

**Mémoire M2 Mathématiques Fondamentales :
Systèmes dynamiques et application à la biologie :
Le modèle proie-prédateur de Holling-Tanner**

Aurore DETTWEILER

Directeur de mémoire :

PANAZZOLO Daniel

Introduction générale

Dans ce mémoire, on étudie le modèle proie-prédateur de Holling-Tanner. C'est un système dynamique du plan dépendant de six paramètres et défini par deux équations différentielles. L'une d'elle mesure la variation de la densité des proies et l'autre celle de la densité des prédateurs présents, au cours du temps. Ce système dynamique a été proposé par Tanner en 1975 (voir [1]).

Notre principal but dans cette étude est le suivant : chercher les points d'équilibre et les comportements périodiques qui peuvent apparaître, en fonction des paramètres dont dépend le système. En effet, dans le cas des régimes périodiques, des conclusions intéressantes apparaissent d'un point de vue biologique.

On peut définir la fonction réponse d'un prédateur comme étant le nombre de proies qu'il consomme dans une unité d'intervalle de temps. En 1959, Holling proposa une classification de cette fonction réponse en trois types (voir [2]). Dans le cas du modèle proie-prédateur de Holling-Tanner, la fonction réponse d'un prédateur utilisée, $p(x) = \frac{mx}{x+A}$, est une fonction réponse de type II selon cette classification. Le système dynamique de Holling-Tanner s'écrit :

$$HT := \begin{cases} \dot{x} &= xr \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{mxy}{x+A} \\ \dot{y} &= sy \left(1 - h\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

avec $(x, y) \in \{(x, y)/x > 0, y \geq 0\}$ et $r, K, m, A, s, n > 0$.

Avant de commencer l'étude de ce modèle, on rappelle les définitions et les résultats dont nous aurons besoin pour la menée. C'est le but du chapitre 1. Dans tout le mémoire, on se retient au plan réel. Les énoncés donnés le long du chapitre 1 sont bien sur généralisables à une dimension n quelconque. Notons qu'au type de système dynamique qu'est HT , on associe naturellement un champ de vecteurs du plan. Champs de vecteurs et systèmes dynamiques sont alors identifiés tout au long de l'étude. Dans le chapitre 1, on donne les définitions de base liés à un champ de vecteurs du plan : flot, orbite, singularité hyperbolique... On donne en particulier une classification des différentes singularités possibles et on définit les relations d'équivalence qui peuvent exister entre deux champs de vecteurs du plan.

Afin de pouvoir étudier les singularités non hyperboliques qui peuvent exister, on introduit deux types d'éclatements, l'éclatement polaire et l'éclatement projectif,

et on étudie la notion de coefficients de Lyapunov. De plus, on donne la définition d'un cycle limite (une orbite périodique isolée) ainsi que les résultats importants dont nous aurons besoin pour prouver l'existence ou la non existence de telles orbites périodiques. Enfin, on donne une idée de la définition de deux types de bifurcations, la bifurcation noeud-col et la bifurcation de Hopf, pour être capable de repérer si l'une ou l'autre se produit pour le modèle de Holling-Tanner par variation des paramètres.

En passant au chapitre 2 on quitte le cas général des systèmes dynamiques du plan pour s'intéresser aux modèles proie-prédateur uniquement. Ce chapitre est divisé en deux grandes parties. Premièrement, on donne la classification en trois types, selon Holling, de la réponse fonctionnelle d'un prédateur. Deuxièmement, on étudie le modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra.

Proposé par Lotka en 1925 (voir [5]) et Volterra en 1927 (voir [6]), le modèle de Lotka-Volterra est l'un des premiers modèle proie-prédateur. Il s'écrit :

$$LV := \begin{cases} \dot{x} &= x(\alpha - \beta y) \\ \dot{y} &= -y(\delta - \gamma x) \end{cases}$$

avec $(x, y) \in \{(x, y)/x \geq 0, y \geq 0\}$ et $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$. La fonction réponse d'un prédateur utilisée $p(x) = \beta x$ est une fonction réponse de type I selon la classification de Holling.

On commence par étudier chacune des équations de ce système pour mieux comprendre ce que représentent les paramètres α , β , γ et δ d'un point de vue biologique. On étudie ensuite ses singularités, qui sont situées en $(0, 0)$ et $(\frac{\delta}{\gamma}, \frac{\alpha}{\beta})$, et on donne l'allure de son portrait de phase. On prouve facilement que l'origine est une singularité hyperbolique de type selle. Et grâce à l'existence d'une intégrale première non constante pour le système, on prouve que la deuxième singularité est un centre.

Ce modèle proie-prédateur contient beaucoup de simplifications. On montre, par exemple, que toutes les solutions de LV sont périodiques, ce qui ne semble pas réaliste. De plus, il est basé sur certaines hypothèses simplificatrices trop irréalistes. Par exemple, on considère que les proies se reproduisent de façon exponentiellement rapide en l'absence de prédateurs et que la réponse fonctionnelle d'un prédateur est une croissance linéaire par rapport à la densité des proies présentes.

Pour tendre vers quelque chose de plus réaliste, on reformule les hypothèses que considère le modèle de Lotka-Volterra et cela nous mène au modèle proie-prédateur de Holling-Tanner. Techniquement, on modifie certains termes du système LV et on en rajoute de nouveaux. On note que les dynamiques du modèle de Lotka-Volterra sont qualitativement indépendantes des paramètres du système, contrairement aux

dynamiques du modèle de Holling-Tanner. Pour ce dernier modèle, certaines conditions sur les paramètres nous conduisent à une dynamique beaucoup plus riche et intéressante d'un point de vue biologique.

Maintenant qu'on possède tous les outils nécessaires et qu'on sait d'où il provient, on peut passer à l'étude du modèle de Holling-Tanner, c'est le contenu du chapitre 3.

L'étude, pour comprendre le modèle de Holling-Tanner et connaître ses dynamiques dans le premier quadrant du plan, est menée de manière analogue à celle du modèle de Lotka-Volterra mais est bien sur beaucoup moins simple. On commence par décrire la signification biologique de chacun des termes du système, ainsi que des six paramètres dont il dépend. On réduit ensuite le nombre de paramètres en trouvant un système C^∞ équivalent au système HT qui ne dépend que de trois paramètres et non plus de six. Il s'écrit :

$$X := \begin{cases} \dot{x} &= x(1-x) - \frac{xy}{x+a} \\ \dot{y} &= y(\delta - \beta \frac{y}{x}) \end{cases}$$

avec $(x, y) \in \{(x, y)/x > 0, y \geq 0\}$ et $a, \beta, \delta > 0$. C'est ce nouveau système que l'on considère et que l'on étudie dans le reste du mémoire. Il possède trois singularités qui sont situées en $(0, 0)$, $(1, 0)$, et $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ où $0 < x^* < 1$ est l'unique solution positive de l'équation $\delta x - \beta(x+a)(1-x) = 0$.

On voit facilement que $(1, 0)$ est une singularité hyperbolique de type selle. L'origine est un point singulier non hyperbolique de X . Pour connaître les dynamiques de X au voisinage de l'origine dans le premier quadrant du plan, on effectue un éclatement polaire. On remarque que la stabilité et le type de la singularité à l'origine dépendent du paramètre δ . On consacre ensuite une grande partie du chapitre à trouver la stabilité et le type de la troisième singularité $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$.

Tout d'abord, pour faciliter l'étude, on trouve un système de Liénard généralisé qu'on dira être C^∞ équivalent à X quitte à renverser le sens du temps. On s'intéresse en particulier aux conditions sur les paramètres qui entraînent l'existence de cycles limites autour de la singularité $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$. Grâce au critère de Dulac-Bendixson, on peut se restreindre à la région \mathcal{D} définie par $0 < \delta < 1$ et $0 < a < 3\delta + 1 - 2\sqrt{2\delta^2 + 2\delta}$, seule région du plan δa pouvant mener à un ou plusieurs cycles limites autour de la singularité étudiée. Sur \mathcal{D} , on prouve ensuite que la singularité est une singularité de type anti-selle. De plus, on prouve que sa stabilité dépend du signe du polynôme $P(x) = 2x^2 + (a + \delta - 1)x + \delta a$ qui possède deux racines distinctes positives $x_1^* < x_2^*$. En particulier, la stabilité et le type de la troisième singularité dépendent des paramètres du système X .

Dans le cas particulier où x^* est une racine de $P(x)$, la singularité est non hyperbolique de type centre ou foyer faible. Pour déterminer sa stabilité et comprendre le portrait de phase de X en son voisinage et les bifurcations qui s'y produisent, on étudie le signe du premier coefficient de Lyapunov non nul pour X en $(x_1^*, \frac{\delta}{\beta}x_1^*)$ et $(x_2^*, \frac{\delta}{\beta}x_2^*)$. De plus, on considère les paramètres δ , a et x^* plutôt que δ , a et β . Cela ne pose aucun problème puisque le paramètre β ne dépend que de ces trois nouveaux paramètres. On a que a et δ sont dans \mathcal{D} pendant que x^* varie de 0 à 1.

Malgré une description complète du comportement local de X proche de chaque singularité, plusieurs problèmes sont encore ouverts. Dans [3], plusieurs conjectures sont énoncées. En supposant ces conjectures vraies, on peut tracer les diagrammes de bifurcation par variation du paramètre x^* (δ et a étant fixés) selon le signe du premier coefficient de Lyapunov non nul pour X en $(x_1^*, \frac{\delta}{\beta}x_1^*)$, qu'on note $V_1(x_1^*)$. Si $V_1(x_1^*) \leq 0$, il se produit, par variation du paramètre x^* , deux bifurcations de Hopf super-critiques avec comme valeurs de bifurcation les racines de $P(x)$. Si $V_1(x_1^*) > 0$, on trouve, dans le diagramme, deux bifurcations de Hopf (une super-critique, une sous-critique) et une bifurcation noeud-col pour les cycles limites quand x^* varie en décroissant de x_1^* à 0.

On termine le chapitre avec quelques simulations numériques qui, en particulier, appuient les conjectures supposées vraies précédemment.

Table des matières

Introduction générale	3
	8
Chapitre 1. Systèmes dynamiques du plan	9
1.1. Définitions	9
1.2. Équivalence et conjugaison	10
1.3. Singularités (type, stabilité...)	13
1.4. Éclatements de l'origine	18
1.5. Coefficients de Lyapunov	22
1.6. Cycles limites	25
1.7. Bifurcations locales	30
Chapitre 2. Vers le modèle proie-prédateur de Holling-Tanner	35
2.1. La réponse fonctionnelle d'un prédateur	35
2.2. Le modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra	39
Chapitre 3. Le modèle proie-prédateur de Holling-Tanner	45
3.1. Introduction	45
3.2. Étude des équations du système	45
3.3. X , un système C^∞ équivalent au système initial	48
3.4. Les singularités de X	49
3.5. La stabilité des singularités de X	50
3.6. Un système de Liénard généralisé C^∞ équivalent au système X	59
3.7. La singularité $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ pour le système de Liénard	61
3.8. Les coefficients de Lyapunov pour X	67
3.9. Le portrait de phase de X au voisinage de $(x_1^*, \frac{\delta}{\beta}x_1^*)$	68
3.10. Problèmes ouverts	70
3.11. Diagrammes de bifurcations et simulations numériques	71
Bibliographie	80

CHAPITRE 1

Systèmes dynamiques du plan

1.1. Définitions

Dans ce mémoire, on se restreint au plan réel. Toutes les définitions et propositions qui vont suivre seront énoncées pour la dimension $n = 2$ mais peuvent être généralisées pour une dimension n arbitraire. On commence par rappeler la définition d'un champ de vecteurs autonome X du plan sur un ouvert $U \in \mathbb{R}^2$.

DÉFINITION 1. Un **champ de vecteurs autonome X du plan sur un ouvert** $U \in \mathbb{R}^2$ est défini par la donnée de deux applications $f, g \in C^r(U)$ auxquelles on associe le système d'équations différentielles ordinaires :

$$X := \begin{cases} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{cases}$$

On note l'ensemble de ces champs de vecteurs $\chi^r(U)$. Un champ de vecteurs $X \in \chi^r(U)$ définit un **système dynamique** de type particulier. On ne différenciera pas, dans la suite, un tel champ de vecteurs de son système dynamique associé.

Pour tout $p \in U$, on note $I_p \in \mathbb{R}$ l'intervalle maximal d'existence de la solution de X passant par p . Les solutions de X peuvent être décrites par un flot dont on rappelle la définition ci-dessous :

DÉFINITION 2. Le **flot** associé à X est une application C^r $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow U$ où $\mathcal{U} := \{(t, p) \in \mathbb{R} \times U / p \in U, t \in I_p\}$ telle que $\forall p \in U$ $\varphi(t, p)$ vérifie :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi(t, p)}{\partial t} &= X(\varphi(t, p)) \\ \varphi(0, p) &= p \end{cases}$$

C'est-à-dire que $\varphi(., p) : I_p \times \{p\} \rightarrow U$ est la solution maximale du problème de Cauchy associé à X avec la condition initiale $(x(0), y(0)) = p$. De plus, le flot est dit **complet** si pour tout $p \in U$, $I_p = \mathbb{R}$.

