Engenharia Eletrotécnica e de Computadores

Controlo

Relatório Final

Autores:
Daniel Dinis
Student ID: 99906
João Gonçalves
Student ID: 99995
Rodrigo Coimbra
Student ID: 100078

Junho 2021

1 Introdução

O objetivo deste trabalho é o estudo de um motor DC, cujo o esquema simplificado equivalente pode ser apresentado da seguinte forma:

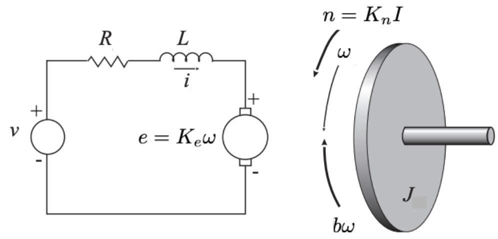

Fig. 1: Circuito equivalente do motor DC

Para uma melhor organização, enumera-se de seguida as diferentes grandezas utilizadas neste trabalho.

- R - Resistência do circuito de rotor (armadura)
- L - Indutância do circuito de rotor (armadura)
- e(t) - Força (tensão) contra-eletromotriz
- K_e - Constante elétrica
- i(t) - Corrente do circuito de rotor (armadura)
- v(t) - Tensão aplicada aos terminais do motor
- w(t) - Velocidade angular do motor
- J - Momento de inércia referido ao eixo do motor
- b - Coeficiente de atrito
- n(t) - Binário do motor
- K_n - Constante de corrente/torque

Também é fundamental apresentar as equações que regem este sistema.

Aplicando a Lei das Malhas, a tensão v(t) relaciona-se com a corrente i(t) e a força eletromotriz e(t), como apresentado na equação (1.1).

$$v(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + e(t) \tag{1.1}$$

Fazendo a aproximação que R≫L e sabendo que $e(t) = K_e \cdot w(t)$, podemos considerar que a corrente i(t) é dada por:

$$i(t) = \frac{v(t) - K_e \cdot w(t)}{R} \tag{1.2}$$

A equação (1.3) descreve a velocidade angular do motor, em que o binário do motor $n(t) = K_n i(t)$.

$$J \cdot \dot{w(t)} = -bw(t) + n(t) \tag{1.3}$$

2 Modelação

2.1 [T] Modelo Dinâmico Simplificado

Resposta: Para se obter a função de transferência do sistema começamos por substituir a (1.2), na equação (1.3), de seguida separa-se os termos dependentes de $w(t)$ dos dependentes de $v(t)$.

$$J \cdot \dot{w(t)} = -bw(t) + K_n \frac{v(t) - K_e \cdot w(t)}{R} \tag{2.1}$$

$$\Leftrightarrow \qquad R \cdot J \cdot \dot{w(t)} + w(t)(R \cdot b + K_e K_n) = K_n v(t) \tag{2.2}$$

Aplicando a Transformada de Laplace à equação (2.2), obtém-se

$$\Omega(s)(s \cdot R \cdot J + R \cdot b + K_e K_n) = K_n V(s) \tag{2.3}$$

Daí é trivial concluir que a função de transferência $G(s)$ vai ser dada por:

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{K_n}{R \cdot b + K_e K_n} \frac{\frac{R \cdot b + K_e K_n}{R \cdot J}}{s + \frac{R \cdot b + K_e K_n}{R \cdot J}} \tag{2.4}$$

Concluí-se então que a função de transferência do sistema é de 1ª ordem e pode ser escrita da forma

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{V(s)} = k_0 \frac{a}{s+a} \tag{2.5}$$

em que $k_0 = \frac{K_n}{R \cdot b + K_e K_n}$ e $a = \frac{R \cdot b + K_e K_n}{R \cdot J}$.

