

# Inecuaciones lineales con una incógnita

**Aprenderé a:** resolver inecuaciones lineales con una incógnita y resolver problemas con inecuaciones lineales.

## Repaso

1. ¿Qué es una ecuación?
2. Explica, paso a paso, cómo resolverías la ecuación  $2x - 3 = 19$ .

Sofía viaja en su auto a 36 km/h en un camino cuyo límite máximo de rapidez es el indicado por el letrero de la derecha.

Si Sofía aumenta su rapidez en 12 km/h, ¿sobrepasará el límite permitido?, ¿y qué pasaría si la aumenta en 18 km/h?, ¿por qué?



Archivo editorial

Muchas situaciones de la vida cotidiana las podemos modelar usando desigualdades en las que hay términos desconocidos; por ejemplo, en el problema anterior podemos llamar  $x$  a la velocidad que Sofía puede aumentar sin sobrepasar el límite. Por lo tanto, se tendría que cumplir la desigualdad:

$$36 + x \leq 50$$

Seguramente habrás notado que si usamos diferentes valores de  $x$  y los remplazamos en la desigualdad anterior, obtenemos que para algunos valores de  $x$ , la desigualdad se cumple y para otros no se cumple; por ejemplo, si  $x = 10$ , la desigualdad nos queda:

$$36 + 10 \leq 50$$

$$46 \leq 50$$

Por lo tanto, la desigualdad se cumple. Sin embargo, si  $x = 20$ , tenemos:

$$36 + 20 \leq 50$$

$$56 \leq 50$$

En este caso, la desigualdad no se cumple, pues 56 es mayor que 50.

Ahora, nos interesa saber para cuáles valores de  $x$  la desigualdad siempre se cumple. Para esto podemos aplicar propiedades de las desigualdades. Observa.

$$36 + x \leq 50 \quad \text{.....} \bullet \text{ Restamos 36.}$$

$$x \leq 14$$

Por lo tanto, para que la desigualdad sea cierta,  $x$  debe ser un número menor o igual a 14. Si escribimos lo anterior como un intervalo, diremos que  $x \in ]-\infty, 14]$ .

Esto significa que Sofía puede aumentar su rapidez en a lo más 14 km/h para no sobrepasar el límite. Sin embargo, ¿todos los valores menores o iguales que 14 cumplen con ser solución del problema?

En este caso, no tiene sentido hablar de rapidez negativa, por lo que podemos decir, de acuerdo al contexto del problema, que el rango de velocidades que Sofía podría aumentar es de 0 a 14 km/h.

También podemos representar la solución de manera gráfica. En el ejemplo anterior, todos los valores posibles de  $x$  están representados en la figura de la izquierda:



Aplicando propiedades de las desigualdades, hemos logrado descubrir todos los posibles valores del término desconocido. A este tipo de desigualdades las llamaremos **inecuaciones**, las cuales son desigualdades con una o más incógnitas.

### ¿Cómo hacerlo?

**Si un joven es 22 años menor que su padre y 48 años menor que su abuelo, ¿a partir de qué edad la suma de los años que tienen él y su padre será mayor que la edad de su abuelo?**

Si definimos como  $x$  la edad del joven, entonces la edad de su padre y su abuelo serán  $x + 22$  y  $x + 48$ , respectivamente. Luego, planteamos la inecuación:

$$x + x + 22 > x + 48 \quad \dots \bullet \text{Reducimos términos semejantes.}$$

$$2x + 22 > x + 48 \quad \dots \bullet \text{Restamos } x.$$

$$x + 22 > 48 \quad \dots \bullet \text{Restamos 22.}$$

$$x > 26$$

En consecuencia, si el joven es mayor de 26 años, la suma de su edad con la de su padre superará la cantidad de años que tiene su abuelo.

### Tomo nota

- Una **inecuación** es una desigualdad que tiene una o más incógnitas. Para resolverla, debemos encontrar todos los valores de las incógnitas que hacen verdadera la desigualdad.
- El conjunto solución de una inecuación con una incógnita se puede representar mediante un intervalo, o bien, gráficamente en la recta numérica.

## Actividades

1. Determina el conjunto solución de las siguientes inecuaciones y represéntalo gráficamente en la recta real.

a.  $x - 2(x - 3) > 0$

c.  $\frac{2x}{5} - 3 > \frac{3x}{2} + 1$

e.  $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} > \frac{3-x}{6}$

b.  $(x + 1)^2 - 5 \geq x(x - 2)$

d.  $2x + 3 \leq 4x - (x - 10)$

f.  $(x + 3)(x - 3) + 2x - 6 \geq x^2$

2. Resuelve los siguientes problemas.

- Don José quiere cercar su terreno cuadrado con tres vueltas de alambre. Si en total dispone de 360 m de alambre, ¿qué área, como máximo, debería tener el terreno de modo que le alcance con el material que tiene?
- En cierta asignatura, Paola tiene las siguientes notas: 5,5; 6,5; 7,0 y 6,0. Si desea obtener un promedio final superior a 6,0 y únicamente le falta dar la prueba coeficiente dos, ¿qué nota debería obtener, como mínimo, para alcanzar el promedio deseado?
- Una camioneta transporta cajas con lechugas y papas. Las masas de cada caja son 12 kg y 25 kg, respectivamente. Si una verdulería solicitó el transporte de 4 cajas de papas y el resto en lechugas, ¿cuántas cajas de lechugas, como máximo, pudo haber recibido la verdulería, considerando que la carga total no debe exceder los 130 kg?

