

# MODELAÇÃO E SIMULAÇÃO

LEEC

---

## Bola Saltitante

---

### **Autores:**

Henrique Pocinho - 99952  
Rodrigo Coimbra - 100078  
Vasco Esteves - 100110

[henrique.a.pocinho@tecnico.ulisboa.pt](mailto:henrique.a.pocinho@tecnico.ulisboa.pt)  
[rodrigo.coimbra@tecnico.ulisboa.pt](mailto:rodrigo.coimbra@tecnico.ulisboa.pt)  
[vasco.esteves@tecnico.ulisboa.pt](mailto:vasco.esteves@tecnico.ulisboa.pt)

---

O grupo de alunos acima identificado garante que o texto deste relatório e todo o software e resultados entregues foram inteiramente realizados pelos elementos do grupo, com uma participação significativa de todos eles, e que nenhuma parte do trabalho ou do software e resultados apresentados foi obtida a partir de outras pessoas ou fontes.

---

**L07 4<sup>a</sup> feira 16:00 - 19:00h**  
**2022/2023 – 1<sup>o</sup> Semestre, P2**

# 1 P1 - Implementação em *SIMULINK*

Usando as sugestões do guia desenvolvemos o seguinte diagrama de blocos:

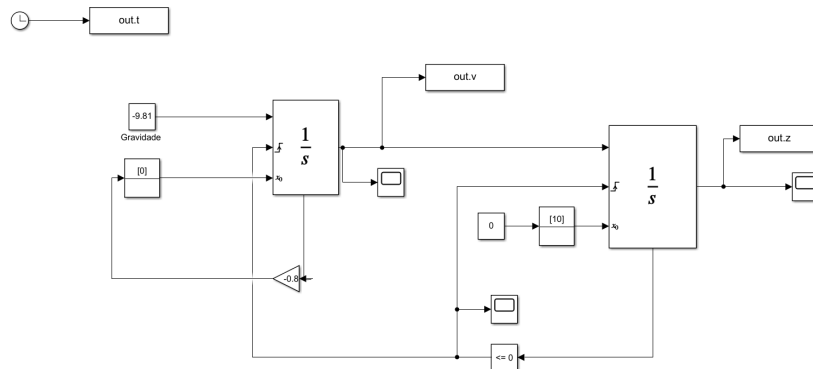


Figura 1: Diagrama do *SIMULINK*

Considerando  $\alpha = -0.8$ , altura inicial de  $h = 10\text{m}$  e com velocidade inicial nula obtemos o seguinte:

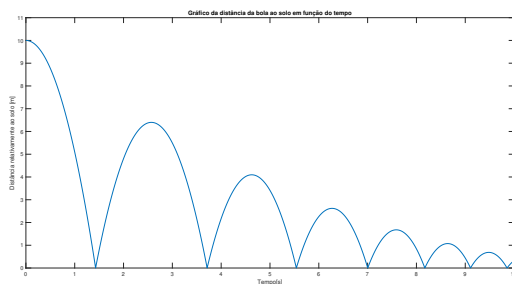


Figura 2: Gráfico da altura da bola em relação ao chão quando  $\alpha = -0.8$

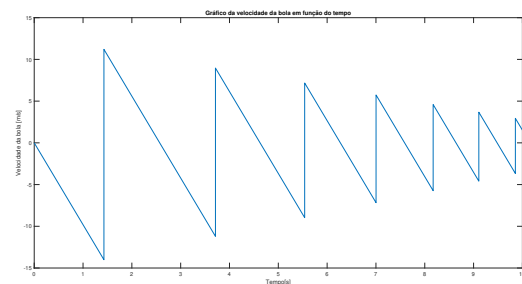


Figura 3: Gráfico da velocidades da bolas quando  $\alpha = -0.8$

Agora, variando o  $\alpha$  obtivemos :

