Ecuaciones lineales en una variable

Prof. Anneliesse Sánchez
Adaptada por Caroline Rodriguez
Departamento de Matemáticas
UPR - Arecibo

¿Qué es una ecuación?

Una ecuación es una oración que expresa la igualdad entre dos expresiones algebraicas. Esto es,

expresión algebraica = expresión algebraica

En esta parte del curso estudiaremos la ecuaciones lineales en una variable

Ejemplos:

$3x – 6 = 8$

$5x – 2 = 2x + 5$

$2(x – 7) = 5(x + 1) – 3$

Ecuaciones lineales

Una ecuación es lineal, si las expresiones a ambos lados del signo de igualdad son polinomios de grado 1 ó 0, donde por lo menos uno de ellos es de grado 1.

Ejemplos:

$2x + 3 = 8$ $\qquad$ $-4 = 6(2x – 5) + 3$ $\qquad$ $2(x+3) = 7x - 2$

grado 1 grado 0 grado 0 grado 1 grado 1 grado 1

Solución de una ecuación lineal

La **solución** de una ecuación, es el valor que se le asigna a la variable para que ambos lados de la ecuación sean equivalentes. Decimos que este valor satisface la ecuación.

La solución de ecuación lineal es **única**.

Ejemplo 1: Determine si $x = 2$ es solución de: $4x – 1 = 6x + 2$

Sustituimos 2 en la x y tenemos:

$4(2) – 1 = 6(2) + 2$

$8 -1 = 12 + 2$

$7 = 14$ falso

Concluimos que $x=2$ NO es solución de la ecuación

$4x – 1 = 6x + 2$.

Solución de una ecuación lineal

Ejemplo 2: Determine si $x = -1$ es solución de: $3x – 1 = 6x + 2$

Sustituimos -1 en la x y tenemos:

$$3(-1) – 1 = 6(-1) + 2$$

$$-3 -1 = -6 + 2$$

$$-4 = -4 \quad \text{cierto}$$

Por lo tanto concluimos que $x = -1$ SÍ es solución de la ecuación $3x – 1 = 6x + 2$.

Ejercicios:

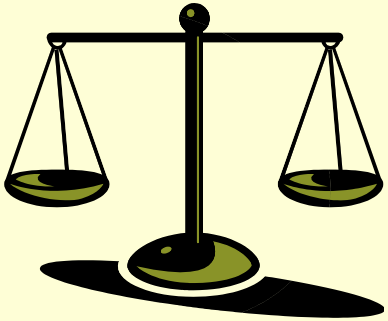
Determine si el valor de la derecha es solución o no de la ecuación.

a) $4(x - 3) + 4 = 2x + 6$; 7

¿Cómo resolvemos una ecuación lineal?

El signo de igualdad nos indica que existe un **balance** entre dos expresiones; o sea que son ***equivalentes***.

Para mantener ese balance, si aplicamos alguna operación matemática a un lado de la ecuación, hay que **aplicar la misma operación** al otro lado de la ecuación.



¿Cómo resolvemos una ecuación lineal?

- Para resolver una ecuación, tenemos que **transformar** la ecuación original en una equivalente, pero más sencilla.
- Lo más sencillo que puede estar una ecuación es con la variable sola en un lado y un valor en el otro.
- Para crear una ecuación equivalente pero más sencilla, podemos **sumar, restar, multiplicar o dividir** por cualquier número distinto de cero, <u>en ambos lados de la ecuación</u>.

Ejemplo

Resolver:

$2x - 3 = 7$

sumar 3 a ambos lados

$2x - 3 + 3 = 7 + 3$

$2x + 0 = 10$

Esta es equivalente a la primera, pero más sencilla.

$2x = 10$

$\frac{2x}{2} = \frac{10}{2}$

dividir entre 2 en ambos lados

$\boxed{x = 5}$

Ahora sabemos cuál es la solución.

Verificando…

$2x - 3 = 7$

$2(5) - 3 = 7$

$10 - 3 = 7$

$7 = 7$ cierto

2do ejemplo

Resolver:

$7x - 5 = 4x + 4$

restar 4x de ambos lados

$7x - 4x - 5 = 4x - 4x + 4$

$3x - 5 = 4$

Esta es equivalente a la primera, pero más sencilla.

