin{array}{l} P(A \cap B) = P(A)P(B) \\ P(A|B) = P(A) \\ P(B|A) = P(B) \end{array} \right.$$

Une des propriétés des 3 suffit.

Démonstration

La probabilité conditionnelle respecte les axiomes de la théorie des probabilités

$$\begin{aligned} P(E|A) &= \frac{P(E \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1 \\ P(B|A) &= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \geq 0 \\ X \cap Y \neq \emptyset &\Rightarrow \frac{P(X \cup Y|A)}{\frac{P((X \cup Y) \cap A)}{P(A)}} \\ &= \frac{P((X \cap A) \cup (Y \cap A))}{\frac{P(X \cap A) + P(Y \cap A)}{P(A)}} \\ &= \frac{P(X|A)P(A) + P(Y|A)P(A)}{P(A)} \\ &= P(X|A) + P(Y|A) \end{aligned}$$

2.1.4 Probabilité conditionnelle inverse et indépendant

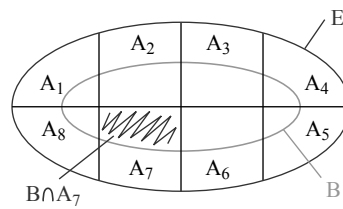
$$P(A|B) = P(A|\bar{B})$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
P(A|B) &= P(A|\bar{B}) \\
\frac{P(A \cap B)}{P(B)} &= \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} \\
\frac{P(A)P(B)}{P(B)} &= \frac{P(A)P(\bar{B})}{P(\bar{B})} \\
P(A) &= P(A)
\end{aligned}$$

2.1.5 Formule de Bayes

Cette formule est utilisée dans le cas où un événement B peut survenir à cause d'évènement A_i incompatibles. Par exemple : une pièce défectueuse fabriquée par plusieurs machines différentes.



$$\begin{aligned}
B &= (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_m \cap B) \\
P(B) &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_m \cap B) \\
&= P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \dots + P(B|A_m)P(A_m)
\end{aligned}$$

$$P(A_k|B) = \frac{A_k \cap B}{P(B)} = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{j=1}^m P(B|A_j)P(A_j)}$$

2.2 Variables aléatoires

2.2.1 Distribution d'une fonction monotone d'une variable aléatoire

$$\boxed{W = G(V)}$$

Cas discret

$$\begin{aligned} F_W(x) &= P(W \leq x) \\ &= P(G(V) \leq x) \\ &= P(V \leq G^{-1}(x)) \\ &= F_V(G^{-1}(x)) \end{aligned}$$

Cas continu

	croissante	décroissante
$f_W(x)$	$F'_W(x)$	
=	$(F_W(x))'$	
=	$(P(W \leq x))'$	
=	$(P(G(V) \leq x))'$	
=	$(P(V \leq G^{-1}(x)))'$	$(P(V \geq G^{-1}(x)))'$
=	$(F_V(G^{-1}(x)))'$	$(1 - F_V(G^{-1}(x)))'$
=	$f_V(G^{-1}(x)) \frac{1}{G'(G^{-1}(x))}$	$f_V(G^{-1}(x)) \frac{-1}{G'(G^{-1}(x))}$

2.2.2 Distribution de la somme de deux variables aléatoires

$$\boxed{Z = V + W}$$

Cas discret

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \sum_i \sum_j p_{ij} \\ &= \sum_i \sum_j P(V \leq v_i, W \leq w_i) \quad \text{tel que } v_i + w_i \leq x \end{aligned}$$

Cas continu

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= P(Z \leq x) \\ F_{V+W}(x) &= P(V \leq \xi, W \leq \eta) \quad \text{tel que } v_i + w_i \leq x \\ &= \iint_{\xi+\eta \leq x} f_{(V,W)}(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta \\ \text{On remplace par } &\left\{ \begin{array}{l} \xi = u \\ \eta = v - u \\ J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \xi}{\partial v} \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1.1 - 0.(-1) = 1 \end{array} \right. \\ &= \iint_{v \leq x} f_{(V,W)}(u, v - u) |1| \, du \, dv \\ &= \int_{-\infty}^x dv \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(V,W)}(u, v - u) \, du \end{aligned}$$

$$\boxed{f_Z(x) = \frac{\delta F_Z(x)}{\delta x} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(V,W)}(u, x - u) \, du}$$

ou si indépendant

$$\boxed{f_Z(x) = \frac{\delta F_Z(x)}{\delta x} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_V(u) \cdot f_W(x - u) \, du}$$