3 Identificação do Sistema

3.1 [T] Domínio do tempo

Resposta: Com objetivo de analisar a resposta do sistema ao escalão unitário considerou-se X(s) a Transformada de Laplace do sinal de entrada do nosso sistema, G(s) a função transferência e Y(s) a Transformada de Laplace do sinal de saída do sistema ($\omega(t)$). Sendo a entrada um degrau unitário, é fácil deduzir que:

$$x(t) = u(t) \xrightarrow{\text{TL}} X(s) = \frac{1}{s} \tag{3.1}$$

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s) = k_0 \frac{a}{s(s+a)} = \frac{k_0}{s} - \frac{k_0}{s+a} \tag{3.2}$$

Aplicando a Transformada de Laplace inversa a Y(s) é possível concluir que a resposta do sistema ao degrau unitário é:

$$w(t) = k_0(1 - e^{-at})u(t) \tag{3.3}$$

A partir da equação (3.3) é possível calcular a resposta forçada do sistema, ou seja

$$w(t \to \infty) = k_0 u(t) \tag{3.4}$$

$$w(t = \frac{1}{a}) = k_0(1 - e^{-1})u(t) \approx 0.632 \cdot k_0 \cdot u(t) \tag{3.5}$$

Agora que já conhecemos a resposta do sistema ao degrau unitário, seria interessante a partir desta informação ser capaz de descobrir os valores dos parâmetros k_0 e a.

O método sugerido seria através da análise da resposta ao escalão retirar o valor do ganho estático $w(t \to \infty)$, este valor corresponderá ao k_0. Com o valor de k_0 é possível descobrir o valor de $w(t = \frac{1}{a}) = k_0(1 - e^{-1})u(t)$, de seguida procura se no gráfico qual o valor de t que tem ordenada $0.632 \cdot k_0 \cdot u(t)$, que será o nosso $a = \frac{1}{t}$.

3.2 [T] Resposta em frequência

Resposta: Analisando a função de transferência do nosso sistema descrita pela equação (2.5), tendo em conta que o nosso $a \geq 0$, é fácil de deduzir como será o nosso diagrama de bode uma vez que temos um único polo em $-a$.

Note-se que o diagrama de bode assimptótico é meramente uma aproximação, ou seja quer para baixas frequências quer para altas o diagrama é aproximado por uma reta (em unidades logarítmicas), no limite em $w \to 0$ e $w \to \infty$ esta aproximação é adequada, mas quando as 2 retas se cruzam (na frequência a) ocorre um erro, mais especificamente de -3dB, este erro decresce à medida que se afasta da frequência a. Note-se que este comportamento é perfeitamente visível na figura 2.

Seria interessante a partir do diagrama de bode da função de transferência do sistema ser capaz de descobrir os valores dos parâmetros k_0 e a.

O método sugerido para tal seria selecionar um conjunto de pontos do modulo de $H(j\omega)$ a baixas frequências (f $\ll a$) que iriam formar uma reta constante $y = k_0$, sendo possível daí retirar o valor de k_0. De seguida selecionavam-se um conjunto de pontos a altas frequências (f $\gg a$) que também iriam formar uma reta. O ponto de interseção das duas retas terá como frequência o nosso valor de a, note-se que em termos do diagrama real este ponto estaria na verdade 3dB abaixo, tal como já foi mencionado.

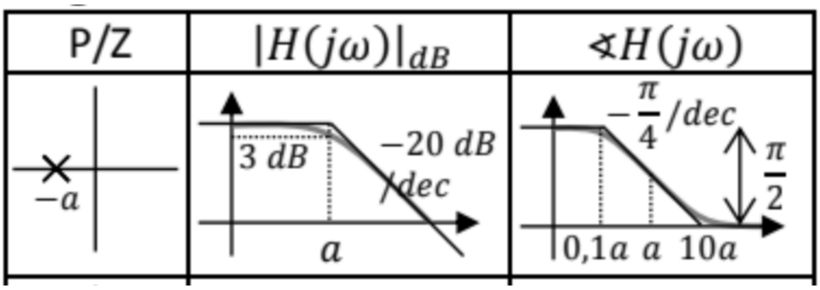

Fig. 2: Diagrama de Bode com um único polo em $-a$

3.3 [L] Resposta ao escalão

Resposta: Nesta componente laboratorial obteve-se a resposta de um motor DC a um escalão de 1 V de amplitude. Em seguida, analisou-se a resposta em regime estacionário, pois, como deduzido em (3.4), este indica o valor de k_0. Assim, obteve-se o valor aproximado de $k_0 \approx 1.5$, note se como o sistema é real, existem sempre erros associados e, portanto, o k_0 não é um valor bem definido.