Quitte à multiplier un champ de vecteurs $X \in \chi^r(U)$ donné par une certaine fonction $f \in C^\infty(U)$ strictement positive, on peut supposer que le flot associé à X est complet. A partir de maintenant, on assume alors que les flots associés

aux champs de vecteurs considérés sont complets. On rappelle quelques définitions utiles.

- (1) L'**orbite**, ou la trajectoire, de X passant par $p \in U$ est l'ensemble $O(p) = \{\varphi_t(p), t \in \mathbb{R}\}$ où $\varphi_t : U \rightarrow U$ est le flot associé à X pour t fixé.
- (2) Une **orbite périodique** de X passant par $p \in U$ est une orbite de X telle qu'il existe $T \in \mathbb{R}_*^+$ avec $\varphi_T(p) = p$.
- (3) L'**orbite positive** de X passant par $p \in U$ est l'ensemble $O^+(p) = \{\varphi_t(p), t \in \mathbb{R}^+\}$.
- (4) L'**orbite négative** de X passant par $p \in U$ est l'ensemble $O^-(p) = \{\varphi_t(p), t \in \mathbb{R}^-\}$.
- (5) L' **ω -limite** d'un point $p \in U$ est l'ensemble des points $q \in U$ tels qu'il existe une suite $\{t_n\} \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$, avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{t_n}(q) = p$. On le note $\omega(p)$.
- (6) L' **α -limite** d'un point $p \in U$ est l'ensemble des points $q \in U$ tels qu'il existe une suite $\{t_n\} \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = -\infty$, avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{t_n}(q) = p$. On le note $\alpha(p)$.
- (7) Le point $p^* \in U$ est une **singularité** de X , ou un **point singulier** de X si $f(p^*) = g(p^*) = 0$. Dans ce cas, la matrice

$$DX(p^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(p^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(p^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(p^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(p^*) \end{pmatrix}$$

est appelée le linéarisé de X en p^* . On peut en effet définir le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = DX(p^*) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

qu'on appelle le **système linéaire** associé à X en p^* . On dit que p^* est un point singulier **hyperbolique** si $DX(p^*)$ possède deux valeurs propres dont la partie réelle est non nulle. Sinon, il est dit **non hyperbolique**.

1.2. Équivalence et conjugaison

1.2.1. Conjugaison. On s'intéresse maintenant aux relations entre deux champs de vecteurs qui nous permettent de reconnaître quand leurs systèmes dynamiques associés présentent la même dynamique dans un ouvert du plan.

DÉFINITION 3. Deux systèmes dynamiques $X \in \chi^r(U)$ et $Z \in \chi^r(V)$, auxquels on associe les flots φ_t et ψ_t respectivement, sont dits **topologiquement conjugués** s'il existe un homéomorphisme $h : U \rightarrow V$ tel que $h \cdot \varphi_t = \psi_t \cdot h$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. De

plus, si h est un C^k difféomorphisme avec $k \geq 1$, plutôt qu'un homéomorphisme, alors X et Z sont dits C^k **conjugués**.

Cette définition signifie que h envoie chaque orbite de X sur une orbite de Z en préservant le paramètre t , c'est-à-dire qu'on a : $h : \varphi_t(x, y) \rightarrow h(\varphi_t(x, y)) := \psi_t(h(x, y))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On note que, par l'unicité des trajectoires de chaque flot, une trajectoire de X est envoyée sur une et une seule trajectoire de Z et vice versa. La C^k conjugaison de X et Z correspond en fait au changement de coordonnées k -fois différentiable h qui transforme le système X en le système Z . En reprenant l'équation $h.\varphi_t = \psi_t.h$ avec h un C^k difféomorphisme et en la différenciant puis en l'évaluant ensuite en $t = 0$ on obtient :

$$\left\{ Dh(\varphi_t(x, y)) \frac{d\varphi_t}{dt}(x, y) \right\} |_{t=0} = \frac{d\psi_t}{dt}(h(x, y)) |_{t=0}$$

$$\iff Dh(x, y)X \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Z(h(x, y))$$

puisque $\varphi_0 = \text{id}_U$

On considère maintenant le changement de coordonnées $(u, v) = h(x, y)$ appliqué à X . Avec la formule ci-dessus on trouve :

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = Dh(x, y) \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = Dh(x, y)X \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Z(h(x, y)) = Z \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Alors, si h met en évidence la C^k conjugaison de X et Z , l'application dérivée Dh transforme le champ de vecteurs $X(x, y)$ en $Z(u, v)$ avec $(u, v) = h(x, y)$. Finalement, pour prouver que deux systèmes X et Z sont C^k conjugués, il suffit de trouver un difféomorphisme C^k , $h : U \rightarrow V$, tel que $X(x, y) = (Dh(x, y))^{-1}Z(h(x, y))$ pour tout $(x, y) \in U$.

1.2.2. Équivalence. On définit maintenant une notion un peu plus faible que la conjugaison de deux champs de vecteurs vue précédemment, mais qui s'avère souvent utile en pratique.

DÉFINITION 4. Deux systèmes dynamiques $X \in \chi^r(U)$ et $Z \in \chi^r(V)$, auxquels on associe les flots φ_t et ψ_t respectivement, sont dits **topologiquement équivalents** s'il existe un homéomorphisme h envoyant les orbites de X sur celles de Z en préservant leur orientation, sans forcément préserver le paramètre temps t . Si h est un C^k difféomorphisme avec $k \geq 1$, plutôt qu'un homéomorphisme alors X et Z sont dits C^k **équivalents**.

On énonce maintenant un théorème qui donne la C^k équivalence de deux champs de vecteurs particuliers sur un ouvert $U \in \mathbb{R}^2$:

THÉORÈME 5. *Soit $X \in \chi^r(U)$ et soit $l : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application C^k telle que $l > 0$. Alors les champs de vecteurs $\tilde{X} := lX$ et X sont C^k équivalents et l'application mettant en évidence la C^k équivalence est $h = \text{id}$.*

DÉMONSTRATION. Montrons le fait suivant :

Fait. Si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ est une trajectoire de X alors il existe une fonction $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante telle que $\gamma \circ \alpha(s)$ est une trajectoire de \tilde{X} .

On considère l'équation différentielle $l(\gamma(a(s))) = a'(s)$. Puisque l est C^k il existe bien une solution $a(s)$ de cette équation différentielle. De plus, puisque $l > 0$, $a' > 0$ et donc cette solution est strictement croissante. On l'appelle $\alpha(s)$. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} l(\gamma(\alpha(s))) &= \alpha'(s) \\ \iff l(\gamma(\alpha(s)))X(\gamma(\alpha(s))) &= \alpha'(s)X(\gamma(\alpha(s))) \\ \iff \tilde{X}(\gamma(\alpha(s))) &= \alpha'(s)\gamma'(\alpha(s)) \text{ car } \gamma \text{ est une trajectoire de } X \\ \iff \tilde{X}((\gamma \circ \alpha)(s)) &= (\gamma \circ \alpha)'(s) \\ \iff \gamma \circ \alpha(s) &\text{ est une trajectoire de } \tilde{X}. \end{aligned}$$

Et on a montré le fait.

Puisque $l > 0$ on peut poser $X = \frac{1}{l}\tilde{X}$ et montrer comme avant que si $\tilde{\gamma}(s)$ est une trajectoire de \tilde{X} alors il existe un changement de variable $s = \tilde{\alpha}(t)$, où $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante, tel que $\tilde{\gamma} \circ \tilde{\alpha}(t)$ est une trajectoire de X . Et le théorème est alors démontré. \square

REMARQUE. On considère deux systèmes dynamiques $X \in \chi^r(U)$ et $Z \in \chi^r(V)$, auxquels on associe les flots φ_t et ψ_t respectivement. S'il existe un homéomorphisme h envoyant les orbites de X sur celles de Z en renversant leur orientation, on dira, dans ce mémoire, que X et Z sont **topologiquement équivalents quitte à renverser le sens du temps**. Si h est un C^k difféomorphisme avec $k \geq 1$, plutôt qu'un homéomorphisme on dira que X et Z sont **C^k équivalents quitte à renverser le sens du temps**. En particulier, on peut prouver que si $l : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une application C^k telle que $l < 0$, alors les champs de vecteurs $\tilde{X} := lX$ et X sont C^k équivalents quitte à renverser le sens du temps. La démonstration est analogue à celle du théorème 5 menée ci-dessus.

1.2.3. Théorème de Hartman-Grobman. Ce théorème nous permet de réduire l'étude d'un système dynamique $X \in \chi^r(U)$ au voisinage d'un point singulier hyperbolique, à l'étude d'un système linéaire topologiquement équivalent à X , au voisinage de l'origine. Il est très utile en pratique et facilite en général l'étude des systèmes dynamiques définis sur un ouvert U du plan. On l'énonce ci-dessous (voir [4] pour la démonstration) :

THÉORÈME 6. (**Théorème de Hartman-Grobman**) Soit $X \in \chi^r(U)$ et soit $p^* \in U$ un point singulier hyperbolique de X . Alors il existe un voisinage de p^* sur lequel X est topologiquement conjugué à son système linéaire associé en p^* :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = DX(p^*) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

REMARQUE. Le théorème 6 implique que pour connaître la dynamique de $X \in \chi^r(U)$ au voisinage d'un point singulier hyperbolique, il suffit d'étudier celle du système linéaire associé au voisinage de l'origine, ce qui est beaucoup plus facile.

1.3. Singularités (type, stabilité...)

1.3.1. Stabilité. On rappelle les définitions de stabilité au sens de Lyapunov. Soit le système $X \in \chi^r(U)$ défini par :

$$X := \begin{cases} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{cases}$$

et $\varphi : \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ le flot associé.

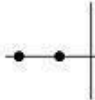
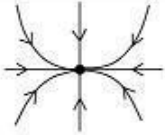
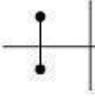


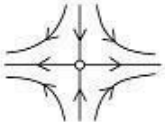
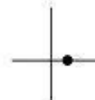
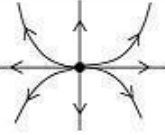
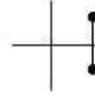

DÉFINITION 7. Un point singulier $p \in U$ de X est dit :

- (1) **stable** si pour tout ouvert $V \subset U$ contenant p , il existe un voisinage $W \subset V$ de p tel que pour tout $q \in W$, $\varphi_t(q) \in V$ pour tout $t \geq 0$.
- (2) **asymptotiquement stable** s'il est stable et s'il existe un voisinage $\Omega \subset U$ de p tel que pour tout $q \in \Omega$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(q) = p$.
- (3) **globalement asymptotiquement stable** s'il est stable et si on peut choisir $\Omega = U$ dans (2).
- (4) **instable** s'il n'est pas stable.

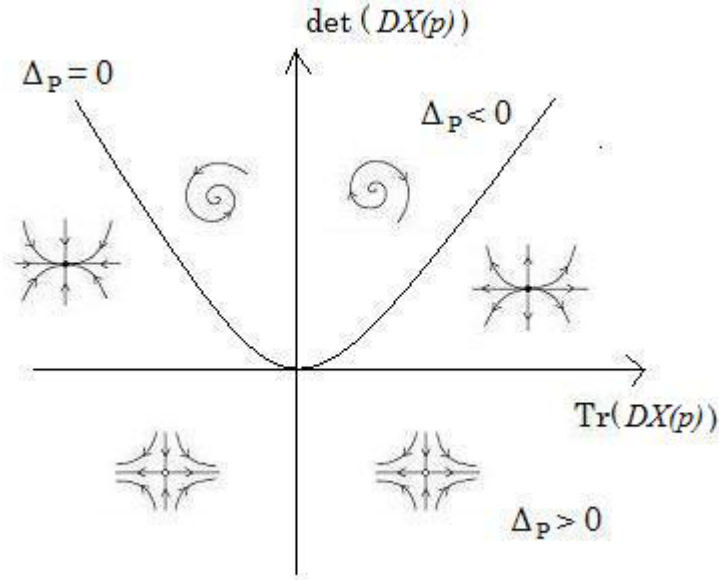
1.3.2. Cas hyperbolique. On a vu que si p est une singularité hyperbolique d'un système $X \in \chi^r(U)$ alors la dynamique du système au voisinage de p est la même que celle du système linéaire associé à X en p , au voisinage de l'origine. Le système linéaire associé à X en p est défini par :

$$L := \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = DX(p) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

où $DX(p)$ est une matrice inversible possédant deux valeurs propres de partie réelle non nulle. Pour connaître la dynamique de X au voisinage de p il suffit donc de connaître la dynamique de L au voisinage de l'origine. L'étude de la matrice de Jordan associée à $DX(p)$ permet d'obtenir le tableau récapitulatif suivant :

Valeurs propres	Portrait de phase	Stabilité
 Deux valeurs propres réelles négatives	 Noeud (puit)	Asymptotiquement Stable (Attracteur)
 Deux valeurs propres complexes conjuguées de partie réelle strictement négative	 Foyer	
 Deux valeurs propres réelles de signe opposé	 Point selle ou col	Instable (Répulseur)
 Deux valeurs propres réelles positives	 Noeud (Source)	Instable (Repulseur)
 Deux valeurs propres complexes conjuguées de partie réelle strictement positive	 Foyer	

