תרגיל 1

שאלה 1.

1.

נניח כי $S_1;(S_2;S_3)$ ונוכיח $(S_1;S_2);S_3$. עלינו להראות כי עבור כל מצב התחלה s ומצב סופי s'' מתקיימת השקילות.
נתון

$$\langle (S_1;S_2);S_3,s\rangle \to s''$$

לפי כלל $comp$ מתקיים

$$\frac{\langle S_1;S_2,s\rangle \to s' \qquad \langle S_3;s'\rangle \to s''}{\langle (S_1;S_2);S_3,s\rangle \to s''}comp$$

שוב לפי כלל $comp$ מתקיים

$$\frac{\frac{\langle S_1;s\rangle \to s_0 \qquad \langle S_2,s_0\rangle \to s'}{\langle S_1;S_2,s\rangle \to s'} \qquad \langle S_3;s'\rangle \to s''}{\langle (S_1;S_2);S_3,s\rangle \to s''}comp$$

לפי כלל ל$comp$ מתקיים

$$\frac{\langle S_2,s_0\rangle \to s' \quad \langle S_3;s'\rangle \to s''}{\langle S_2;S_3,s_0\rangle \to s''}$$

ושוב לפי כלל $comp$ מתקיים

$$\frac{\langle S_1;s'\rangle \to s_0 \quad \langle S_2;S_3,s_0\rangle \to s''}{\langle S_1;(S_2;S_3),s_0\rangle \to s''}$$

בכיוון השני, נניח

$$\langle S_1;(S_2;S_3),s\rangle \to s''$$

לפי כלל $comp$:

$$\frac{\langle S_1,s\rangle \to s' \quad \langle S_2;S_3,s'\rangle \to s''}{\langle S_1;(S_2;S_3),s\rangle \to s''}$$

שוב לפי כלל $comp$

$$\frac{\langle S_2,s'\rangle \to s_0 \quad \langle S_3,s_0\rangle \to s''}{\langle S_2;S_3,s'\rangle \to s''}$$

וכן

$$\frac{\langle S_1,s\rangle \to s' \quad \langle S_2,s'\rangle \to s_0}{\langle S_1;S_2,s\rangle \to s_0}$$

ולכן

$$\frac{\langle S_1;S_2,s\rangle \to s_0 \quad \langle S_3,s_0\rangle \to s''}{\langle (S_1;S_2),S_3,s\rangle \to s''}$$

כנדרש.

.2

נתבונן על המצב $s\,x=3, s\,y=2$, ועל הפעולות $S_1[x:=x+1], S_2[x:=x*y]$. אז לפי כלל $comp$:

$$\frac{\langle S_1,s\rangle \to s_0 \quad \langle S_2,s_0\rangle \to s'}{\langle S_1;S_2,s\rangle \to s'}$$

ולכן $s_0\,x=4, s_0\,y=2$, ו-$s'\,x=8, s'\,y=2$.
ובמקרה השני

$$\frac{\langle S_2,s\rangle \to s_0 \quad \langle S_1,s_0\rangle \to s'}{\langle S_2;S_1,s\rangle \to s'}$$

ואז $s_0\,x=6, s_0\,y=2$ ו-$s'\,x=5, s'\,y=2$.

שאלה 2.

.1

נשים לב כי Do S while b היא למעשה הכלל

$$\langle S; while\, b\, do\, S, s\rangle \to s'$$

ליתר דיוק יש לנו שני כללים:

$$\frac{\langle S,s\rangle \to s' \quad B[[b]]s'=ff}{\langle S; while\, b\, do\, S,s\rangle \to s'}$$

$$\frac{\langle S,s\rangle \to s' \quad B[[b]]s'=tt \quad \langle while\, b\, do\, S,s'\rangle \to s''}{\langle S; while\, b\, do\, S,s\rangle \to s''}$$

עבור $c=\neg b$ נגדיר את כללי ה-Repeat:

$$\frac{\langle S,s\rangle \to s' \quad B[[c]]s'=tt}{\langle repeat\, S\, until\, c,s\rangle \to s'}$$

$$\frac{\langle S,s\rangle \to s' \quad B[[c]]s'=ff \quad \langle repeat\, S\, until\, c,s'\rangle \to s''}{\langle repeat\, S\, until\, c,s\rangle \to s''}$$

נראה את השקילות הסמנטית בין הכללים

$$\langle repeat\, S\, until\, c, s\rangle \sim \langle S; while\, b\, do\, S, s\rangle$$

נניח $\langle S; while\, b\, do\, S, s\rangle \to s'$, נחלק למקרים את $B[[b]]s'$:

המקרה הראשון: $B[[b]]s'=ff$, הכלל המתאים:

$$\frac{\langle S,s\rangle \to s' \quad B[[b]]s'=ff}{\langle S; while\, b\, do\, S, s\rangle \to s'}$$

כיוון ש-$B[[c]s'=tt$ צריך להראות:

$$\frac{\langle S,s\rangle \to s' \quad B[[c]]s'=tt}{\langle repeat\, S\, until\, c, s\rangle \to s'}$$

אבל זה פשוט משתמע מערכו של B ומכך שאנחנו יודעים שמתקיים $\langle S,s\rangle \to s'$.