2.2.3 Distribution du produit de deux variables aléatoires

$$\boxed{Z = VW}$$

Cas continu

$$\begin{aligned}
 F_Z(x) &= P(Z \leq x) \\
 F_{V,W}(x) &= P(V \leq \xi, W \leq \eta) \quad \text{tel que } v_i + w_i \leq x \\
 &= \iint_{\xi, \eta \leq x} f_{(V,W)}(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta \\
 \text{On remplace par } &\begin{cases} \xi = u \\ \eta = \frac{v}{u} \\ J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \xi}{\partial v} \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{u^2} & \frac{1}{u} \end{pmatrix} = 1 \cdot \frac{1}{u} - 0 \cdot \frac{-1}{u^2} = \frac{1}{u} \end{cases} \\
 &= \iint_{\substack{v \leq x \\ u \leq x}} f_{(V,W)}(u, v-u) \, du \, dv \\
 &= \int_{-\infty}^x dv \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(V,W)}(u, v-u) \, du
 \end{aligned}$$

$$\boxed{f_Z(x) = \frac{\delta F_Z(x)}{\delta x} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(V,W)}\left(u, \frac{x}{u}\right) \cdot \left|\frac{1}{u}\right| \, du}$$

ou si indépendant

$$\boxed{f_Z(x) = \frac{\delta F_Z(x)}{\delta x} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_V(u) \cdot f_W\left(\frac{x}{u}\right) \cdot \left|\frac{1}{u}\right| \, du}$$

2.2.4 Distribution de la somme des espérances

$$\boxed{Z = V + W}$$

Demonstration

$$\begin{aligned}
 E(Z) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_{(V+W)}(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{(V,W)}(u, x-u) du dv \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} u = \xi \\ x = \xi - \eta \end{array} \right. \\
 \text{On remplace par } &\left\{ \begin{array}{l} J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot -1 - 0 \cdot 1 = -1 \end{array} \right. \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi + \eta) f_{(V,W)}(\xi, \eta) |-1| d\xi d\eta \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi f_{(V,W)}(\xi, \eta) d\xi d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \eta f_{(V,W)}(\xi, \eta) d\xi d\eta \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \xi f_V(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \eta f_W(\eta) d\eta \\
 &= E(V) + E(W)
 \end{aligned}$$

2.2.2 page 11

2.2.5 Distribution du produit des espérances

$$\boxed{Z = V.W}$$

Demonstration

Uniquement pour des variables indépendantes

$$\begin{aligned}
 E(Z) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_{(V,W)}(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_V(u) f_W\left(\frac{x}{u}\right) \left|\frac{1}{u}\right| du dv && \text{2.2.3 page 12} \\
 \text{On remplace par } &\left\{ \begin{array}{l} u = \xi \\ x = \xi\eta \\ J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \eta & \xi \end{pmatrix} = 1.\xi - 0.\eta = \xi \end{array} \right. \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi\eta) f_{(V,W)}(\xi, \eta) |\xi| d\xi d\eta \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi f_V(\xi) f_W(\eta) d\xi d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \eta f_{(V,W)}(\xi, \eta) d\xi d\eta \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \xi f_V(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \eta f_W(\eta) d\eta \\
 &= E(V).E(W)
 \end{aligned}$$

2.3 Variables aléatoires particulières

2.3.1 Variable binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

2.3.2 Variable de Poisson \mathcal{P}_λ

2.3.3 Variable exponentielle négative

2.3.4 Variable Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$

Propriété d'opposé

Soit \bar{X}_1 et \bar{X}_2 deux variables normales. Si \bar{X}_2 est l'opposé de \bar{X}_1 ($\bar{X}_2 = -\bar{X}_1$) alors

$$\boxed{\bar{X}_1 \sim N(\mu_1, \sigma) \text{ et } \bar{X}_2 \sim N(-\mu_1, \sigma)}$$

Propriété d'addition

Soit $N(\mu_1, \sigma_1)$ et $N(\mu_2, \sigma_2)$ deux variables normales indépendantes et $\psi_1(t)$ et $\psi_2(t)$ leurs fonctions génératrices.

