NÚMEROS COMPLEJOS

i

TEORÍA CON EJEMPLOS

RODRIGO ALCOCER

ÍNDICE

DEFINICIONES

1. **Unidad imaginaria:** la unidad imaginaria, i, equivale a $\sqrt{-1}$.

2. **Componentes**:

$$a + bi$$

La componente a se considera la parte real

La componente b se considera la parte imaginaria

3. **Números imaginarios puros:** son aquellos cuya parte real es igual a cero $(0 + bi = bi)$.

4. **Opuesto de un número complejo:** el opuesto de un número complejo es el mismo con los signos cambiados.
El opuesto de $z = a + bi$ es $-z = -a - bi$.

5. **Conjugado de un número complejo:** el conjugado de un número complejo es el mismo con el signo opuesto entre ambas componentes.
El conjugado de $z = a + bi$ es $\bar{z} = a - bi$.

(el conjugado se escribe con esa rayita encima)

OPERACIONES EN FORMA BINÓMICA

1. **Suma:** para sumar dos números complejos, se realiza la suma de partes reales y la suma de partes imaginarias.
   Ejemplo

$$(2+3i)+(1+2i)=$$
$$=(2+1)+(3i+2i)=$$
$$=3+5i$$

2. **Resta:** para restar dos números complejos, se realiza la resta de partes reales y la resta de partes imaginarias.
   Ejemplo

$$(2+3i)-(1+2i)=$$
$$=(2-1)+(3i-2i)=$$
$$=1+i$$

3. **Multiplicación:** para multiplicar dos números complejos, se aplica la propiedad distributiva en ambas partes.
   Ejemplo

$$(2+3i)*(1+2i)=$$
$$=(2*1)+(2*2i)+(3i*1)+(3i*2i)=$$
$$=2+4i+3i-6=$$
$$i*i=\ i^2=\left(\sqrt{-1}\right)^2=-1$$
$$6*(-1)=-6$$
$$=-4+7i$$

4. **División:** para dividir dos números complejos, se multiplica el numerador y denominador por el conjugado del denominador.
   Ejemplo

$$\frac{(2+3i)}{(1+2i)}=$$

$$=\frac{(2+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=$$

$$=\frac{2-4i+3i+6}{1-2i+2i+4}=$$

$$=\frac{8-i}{5}=$$

$$=\frac{8}{5}-\frac{i}{5}$$

5. **Potencia:** para calcular la potencia de un número complejo, tenemos que aplicar la teoría del binomio de Newton.

<u>**Ejemplo**</u>

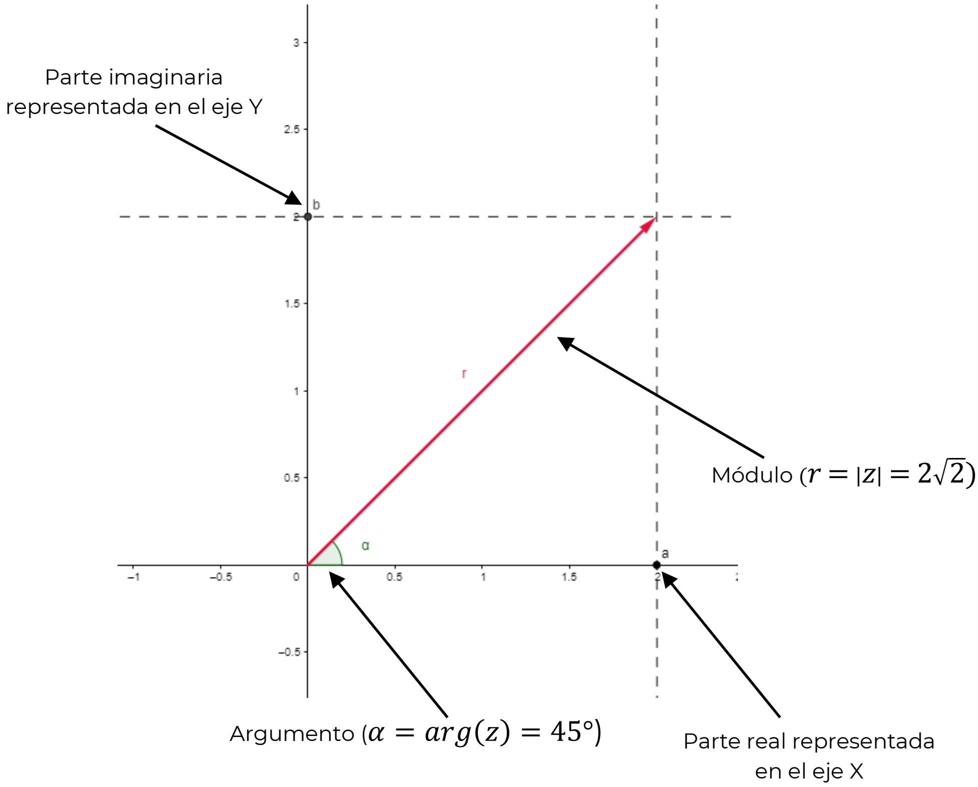
$$(2+3i)^3 =$$
$$= \binom{3}{0} * 2^3 + \binom{3}{1} * 2^2 * 3i + \binom{3}{2} * 2^1 * 3i^2 + \binom{3}{3} * 3i^3 =$$
$$= 8 + 36i - 54 - 27i =$$
$$= -46 + 9i$$

NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA POLAR

1. **Módulo:** es la longitud del vector mediante el que se representa. Se calcula de la siguiente manera: $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2. **Argumento:** es el ángulo que forma el vector con el eje real positivo. Se calcula de la siguiente manera: $\alpha = arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \ | \ 0° < \alpha < 360°$

3. **Número polar**: los números complejos en forma se representan de la siguiente manera: $z = r_{\alpha}$.



4. **Transformación de binómica a polar**: para realizar la transformación, tan solo tenemos que aplicar los cálculos mencionados antes.

TIP: para transformar números complejos perfectos, recuerda lo siguiente:

$$\boldsymbol{x + 0i = x_{0°}} \qquad \boldsymbol{-x + 0i = x_{180°}}$$

$$\boldsymbol{0 + xi = x_{90°}} \qquad \boldsymbol{0 - xi = x_{270°}}$$

OPERACIONES EN FORMA POLAR

¡NO EXISTE LA SUMA NI LA RESTA EN FORMA POLAR. SE TIENE QUE TRANSFORMAR A BINÓMICA!

1. **Multiplicación:** para multiplicar dos números complejos en polar, se multiplican los módulos y se suman los argumentos.
   Ejemplo

$$2_{55} * 3_{45^\circ} =$$
$$= (2 * 3)_{55^\circ+45^\circ} =$$
$$= 6_{100^\circ}$$

2. **División:** para multiplicar dos números complejos en polar, se dividen los módulos y se restan los argumentos.
   Ejemplo

$$\frac{2_{55^\circ}}{3_{45^\circ}} =$$
$$= \left(\frac{2}{3}\right)_{55^\circ-45^\circ} =$$
$$= \left(\frac{2}{3}\right)_{10^\circ}$$

3. **Potencia:** para calcular la potencia de un número complejo en polar, se eleva el módulo y se multiplica el argumento por el exponente.
   Ejemplo

$$(2_{55^\circ})^3 =$$
$$= (2^3)_{55^\circ*3} =$$
$$= 8_{165^\circ}$$

4. **Radical:** para calcular las raíces de un número complejo en polar, se calcula la raíz del módulo y se calculan todos los posibles ángulos.
   Ejemplo

$$z = \sqrt[3]{5_{165^\circ}}$$
$$s = \sqrt[3]{5}$$
$$\beta = \frac{165 + 360^\circ k}{3} = \begin{cases} k = 0 \rightarrow \beta_1 = 55^\circ \\ k = 1 \rightarrow \beta_2 = 175^\circ \\ k = 2 \rightarrow \beta_3 = 295^\circ \end{cases}$$
$$z_1 = s_{\beta_1} = \sqrt[3]{5}_{55^\circ}$$
$$z_2 = s_{\beta_2} = \sqrt[3]{5}_{175^\circ}$$
$$z_3 = s_{\beta_3} = \sqrt[3]{5}_{295^\circ}$$

DETALLES A TENER EN CUENTA

1. El denominador en β es el índice de la raíz.
2. k es siempre el índice de la raíz menos 1 y siempre hay que tener en cuenta $k = 0$.