המקרה השני $B[[b]]s'=tt$, הכלל המתאים:

$$\frac{\langle S,s\rangle \to s' \quad B[[b]]s'=tt \quad \langle while\, b\, do\, S,s'\rangle \to s''}{\langle S; while\, b\, do\, S, s\rangle \to s''}$$

אנחנו יודעים כי מתקיים $\langle while\, b\, do\, S, s'\rangle \to s''$ לכן מתקיים מעצם ההגדרה $\langle repeat\, S\, until\, \neg b, s\rangle \to s''$ ומהגדרת c נקבל

$$\langle repeat\, S\, until\, c, s\rangle \to s''$$

כמו כן אנחנו יודעים $B[[c]]s' = ff$ ושמתקיים $\langle S, s\rangle \to s'$ לכן ניתן לגזור את הכלל המתאים:

$$\frac{\langle S, s\rangle \to s' \quad B[[c]]s' = ff \quad \langle repeat\, S\, until\, c, s'\rangle \to s''}{\langle repeat\, S\, until\, c, s\rangle \to s''}$$

כנדרש.

כעת נניח $\langle repeat\, S\, until\, c, s\rangle$ונחלק למקרים כמקודם.
המקרה הראשון $B[[c]] = tt$, הכלל המתאים:

$$\frac{\langle S, s\rangle \to s' \quad B[[c]]s' = tt}{\langle repeat\, S\, until\, c, s\rangle \to s'}$$

בדומה למקרה הקודם, אנחנו יודעים $B[[b]] = ff$ וכי $\langle S, s\rangle \to s'$ לכן נוכל לגזור את הכלל המתאים:

$$\frac{\langle S, s\rangle \to s' \quad B[[b]]s' = ff}{\langle S; while\, b\, do\, S, s\rangle \to s'}$$

המקרה השני הוא כאשר $B[[c]] = ff$, הכלל המתאים:

$$\frac{\langle S, s\rangle \to s' \quad B[[c]]s' = ff \quad \langle repeat\, S\, until\, c, s'\rangle \to s''}{\langle repeat\, S\, until\, c, s\rangle \to s''}$$

אנחנו יודעים כי $\langle repeat\, S\, until\, c\, s'\rangle \to s''$ מתקיים, לכן מתקיים $\langle while\, \neg c\, do\, S, s'\rangle \to s''$ כלומר $\langle while\, b\, do\, S, s'\rangle \to s''$,
כמו כן מתקיימים $\langle S, s\rangle \to s'$ ו-$B[[b]]s' = tt$ ולכן נוכל לגזור את הכלל המתאים:

$$\frac{\langle S, s\rangle \to s' \quad B[[b]]s' = tt \quad \langle while\, b\, do\, S, s'\rangle \to s''}{\langle S; while\, b\, do\, S, s\rangle \to s''}$$

2.

שוב נציב $c = \neg b$ ולפי סעיף קודם צריך להוכיח את השקילות הבאה:

$$\langle S; if\, b\, then\, (repeat\, S\, until\, c)\, else\, skip, s\rangle \sim \langle repeat\, S\, until\, c, s\rangle$$

נניח $\langle repeat\, S\, until\, c, s\rangle \to s'$ ונחלק למקרים את $B[[c]]s'$.
המקרה הראשון $B[[c]]s' = ff$, הכלל המתאים:

$$\frac{\langle S, s\rangle \to s' \quad B[[c]]s' = ff \quad \langle repeat\, S\, until\, c, s'\rangle \to s''}{\langle repeat\, S\, until\, c, s\rangle \to s''}$$

אנחנו יודעים כי $B[[b]]s' = tt$, לכן לפי if^{tt} מתקיים:

$$\frac{B[[b]]s' = tt \quad \langle repeat\, S\, until\, \neg b, s'\rangle \to s''}{\langle if\, b\, then\, (repeat\, S\, until\, \neg b)\, else\, skip, s'\rangle \to s''}$$

כמו כן לפי הכלל מתקיים $\langle repeat\, S\, until\, c, s'\rangle \to s''$ כלומר $\langle repeat\, S\, until\, \neg b, s'\rangle \to s''$ לכן מתקיים

$$\langle if\, b\, then\, (repeat\, S\, until\, c)\, else\, skip, s'\rangle \to s''$$

כעת היות ואנחנו יודעים שמתקיים לפחות פעם אחת $\langle S,s\rangle \to s'$ לפי כלל $comp$:

$$\frac{\langle S,s\rangle \to s' \quad \langle if\, b\, then\, (repeat\, S\, until\, c)\, else\, skip, s'\rangle \to s''}{\langle S; if\, b\, then\, (repeat\, S\, until\, c)\, else\, skip, s'\rangle \to s''}$$

כנדרש.

