Nilpotente deelsemigroepen van matrixen

Jeroen Matthijssens

Vrije Universiteit Brussel

22 mei 2009

Probleemstelling

Wanneer zijn twee k-maximale nilpotente deelsemigroepen in $M(n, \mathbb{F})$ isomorf?

Definities

Een verzameling S, uitgerust met een afbeelding $\cdot : S \times S \to S$ noemt men een **semigroep** als de afbeelding $(\cdot)$ associatief is. Of nog $(ab)c = a(bc)$ voor alle $a, b, c \in S$.

x is een **neutraal element** als $\forall s \in S : sx = s = xs$.
x is een **nulelement** als $\forall s \in S : sx = x = xs$.

$M(n, \mathbb{F})$

$M(n, \mathbb{F}) = \{f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n \mid f \text{ is lineair}\}$ is een semigroep met nulelement.

1. Samenstelling van lineaire functies is lineair.
2. Samenstelling is associatief.
3. We hebben een eenheid op $M(n, \mathbb{F})$ (de identieke afbeelding).
4. We hebben een nulelement op $M(n, \mathbb{F})$ (de nul afbeelding).

Nilpotente deelsemigroep

Zij S een semigroep met nulelement 0. $S' \subset S$ noemen we **nilpotent** als

$$\exists k \in \mathbb{N} : S'^k = \{a_1 \ldots a_k \mid a_1, \ldots, a_k \in S'\} = \{0\}$$

De nilpotentie klasse $nd(S)$ is de kleinste $k \in \mathbb{N}$ zodat $S'^k = \{0\}$

We noemen een element $s \in S$ nilpotent als $s^k = 0$ voor een $k \in \mathbb{N}$.

Vlaggen

Zij V een eindig dimensionale vectorruimte. Een **vlag** $\mathcal{F}$ is een rij deel vectorruimten V_i zodat

$$\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \ldots \subsetneq V_k = V.$$

We noemen $l(\mathcal{F}) = k$ de lengte van de vlag $\mathcal{F}$.

Een $\mathcal{F}$-basis is een basis $E = (e_1, \ldots, e_n)$ zodat $\mathrm{vect}\{e_1, \ldots, e_{\dim(v_i)}\} = V_i$.

Definitie $\varphi(\mathcal{F})$ en $\psi(S)$

Associëer met een vlag $\mathcal{F}$ de nilpotente deelsemigroep

$$\varphi(\mathcal{F}) = \{a \in M(n, \mathbb{F}) \mid \forall i : a(V_i) \subset V_{i-1}\}$$

van $M(n, \mathbb{F})$.

Associëer met een nilpotente deelsemigroep S de vlag $\psi(S)$ gedefinieerd door:

$$\{0\} \subsetneq \langle S^{r-1}(\mathbb{F}^n) \rangle \subsetneq \cdots \subsetneq \langle S(\mathbb{F}^n) \rangle \subsetneq \mathbb{F}^n$$

Eigenschap

$\varphi(\mathcal{F})$ is een nilpotente deelsemigroep, en $\psi(S)$ is een vlag in $\mathbb{F}^n$.

r-maximale nilpotente deelsemigroepen

Beschouw

$$N_r(S) = \{S' \subset S \mid S' \text{ nilpotente semigroup, } nd(S') = r\}.$$

We noemen S' r-maximaal als S' maximaal is in $N_r(S)$ voor de inclusie relatie.

Eigenschap

Zij $\mathcal{F}$ een vlag in $M(n, \mathbb{F})$ van lengte k. Dan is $\varphi(\mathcal{F})$ een k-maximale nilpotente deelsemigroep, en voor elke k-maximale nilpotente deelsemigroep S bestaat er een vlag $\mathcal{F}'$ zodat $\varphi(\mathcal{F}') = S$.

Dus de k-maximale nilpotente deelsemigroepen en de vlaggen van lengte k staan in bijectief verband.

Signature

Voor een vlag $\mathcal{F}$ van lengte r stellen we

$$\mathrm{sig}(\mathcal{F}) = (d_1, \ldots, d_r)$$

waar $d_i = \dim(V_i/V_{i-1})$.

Voor een r-maximale nilpotente deelsemigroep S stellen we $\mathrm{sig}(S) = \mathrm{sig}(\psi(S))$.

