EVALUACIÓN EXTRAORDINARIA DE 1º DE BACHILLERATO
Curso **2023-2024**
MATERIA: **MATEMÁTICAS I**

A

A.1. Calificación máxima: 0.7 puntos.
Resuelve la siguiente ecuación:

$$4^{x+1} + 2^{x+3} - 320 = 0$$

A.2. Calificación máxima: 1.2 puntos.
Un hotel tiene habitaciones individuales (para una persona), dobles (para dos personas) y familiares (para cuatro personas). El hotel tiene un total de 144 habitaciones con una capacidad total de 312 personas; además, el número de habitaciones dobles es igual al triple de la suma de habitaciones individuales y familiares. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de habitaciones de cada tipo que tiene el hotel.

A.3. Calificación máxima: 1.2 puntos.
Desde una determinada distancia, una bandera situada en la parte superior de un torreón se observa con un ángulo de 47°. Si nos acercamos 17,8 metros al torreón, la bandera se observa con un ángulo de 75°. Calcular la altura a la que se encuentra la bandera.

A.4. Calificación máxima: 1 punto.
Halla los valores de x para que el cociente $\frac{x-4i}{x+i}$ sea un número imaginario puro.

A.5. Calificación máxima: 1.2 puntos.
En el triángulo de vértices $A(2,1)$, $B(-3,5)$ y $C(4,5)$, se pide:
- a) (0,6 puntos) El ángulo formado por las rectas AB y BC.
- b) (0,6 puntos) La ecuación de la recta de la altura que pasa por el punto B.

A.6. Calificación máxima: 1.4 puntos.
Dadas las funciones $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{9-x^2}}$ y $g(x) = \frac{2x-6}{1+4x}$, se pide:
- a) (0,8 puntos) El dominio de definición de $f(x)$.
- b) (0,6 puntos) La función inversa de $g(x)$.

A.7. Calificación máxima: 1.2 puntos.
Calcula los siguientes límites:
- a) (0,6 puntos) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x} - 3x\right)$
- b) (0,6 puntos) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x+3}{2x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

A.8. Calificación máxima: 1.2 puntos.
Halla la derivada de la siguiente función: $f(x) = (x^3 - 6x)\cdot(x^2+1)^3$

A.9. Calificación máxima: 0.9 puntos.
Sean A y B dos sucesos aleatorios, sabiendo $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, se pide:
- a) (0,3 puntos) Calcula $P(\bar{A})$.
- b) (0,3 puntos) Calcula $P(A \cup B)$.
- c) (0,3 puntos) Calcula $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

①

$$4^{x+1} + 2^{x+3} - 320 = 0;$$
$$2^{2^{x+1}} + 2^{x+3} - 320 = 0;$$
$$2^{2x+2} + 2^{x+3} - 320 = 0;$$
$$2^{2x} \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2^3 - 320 = 0;$$
$$2^{2x} \cdot 4 + 2^x \cdot 8 - 320 = 0$$

(cambio de variable: $2^x = t$)

$$4t^2 + 8t - 320 = 0$$

$$t = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-320)}}{2 \cdot 4} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 5120}}{8} = \frac{-8 \pm 72}{8} =$$

$$= \begin{cases} \frac{-8+72}{8} = 8 \\ \frac{-8-72}{8} = -10 \end{cases}$$

$2^x = 8 \Rightarrow x = 3$

$2^x = -10 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Solución: } x = 3}$

②

$$\begin{cases} x + y + z = 144 \\ x + 2y + 4z = 312 \\ y = 3(x+z) \end{cases} \Rightarrow$$

x = nº hab. individuales
y = nº hab. dobles
z = nº hab. familiares

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 144 \\ x + 2y + 4z = 312 \\ 3x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

Solución: 16 habitaciones individuales, 108 dobles y 20 familiares.

