Mathematisches Seminar

Analysis und Algebra

Andreas Müller

1. Komplexe Zahlen und komplexe Funktionen

Inhalt

1. Motivation: Vervollständigung des Zahlensystems ____ 2
2. Vervollständigung durch Grenzwerte ____ 5
3. Algebraische Erweiterung ____ 10
4. Algebraische Erweiterung für $x^2+1=0$ ____ 13
5. Die komplexe Zahlenebene ____ 15
6. Komplexe Funktionen ____ 16

1. Motivation: Vervollständigung des Zahlensystems

Zahlen dienen dem Zählen. Der erste Schritt in der Konstruktion des Zahlensystems besteht daher darin, Zahlen als die Abstraktion der "Grösse" einer endlichen Menge zu definieren. "3" steht für alle endlichen Mengen, die genau 3 Elemente haben. Die möglichen Anzahlen von Elementen heissen die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Die natürlichen Zahlen sind durch die Axiome von Peano charakterisiert:

1. Jede Zahl hat einen eindeutigen Nachfolger $\Longrightarrow$ Z: Zählen
2. 0 ist nicht Nachfolger einer Zahl $\Longrightarrow$ A: Anfang

Daraus folgt:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Eindeutigkeit: $0 \neq 1$ $\quad (1 = 1 \Longrightarrow 0$ ist Nachfolger von $0)$

$1 \neq 2$ $\quad \dots$

Daraus lassen sich die Addition und Multiplikation von natürlichen Zahlen definieren.

Subtraktion: $a - b$ ist die Lösung der Gleichung $a = x + b$.

Problem: Subtraktion funktioniert nicht immer!

Lösung: natürliche Zahlen durch negative Zahlen zu den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ vervollständigen, so dass alle Gleichungen $a = b + x$ immer eine Lösung in $\mathbb{Z}$ haben.

$$\mathbb{Z} = \{ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}$$

In den ganzen Zahlen ist Addition, Subtraktion und Multiplikation von beliebigen (ganzen) Zahlen ausführbar.

Division: a/b ist definiert als die Lösung der Gleichung $bx = a$.

Problem: Division funktioniert nicht immer!

a heisst durch b teilbar, wenn $bx = a$ eine Lösung in $\mathbb{Z}$ hat $\Longrightarrow$ Primzahlen, Faktorisierung

Lösung: ganze Zahlen durch Brüche zu den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ vervollständigen, so dass alle Gleichungen $a = bx$ mit $b \neq 0$ lösbar sind.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z},\, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

In $\mathbb{Q}$ ist die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von beliebigen rationalen Zahlen ausführbar, ausser Division durch 0.

Definition: Eine Zahlenmenge K, in der die vier arithmetischen Grundoperationen beliebig ausführbar sind, heisst ein **Körper**.

Die rationalen Zahlen bilden einen Körper.

Der Gauss-Algorithmus löst beliebige lineare Gleichungssysteme ausschliesslich unter Verwendung der Grundoperationen. Für die Theorie der linearen Gleichungen reicht ein Körper vollständig aus. Solange man einen Körper zur Verfügung hat, kann man alle Fragen zur Lösungsmenge einer linearen Gleichung beantworten.

Quadratwurzel: $\sqrt{a}$ ist als Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 = a$ definiert.

Problem: Quadratwurzel funktioniert nicht immer!

① $x^2 = -1$ hat keine Lösung in $\mathbb{Q}$: $\sqrt{-1} \notin \mathbb{Q}$

Zusätzliches Hilfsmittel: Ordnungsrelation in $\mathbb{Q}$ besagt $x^2 \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{Q}$, $-1 < 0 \Rightarrow \sqrt{-1} \notin \mathbb{Q}$

② $x^2 = 2$ hat keine Lösung in $\mathbb{Q}$: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Viel schwieriger: Beweis seit Pythagoras bekannt, basiert auf Teilbarkeit.

