מבוא לעיבוד אינפורמציה קוונטית – תרגיל בית 2

אביב תשע"ז

שאלה 1: אינפורמציה הדדית (20 נקודות)

תזכורת: בהרצאה הגדרנו את הגדלים הבאים, בהינתן משתנים מקריים X ו־Y:

- האנטרופיה של שאנון: $H\left(X\right)=-\sum_{x}p\left(x\right)\log_{2}p\left(x\right)$
- אנטרופיה מותנית: $H\left(X\mid Y\right)=-\sum_{x,y}p\left(x,y\right)\log_{2}p\left(x\mid y\right)$
- אנטרופיה משותפת: $H\left(X;Y\right)=-\sum_{x,y}p\left(x,y\right)\log_{2}p\left(x,y\right)$
- אינפורמציה הדדית: $I\left(X;Y\right)=H\left(X\right)-H\left(X|Y\right)$

1. (10 נקודות) הוכיחו את הנוסחה הבאה עבור אינפורמציה הדדית: $I\left(X;Y\right)=-\sum_{x,y}p\left(x,y\right)\log_{2}\left(\frac{p(x)p(y)}{p(x,y)}\right)$.
2. (10 נקודות) הוכיחו כי האינפורמציה ההדדית היא אי־שלילית, כלומר $I\left(X;Y\right)\geq0$; וששוויון מתקיים אם ורק אם X ו־Y בלתי תלויים.

   הדרכה: היעזרו בסעיף 1, וכן בעובדה ש־$\ln t\leq t-1$ לכל $t>0$, כאשר שוויון ($\ln t=t-1$) מתקיים אם ורק אם $t=1$.

שאלה 2: אנטרופיה ואינפורמציה הדדית (25 נקודות)

בהרצאה ראיתם את הדוגמה הבאה: "אני בטוח ב־99% שהמפתחות נמצאים בכיס שלי, ואז אני בודק בכיס שלי האם הם שם"; ובנוסף, אם המפתחות לא בכיס, אז הם עשויים להיות ב־100 מקומות שונים בהסתברות זהה.

ניתן לייצג את הדוגמה על־ידי שני משתנים מקריים X ו־Y: בתרחיש שתואר, מצאנו את ערכו של משתנה מקרי Y, והשאלה היא כמה ידע קיבלנו על ערכו של משתנה מקרי X.

1. (5 נקודות) הגדירו את המשתנים המקריים X ו־Y.
2. (5 נקודות) חשבו את ההסתברויות $p\left(x\right)$, $p\left(y\right)$, $p\left(x,y\right)$, $p\left(x\mid y\right)$, $p\left(y\mid x\right)$ לכל הערכים האפשריים של המשתנים המקריים X ו־Y.

   הדרכה: נוח לבצע את החישובים על־ידי השלמת הטבלה הבאה: (ניתן להוסיף שורות ועמודות; וכן ניתן לקבץ שורות ועמודות דומות)

	$X=x_1$	$X=x_2$	סך הכל
$Y=y_1$	$p\left(x_1,y_1\right)=$ $p\left(x_1\mid y_1\right)=$ $p\left(y_1\mid x_1\right)=$	$p\left(x_2,y_1\right)=$ $p\left(x_2\mid y_1\right)=$ $p\left(y_1\mid x_2\right)=$	$p\left(y_1\right)=$
$Y=y_2$	$p\left(x_1,y_2\right)=$ $p\left(x_1\mid y_2\right)=$ $p\left(y_2\mid x_1\right)=$	$p\left(x_2,y_2\right)=$ $p\left(x_2\mid y_2\right)=$ $p\left(y_2\mid x_2\right)=$	$p\left(y_2\right)=$
סך הכל	$p\left(x_1\right)=$	$p\left(x_2\right)=$	1

3. (5 נקודות) מצאו את האנטרופיות $H(X)$, $H(Y)$, $H(X \mid Y=y)$ לכל ערך y של המשתנה המקרי Y, $H(X \mid Y)$ ו־ $H(Y \mid X)$.