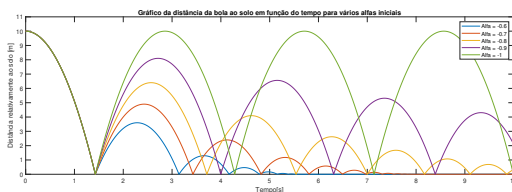


Figura 4: Gráfico das alturas das bolas em relação ao chão para vários  $\alpha$

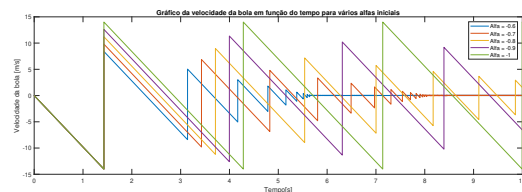


Figura 5: Gráfico das velocidades das bolas para vários  $\alpha$

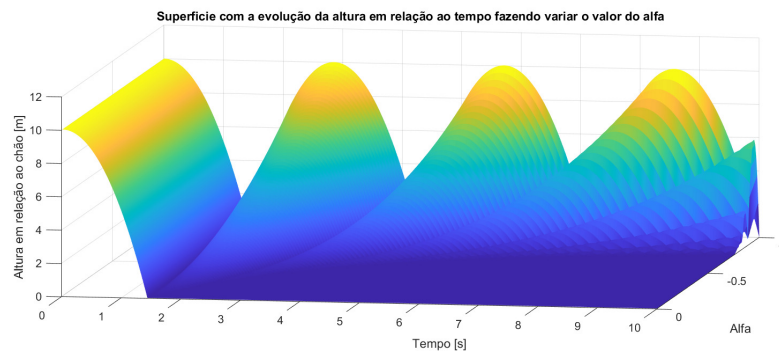


Figura 6: *Mesh plot* da variação do  $\alpha$

É claro que quanto menor o coeficiente  $\alpha$ , mais alto a bola sobe em saltos sucessivos, e de forma inversa, quanto maior o coeficiente mais rapidamente a bola atinge o “repouso”. Na realidade a bola não atinge verdadeiramente o repouso segundo este modelo e isso vai dar origem a um problema, o efeito de Zeno, que será abordado brevemente.

Temos também gráficos com várias simulações variando a velocidade inicial:

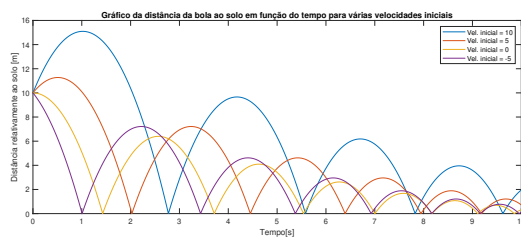


Figura 7: Gráfico das alturas das bolas em relação ao chão para várias velocidades iniciais

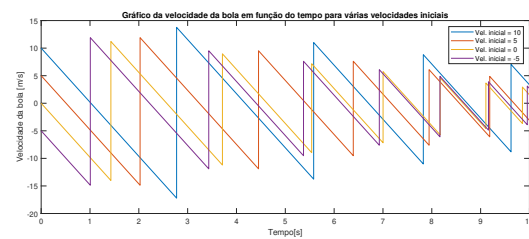


Figura 8: Gráfico das velocidades das bolas para várias velocidades iniciais

Logo, quão menor for a velocidade inicial impressa no sentido positivo do eixo, menor é a largura de cada arco, ou seja, cada salto demora menos tempo. Para além disso, podemos ver que no sentido negativo do eixo o comportamento é o contrário, o que já era expectável, pois uma maior velocidade inicial em direção ao chão leva ao contacto com o mesmo num menor espaço de tempo.

Falta então analisar o efeito de Zeno, para isso tentámos simular 20 segundos e deu o seguinte erro:



Figura 9: Erro apresentado pelo *SIMULINK*

Logo, isto significa que estamos perante um número de integrações impossível de realizar no intervalo de tempo pedido e por isso o *SIMULINK* apresentou o erro, no entanto se con-

tinuássemos a integrar chegaríamos a um ponto onde existe um intervalo de tempo discreto com um número infinito de integrações, tendo aí o efeito de Zeno.

No entanto, solucionámos o erro alterando as definições de simulação e obtivemos o seguinte gráfico da figura 10, que revela a simulação a aumentar a frequência dos saltos infinitamente resultando em arcos cada vez menores, o que causa o efeito visual de uma linha mais grossa no gráfico.