On remarque que le polynôme caractéristique de $DX(p)$ est $P(Y) = Y^2 - \text{Tr}(DX(p))Y + \det(DX(p))$. On peut alors déduire la stabilité d'un point singulier hyperbolique grâce aux signes de $\text{Tr}(DX(p))$ et de $\det(DX(p))$. Par exemple, si $\text{Tr}(DX(p)) > 0$ et $\det(DX(p)) > 0$ alors on sait que le point singulier sera soit une source, soit un foyer répulseur, c'est-à-dire qu'il sera instable. Pour connaître son type, il faut s'intéresser au signe de $\Delta_p = \text{Tr}(DX(p))^2 - 4\det(DX(p))$. Si par exemple $\Delta_p > 0$ alors les deux racines de $P(Y)$ sont réelles et finalement, le point singulier sera une source. On résume cette discussion avec le diagramme suivant :



1.3.3. Cas non hyperbolique. Si une singularité p d'un système $X \in \chi^r(U)$ est non hyperbolique, le théorème de Hartman-Grobman ne s'applique pas et on ne peut pas conclure sur le type et la stabilité de p en étudiant les valeurs propres de la matrice $DX(p)$. Il faut s'intéresser aux termes non linéaires de degrés plus grands. Il y a alors différentes techniques possibles à appliquer selon les cas, mais la conclusion est bien sur beaucoup plus difficile à obtenir. Une des techniques que nous utiliserons plus tard est d'effectuer un éclatement de l'origine. C'est le sujet de la section suivante. On note, avant d'y passer, que les cas de non hyperbolicité possibles sont les suivants :

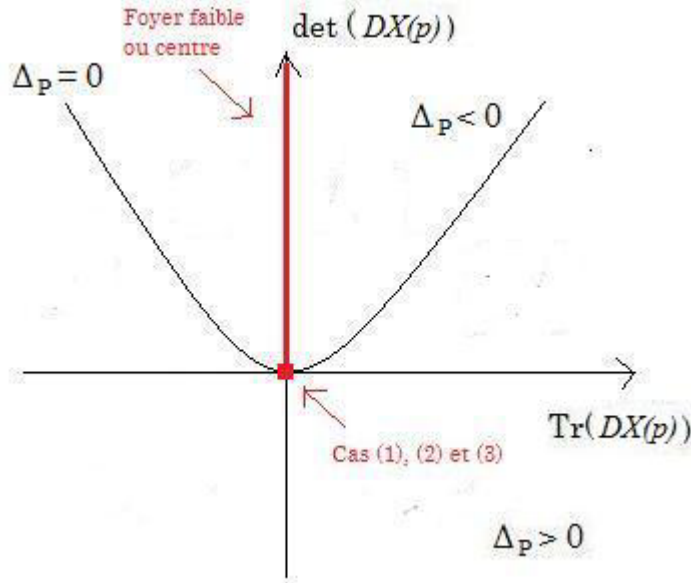
- (1) $DX(p) \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ possède deux valeurs propres nulles
- (2) $DX(p) \simeq \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ possède deux valeurs propres nulles mais n'est pas la matrice nulle
- (3) $DX(p) \simeq \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ possède une valeur propre nulle et une valeur propre réelle non nulle λ
- (4) $DX(p) \simeq \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$ possède deux valeurs propres complexes conjuguées imaginaires pures $\pm i\beta$

On s'intéresse en particulier au cas (4). Si $X \in \chi^\omega(U)$ est un champ de vecteurs analytique, la singularité est soit un foyer faible stable, soit un foyer faible instable, soit un centre. On rappelle les définitions :

DÉFINITION 8. Un point singulier $p \in U$ d'un champ de vecteurs $X \in \chi^r(U)$ est :

1. Un **centre** s'il existe un voisinage de p tel que toutes les trajectoires de X sont des orbites périodiques entourant la singularité p .
2. Un **foyer faible stable** (respectivement **instable**) si c'est une singularité asymptotiquement stable (respectivement instable) pour X et un centre pour le système linéaire associé à X en p .

En fait, on retrouve ces cas de non hyperbolicité dans le diagramme précédent :



Le cas (3) correspond à un type particulier de singularité non hyperbolique, qu'on appelle une singularité de type noeud-col. Supposons que la singularité p soit l'origine. Alors le champ de vecteurs X sera de la forme

$$X := \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + O\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^2\right)$$

En particulier, si on suppose que la droite $\{x = 0\}$ est invariante par le flot, on peut réécrire le système sous la forme :

$$X := \begin{cases} \dot{x} &= x(1 + f(x, y)) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{cases}$$

où $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ sont C^r , $f(0,0) = 0$ et g est d'ordre supérieur ou égal à 2. Dans ce cas, le théorème suivant nous donne une classification topologique complète :

THÉORÈME 9. *Soit X un système dynamique comme ci-dessus. Si $g(0,y) = cy^k + O(y^{k+1})$ avec $c \neq 0$ et $k \geq 2$, alors X est topologiquement équivalent au système*

$$\tilde{X} := \begin{cases} \dot{x} &= x \\ \dot{y} &= \epsilon y^k \end{cases}$$

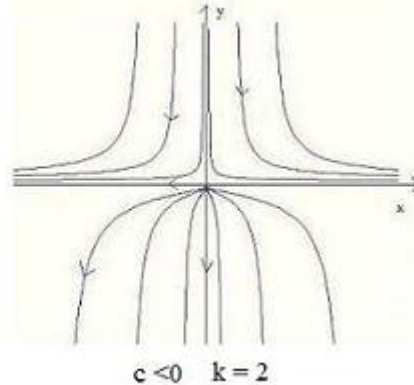
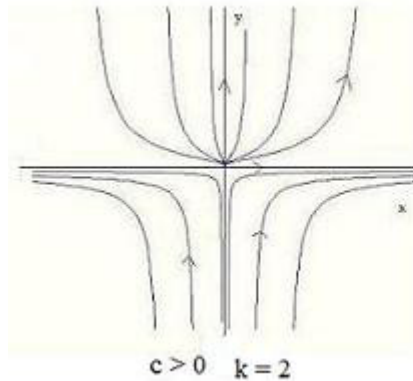
où $\epsilon = 1$ si $c > 0$ et $\epsilon = -1$ si $c < 0$.

REMARQUE. Ce théorème est un cas particulier du théorème de la forme normale pour un champ de vecteurs possédant une singularité de type noeud-col à l'origine (voir [8]).

On cherche maintenant à comprendre le portrait de phase au voisinage de l'origine du système \tilde{X} pour obtenir celui de X . On se limite à l'étude du cas $k = 2$ car il s'agit de l'unique cas dont nous aurons besoin dans la suite. On essaye de trouver une intégrale première du système \tilde{X} .

$$\begin{aligned} \text{On a } \frac{dx}{dt} = x &\implies dt = \frac{dx}{x} \text{ et } \frac{dy}{dt} = \epsilon y^2 \implies dt = \frac{dy}{\epsilon y^2} \text{ donc } \frac{dx}{x} = \frac{dy}{\epsilon y^2} \\ \implies \int^x \frac{dx}{x} &= \frac{1}{\epsilon} \left(\int^y \frac{dy}{y^2} \right) + d \text{ où } d \in \mathbb{R} \text{ une certaine constante} \\ \implies \ln(x) &= -\frac{1}{\epsilon y} + d \\ \iff \ln \left(x \exp \left(\frac{1}{\epsilon y} \right) \right) &= d \\ \iff x \exp \left(\frac{1}{\epsilon y} \right) &= \exp(d) \\ \iff x \exp \left(\frac{1}{\epsilon y} \right) &= D \text{ où } D \in \mathbb{R} \text{ une certaine constante} \end{aligned}$$

Alors la fonction $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x,y) = x \exp \left(\frac{1}{\epsilon y} \right)$ est une intégrale première du système \tilde{X} . Les trajectoires de \tilde{X} au voisinage de l'origine sont les courbes de niveau de F . Si l'on trace quelques uns des graphes $\{F = \text{constante}\}$, on obtient les portraits de phase suivants :



On comprend bien alors pourquoi le nom “noeud-col”. Dans le cas où $c < 0$ par exemple, on voit apparaître le portrait de phase d’une singularité de type selle pour $y > 0$ et celui d’une singularité de type source (qui est un noeud) pour $y < 0$.

1.4. Éclatements de l’origine

La technique de l’éclatement consiste en des changements de coordonnées qui “éclatent” le point singulier non hyperbolique (qu’on suppose être l’origine) en une courbe sur laquelle un certain nombre de singularités apparaissent. Le type de ces singularités peut en général être trouvé grâce au théorème de Hartman-Grobman, ce qui facilite le problème. L’exemple le plus simple d’éclatement est l’éclatement polaire, que nous allons décrire maintenant.

1.4.1. Éclatement polaire. On considère le système $X \in \chi^r(U)$ défini par :

$$X := \begin{cases} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{cases}$$

Le changement de coordonnées est le passage en coordonnées polaires bien connu de tous. C’est-à-dire qu’on pose $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$. On obtient alors un système de la forme

$$\tilde{P} := \begin{cases} \dot{r} &= r^{k+1} R(r, \theta) \\ \dot{\theta} &= r^k \Theta(r, \theta) \end{cases}$$

pour un certain $k \in \mathbb{N}$ avec $R(r, \theta)$ et $\Theta(r, \theta)$ non divisibles par r (voir [8]). Sur $\{r > 0\}$, on applique le théorème 5 : on divise les deux équations du système par r^k (on dit qu’on désingularise le système) pour obtenir un système C^∞ équivalent à \tilde{P} (on l’appelle le **système désingularisé**). Ce nouveau système est de la forme :

$$P := \begin{cases} \dot{r} &= r R(r, \theta) \\ \dot{\theta} &= \Theta(r, \theta) \end{cases}$$

Notre singularité non hyperbolique en l’origine correspond, dans ces coordonnées, au cercle $\{r = 0\}$. On se place alors sur $\{r = 0\}$ et on étudie les singularités de P qui s’y trouvent. Une fois connus leur type et leur stabilité, il suffit de les contracter en l’origine pour obtenir le portrait de phase local de X en $(0, 0)$.

Pour mieux comprendre ce qui a été dit, illustrons le avec un exemple.

EXEMPLE. Utilisons l’éclatement polaire pour trouver le type et la stabilité de la singularité à l’origine du système $X \in \chi^r(\mathbb{R}^2)$ défini par :

$$X := \begin{cases} \dot{x} &= x^2 - 2xy \\ \dot{y} &= y^2 - 2xy \end{cases}$$

Le passage en coordonnées polaires nous donne le système

$$\tilde{P} := \begin{cases} \dot{r} &= r^2 [\cos^3(\theta) - 2\cos^2(\theta)\sin(\theta) - 2\cos(\theta)\sin^2(\theta) + \sin^3(\theta)] \\ \dot{\theta} &= 3r\cos(\theta)\sin(\theta)[\sin(\theta) - \cos(\theta)] \end{cases}$$

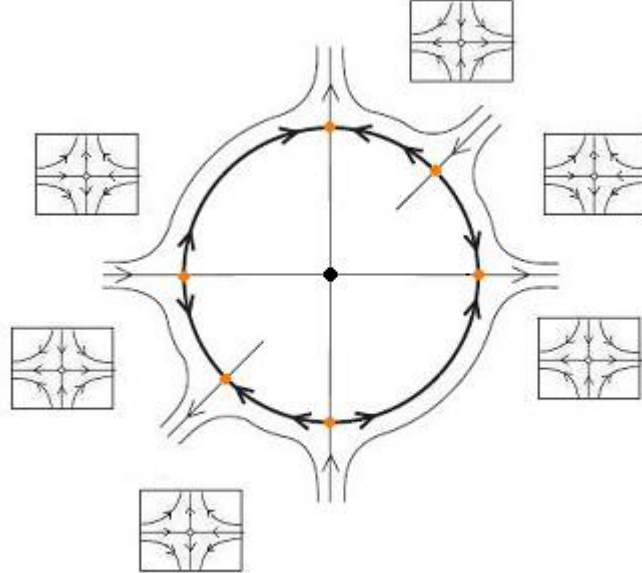
On note que, dans ce cas particulier, $k = 1$. On désingularise le système en divisant les deux équations par r pour obtenir le système désingularisé

$$P := \begin{cases} \dot{r} &= rR(r, \theta) \\ \dot{\theta} &= \Theta(r, \theta) \end{cases}$$

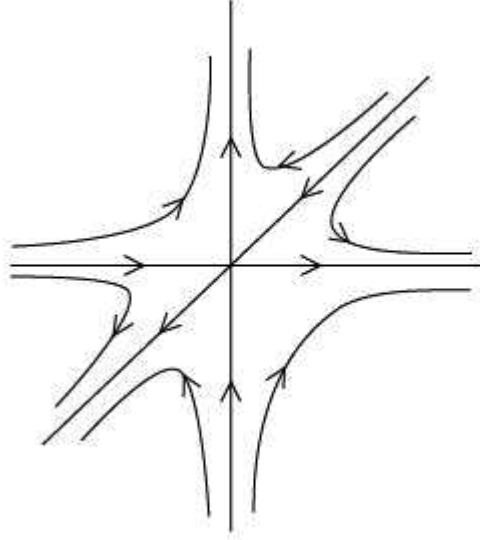
avec $R(r, \theta) = \cos^3(\theta) - 2\cos^2(\theta)\sin(\theta) - 2\cos(\theta)\sin^2(\theta) + \sin^3(\theta)$

et $\Theta(r, \theta) = 3\cos(\theta)\sin(\theta)[\sin(\theta) - \cos(\theta)]$.