המקרה השני $B[[c]]s' = tt$, הכלל המתאים:

$$\frac{\langle S,s\rangle \to s' \quad B[[c]]s' = tt}{\langle repeat\, S\, until\, c, s\rangle \to s'}$$

נוכל להשתמש בכלל if^{ff}:

$$\frac{B[[b]]s' = ff \quad \langle skip, s'\rangle \to s'}{\langle if\, b\, then(repeat\, S\, until\, \neg b)\, else\, skip, s'\rangle \to s'}$$

כיוון ש-$B[[b]]s' = ff$ ו-$\langle skip, s'\rangle \to s'$ מתקיים תמיד, לכן לפי כלל $comp$ נקבל:

$$\frac{\langle S,s\rangle \to s' \quad \frac{B[[b]]s'=ff \quad \langle skip,s'\rangle \to s'}{\langle if\, b\, then(repeat\, S\, until\, \neg b)\, else\, skip, s'\rangle \to s'}}{\langle S; if\, b\, then(repeat\, S\, until\, \neg b)\, else\, skip, s\rangle \to s'}$$

לכן מתקיים

$$\langle S; if\, b\, then(repeat\, S\, until\, c)\, else\, skip, s\rangle \to s'$$

כנדרש.

כעת נניח $\langle S; if\, b\, then(repeat\, S\, until\, c)\, else\, skip, s\rangle \to s''$ ונחלק למקרים.
לפי כלל $comp$ מתקיים

$$\frac{\langle S,s\rangle \to s' \quad \langle if\, b\, then(repeat\, S\, until\, c)\, else\, skip, s'\rangle \to s''}{\langle S; if\, b\, then(repeat\, S\, until\, c)\, else\, skip, s\rangle \to s''}$$

נחלק למקרים את $B[[b]]s'$.
המקרה הראשון הוא $B[[b]]s' = tt$ נשים לב לכלל השני:

$$\frac{\langle S,s\rangle \to s' \quad B[[c]]s' = ff \quad \langle repeat\, S\, until\, c, s'\rangle \to s''}{\langle repeat\, S\, until\, c, s\rangle \to s''}$$

נסיק מהכלל הימני למעלה שמתקיים $\langle repeat\, S\, until\, c, s'\rangle \to s''$ והכלל השמאלי אומר שמתקיים $\langle S,s\rangle \to s'$, בצירוף הטענות הללו נקבל

$$\langle repeat\, S\, until\, c, s\rangle \to s''$$

כנדרש.
המקרה השני $B[[b]]s' = ff$, נסיק מהכלל הימני למעלה כי $\langle skip, s'\rangle \to s''$, לכן $s' = s''$. נשים לב לכלל הראשון:

$$\frac{\langle S,s\rangle \to s' \quad B[[c]]s' = tt}{\langle repeat\, S\, until\, c, s\rangle \to s'}$$

מהכלל השמאלי למעלה מתקיים $\langle S,s\rangle \to s'$, לכן נקבל

$$\langle repeat\, S\, until\, c\, s\rangle \to s'$$

אבל $s' = s''$ והטענה נובעת.

חלק ב שאלה 1.2

ניזכר שכללי האריתמטיקה הסמנטיים מוגדרים בעזרת A, נגדיר את הביטויים המתאימים לביצוע הזחה:

$$A[[a_1 \ll a_2]]s = A[[a_1]]s \cdot 2^{A[[a_2]]s}$$
$$A[[a_1 \gg a_2]]s = \lfloor A[[a_1]]s/2^{A[[a_2]]s} \rfloor$$

לא היינו בטוחים האם ביקשו תשובה מהצורה הבאה, לכן הבאנו את שתיהן

$$\frac{\langle a_1,s\rangle \to n_1 \quad \langle a_2,s\rangle \to n_2}{\langle a_1 \ll a_2,s\rangle \to n_1 \cdot 2^{n_2}}$$

$$\frac{\langle a_1,s\rangle \to n_1 \quad \langle a_2,s\rangle \to n_2}{\langle a_1 \gg a_2,s\rangle \to \lfloor n_1/2^{n_2} \rfloor}$$