

Asignatura de Geometría Analítica

UNIDAD 2.

La Recta

Características de la Recta



CONCEPTOS BASICOS.

Como ya has podido observar, existen muchos ejemplos donde la línea recta es de utilidad, y uno de los primeros pasos que vamos a seguir para iniciar con el estudio del tema es definir lo que es la línea recta.

Una primera idea de manera intuitiva es que la recta está formada por una sucesión de puntos que son colineales.

Otra idea es que la línea recta es aquella que se forma cuando a partir de dos puntos, la distancia más corta entre estos es precisamente la recta.

Ahora bien desde la definición formal en matemáticas podemos afirmar que es un lugar geométrico, pero este lugar geométrico significa que todos los puntos que forman la recta cumplen con las mismas condiciones. En este caso la condición es que entre cualesquiera dos puntos que se tomen de ésta recta, la pendiente que se obtiene es la misma.

De esta última descripción vemos que surge otro concepto que ya nos resulta familiar, el cual es la pendiente y que nos lleva a considerar la inclinación que tiene una recta.

Al respecto podemos decir entonces que una característica de cualquier recta es que tiene una pendiente y con esa pendiente se puede conocer el ángulo de inclinación.

Es importante mencionar entonces que debemos distinguir entre rectas:

- a) Horizontales
- b) Verticales
- c) Con pendiente positiva
- d) Con pendiente negativa.

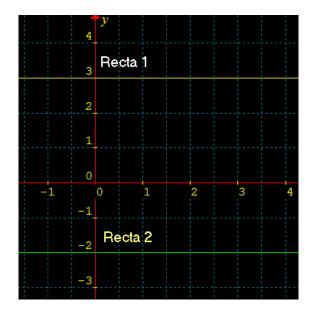
Veamos ahora cuales son los tipos de recta que identifican a cada una.

a) La recta horizontal.

Es aquella que no forma ningún ángulo, es decir si realizamos un trazo de una recta en un plano cartesiano, entonces cualquier recta que sea paralela aleje "x" es horizontal, y por tanto **su pendiente es cero.**

La siguiente grafica nos muestra dos ejemplos de rectas cuya pendiente es cero.

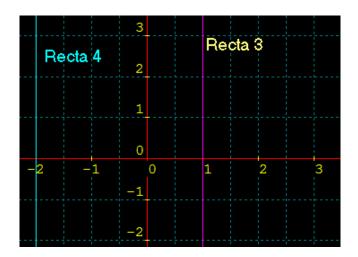
La primer recta su ecuación es: y= 3 La segunda recta tiene por ecuación: y=-2



b) La recta vertical.

Es aquella cuya que al trazarla se obtiene una recta paralela al eje "y", y desde la definición formal diremos que su pendiente es infinita.

La ecuación de la recta 3 vertical es: x=1 La ecuación de la recta 4 vertical es x=-2



c) Recta con pendiente positiva.

Se caracteriza porque tiene un ángulo de inclinación menor a 90 grados con respecto a la horizontal. Es decir con el eje "x".

La siguiente grafica nos muestra un ejemplo de recta con pendiente positiva.

La ecuación de esta recta es:

x-y-3=0

que también podemos escribir en forma de: y= x-3 que se conoce como ecuación pendiente, ordenada al origen



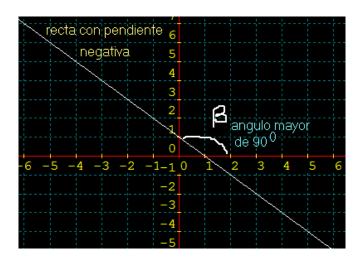
d) Recta con pendiente negativa.

Se caracteriza por tener un ángulo de inclinación mayor a 90 grados con respecto al eje "x".

En la siguiente grafica se muestra un ejemplo de recta con pendiente mayor a 90°

la ecuación que representa a esta recta es: x+y-1=0 o bien como:

$$y=1-x$$



De estos dos últimos incisos hay que recordar entonces que la pendiente entonces está relacionada con el ángulo de inclinación, y que este puede ser entonces mayor o menor de 90 ^{0.}

Ahora bien ¿cómo podemos calcular el ángulo de inclinación de una recta?. La respuesta a esta pregunta la vamos a dar con un ejemplo práctico que seguramente ya has visto en alguna parte donde realizan trabajos de construcción.