On se place maintenant sur $\{r = 0\}$. Les solutions de l'équation $\Theta(0, \theta) = 0 \iff 3\cos(\theta)\sin(\theta)[\sin(\theta) - \cos(\theta)] = 0$ sont $\theta = 0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{5\pi}{4}$. On a donc 6 singularités de P à étudier : $(0, 0), (0, \pi), (0, \frac{\pi}{2}), (0, \frac{3\pi}{2}), (0, \frac{\pi}{4})$ et $(0, \frac{5\pi}{4})$. On peut montrer que ces singularités sont toutes hyperboliques en calculant la matrice $DP(r, \theta)$ et en l'évaluant en chacun des points ci-dessus. On applique alors le théorème de Hartman-Grobman et on obtient que tous les points singuliers sont en fait des points selles. On peut représenter l'éclatement polaire comme suit :



Pour obtenir le portrait de phase de X au voisinage de l'origine il suffit maintenant de contracter le dessin ci dessus. On obtient :



On passe maintenant à un deuxième type d'éclatement, l'éclatement projectif. Ce nouvel éclatement est plus agréable que le précédent puisqu'il utilise des expressions algébriques plutôt que trigonométriques. Cependant, il est plus difficile à visualiser que l'éclatement polaire.

1.4.2. Éclatement projectif. On considère encore le système $X \in \chi^r(U)$ défini par :

$$X := \begin{cases} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{cases}$$

L'éclatement consiste ici à séparer toutes les droites du plan passant par l'origine.

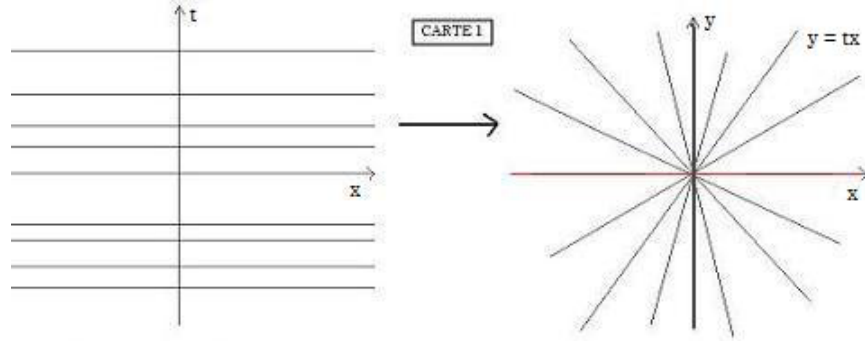
Soit l'application $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par $\varphi_1(x, t) = (x, tx) := (x, y)$. Dans les coordonnées (x, t) , on obtient un système de la forme

$$\tilde{P}_1 := \begin{cases} \dot{x} &= x^{k+1} f_1(x, t) \\ \dot{t} &= x^k g_1(x, t) \end{cases}$$

pour un certain $k \in \mathbb{N}$ avec $f_1(x, t)$ et $g_1(x, t)$ non divisibles par x . On applique le théorème 5 sur $\{x > 0\}$: on divise les deux équations par x^k , ce qui nous ramène au système désingularisé C^∞ équivalent suivant :

$$P_1 := \begin{cases} \dot{x} &= x f_1(x, t) \\ \dot{t} &= g_1(x, t) \end{cases}$$

Ce changement de coordonnées correspond à une application qui envoie la droite $t = a$ dans le plan xt sur la droite $y = ax$ (droite passant par l'origine de pente a) dans le plan xy . On note que la droite $\{x = 0\}$ est envoyée par cette application sur l'origine. Il faut alors se placer sur la droite $\{x = 0\}$ dans le plan xt et étudier les singularités de P_1 qui s'y trouvent. Cependant, ce changement de coordonnées ne permet pas d'obtenir la droite $\{x = 0\}$ du plan xy qui correspondrait à "la droite" $t = \infty$ du plan xt .



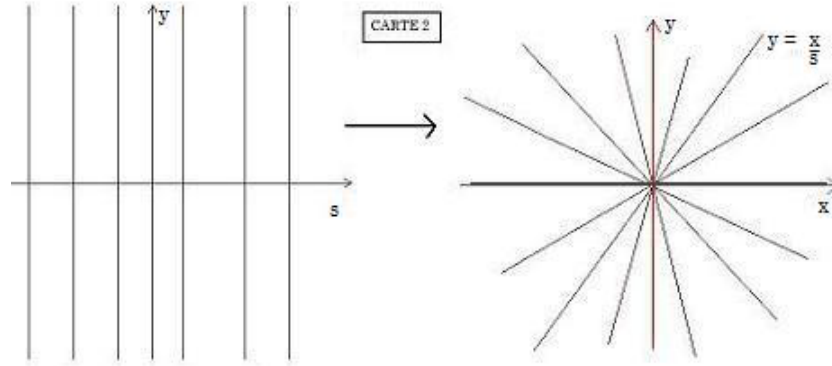
On introduit alors l'application $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par $\varphi_2(s, y) = (sy, y) := (x, y)$. Dans les coordonnées (s, y) , on obtient un système de la forme

$$\tilde{P}_2 := \begin{cases} \dot{s} &= y^k f_2(s, y) \\ \dot{y} &= y^{k+1} g_2(s, y) \end{cases}$$

pour un certain $k \in \mathbb{N}$ avec $f_2(x, t)$ et $g_2(x, t)$ non divisibles par y . On applique le théorème 5 sur $\{y > 0\}$: on divise les deux équations par y^k , ce qui nous ramène au système désingularisé C^∞ équivalent suivant :

$$P_2 := \begin{cases} \dot{s} &= f_2(s, y) \\ \dot{y} &= y g_2(s, y) \end{cases}$$

Ce changement de coordonnées correspond à une application qui envoie la droite $s = a$ du plan sy sur la droite $y = \frac{x}{a}$ (droite passant par l'origine de pente $\frac{1}{a}$) dans le plan xy . On note que la droite $\{y = 0\}$ est envoyée par cette application sur l'origine. Il faut alors se placer sur la droite $\{y = 0\}$ dans le plan sy et étudier les singularités de P_2 qui s'y trouvent.



Finalement, l'union des images $\varphi_1(\mathbb{R}^2)$ et $\varphi_2(\mathbb{R}^2)$ recouvrent le plan xy entièrement. On dit que le premier changement de coordonnées correspond à la carte 1 de l'éclatement projectif et que le second correspond à la carte 2 de l'éclatement projectif.

Comme pour l'éclatement polaire, une fois obtenus le type et la stabilité des singularités sur $\{x = 0\}$ (pour la carte 1) et $\{y = 0\}$ (pour la carte 2), il nous suffit de les contracter en l'origine pour obtenir le portrait de phase local de X en $(0, 0)$.

1.5. Coefficients de Lyapunov

Soit un système dynamique $X \in \chi^r(U)$ possédant une singularité non hyperbolique de type centre ou foyer faible (qu'on suppose être en l'origine). Dans cette section, on va montrer que la stabilité de cette singularité est déterminée par les coefficients de Lyapunov pour X en $(0, 0)$.

Soit une famille de systèmes dynamiques $X_\lambda \in \chi^r(U)$ dépendant d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^m$:

$$X_\lambda := \begin{cases} \dot{x} &= f(x, y, \lambda) \\ \dot{y} &= g(x, y, \lambda) \end{cases}$$

On suppose que $(0, 0)$ est une singularité de X_0 et $DX_0(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ pour un certain $\beta \neq 0$. Nous avons alors le théorème de la forme normale suivant (voir [8] pour la démonstration) :

THÉORÈME 10. *Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe un voisinage $U_0 \subset \mathbb{R}^2$ de $(0, 0)$ et un voisinage $\Lambda_0 \subset \mathbb{R}^m$ de 0 tels que, dans ces voisinages, on peut définir un système*

de coordonnées dans lequel la famille X_λ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \left(\sum_{k=0}^n p_k(\lambda)(x^2 + y^2)^k \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \left(\beta + \sum_{k=0}^n q_k(\lambda)(x^2 + y^2)^k \right) \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + O(\|x, y\|^{2n+2})$$

où $p_k, q_k \in C^r(\Lambda_0)$.

On appelle les coefficients p_k les **coefficients de Lyapunov** pour le système dynamique X en l'origine. Ils sont, comme dit, un outil pour déterminer la stabilité et le type de la singularité non hyperbolique $(0, 0)$ de X_0 . Ils nous donnent également certains renseignements sur le nombre de cycles limites que l'on peut trouver autour de cette singularité. On s'intéressera à ce dernier problème au cours de la section suivante. Pour l'instant, on fixe $\lambda \in \Lambda_0$ et on définit la notion de foyer faible d'ordre k_0 pour X_λ .

DÉFINITION 11. On dit que X_λ possède un **foyer faible d'ordre** k_0 en l'origine s'il existe une forme normale telle que $p_0(\lambda) = p_1(\lambda) = \dots = p_{k_0-1}(\lambda) = 0$ et $p_{k_0}(\lambda) \neq 0$. Dans ce cas, on dit que le foyer faible est stable si $p_{k_0}(\lambda) < 0$ et instable si $p_{k_0}(\lambda) > 0$.

Renommons $X_\lambda = X$, $p_k(\lambda) = p_k$, etc... Pour justifier la définition précédente, vérifions que si $p_{k_0} < 0$ (respectivement $p_{k_0} > 0$), alors $(0, 0)$ est une singularité asymptotiquement stable (respectivement instable) de X dans le sens de la définition 7. Pour cela, il suffit d'utiliser le critère de Lyapunov (voir [9] pour la démonstration) :

THÉORÈME 12. (Critère de Lyapunov) Soient $X = f \frac{\partial}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial y} \in \chi^r(U)$ et $p \in U$ un point singulier de X . Soit $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application C^1 telle que :

1. V possède un minimum strict en p .

2. $f \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial V}{\partial y} = X(V) \leq 0$.

Alors p est stable. Si en plus V vérifie $X(V) < 0$ sur $U \setminus \{p\}$ alors p est asymptotiquement stable.

Dans notre cas on a le système X suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \left(\sum_{k=0}^n p_k(x^2 + y^2)^k \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \left(\beta + \sum_{k=0}^n q_k(x^2 + y^2)^k \right) \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + O(\|x, y\|^{2n+2})$$

qu'on peut encore réécrire :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \left(\sum_{k=0}^n p_k (x^2 + y^2)^k \right) \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) + \left(\beta + \sum_{k=0}^n q_k (x^2 + y^2)^k \right) \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right) + O(\|x, y\|^{2n+2})$$

On considère la fonction $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $V(x, y) = x^2 + y^2$. On a que $V(0, 0) = 0$ et que $V(x, y) > 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$, donc V possède un minimum strict à l'origine. De plus,

$$\begin{aligned} X(V) &= 2 \sum_{k=0}^n p_k (x^2 + y^2)^{k+1} + O(\|x, y\|^{2n+2}) \\ &= 2 \sum_{k=0}^n p_k V^{k+1} + O(V^{n+1}) \\ &= 2p_{k_0} V^{k_0+1} + O(V^{k_0+2}) \end{aligned}$$

où p_{k_0} est le premier coefficient de Lyapunov non nul pour X en l'origine. Si $p_{k_0} < 0$ alors $X(V) < 0$ sur un voisinage assez petit de l'origine. On déduit du théorème 12 que, dans ce cas, la singularité à l'origine de X est asymptotiquement stable. C'est donc une singularité de type foyer faible stable. Si on considère le système $\tilde{X} = -X$ on obtient que $\tilde{X}(V) = -2p_{k_0} V^{k_0+1} + O(V^{k_0+2})$. Si $p_{k_0} > 0$ alors $\tilde{X}(V) < 0$ sur un voisinage assez petit de $(0, 0)$. Le théorème 12 nous assure alors que la singularité à l'origine de \tilde{X} est asymptotiquement stable. On sait, par la remarque suivant le théorème 5, que X et \tilde{X} sont C^∞ équivalents quitte à renverser le sens du temps. On en déduit que la singularité à l'origine de X est instable. C'est donc une singularité de type foyer faible instable.

On passe maintenant en coordonnées polaires. On obtient le système C^∞ équivalent à X en forme normale suivant :

$$\begin{cases} \dot{\theta} &= \beta + \sum_{k=0}^n q_k r^{2k} + O(r^{2n+2}) \\ \dot{r} &= r \left(\sum_{k=0}^n p_k r^{2k} + O(r^{2n+2}) \right) \end{cases}$$

D'après un théorème de Dulac (voir [14]), si X est analytique et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_k = 0 \forall k \in [0, n]$ alors l'origine est un centre. En particulier, il est stable.