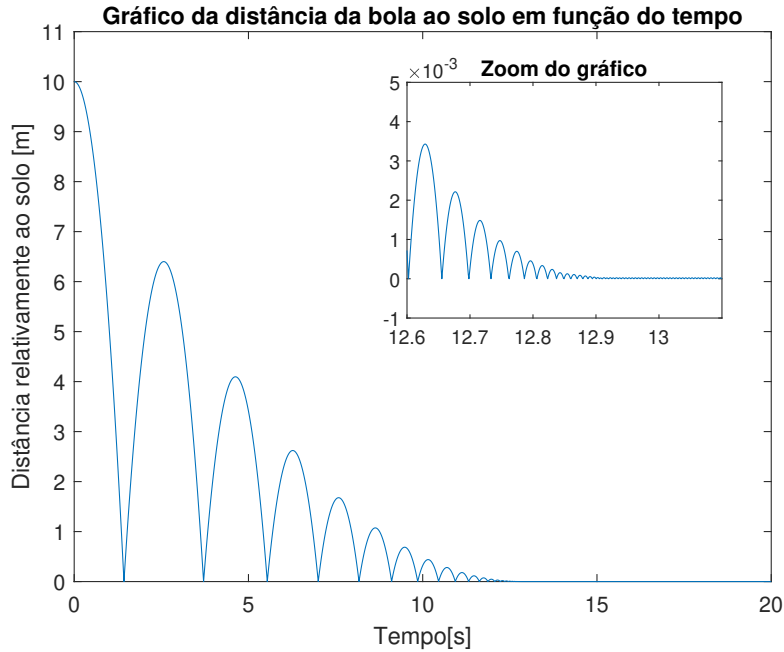


Figura 10: Gráfico da altura da bola para 20 segundos, com respetivo zoom na região onde a bola entra em "repouso"

Note-se que é possível calcular o valor do instante de tempo em que o efeito de Zeno acontece, para isso usamos as expressões do sistema em causa:

$$\begin{cases} h(t) = h_0 + v_0(t - t_0) - \frac{a_0}{2}(t - t_0)^2 \\ \dot{h}(t) = v_0 - a_0(t - t_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h(t) = h_0 - \frac{a_0}{2}t^2 \\ \dot{h}(t) = -a_0t \end{cases}$$

Vamos considerar  $t_0 = 0$  e  $v_0 = 0$ , dado que são as condições do enunciado, e de seguida podemos calcular o tempo do primeiro impacto  $t_1$ :

$$h(t_1) = 0 \Leftrightarrow h_0 - \frac{a_0}{2}t_1^2 = 0 \Leftrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h_0}{a_0}}$$

Precisamos de calcular a velocidade aquando do choque, de forma a termos as equações para os saltos seguintes:

$$\dot{h}(t_1) = -a_0t_1 = -a_0 \cdot \sqrt{\frac{2h_0}{a_0}} = -\sqrt{2h_0a_0}$$

No salto seguinte, a bola terá  $h_{1_0} = 0$ , mas  $v_{1_0} = \alpha|\dot{h}(t_1)|$  podendo-se então calcular o tempo que demora até ao segundo choque:

$$h_1(t_2) = 0 \Leftrightarrow v_{10}t_2 - \frac{a_0}{2}t_2^2 = 0 \Rightarrow \alpha\sqrt{2h_0a_0}t_2 - \frac{a_0}{2}t_2^2 = 0 \Leftrightarrow t_2 = 2\alpha\sqrt{\frac{2h_0}{a_0}}$$

Logo temos que o tempo que demoramos a fazer dois saltos é:

$$T = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2h_0}{a_0}} + 2\alpha\sqrt{\frac{2h_0}{a_0}}$$

