Modélisation mathématique R5A12/R5B10

Dossier : Dynamique des populations, modèles proie-prédateur.

1 Présentation du projet

La *modélisation* consiste à proposer des modèles mathématiques qui décrivent un phénomène naturel, à étudier ces modèles du point de vue qualitatif (comportement des solutions), et à proposer des solutions numériques (implémentation du modèle mathématique). Dans ce dossier on propose de s'intéresser à certains modèles décrivant l'évolution au cours du temps d'une population, et l'évolution de 2 populations liées par un rapport proie-prédateur. Dans les modèles que nous considérons ici, la population est décrite par un nombre réel positif et le temps est également un nombre réel. Nous ne prendrons pas en compte les aspects spatiaux qui sont importants dans la réalité, et qui sont décrits par des modèles plus complexes.

2 Évolution d'une population

2.1 Modèles historiques de Malthus et Verhulst

L'effectif d'une population (par exemple le de bactéries dans une boîte de culture) au cours du temps est donnée par la quantité $N(t)$. Le premier modèle a été proposé par Malthus (1798) et consiste à écrire que l'accroissement de la population est proportionnel à $N(t)$, ce qui revient à supposer qu'une portion constante de la population se reproduit. Cela se traduit par l'équation

$$N' = rN(t), \tag{1}$$

où la quantité $N'(t)$ désigne la dérivée de $N(t)$ par rapport à t, notée aussi $\dot{N}(t)$. Le modèle de Malthus conduit à une croissance exponentielle de la population $N(t)$ ce qui n'est pas réaliste sur le long terme.

Un modèle plus réaliste a été proposé par Verhulst en 1837 :

$$N'(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right), \tag{2}$$

où la constante K décrit la capacité du domaine à nourrir la population. On peut vérifier que

- si $N(t_0) = K$ alors $N(t)$ est constant égal à K pour $t > t_0$,

- si $N(t_0) < K$ alors $N(t)$ est croissant et reste inférieur à K pour $t > t_0$,

- si $N(t_0) > K$ alors $N(t)$ est décroissant et reste supérieur à K pour $t > t_0$.

2.2 Modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra

Les modèles proie-prédateur décrivent l'évolution des populations de deux espèces différentes en interaction.

Le premier modèle d'interaction proies-prédateurs, a été proposé par Volterra après la première guerre mondiale. Il s'agissait alors d'expliquer la dynamique des populations de sardines et de requins en mer Adriatique ; expliquer notamment pourquoi (contrairement à l'intuition que l'on pourrait avoir) les quantités de sardines pêchées après l'interruption due à la guerre n'étaient plus aussi importantes que précédemment et pourquoi à la reprise de la pêche la proportion observée de requins avait augmenté. Ce modèle prend en compte deux types d'espèces : les poissons pêchés à valeur commerciale, les sardines (N) et leurs prédateurs, les requins (P) :

$$\begin{cases} N(0) = N_0, \; P(0) = P_0 \\ N'(t) = aN - bNP \\ P'(t) = -cP + dNP, \end{cases}$$

où les quantités a, b, c, d sont des paramètres réels positifs décrivant le système, et $N(t), P(t)$ sont des réels positifs décrivant les effectifs des deux populations au cours du temps. Le système vérifie les conditions initiales N_0, P_0 et exprime la prise en compte de dynamiques intrinsèques de croissance pour N et décroissance pour P exponentielles (du fait de la compétition entre les individus au sein de l'espèce) ; les termes d'interactions sont proportionnels aux quantités de chacune des espèces.

Les points d'équilibre du système sont les valeurs (N_e, P_e) telles que si $N_0 = N_e$ et $P_0 = P_e$ alors les effectifs restent constants : pour tout $t > 0$ on a $N(t) = N_0$ et $P(t) = P_0$. On trouve les points d'équilibre en résolvant le système

$$\begin{cases} N'(t) = 0 \\ P'(t) = 0. \end{cases}$$

On peut aussi démontrer (mais ce n'est pas demandé) que les effectifs $N(t)$ et $P(t)$ suivent une évolution périodique.

2.3 Modèles pour aller plus loin

- Modèle proie-prédateur de Holling-Tanner.

- Modèle SIR.

3 Résolution numérique d'une équation différentielle ordinaire

Les modèles étudiés ici sont des *équations différentielles ordinaires*, c'est-à-dire que la dérivée d'une quantité au cours du temps dépend de cette quantité.

Lorsque les équations sont complexes, on ne peut pas résoudre analytiquement une équation différentielle ordinaire (on ne peut pas donner une formule explicite de la solution). Par contre on peut approcher sa solution numériquement à l'aide d'un code de calcul.

Pour résoudre numériquement une équation différentielle ordinaire on choisit un intervalle sur lequel on souhaite la résoudre, par exemple $[0, T]$. On va ensuite approcher numériquement la solution en des points $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n = T$. Si les points t_k sont espacés entre eux d'une quantité h fixe, on appelle h le pas de discrétisation.

La méthode de résolution la plus simple à implémenter est la méthode d'Euler. Par contre pour avoir une bonne précision le pas de discrétisation doit être extrêment petit. La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) est un peu plus délicate à implémenter mais donne des résultats plus précis. Cela peut se démontrer mathématiquement, mais on peut aussi l'observer en appliquant ces méthodes à un système dont on connaît la solution analytique, et en comparant la solution analytique avec les solutions trouvées par la méthode d'Euler et RK4.

4 Travail demandé

A la lecture des documents joints, et de ce que vous pourrez trouvez par vous-même :

- Comprendre les modèles d'évolution d'une population et de deux populations présentés ici.
- Calculer les points d'équilibre du système de Lotka-Volterra. Discuter de l'effet de la pêche.
- Vous écrirez un code qui résout un système d'équations différentielles ordinaires par la méthode d'Euler, et l'utiliser pour résoudre les modèles de population dont il est question dans ce dossier. Pour le modèle de Malthus on comparera la solution numérique à la solution analytique.
- Vous écrirez un code qui résout un système d'équations différentielles ordinaires par la méthode RK4, et l'utiliser pour résoudre les modèles de population dont il est question dans ce dossier.
- Vous rédigerez un rapport présentant votre travail.

5 Documents joints

- Historique et panorama des modèles d'évolution d'une population, et de deux populations en rapport proie-prédateur,
- Description précise de la dérivation des modèles de Lotka-Volterra et Holling-Tanner,
- Méthodes de résolution d'équations différentielles ordinaires : Euler et RK4,
- Description de l'effet de la pêche sur les paramètres du modèle de Volterra.