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \psi_1(t) \cdot \psi_2(t) \\ &= e^{\mu_1 + t + \sigma_1^2 t^2 / 2} \cdot e^{\mu_2 + t + \sigma_2^2 t^2 / 2} \\ &= e^{(\mu_1 + \mu_2)t + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2} \end{aligned}$$

On obtient bien une fonction génératrice d'une normale de paramètres $(\mu_1 + \mu_2)$ et $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

$$\boxed{N(\mu_1, \sigma_1) + N(\mu_2, \sigma_2) = N\left(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)}$$

2.3.5 Variable Khi²

2.3.6 Variable Student t_n

2.3.7 Variable Snedecor $\mathcal{F}_{(m,n)}$

2.4 Théorèmes fondamentaux

2.4.1 Inégalité de Bienaymé-Tchebycheff

La proportion d'individus s'écartant de la moyenne d'une distribution de plus k fois l'écart-type (σ) ne dépasse jamais $\frac{1}{k^2}$:

$$\boxed{\frac{1}{k^2} \geq P(|V - \mu| \geq k\sigma)}$$

Démonstration

Cas continu

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\mu - k\sigma} (x - \mu)^2 f(x) dx}_{\substack{x \leq \mu - k\sigma \\ x - \mu \leq -k\sigma \\ (x - \mu)^2 \geq (k\sigma)^2}} + \underbrace{\int_{\mu - k\sigma}^{\mu + k\sigma} (x - \mu)^2 f(x) dx}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{\mu + k\sigma}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx}_{\substack{x \geq \mu + k\sigma \\ x - \mu \geq k\sigma \\ (x - \mu)^2 \geq (k\sigma)^2}} \\ \sigma^2 &\geq \int_{-\infty}^{\mu - k\sigma} (k\sigma)^2 f(x) dx + \int_{\mu + k\sigma}^{\infty} (k\sigma)^2 f(x) dx \\ &\geq (k\sigma)^2 \int_{-\infty}^{\mu - k\sigma} f(x) dx + (k\sigma)^2 \int_{\mu + k\sigma}^{\infty} f(x) dx \\ \frac{1}{k^2} &\geq P(V - \mu \leq -k\sigma) + P(V - \mu \geq k\sigma) \\ &\geq P(|V - \mu| \geq k\sigma) + P(|V - \mu| \geq k\sigma) \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{k^2} \geq P(|V - \mu| \geq k\sigma)}$$

Cas discret

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum_i p_i (x_i - \mu)^2 \\ &= \sum_{i; x_i \leq \mu - k\sigma} p(x_i - \mu)^2 + \sum_{i; \mu - k\sigma < x_i < \mu + k\sigma} p(x_i - \mu)^2 + \sum_{i; \mu + k\sigma \leq x_i} p(x_i - \mu)^2 \\ \sigma^2 &\geq \sum_{i; x_i \leq \mu - k\sigma} p(x_i - \mu)^2 + \sum_{i; \mu + k\sigma \leq x_i} p(x_i - \mu)^2 \\ &\geq k^2 \sigma^2 \sum_{i; x_i \leq \mu - k\sigma} p_i + \sum_{i; \mu + k\sigma \leq x_i} p_i \\ \frac{1}{k^2} &\geq \sum_{i; x_i \leq \mu - k\sigma} p_i + \sum_{i; \mu + k\sigma \leq x_i} p_i \\ &\geq P(V \leq \mu - k\sigma) + P(V \geq \mu + k\sigma) \\ &\geq P(V - \mu \leq -k\sigma) + P(V - \mu \geq k\sigma) \\ &\geq P(|V - \mu| \geq k\sigma) + P(|V - \mu| \geq k\sigma) \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{k^2} \geq P(|V - \mu| \geq k\sigma)}$$

2.4.2 Théorème de Bernoulli ou loi des grands nombres

Lors de n répétitions d'une expérience aléatoire, la fréquence relative $\frac{F}{n}$ d'un évènement tend vers sa probabilité p d'exister lorsque $n \rightarrow \infty$

$$\frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \geq P\left(\left|\frac{F}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Démonstration