### Desafío

- ¿Para qué valor de  $a$ , el conjunto solución de la inecuación  $ax + 3 > 4a - 6$  son todos los números reales negativos?
- Sea  $f(x) = \sqrt{2x - 8}$ . ¿Cuál es el dominio de  $f$ ?

En algunos casos, al resolver las inecuaciones es necesario considerar el conjunto al cual pertenece la incógnita, si es distinto de los números reales, y si la solución es pertinente al problema. En estos casos, podemos analizar las soluciones encontradas algebraicamente y descartar aquellas que no se ajusten al conjunto numérico correspondiente o no tengan sentido en el contexto del problema; por ejemplo, en la inecuación  $x + 1 \leq 3$ , si  $x$  es un número natural, entonces su solución sería el conjunto  $\{1, 2\}$ .

### ¿Cómo hacerlo?

**La suma entre un número natural y su sucesor es inferior a 12. ¿Qué valores puede adoptar tal número?**

Si escribimos la información como una inecuación, tenemos:

$$x + (x + 1) < 12 \quad \bullet \text{ Reducimos los términos semejantes.}$$

$$2x + 1 < 12 \quad \bullet \text{ Restamos 1.}$$

$$2x < 11 \quad \bullet \text{ Dividimos por 2.}$$

$$x < 5,5$$

Pero como  $x$  es un número natural, entonces solo puede adoptar valores enteros positivos menores que 5,5. Luego:  $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

### ¿Cómo hacerlo?

**Una fábrica paga a sus vendedores \$ 880 por artículo vendido, más una cantidad fija de \$ 286 100. Si un vendedor quiere que su sueldo sea superior a \$ 340 000, ¿cuántos artículos debe vender como mínimo?**

Si llamamos  $c$  a la cantidad de artículos vendidos, podemos modelar el sueldo obtenido por el vendedor como  $286\,100 + 880c$ . Luego, como el sueldo debe ser superior a \$ 340 000, nos queda la inecuación:

$$286\,100 + 880c > 340\,000 \quad \bullet \text{ Restamos 286 100.}$$

$$880c > 53\,900 \quad \bullet \text{ Dividimos por 880.}$$

$$c > 61,25$$

Por lo tanto, para que su sueldo sea mayor que \$ 340 000, el vendedor debe vender más de 61,25 artículos, pero como es imposible que pueda vender una cantidad decimal de artículos, la respuesta correcta sería que el vendedor debe vender, al menos, 62 artículos.

Si te fijas, la solución corresponde al número natural más cercano que cumple la condición de ser mayor que 61,25, y no a una aproximación del número decimal, como podría pensarse erróneamente.

### Tomo nota

- Al resolver un problema que involucra una inecuación hay que considerar que la solución debe ser pertinente al contexto; por ejemplo, la medida de un objeto siempre es positiva, o la cantidad de personas siempre es un número natural, entre otras.

# Actividades

## 1. Resuelve las siguientes inecuaciones, considerando la condición dada para $x$ .

a.  $3x - 2(4x - 7) \geq 9, x \in \mathbb{N}$

b.  $2x + 3 > x - 1, x \in \mathbb{Z}^-$

c.  $\frac{5+3x}{23} < 1, x \in \mathbb{N}$

d.  $-\frac{9x}{2} - 1 < 2 - 5x, x \in \mathbb{R}^-$

e.  $x(x+6) + (3-x)x \leq 13 - x, x \in \mathbb{Z}^+$

f.  $\frac{4x}{3} + 2 < \frac{10}{3}, x \in \mathbb{N}$

## 2. Inventa una situación que se pueda modelar con la inecuación $300x + 5000 < 12000$ , donde $x$ es un número natural. Luego, pídele a un compañero que resuelva la inecuación y que responda en función del contexto.

## 3. Resuelve los siguientes problemas.

- ¿Cuáles son los números naturales impares tales que su triple disminuido en 5 es menor que 46?
- ¿Cuántos números de dos cifras hay tales que al multiplicarlos por 7 dan como resultado un número mayor o igual que 658?
- La suma de tres números consecutivos es mayor que 60. ¿Cuál es el menor valor que podría adoptar el número mayor?
- Marcela, Francisco y Gustavo son hermanos. Marcela tiene 15 años y Francisco tiene 3 años más que Gustavo. La suma de los años de Francisco y Gustavo no alcanza a igualar la edad de Marcela. ¿Cuántos años tiene Gustavo si su edad es un número impar?
- ¿Cuánto debe medir el largo de un terreno rectangular si su ancho mide 5 m y su perímetro no debe exceder los 26 m? Representa tu respuesta con un intervalo de números reales.
- Una compañía celular tiene un plan en el que hay que pagar un cargo fijo mensual de \$ 7 500 más \$ 120 por minuto hablado. Si Ana quiere que su cuenta no exceda los \$ 14 000, ¿cuántos minutos tendría que hablar, como máximo?

## 4. Responde las siguientes preguntas.

- ¿Todas las inecuaciones lineales con una incógnita tienen solución? Justifica.
- ¿En qué situaciones una inecuación lineal con una incógnita podría no tener solución?

### Desafío

- Inventa una inecuación lineal cuyo conjunto solución tenga un solo elemento.
- ¿Para qué valor de  $m$ , las inecuaciones  $2x + 1 \leq 4$  y  $-3 + x \leq 5x + m$  tienen el mismo conjunto solución?

### Proyecto

◀ **EN PAREJAS** ▶ Realicen la **etapa 2** del proyecto de la unidad de las páginas 44 y 45.

### Antes de continuar

- ¿Qué es una inecuación?
- Explica, paso a paso, cómo resolverías la inecuación  $24 - 5x < 56$ .
- ¿Qué significa que la solución de un problema sea pertinente al contexto? Da un ejemplo.