$3x - 5 + 5 = 4 + 5$

sumar 5 a ambos lados

$3x = 9$

dividir entre 3 en ambos lados

$$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$$

$\boxed{x = 3}$

solución

Verificando…

$7x - 5 = 4x + 4$

$7(3) - 5 = 4(3) + 4$

$21 - 5 = 12 + 4$

$16 = 16$ cierto

Otro ejemplo

Resolver:

$2(x – 3) + 5 = 4x – 2$ **propiedad distributiva**

$2x – 6 + 5 = 4x – 2$

$2x – 1 = 4x – 2$ **restar 2x de ambos lados**

$2x – 2x – 1 = 4x – 2x – 2$

$– 1 = 2x – 2$ **sumar 2 a ambos lados**

$-1 + 2 = 2x – 2 + 2$

$1 = 2x$ **dividir entre 2 en ambos lados**

$$\frac{1}{2} = \frac{2x}{2}$$

$\boxed{½ = x}$ **solución**

Ejercicios

Halle la solución de:

c) $5x - 4(2x + 3) = 3(2x - 1) + 2$

Ecuaciones lineales en una variable que tienen fracciones

Podemos eliminar los denominadores que aparecen en una ecuación lineal, si multiplicamos por el **mínimo común múltiplo** de los denominadores, **a ambos lados de la ecuación**.

Ejemplo: Determinar el valor que satisface la siguiente ecuación.

$$\frac{3x}{2} - 4 = 2x + 3$$

Luego, usamos la propiedad distributiva para multiplicar **todos** los términos de la ecuación por 2.

$$2\left(\frac{3x}{2} - 4 = 2x + 3\right)$$

$$\frac{2(3x)}{2} - 2(4) = 2(2x) + 2(3)$$

3x – 8 = 4x + 6

-8 – 6 = 4x – 3x

-14 = x

Ejemplo

1) Resolver: $\dfrac{5u}{4}+\dfrac{3}{16}=\dfrac{1}{2}$

Aquí el denominador común es 16. Así que multiplicamos TODA LA ECUACIÓN por 16 para eliminar el denominador:

$$16\left(\frac{5u}{4}+\frac{3}{16}\right)=\frac{1}{2}(16)$$

$$\frac{16(5u)}{4}+\frac{16(3)}{16}=\frac{1}{2}(16)$$

continua:

Ejemplo (cont)

Ahora usamos la ley distributiva:

$$4(5\mathrm{u})+3=8$$

$$20\mathrm{u}=8-3$$

$$20\mathrm{u}=5$$

Ahora dividimos por 20 a ambos lados para dejar la “u” sola, esto es, con coeficiente 1. De donde tenemos que:

$$u=\frac{5}{20}, \text{que simplifica a} \quad \mathrm{u}=\frac{1}{4}$$

Ejemplo

2) Halle la solución de: $$\frac{2x-5}{3}+\frac{1}{2}=5-\frac{x}{3}$$

Primeramente, multiplicamos por el MCM(2,3) que es 6 a ambos lados.

$$6\left(\frac{2x-5}{3}+\frac{1}{2}\right)=6\left(5-\frac{x}{3}\right)$$

$$\frac{6(2x-5)}{3}+\frac{6(1)}{2}=6(5)-\frac{6(x)}{3}$$

2(2x – 5) + 3(1) = 30 – 2x

4x – 10 + 3 = 30 – 2x

4x – 7 = 30 – 2x

4x + 2x = 30 + 7

6x = 37

$$\mathbf{x = \frac{37}{6}}$$

Ejemplo

3) Resolver: $$\frac{9z+1}{4}=z+\frac{1}{3}$$

En este ejercicio el denominador común es 12. Multiplicamos toda la ecuación por 12 para eliminar los denominadores:

$$12\left(\frac{9z+1}{4}\right)=\left(z+\frac{1}{3}\right)12$$

$$3(9z+1)=12z+4$$

$$27z-12z=4-3$$

$15z=1;$ dividiendo por 15 a ambos lados tenemos que

$$z=\frac{1}{15}$$

Otros tipos de ecuaciones

Hay ecuaciones, que aunque **no son ecuaciones lineales**, se pueden resolver como si lo fueran.