On part avec le théorème de Bienaymé-Tchebycheff

$$\frac{1}{k^2} \geq P(|V - \mu| \geq k\sigma)$$

Et on considère une binomiale $V = B(n, p)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2} &\geq P(|B(n, p) - np| \geq k\sqrt{np(1-p)}) \\ &\geq P\left(\frac{|B(n, p) - np|}{n} \geq \frac{k\sqrt{np(1-p)}}{n}\right) \\ &\geq P\left(\left|\frac{B(n, p)}{n} - p\right| \geq k\sqrt{\frac{np(1-p)}{n^2}}\right) \\ &\geq P\left(\left|\frac{B(n, p)}{n} - p\right| \geq k\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \end{aligned}$$

On pose $k\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \epsilon$ et $B(n, p) = F$

$$\begin{cases} k\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} &= \epsilon \\ k &= \epsilon \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \\ k^2 &= \frac{p(1-p)}{\epsilon^2 n} \\ \frac{1}{k^2} &= \frac{p(1-p)}{\epsilon^2 n} \end{cases}$$

$$\frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \geq P\left(\left|\frac{F}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

2.4.3 Théorème Central-Limite

Ce théorème stipule que si V est une somme de n variables aléatoires (quelconques) indépendantes

$$V = X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$$

alors sa variable réduite $\frac{V - \mu}{\sigma}$ tend vers une gaussienne $N(0, 1)$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

$$\boxed{\frac{V - E(V)}{D(V)} = \frac{V - \mu}{\sigma} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0, 1)}$$

Démonstration

On pose d'abord les calculs de l'espérance et de l'écart-type de la somme de variable aléatoire V , pour un de ses éléments V_i , pour la somme de variable centrée W et pour un de ses éléments W_i :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} V & = & \sum_{i=1}^n V_i \quad (1) \\ E(V_i) & = & \hat{\mu} \quad (2) \\ D(V_i) & = & \hat{\sigma} \quad (3) \\ E(V) & = & \sum_{i=1}^n E(V_i) \\ & = & n\hat{\mu} \quad (4) \\ D(V) & = & \sqrt{D^2(V)} \\ & = & \sqrt{\sum_{i=1}^n D^2(V_i)} \\ & = & \sqrt{n\hat{\sigma}^2} \\ & = & \sqrt{n} \hat{\sigma} \quad (5) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{lcl} W_i & = & V_i - \hat{\mu} \quad (6) \\ W & = & \sum_{i=1}^n W_i \\ & = & \sum_{i=1}^n (V_i - \hat{\mu}) \\ & = & \sum_{i=1}^n (V_i) - n\hat{\mu} \\ & = & V - E(V) \quad (7) \\ E(W_i) & = & E(V_i - \hat{\mu}) \\ & = & E(V_i) - \hat{\mu} \\ & = & \hat{\mu} - \hat{\mu} = 0 \quad (8) \\ D^2(W_i) & = & D^2(V_i - \hat{\mu}) \\ & = & D^2(V_i) \\ & = & \hat{\sigma}^2 \quad (9) \end{array} \right.$$

On commence avec la fonction génératrice des moments $\psi_V(t) = E(e^{tV})$

$$\begin{aligned} \psi_Z(t) &= E(e^{tZ}) \\ &= E\left(e^{\left(t \frac{V - \mu}{\sigma}\right)}\right) \\ &= E\left(e^{\left(\frac{t}{\sigma}(V - \mu)\right)}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{On remplace par } \left\{ \begin{aligned}
V - \mu &= \sum_{i=1}^n V_i - \mu && \text{car propriété (1)} \\
&= \sum_{i=1}^n V_i - E(V) && \text{car propriété (4)} \\
&= \sum_{i=1}^n V_i - E\left(\sum_{i=1}^n V_i\right) && \text{car propriété (1)} \\
&= \sum_{i=1}^n V_i - \sum_{i=1}^n E(V_i) \\
&= \sum_{i=1}^n V_i - \sum_{i=1}^n \hat{\mu} && \text{car propriété (2)} \\
&= \sum_{i=1}^n V_i - \hat{\mu}
\end{aligned} \right. \\
\\
= E\left(e^{\left(\frac{t}{\sigma} \sum_{i=1}^n (V_i - \hat{\mu})\right)}\right) \\
= E\left(e^{\left(\frac{t}{\sigma} \sum_{i=1}^n (W_i)\right)}\right) \quad \text{car propriété (6)}
\end{aligned}$$

