Mathematisches Seminar

Analysis und Algebra

Andreas Müller

2. Holomorphe Funktionen

Inhalt

1. Partielle Ableitungen

Eine komplexe Funktion $f: U \to \mathbb{C}$ kann als zwei reelle Funktionen von zwei reellen Variablen betrachtet werden:

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Damit gehören zu f die vier partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y),\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y),\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \text{ und } \frac{\partial v}{\partial y}(x,y).$$

Damit kann man die Veränderung des Funktionswertes bei einer kleinen Änderung der Argumente ausrechnen:

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx\ & f(x,y) \\ & + \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\Delta x + i\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\Delta y \\ & + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\Delta y + i\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\Delta y \end{aligned} \tag{1.1}$$

In Matrixform ist dies viel übersichtlicher:

Jacobi-Matrix

$$\begin{aligned} f(z+\Delta z) &= \begin{pmatrix} u(x+\Delta x, y+\Delta y) \\ v(x+\Delta x, y+\Delta y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} + \boxed{\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Beispiel: Die komplexe Funktion $f(z) = z^2$ hat Real- und Imaginärteil

$$(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \implies \begin{cases} u(x,y) = x^2 - y^2 \\ v(x,y) = 2xy \end{cases}$$

mit partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

und der Jacobi-Matrix

$$Jf = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -2y & 2x \end{pmatrix}.$$

○

Mit den Formeln (1.1) oder (1.2) kann man zwar eine lokale lineare Approximation der Funktion f schreiben, sie ist aber viel komplizierter als die lineare Approximation

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x \tag{1.3}$$

einer Funktion einer reellen Variable. Statt nur einer Zahl $f'(x)$ braucht die Formel (1.2) eine ganze Matrix von Ableitungen, um mit der Verschiebung um Δx und Δy umzugehen, obwohl man die Verschiebung als eine komplexe Zahl $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ schreiben kann.

2. Komplexe Ableitung

Die Ableitung wird besonders nützlich, wenn man statt mit einer Matrix wie in (1.2) die Multiplikation der komplexen Zahlen nutzen kann und die Änderung als ein Produkt nur einer Zahl mit Δz berechnen kann.

Definition: Die komplexe Funktion $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ heisst **komplex differenzierbar** an der Stelle $z \in U$, wenn es eine komplexe Zahl $f'(z) \in \mathbb{C}$ gibt derart, dass

$$f(z+\Delta z) = \underbrace{f(z) + f'(z)\cdot\Delta z}_{\text{linear Ersatzfunktion}} + o(\Delta z). \quad (2.1)$$

f heisst in U komplex differenzierbar oder **holomorph**, wenn $f'(z)\ \forall z \in U$ existiert.

Beispiel einer holomorphen Funktion: $f(z)=z^2$ erfüllt nach der binomischen Formel:

$$\begin{aligned}(z+\Delta z)^2 &= z^2 + 2z\,\Delta z + (\Delta z)^2 \\ &= f(z) + f'(z)\,\Delta z + o(\Delta z),\end{aligned}$$

es muss also $f'(z) = 2z$ sein ○

Aus der allg. binom. Formel folgt analog $(z^n)' = nz^{n-1}$!

Beispiel einer nicht holomorphen Funktion: $f(z)=|z|^2$.
Die Real- und Imaginärteile sind $u(x,y)=x^2+y^2$ und $v(x,y)=0$, sind also differenzierbar.
Lineare Approximation bei $z=1$, d.h. $x=1, y=0$.

$$\left.\begin{aligned} f(1+\Delta x) &= f(1) + \boxed{2}\cdot\Delta x + o(\Delta x) \\ f(1+i\Delta y) &= f(1) \qquad\qquad + o(\Delta y) \end{aligned}\right\} \quad (2.2)$$

da die Funktion $y \longmapsto 1+y^2$ ein Minimum bei $y=0$ hat. Wenn es eine komplex Ableitung $f'(z)=a+bi$ gäbe, müsste sie

$$\begin{aligned} f(1+\Delta x+i\Delta y) &= f(1)+(a+bi)(\Delta x+i\Delta y)+o(\Delta x,\Delta y) \\ &= f(1)+\boxed{(a+bi)}\Delta x+\boxed{(ai-b)}\Delta y+o(\Delta x,\Delta y) \end{aligned}$$

erfüllen. Vergleich mit (2.2) ~~zeigt~~, dass

$$\begin{aligned} a+bi &= 2 &\Longrightarrow\quad & \boxed{a=2}, \ b=0 \\ ai-b &= 0 &\Longrightarrow\quad & \boxed{a=0}, \ b=0 \end{aligned}$$

sein müsste. Der Widerspruch zeigt, dass $f'(z)$ nicht existiert $\bigcirc$

Nicht alle komplexen Funktionen mit diff'barem Real- und Imaginärteil sind komplex diff'bar. "Holomorphie" ist mehr als nur Differenzierbarkeit von Real- und Imaginärteil.