2. Vervollständigung durch Grenzwerte

Der Lösungsansatz der Analysis verwendet eine zusätzliche Eigenschaft der rationalen Zahlen, die durch die Eigenschaften eines Körpers nicht zur Verfügung gestellt wird: die Ordnungsrelation. Sie wird definiert durch die Festlegung, welche Zahlen positiv sind. Die Menge P der positiven Zahlen hat die Eigenschaften: $(N := K \setminus (P \cup \{0\}))$

0. $0 \notin P$
1. $a, b \in P \Rightarrow a + b \in P$
2. $a, b \in P \Rightarrow a \cdot b \in P$
   $a, b \in N \Rightarrow a \cdot b \in P$

Weiter kann man folgern:

- $a \in P \Rightarrow -a \in N$
- $a \in P \Rightarrow 1/a \in P$

Positive Zahlen

in $\mathbb{N}$: $\quad P = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

in $\mathbb{Z}$: $\quad P = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

in $\mathbb{Q}$: $\quad P = \{a/b \mid a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

Definition: $a, b \in \mathbb{Q}$, $a > b \Leftrightarrow a - b \in P$

Betrag:
$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Der Betrag definiert eine Abstandsmessung auf den rationalen Zahlen, mit der man ausdrücken kann, ob zwei rationale Zahlen nahe beieinander sind. $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ a, b sind näher als ε wenn $|a-b| < \varepsilon$. Damit lassen sich Folgen und Grenzwerte definieren:

Definition: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{Q}$, heisst eine **Cauchy-Folge**, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert derart, dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m > N$.

Eine Cauchy-Folge liegt vor, wenn die Folgenglieder auf genügend "späten" Endstücken ← N beliebig nahe beieinander sind.
↑ ε

Definition: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert** gegen a, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n > N$.

Konvergenz heisst dass genügend "späte" Endstücke der Folge beliebig nahe bei a sind.
↑ N (zu "späte" Endstücke)
↑ ε (zu beliebig nahe)

Cauchy-Folgen sind in $\mathbb{Q}$ nicht unbedingt konvergent!

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ 1.41421,\ \dots \qquad (2.1)$$

der Dezimalapproximationen ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, die in $\mathbb{Q}$ nicht konvergiert. a_n ist der nach der n-ten Nachkommastelle abgebrochene Dezimalbruch für $\sqrt{2}$.

- Cauchy-Folge: ohne Beschränkung der Allgemeinheit $n < m$, dann ist $a_n < a_m$ und

$$a_n - a_m = -0.\underbrace{0\cdots0}_{n}\underbrace{?\dots?}_{m-n} \Longrightarrow |a_n - a_m| < 10^{-n}$$

Zu $\varepsilon > 0$ wählt man daher N so, dass $10^{-N} \leq \varepsilon$ ist. Dann ist $|a_n - a_m| < \varepsilon \ \forall n, m \geq N$

- Nicht konvergent: Wäre $a \in \mathbb{Q}$ der Grenzwert der Folge, müsste auch $a_n^2 \longrightarrow a^2$ konvergieren. Die Zahlen a_n wurden so konstruiert, dass $a_n^2 \longrightarrow 2$, d.h. für a muss $a^2 = 2$ gelten. Es gibt aber keine rationale Zahl a mit $a^2 = 2$

Das Beispiel interpretiert die Nichtexistenz einer Quadratwurzel als Konsequenz der Nichtexistenz eines Grenzwertes. Das Problem sind also nicht Quadratwurzeln sondern:

Problem: Grenzwerte funktionieren nicht immer in $\mathbb{Q}$

Lösung: Die rationalen Zahlen durch alle Grenzwerte von Cauchy-Folgen zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ vervollständigen:

1. Schritt: Bilde die Menge aller Cauchy-Folgen

$$R = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{Q}, \text{ Cauchy-Folge}\}$$

2. Schritt: Definiere Nullfolgen:

$$N = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{Q},\ a_n \to 0\}$$

3. Schritt: Zwei Cauchy-Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ haben den gleichen Grenzwert, wenn $a_n - b_n$ eine Nullfolge ist: $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in N$