Podemos pelo mesmo raciocínio calcular o tempo do terceiro salto  $t_3$  obtendo:

$$t_3 = 2\alpha^2\sqrt{\frac{2h_0}{a_0}}$$

Isto porque a velocidade após  $n$  choques é  $\alpha^n v_{10}$ , e por isso se quisermos  $t_n$  obtemos:

$$t_n = 2\alpha^n\sqrt{\frac{2h_0}{a_0}}, n \neq 1$$

Podemos então calcular o tempo total para  $n$  choques:

$$T_n = \sqrt{\frac{2h_0}{a_0}} + \sum_{i=1}^{n-1} 2\alpha^i\sqrt{\frac{2h_0}{a_0}} = \sqrt{\frac{2h_0}{a_0}} \left[ -1 + 2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i \right]$$

Tomando agora o limite de  $n$  para infinito obtemos o tempo de Zeno teórico:

$$T_Z = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2h_0}{a_0}} \left[ -1 + 2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i \right] = \sqrt{\frac{2h_0}{a_0}} \left[ -1 + 2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \right] = \sqrt{\frac{2h_0}{a_0}} \left[ -1 + 2 \cdot \frac{1}{1-\alpha} \right]$$

E com as condições do enunciado,  $h_0 = 10$ ,  $\alpha = 0.8$  e  $a_0 = g = 9.81$  surge o seguinte:

$$T_Z = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{9.81}} \left[ -1 + 2 \cdot \frac{1}{1-0.8} \right] = 12.85059$$

Podemos então verificar que o valor teórico está de acordo com o valor para o qual o *SIMULINK* dá erro.

## 2 P2 - Simulação com atrito viscoso

Para termos um atrito linearmente proporcional à velocidade, implementámos a seguinte equação,  $\vec{a} = \vec{g} - \beta\vec{v}$ , sendo  $\beta$  o coeficiente de atrito. Logo, o nosso diagrama ficou o seguinte:

Figura 11: Diagrama do *SIMULINK*

No seguinte gráfico usámos  $\beta = 0.5$ , e as mesmas condições iniciais consideradas em P1.

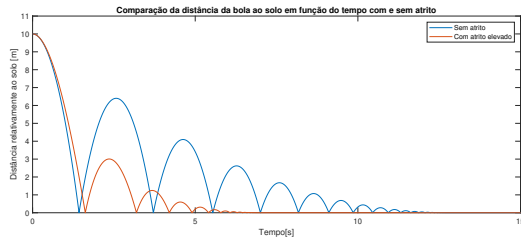


Figura 12: Comparação das alturas das bolas em relação ao chão com e sem atrito viscoso

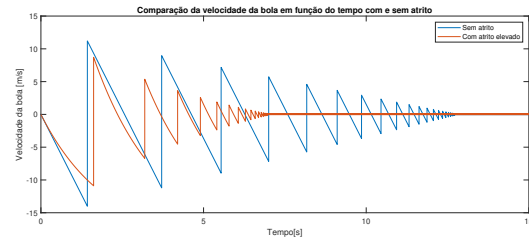
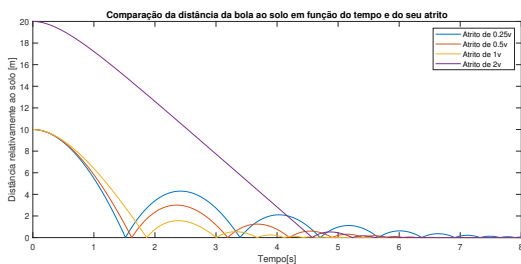
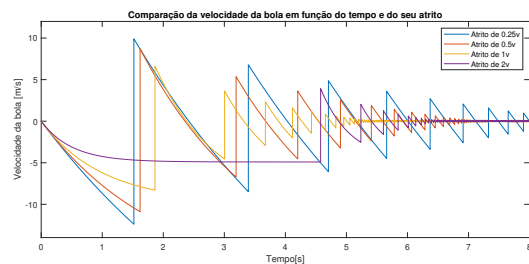


Figura 13: Comparação das velocidades das bolas com e sem atrito viscoso

É claro que com um atrito maior a bola demora mais tempo a cair, tal como salta muito menos. Isto é expectável, dado que existe uma força que se opõe ao movimento, dissipando grande parte da energia o que leva a uma velocidade menor, daí termos um maior tempo de queda e como a bola tem menos energia sobe menos em saltos sucessivos.