Voor $r = 2$

Als $\mathbb{F}$ eindig is en $S = \varphi(\mathcal{F})$, $T = \varphi(\mathcal{F}')$ 2-maximale nilpotente deelsemigroepen zijn, dan zijn T en S isomorf als en slechts als

$$\{\dim(V_1), \dim(V_1/V_2)\} = \{\dim(W_1), \dim(W_1/W_2)\}.$$

Als $\mathbb{F}$ oneindig is, dan zijn alle 2-maximale nilpotente semigroepen isomorf.

Hoofdstelling

Eigenschap

zij S en T r-maximaal nilpotente deelsemigroepen, met $r \geq 3$.

1. Als $\mathbb{F}$ eindig is, dan
$$\varphi(\mathcal{F}) \cong \varphi(\mathcal{F}') \Leftrightarrow \mathrm{sig}(\mathcal{F}) = \mathrm{sig}(\mathcal{F}').$$
2. Als $\mathbb{F}$ oneindig is en $\mathrm{sig}(\mathcal{F}) = (k, 1, l)$, dan
$$\varphi(\mathcal{F}) \cong \varphi(\mathcal{F}') \Leftrightarrow \mathrm{sig}(\mathcal{F}') = (k', 1, l').$$
3. Als $\mathbb{F}$ oneindig is, en $\mathrm{sig}(\mathcal{F}) \neq (k, 1, l)$, dan
$$\varphi(\mathcal{F}) \cong \varphi(\mathcal{F}') \Leftrightarrow \mathrm{sig}(\mathcal{F}) = \mathrm{sig}(\mathcal{F}').$$

Voor $\mathrm{sig}(\mathcal{F}) = (k, 1, l)$

Eigenschap

Zij $\mathbb{F}$ een oneindig veld. Zij S en T 3-maximale nilpotente deelsemigroepen van $M(n, \mathbb{F})$ met signature $(k, 1, l)$ en $(k', 1, l')$ met $k, l, k', l' > 1$. Dan zijn S en T isomorf.

Maak gebruik van de vorm van $A \in \varphi(\mathcal{F})$ om rechtstreeks een isomorfisme te definieren.

probeer de d_i in $\mathrm{sig}(\mathcal{F})$ te caracterizeren door iets dat bewaard blijft onder isomorfisme van semigroepen.

Zij T een nilpotente deelsemigroep, en $A \in T$.
A is onontbindbaar als $\forall B, C \in T : A \neq BC$

Relaties $\prec$ en $\ll$

Zij $X \subseteq M(n, \mathbb{F}) \setminus \{0\}$.
Stel voor $A, B \in X$, $A \prec_X B$ als

$$\forall C \in X : AC = 0 \Rightarrow BC = 0.$$

Stel voor $A, B \in X$, $A \ll_X B$ als

$$\forall C \in X : CA = 0 \Rightarrow CB = 0.$$

$\prec$ en $\ll$ zijn preordes op X, ze zijn reflexief en transitief.

Zij $\leq$ een partiele orde op X, $Y \subseteq X$. Y is een ketting als

$$\forall x, y \in Y : x \leq y \vee y \leq x.$$

Stel

$$m_y = \max\{\mathrm{card}(Y) \mid Y \text{ is een ketting op } X, \forall x \in Y : y \leq x\}$$

de diepte van y

Stel

$$M_i^{\leq} = \{y \in X \mid m_y = i\}$$

Super rank

Definieer verzamelingen

$$K_{1,0} = M_1^{\prec} \cap M_0^{\ll}$$

$$K_{0,1} = M_0^{\prec} \cap M_1^{\ll}$$

$$K_{1,1} = \{A \in M_1^{\prec} \cap M_1^{\ll} \mid TAT \neq 0\}$$

Zij A onontbindbaar voor T, als $A \in K_{1,0} \cup K_{0,1} \cup K_{1,1}$, dan stellen we $\mathrm{supR}(A) = 1$.