3. Ableitungsregeln

Potenzen: $f(z) = z^n$

$$(z+\Delta z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} (\Delta z)^k$$

$$= z^n + \binom{n}{1} z^{n-1} \Delta z + o(\Delta z)$$

$$= z^n + (n z^{n-1}) \Delta z + o(\Delta z)$$

$$\Longrightarrow \quad f'(z) = n z^{n-1}.$$

Linearität: f, g und $h = \alpha f + \beta g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Da f, g holomorph sind, haben sie eine lineare Ersatzfunktion

$$\begin{array}{r|l}
\alpha \cdot & f(z+\Delta z) = f(z) + f'(z) \cdot \Delta z + o(\Delta z) \\
\beta \cdot & g(z+\Delta z) = g(z) + g'(z) \cdot \Delta z + o(\Delta z) \\
\hline
\text{Summe} & h(z+\Delta z) = h(z) + (\alpha f'(z) + \beta g'(z)) \Delta z \\
& \qquad + o(\Delta z)
\end{array}$$

$$\Rightarrow h'(z) = \alpha f'(z) + \beta g'(z).$$

Produktregel: f, g holomorph, $h = f \cdot g$

$$f(z+\Delta z) = f(z) + f'(z) \cdot \Delta z + o(\Delta z)$$

$$g(z+\Delta z) = g(z) + g'(z) \cdot \Delta z + o(\Delta z)$$

Produkt:

$$h(z+\Delta z) = f(z) g(z) + (f'(z) g(z) + f(z) g'(z)) \Delta z + o(\Delta z)$$

$$\Longrightarrow h' = f'g + fg'.$$

Beobachtungen:

- Die Regeln konnten ohne Grenzwertberechnung allein durch algebraische Rechnung ermittelt werden.
- Die Ableitungsregeln für holomorphe Funktionen sind identisch zu den Regeln für reelle Funktionen. Reelle Funktionen und holomorphe Funktionen verwenden die gleiche Algebra eines Differential-operators $\frac{d}{dz}$ mit den algebraischen Eigenschaften:

① $\frac{d}{dz}$ ist linear: $\frac{d}{dz}(f+g) = \frac{d}{dz}f + \frac{d}{dz}g$

$$\frac{d}{dz}(\alpha f) = \alpha \frac{d}{dz}f.$$

② $\frac{d}{dz}$ erfüllt die Produktregel

$$\frac{d}{dz}(fg) = \left(\frac{d}{dz}f\right)g + f\frac{d}{dz}g.$$

Definition: Ein linearer Operator D auf einer Algebra $\mathcal{A}$ (von Funktionen), der die Produktregel $D(fg) = (Df)g + f\,Dg$ erfüllt, heisst eine **Derivation**.

Der Begriff einer Derivation ist rein algebraisch, das Konzept des Grenzwertes ist dafür nicht nötig.

Weitere Ableitungsregeln können jetzt rein algebraisch gefunden werden:

Reziproke: $g(z) = \frac{1}{f(z)} \Longrightarrow f \cdot g = 1$ hat Ableitung

$$f'g + fg' = 0 \Longrightarrow g' = \frac{f'g}{f}.$$

Quotientenregel: $h = \frac{f}{g} \Longrightarrow f = gh$ hat Ableitung

$$f' = g'h + gh' \Longrightarrow h' = \frac{f' - g'h}{g} = \frac{f' - g'f/g}{g}$$

$$= \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Kettenregel: $f(z+\Delta z) = f(z) + f'(z)\Delta z + o(\Delta z)$

$g(z+\Delta z) = g(z) + g'(z)\Delta z + o(\Delta z)$

$$f(g(z+\Delta z)) = f(g(z) + g'(z)\Delta z + o(\Delta z))$$

$$= f(g(z)) + f'(g(z)) \cdot (g'(z)\Delta z + o(\Delta z))$$

$$= f \circ g\,(z) + f' \circ g(z) \cdot g'(z) \cdot \Delta z + o(\Delta z)$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dz} f \circ g = (f' \circ g) \cdot g'.$$

Alle Ableitungsregeln sind genau gleich wie in der reellen Analysis. Daher sind alle Ableitungsformeln aus Analysis I+II auch für holomorphe Funktionen gültig.

4. Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

Von den vier partiellen Ableitungen von Real- und Imaginärteil bleiben bei einer holomorphen Funktion nur noch zwei reelle Komponenten übrig, Real- und Imaginärteil der komplexen Ableitung $f'(z)$. Es muss also Bedingungen geben, die die vier partiellen Ableitungen miteinander verbinden. Um sie zu finden schreiben wir $f'(z) = a+bi$ und

$$f(z+\Delta z) = f(z) + f'(z)\,\Delta z + o(\Delta z)$$

in Vektorform

$$= f(z) + \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + o(\Delta z)$$

und vergleichen mit der Jacobi-Matrix

$$= f(z) + \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + o(\Delta z).$$

Daraus können wir ablesen, dass

$$a = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad b = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Dies sind zwei partielle Differentialgleichungen für den Real- und Imaginärteil von f.