Para descobrir o valor de a, utilizou-se o método deduzido em (3.5), obtendo-se $w(t) = 0.632 \cdot 1.5 = 0.9480$. Neste ponto observa-se que $t = 1.027s$, ou seja, 0.027s depois da atuação do escalão, logo $a = \frac{1}{0.027} = 37.04$.

Por fim, simulou-se o sistema do motor DC com o a e o k_0 calculados, tendo-se obtido as respostas vistas na figura 3. A resposta do motor é semelhante kà simuladas, portanto, pode-se concluir que estes parâmetros resultam numa boa aproximação ao sistema do motor DC para respostas a escalões.

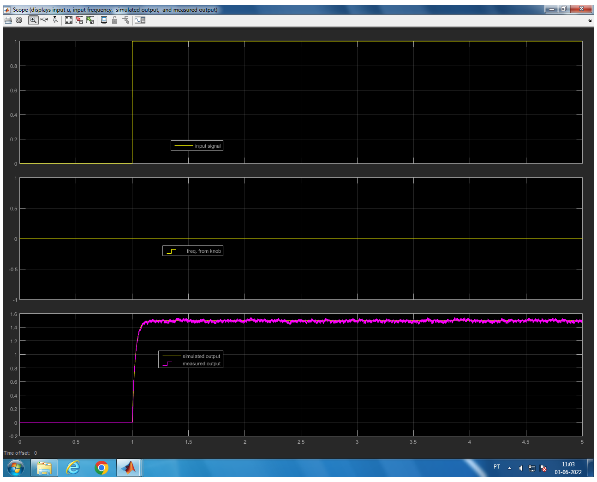

Fig. 3: Resposta ao escalão medida no motor DC (rosa) e a simulada (amarelo)

3.4 [L] Tabela de ganhos para diferentes frequências

Resposta: A tabela seguinte mostra a amplitude e o ganho do sistema real do motor DC quando se aplica à entrada um sinal sinusoidal de $0.5V$ e frequência indicada na tabela.

As amplitudes foram obtidas através dos cursores do Matlab, como se pode ver na figura 5, e em seguida aplicou-se a fórmula da (3.6) para se obter o ganho em dB de cada sinal.

$$Ganho[dB] = 20 \cdot \log(\frac{Amplitude}{0.5}) \tag{3.6}$$

3.5 [L] Resposta em frequência do sistema real

Resposta: Através dos dados recolhidos na tabela da pergunta 3.4 (pontos a vermelho na figura 6), com recurso do Matlab (do qual foi enviado o código), criou-se uma aproximação do diagrama de Bode do sistema real.

	Frequência [Hz]	Amplitude [V]	Ganho [dB]
1	3,7	0.633	2,0487
2	35,11	0.478	-0,3908
3	61,96	0.389	-2,18599
4	99,73	0.250	-6,0315
5	109,3	0.243	-6,25138
6	133,8	0.210	-7,53766
7	156,1	0.190	-8,65105
8	173,9	0.167	-9,51847
9	185	0.180	-8,88747

Fig. 4: Tabela de Ganhos

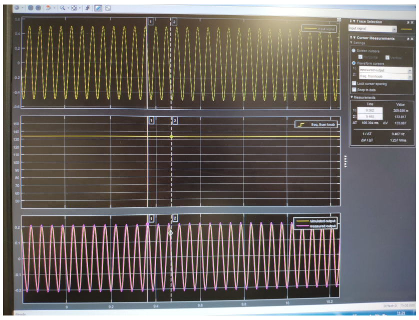

Fig. 5: Resposta à sinusoide de 0.5V e 133.8 Hz

Tanto para baixas como para altas frequências este diagrama pode ser considerado como duas assintotas, em que a primeira é uma reta horizontal de ordenada igual a 1.97 dB e a segunda uma reta com um declive de -19.173498 dB/década (em situação ideal este declive seria -20dB).

Para além disso, podemos retirar o ganho de baixa frequência e a frequência de corte observando mais uma vez a figura 6.

O ganho de baixa frequência é o valor da ordenada da assintota de baixas frequências, ou seja, 1.97 dB (porque se trata de uma aproximação, pois na tabela obtivemos 2,0487 dB).

Já a frequência de corte (f_0) para o diagrama de Bode aproximado é o valor em que este ganho se encontra 3 dB abaixo do ganho de baixa frequência, ou seja, a frequência para -1.03 dB, que seria teoricamente o valor de a. Através da interseção da reta horizontal de -1.03 dB e o diagrama de Bode, obtemos $f_0 = 45.952 \approx a$.