4. Schritt: Bilde Äquivalenzklassen von Folgen mit gleichem Grenzwert:

$\mathbb{R} = R/N \ni r$ besteht aus allen Cauchy-Folgen mit gleichem Grenzwert

Beispiele:

① Reelle Zahl $q \in \mathbb{Q}$: Alle Cauchy-Folgen mit dem gleichen Grenzwert wie die Folge $q, q, q, q, \dots$

② Reelle Zahl $\sqrt{2}$: Alle Cauchy-Folgen mit dem gleichen Grenzwert wie die Folge (2.1)

Die Vervollständigung durch Grenzwerte löst das Problem für alle Gleichungen mit Lösungen, die sich durch rationale Zahlen approximieren lassen:

- Quadratwurzeln: $\sqrt{a}$ ist Lösung von $x^2 = a$
- n-te Wurzel: $\sqrt[n]{a}$ ist Lösung von $x^n = a$
- Kreiszahl: π ist die kleinste positive Lösung der nichtlinearen Gleichung $\sin x = 0$
- Eulersche Zahl: e ist der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

d.h. Lösung für viel mehr Probleme als ursprünglich gefordert! Basis für reelle Analysis (Vorlesungen Analysis I, II, ...)

Aber: Die Gleichung $x^2+1=0$ ist immer noch nicht lösbar:

Beweis: Wäre x_n eine Folge in $\mathbb{Q}$, die gegen eine Lösung konvergiert, dann müsste x_n^2+1 gegen 0 konvergieren. D.h. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\varepsilon > |\underbrace{x_n^2}_{\geq 0}+1| = \underbrace{x_n^2}_{\geq 0}+1 \geq 1 \quad \text{für } n > N$$

Wählt man $\varepsilon < 1$ entsteht ein Widerspruch $\square$

$\Longrightarrow$ Falscher Lösungsansatz!

3. Algebraische Erweiterung

Die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ durch Grenzwerte hat die Ordnungsrelation verwendet, die auch die Lösung von $x^2+1=0$ verunmöglicht. Wir brauchen daher einen Lösungsansatz für das Wurzelproblem, der nur die algebraische Struktur verwendet.

a) Die Quadratwurzel 2

Ansatz: wir brauchen ein zusätzliches Symbol α mit der Eigenschaft $\alpha^2=2$.

Neue Zahlenmenge $\mathbb{Q}(\alpha)=\{a+b\alpha \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$

lin. unabh. Komponenten

Rechenregeln in $\mathbb{Q}(\alpha)$:

- Addition/Subtraktion: $(a+b\alpha)\pm(c+d\alpha)=(a\pm c)+(b\pm d)\alpha$
- Multiplikation: $(a+b\alpha)(c+d\alpha)=ac+(bc+ad)\alpha+bd\underbrace{\alpha^2}_{=2}$
  $=(ac+2bd)+(bc+ad)\alpha\in\mathbb{Q}(\alpha)$
- Division durch Erweitern:

$$\frac{a+b\alpha}{c+d\alpha}\cdot\frac{c-d\alpha}{c-d\alpha}=\frac{(ac-2bd)+(bc-ad)\alpha}{c^2-d^2\alpha^2}$$

$$=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\,\alpha\in\mathbb{Q}(\alpha)$$

Nenner $\neq 0$ da $\alpha\notin\mathbb{Q}$

Satz: $\mathbb{Q}(\alpha)$ ist ein Körper

Definition: Der Körper $\mathbb{Q}(\alpha)$ heisst die Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ um α. $\mathbb{Q}(\alpha)$ entsteht durch Adjunktion des Elementes α.

b) Lösung einer quadratischen Gleichung

Sei die Gleichung $x^2+px+q=0$, $p,q\in\mathbb{Q}$, gegeben. Gibt es eine Körpererweiterung, in der die Gleichung lösbar wird?