$$\text{Propriété : } Z = V + W (\text{indépendant}) \left\{ \begin{aligned}
\psi_Z &= E(e^{tZ}) \\
&= E(e^{t(V+W)}) \\
&= E(e^{tV} e^{tW}) \\
&= E(e^{tV}) E(e^{tW}) \\
&= \psi_V \psi_W
\end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
&= \psi_{W_1} \left(\frac{t}{\sigma}\right) \psi_{W_2} \left(\frac{t}{\sigma}\right) \dots \psi_{W_n} \left(\frac{t}{\sigma}\right) \\
&= \left(\psi_{W_i} \left(\frac{t}{\sigma}\right)\right)^n
\end{aligned}$$

$$\boxed{\psi_Z(t) = E(e^{tZ}) = \left(\psi_{W_i} \left(\frac{t}{\sigma}\right)\right)^n}$$

Maintenant nous développons $\psi_{W_i}(t)$ par le théorème de Taylor :

$$\left\{ \begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x) \\
&= f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + R_n(x)
\end{aligned} \right.$$

$$\boxed{\begin{aligned}
D^2(W_i) &= E(W_i^2) - E^2(W_i) \\
E(W_i^2) &= D^2(W_i) + E^2(W_i) \\
&= \hat{\sigma}^2 + 0^2
\end{aligned}}$$

$$\left\{ \begin{aligned}
\psi_{W_i}(t) &= 1 + E(W_i)t + E(W_i^2)\frac{t^2}{2} + R(t^3) \\
&= 1 + 0t + \hat{\sigma}^2\frac{t^2}{2} + R(t^3) \quad \text{car propriété (8) et (9)}
\end{aligned} \right.$$

$$\boxed{Z = \frac{W}{\sqrt{n\hat{\sigma}}} = \frac{V - \mu}{\sigma} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0, 1)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_Z(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\psi_{W_i} \left(\frac{t}{\sqrt{n\hat{\sigma}}} \right)^n \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t^2}{2n} + R(t^3) \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t^2}{2n} \right)^n \\ &= e^{\frac{t^2}{2}} \end{aligned}$$

On a donc une allure d'une fonction génératrice d'une $N(0, 1)$

$$\boxed{\psi_Z(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0, 1)}$$

2.4.4 Théorème de De Moivre

C'est un cas particulier du théorème Central-Limite puisqu'une binomiale est bien une somme de variables quelconques de mêmes distributions (à savoir, des variables indicatrices). La variable binomiale est asymptotiquement normale lorsque $n \rightarrow \infty$.

$$\boxed{\frac{B(n, p) - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} N(0, 1)}$$

Démonstration

On part donc avec le théorème de Central-Limite :

$$\frac{V - E(V)}{D(V)} = \frac{V - \mu}{\sigma} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} N(0, 1)$$

Et on considère une binomiale $V = B(n, p)$.

$$\boxed{\frac{B(n, p) - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} N(0, 1)}$$

3 L'inférence statistique

3.1 Distributions échantillonnées

3.1.1 Distribution échantillonnées de la moyenne \bar{X}

3.1.2 Distribution échantillonnées de la variance S^2

3.1.3 Distribution échantillonnées d'une fonction de \bar{X} et s^2

Il résulte de ce qui précède que lorsque la population a une distribution normale, la variable

$$\sqrt{n-1} \frac{\bar{X} - \mu}{S} \sim t_{(n-1)}$$

Démonstration

La définition d'une chi carré $\chi^2_{(n-1)}$ est une somme de normale au carré $\sum_{i=1}^{n-1} (N_i(0, 1))^2$.