EJEMPLO PRÁCTICO PARA DETERMINAR LA IMPORTANCIA Y APLICACIÓN DE LA PENDIENTE DE UNA RECTA.

La siguiente figura muestra a una persona que se dispone a construir un piso de concreto.



Seguramente te has dado cuenta de que una primera actividad que estos trabajadores realizan es lograr que la superficie estè completamente horizontal luego hecho esto, empiezan a colocar el cemento mezclado y finalmente si es necesario un revestimento como se observa a continuación.

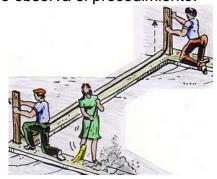
¿Pero qué tan importante es que el piso sea horizontal o no?. Pues que la inclinación permite lograr que el agua circule para donde está la parte más baja y esto cobra mucho más importancia en la construcción de los techos ya que al estar completamente horizontales el agua se queda atrapada y ocasiona con el tiempo filtraciones que arruinan la edificación.

Por ello muchas personas construyen casas con techos que tienen una inclinación como se observa en las siguientes imágenes.



Ahora la pregunta es: ¿y cómo calculamos y diseñamos la pendiente de un techo o de un piso?.

La respuesta es sencilla ya que podemos usar la misma idea que usan en las construcciones; se nivela la superficie ya sea por medio de un nivel o de una manguera donde se localizan dos puntos que están a la misma altura. Se traza una recta con un hilo usando éstos puntos como referencia. En la imagen siguiente se observa el procedimiento.



Podemos obtener así una recta y prolongarla, o darle una pendiente para donde lo deseemos.

Este procedimiento es mucho más antiguo de lo que pudiéramos suponer ya que lo usaban los antiguos agricultores de culturas como la egipcia para poder irrigar los cultivos en la época de la creciente del río Nilo.

La misma idea de la pendiente se usa por ejemplo en la construcción de carreteras, diseño de equipos industriales o juegos infantiles como se observa en la imagen.



De todo ello que hemos mencionado hasta el momento hemos de enfatizar dos cosas:

- Para trazar una recta se requieren dos puntos.
- La recta puede tener pendiente positiva, negativa, cero o infinita.

Con estos ejemplos podemos tener una mejor comprensión del uso de la recta y su pendiente, así como la forma de obtener la inclinación, pero vayamos a resolver algunos ejemplos que nos permitirán más adelante aplicar las formulas a las situaciones que se plantearán ya que el concepto de pendiente tiene muchas más aplicaciones en diversas áreas del conocimiento.

CALCULO DE LA PENDIENTE DE UNA RECTA DADOS 2 PUNTOS.

• Se sugiere que tengas una calculadora científica para que vayas siguiendo la secuencia de las operaciones que se van realizando.

Como ya se ha dicho, se requiere de 2 puntos, y tratándose de puntos en el plano cartesiano entonces se debe conocer sus coordenadas. Por lo tanto la formula a usar es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Donde

 (x_1,y_1) son las coordenadas del punto 1

(x₂,y₂) son las coordenadas del punto 2

Con el fin de obtener practica sobre la aplicación de la formula veamos el siguiente ejemplo. Es importante poner atención a la secuencia de los pasos para llegar al resultado.

Ejemplo 1.

Obtener la pendiente de la recta que pasa por los puntos A(2,-3) y B(-4,1)

El primer paso es definir el cual es el punto 1 el que será A y el punto 2 el B, por lo que al sustituir en la formula tenemos:

$$\frac{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-3)}{-4 - 2} = \frac{1 + 3}{-6} = \frac{4}{-6}$$

que simplificando y escribiendo el signo en el numerador resulta:

$$m = \frac{-2}{3}$$

Ahora lo que sigue es darle significado a nuestro resultado.

