**fעבודה 3**

**מבוא ללמידה וניתוח של מידע רב**

שאלה 3

סעיף א

תיאור הגרף G:

* Input layer – מכיל d נוירונים, כאשר ערך כל נוירון קלט מתאים לקואורדינטה של .
* Output layer – עם נוירון output יחיד בעל פונקציית אקטיבציה sign. כל הנוירונים של   
  ה-Input layer מחוברים לנוירון של ה-Output layer.

נוכיח ש- . נראה זאת על ידי הכלה דו-כיוונית.

*: יהי . נוכיח שקיים עבורו לכל . נגדיר , כאשר הם המשקלים של הצלעות בין ה-Input layer ל-Output layer.  
יהי , לפי הגדרת , מתקיים ש- . לפי הגדרת הרשת מתקיים שה-output של ה-Output layer הינו  
.  
 תהא . באופן דומה נגדיר   
ומשום ש- אז .*

*סעיף ב*

*טענת עזר: לא קיים מפריד לינארי עבור שמחזיר 1 אם ורק אם לכל יש ב-x יותר קואורדינטות חיוביות משליליות.*

*הוכחה: יהי ונניח בשלילה שלכל אם ורק אם ב- יש יותר קואורדינטות חיוביות משליליות.*

* *מקרה א: אם w מכיל רק אפסים אז ברור שההנחה שגויה.*
* *מקרה ב: w מכיל רק קואורדינטה אחת שהיא לא 0, בה"כ אז ניקח  
   ו בסתירה להנחה.*
* *מקרה ג: w מכיל שתי קואורדינטות שהן לא 0, בה"כ .*

1. *אם נגדיר אזי ולכן בסתירה להנחה.*
2. *אחרת, לפחות אחד מ- ואז נגדיר ונקבל ש- ולכן .*

* *מקרה ד: מכיל 3 קואורדינטות שהן לא 0.*

*אם כל או שאחד בלבד חיובי אז באופן דומה למקרה ג2  
נגדיר .*

*אחרת, שניים בלבד מהקוארדינטות חיובית, בה"כ אז באופן דומה למקרה ג1   
נגדיר .*

*ולבסוף, אם כל אז נגדיר   
ואז ולכן בסתירה.*

*כעת נגדיר את מבנה רשת הנוירונים ונראה שקיימת היפותזה כנדרש.*

תיאור הגרף G:

* Input layer – מכיל 3 נוירונים , כאשר ערך כל נוירון קלט מתאים   
  לקואורדינטה של .
* Hidden layer – מכיל 3 נוירונים, נסמנם כך שכל נוירון קלט מחובר ל , ולכל יש פונקציית אקטיבציה .
* Output layer –מכיל נוירון output יחיד בעל פונקציית אקטיבציה sign. כל הנוירונים של   
  ה- Hidden layerמחוברים לנוירון של ה-Output layer.

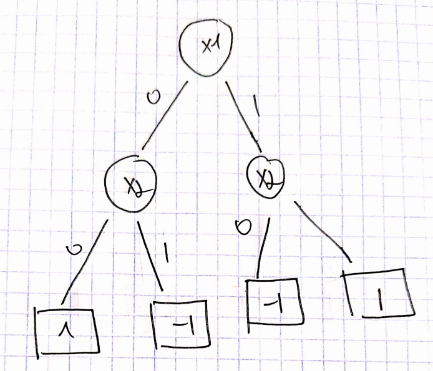
נראה שקיימת היפותזה כך שלכל אם ורק אם ב-x יש יותר קואורדינטות חיוביות משליליות. נבחר כאשר הוא וקטור המשקלים של נוירון , וקטור המשקלים של , – כנ"ל עבור ו- וקטור המשקלים של נוירון ה-output.

אז נשים לב ש- ומכאן , שזוהי בדיוק ההיפותזה הנדרשת.

שאלה 4

סעיף א

נראה שקיים עץ החלטה שמסווג במדויק את המדגם בעומק 2 ונראה שלא קיים עץ כנ"ל בעומק .

הסבר לנכונות העץ: לכל , אם אז יורד במורד תת העץ השמאלי, ושם העץ מחזיר 1 אם ורק אם , בדומה עבור ותת העץ הימני.