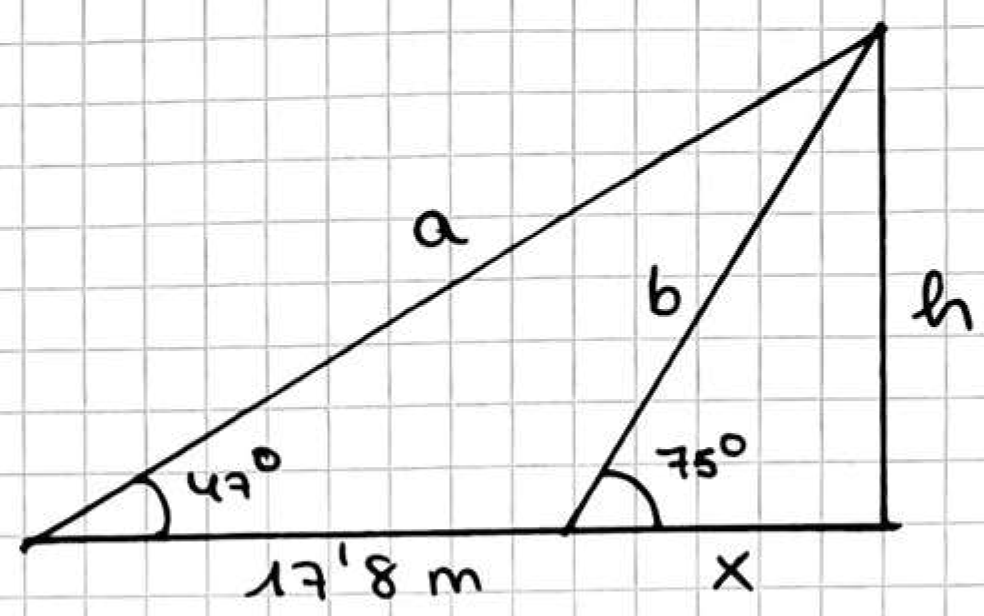
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 144 \\ 1 & 2 & 4 & 312 \\ 3 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E_3 - 3E_1]{E_2 - E_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 144 \\ 0 & 1 & 3 & 168 \\ 0 & -4 & 0 & -432 \end{array}\right)$$

$-4y = -432 \Rightarrow y = 108$

$y + 3z = 168 \Rightarrow 108 + 3z = 168 \Rightarrow 3z = 60 \Rightarrow z = 20$

$x + y + z = 144 \Rightarrow x + 108 + 20 = 144 \Rightarrow x = 16$

③



$$\begin{cases} tg\,75^\circ = \dfrac{h}{x} \\ tg\,47^\circ = \dfrac{h}{17'8 + x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tg\,75^\circ \cdot x = h \\ tg\,47^\circ \cdot (17'8 + x) = h \end{cases}$$

$$tg\,75^\circ \cdot x = tg\,47^\circ \cdot (17'8 + x)\,;$$

$$tg\,75^\circ \cdot x = tg\,47^\circ \cdot 17'8 + tg\,47^\circ \cdot x$$

$$3'73\,x = 19'09 + 1'07\,x$$

$$2'66\,x = 19'09$$

$$x = \frac{19'09}{2'66} \approx 7'18 \text{ m}$$

$$tg\,75^\circ \cdot x = h \Rightarrow tg\,75^\circ \cdot 7'18 = h \Rightarrow h \approx 26'78 \text{ m}$$

Solución: la bandera se encuentra a una altura de 26'78 m.

④

$$\frac{x-4i}{x+i} = \frac{(x-4i)(x-i)}{(x+i)(x-i)} = \frac{x^2-xi-4xi-4}{x^2+1} =$$

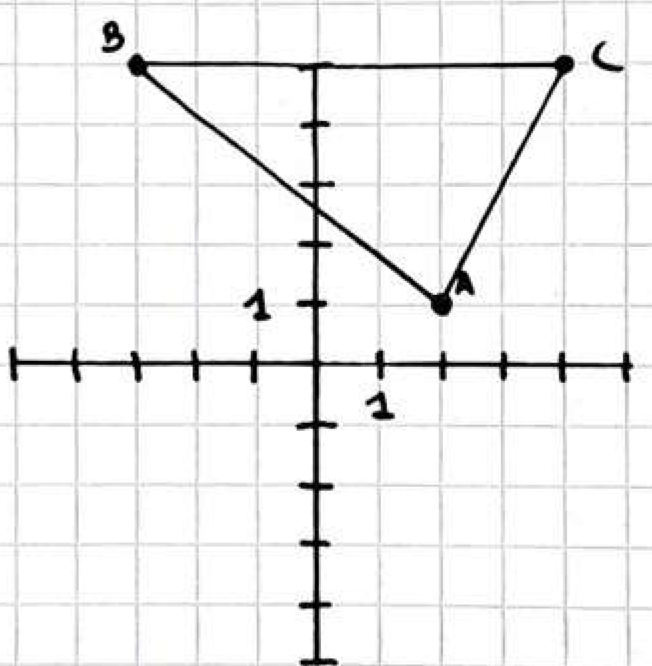
$$= \frac{x^2-4}{x^2+1} - \frac{5x}{x^2+1}\,i$$

Para que sea imaginario puro, la parte real tiene que ser igual a 0.

$$\frac{x^2-4}{x^2+1} = 0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm 2$$