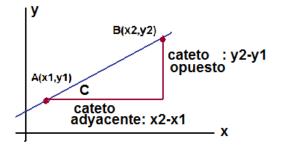
Para esto debemos emplear los conocimientos de trigonometría, respecto a cálculo de ángulos.

La función trigonométrica que nos permite obtener el ángulo de inclinación es: tangente ya que usando un sistema de coordenadas podemos ver que en un triángulo rectángulo donde la hipotenusa es nuestra recta en cuestión, entonces los puntos1 y 2 forman los lados que se llaman catetos por lo que conocidas las coordenadas podemos usar la función tangente que se define como:

tang C = cateto opuesto
cateto adyacente
=
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
 = m

Que es la pendiente buscada.

Todo ello lo observamos en la figura siguiente:



Y para aplicarlo a nuestro ejemplo entonces como ya sabemos cuál es el valor de la pendiente entonces lo que necesitamos es saber cuál es el ángulo que le corresponde a este valor. Una primera forma de conocerlo es usando una tabla de valores de la función tangente y la otra que es la más practica y recomendada es por medio de una calculadora hallar la función inversa de la tangente.

Es decir el ángulo cuya tangente es para nuestro caso: -2/3 que corresponde a un valor de -33.69 0 , pero como el resultado fue negativo significa que debemos restar a 180 0 el valor obtenido.

Esto es: $180-33.69 = 146.3^{\circ}$

Luego el resultado lo vemos en la siguiente imagen.

De este primer ejemplo, un punto importante es haber realizado el trazo de la recta.

Para hacer esto debemos usar el conocido plano cartesiano donde vamos a localizar los puntos y realizar el trazo. Podemos comprobar que la recta forma un ángulo mayor a 90 grados por lo tanto es correcta la solución.

Como sugerencia: se recomienda que compruebes en una hoja milimétrica trazando un plano cartesiano y localizando los puntos y haciendo el trazo de la recta para que midas con un transportador el ángulo que se forma entre la recta y el eje "x".

Ejemplo 2:

Dados los puntos C(1,2) y D(5, 7) determine la pendiente de la recta que se forma con dichos puntos.

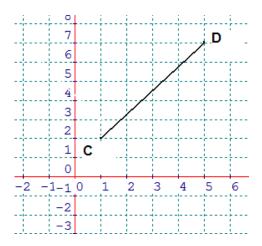
Su pendiente es:

$$m = y_2 - y_1 = 7 - 2 = 5 = 1.25$$

 $x_2 - x_1 = 5 - 1 = 4$

Ahora en la calculadora obtenga la tangente cuyo valor es 1.25, el resultado será: $51.3^{\,0}$

Procedemos a dibujar dicha recta en el plano:



Como te puedes dar cuenta, la recta tiene una pendiente positiva y por ello su ángulo de inclinación es menor de 90 grados.

Un ejemplo de aplicación.

Considera la siguiente situación:



El encargado de pruebas de velocidad de una empresa desea conocer la velocidad de un avión en un lapso de tiempo, y para ello decide realizar una medición del tiempo y la distancia recorrida la cual registra en la siguiente tabla.

En esta recopilación de datos se considera que el avión lleva una velocidad constante, para lo cual decide hacer una grafica de tiempo transcurrido y distancia recorrida. Los datos son los que se muestran a continuación.

Tiempo	Distancia
(horas)	(kms)
1	120
2	240
3	360
4	480
5	600

Con esta información hay que determinar la velocidad del avión.

Para dar respuesta a la pregunta Lo primero que debemos identificar es la manera en que se relaciona la distancia y el tiempo. Hay que recordar que existe en Fisica una fórmula que nos puede ser de utilidad, sin embargo vamos a ocupar nuestra conocida formula de la pendiente y empleamos los dos primeros puntos: P1(1,120) y p2(2,240).