Neues Symbol α mit der Eigenschaft $\alpha^2+p\alpha+q=0$

Konstruktion der Körpererweiterung

$$\mathbb{Q}(\alpha)=\{a+b\alpha \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$$

mit Rechenoperationen:

- Addition/Subtraktion: $(a+b\alpha)\pm(c+d\alpha)=(a\pm c)+(b\pm d)\alpha$
- Multiplikation: $(a+b\alpha)\cdot(c+d\alpha)=ac+(ad+bc)\alpha+bd\underbrace{\alpha^2}_{-p\alpha-q}$
  $=(ac-qbd)+(ad+bc-bdp)\alpha\in\mathbb{Q}(\alpha)$
- Multiplikative Inverse: $(c+d\alpha)(u+v\alpha)=1$

$$\left.\begin{aligned} cu - qdv &= 1 \\ du+(c-dp)v &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow (c+d\alpha)^{-1}=u+v\alpha$$

lineares Gl-System für u und v, kann mit der Cramerschen Regel gelöst werde.

$$u=\frac{c-dp}{c^2-cdp+qd^2}, \quad v=\frac{-d}{c^2-cdp+qd^2}$$

- Division: durch Multiplikation mit der multiplikativen Inversen

$$\frac{a+b\alpha}{c+d\alpha} = (a+b\alpha)\cdot(u+v\alpha) \in \mathbb{Q}(\alpha)$$

Satz: $\mathbb{Q}(\alpha)$ ist ein Körper

In der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha)$ ist die Gleichung $x^2+px+q=0$ lösbar: $\alpha^2+p\alpha+q=0$. Das Polynom $x^2+px+q=0$ kann faktorisiert werden:

$$(x^2+px+q):(x-\alpha) = x+(p+\alpha)$$
$$\frac{-(x^2-\alpha x)}{\quad (p+\alpha)x+q}$$
$$\frac{(p+\alpha)x-(p+\alpha)\alpha}{\quad q+p\alpha+\alpha^2 = q+p\alpha+(-p\alpha-q)=0}$$

D.h. die Faktorisierung ist

$$x^2+px+q = (x-\alpha)(x+(p+\alpha))$$

$\Rightarrow -(p+\alpha)$ ist eine weitere Nullstelle:

$$(p+\alpha)^2-p(p+\alpha)+q = \cancel{p^2}+2\cancel{p}\alpha+\alpha^2-\cancel{p^2}-\cancel{p\alpha}+q$$
$$= \alpha^2+p\alpha+q=0 \checkmark$$

Entspricht der bekannten Formel

$$\alpha_+ = -\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}, \quad \alpha_- = -\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} = -p-\alpha_+$$

4. Algebraische Erweiterung für $x^2+1=0$

Nach der gleichen Methode wie für $x^2-a=0$ kann jetzt auch eine Körpererweiterung konstruiert werden, in der die Gleichung $x^2+1=0$ lösbar wird. Dazu wird ein neues Symbol i verwendet, welches die Eigenschaft $i^2=-1$ hat.

Die Körpererweiterung ist

$$\mathbb{Q}(i)=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$$

mit den Rechenregeln für

- Addition/Subtraktion: $(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$
- Multiplikation: $(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i\in\mathbb{Q}(i)$
- Division durch Erweiterung:

$$\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i \quad \in\mathbb{Q}(i)$$

Satz: $\mathbb{Q}(i)$ ist ein Körper

In $\mathbb{Q}(i)$ lassen sich jetzt viele quadratische Gleichungen lösen:

$$x^2+2x+2=0 \Rightarrow x=1\pm\sqrt{1^2-2}=1\pm\sqrt{-1}=1\pm i$$

Manchmal ist es nötig, weitere Elemente hinzuzufügen. Die Gleichung

$$x^2+2x+3=0$$

hat die Lösung

$$x = 1 \pm \sqrt{1^2-3} = 1 \pm \sqrt{-2} = 1 \pm i\sqrt{2}$$

die nicht in $\mathbb{Q}(i)$ liegt. Man muss daher $\mathbb{Q}$ erst um $\sqrt{2}$ erweitern und anschliessend um i, damit $x^2+2x+3=0$ lösbar wird.
In $\mathbb{Q}(i,\sqrt{2})$ lässt sich das Polynom vollständig faktorisieren:

$$x^2+2x+3 = (x - \underbrace{1-i\sqrt{2}}_{\in\mathbb{Q}(i,\sqrt{2})})(x - \underbrace{1+i\sqrt{2}}_{\in\mathbb{Q}(i,\sqrt{2})})$$