עבור עץ החלטה בעומק 1, ניתן לשאול רק עבור קואורדינטה אחת. אם השורש שואל לפי אז ברור שהעץ לא מסווג נכון את המדגם. אחרת, בה"כ השורש שואל עבור , מכיוון שבמדגם כל דוגמה מופיעה לפחות פעם אחת, אז שתי הדוגמאות נמצאות במדגם. אם התשובה של תת העץ המתאים ל- מחזירה 1, אז הוא טועה לגבי , ואם תשובתו היא 0 אז הוא טועה לגבי . סה"כ נקבל שעץ החלטה בעומק 1 לא יכול לסווג נכון את המדגם.

סעיף ב

ניקח מדגם S בגודל 8 כך שכל ערך אפשרי לדוגמה ב- נמצא במדגם פעם אחת בדיוק. נראה ריצה אפשרית של אלגוריתם ID3 על המדגם בעל פונקציית Gain   
עם עבור ופונקציית err שהוגדרו בהרצאה. *כלומר   
איטרציה ראשונה (עומק 0):*

נשים לב ש-

ולכן ונניח שהאלגוריתם בחר לפצל את השורש לפי ה-attribute ה-3.

איטרציה שניה (עומק 1):

* בענף השמאלי- .

משקילות הקואורדינטות ו- .

*מכיוון ש- עבור הענף השמאלי, נניח שהאלגוריתם בחר לפצל לפי .*

* *מגיעים לשלב 2 של האלגוריתם ומחזירים לייבל 1 או 0. בכל מקרה השגיאה היא בשני הענפים שפוצלו לפי ומגיעים לעומק 2 בתת העץ השמאלי.*

*איטרציה שלישית (עומק 1):*

* *בענף הימני- נקבל אותן התוצאות באופן זהה לענף . כלומר מגיעים לשגיאה של בכל אחד מהעלים.*

*סה"כ נקבל שבכל עלה יש לנו שגיאה של ולכן שגיאת עץ ההחלטה שנבנה ע"י אלגוריתם ID3 בריצה זו מגיע לשגיאה של .*

*שאלה 5*

*סעיף א*

*תחילה ניזכר בתכונה ידועה של מטריצות: לכל מטריצה ממשית A, . נתון שעבור בעיית הרגרסיה יש פתרון אופטימלי w יחיד שהוא כאשר הוא המטריצה שדוגמאות המדגם S פרוסות בשורותיה. אז בהכרח הפיכה, ומשום שממדיה דרגתה d. לפי התכונה הנ"ל של מטריצות ממשיות .*

*סעיף ב*

*נסמן ונראה שזוהי קבוצת הפתרונות האופטימליים עבור בעיית linear regression על כך שהווקטור הוא הפתרון לבעיית הרגרסיה על . כאשר הינו וקטור באורך ש- הקואורדינטות הראשונות שלו הן .   
אנחנו נראה שכל וקטור הינו פתרון אופטימלי לבעיית הרגרסיה על .*

*סימון:*

*יהי , נראה ש- מביא למינימום את . נשים לב שמשום שהקואורדינטה ה - של היא 0, אז לכל כאשר . אזי מתקיים לכל ש- ולכן מביא למינימום את ומהווה פתרון אופטימלי לבעיית הרגרסיה על .*

*שאלה 6*

*סעיף א*

*נסמן את המטריצה כאשר . כלומר*

*למדנו בכיתה שה- distortion במקרה זה יהיה סכום שני הערכים העצמיים הקטנים ביותר של המטריצה A. אחרי שימוש בפונקציהnumpy.linalg.eig בפייתון על A נקבל שסכום זה הוא .*

*סעיף ב*

*בשביל לחשב את עלינו למצוא את שני הו"ע המתאימים לשני הע"ע הגדולים ביותר של A ולפרוס אותם בשורות ולנרמל אותם. שוב, נשתמש בפונקציהnumpy.linalg.eig בפייתון ונקבל ש-*

*כך ששורה 1 מתאימה לע"ע הגדול ביותר ושורה 2 מתאימה לע"ע .*

*סעיף ג*

*בשביל לקבל את הווקטורים לאחר ביצוע PCA בעזרת U, נבצע*

*ונקבל ש-*

*נשתמש בנוסחה ונקבל שה- distortion הוא .*

* *נזכור שגם בסעיף א קיבלנו distortion 21.27, כלומר קיבלנו תוצאות זהות. לפי מה שנלמד בכיתה, תוצאת הביטוי שקולה לסכום 2 הע"ע הקטנים ביותר של המטריצה A שהוגדרה למעלה. מכאן שהתוצאות חייבות להיות זהות.*