Al aplicar la formula tenemos:

$$m = y 2 - y 1$$

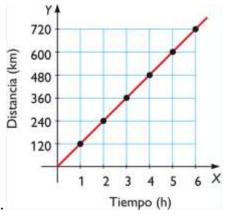
 $x 2 - x 1$

$$m = \frac{240-120}{2-1} = \frac{120}{1}$$

m= 120

y si vemos en un libro de Fisica, esta pendiente representa la velocidad que se obtiene mediante $v = \frac{d}{t}$

Ahora si observamos en una grafica los datos podemos observar que en efecto se obtiene una línea recta. Y esta línea recta tiene una pendiente m=120 que significa la velocidad.



En este caso la variable "Y" representa la distancia, y la variable "x" indica el tiempo.

LA RECTA COMO LUGAR GEOMÉTRICO. CALCULO DE LA ECUACION DE LA RECTA DADOS DOS PUNTOS.

En estos ejemplos que se han explicado puedes notar como se ha mencionado que dados dos puntos se puede obtener la inclinación de una recta, pero en matemáticas una recta cumple con condiciones más formales respecto a sí misma.

¿Esto qué significa?; que podemos obtener muchos puntos más de la recta aunque no la tracemos en un plano cartesiano y lo podemos lograr con solo tener la ecuación que la define, ¿pero cómo obtener la ecuación?, debemos hablar de lo que es la recta como lugar geométrico lo cual significa determinar su ecuación que la representa.

Para ello es primeramente importante decir que toda ecuación de la forma

Ax + By + C = 0 Representa una recta

En la siguiente grafica se observa las características de la ecuación.

ECUACION GENERAL DE UNA RECTA

Su expresión matemática es:

Ax+By+C=0

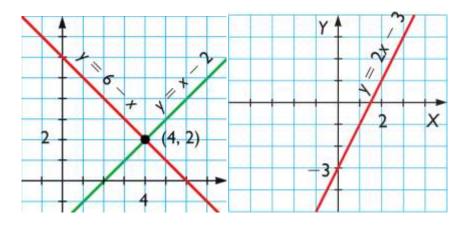
Donde A: es el coeficiente del término de "x"
B: es el coeficiente del término "y"
C: es el término independiente



Vamos explicando más a detalle.

Esta ecuación es de primer grado y tiene dos variables que son x,y, luego para hallar dicha ecuación, se pueden emplear dos puntos conocidos de ella, calcular su pendiente y emplear una fórmula.

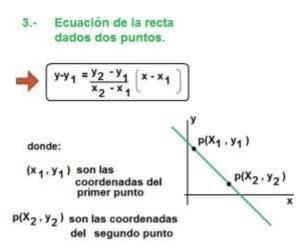
Algunos ejemplos de ecuaciones con sus graficas se presentan a continuación.



En los siguientes ejemplos se indica el procedimiento que permite obtener una ecuación a partir del conocimiento de dos puntos.

Volvemos a recordar en este momento que aplicar la fórmula para determinar la pendiente que ya se explicó nos va a ser de mucha utilidad.

La fórmula para este tema es:



Ejemplo 3.

Obtener la ecuación en forma general de la recta que pasa por los puntos: M(3,5) y N (-7,2)

En este caso lo que debemos calcular primero es la pendiente ya que no la conocemos y después aplicamos la fórmula usando uno de los puntos dados (cualquiera).

Primero el cálculo de La pendiente donde

M es el punto 1 y el punto 2 es N viene a ser:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Luego usamos la formula:

$$y-y_1 = m(x-x_1)$$

Donde "m" es la pendiente, vamos a usar uno de los 2 puntos que en este caso será (-7,2)

Entonces sustituyendo tenemos:

$$m = \frac{2-5}{-7-3} = -\frac{3}{-10} = \frac{3}{10}$$

Luego en la formula:

$$y-y_1 = m(x-x_1)$$

Queda:

$$y-2=\frac{3}{10}(x+7)$$
 luego pasamos el 10 multiplicando al otro termino

$$10y - 20 = 3x + 21$$
$$10y - 20 - 3x - 21 = 0$$

$$10y - 3x - 41 = 0$$

De esta ecuación despejamos "y" resultando:

$$y = \frac{3x + 41}{10}$$

$$y = 3 x + 41 \over 10$$

Que se conoce como ecuación pendiente, ordenada al origen.