Or on a vu que $\chi^2_{(n-1)} = \frac{nS^2}{\sigma^2}$, donc

$$\begin{aligned} \chi^2_{(n-1)} &= \sum_{i=1}^{n-1} (N_i(0, 1))^2 \\ \frac{nS^2}{\sigma^2} &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{N_i(0, \sigma)}{\sigma} \right)^2 \\ \frac{nS^2}{\sigma^2} &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(N_i(0, \sigma))^2}{\sigma^2} \\ nS^2 &= \sum_{i=1}^{n-1} (N_i(0, \sigma))^2 \\ nS^2 \frac{1}{n-1} &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (N_i(0, \sigma))^2 \\ \left(\frac{nS^2}{n-1} \right)^{\frac{-1}{2}} &= \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (N_i(0, \sigma))^2 \right)^{\frac{-1}{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{\frac{nS^2}{n-1}}} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (N_i(0, \sigma))^2}} \\ \frac{N(0, \sigma)}{S \sqrt{\frac{n}{n-1}}} &= \frac{N(0, \sigma)}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (N_i(0, \sigma))^2}} \\ \frac{N(0, \sigma)}{S \sqrt{\frac{n}{n-1}}} &= t_{(n-1)} \end{aligned}$$

On obtient bien une student $t_{(n-1)}$ à $n-1$ degrés de liberté (2.3.6 page 15). On va donc remplacer la normale $N(0, \sigma)$ dans l'équation par :

$$\begin{cases} \bar{X} & \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{1}{\sqrt{n}}} & \sim N(0, \sigma) \\ \sqrt{n}(\bar{X} - \mu) & \sim N(0, \sigma) \end{cases}$$

$$t_{(n-1)} = \frac{N(0, \sigma)}{S \sqrt{\frac{n}{n-1}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S \sqrt{\frac{n}{n-1}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S \frac{1}{\sqrt{n-1}}} = \sqrt{n-1} \frac{\bar{X} - \mu}{S}$$

$$\boxed{t_{(n-1)} = \sqrt{n-1} \frac{\bar{X} - \mu}{S}}$$

3.2 Test d'hypothèse

Erreur de première espèce est de rejeter une hypothèse alors qu'elle est vraie. Le risque α de commettre cette erreur est ϵ ;

Erreur de seconde espèce est d'accepter une hypothèse alors qu'elle est fausse. Si on accepte une moyenne μ_0 alors qu'elle vaut en réalité μ_1 , alors le risque de commettre cette erreur est

$$\begin{aligned}\beta &= P\left(\mu_0 - u_{\beta/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu_0 + u_{\beta/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ &\left\{ \begin{array}{l} \text{où } \bar{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1) \end{array} \right. \\ &= P\left(\mu_0 - u_{\beta/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq N(0, 1) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \mu_1 \leq \mu_0 + u_{\beta/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ &= P\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma} \sqrt{n} - u_{\beta/2} \leq N(0, 1) \leq \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma} \sqrt{n} + u_{\beta/2}\right)\end{aligned}$$

Puissance d'un test est la valeur $1 - \beta$, c'est à dire la probabilité de rejeter l'hypothèse alors qu'elle est fausse.

3.3 Intervalles de confiance et tests d'hypothèses

3.3.1 Comparaison des moyennes de deux populations normales de deux écart-type σ connu

On commence avec deux moyennes des deux populations :

$$\bar{X}_1 \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}\right)$$

$$\bar{X}_2 \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}}\right)$$

Maintenant nous devons faire une soustraction de deux normales $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$, pour faire cela nous prenons l'opposé d'une normale et nous les additionnons $\bar{X}_1 + (-\bar{X}_2)$ grace à la propriété d'opposé d'une normale 2.3.4 page 15 et la propriété d'addition 2.3.4 page 15.

$$\begin{aligned}\bar{X}_1 + (-\bar{X}_2) &= N\left(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}}\right)^2}\right) \\ &= N\left(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)\end{aligned}$$

Ces deux variables étant indépendantes, on en déduit que

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

A tout $\epsilon > 0$, on peut donc associé un nombre tel que

$$P(-u_{\epsilon/2} \leq T \leq u_{\epsilon/2}) = 1 - \epsilon$$

d'où on peut donc déduire un intervalle de confiance pour $\mu_1 - \mu_2$. D'autre part on rejettera l'hypothèse $\mu_1 = \mu_2$ si

$$\frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > u_{\epsilon/2}$$

3.3.2 Comparaison des moyennes de deux populations normales de même écart-type σ inconnu

On commence avec deux moyennes des deux populations :

$$\bar{X}_1 \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}\right)$$

$$\bar{X}_2 \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}\right)$$

Maintenant nous devons faire une soustraction de deux normales $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$, pour faire cela nous prenons l'opposé d'une normale et nous les additionnons $\bar{X}_1 + (-\bar{X}_2)$ grâce à la propriété d'opposé d'une normale 2.3.4 page 15 et la propriété d'addition 2.3.4 page 15.

