Mathematisches Seminar

Analysis und Algebra

Andreas Müller

1. Komplex differenzierbare Funktionen

Inhalt

1. Komplexe Zahlen

In der Analysis I lernt man den Aufbau des Zahlen-systems kennen:

$\mathbb{N}$ = natürliche Zahlen, Abstraktion für die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge. Im Computer exakt darstellbar als "unsigned int"

$\mathbb{Z}$ = ganze Zahlen, Vervollständigung von $\mathbb{N}$ mit dem Ziel, dass Gleichungen $a = x + b$ immer gelöst werden können. Im Computer exakt darstellbar als "int"

$\mathbb{Q}$ = rationale Zahlen, Vervollständigung von $\mathbb{Z}$ mit dem Ziel, dass Gleichungen $ax = b$ immer gelöst werden können (ausser für $a = 0$). Im Computer exakt darstellbar als Paare (p, q) von ganzen Zahlen, die die rationale Zahl $r = p/q$ repräsentieren.

Gemeinsame Eigenschaften:

- abzählbar unendlich
- exakt im Computer darstellbar
- exakte Arithmetik

$\left.\begin{array}{l} \text{exakt im Computer darstellbar} \\ \text{exakte Arithmetik} \end{array}\right\} \Rightarrow$ CAS-tauglich

In $\mathbb{Q}$ spielt sich die Lineare Algebra ab.

Unzulänglichkeiten:

① Algebraische Gleichungen oft nicht lösbar, z.B.
$x^2-2=0$, $x^2-x-1=0$, $x^2+1=0$

② Transzendente Gleichungen oft nicht lösbar, z.B.
$\sin(x)=0 \Rightarrow x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$, $\sin(x)=2$?

③ Ordnungsunvollständig: die Menge
$$\{x\in\mathbb{Q} \mid x^2\leq 2\}$$
hat kein grösstes Element in $\mathbb{Q}$.

④ topologisch unvollständig: die Folge
$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414213, \ldots$
der Dezimalapproximationen von $\sqrt{2}$ hat keinen Grenzwert in $\mathbb{Q}$.

a) Lösungsansatz Analysis I

- Mit der Ordnungsrelation den Betrag definieren
$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x\geq 0 \\ -x & \text{für } x<0 \end{cases}$$
- Mit dem Betrag Cauchy-Folgen definieren:
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge, wenn es zu jedem $\varepsilon>0$ ein N gibt mit $|x_n-x_m|<\varepsilon \;\forall n,m>N$
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen x: $\forall\varepsilon>0$ gibt es $N\in\mathbb{N}$ mit $|x_n-x|<\varepsilon \;\forall n>N$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$
- Nullfolgen: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ haben den gleichen Grenzwert, wenn $(a_n-b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Definition: Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen besteht aus Mengen von Cauchy-Folgen, die den gleichen Grenzwert haben.

Die bekannten Rechenregeln für Grenzwerte:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim a_n / b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \Big/ \lim_{n\to\infty} b_n \,, \quad b_n \neq 0, \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

haben zur Folge, dass die Grundoperationen in $\mathbb{R}$ wohldefiniert sind. Aus der Regel

$$a_n \leq b_n \text{ ausser für endlich viele } n$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$$

folgt, dass auch die Ordnungsrelation übertragbar ist.

Definition: A heisst archimedisch geordnet, wenn es für $a, b > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $na > b$.
A heisst topologisch vollständig, wenn jede Cauchy-Folge einen Grenzwert hat.

Satz: $\mathbb{R}$ ist der kleinste archimedisch geordnete, topologisch vollständige Körper

Der Körper $\mathbb{R}$ löst die Probleme ③ und ④ und damit einen Teil der Probleme ① und ②.

Beispiel: $x^2 - 2 = 0$ ist in $\mathbb{R}$ lösbar durch die Cauchy-Folge definiert durch

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \quad \forall n \geq 0$$

x_n konvergiert gegen eine Lösung von

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \iff \begin{aligned} x^2 &= \frac{1}{2}x^2 + 1 \\ \frac{1}{2}x^2 &= 1 \\ x^2 &= 2, \end{aligned}$$

d.h. $\lim_{n \to \infty} x_n = \sqrt{2}$. ○

Mit dem Newton-Verfahren können auch Cauchy-Folgen z.B. für π oder allgemein Lösungen von transzendenten Gleichungen gefunden werden.