Esta forma de ecuación tiene la estructura:

Donde m es la pendiente y b es la ordenada que representa la distancia de la recta al eje "x"

Se observa de manera evidente que para nuestro caso la pendiente es m=3/10 y la ordenada al origen es b=41/10

Luego la ecuación en la forma general como la habíamos solicitado se obtiene de:

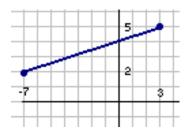
que multiplicando por (menos 1) podemos escribir tambien como:
$$3x-10y+41=0$$

Donde Finalmente la ecuación queda como lo requeríamos en la forma:

$$Ax+By+C=0$$

Claro es que para este caso tenemos que A= 3, B= -10, C= 41

Por último la grafica de la recta la presentamos en la siguiente imagen donde se observa que la pendiente es en efecto positiva y pasa por los puntos que se han dado.



ECUACION DE LA RECTA DADA LA PENDIENTE Y UN PUNTO.

En este tema es más sencillo llegar al resultado de la obtención de la ecuación de la recta, porque si ponemos atención nos daremos cuenta de que no es necesario calcular la pendiente, solo conocer su valor y por supuesto que necesitamos entonces un punto de la recta, con ello nos evitamos algunos pasos cálculos como es el de la pendiente.

Como ya hemos mencionado, la formula es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
 Ecuación punto - pendiente

Veamos un Ejemplo.

Encontrar la ecuación en forma general de la recta que tiene pendiente 2 y contiene al punto (3,-2).

En este caso emplearemos el valor de la pendiente (m=2) y el punto x_1 , y_1 (3,-2), aplicaremos además la fórmula:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Que sustituyendo resulta:

$$y - (-2) = 2 (x-3)$$

$$y + 2 = 2(x - 3)$$

$$y + 2 = 2x - 6$$

reacomodando los términos y pasándolos al primer término tenemos:

$$y+2-2x+6=0$$

Realizamos las operaciones y multiplicando por (-1)

2x - y - 8 = 0 que es la ecuación buscada.

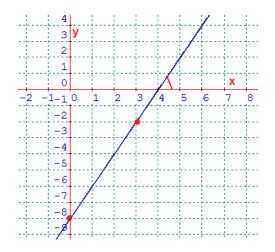
En este caso al comparar con nuestra forma general: Ax+By+C=0

Claro es que si la expresamos en forma de pendiente ordenada al origen debemos despejar la variable "y" de la ecuación 1, quedando:

$$y = 2x - 8$$

En este caso la pendiente m= 2, es decir el ángulo corresponde a 63.43⁰ y la ordenada al origen b= 8

Y como es importante verificar el resultado lo hacemos por medio de una grafica, que se sugiere también realices en una hoja milimétrica y hagas los trazos con las respectivas mediciones de los ángulos.



Ejemplo 2.

Encontrar la ecuación en forma general de la recta que pasa por (-7,-1) y tiene $m=-\frac{5}{4}$

Aplicamos los datos en la fórmula:

 $y - y_1 = m(x - x_1)$ Que al sustituir queda:

$$y+1=-\frac{5}{4}(x+7)$$

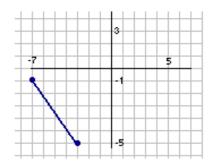
Multiplicamos por 4:

$$\left(y + 1 = -\frac{5x}{4} - \frac{35}{4}\right)4$$

$$4y + 4 = -5x - 35$$

$$5x + 4y + 39 = 0$$

Y la grafica es:



Ejercicio.

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1,2) y tiene un ángulo de 45º

En este caso debemos obtener el valor de la pendiente ya que se puede saber porque es conocido que la pendiente es igual a la tangente del ángulo por ello m= tang $45^0 = 1$

luego usamos la fórmula: $y - y_1 = m (x-x_1)$

la pendiente es entonces m= 1 y sustituyendo:

$$y-2 = 1(x-1)$$

 $y-2 = x-1$
 $x-y-1+2=0$
 $x-y+1=0$

Y la grafica la obtenemos mediante el siguiente procedimiento:

Si despejamos "y" nos queda:

$$y=x+1$$

que es de la forma y=mx +b, pero lo importante y hasta cierto punto que se insiste en saber despejar la variable "y" es que a traves de esta forma de ecuacion se pueden obtener muchos puntos de la recta ya que es suficiente asignarle valores arbitrarios que deseemos a la "x" para obtener valores de "y".

por ejemplo si x=0, entonces el valor de "y" lo obtenemos sustituyendo directamente en la ecuación.