Satz (Cauchy-Riemann) Eine komplexe Funktion $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ ist genau dann holomorph, wenn u und v die partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

erfüllen.

Beispiel: $f(z) = z^3 = \underbrace{(x^3 - 3xy^2)}_{u} + i\underbrace{(3x^2y - y^3)}_{v}$ hat Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy = -\frac{\partial v}{\partial x} = -6xy.$$

Die Cauchy-Riemann-DGl sind erfüllt, f ist holomorph. ○

Beispiel: $f(z) = |z|^2 = z\bar{z} = \underbrace{(x^2+y^2)}_{u} + \underbrace{0}_{v}i$

Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Die CR-DGl sind nicht erfüllt, f ist nicht holomorph. ○

Dass $f(z) = z\bar{z}$ hängt damit zusammen, dass hier die konjugiert komplexe Funktion $f(z) = \bar{z} = x - iy$ mit $u = x$ und $v = -y$ auftritt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \qquad \neq \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Die erste CR-DGl ist nicht erfüllt, als ist $z \mapsto \bar{z}$ nicht holomorph.

Man kann dies mit den Wirtinger-Ableitungen explizit machen:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Satz: f holomorph $\iff \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$

Beweis: f holomorph $\iff$ CR-DGl erfüllt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \;\wedge\; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$\iff$ Wirtinger-Ableitung nach $\bar{z}$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial y} + i\,\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{=0} + \frac{i}{2}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)}_{=0} = 0. \qquad \square$$

5. Harmonische Funktionen

Harmonische Funktionen treten in Anwendungen immer wieder auf. In diesem Abschnitt zeigen wir, dass u, v harmonische Funktionen sind.

Definition: Eine Funktion $u: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst **harmonisch**, wenn

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

ist.

Satz: Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion sind harmonisch

Beweis: Für u gilt

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} \overset{CR}{=} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} \overset{CR}{=} -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \Delta u = 0.$$

Analog für v. $\square$

Spezielle Eigenschaften harmonischer Funktionen werden später bewiesen:

- Max/Min-Prinzip: keine Extrema im Inneren von U.
- Mittelwerteigenschaft: Funktionswert ist Mittelwert der Fktswerte auf einem Kreis um den Punkt.

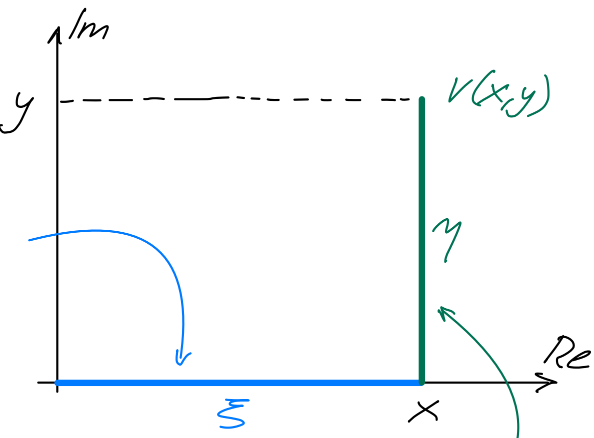
6. Imaginärteil zu gegebenem Realteil

Der Realteil u einer holomorphen Funktion bestimmt den Imaginärteil fast vollständig:

Satz: Ist u der Realteil mit einer holomorphen Funktion mit $\operatorname{Im} f(0) = v_0$, dann ist der Imaginärteil gegeben durch

$$v(x,y) = v_0 - \int_0^x \frac{\partial u}{\partial y}(\xi, 0)\, d\xi + \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}(x,\eta)\, d\eta. \quad (6.1)$$

Beweis: Integration entlang der farbigen Segmente:



$$v(x,0) - v(0,0) = \int_0^x \frac{\partial v}{\partial x}(\xi,0)\, d\xi \overset{CR}{=} -\int_0^x \frac{\partial u}{\partial y}(\xi,0)\, d\xi.$$

$$v(x,y) - v(x,0) = \int_0^y \frac{\partial v}{\partial y}(x,\eta)\, d\eta = \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}(x,\eta)\, d\eta.$$

Zusammensetzen ergibt die Formel (6.1) □

Wir werden später sehen, dass auch andere Integrationswege das gleiche v ergeben. Der Satz zeigt also, dass der Imaginärteil einer holomorphen Funktion nicht unabhängig vom Realteil gewählt werden kann.