Unzulänglichkeiten:

- $\mathbb{R}$ ist überabzählbar unendlich: "die meisten" reellen Zahlen haben keine endliche Beschreibung
- Die Datentypen float und double stellen nur rationale Zahlen dar, sind also nur Approximationen reeller Zahlen
- $\Longrightarrow$ nicht CAS-tauglich!

b) Algebraisches Lösungsansatz

Idee: den Körper $\mathbb{Q}$ um ein neues Symbol α erweitern, welches nur durch seine algebraischen Eigenschaften definiert ist.

Beispiel: Körper $\mathbb{Q}(\alpha)$ konstruieren, in dem $x^2-2=0$ lösbar wird.

- algebraische Eigenschaft von α: $\alpha^2=2$
- $\mathbb{Q}(\alpha)=\{a+b\alpha \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ mit Rechenregeln

$$(a+b\alpha)\pm(c+d\alpha)=(a\pm c)+(b\pm d)\alpha$$

$$(a+b\alpha)(c+d\alpha)=ac+bd\underbrace{\alpha^2}_{=2}+(ad+bc)\alpha$$

$$=(ac+2bd)+(ad+bc)\alpha$$

$$\frac{a+b\alpha}{c+d\alpha}\cdot\frac{c-d\alpha}{c-d\alpha}=\frac{ac-2db}{\underbrace{c^2-2d^2}_{\in\mathbb{Q}}}+\frac{bc-ad}{\underbrace{c^2-2d^2}_{\in\mathbb{Q}}}\alpha$$

$\mathbb{Q}(\alpha)$ ist ein Körper, der eine Lösung von $x^2-2=0$ enthält.

- Faktorisierung von x^2-2:

$$(x^2 \quad -2):(x-\alpha)=x+\alpha$$

$$\frac{x^2-\alpha x}{\quad\alpha x-2}$$

$$\frac{\alpha x-\alpha^2}{0}$$

d.h. $x^2-2=(x-\alpha)(x+\alpha)$, $-\alpha$ ist eine zweite Lösung von $x^2-2=0$.

Definition: Sei $m(x) = x^n + m_{n-1}x^{n-1} + \ldots + m_1 x + m_0$ ein irreduzibles Polynom und α ein Symbol mit der Eigenschaft $m(\alpha) = 0$. Dann ist

$$\mathbb{Q}(\alpha) = \{ a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1} \mid a_k \in \mathbb{Q} \}$$

ein Körper, in dem die Gleichung $m(\alpha) = 0$ eine Lösung hat. $\mathbb{Q}(\alpha)$ heisst die Erweiterung des Körpers $\mathbb{Q}$ um die Nullstelle α von $m(x)$. Zahlen, die Nullstellen eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten sind, heissen algebraisch über $\mathbb{Q}$.

Vorteile:

- Algebraische Zahlen haben eine endliche Beschreibung durch das Polynom $m(x)$
- Die Menge der algebraischen Zahlen ist abzählbar unendlich
- Man kann zeigen: wenn a, b algebraisch sind, dann auch $a \pm b$, $a \cdot b$ und a/b (falls $b \neq 0$)
- Mit algebraischen Zahlen kann man exakt rechnen: z. B. Algebra mit Wurzeltermen!
- Algebraische Zahlen bilden einen Körper, der durch Körpererweiterung schrittweise aufgebaut werden kann.

$\Rightarrow$ CAS arbeiten mit Körpererweiterungen!

c) Die Körpererweiterungen $\mathbb{Q}(i)$ und $\mathbb{R}(i)$

Die Gleichung $x^2+1=0$ ist in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar. In $\mathbb{R}$ ist wegen $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+1 \geq 1$, d.h. die topologische Vervollständigung löst das Problem nicht!

Definition: Sei i ein neues Symbol mit der Eigenschaft $i^2=-1$. Dann ist

$$\mathbb{Q}(i) = \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$$

eine Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$, in der $x^2+1=0$ ein Lösung hat. Die Körpererweiterung $\mathbb{R}(i)=\mathbb{C}$ heisst der Körper der **komplexen Zahlen**.

Da die Technik der Körpererweiterung die Ordnungsrelation nicht verwendet, ist weder $\mathbb{Q}(i)$ noch $\mathbb{R}(i)$ ein geordneter Körper.