On résume la discussion ci-dessus : Soit un système analytique $X \in \chi^\omega(U)$ possédant une singularité de type centre ou foyer faible à l'origine. Si tous les coefficients de Lyapunov pour X en $(0, 0)$ sont nuls, alors l'origine est un centre. Soit sinon p_{k_0} , le premier coefficient de Lyapunov non nul pour X en $(0, 0)$. On a alors deux cas possibles :

1. Si $p_{k_0} < 0$ alors l'origine est un foyer faible stable.

2. Si $p_{k_o} > 0$ alors l'origine est un foyer faible instable.

Cette technique à l'air plutôt agréable. Il faut néanmoins ne pas trop se fier aux apparences...

Partons d'un système standard $X \in \chi^r(U)$ défini par :

$$X := \begin{cases} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{cases}$$

Supposons que pour un certain point (x^*, y^*) la matrice du système linéaire associée à X possède deux valeurs propres complexes conjuguées imaginaires pures. C'est-à-dire, (x^*, y^*) est une singularité non hyperbolique de type centre ou foyer faible. On veut alors déterminer sa stabilité grâce aux coefficients de Lyapunov. On note que pour cela il faut :

- (1) Recentrer le système X de telle sorte que (x^*, y^*) devienne l'origine. On obtient un système \bar{X} déjà bien plus compliqué.
- (2) Mettre le système \bar{X} sous la forme $\begin{cases} \dot{x} &= -\beta y + P(x, y) \\ \dot{y} &= \beta x + Q(x, y) \end{cases}$. On obtient, après plusieurs pages de calculs, un système \tilde{X} encore bien plus compliqué.
- (3) Mettre le système \tilde{X} sous sa forme normale....

Bref, on est vite dépassé par la taille des calculs à effectuer. Il est donc délicat d'entreprendre "à la main" de calculer ces coefficients. Heureusement, des logiciels comme maple le font très bien à notre place.

1.6. Cycles limites

Beaucoup de systèmes dynamiques, comme ceux que l'on considère dans ce mémoire, sont décrits par des équations différentielles. Parfois, leurs solutions évoluent vers des cycles limites dont le nombre est l'enjeu du 16ème problème de Hilbert, qui est un problème encore ouvert aujourd'hui. Pour montrer l'existence des cycles limites, et établir leur stabilité, nous ne disposons pas de beaucoup d'outils. Nous allons citer, dans cette section, ceux qui nous seront utiles dans la suite. Mais commençons par définir ce qu'est un cycle limite.

1.6.1. Définition.

DÉFINITION 13. Soit $X \in \chi^r(U)$. Un **cycle limite** est une orbite périodique γ isolée de X . C'est-à-dire qu'il existe un voisinage $V \subset U$ de γ tel que γ est l'unique orbite périodique de X dans V .

Dans le cas d'un système dynamique analytique, on a la proposition suivante (voir [10]) :

PROPOSITION 14. *Soit $X \in \chi^\omega(U)$. Alors une orbite périodique γ est un **cycle limite** si et seulement s'il existe un point $p \in U$ tel que $p \notin \gamma$ et soit γ est l' ω -limite de p , soit γ est l' α -limite de p .*

On a également la définition suivante :

DÉFINITION 15. Un cycle limite, γ , d'un champ de vecteurs analytique $X \in \chi^\omega(U)$ est dit :

- (1) **stable** s'il existe un voisinage $V \in U$ de γ tel que $\forall p \in V$, γ est égal à l' ω -limite de l'orbite de X passant par p .
- (2) **instable** s'il existe un voisinage $V \in U$ de γ tel que $\forall p \in V$, γ est égal à l' α -limite de l'orbite de X passant par p .
- (3) **semi-stable** s'il existe un voisinage $V \in U$ de γ tel que :
 - Soit $\forall p \in V$ à l'extérieur de γ , γ est égal à l' α -limite de l'orbite de X passant par p et $\forall p \in V$ à l'intérieur de γ , γ est égal à l' ω -limite de l'orbite de X passant par p .
 - Soit $\forall p \in V$ à l'extérieur de γ , γ est égal à l' ω -limite de l'orbite de X passant par p et $\forall p \in V$ à l'intérieur de γ , γ est égal à l' α -limite de l'orbite de X passant par p .

L'étude des cycles limites est importante puisqu'elle permet d'identifier des comportements périodiques dans la dynamique de X . Donnons maintenant quelques résultats qui permettent de prouver l'existence ou la non existence de cycles limites pour un système dynamique.

1.6.2. Théorème de Poincaré-Bendixson. On se contente ici d'énoncer le théorème (voir [7] pour la démonstration) :

THÉORÈME 16. (*Théorème de Poincaré-Bendixson*) *Supposons qu'un système dynamique $X \in \chi^r(U)$ ne possède que des points singuliers isolés.*

Si une orbite positive de X est bornée, alors son ensemble ω -limite est soit un point singulier, soit une orbite périodique, soit une réunion de points singuliers et d'orbites régulières.

De ce théorème, on déduit le corollaire (immédiat) suivant :

COROLLAIRE 17. *Soit X comme dans le théorème ci-dessus. Si une orbite positive γ de X est bornée et que l' ω -limite de γ ne contient pas de points singuliers, alors c'est une orbite périodique.*

De ce corollaire on déduit la proposition suivante :

PROPOSITION 18. Soient $X \in \chi^\omega(U)$ un champ de vecteurs analytique et $\gamma \in U$ une orbite positive bornée de X dont l' ω -limite, $\omega(\gamma)$, ne contient pas de points singuliers. Alors, si $\omega(\gamma)$ n'est pas égale à γ , γ spirale autour de l'orbite périodique $\omega(\gamma)$ qui est alors un cycle limite.

DÉMONSTRATION. Puisque γ est une orbite positive bornée de X dont l' ω -limite contient pas de points singuliers, le corollaire 17 nous affirme que $\omega(\gamma)$ est une orbite périodique. Si γ n'est pas égale à $\omega(\gamma)$ il existe $p \in \gamma$ tel que $p \notin \omega(\gamma)$. De plus, $\omega(p) = \omega(\gamma)$. Donc $\omega(\gamma)$ à égale à l' ω -limite d'un point $p \in U$ tel que $p \notin \omega(\gamma)$. Par la proposition 14, on en déduit que $\omega(\gamma)$ est un cycle limite de X . \square

1.6.3. Critère de Dulac-Bendixson.

THÉORÈME 19. (**Critère de Dulac-Bendixson**) On considère le système dynamique $X \in \chi^r(U)$ suivant :

$$X := \begin{cases} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{cases}$$

Soit $D \subset U$ un ouvert simplement connexe. Si la divergence $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = \text{div}(X)$ n'est pas identiquement nulle et de signe constant sur D alors le système X n'admet pas d'orbite périodique entièrement contenue dans D . En particulier, X ne peut posséder aucun cycle limite entièrement contenu dans D .

DÉMONSTRATION. Supposons qu'il existe une orbite périodique $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ de X contenue dans D . On appelle Ω l'intérieur de γ . La preuve du critère repose sur la formule de Stokes qui dit que, pour toute 1-forme ω de classe C^1 sur D :

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\Omega} d\omega$$

On considère la 1-forme particulière $\omega = g(x, y)dx + f(x, y)dy$.

Alors $d\omega = -\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial g(x, y)}{\partial y}\right) dx \wedge dy = -\text{div}(X)dx \wedge dy$.

De plus, en notant T la période de γ , on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \text{div}(X) \, dx dy &= \int_{\gamma} \omega \\ &= \int_0^T \omega \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^T [g(x(t), y(t))\dot{x}(t) - f(x(t), y(t))\dot{y}(t)] dt \\ &= \int_0^T [g(x(t), y(t))f(x(t), y(t)) - f(x(t), y(t))g(x(t), y(t))] dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que s'il existe une orbite périodique pour X dans D alors soit $\operatorname{div}(X)$ est identiquement nulle ou bien $\operatorname{div}(X)$ change de signe sur D .

Et donc, par contraposée, le critère est démontré. \square

1.6.4. Théorème de Zhang Zhifen. On commence par donner la définition d'un système de Liénard généralisé.

DÉFINITION 20. Soit un système dynamique $X \in \chi^r(\mathbb{R}^2)$ du plan défini par :

$$X := \begin{cases} \dot{x} &= y - F(x) \\ \dot{y} &= -g(x) \end{cases}$$

où $F, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $F(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi$ pour une certaine fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Un tel système est appelé un **système de Liénard généralisé**.

Si on pose $G(x) = \int_0^x g(\xi) d\xi$, on a le théorème suivant (voir [11]) :

THÉORÈME 21. (*Théorème de Zhang Zhifen*) Supposons que F et g sont C^1 , $xg(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$, $G(\pm\infty) = \pm\infty$ et $\frac{f(x)}{g(x)}$ est croissante sur $] -\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ et non nulle dans un voisinage de $x = 0$. Alors le système X possède au plus un cycle limite dans le plan, et s'il existe, ce cycle limite est stable.

On termine cette section par une discussion sur le lien entre les coefficients de Lyapunov d'un système dynamique X du plan en une singularité non hyperbolique de type centre ou foyer faible et le nombre de cycles limites entourant cette singularité.

1.6.5. Cycles limites et coefficients de Lyapunov. On s'intéresse, dans cette section, au nombre de cycles limites qui peuvent localement entourer une singularité de type foyer faible (supposée être en l'origine) d'un champ de vecteurs $X \in \chi^r(U)$. Il est important de noter que d'autres cycles limites peuvent exister qu'on ne détectera pas avec une étude locale comme celle faite ici. On se place dans le cas où le champ de vecteurs considéré dépend d'un ou plusieurs paramètres et on démontre le théorème suivant :

THÉORÈME 22. Soit une famille de systèmes dynamiques $X_\lambda \in \chi^r(U)$ dépendant d'un paramètre $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^m$ où Λ un voisinage de 0 :

$$X_\lambda := \begin{cases} \dot{x} &= f(x, y, \lambda) \\ \dot{y} &= g(x, y, \lambda) \end{cases}$$

On suppose que X_0 possède un foyer faible d'ordre $k \geq 0$. Alors il existe des voisinages $\Lambda_0 \in \mathbb{R}^m$ de 0 et $U_0 \in \mathbb{R}^2$ de $(0, 0)$ tels que $\forall \lambda \in \Lambda_0$, X_λ possède au plus k cycles limites dans U_0 .

Pour la démonstration de ce théorème, on aura besoin du théorème suivant :

THÉORÈME 23. *Soit une fonction $f : \Lambda \times I \rightarrow \mathbb{R}$, où $0 \in \Lambda \subset \mathbb{R}^m$ et $0 \in I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de \mathbb{R} , telle que $f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dots = \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}(0,0) = 0$ et $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(0,0) \neq 0$. Alors il existe des voisinages $\Lambda_0 \subset \Lambda$ de $\lambda = 0$ et $I_0 \subset I$ de $x = 0$ tels que $\forall \lambda \in \Lambda_0$, $f(\lambda, x) = 0$ possède au plus n solutions dans I_0 .*

Ce théorème découle du théorème de Rolle que nous énonçons et démontrons maintenant :

THÉORÈME 24. (Théorème de Rolle) *Soit une application C^k $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I un intervalle de \mathbb{R} contenant 0. Si $f^{(n)}(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ alors f possède au plus n racines dans I .*

DÉMONSTRATION. On le montre par récurrence sur n .

Initialisation : Pour $n = 1$ on veut montrer que si $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ alors f possède au plus 1 racine dans I . Supposons que f possède 2 racines distinctes dans I , $x_1 < x_2$. Le théorème de la valeur intermédiaire affirme qu'il existe $x \in]x_1, x_2[$ tel que $f'(x) = 0$. C'est-à-dire qu'il existe $x \in I$ tel que $f'(x) = 0$, mais cela nous mène à une contradiction car on a supposé que $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.

Récurrence : Assumons le théorème pour n et montrons le pour $n+1$. Supposons que $f^{(n+1)}(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. Cela est équivalent à dire que $(f')^{(n)}(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. Par hypothèse de récurrence, cela entraîne que f' possède au plus n racines dans I . Donc, par le théorème de la valeur intermédiaire encore une fois, on en déduit que f possède au plus $n + 1$ racines dans I . Et le théorème est démontré. \square

Le reste de la section est consacrée à la démonstration du théorème 22.