Já se considerarmos o gráfico assimptótico do diagrama de Bode, então a frequência de corte será a interseção das duas assintotas, obtendo assim $f_0 = 40.346 \approx a$

Estes valores de f_0 ligeiramente diferentes de $a = 37.04$ obtido na secção 3.3 devem-se especialmente à falta de pontos experimentais em torno do valor de a, pois é uma zona de variação acentuada e está a ser feita uma aproximação com apenas 1 ponto nessa zona.

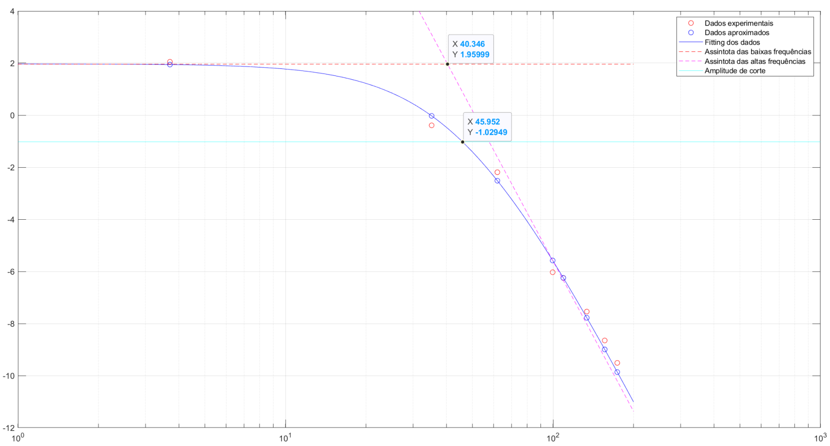

Fig. 6: Aproximação ao diagrama de Bode do sistema

4 Modelação do sistema

4.1 [T] Modelação de parâmetros do sistema

Resposta: Nesta parte do trabalho pretende-se adicionar ao sistema um controlador, $K(s) = \frac{k_1}{s}\frac{s+z}{z}$, em que $k_0 \geq 0$ e $z \geq 0$.

O objetivo é que este controlador cumpra um conjunto de requisitos entre eles que o sistema seja estável. Para tal vamos observar a função de transferência do sistema em cadeia fechada, que é trivial de concluir que vai ser dada pela seguinte expressão:

$$\frac{W(s)}{R(s)} = \frac{K(s) \cdot G(s)}{1 + K(s) \cdot G(s)} = \frac{\frac{k_1 k_0 a}{z}(s+z)}{s^2 + s(a + \frac{k_1 k_0 a}{z}) + k_1 k_0 a} \tag{4.1}$$

Através da equação (4.1) é fácil de concluir que para o sistema ser estável, então $k_1 > 0$ e $z > 0$.

Uma outra restrição é que o erro estático tem de ser nulo. Analisando então o erro estático do sistema facilmente se conclui que:

$$\lim_{s \to 0} \frac{s^2 + s \cdot a}{s^2 + s(a + k_1 k_0 a) + k_1 z k_0 a} = \frac{0}{k_1 z k_0 a} \tag{4.2}$$

Pelo que se conclui que para o ganho estático ser nulo basta que $k_1 \neq 0$ e $z \neq 0$.

Para análise das restantes condições utilizou-se como recurso o controlSystemDesigner do Matlab, obtendo-se a figura 7. Analisando o diagrama de Bode, observa-se que a margem de ganho deste sistema já cumpre a especificação de ser maior ou igual a 20 dB. Isto deve-se pois para qualquer valor de $k_1, z \in \mathbb{R}^+$ o sistema nunca atinge fase de $-180°$, levando a uma margem de ganho infinito. Isto era expectável pois o nosso sistema em cadeia aberta tem 2 polos (um deles integrador) e um zero, logo a fase do diagrama de bode inicia em $-90°$ (influenciada pelo integrador) e vai descer, sobre a influencia do outro polo, na pior das hipótese até aproximadamente $-180°$, mas não atingindo esse limite.

Já a margem de fase foi ajustada de modo a ser maior ou igual a 80°, como pedido no parâmetro iii), tendo-se obtido para os valores escolhidos uma P.M $= 112°$.