Decidimos variar o valor de  $\beta$  obtendo:

Figura 14: Comparação das alturas das bolas com diferentes  $\beta$ Figura 15: Comparação das velocidades das bolas com diferentes  $\beta$ 

Daqui podemos tirar que aumentar o atrito leva a uma diminuição ainda maior da velocidade, tal como esperado. De notar que aparece um efeito curioso na queda inicial onde o corpo atinge uma velocidade terminal. Isto é observável na linha roxa do gráfico da figura 15, que no intervalo correspondente à queda inicial é praticamente uma reta horizontal de valor  $v_{terminal}$  e no gráfico da figura 14 é uma curva, mas que no limite, pode ser aproximada por uma reta de declive  $v_{terminal}$ .

Podemos então calcular a velocidade terminal, para isso a aceleração da bola tem de ser nula, obtendo daí  $\ddot{z} = 0 \Leftrightarrow v_{terminal} = -\frac{g}{\beta}$  obtendo para  $\beta = 2$  a seguinte velocidade terminal,  $v_{terminal} = -4.905m/s$ . Pode-se então confirmar no gráfico da figura 16 que a curva da velocidade tende para este valor, tendo-se definido para este efeito a altura inicial a  $20m$  para demonstrar mais claramente o resultado.

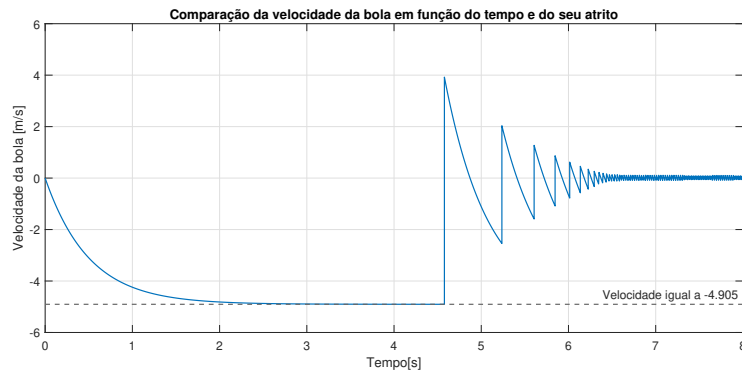


Figura 16: Gráfico da velocidade da bola para um  $\beta = 2$  e  $h_{inicial} = 20m$

### 3 P3 - Simulação com variação de atenuação

Para implementar a mudança de zona de impacto fizemos as seguintes alterações:

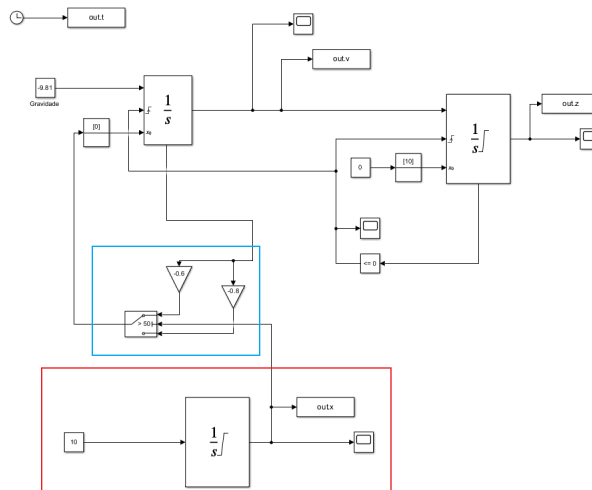


Figura 17: Diagrama de blocos do *SIMULINK*

Como se pode observar adicionou-se uma componente horizontal representada no retângulo vermelho onde é aplicada uma velocidade inicial de dez metros por segundo, que é posteriormente integrada de forma a obter a posição horizontal da bola. Para além disso, é utilizado como método de decisão um *switch*, representado no retângulo azul, que define o momento de

transição para uma zona do plano de impacto em que a atenuação é maior, sendo tal refletido por um aumento no parâmetro  $\alpha$  (passa de -0.8 para -0.6) ao alcançar os cinquenta metros.