Beispiel: Lösung von $x^2-2x-3=0$:

$$x_\pm = 1 \pm \sqrt{1^2-3} = 1 \pm \sqrt{-2} = 1 \pm \sqrt{2}\cdot i,$$

d.h. lösbar in $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) = \mathbb{Q}(\sqrt{2})(i)$. ○

Fundamentalsatz der Algebra: Jede Polynomgleichung über $\mathbb{R}$ hat alle Lösungen in $\mathbb{C}$. Jede Polynomgleichung hat eine Lösung in einer Erweiterung von $\mathbb{Q}(i)$, die in $\mathbb{C}$ enthalten ist.

d) Rechnen in $\mathbb{C}$ in Matrixdarstellung

Die Körpererweiterung $\mathbb{R}(i)$ ist ein 2-dimensionaler Vektorraum, statt in der Form $a+bi$ kann man komplexe Zahlen auch als Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ schreiben

Addition: $\quad (a+bi) \pm (c+di) \longrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \pm c \\ b \pm d \end{pmatrix}$

Keine Multiplikation für Vektoren:

$$\begin{pmatrix} ac - bd \\ bc + ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{darf nur} \\ \text{a und b} \\ \text{verwenden} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

d.h. Vektor muss um die zweite Spalte erweitert werden, dann wird die Multiplikation komplexer Zahlen zur Matrixmultiplikation!

$$i \longmapsto J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a+bi \longmapsto aI + bJ = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit $a+bi = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ wird zur Matrixmultiplikation mit

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \underbrace{r}_{\text{Streckung}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{\text{Drehmatrix}}$$

Multiplikation mit einer komplexen Zahl ist eine Drehstreckung

2. Komplexe Funktionen

a) Gebiete

Wie in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen sind Gebiete offene Mengen.

Definition: Ein **Gebiet** ist eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$.

Offene Mengen werden verwendet, damit Ableitungen in jede beliebige Richtung berechnet werden können.

b) Notation für komplexe Funktionen

Eine komplexe Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto f(z)$ kann als Funktion von x und y betrachtet werden:

$$f(z) = f(x + iy) = f(x,y)$$

Die Funktion hat Real- und Imaginärteil

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &= \operatorname{Re} f(x,y) \\ v(x,y) &= \operatorname{Im} f(x,y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

c) Visualisierung

- Kein Graph (eine Dimension zu wenig)
- Abbildung des Koordinatengitters
- Graph mit "z" = Betrag $|f(z)|$ und Farbe $= \arg f(z)$

3. Ableitung – holomorphe Funktionen

In der Analysis I definiert man Ableitungen von von reellen Funktionen einer reellen Variablen als Grenzwert

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

des Differenzenquotienten, wobei $h \in \mathbb{R}$. Es ist nicht unmittelbar klar, ob es sinnvoll ist, einfach nur komplexe h zuzulassen.

a) Partielle Ableitungen

Spätestens in FuVar wird klar, dass man Funktionen von mehreren Variablen nach jeder einzelnen Variablen ableiten kann. So erhält man die partiellen Ableitungen einer Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ als Grenzwert

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h} \\ &= \partial_{x_i} f(x_1, \ldots, x_n) \\ &= \partial_i f(x_1, \ldots, x_n).\end{aligned}$$

Eine komplexe Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ kann man als zwei reelle Funktionen $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$

auffassen, es gibt also mindestens vier partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$$

Die vier partiellen Ableitungen bilden die Jacobi-Matrix

$$J = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix},$$

mit der sich die Änderung von $f(z)$ bei einer kleinen Änderung Δz in Vektorform als Matrizenprodukt

$$\Delta f = \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} = J \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}}_{\Delta z}$$

schreiben lässt. Beliebige komplexe Funktionen haben also eine Matrix als Ableitung.

Beispiel: Die Funktion $f(z) = |z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2$ hat die Jacobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die zweite Zeile verschwindet, weil $|z|^2$ eine reellwertige Funktion ist. ○

Wir werden später sehen, dass $|z|^2$ keine komplex differenzierbare Funktion ist. Die oben geäusserte Mahnung, dass es bei der komplexen Ableitung nicht nur um die Ableitung nach Real- und Imaginärteil geht, war also gerechtfertigt.

b) Lineare Ersatzfunktion

Die partiellen Ableitungen tragen der algebraischen Struktur der komplexen Zahlen, insbesondere der komplexen Multiplikation nicht Rechnung. Dies kann erreicht werden, indem man die Ableitung als **komplexe** lineare Ersatzfunktion betrachtet.

Ist $f(x)$ eine differenzierbare reelle Funktion, dann ist die Ableitung an der Stelle x_0 diejenige Zahl, für die die Funktion

$$x \longmapsto f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

die lineare Ersatzfunktion ist, d.h.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

wobei $o(h)$ eine Funktion ist, die für $h \to 0$ schneller als linear verschwindet:

$$\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0.$$

Übertragen auf komplexe Zahlen bedeutet dies, dass eine komplexe Funktion $f(z)$ komplex differenzierbar ist, wenn es eine komplexe lineare Ersatzfunktion gibt, d.h. wenn

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

komplexe Multiplikation

Die Änderung $f(z) - f(z_0)$ muss sich also als komplexes Produkt mit $(z - z_0)$ ausdrücken lassen. Dies ist schwieriger als die Berechnung aus der Jacobi-Matrix.