DÉMONSTRATION. (Théorème 22)

En appliquant le théorème 10, puis en passant en coordonnées polaires, on sait qu'il existe un système de coordonnées dans lequel X_λ s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\theta} &= \beta + \sum_{k=0}^n q_k(\lambda) r^{2k} + O(r^{2n+2}) = T_\lambda(\theta, r) \\ \dot{r} &= r \left(\sum_{k=0}^n p_k(\lambda) r^{2k} + O(r^{2n+2}) \right) = r R_\lambda(\theta, r) \end{cases}$$

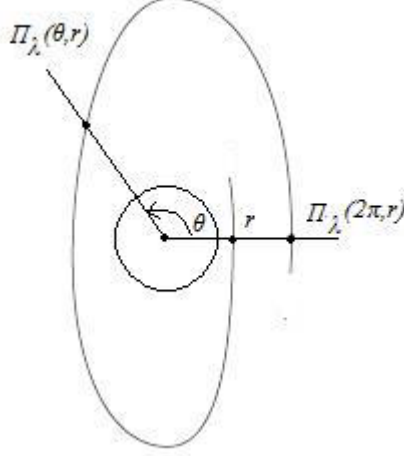
On considère l'équation différentielle

$$(*) \quad \frac{dr}{d\theta} = \frac{r R_\lambda(\theta, r)}{T_\lambda(\theta, r)} = F_\lambda(\theta, r)$$

Le développement de Taylor de F_λ au voisinage de l'origine est

$$F_\lambda(\theta, r) = r \left(\sum_{k=0}^n f_k(\lambda) r^{2k} + O(r^{2n+2}) \right)$$

avec $\forall i \in [0, n]$, $f_i \in C^r(\Lambda_0)$ telles que $f_0(0) = f_1(0) = \dots = f_{k-1}(0) = 0$ et $f_k(0) = \frac{p_k(0)}{\beta} \neq 0$. Soit $\Pi_\lambda(\theta, r)$ la solution de (*) avec comme condition initiale $\Pi_\lambda(0, r) = r$ et soit $P_\lambda(r) = \Pi_\lambda(2\pi, r)$. On est dans la situation suivante :



Le nombre de cycles limites de X_λ entourant localement l'origine correspond au nombre de solutions strictement positives de l'équation $P_\lambda(r) = r$. On montre facilement que, comme (*) s'écrit en fonction des puissances paires de r , le flot s'écrit également en fonction des puissances paires de r . Ainsi, avec l'expression de $F_\lambda(\theta, r)$, on déduit (voir [12]) que $P_\lambda(r)$ est une fonction de classe C^r qui s'écrit : $P_\lambda(r) = r(c_0(\lambda) + c_1(\lambda)r^2 + \dots + c_k(\lambda)r^{2k} + O(r^{2k+2}))$ avec $c_0(0) = c_1(0) = \dots = c_{k-1}(0) = 0$ et $c_k(0) \neq 0$. On a donc $Q_\lambda(r) = \frac{P_\lambda(r)-r}{r} = c_0(\lambda) - 1 + c_1(\lambda)r^2 + \dots + c_k(\lambda)r^{2k} + O(r^{2k+2})$. De plus, si on pose $r = \sqrt{|z|}$ on peut définir une fonction f par $f(\lambda, z) = Q_\lambda(\sqrt{z}) = c_0(\lambda) - 1 + c_1(\lambda)z + \dots + c_k(\lambda)z^k + O(z^{k+1})$. Le nombre de solutions strictement positives de l'équation $P_\lambda(r) = r$ est égal au nombre de solutions de l'équation $f(\lambda, z) = 0$. Comme $f(0, z) = Q_0(\sqrt{z}) = -1 + c_k(0)z^k + O(z^{k+1})$ avec $c_k(0) \neq 0$, on déduit du théorème 23 qu'il existe des voisinages Λ_0 de $\lambda = 0$ et I_0 de $z = 0$ tels que $\forall \lambda \in \Lambda_0$, $f(\lambda, z) = 0$ possède au plus k solutions dans I_0 . De plus, si $z \in I_0$ on a que $r \in J_0 = [0, r_0[$, pour un certain $r_0 > 0$. On définit alors $U_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{x^2 + y^2} < r_0\}$. Finalement, $\forall \lambda \in \Lambda_0$, X_λ possède au plus k cycles limites dans U_0 , et le théorème est démontré. \square

1.7. Bifurcations locales

1.7.1. Définition. On veut maintenant étudier deux exemples de bifurcations qui peuvent apparaître au voisinage d'une singularité non hyperbolique d'un système dynamique $X \in \chi^r(\mathbb{R}^2)$ du plan dépendant d'un ou plusieurs paramètres. On

considère un tel système

$$X_\lambda := \begin{cases} \dot{x} &= f(x, y, \lambda) \\ \dot{y} &= g(x, y, \lambda) \end{cases}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}^m$. Soit $p^* \in \mathbb{R}^2$ une singularité non hyperbolique du système X_{λ^*} . On peut se poser plusieurs questions. D'abord, est-ce que ce point singulier est stable ou instable ? Mais surtout, comment cette stabilité ou cette instabilité est-elle affectée par la variation du paramètre λ au voisinage de λ^* ? Avant d'y répondre, on donne une définition de la notion de bifurcation. On considère une famille de systèmes $X_\lambda \in \chi^r(\mathbb{R}^2)$ dépendant d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^m$.

DÉFINITION 25. On dit que λ^* est une **valeur de bifurcation** de la famille de systèmes X_λ si dans tout voisinage $V \in \mathbb{R}^m$ de λ^* il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in V$ tels que X_{λ_1} et X_{λ_2} ne sont pas topologiquement équivalents.

Dans ce mémoire, on dira que la famille X_λ a une **bifurcation en un point singulier non hyperbolique** $p^* \in \mathbb{R}^2$ pour le système X_{λ^*} , si dans tout voisinage $V \in \mathbb{R}^m$ de λ^* il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in V$ tels que X_{λ_1} et X_{λ_2} ne sont pas topologiquement équivalents au voisinage de p^* . On dit alors que λ^* est une **valeur de bifurcation** et que p^* est un **point de bifurcation**.

On donne maintenant deux exemples de bifurcations : la bifurcation noeud-col et la bifurcation de Hopf. Pour faciliter les explications, on se place dans le cas où m est égal à 1. De plus, on ne donne pas ici de définition exacte de ces bifurcations, on se contente d'en donner un exemple. Le but étant de les comprendre, sans forcément les connaître en détails (voir [10] pour les définitions exactes).

1.7.2. Bifurcation noeud-col. L'exemple le plus simple de bifurcation noeud-col est le suivant. On considère la famille de systèmes dynamiques du plan suivante :

$$X_\lambda := \begin{cases} \dot{x} &= x^2 - \lambda \\ \dot{y} &= y \end{cases}$$

On a $X_0(0,0) = (0,0)$ et $DX_0(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc l'origine est un point singulier non hyperbolique de type noeud-col du système. On veut alors étudier la manière dont la stabilité de l'origine varie en fonction de la variation du paramètre $\lambda \simeq 0$. L'ensemble des points singuliers du système sont les solutions de l'équation $X_\lambda(x, y) = (0,0)$ c'est-à-dire ici les solutions de

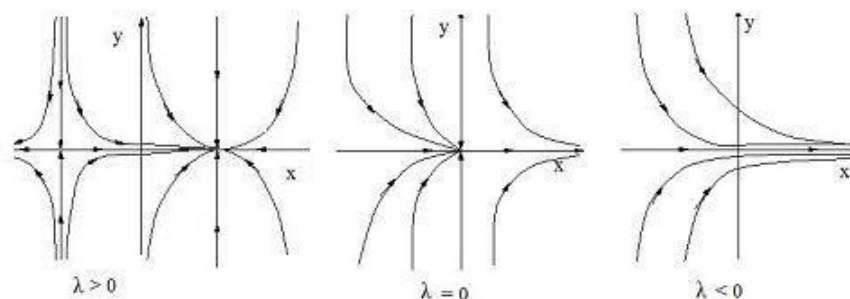
$$\begin{cases} \lambda - x^2 &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$$

$\iff \lambda = x^2$ et $y = 0$. On a alors différents cas selon les valeurs de λ .

- Si $\lambda < 0$ le système X_λ ne possède pas de points singuliers
- Si $\lambda = 0$ le système X_0 possède un point singulier non hyperbolique double à l'origine
- Si $\lambda > 0$ le système X_λ possède deux points singuliers hyperboliques $(\sqrt{\lambda}, 0)$ et $(-\sqrt{\lambda}, 0)$ et ces deux points singuliers sont instables.

En effet $DX_\lambda(\sqrt{\lambda}, 0) = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ possède deux valeurs propres réelles strictement positives, c'est donc un noeud, plus précisément une source, et il est donc instable. Et $DX_\lambda(-\sqrt{\lambda}, 0) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ possède deux valeurs propres réelles de signes opposés, c'est donc un point selle et il est donc instable également.

Avec une étude plus poussée, mais sans difficultés, des équations du système, on obtient finalement le **diagramme de bifurcation** suivant :



L'origine est donc un point de bifurcation et la valeur $\lambda = 0$ est une valeur de bifurcation. On appelle cette bifurcation particulière, où l'on passe de 2 à 1 puis 0 singularité pour le système X_λ , une **bifurcation noeud-col** (de codimension 1). Il existe également une bifurcation appelée **bifurcation noeud-col pour les cycles limites** dont on ne donnera pas d'exemple mais dont on veut comprendre l'idée. On suppose que la valeur de bifurcation est $\lambda = 0$ et soit p^* le point de bifurcation qui est une singularité non hyperbolique de type noeud-col de X_0 . La bifurcation noeud col pour les cycles limites correspondant à l'exemple de bifurcation noeud-col vu ci-dessus est la suivante : On passe de 2 cycles limites entourant p^* (un stable, un instable) pour X_λ avec $\lambda \gtrsim 0$, à 1 cycle limite entourant p^* (semi-stable) pour X_0 , puis 0 cycle limite entourant p^* pour X_λ avec $\lambda \lesssim 0$. Dans ce cas le point p^* est un point singulier hyperbolique des systèmes X_λ avec $\lambda \neq \lambda^*$.

1.7.3. Bifurcation de Hopf. De façon intuitive, on peut dire qu'une bifurcation de Hopf est une bifurcation dans laquelle :

- Soit un point singulier asymptotiquement stable perd sa stabilité et où un cycle limite stable apparaît autour de ce point singulier. On appelle ce cas une **bifurcation de Hopf super-critique** (de codimension 1).

- Soit un point singulier instable gagne sa stabilité et où un cycle limite instable apparait autour de ce point singulier. On appelle ce cas une **bifurcation de Hopf sous-critique** (de codimension 1).

EXEMPLE. On considère la famille de systèmes dynamiques du plan suivante :

$$X_\lambda := \begin{cases} \dot{x} &= -y + (-(x^2 + y^2) + \lambda)x \\ \dot{y} &= x + (-(x^2 + y^2) + \lambda)y \end{cases}$$

La matrice du système linéaire associé à X_λ en $(0, 0)$ est

$$DX_\lambda(0, 0) = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

On a $X_0(0, 0) = (0, 0)$ et $DX_0(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc l'origine est un point singulier non hyperbolique du système X_0 . C'est un point de bifurcation puisqu'on va voir qu'une bifurcation de Hopf super-critique se produit en $(0, 0)$ quand $\lambda \simeq 0$ varie. On remarque que $DX_\lambda(0, 0) = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$ et donc, si $\lambda \neq 0$, l'origine est une singularité hyperbolique du système X_λ et on peut donc appliquer le théorème de Hartman-Grobman pour connaître sa stabilité et son type topologique. Le polynôme caractéristique de la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$ est $Q(Y) = (\lambda - Y)^2 + 1 = (Y - (\lambda + i))(Y - (\lambda - i))$. Ses valeurs propres sont donc $\lambda + i$ et $\lambda - i$, deux nombres complexes conjugués donc la partie réelle est λ . On a alors différents cas selon la valeur de λ .

1. Si $\lambda < 0$, le point $(0, 0)$ est un foyer attracteur, c'est donc un point singulier hyperbolique localement asymptotiquement stable du système X_λ .

2. Si $\lambda = 0$, le point $(0, 0)$ est un point singulier non hyperbolique de X_0 (celui que l'on étudie...) et il faut utiliser une autre technique pour connaître sa stabilité et son type topologique.

3. Si $\lambda > 0$, le point $(0, 0)$ est un foyer répulseur, c'est donc un point singulier hyperbolique instable du système X_λ .

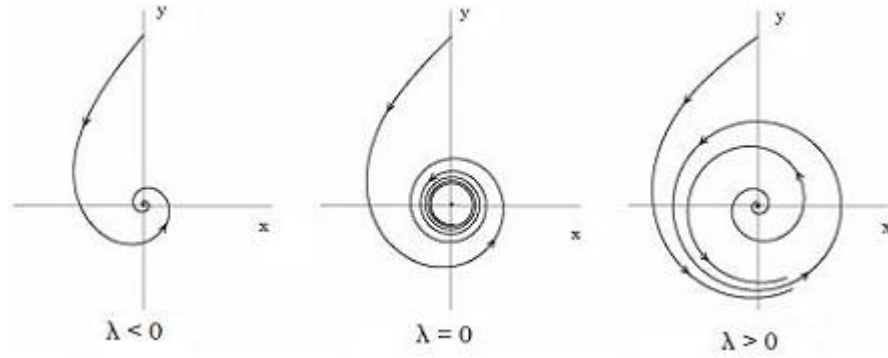
On remarque que l'on passe d'une singularité stable pour $\lambda \lesssim 0$ à une singularité instable pour $\lambda \gtrsim 0$. On est donc en présence de deux dynamiques différentes pour le système X_λ , au voisinage de $(0, 0)$, d'un côté et de l'autre de $\lambda = 0$. Cela fait bien de $\lambda = 0$ une valeur de bifurcation de la famille de systèmes X_λ .