Un ejemplo de esto es la siguiente ecuación:

$$\frac{3}{y} - 5 = 4 + \frac{5}{2y}$$

Esta ecuación no es lineal, pues las expresiones a los lados izquierdo y derecho no son polinomios grado 1 ya que la variable está en el denominador.

Otras ecuaciones

En estos casos, debe proceder de la misma manera, multiplicando por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

$$\frac{3}{y} - 5 = 4 + \frac{5}{2y}$$

En este caso el mcm(y,2y) = 2y

$$2y\left(\frac{3}{y} - 5\right) = 2y\left(4 + \frac{5}{2y}\right)$$

$$(2y)\left(\frac{3}{y}\right) - 2y(5) = 2y(4) + 2y\left(\frac{5}{2y}\right)$$

$$6 - 10y = 8y + 5$$

$$1 = 18y$$

$$y = \frac{1}{18}$$

Ejemplo

4) $$\frac{5}{x} + \frac{3}{8} = \frac{7}{16}$$

Aquí el denominador común es: 16x Así que multiplicamos por 16x a <u>TODA</u> la ecuación. Esto elimina las fracciones:

$$16\mathrm{x}\left(\frac{5}{\mathrm{x}} + \frac{3}{8}\right) = \left(\frac{7}{16}\right)16\mathrm{x}$$

$$16(5) + 2\mathrm{x}(3) = 7\mathrm{x}$$

$$80 + 6\mathrm{x} = 7\mathrm{x}$$

$$80 = 7\mathrm{x} - 6\mathrm{x}$$

$$80 = \mathrm{x}$$

Práctica Adicional :

1) Determine si el valor de la derecha es solución o no de la ecuación.

5x – 2(4 – 7x) = 3 – 5x ; 4

2) Halle la solución de:

(a) 5x = 4(3x + 6) – 3

(b) 2(4x – 5) – 2 = 3x – 4

(c) $2x = -\left(\frac{x-2}{4}\right) + 2$

(d) $10 - 2(3x - 2) = \frac{2x}{5} - \frac{x-1}{2}$

(e) $\frac{4}{3y} = \frac{7}{2y} + 3$

(f) $2 - \frac{1}{5x} = 5 + \frac{2}{3x}$

Práctica Adicional

Ejercicios Adicionales :

1) Determine si el valor de la derecha es solución o no de la ecuación.

$5x - 2(4 - 7x) = 3 - 5x \qquad ; 4$

Ejercicios:

Determine si el valor de la derecha es solución o no de la ecuación.

c) $6 + 7x = -8$; -2

d) $2x - 3(2x + 5) = 13 + 2(x - 5)$;-3

e) $4x - 3x(2 - 5x) + 3 = 4x - 6$;-2

f) $7(x - 2) = 4(x - 3)$;2

Ejercicios

Halle la solución de:

a) $5x = 4(3x + 6) - 3$

Ejercicios

Halle la solución de:

b) $2(4x – 5) – 2 = 3x – 4$

Práctica

Halle la solución de:

a) $7x - 3 = 4x + 4$

b) $3(x - 5) = 4x - 7$

c) $3(4 - 2x) = 3 - 5(x + 8)$

Ejercicios

Halle la solución de:

$$1)\ \frac{5x}{3} - 2x = -\left(\frac{x-2}{4}\right) + 2$$

$$2)\ 7 - \frac{2x}{5} = 4x + 3$$

$$3)\ 10 - 2(3x-2) = \frac{2x}{5} - \frac{x-1}{2}$$

$$4)\ \frac{3(x-4)}{2} - \frac{4x+5}{3} = \frac{3x}{4}$$

$$5)\ \frac{7x-2}{5} = \frac{4x+3}{4}$$

Práctica adicional

1) $\frac{5}{y} + 4 = \frac{3}{2y} + 1$

2) $\frac{4}{3y} = \frac{7}{2y} + 3$

3) $2 - \frac{1}{x} = 5 + \frac{2}{3x}$