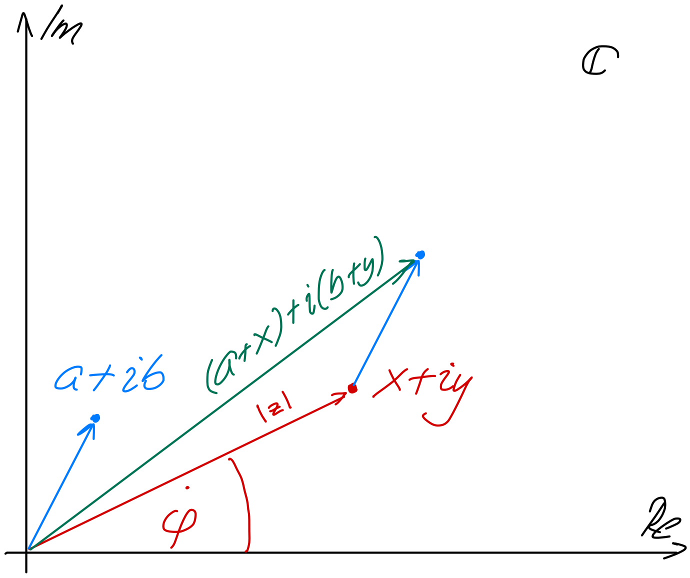
Statt von $\mathbb{Q}$ könnte man auch von $\mathbb{R}$ ausgehen, wo die Quadratwurzeln positiver Zahlen bereits existieren:

Satz: in $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ ist jede quadratische Gleichung lösbar

Definition: Die Elemente des Körpers $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ heissen komplexe Zahlen. $z = a+bi \Rightarrow a = \operatorname{Re}(z)$ Realteil, $b = \operatorname{Im}(z)$ Imaginärteil, $\bar{z} = a-bi$ heisst konjugiert komplex zu z.

5. Die komplexe Zahlenebene

Die Menge $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ kann als 2-dimensionale Ebene dargestellt werden, wobei der komplexen Zahl $z = x + iy$ der Punkt mit Koordinaten (x, y) entspricht



- Addition/Subtraktion: wie bei Vektoren
- Betrag:
  $$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$
- Polardarstellung:
  $$x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
  $$\varphi = \arg(z)$$
  $$r = |z|$$
- Multiplikation: Beträge multiplizieren, Argumente addieren

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)(a + bi) = (ar\cos\varphi - br\sin\varphi) + i(ar\sin\varphi + br\cos\varphi)$$

Matrixform:

$$r\begin{pmatrix} a\cos\varphi - b\sin\varphi \\ a\sin\varphi + b\cos\varphi \end{pmatrix} = \underbrace{r}_{\text{Streckung}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{\text{Drehmatrix } D_\varphi} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

6. Komplexe Funktionen

Thema der ersten paar Sitzungen: Funktionen

$$f : U \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto f(z)$$

$U \subset \mathbb{C}$

Beispiele:

① Polynome: $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \ a_i \in \mathbb{C}$

② Potenzreihen: $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ wie

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}, \quad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k} z^{2k}}{(2k)!}$$

Übliche Notation: $f(x+iy) = \underbrace{u(x,y)}_{\text{Realteil}} + i\underbrace{v(x,y)}_{\text{Imaginärteil}}$

Visualisierung:

- Als Graph nicht möglich, zu viele Dimensionen
- Als Abbildung des Koordinatennetzes
- $f(z) = f(x+iy)$ als gefärbte Fläche über der x,y-Ebene (gausssche Zahlenebene):
  - → Betrag von $f(z)$ als vertikale Koordinate
  - → Argument von $f(z)$ als Farbe auf dem Farbkreis