Pour connaître la stabilité et le type topologique de la singularité $(0, 0)$ de X_0 et pour prouver l'existence d'un cycle limite stable entourant l'origine si $\lambda \gtrsim 0$, on passe en coordonnées polaires. On pose $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$ et on obtient la

famille de systèmes

$$P_\lambda := \begin{cases} \dot{r} &= -r^3 + \lambda r \\ \dot{\theta} &= 1 \end{cases}$$

Si $\lambda = 0$ le système devient $\begin{cases} \dot{r} &= -r^3 \\ \dot{\theta} &= 1 \end{cases}$ si bien que $\dot{r} < 0$ pour tout r et donc le point $(0, \theta)$ est un foyer attracteur, c'est-à-dire un point singulier asymptotiquement stable du système P_0 . On en déduit que c'est également le cas pour la singularité en l'origine de X_0 . De plus, si $\lambda > 0$, on a que : $\dot{r} = 0$ pour $r = \sqrt{\lambda}$, \dot{r} est négatif si $r > \sqrt{\lambda}$ et \dot{r} est positif si $r < \sqrt{\lambda}$. On déduit de cela que le cercle de rayon $\sqrt{\lambda}$ est un cycle limite stable pour le système P_λ et donc également pour le système X_λ . Finalement, on obtient le diagramme de bifurcation suivant :



CHAPITRE 2

Vers le modèle proie-prédateur de Holling-Tanner

On commence par définir ce qu'est la réponse fonctionnelle d'un prédateur et par donner la classification de cette réponse fonctionnelle en trois types selon Holling.

2.1. La réponse fonctionnelle d'un prédateur

Dans le cadre de l'étude des interactions entre des prédateurs et leurs proies, la réponse fonctionnelle (ou fonction réponse) d'un prédateur peut être vue comme le taux de consommation des proies par un prédateur en une unité de temps, en fonction de la densité de proies présentes. Elle se retrouve dans l'équation associée aux proies, d'un modèle proie-prédateur, sous la forme d'une application $p(x)$. Si on note $x(t)$ la densité des proies et $y(t)$ celle des prédateurs au temps t , les variations en fonction du temps de ces deux densités sont représentées par le système suivant :

$$\begin{cases} x(t + T_t) - x(t) &= \bar{f}(x(t)) - \bar{p}(x(t))y(t) \\ y(t + T_t) - y(t) &= \bar{g}(y(t)) + \bar{q}(x(t), y(t)) \end{cases}$$

avec :

- $\bar{f}(x(t))$ la fonction de croissance naturelle des proies dans un intervalle de temps T_t
- $\bar{g}(y(t))$ la fonction de décroissance naturelle des prédateurs dans un intervalle de temps T_t
- $\bar{p}(x(t))$ la fonction réponse d'un prédateur dans un intervalle de temps T_t
- $\bar{q}(x(t), y(t))$ la fonction de croissance des prédateurs, en fonction de la densité des proies présentes, dans un intervalle de temps T_t

Pour définir la fonction réponse d'un prédateur, on cherche d'abord à résoudre le problème suivant : étant donné un intervalle de temps T_t fixé, on se demande combien de proies un prédateur peut-il consommer dans ce laps de temps. Holling proposa une classification de cette réponse fonctionnelle en trois types. Nous nous intéresserons surtout aux deux premiers qui correspondent respectivement au modèle de Lotka-Volterra et à celui de Holling-Tanner que nous allons étudier par la suite.

Afin d'obtenir une dynamique continue, on divise les deux membres des équations ci-dessus par T_t et on fait tendre T_t vers 0. On obtient le système suivant :

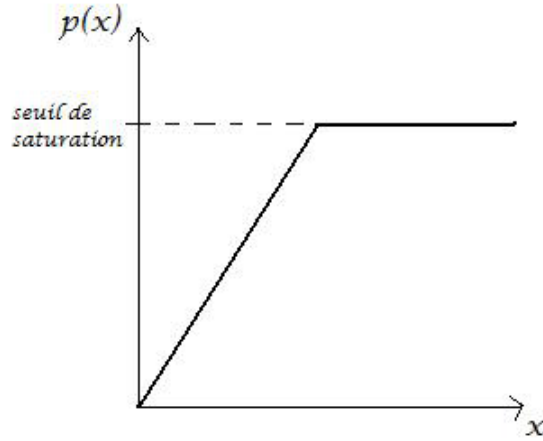
$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \lim_{T_t \rightarrow 0} \frac{x(t+T_t) - x(t)}{T_t} = \lim_{T_t \rightarrow 0} \left(\frac{\bar{f}(x(t))}{T_t} - \frac{\bar{p}(x(t))}{T_t} y(t) \right) \\ \dot{y}(t) &= \lim_{T_t \rightarrow 0} \frac{y(t+T_t) - y(t)}{T_t} = \lim_{T_t \rightarrow 0} \left(\frac{\bar{g}(x(t))}{T_t} - \frac{\bar{q}(x(t), y(t))}{T_t} \right) \end{cases}$$

On définit alors la réponse fonctionnelle d'un prédateur par $p(x) = \lim_{T_t \rightarrow 0} \frac{\bar{p}(x)}{T_t}$.

2.1.1. Réponse fonctionnelle de type I. Le type I de réponse fonctionnelle correspond à une croissance linéaire : $\bar{p}(x)$ est proportionnelle à la densité des proies présentes. On fait simplement l'hypothèse, dans ce cas, que la probabilité pour un prédateur de rencontrer une proie dans l'intervalle de temps T_t , dépend linéairement de la densité de proies présentes. On assume aussi, dans ce cas, que le temps pris par le prédateur pour consommer sa proie est négligeable. Ainsi, le temps T_t correspond entièrement au temps que le prédateur possède pour la recherche de nourriture. On obtient que le nombre de proies consommées par un prédateur dans l'intervalle de temps T_t est $\bar{p}(x) = aT_tx$ où x est la densité des proies et a une constante de proportionnalité.

Alors, la réponse fonctionnelle de type I proposée par Holling est $p(x) = \lim_{T_t \rightarrow 0} \frac{\bar{p}(x)}{T_t} = \lim_{T_t \rightarrow 0} \frac{aT_tx}{T_t} = ax$.

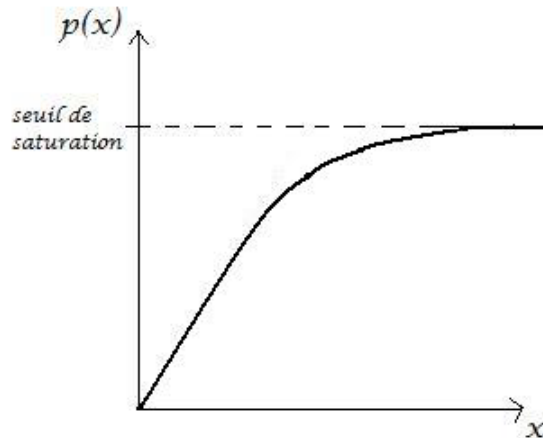
REMARQUE. Une variation de ce type I est de considérer que la croissance linéaire atteint un seuil maximum, dit de saturation, au dessus duquel $p(x)$ devient constant. Cette variation semble plus réaliste. En effet, plus il y a de proies présentes, moins le prédateur mettra de temps à les trouver et les consommer, cela semble logique. Mais quand la population des proies devient trop importante, il est physiquement impossible pour un prédateur, dans le temps de recherche qu'il possède, de les consommer de façon linéaire. On trace le graphe de $p(x)$ dans ce cas :



2.1.2. Réponse fonctionnelle de type II. Le type II de réponse fonctionnelle est similaire à la variation du type I mais avec une décélération progressive de $p(x)$ (la saturation n'apparaît pas d'un coup mais progressivement). De plus ici, on prend en compte le temps que met le prédateur à consommer sa proie une fois trouvée. Si l'on note b le temps pris par un prédateur pour consommer sa proie, on a que le temps de recherche de nourriture qu'il possède réellement se réduit à $T_s = T_t - b\bar{p}(x)$. On a alors $\bar{p}(x) = aT_s x = a(T_t - b\bar{p}(x))x$ et cela implique :

$$\bar{p}(x) = \frac{aT_t x}{1 + abx}$$

Alors, la réponse fonctionnelle de type II proposée par Holling est $p(x) = \frac{ax}{1+abx} = \frac{\frac{1}{b}x}{\frac{1}{ab}+x}$. On trace le graphe de $p(x)$ dans ce cas :



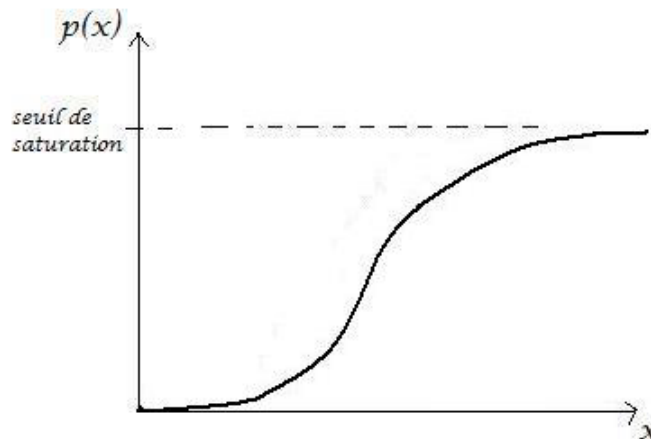
2.1.3. Réponse fonctionnelle de type III. Le type III de réponse fonctionnelle est similaire à celle de type II dans le sens où :

- on prend en compte le temps de consommation b d'une proie par le prédateur une fois qu'il l'a trouvée.
- quand la densité des proies présentes est trop élevée, il se produit un phénomène de saturation et cette saturation est progressive.

La différence se voit quand la densité des proies présentes est faible. En effet : à faible densité de proies, la réponse de type II va maximiser le nombre de proies consommées (en d'autres termes le prédateur cause une mortalité maximum dans la population des proies) et lorsque la densité de proies augmente, la saturation leur empêche de consommer un trop grand nombre de proies. Pour la réponse type III, on considère qu'à faible densité de proies, la chance pour un prédateur de trouver une proie est faible. Les prédateurs n'en consomment donc pas un grand nombre et les proies ont donc la possibilité de se développer. Dès que la densité de proies présentes augmente les prédateurs vont maximiser le nombre de proies consommées et donc empêcher que les proies se développent trop, jusqu'à arriver à saturation. Dans ce cas, la formule explicite qui nous donne le nombre de proies consommées durant l'intervalle de temps T_t est :

$$\bar{p}(x) = \frac{aT_tx^2}{1 + abx^2}$$

Alors, la réponse fonctionnelle de type III proposée par Holling est $p(x) = \frac{ax^2}{1+abx^2}$. On trace le graphe de $p(x)$ dans ce cas :



On peut maintenant passer à l'étude d'un premier modèle proie-prédateur, celui de Lotka-Volterra.

2.2. Le modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra

Ce modèle a été proposé par Alfred James Lotka et Vito Volterra en 1925 et 1926. Il est défini par un couple d'équations différentielles et a pour but de décrire l'interaction entre un prédateur et sa proie.

Il s'écrit :

$$LV := \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} &= x(t)(\alpha - \beta y(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -y(t)(\delta - \gamma x(t)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(0) &= x_0 \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

où :

- t le temps
- $x(t)$ et $y(t)$ les densités des proies et des prédateurs (resp.) au temps t
- $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ quatre paramètres réels strictement positifs
- x_0 et y_0 les densités initiales des proies et des prédateurs (resp.)

Le but est alors de connaître l'évolution des quantités x et y au cours du temps (la variation de la densité des populations au cours du temps est représentée par $\frac{dx(t)}{dt}$ et $\frac{dy(t)}{dt}$). Restent-elles des quantités strictement positives au cours du temps ? Etc...

2.2.1. Étude des équations du système. Du côté des proies, l'équation est la suivante :

$$(2.2.1) \quad \frac{dx(t)}{dt} = x(t)(\alpha - \beta y(t))$$

On suppose que les proies ont une source illimitée de nourriture, qu'il n'y a pas de compétition entre elles et qu'elles ont une croissance exponentiellement rapide au cours du temps en l'absence de prédateurs. Cette dernière hypothèse se voit dans l'équation (2.1.1) : si $y(t) = 0$ (il n'y a pas de prédateurs) alors (2.1.1) devient $\frac{dx(t)}{dt} = x(t)\alpha$ qui a pour solution $x(t) = x_0 \exp(\alpha t)$. Cela caractérise bien cette croissance exponentielle. On déduit de cela que α est le taux de croissance intrinsèque des proies (en l'absence de prédateurs).

Le paramètre β représente le taux de prédation (le taux de mortalité des proies due aux prédateurs). En effet, le terme $\beta x(t)y(t)$, qui prend en compte la fréquence de rencontre entre les prédateurs et les proies, caractérise la décroissance de la population des proies due à la prédation. On note que $p(x) = \beta x$ est une réponse fonctionnelle de type I selon la classification de Holling vue précédemment.

Finalement, la variation de la densité des proies est donnée par leur croissance intrinsèque, diminuée de la réponse fonctionnelle d'un prédateur qui leurs est appliquée.

Du côté des prédateurs, l'équation est la suivante :

$$(2.2.2) \quad \frac{dy(t)}{dt} = -y(t)(\delta - \gamma x(t))$$

REMARQUE. L'étude est analogue à celle des proies.

Si $x(t) = 0$ (il n'y a pas de proies) alors (2.1.2) devient $\frac{dy(t)}{dt} = -y(t)\delta$ qui a pour solution $y(t) = y_0 \exp(-\delta t)$. Cela caractérise une décroissance exponentielle. Le terme $-\delta y(t)$ caractérise donc la mort naturelle des prédateurs en l'absence de proies. On déduit de cela que δ est le taux de mortalité intrinsèque des prédateurs (en l'absence de proies).