Beispiel: Die Funktion $f(z) = z\bar{z} = |z|^2$ hat die Jacobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aber die Änderung lässt sich nicht als komplexes Produkt ausdrücken. An der Stelle $z_0 = 1$ ist

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= z\bar{z} - 1 = x^2 + y^2 - 1 \\ &= (1 + \Delta x)^2 + \Delta y^2 - 1 \\ &= 2\Delta x + \Delta x^2 + \Delta y^2 \\ &= 2\Delta x + o(\Delta x, \Delta y). \end{aligned}$$

Dies müsste man als Produkt von $f'(z_0) = a + bi$

mit $\Delta x + i\Delta y$ schreiben können:

$$2\Delta x + o(\Delta x, \Delta y) \overset{?}{=} (a+bi)(\Delta x + i\Delta y)$$
$$= (a\Delta x - b\Delta y) + i(b\Delta x + a\Delta y)$$
$$= (a+ib)\Delta x + (-b+ai)\Delta y$$

Da die rechte Seite linear ist in $\Delta x, \Delta y$, müsste mit den linearen Termen der linken Seite übereinstimmen:

$$2\Delta x = (a+ib)\Delta x \implies a+ib=2 \Rightarrow a=2, b=0$$

Somit müsste

$$\cancel{2\Delta x} + o(\Delta x, \Delta y) = \cancel{2\Delta x} + 2i\Delta y,$$

Aber der Term auf der rechten Seite ist nicht $o(\Delta x, \Delta y)$. ○

Das Beispiel zeigt, dass nicht jede Funktion, deren reelle Ableitungen existieren, auch komplex diff-bar ist.

Definition: $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ heisst **komplex diffbar** in z_0, wenn es eine Zahl $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ gibt derart dass

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)\cdot(z - z_0) + o(z - z_0)$$

gilt. $f(z)$ heisst **komplex diff'bar in U** oder **holomorph**, wenn f komplex diff'bar ist in z_0 für alle $z_0 \in U$.

c) Beispiele

- Die lineare Funktion $f(z) = az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$ hat als lineare Ersatzfunktion

$$f(z) = f(z_0) + ?(z - z_0)$$
$$= az_0 + b + ?(z - z_0)$$
$$az + b = ?z + (a - ?)z_0 + b$$

$$\Longrightarrow \quad ? = a, \quad f'(z) = a$$

- Potenzfunktion $f(z) = z^n$ aus der binomischen Formel

$$f(z) = ((z - z_0) + z_0)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (z - z_0)^k z_0^{n-k}$$
$$= \binom{n}{0} z_0^n + \binom{n}{1} z_0^{n-1}(z - z_0) + o(z - z_0)$$
$$= z_0^n + n z_0^{n-1} \cdot (z - z_0) + o(z - z_0)$$
$$= f(z_0) + \underbrace{n z_0^{n-1}}_{f'(z_0)} \cdot (z - z_0)$$

Die Potenzfunktion ist holomorph mit $f'(z) = nz^{n-1}$

- Die Ableitung ist linear: $g = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 g_2$

$$\begin{array}{l|l} \alpha_1 \cdot & f_1(z) = f_1(z_0) + f_1'(z_0) \cdot (z - z_0) + o(z - z_0) \\ \alpha_2 \cdot & f_2(z) = f_2(z_0) + f_2'(z_0) \cdot (z - z_0) + o(z - z_0) \\ \hline \Sigma & g(z) = \alpha_1 f_1(z_0) + \alpha_2 f_2(z_0) + (\alpha_1 f_1'(z_0) + \alpha_2 f_2'(z_0))(z - z_0) + o(z - z_0) \end{array}$$

$$= g(z_0) + g'(z_0) \cdot (z - z_0) + o(z - z_0)$$

Es folgt: $g'(z) = \alpha_1 f_1'(z) + \alpha_2 f_2'(z)$

- Polynome sind holomorph:

$$f(z) = \underbrace{a_n \underbrace{z^n}_{\text{hol.}} + a_{n-1} \underbrace{z^{n-1}}_{\text{hol.}} + \ldots + a_1 \underbrace{z}_{\text{hol.}} + a_0}_{\text{Linearkombination} \Rightarrow \text{holomorph}}$$

d) Berechnung der Ableitung, Ableitungsregeln

Die lineare Ersatzfunktion ist bereits festgelegt, wenn man nur Änderungen in reeller Richtung verwendet. Daher kann man die Ableitung als

$$f'(z) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

berechnen.