No gráfico da figura 18 podemos ver a comparação entre a posição no espaço da bola no caso descrito previamente (amarelo) e no caso em que não ocorre uma alteração na atenuação da zona de impacto (azul).

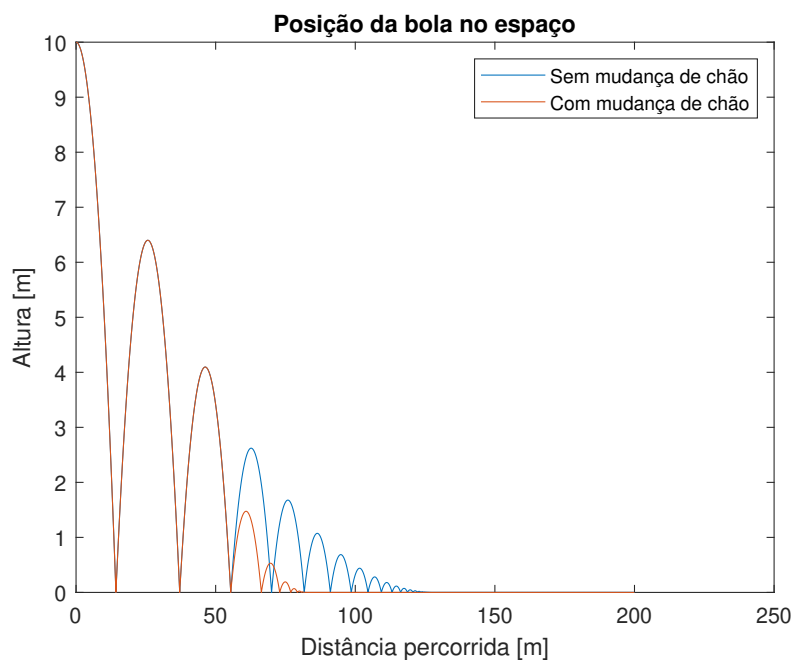


Figura 18: Gráfico da posição com e sem alteração do tipo de chão

É claro que aumentar o valor da atenuação do plano de impacto leva a uma perda significativa de energia que causa uma diminuição rápida do movimento vertical. O movimento horizontal mantém-se inalterado pois não existe nenhuma restrição ao mesmo, logo, quando a bola tiver velocidade vertical nula ela continuará a rolar pelo chão.

Experimentámos ter uma zona de impacto dividida em 3 partes, sendo a primeira separação feita nos 50m e a segunda nos 75m, tendo a primeira e terceira área um  $\alpha_A = -0.8$  e a segunda, entre as outras duas, um  $\alpha_B = -0.6$ , daí obtivemos o seguinte:



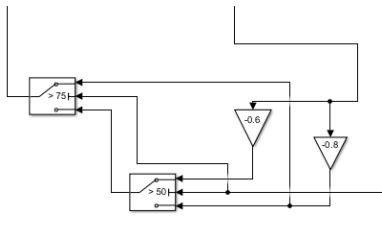


Figura 19: Alterações feitas ao sistema de interruptores para implementar uma zona de impacto tripartida

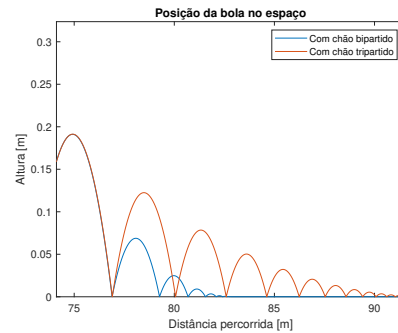


Figura 20: Zoom da segunda área de transição

Isto traduz-se no esperado, já que ao estabelecer esta terceira zona em que se retorna à atenuação da primeira é possível observar uma extensão da duração do movimento vertical. No entanto, ao fazer uma comparação entre o traçado amarelo da figura 20 e a situação em que não ocorre alteração do chão da figura 18, existe uma óbvia perda de energia.