$$\begin{aligned}\bar{X}_1 + (-\bar{X}_2) &= N\left(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}\right)^2}\right) \\ &= N\left(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}}\right) \\ &= N\left(\mu_1 - \mu_2, \sigma \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}\right)\end{aligned}$$

et avec un $\chi^2_{(n_1-1+n_2-1)}$ où n = nombre de degré de libertés

$$\begin{aligned}??? &= \text{au début}??? \\ \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{\sigma^2} &= \chi^2_{(n_1+n_2-2)} \\ \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{\sigma^2}} &= \frac{\sqrt{\chi^2_{(n_1+n_2-2)}}}{\sqrt{n}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n} \chi^2_{(n_1+n_2-2)}} \\ ??? &= \text{au final}???\end{aligned}$$

Ces deux variables étant indépendantes, on en déduit que

$$T = \underbrace{\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}}}_{N(0,1)} \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}}}_{\chi^2_{n_1-1+n_2-1}}$$

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}} \sqrt{\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}} \sim t_{n_1-1+n_2-1}$$

A tout $\epsilon > 0$, on peut donc associé un nombre tel que

$$P(-t_{\epsilon/2} \leq T \leq t_{\epsilon/2}) = 1 - \epsilon$$

d'où on peut donc déduire un intervalle de confiance pour $\mu_1 - \mu_2$. D'autre part on rejettera l'hypothèse $\mu_1 = \mu_2$ si

$$\frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}} \sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}} > t_{\epsilon/2}$$

3.3.3 Comparaison des moyennes de deux populations quelconques

Si n_1 et n_2 sont suffisamment grands (au moins 20), alors $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ a une distribution approximativement normale :

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

où on remplace σ_1 et σ_2 par s_1 et s_2 lorsqu'ils sont inconnus. On rejette alors l'hypothèse $\mu_1 = \mu_2$ lorsque

$$\frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} > u_{\epsilon/2}$$

4 Autres

4.1 Tableau du formulaire

	μ	σ^2	$\psi(t)$
$\mathcal{B}(n, p)$	np	$np(1-p)$	$(pe^t + q)^n$
\mathcal{P}_λ	λ	λ	$e^{\lambda(e^t-1)}$
Exp_λ	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$
Indicatrice(p)	p	$p(1-p)$	$1 + p(e^t - 1)$
Uniforme[a, b]	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{1}{t} \frac{e^{tb} - e^{ta}}{b-a}$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	μ	σ^2	$e^{\mu t + (\sigma^2 t^2)/2}$
$\chi_{(n)}^2$	n	$2n$	$(1 - 2t)^{-n/2}$
t_n	$0 \quad n > 1$	$\frac{n}{n-2} \quad n > 2$	aucun
$\mathcal{F}_{(m,n)}$	$\frac{n}{n-2} \quad n > 2$	$\frac{2n^2(n+m-2)}{m(n-2)^2(m-4)} \quad n > 2$	aucun

Tableau dans le formulaire disponible à l'examen écrit (en rouge à connaître)

4.2 Densité et répartition

	Fonction de densité $f(x)$	Fonction de répartition $F(x)$
$\mathcal{B}(n, p)$	$P[B(n, p) = k]$	$\sum_{k=0}^x P[B(n, p) = k]$
\mathcal{P}_λ	$P[\mathcal{P}_\lambda = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$\sum_{k=0}^x P[\mathcal{P}_\lambda = k]$
Exp_λ	$\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$
Indicatrice(p)	$V_A \Rightarrow \begin{cases} P(V_A = 1) = p \\ P(V_A = 0) = 1 - p \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - p & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$
Uniforme[a, b]	$\begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du$
$\chi_{(n)}^2$	$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$
t_n	Densité indépendante de σ	
$\mathcal{F}_{(m,n)}$	Densité indépendante de σ	

4.3 Distributions