Por fim, o parâmetro é iv) respeitado por qualquer sistema que tenha o seu diagrama de Bode de magnitude abaixo da zona amarela da figura 7, ou seja, abaixo dos -10 dB para frequências superiores a $10 \cdot a = 370.4$.

Devido a existirem infinitos sistemas que cumprem estes requisitos, foi escolhido um sistema que atinge um bom equilíbrio de todos os valores de amortecimento, tempo de subida, etc, tendo-se obtido um $k_1 = 6.9094$ e um $z = 14.89$.

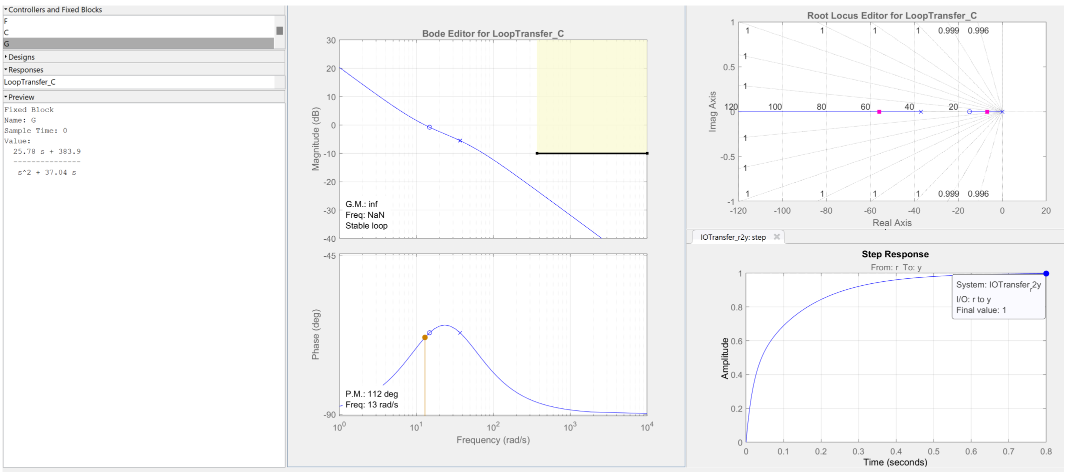

Fig. 7: ControlSystemDesigner do Matlab

4.2 [T] Limitações energéticas

Tendo em conta a restrição iv), estamos a restringir $G(j\omega)K(j\omega) < -10$dB para uma frequência, que neste caso é $\omega = 10 \cdot a = 370.4$rad/s. Tendo em conta que $k_0 = 1.5$, seria de esperar que a frequências superiores a $10a$, $G(j\omega) < -20 + 20log(1.5)$dB, sendo constante para uma data frequência.

Analisemos então a função de transferência entre o sinal de entrada e a atuação:

$$\frac{U(s)}{R(s)} = \frac{K(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} \frac{1}{G(s)} \tag{4.3}$$

Como $K(s)G(s) << 1$, às frequências trabalhadas, pode se simplificar e obter a seguinte equação:

$$\frac{U(s)}{R(s)} \approx \frac{K(s)G(s)}{G(s)} = K(s) \tag{4.4}$$

Como G(s) é constante para uma mesma frequência, então ao limitarmos G(jw)K(jw) < -10dB em frequências superiores a $10 \cdot a$ estamos a diminuir o K(s) para essas frequências e portanto a diminuir $\frac{U(j\omega)}{R(j\omega)}$.

Para se analisar o que acontece em termos energéticos, lembremos que a energia, E, é dada por:

$$E^2\{y\} = \int_0^\infty \Phi_R(\omega) |\frac{U(j\omega)}{R(j\omega)}|^2 d\omega \tag{4.5}$$

, em que $\Phi_R(\omega)$ representa a densidade espectral do sinal de entrada.

Analisando a equação (4.5) é direto concluir que ao restringirmos a função $K(s)G(s) < -10\text{dB}$ estamos a limitar também a energia do sinal de saída.

Esta conclusão seria de esperar uma vez que este tipo de restrições têm como objetivo atenuar o ruído a certa gamas de frequências, reduzindo portanto a energia do sinal.