## 4 P4 - Simulação com choque contra uma parede

Para erguer as paredes alterámos o diagrama de blocos para o seguinte:

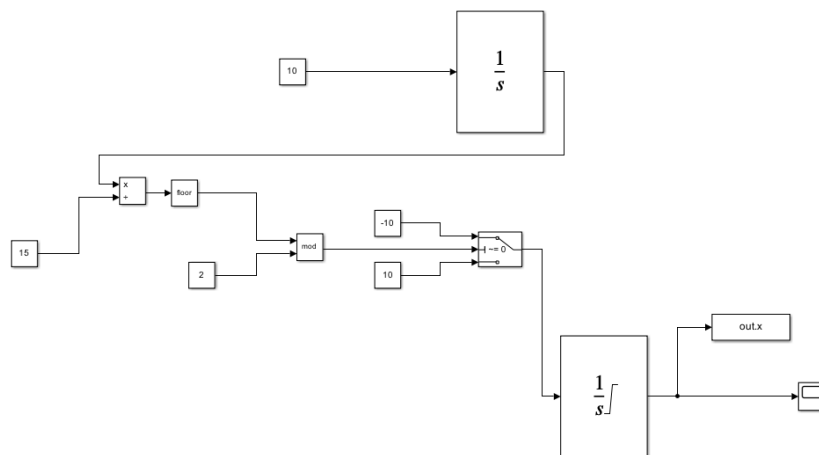


Figura 21: Diagrama de blocos do *SIMULINK*

Como se pode ver na figura 21, passamos a velocidade inicial por um integrador de modo a obter a distância total percorrida pela bola desde o início do seu movimento. Assim, com essa distância calculamos os choques com as paredes, ou seja, a cada 15 metros trocamos o sinal da velocidade que será usada para calcular a posição, de forma a simular os choques. No final integramos a velocidade para obtermos a posição real.

O gráfico seguinte apresenta a trajetória da bola com  $\alpha = -0.9$  e as restantes condições iguais ao P1:

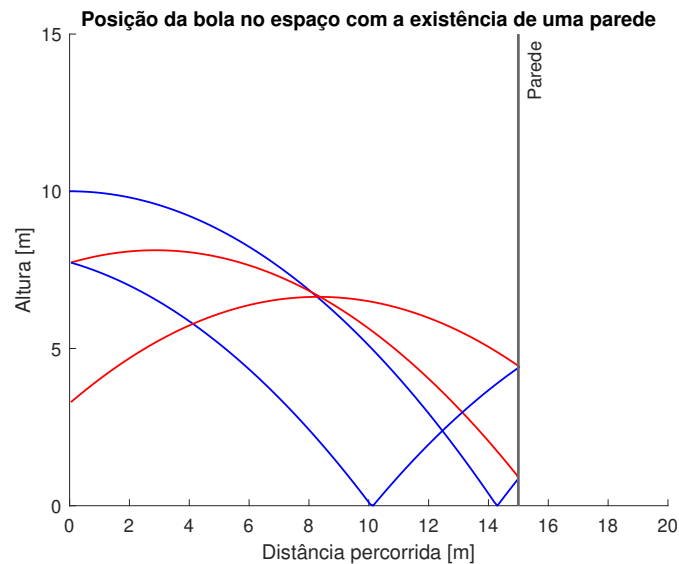


Figura 22: Gráfico da posição com duas paredes

Para facilitar a leitura do gráfico, decidimos colorir a trajetória, estando a azul o sentido positivo e a vermelho o sentido negativo. Podemos ver de forma clara o resultado do choque com as paredes, dado que apenas muda o sentido da velocidade horizontal devido à não existência de atrito na colisão, mantendo-se o restante igual às situações previamente analisadas.