4. (5 נקודות) חשבו לפי ההגדרה את האינפורמציות ההדדיות $I(X;Y)$ ו־$I(Y;X)$. ודאו שאכן $I(X;Y) = I(Y;X)$.

5. (5 נקודות) נניח שמצאנו שהמפתחות אינם בכיס. מהי ההשפעה על האנטרופיה של X (חשבו זאת בעזרת הביטויים מסעיף 3)? האם הגיוני שהלימוד הקטין את הידע שלנו? כיצד זה משתלב עם הטענה שהאינפורמציה ההדדית היא תמיד אי־שלילית?

   זכרו שאנטרופיה היא הידע שחסר לנו על המערכת.

שאלה 3: כדור פואנקרה (20 נקודות)

נתונים המצבים (הטהורים) $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ ו־ $|\psi'\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta'}{2} \\ e^{i\phi'}\sin\frac{\theta'}{2} \end{pmatrix}$.

1. (10 נקודות) הוכיחו: $\langle\psi|\psi'\rangle = 0 \Leftrightarrow$ $|\psi\rangle$ ו־$|\psi'\rangle$ נגדיים על כדור פואנקרה (כדור בלוך).

2. (5 נקודות) בהינתן נקודה בתוך כדור פואנקרה, שאינה ראשית הצירים:

   כמה צברים (ensembles) של שני מצבים טהורים ניתן למצוא עבורה? כיצד ניתן להציג באופן גאומטרי את הצברים? אילו (וכמה) מבין הצברים הללו מורכבים משני מצבים אורתונורמליים? הסבירו.

3. (5 נקודות) בהינתן ראשית הצירים של כדור פואנקרה:

   כמה צברים (ensembles) של שני מצבים טהורים ניתן למצוא עבורה? כיצד ניתן להציג באופן גאומטרי את הצברים? אילו (וכמה) מבין הצברים הללו מורכבים משני מצבים אורתונורמליים? הסבירו.

שאלה 4: מדידות (15 נקודות)

1. (5 נקודות) נתון $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ בבסיס החישוב. מה ההסתברות למדוד $\langle +|$? מה ההסתברות למדוד $\langle\theta| = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$?

2. נתונה מטריצת הצפיפות הבאה (המוצגת בבסיס החישוב):

$$\rho = \begin{pmatrix} p_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}$$

   (א) (5 נקודות) מה ההסתברות למדוד $\langle 10|$? מה ההסתברות למדוד $\langle 00|$?

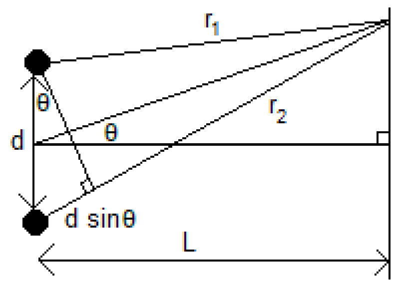
   (ב) (5 נקודות) מה ההסתברות למדוד $\langle +-|$? מה ההסתברות למדוד $\langle +1|$?

שאלה 5: ניסוי שני הסדקים (20 נקודות)

קראו את חומר העזר המצורף לתרגיל (לקריאה עצמית), בנושא "גלים".

בשאלה זו נדון בניסוי שני הסדקים, כדי לקבל אינטואיציה על תכונות הפיסיקה הקוונטית. בניסוי שני הסדקים מופיעה תופעת ההתאבכות של גלים. נבצע מספר חישובים מודרכים כדי לקבל את תבנית ההתאבכות.