Esto es: y = x+1

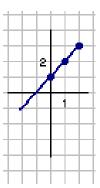
y=0+1=1, es decir obtener un punto que es (0,1) y asi podemos obtener otros como cuando x=2,

entonces sustituyendo:

$$y=x+1$$

= 2+1=3 y obtenemos el punto (2,3).

Pero sabemos que con dos puntos es suficiente, entonces solo localizamos en el plano cartesiano los que obtuvimos y tenemos la grafica que es:



Ahora analizaremos el caso contrario, en donde dada la ecuación general de la recta de la forma Ax + By + c = 0

Calcularemos la pendiente y sus intercepciones con el eje "x" y el eje "y".

La fórmula para calcular la pendiente de una ecuación de la forma Ax + By + C = 0Donde A, B y C son números reales es como se ha dicho:

Es decir, se debe dividir el coeficiente del término en "x" entre el coeficiente del término en "y"

La ordenada al origen y abscisa al origen se calculan con:

Abscisa al origen
$$a = \underline{-C}$$
A
La ordenada al origen:

Gráficamente esto significa la distancia a donde la recta cruza cada eje de coordenadas.

Ejemplo.

Determine la pendiente, abscisa al origen y ordenada al origen de la ecuación:

$$x + 2y - 6 = 0$$

En este caso los coeficientes son A= 1, B=2 y C= -6

la pendiente es:
$$m = -A = -1$$

B 2

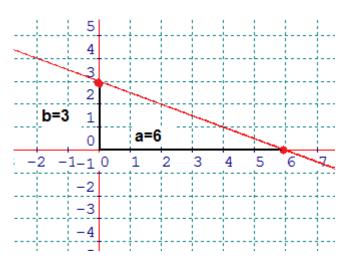
la pendiente es:
$$m = \underline{A} = \underline{A} = \underline{A}$$
 la abscisa al origen es: $a = \underline{C} = \underline{(-6)} = \underline{6} = 6$

B 2 A 1 1

es decir la intercepción "x" es 6

La ordenada al origen es
$$b = \frac{-C}{B} = \frac{-(-6)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$
 es decir la intercepción con "y" es 3

Como se observa, la pendiente es negativa y por ello el ángulo de Inclinación es mayor de 90°.



PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD.

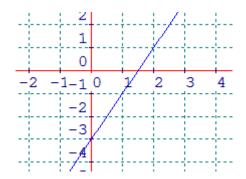
El paralelismo es una propiedad de las rectas que siempre tienen entre sí la misma distancia que las separa, Esto quiere decir en otras palabras que nunca se interceptan, por ello podemos concluir que si dos rectas son paralelas, entonces tienen la misma pendiente.

Veamos si esta última afirmación es verídica:

Consideremos dos ecuaciones : donde la primera es

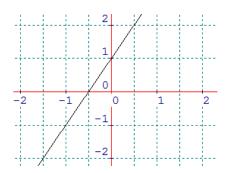
y= 2x- 3su pendiente según la fórmula y=mx +b que hemos visto es:

m=2, asimismo su ordenada al origen es b= - 3 luego su grafica

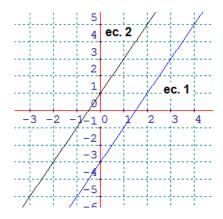


La segunda ecuación es: y=2x+1

Y su pendiente es igualmente m=2, pero su ordenada al origen b=1. Su grafica:



Y lo que nos interesa es comparar sus graficas, ya que vimos que su pendiente es la misma, tenemos así entonces que son paralelas.



Por lo tanto hemos comprobado nuestra idea.