Por curiosidade implementámos a variação de atenuação do Problema 3 e obtivemos o seguinte:

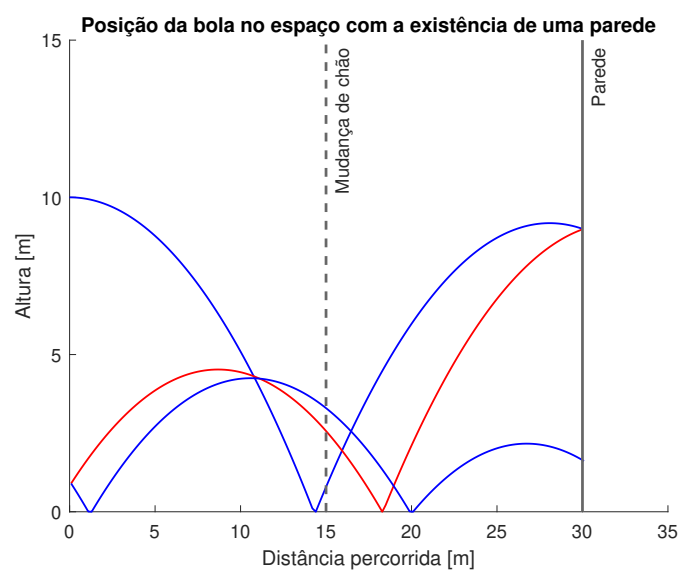


Figura 23: Gráfico da posição da bola com duas paredes e com dois tipos de chão

No gráfico da figura 23 foram usados dois tipos de chão, sendo o da esquerda  $\alpha_A = -0.95$  e o da direita  $\alpha_B = -0.7$ . Para além disso a simulação correu durante os primeiros 9 segundos do lançamento e a velocidade e altura iniciais mantêm-se do Problema 3. Como se pode observar após o primeiro salto, a bola atinge um altura próxima da altura de que foi largada, o que se deve ao coeficiente de atenuação muito perto de -1. Já no segundo salto nota-se uma perda clara de altura, devido a esta já bater no chão B que tem um coeficiente mais elevado.

Decidimos ainda comparar no caso do coeficiente do chão B em vez de servir de atenuante do movimento vertical fosse excitante e, portanto, alterámos o  $\alpha_A$  para  $-0.7$ , o  $\alpha_B$  para  $-1.2$  e a duração para 12 segundos de forma a analisar-se melhor o movimento. Assim obtivemos o seguinte gráfico:

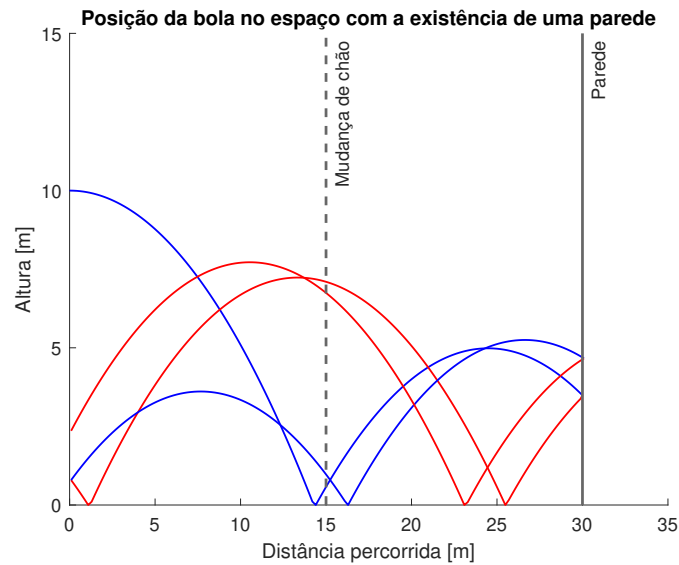


Figura 24: Gráfico da posição da bola com duas paredes e com dois tipos de chão

Como se pode observar na figura 24, no primeiro salto, verifica-se uma perda de energia, levando a que a bola não consiga retomar a altura do pré-impacto, enquanto que no segundo salto, devido a esta bater num chão com um  $\alpha < -1$ , esta alcança uma altura superior ao salto anterior. Esta situação, apesar de fictícia, por não existir na realidade um chão passivo com um coeficiente menor que -1, pode ser verificada no caso de um chão ativo, como por exemplo um pistão que é acionado quando ocorre o impacto da bola com o chão. De notar que em média o chão tem  $\alpha = -0.95$  e por isso podemos extrapolar que para este caso a bola eventualmente atinge um estado semelhante ao repouso.