4.3 [T] Margem de atraso

Ao adicionarmos um atraso do estilo, $e^{-s\tau}$, no nosso sistema, iríamos reduzir a fase do diagrama de bode do sistema por $-\tau \cdot \omega_x$. Consequentemente a margem de fase passaria a ser $PM - \tau \cdot \omega_x$, em que PM é a margem de fase do sistema sem atraso e ω_x é a frequência à qual o módulo é 0dB. É direto concluir que para o sistema ser estável, a margem de fase tem de ser > 0, ou seja o sistema mantém-se estável se

$$\tau < \frac{PM}{\omega_x} \tag{4.6}$$

Analisando a equação (4.6), conclui-se que quanto maior for a margem de fase (PM) e menor ω_x do sistema maior será a gama de valores τ de atraso tolerados.

4.4 [L] Resposta ao escalão do sistema real

Nesta parte laboratorial do trabalho testou-se a resposta do sistema real ao degrau unitário com os parâmetros $k_1 = 6.9094$ e $z = 14.89$ obtidos na secção 4.1. O resultado está apresentado na figura 8, do qual se nota que o sistema simulado se aproxima bastante ao real.

É importante de realçar, que infelizmente as especificações do motor se alteraram entre sessões do laboratório pelo que o valor de k_0 se alterou para 1.382 em vez dos 1.5 obtidos na secção 3.3.

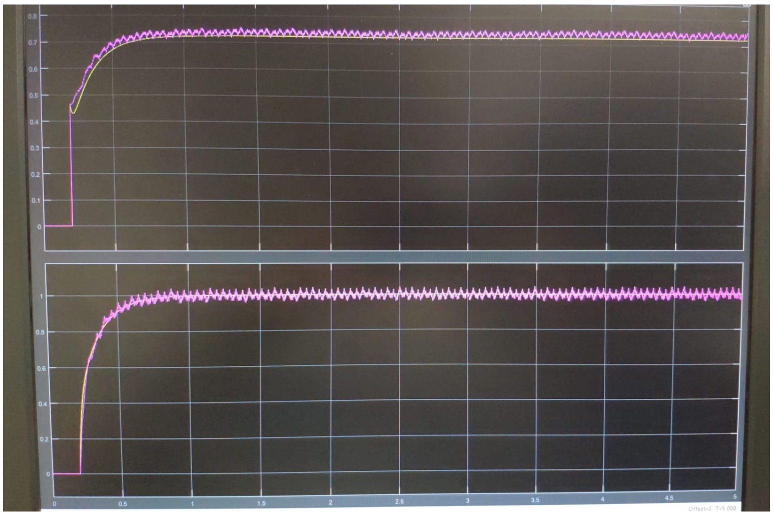

Fig. 8: Resposta do sistema ao escalão

4.5 [L] Impacto dos parâmetros k_1 e z na resposta ao escalão

Tendo em conta os resultados da secção anterior, variou-se o valor de k_1 e de z e observou-se o comportamento da resposta ao degrau. As conclusões que se retirou foram que :

- se se mantiver o z $< a$, então o sistema nunca terá sobre-elevação, enquanto que se se aumentar o z acima desse ponto e se aumentar o k já se observa sobre-elevação. Isto pode ser facilmente explicado através do root locus do sistema (figura 9), em que a partir do momento em que z $> a$, o root locus deixa de variar apenas no eixo real, formando-se agora um circulo em volta do zero. À medida que $\frac{k_1}{z}$ aumenta (pontos a rosa da figura), o valor de sobre-elevação também aumentará, tendo o seu máximo quando estes pontos estiverem o maior valor imaginário em módulo. Depois disso este valor desce cada vez mais até que a sobre-elevação tende para 0 quando um destes pontos se aproxima do zero e o outro do infinito. Quanto ao tempo de pico, o raciocínio é semelhante e conclui-se que este diminui quanto menor for o $\frac{k_1}{z}$.

- o u(s), que é o sinal de atuação, terá valores limites maiores quanto maior for o k_1 e vice-versa. Quanto ao z, u(s) terá valores limites maiores, quanto menor o z e vice-versa. Como sabemos que os valores limites de u(s) são dependentes do ganho de K(s) (eq. 4.6), então quanto maiores esses valores maior será K(s). Portanto analisando a relação que existe entre a energia e o K(s) vista no 4.2, sabemos que quanto maior o K(s) maior será a energia do sistema. Tendo em conta que K(s) está dependente do ganho de $\frac{k_1}{z}$. Portanto quanto maior for o k_1 maior a energia e quanto maior o z menor será a energia.