Beispiel: $f(z) = z^n$

$$f'(z) = \frac{\partial}{\partial x}(x+iy)^n \overset{\text{Kettenregel}}{=} n(x+iy)^{n-1} \cdot 1$$
$$= nz^{n-1}.$$

○

Das Beispiel zeigt, dass die aus der reellen Analysis bekannten Rechenregeln weiterhin gültig sind.

- Produktregel: $f(z)=u(x,y)+iv(x,y),\ g(z)=s(x,y)+it(x,y)$

$$\frac{d}{dz}(f(z)g(z)) = \frac{\partial}{\partial x}\Big((u(x,y)+iv(x,y))(s(x,y)+it(x,y))\Big)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(u\cdot s - v\cdot t) + i(u\cdot t + v\cdot s)$$

$$= \partial_x u\cdot s + u\cdot\partial_x s - \partial_x v\, t - v\,\partial_x t$$
$$+ i(\partial_x u\cdot t + u\cdot\partial_x t + \partial_x v\cdot s + v\cdot\partial_x s)$$

$$= (\partial_x u\cdot s - \partial_x v\, t) + i(\partial_x u\cdot t + \partial_x v\cdot s)$$
$$+ (u\cdot\partial_x s - v\,\partial_x t) + i(u\,\partial_x t + v\,\partial_x s)$$

$$= (\partial_x u + i\,\partial_x v)(s+it)$$
$$+ (u+iv)(\partial_x s + i\,\partial_x t)$$

$$= f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

- Reziproke Funktion: $g(z) = 1/f(z)$

$$f(z)\cdot g(z) = 1$$

ableiten: $f'(z)g(z) + f(z)g'(z) = 0$

$$\Longrightarrow \quad g'(z) = -\frac{f'(z)}{f(z)}\cdot g(z) = -\frac{f'(z)}{f(z)^2}$$

- Quotientenregel:

$$\frac{d}{dz}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}$$

- Kettenregel: $f(g(z))$

$$\frac{d}{dz} f(g(z)) = \frac{\partial}{\partial x} f(g(x,y))$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} f(u,v)$$

$$= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial u}}_{f'(g(z))} \frac{\partial u}{\partial x} + \boxed{\underbrace{\frac{\partial f}{\partial v}}_{i f'(g(z))} \frac{\partial v}{\partial x}}$$

$$= f'(g(z)) \cdot (\partial_x u + i \partial_x v)$$

$$= f'(g(z)) \cdot g'(z)$$

Berechnung der Ableitung mit der partiellen Ableitung nach dem Imaginärteil des Arguments

$$f(z_0 + ih) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot ih + o(h)$$

$$= f(z_0) + \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \cdot h + o(h)$$

$$\Longrightarrow f'(z_0) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = i f'(z)}$$

Die algebraischen Eigenschaften des Ableitungsoperators bleiben für holomorphe Funktionen unverändert.

4. Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

Was ist der Zusammenhang zwischen der komplexen Ableitung $f'(z)$ und der Jacobi-Matrix der Abbildung f betrachtet als Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$?
Um den Vergleich zu ermöglichen, sei $f'(z) = a+bi$ und wir schreiben die lineare Ersatzfunktion in Matrixform als

$$f(z) = f(z_0) + \underbrace{f'(z_0)}_{a} \cdot \Delta z = f(z_0) + \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + o(\ldots)$$

Andererseits kann man die Änderung auch mit der Jacobi-Matrix als

$$f(z) = f(z_0) + \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + o(\Delta x, \Delta y)$$

Die roten Terme müssen übereinstimmen, d.h.

$$a = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad b = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \qquad (4.1)$$

Wenn als $f(z)$ holomorph ist, dann müssen u und v die zusätzlichen Bedingungen (4.1) erfüllen

Satz: Eine komplexe Funktion $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ ist genau dann in U holomorph, wenn die Cauchy-Riemann-DGL

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

erfüllt sind.