Ahora veamos un ejemplo donde apliquemos el paralelismo.

Ejemplo. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (5, -3) y es *paralela* a la recta

$$4x - 5y - 9 = 0$$

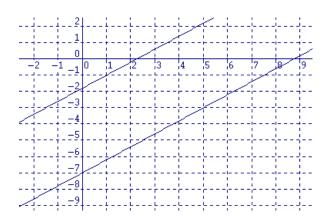
Primero calculamos la pendiente que necesitamos y la obtenemos de la recta 4x - 5y - 9 = 0 ya que como se recordará (dos rectas paralelas tienen la misma pendiente), por lo que el valor es:

$$m = -A = -4 = 4$$
 y la ecuación es; y-y₁= m(x-x₁)
 $y = -(-3)$ y la ecuación es; y-y₁= m(x-x₁)
 $y = -(-3)$ y la ecuación es; y-y₁= m(x-x₁)
 $y = -(-3)$ y la ecuación es; y-y₁= m(x-x₁)
 $y = -(-3)$ y la ecuación es; y-y₁= m(x-x₁)
 $y = -(-3)$ y la ecuación es; y-y₁= m(x-x₁)

Multiplicamos por (5) quedando:

5 (y + 3) = 4x - 20, realizamos la multiplicación y ordenamos:

5y+15-4x + 20=0 multiplicamos por (-1) y simplificamos: 4x - 5y - 35 = 0 y las graficas como podemos constatar son paralelas.



PERPENDICULARIDAD

Para explicar la perpendicularidad, hay que recordar un poco esta característica entre rectas, la cual se refiere a que entre dos rectas hay un ángulo de 90 ⁰.

Por ejemplo entre el eje "x" y el eje "y" hay un ángulo de 90°.

Pero veamos que hay al respecto de la pendiente.

Hemos visto que cuando son paralelas las pendientes son iguales, pero ahora vamos a poner las graficas que son perpendiculares y vamos a analizar sus ecuaciones.

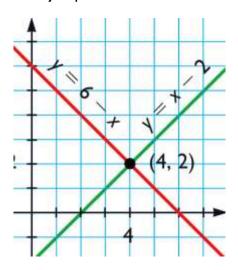
Por ejemplo si tenemos dos ecuaciones:

- a) 2x-3y+1=0 su pendiente es m= A/B = -2/-3 = 2/3
- b) 3x+2y+1=0 su pendiente es: m=-A/B=-3/2=-3/2

Luego respecto a la pendiente podemos afirmar que si las rectas son perpendiculares entonces sus pendientes son inversas y de signo contrario.

Analicemos otro caso para comprender mejor el concepto.

Las graficas y ecuaciones del ejemplo 2 se dan continuación.



En este caso tenemos que las ecuaciones son de la forma y=mx+b, pero también ya hemos dado la fórmula para saber sus pendientes, entonces tenemos:

Que al calcular las respectivas pendientes resulta:

La recta en rojo y= -x+6 m= 1

La recta en verde: y= x-2 m= -1

Y en efecto las pendientes son inversas y de sentido contrario.

Ahora resolvamos un caso donde vamos a aplicar la definición de perpendicularidad.

Ejemplo.

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, -3) y es *perpendicular* a la recta

$$5x + 3y - 1 = 0$$

En primer lugar:

Aplicamos la fórmula: $y-y_1=m(x-x_1)$ y la pendiente que necesitamos la obtenemos de la recta 5x +3y -1 =0 ya que como se recordará (dos rectas perpendiculares tienen la pendiente inversa y signo contrario), por lo que la pendiente es:

$$m = -A = -5$$

$$B \quad 3$$

y la pendiente de la recta a calcular deberá ser entonces: m= 3/5

Luego sustituimos:

$$\chi + 3 = 3(x - 2)$$

$$y + 3 = \frac{3x - 6}{5}$$

5 (y + 3) = 3x -6, realizamos la multiplicación y ordenamos:

5y+15-3x +6=0 multiplicamos por (-1) y simplificamos quedando:

$$3x - 5y - 21 = 0$$

