Université de Grenoble **Année 2014-2015**
Master M1 Biologie
BIO4221 Bioinformatique

Méthodes d'Euler et de Runge-Kutta

Principe général : Il s'agit de méthodes de résolution numérique d'équations différentielles du premier ordre avec condition initiale. Pour un système de deux équations différentielles

$$x'(t) = F(x(t), y(t)), \qquad y'(t) = G(x(t), y(t)),$$

et des conditions initiales

$$x(0) = x_0, \qquad y(0) = y_0,$$

on choisit l'intervalle de longueur T sur lequel on veut approcher $(x(t), y(t))$ et un nombre de pas $n \geqslant 1$, on subdivise l'intervalle $[0, T]$ en $n \geqslant 1$ sous-intervalles de longueur $h = T/n$, et on approche la solution $(x(t), y(t))$ de l'équation différentielle sur l'intervalle $[0, T] = [0, nh]$ par des vecteurs

$$(X_k)_{0\leqslant k\leqslant n}, \qquad (Y_k)_{0\leqslant k\leqslant n},$$

avec l'idée que, pour tout k,

$$X_k \approx x(kh), \qquad Y_k \approx y(kh),$$

ou bien de façon équivalente, que pour tout temps t dans $[0, nh]$,

$$x(t) \approx X_{\lfloor t/h \rfloor}, \qquad y(t) \approx X_{\lfloor t/h \rfloor}.$$

Méthode d'Euler : Appelée aussi « méthode de la tangente », c'est la plus simple des méthodes de résolution numérique des équations différentielles, on considère que, h étant petit,

$$x(t + h) \approx x(t) + hx'(t) = x(t) + hF(x(t), y(t)),$$

et de même pour $y(t + h)$. On considère donc le schéma

$$X_0 = x_0, \quad Y_0 = y_0, \quad X_{k+1} = X_k + hF(X_k, Y_k), \quad Y_{k+1} = Y_k + hG(X_k, Y_k).$$

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) : la méthode d'Euler n'utilise que la dérivée au début de chaque intervalle $[kh, (k+1)h]$ pour déduire les valeurs X_{k+1} et Y_{k+1} à la fin de l'intervalle à partir des valeurs X_k et Y_k au début de l'intervalle. À présent on va calculer des valeurs de la dérivée en 4 points de l'intervalle, afin d'atteindre une plus grande précision.

Dans le détail, on modifie seulement l'étape itérative de la méthode d'Euler, qui devient

$$X_{k+1} = X_k + \tfrac{1}{6}h(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \qquad Y_{k+1} = Y_k + \tfrac{1}{6}h(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4),$$

avec

$$K_1 = F(X_k, Y_k), \qquad L_1 = G(X_k, Y_k),$$

puis

$$K_2 = F(X_k + \tfrac{1}{2}hK_1, Y_k + \tfrac{1}{2}hL_1), \qquad L_2 = G(X_k + \tfrac{1}{2}hK_1, Y_k + \tfrac{1}{2}hL_1),$$

$$K_3 = F(X_k + \tfrac{1}{2}hK_2, Y_k + \tfrac{1}{2}hL_2), \qquad L_3 = G(X_k + \tfrac{1}{2}hK_2, Y_k + \tfrac{1}{2}hL_2),$$

et enfin,

$$K_4 = F(X_k + hK_3, Y_k + hL_3), \qquad L_4 = G(X_k + hK_3, Y_k + hL_3).$$

Erreurs : La méthode d'Euler est une méthode d'ordre 1 au sens où l'erreur commise à chaque étape $(X_k, Y_k) \to (X_{k+1}, Y_{k+1})$ est de l'ordre de h^2, donc l'erreur totale accumulée est de l'ordre de h.
La méthode RK4 est une méthode d'ordre 4 au sens où l'erreur commise à chaque étape $(X_k, Y_k) \to (X_{k+1}, Y_{k+1})$ est de l'ordre de h^5, donc l'erreur totale accumulée est de l'ordre de h^4.

Exemple : On cherche à tester les deux méthodes sur l'équation différentielle

$$x' = x, \qquad x(0) = 1,$$

dont on connaît la solution

$$x(t) = \mathrm{e}^t.$$

Montrer que la méthode d'Euler de pas h revient à approcher $x(t)$ par

$$x_E^h(t) = (1 + h)^{t/h},$$

et que la méthode RK4 de pas h revient à approcher $x(t)$ par

$$x_{RK4}^h(t) = (1 + h + \tfrac{1}{2}h^2 + \tfrac{1}{6}h^3 + \tfrac{1}{24}h^4)^{t/h}.$$

Le développement de l'exponentielle en série entière affirme que, quand $h \to 0$,

$$\mathrm{e}^h = 1 + h + \Theta(h^2), \qquad \mathrm{e}^h = 1 + h + \tfrac{1}{2}h^2 + \tfrac{1}{6}h^3 + \tfrac{1}{24}h^4 + \Theta(h^5).$$

En utilisant ce résultat $n = t/h$ fois, on peut en déduire que

$$x_E^h(t) = x(t) + \Theta(h), \qquad x_{RK4}^h(t) = x(t) + \Theta(h^4).$$