In der Jacobi-Matrix einer holomorphen Funktion gibt es daher nur 2 statt 4 unabhängige Komponenten.

a) Der Realteil bestimmt den Imaginärteil

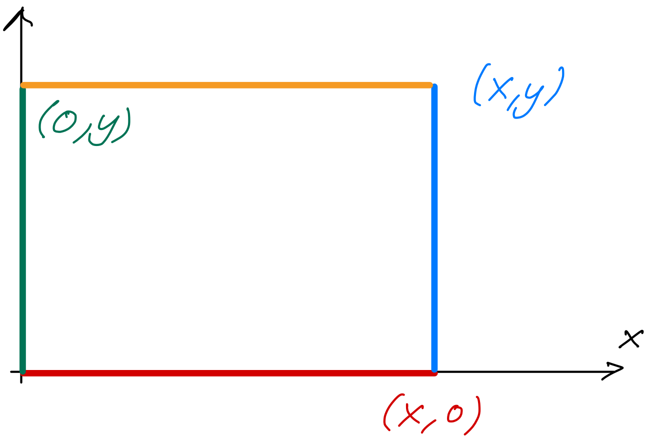
Die CR-DGL ermöglichen, den Imaginärteil einer holomorphen Funktion bis auf eine Konstante aus dem Realteil zu bestimmen.

Beispiel: Der Realteil einer holomorphen Funktion ist $u(x,y) = x^2 - y^2$. Wie lautet der Imaginärteil?

Nach den CR-DGL gilt:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y \,, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x$$

Daraus lässt sich v durch Integration entlang der farbigen Strecken ermitteln



$$v(x,0) = \int_0^x \frac{\partial v}{\partial x}(\xi, 0)\, d\xi + v_0$$

$$= \int_0^x 2y\, d\xi + v_0$$

$$v(x,y) = \int_0^y \frac{\partial v}{\partial y}(x,\eta)\, d\eta + v_0 = \int_0^y 2x\, d\eta + v_0 = 2xy + v_0$$

Somit gilt
$$f(z) = (x^2-y^2) + 2ixy + iv_0.$$
Wählt man $v_0 = 0$ entsteht $f(z) = z^2$.

Man hätte auch die orangen/grünen Strecken für die Integration verwenden können:
$$v(0,y) = \int_0^y \frac{\partial v}{\partial y}(0,\eta)\,d\eta + v_0 = \int_0^y 2\cdot 0\,d\eta + v_0 = v_0$$
$$v(x,y) = \int_0^x \frac{\partial v}{\partial x}(\xi,y)\,d\xi + v_0 = \int_0^x 2y\,d\xi + v_0$$
$$= 2xy + v_0$$
Wieder folgt $f(z) = z^2 + iv_0$, $v_0 \in \mathbb{R}$ ○

Satz: Ist $u(x,y)$ der Realteil einer holomorphen Funktion und $v(x_0,y_0) = v_0$, dann gilt
$$v(x,y) = v_0 - \int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial y}(\xi,y_0)\,d\xi + \int_{y_0}^y \frac{\partial u}{\partial x}(x,\eta)\,d\eta. \tag{4.2}$$

Beweis: Wir verwenden die rote und blaue Strecke und die CR-DGL:
$$v(x,y) = v_0 + \int_{x_0}^x \frac{\partial v}{\partial x}(\xi,y_0)\,d\xi + \int_{y_0}^y \frac{\partial v}{\partial y}(x,\eta)\,d\eta$$
$$= v_0 - \int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial y}(\xi,\eta_0)\,d\xi + \int_{y_0}^y \frac{\partial u}{\partial x}(x,\eta)\,d\eta$$
Damit ist Formel (4.2) bewiesen. □

b) Wirtinger-Kalkül

Die komplexe Konjugation $f: z \mapsto \bar{z}$ ist **nicht** holomorph, denn $u(x,y) = x$ und $v(x,y) = -y$ erfüllen die CR-DGL nicht:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \overset{\checkmark}{=} 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Eine Funktion, die als algebraischer Ausdruck von z und $\bar{z}$ geschrieben werden kann, wird meistens ebenfalls nicht holomorph sein. Holomorphe Funktionen sind also tendenziell solche, die sich nur durch z ausdrücken lassen, ohne Verwendung von $\bar{z}$.

Ob eine Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ von der Variablen x_i abhängt, wird durch die partielle Ableitung nach x_i ausgedrückt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \iff f \text{ hängt nicht von } x_i \text{ ab}$$

Da man $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ schreiben kann, lässt sich durch z und $\bar{z}$ ausdrücken. Kann man Ableitungsoperatoren $\partial/\partial z$ und $\partial/\partial \bar{z}$ definieren, mit denen sich erkennen lässt, ob eine Funktion holomorph ist?

Definition: $f: U \to \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion mit differenzierbarem Real- und Imaginärteil. Die Operatoren

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{4.3}$$

heissen die Wirtinger-Operatoren.