Super rank

$$K_{2,0} = M_2^{\prec} \cap M_0^{\ll}$$
$$K_{0,2} = M_0^{\prec} \cap M_2^{\ll}$$
$$K_{2,1} = \{A \in M_2^{\prec} \cap M_1^{\ll} \mid TAT \neq 0\}$$
$$K_{1,2} = \{A \in M_1^{\prec} \cap M_2^{\ll} \mid TAT \neq 0\}$$
$$K_{2,2} = \{A \in M_2^{\prec} \cap M_2^{\ll} \mid TAT \neq 0; \forall B \in M(n,\mathbb{F})$$
$$\text{met } \mathrm{supR}(B) = 1 : TAT \neq TBT\}$$

Zij A onontbindbaar voor T, Als $A \in K_{2,0} \cup K_{0,2} \cup K_{1,2} \cup K_{2,1} \cup K_{2,2}$. Dan stellen we $\mathrm{supR}(A) = 2$.

Isorfisme bewaard supR

Eigenschap

Zij T_1 en T_2 twee deelsemigroepen van $M(n, \mathbb{F})$, en $\phi : T_1 \to T_2$ een isomorfisme. Zij $A \in T_1$ een onontbindbaar element zodat $\mathrm{supR}(A) = 1$, dan is ook $\phi(A)$ onontbindbaar en $\mathrm{supR}(\phi(A)) = 1$.

Uitbreiding supR

Zij $A \in T \setminus \{0\}$ een ontbindbaar element,

$$\mathrm{supR}(A) = 1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$A = A_1 \ldots A_m, A_i \text{ onontbindbaar}, \exists i : \mathrm{supR}(A_i) = 1$$

$$\mathrm{supR}(A) = 2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\mathrm{supR}(A) \neq 1, A = A_1 \ldots A_m, A_i \text{ onontbindbaar},$$

$$\exists i : \mathrm{supR}(A_i) = 2$$

Eigenschap

Zij T_1 en T_2 twee isomorfe r-maximale nilpotente deelsemigroepen van $M(n, \mathbb{F})$, met $r \geq 3$. Schrijf $\mathrm{sig}(T_1) = (i_1, ..., i_r)$ en $\mathrm{sig}(T_2) = (j_1, ..., j_r)$. Dan is $i_l = j_l$ voor $2 \leq l \leq r - 1$.

Door gebruik te maken van cardinaliteit van verzamelingen gedefiniëerd aan de hand van supR.

Overige gevallen

S en T twee isomorfe r-maximale nilpotente deelsemigroepen, met $\mathrm{sig}(S) = (i_1, ..., i_r)$.

1. $i_1 \geq 1, i_r \geq 2, \sum_{r-1}^{s=2} i_s \geq 1$,
2. $i_1 = 1, \sum_{r-1}^{s=2} i_s \geq 2$,
3. $r = 3, i_1 = 1, i_3 = 1$,
4. $r = 3, i_1 \geq 2, i_2 = 1, i_3 \geq 2$ indien $\mathbb{F}$ eindig.

Blijft te tonen dat in deze gevallen ook $i_1 = j_1$ en $i_r = j_r$.

Overige gevallen

S en T twee isomorfe r-maximale nilpotente deelsemigroepen, met $\text{sig}(S) = (i_1, ..., i_r)$.

- $i_1 \geq 1, i_r \geq 2, \sum_{r-1}^{s=2} i_s \geq 1,$
- $i_1 = 1, \sum_{r-1}^{s=2} i_s \geq 2,$
- $r = 3, i_1 = 1, i_3 = 1,$
- $r = 3, i_1 \geq 2, i_2 = 1, i_3 \geq 2$ indien $\mathbb{F}$ eindig.

Blijft te tonen dat in deze gevallen ook $i_1 = j_1$ en $i_r = j_r$.

Overige gevallen

S en T twee isomorfe r-maximale nilpotente deelsemigroepen, met $\mathrm{sig}(S) = (i_1, \ldots, i_r)$.

- $i_1 \geq 1, i_r \geq 2, \sum_{r-1}^{s=2} i_s \geq 1,$
- $i_1 = 1, \sum_{r-1}^{s=2} i_s \geq 2,$
- $r = 3, i_1 = 1, i_3 = 1,$
- $r = 3, i_1 \geq 2, i_2 = 1, i_3 \geq 2$ indien $\mathbb{F}$ eindig.

Blijft te tonen dat in deze gevallen ook $i_1 = j_1$ en $i_r = j_r$.