$\boxed{\text{Solución: } x=2 \text{ y } x=-2}$



⑤

a)

$$\overrightarrow{AB} = ((-3)-2,\ 5-1) = (-5,4)$$

$$\overrightarrow{BC} = (4-(-3),\ 5-5) = (7,0)$$

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{BC}|} = \frac{|-5\cdot 7+4\cdot 0|}{\sqrt{(-5)^2+4^2}\sqrt{7^2+0^2}} = \frac{|-35|}{\sqrt{41}\sqrt{49}} = \frac{35}{7\sqrt{41}}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{35}{7\sqrt{41}}\right) = 38^\circ\ 39'\ 35.31''$$

b)

$$m_{\overline{AB}} = \frac{5-1}{(-3)-2} = \frac{4}{-5} \qquad y-5 = \frac{5}{4}(x-4)$$

$$m_{h_C} = \frac{-1}{\frac{4}{-5}} = \frac{5}{4} \qquad y = \frac{5}{4}x$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Solución: a) } 38^\circ\ 39'\ 35.31'' \\ \qquad\qquad\ \text{b) } y = \frac{5}{4}x\end{array}}$$

⑥

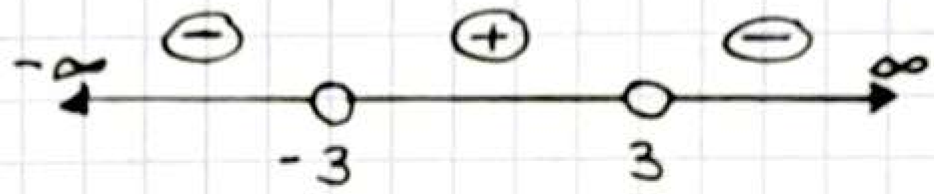
a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{9-x^2}}$

$$9 - x^2 > 0$$

$$(3+x)(3-x) > 0$$

$3 + x = 0 \qquad 3 - x = 0$

$x = -3 \qquad x = 3$



$\text{Dom} f(x) = (-3, 3)$

b) $g(x) = \dfrac{2x-6}{1+4x}$

$$y = \frac{2x-6}{1+4x}$$

$$x = \frac{2y-6}{1+4y}$$

$$x(1+4y) = 2y - 6$$

$$x + 4xy = 2y - 6$$

$$x + 6 = 2y - 4xy$$

$$x + 6 = y(2-4x)$$

$$y = \frac{x+6}{2-4x}$$

$$g^{-1}(x) = \frac{x+6}{2-4x}$$

$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Solución:} & \text{a) } \text{Dom} f(x) = (-3, 3) \\ & \text{b) } g^{-1}(x) = \dfrac{x+6}{2-4x} \end{array}}$

⑦

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x}-3x\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(\sqrt{9x^2+3x}-3x)(\sqrt{9x^2+3x}+3x)}{(\sqrt{9x^2+3x}+3x)}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{9x^2+3x-9x^2}{\sqrt{9x^2+3x}+3x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{\sqrt{9x^2+3x}+3x}\right)=\frac{3}{3+3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

b) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+3}{2x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

$$e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+3}{2x+2}-1\right)\left(\frac{1}{x-1}\right)}=e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+3-2x-2}{2x+2}\right)\left(\frac{1}{x-1}\right)}=$$

$$=e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{-x+1}{2x+2}\right)\left(\frac{1}{x-1}\right)}=e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{-x+1}{2x^2-2}\right)}=$$

$$=e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{-\cancel{(x-1)}}{2\cancel{(x-1)}(x+1)}\right)}=e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{-1}{2(x+1)}\right)}=e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{-1}{2x+2}\right)}=$$

$$=e^{\frac{-1}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$$

$$\boxed{\text{Solución: a) } \frac{1}{2} \quad \text{b) } \frac{1}{\sqrt[4]{e}}}$$

⑧ $f(x)=(x^3-6x)\cdot(x^2+1)^3$

$$((x^3-6x))'=(3x^2-6)$$

$$((x^2+1)^3)'=3\cdot(x^2+1)^2\cdot 2x=6x(x^2+1)^2$$

$$f'(x)=(3x^2-6)\cdot(x^2+1)^3+6x(x^2+1)^2\cdot(x^3-6x)=$$

$$=(x^2+1)^2\left((3x^2-6)\cdot(x^2+1)+6x\cdot(x^3-6x)\right)$$

$$\boxed{\text{Solución: } f'(x)=(x^2+1)^2\left((3x^2-6)\cdot(x^2+1)+6x\cdot(x^3-6x)\right)}$$

9

$$P(A) = \frac{3}{8}$$
$$P(B) = \frac{1}{2}$$
$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

a) $P(\bar{A})$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

b) $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

c) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

Solución:
a) $P(\bar{A}) = \frac{5}{8}$
b) $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$
c) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{3}{8}$