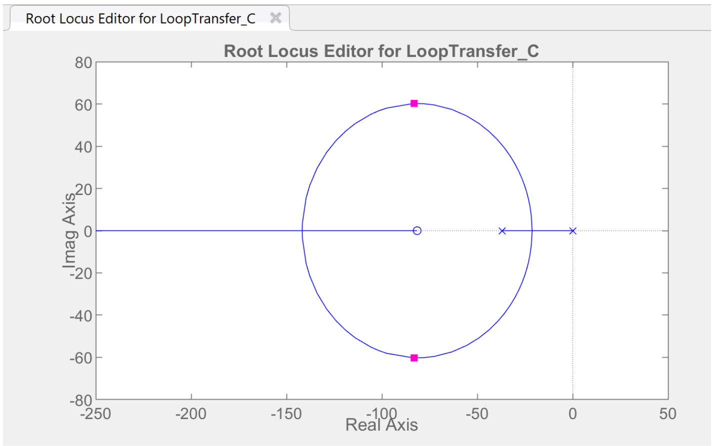

Fig. 9: Root locus do sistema com k_1= 205.7 e z = 86.45

Em geral pode-se estabelecer uma relação de proporcionalidade entre a margem de fase (PM) e o coeficiente de amortecimento (ζ), sendo uma aproximação razoável $\zeta = PM/100$. Tendo em conta que a sobre-elevação aumentará com o aumento do coeficiente de amortecimento ($s = 100e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$), é fácil concluir que uma diminuição na margem de fase levará a um aumento da sobre-elevação, como se pode ver nas figuras 10 e 11.

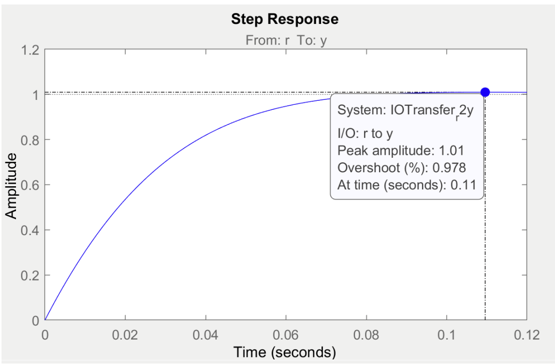

Fig. 10: Sobre-elevação para um sistema com M.P. = 82.5

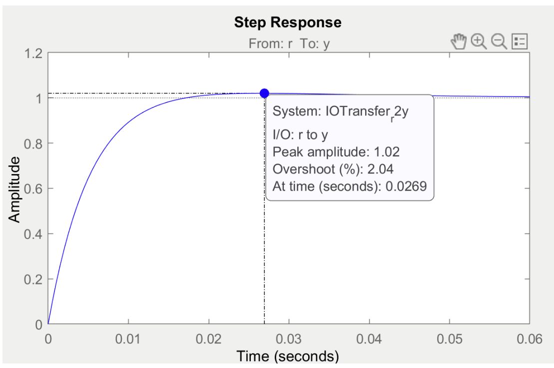

Fig. 11: Sobre-elevação para um sistema com M.P. = 87

Considerando ω_x o ponto que o diagrama de bode interseta os 0dB ("crossover frequency"). Ao aumentarmos o ganho, o modulo do diagrama de bode do sistema sobe, pelo que ω_x aumenta. Também será de esperar que em geral o sistema fique mais rápido, pelo que consequentemente teremos um tempo de pico mais reduzido. Chegamos então à conclusão que um aumento do ω_x leva a uma diminuição do tempo de pico, como pode ser visto nas figuras 12 e 13.