Motivation für diese Definition: die komplexe Ableitung einer holomorphen Funktion kann als

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{oder} \quad \frac{df}{dz} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y} = -i\,\frac{\partial f}{\partial y}$$

berechnet werden, $\partial f/\partial z$ ist der Mittelwert. Wenn $\bar f$ holomorph ist, erwartet man rein formal

$$\frac{d\bar f}{dz} = \frac{\partial \bar f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar f}{\partial x} - i\,\frac{\partial \bar f}{\partial y}\right)$$

und durch komplexe Konjugation:

$$\overline{\left(\frac{\partial \bar f}{\partial z}\right)} \text{"="} \frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Lemma: f ist genau dann holomorph, wenn $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$

Die Ableitung nach $\bar z$ drückt also genau aus, ob eine Funktion holomorph ist.

Beweis: Wir rechnen nach, dass $\partial f/\partial \bar{z} = 0$ mit den CR-DGL gleichbedeutend ist:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\,\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y}}_{\text{CR-DGL}}$$

$\square$

Die komplexe Konjugation $f(z) = \bar{z}$ hängt im Sinne der Wirtinger-Operatoren nicht von z ab:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{\partial(x-iy)}{\partial x}}_{=1} - i\,\underbrace{\frac{\partial(x-iy)}{\partial y}}_{=-i}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - i(-i)\right) = 0.$$

Umgekehrt hängt $f(z) = z$ nicht von $\bar{z}$ ab:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{\partial(x+iy)}{\partial x}}_{=1} + i\,\underbrace{\frac{\partial(x+iy)}{\partial y}}_{=i}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + i^2\right) = 0.$$

Die beiden Variablen z und $\bar{z}$ können als voneinander unabhängige Variablen betrachtet werden.

c) Wirtinger – Kettenregel

Sei f eine komplexe Funktion mit differenzierbarem Real- und Imaginärteil, nicht notwendigerweise holomorph. Dann kann man f als $f(z,\bar z)$ schreiben und würde daher rein formal eine Kettenregel der Form

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \bar z}\frac{d\bar z}{dt}$$

entlang einer Kurve $z(t) = x(t) + i y(t)$ erwarten. Tatsächlich ist

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \partial_x f \cdot \dot x + \partial_y f \cdot \dot y \qquad (4.4)$$

und andererseits

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z}\cdot \dot z &= \frac{1}{2}(\partial_x f - i\,\partial_y f)(\dot x + i\dot y) \\
&= \frac{1}{2}(\partial_x f - i\partial_y f)\dot x + \frac{1}{2}(\partial_y f + i\partial_x f)\dot y \\
\frac{\partial f}{\partial \bar z}\cdot \dot{\bar z} &= \frac{1}{2}(\partial_x f + i\,\partial_y f)(\dot x - i\dot y) \\
&= \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f)\dot x + \frac{1}{2}(\partial_y f - i\partial_x f)\dot y .
\end{aligned}$$

Summe:

$$= \partial_x f \cdot \dot x + \partial_y f \cdot \dot y$$

in Übereinstimmung mit (4.4). Oder

$$\begin{pmatrix} \Delta f \\ \Delta \bar f \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_z f & \partial_{\bar z} f \\ \partial_z \bar f & \partial_{\bar z} \bar f \end{pmatrix}}_{WJ(f)} \begin{pmatrix} \Delta z \\ \Delta \bar z \end{pmatrix}. \qquad \text{Wirtinger-Jacobi-Matrix} \qquad (4.5)$$

d) Wirtinger-Kalkül und Jacobi-Matrix

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(f+\bar{f}) \\ v &= \frac{1}{2i}(f-\bar{f}) \end{aligned}\right\}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2i}\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\frac{1}{2}(f+\bar{f}) = \frac{1}{4}\left(\partial_z f+\partial_z \bar{f}+\partial_{\bar{z}} f+\partial_{\bar{z}} \bar{f}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2i}\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\frac{1}{2}(f+\bar{f}) = \frac{1}{4i}\left(\partial_z f+\partial_z \bar{f}-\partial_{\bar{z}} f-\partial_{\bar{z}} \bar{f}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\frac{1}{2i}(f-\bar{f}) = \frac{1}{4i}\left(\partial_z f-\partial_z \bar{f}+\partial_{\bar{z}} f-\partial_{\bar{z}} \bar{f}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2i}\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\frac{1}{2i}(f-\bar{f}) = \frac{-1}{4}\left(\partial_z f-\partial_z \bar{f}-\partial_{\bar{z}} f+\partial_{\bar{z}} \bar{f}\right)$$