בניסוי קיימים שני מקורות אור נקודתיים (המסומנים בתרשים שלהלן כשתי נקודות מובלטות), במרחק אנכי d זה מזה; ומסך במרחק אופקי L משניהם. אנו מניחים $d \ll L$. אנו מתעניינים בגל המתקבל על המסך, בנקודה הנמצאת בזווית θ ביחס לקו האופקי היוצא מאמצע הקטע שבין שני מקורות האור, כמתואר באיור.



איור 1: ניסוי שני הסדקים

נניח שמכל אחד משני מקורות האור יוצא גל כדורי, כך שהגלים תלויים במרחק r_1 מהמקור העליון (או במרחק r_2 מהמקור התחתון, בהתאמה), ובעלי אותו אורך גל, אותה אמפליטודה וקטורית $\vec{E_0}$ ואותה פאזה. כלומר:

$$\vec{E_1}\left(\vec{r_1},t\right)=\frac{\vec{E_0}}{r_1}\cos\left(k\cdot r_1-\omega\cdot t\right)$$

$$\vec{E_2}\left(\vec{r_2},t\right)=\frac{\vec{E_0}}{r_2}\cos\left(k\cdot r_2-\omega\cdot t\right)$$

הגלים תלת־מימדיים, אך אנו נתבונן רק במישור הניצב למסך שבו נמצאים שני מקורות האור.

1. (5 נקודות) הציגו את סכום שני הגלים, $\vec{E_1}\left(\vec{r_1},t\right)+\vec{E_2}\left(\vec{r_2},t\right)$, כמכפלה של שתי פונקציות טריגונומטריות (עם מקדם וקטורי קבוע).

   עבור המכנה שמחוץ לקוסינוסים (ורק עבורו), הניחו $r_1\approx r_2\approx r$ (כי $d\ll L$).

   הדרכה: השתמשו בזהות הטריגונומטרית $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

2. (5 נקודות) חשבו את הערך המוחלט בריבוע של השדה החשמלי מסעיף 1: $\left|\vec{E_1}\left(\vec{r_1},t\right)+\vec{E_2}\left(\vec{r_2},t\right)\right|^2$ (גודל זה פרופורציוני לעוצמת הגל).

3. (5 נקודות) חשבו את הממוצע בזמן של הערך שחישבתם בסעיף 2: $\left\langle\left|\vec{E_1}\left(\vec{r_1},t\right)+\vec{E_2}\left(\vec{r_2},t\right)\right|^2\right\rangle$.

   הדרכה: לא הגדרנו כיצד מחשבים ממוצע בזמן; אך בכל זאת תוכלו לבצע את החישוב, על ידי שימוש בשתי הנוסחאות הבאות: $\left\langle c\cdot f\left(t\right)\right\rangle=c\cdot\left\langle f\left(t\right)\right\rangle$ (כלומר, ניתן להוציא אל מחוץ לחישוב הממוצע גודל שאינו תלוי בזמן); ו־$\left\langle\cos^2\left(\alpha+\omega t\right)\right\rangle=\frac{1}{2}$ כאשר α גודל כלשהו שאינו תלוי בזמן.

4. (5 נקודות) כפי שמסומן באיור, הועבר אנך ממקור האור העליון לקו באורך r_2 היוצא ממקור האור התחתון, כך שהקו באורך r_2 מתחלק לשני קווים, האחד בערך באורך r_1 והשני באורך $d\sin\theta$ (האורכים נובעים מכך ש־$d\ll L$, ואין צורך להוכיח זאת). המסקנה היא שמתקיים $r_2\approx r_1+d\sin\theta$. הציבו מסקנה זו בתוצאה שקיבלתם בסעיף 3 כדי לקבל את העוצמה הממוצעת בזמן של מקור האור, כתלות בזווית θ (כלומר, כתלות בנקודה על המסך).

   הבחינו בכך שבנוסחה שקיבלתם, אמורים להתקבל לסירוגין (כפונקציה של הביטוי $d\sin\theta$) שיאים של עוצמה ונקודות שבהן העוצמה יורדת לאפס.