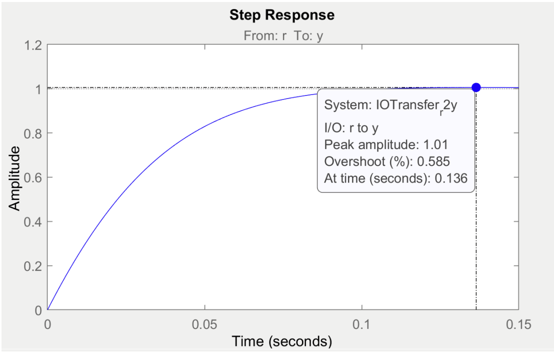

Fig. 12: Tempo de pico para um sistema com $\omega_x = 32.8$

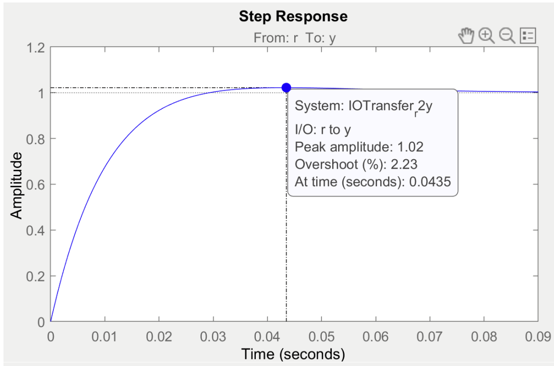

Fig. 13: Tempo de pico para um sistema com $\omega_x = 109$

4.6 [L] Introdução de atrasos no sistema

Recorrendo à expressão (4.6) e tendo em conta que nossos valores de $k_1 = 6.9094$ e $z = 14.89$, a simulação do nosso sistema apresenta uma margem de fase $PM = 110° \approx 1.9199\ rad$ e um $\omega_x = 11.5\ rad/s$ (valores diferentes da fig 7, pois k_0 mudou). Com isto é fácil de concluir que para valores de $\tau < 0.1669$ o nosso sistema permanece estável. Pelo que não foi necessário de alterar os parâmetros para que com um $\tau = 0.02$ o sistema fosse estável, como se representa na figura 14.

Para demonstrar mais claramente o atraso máximo podemos desenhar o diagrama de Nyquist (figura 15) para o nosso $\tau_{max} = 0.1669$, onde podemos ver que estamos no limite da estabilidade (sistema marginalmente estável), ou seja, qualquer atraso maior que este fará o sistema instável, porque enquanto o τ está abaixo desse valor o número de polos e voltas em torno do ponto -1 é 0, tendo portanto 0 zeros. Já quando se passa desse τ_{max} já teremos um número de voltas > 0 e, portanto, teremos pelo menos 1 zero, obtendo assim um sistema instável o que significa que sistema não pode ter um atraso tão alto.

Caso se pretendesse que o sistema tolerasse um atraso maior teria de se diminuir o ω_x e/ou aumentar o valor de P.M.. No nosso sistema isto só seria possível diminuindo o ganho, pois o ω_x varia mais rapidamente que o P.M. levando, portanto, a um aumento do tempo máximo de atraso.

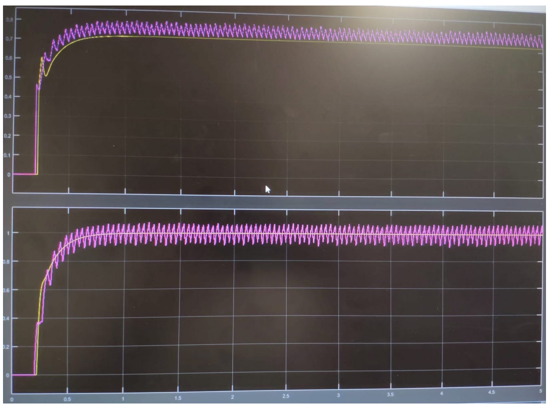

Fig. 14: Resposta do sistema com um atraso $\tau = 0.02$

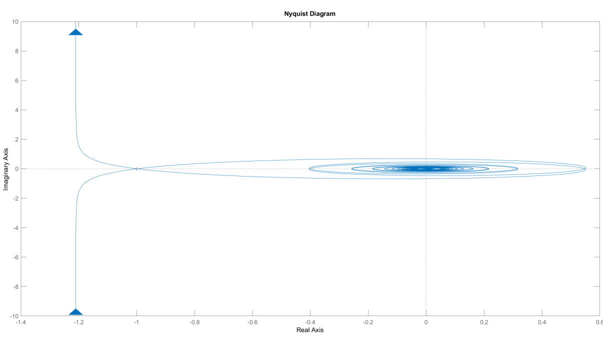

Fig. 15: Diagrama de nyquist com um atraso $\tau = 0.16694$