oder in Matrixform

$$\begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \\ \partial_x v \\ \partial_y v \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -i & -i & i & i \\ -i & i & -i & i \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_z f \\ \partial_z \bar{f} \\ \partial_{\bar{z}} f \\ \partial_{\bar{z}} \bar{f} \end{pmatrix}$$

mit der Inversen

$$\begin{pmatrix} \partial_z f \\ \partial_z \bar{f} \\ \partial_{\bar{z}} f \\ \partial_{\bar{z}} \bar{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i & i & -1 \\ 1 & i & -i & 1 \\ 1 & -i & i & 1 \\ 1 & -i & -i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \\ \partial_x v \\ \partial_y v \end{pmatrix}$$

Die Einträge der Jacobi-Matrix und der Wirtinger-Jacobi-Matrix lassen sich einfach ineinander umrechnen.

Dies kann auch als Basistransformation gefunden werden:

$$\begin{pmatrix} f \\ \bar{f} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{=C} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \partial_z \\ \partial_{\bar{z}} \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}}_{=W} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{C^{-1}} \begin{pmatrix} f \\ \bar{f} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}}_{W^{-1}} \begin{pmatrix} \partial_z \\ \partial_{\bar{z}} \end{pmatrix}$$

Die Jacobi-Matrix ist

$$J = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} = W^{-1} \begin{pmatrix} \partial_z \\ \partial_{\bar{z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & \bar{f} \end{pmatrix} \frac{1}{2} (C^{-1})^t$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} WJ(f) \; \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Harmonische Funktionen

Die CR-DGL haben noch eine weitere wichtige Konsequenz.

Definition: Eine reelle Funktion $u(x,y)$ heisst **harmonisch**, wenn $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ist.

Satz: Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion sind harmonisch.

Beweis: Aus den CR-DGL folgt durch erneutes Ableiten:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial x}$$

Nach dem Satz von Schwarz sind die partiellen Ableitungen vertauschbar und daher

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial x} = 0$$

Der Beweis für v ist analog. $\square$

Harmonische Funktionen treten in Anwendungen sehr häufig auf, weil der Laplace-Operator "im Wesentlichen" der einzige unter beliebigen Bewegungen (Verschiebungen und Drehungen) ist und zweite Ableitungen in den newtonschen Gesetzen vorkommen. Beispiele: Potentiale, Stromfunktion.

Die Theorie der partiellen Differentialgleichungen weiss viel über allgemeine harmonische Funktionen in n Dimensionen.

Da der Laplace-Operator ein sogenannter elliptischer Operator ist, gilt für die Lösungen von $\Delta u = 0$ das Maximum-/Minimum-Prinzip:

Satz: Ist L ein elliptischer Differentialoperator auf dem Gebiet Ω, dann hat eine Lösung von $Lu=0$ keine Extrema im Inneren von Ω.

Beweis: Lawrence C. Evans, Partial Differential Equations $\square$

Für harmonische Funktionen, also für $L = \Delta$, folgt das Maximum-/Minimum-Prinzip aus der Mittelwertergenschaft.

Satz: Der Wert einer harmonischen Funktion $u(x,y)$ in einem Punkt (x,y) ist der Mittelwert der Funktionswerte auf einem Kreis um den Punkt:

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} u(x+r\cos t, y+r\sin t)\,dt.$$

Das Maximum-/Minimum-Prinzip folgt, weil der Mittelwert nicht grösser als das Maximum auf dem Kreis sein kann.

Wir werden beide Eigenschaften in der Sitzung 2 aus dem Integralsatz von Cauchy herleiten. Daraus wird sich dann auch das folgende Resultat ganz leicht ergeben. Es folgt zwar auch aus der allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen, ist dort aber sehr viel schwieriger zu beweisen.

Satz: Eine harmonische Funktion $u(x,y)$ ist glatt, d.h. beliebig oft stetig differenzierbar.

Während es für reelle Funktionen sinnvoll ist zu fragen, wie oft sie stetig differenzierbar sind, ist für holomorphe Funktionen die Antwort sofort klar

Satz: Ist f eine holomorphe Funktion, dann ist f beliebig oft stetig differenzierbar. Weiter hat f die Mittelwerteigenschaft.

Dieses Resultat, welches wir ebenfalls später aus dem cauchyschen Integralsatz herleiten werden, zeigt, dass komplexe Differenzierbarkeit (Holomorphie) eine stark einschränkend Bedingung an die Funktion ist.