Le paramètre γ représente le taux de croissance des prédateurs en fonction des proies. En effet, le terme $\gamma y(t)x(t)$ caractérise la croissance de la population des prédateurs. Il prend en compte la fréquence de rencontre entre les prédateurs et les proies. On voit une similarité avec le taux de prédation mais la constante utilisée n'est pas la même puisque la vitesse à laquelle la population des prédateurs augmente n'est pas nécessairement égale à celle à laquelle ils consomment les proies.

Finalement, la variation de la densité des prédateurs est donnée par leur croissance en présence de proies diminuée du nombre de morts naturelles.

2.2.2. Les singularités du système. Le point (x, y) est une singularité du champ de vecteurs LV s'il vérifie

$$(2.2.3) \quad \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = 0 \\ \frac{dy(t)}{dt} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(t)\alpha - \beta x(t)y(t) = 0 \\ -y(t)\delta + \gamma x(t)y(t) = 0 \end{cases}$$

Les solutions de (2.2.3) sont $(0, 0)$ et $(\frac{\delta}{\gamma}, \frac{\alpha}{\beta})$. La matrice du système linéaire associé à LV en un point (x, y) est :

$$DLV(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y(t) & -\beta x(t) \\ \gamma y(t) & \gamma x(t) - \delta \end{pmatrix}$$

(Premier point singulier). En $(0, 0)$ on a $DLV(0, 0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\delta \end{pmatrix}$ qui a pour valeurs propres α et $-\delta$. Les paramètres δ et α sont strictement positifs et il s'en suit que

- (1) La singularité $(0, 0)$ est hyperbolique, on peut donc appliquer le théorème de Hartman-Grobman.
- (2) Les valeurs propres de $DLV(0, 0)$ sont toujours de signe opposé et donc la singularité est un point selle.

En particulier, $(0, 0)$ est un point singulier instable et cela montre que l'extinction des deux espèces est difficile à obtenir. En fait, cela est même impossible, sauf si $x_0 = 0$, mais cette dernière condition n'est pas en accord avec la réalité. On a finalement la proposition suivante :

PROPOSITION 26. *Si $x_0, y_0 > 0$ alors $x(t), y(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$.*

(Deuxième point singulier). En $\left(\frac{\delta}{\gamma}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ on a $DLV\left(\frac{\delta}{\gamma}, \frac{\alpha}{\beta}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-\beta\delta}{\gamma} \\ \frac{\gamma\alpha}{\beta} & 0 \end{pmatrix}$

Les valeurs propres de $DLV\left(\frac{\delta}{\gamma}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ sont $i\sqrt{\alpha\delta}$ et $-i\sqrt{\alpha\delta}$ et il s'en suit que la singularité $\left(\frac{\delta}{\gamma}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ est une singularité non hyperbolique de type centre ou foyer faible. On ne peut pas utiliser le théorème de Hartman-Grobman pour connaître sa stabilité et une autre astuce doit être trouvée. Dans ce cas particulier, la fonction $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $H(x, y) = \gamma x - \delta \ln(x) + \beta y - \alpha \ln(y)$ est une intégrale première non constante pour le système LV . En effet, si $(x(t), y(t))$ est solution du système LV , alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) &= \gamma \frac{d}{dt}x(t) - \delta \frac{1}{x(t)} \frac{d}{dt}x(t) + \beta \frac{d}{dt}y(t) - \alpha \frac{1}{y(t)} \frac{d}{dt}y(t) \\ &= \gamma x(t)\alpha - \gamma \beta x(t)y(t) - \delta \frac{1}{x(t)}x(t)\alpha + \delta \frac{1}{x(t)}\beta x(t)y(t) \\ &\quad - \beta y(t)\delta + \beta \gamma x(t)y(t) + \alpha \frac{1}{y(t)}y(t)\delta - \alpha \frac{1}{y(t)}\gamma x(t)y(t) \\ &= \gamma \alpha x(t) - \gamma \beta x(t)y(t) - \delta \alpha + \delta \beta y(t) \\ &\quad - \beta y(t)\delta + \beta \gamma x(t)y(t) + \alpha \delta - \alpha \gamma x(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

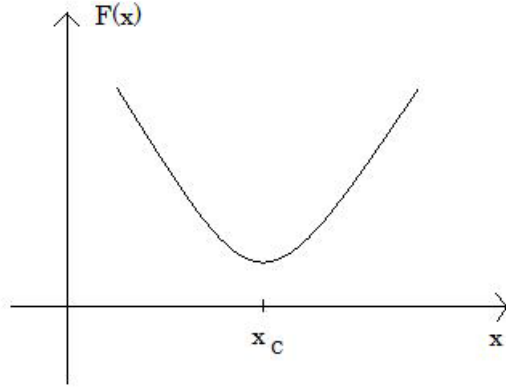
et donc si $(x(t), y(t))$ est solution du système LV , $H(x(t), y(t)) = cste$.

LEMME. *Les courbes de niveau de cette intégrale première sont des courbes fermées autour du point d'équilibre $\left(\frac{\delta}{\gamma}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$.*

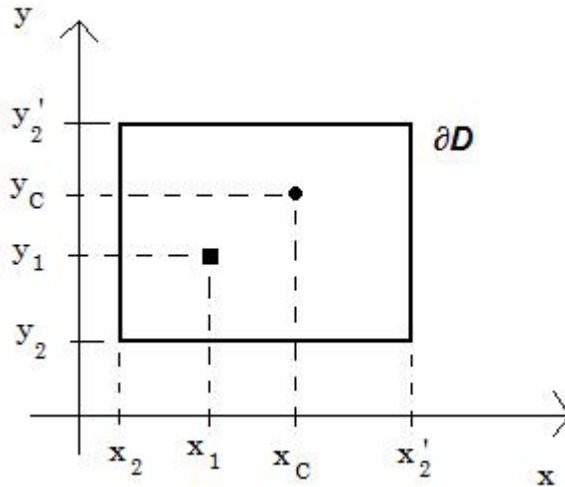
DÉMONSTRATION. Écrivons la fonction $H(x, y) = \gamma x - \delta \ln(x) + \beta y - \alpha \ln(y) = F(x) + G(y)$ où $F(x) = \gamma x - \delta \ln(x)$ et $G(y) = \beta y - \alpha \ln(y)$. Le seul point critique de cette fonction est $\left(\frac{\delta}{\gamma}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$. En effet $\frac{\partial H}{\partial x} = \gamma - \frac{\delta}{x}$ et $\frac{\partial H}{\partial y} = \beta - \frac{\alpha}{y}$ donc

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

a comme unique solution $\left(\frac{\delta}{\gamma}, \frac{\alpha}{\beta}\right) := (x_c, y_c)$. Comme $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\delta}{x^2} > 0$ et $\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \frac{\alpha}{y^2} > 0$ on sait que $H_c = H(x_c, y_c)$ est un minimum local pour la fonction H . On peut tracer, par exemple, l'allure du graphe de $F(x)$:



Soit maintenant $H_1 = H(x_1, y_1)$, où (x_1, y_1) appartient au premier quadrant du plan, tel que $H_c < H_1$. Soit également Γ_1 la composante connexe de l'ensemble $\{(x, y) \in (\mathbb{R}^2)_*^+ / H(x, y) = H_1\}$ qui contient (x_1, y_1) . Le théorème de la valeur régulière nous dit alors, puisque H_1 est une valeur régulière, que $H^{-1}(H_1)$ est une sous variété fermée de $(\mathbb{R}^2)_*^+$ de codimension 1, c'est-à-dire, de dimension 1. Donc, soit $\Gamma_1 \approx \mathbb{S}^1$, soit $\Gamma_1 \approx \mathbb{R}$. Pour montrer ce que l'on souhaite, il ne reste plus qu'à montrer que le cas $\Gamma_1 \approx \mathbb{R}$ n'arrive pas. Trouvons, pour cela, une partie $D \in (\mathbb{R}^2)_*^+$ bornée, contenant (x_1, y_1) telle que $H|_{\partial D} > H_1$. On choisit d'abord $0 < y_2 < y_1$ tel que $G(y_2) + F(x_c) > H_1$ et $0 < x_2 < x_1$ tel que $F(x_2) + G(y_c) > H_1$. On peut le faire puisque $\lim_{y \rightarrow 0} G(y) = \infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \infty$. On trouve ensuite x'_2 tel que $F(x_2) = F(x'_2)$ (x'_2 existe puisque $x_2 \neq x_c$ et $F(x_c)$ est un minimum globale pour la fonction F). Et de même, on trouve y'_2 tel que $G(y_2) = G(y'_2)$. Alors $D = [x_2, x'_2] \times [y_2, y'_2]$ vérifie ce que l'on veut, c'est-à-dire $H|_{\partial D} > H_1$. On est dans la situation suivante :



Sur $[x_2, x'_2] \times \{y_2\}$ par exemple, $H(x, y) = F(x)|_{x_2 < x < x'_2} + G(y_2)$. Donc $F(x_c) + G(y_2) \leq F(x) + G(y_2) = H(x, y_2)$. Alors, dans ce cas, $H(x, y_2) \geq F(x_c) + G(y_2) > H_1$ par hypothèse.

Les trois autres cas sont similaires. Et finalement, le lemme est prouvé. \square

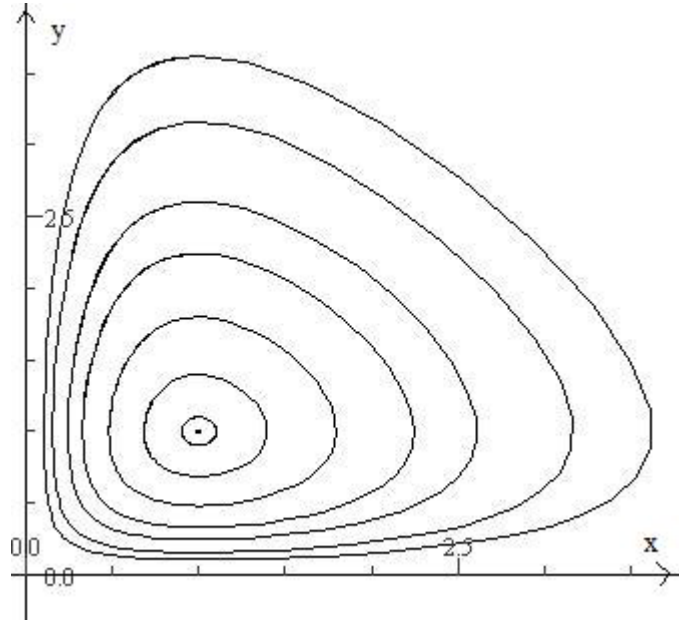
On sait que les courbes de niveau d'une intégrale première d'un système sont une union de trajectoires régulières et de points singuliers de ce dernier. Il s'en suit que le point singulier $(\frac{\delta}{\gamma}, \frac{\alpha}{\beta})$ est un centre. En particulier, il est stable.

De ce lemme, on déduit un théorème important dans l'étude des solutions du système LV :

THÉORÈME 27. *Avec les conditions initiales $x_0, y_0 > 0$ les solutions du système LV sont périodiques, leurs trajectoires sont des courbes fermées.*

DÉMONSTRATION. Le lemme nous affirme que les trajectoires sont des courbes fermées. La périodicité des solutions découle alors du fait que le système est un système autonome. \square

A l'aide d'un logiciel, on trace le portrait de phase du système de Lotka-Volterra dans le cas où $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$. Cela nous donne :



D'un point de vue biologique, on a l'interprétation suivante : Les prédateurs prospèrent lorsque les proies sont nombreuses mais finissent par épuiser leurs ressources et déclinent. Lorsque la population prédatrice a suffisamment diminué, les proies en profitent pour se reproduire et leur population augmente à nouveau. Et cette dynamique se poursuit à l'infini...

2.2.3. Conclusion. Le modèle de Lotka-Volterra est l'un des premiers exemples de modèle proie-prédateur. C'est un domaine de recherche de plus en plus actif qui aujourd'hui développe des modèles beaucoup plus compliqués, comme celui de Holling-Tanner, qui fait l'objet du chapitre 3. Le système de Lotka-Volterra contient beaucoup de simplifications et n'est pas très réaliste. Par exemple, on peut penser qu'il est irréaliste de considérer que le nombre de proies en l'absence de prédateurs augmente indéfiniment et que les proies possèdent une source illimitée de nourriture. On peut alors décider qu'il y aura une compétition au sein même de la population des proies et ajouter à la première équation du système de Lotka-Volterra un terme du type $-Cx^2$, où C une certaine constante. Cela caractériserait la décroissance naturelle des proies en l'absence de prédateurs (le facteur x^2 représente la fréquence de rencontres entre les proies et les proies). Ainsi, pour tendre vers quelque chose de plus réaliste, on reformule les hypothèses considérées pour le modèle de Lotka-Volterra et on en formule de nouvelles. Cela nous mène au modèle de Holling-Tanner. On remarque que les dynamiques du système de Lotka-Volterra sont qualitativement indépendantes des paramètres de ce dernier. Peu importe les valeurs des paramètres α, β, γ et δ , les systèmes dynamiques associés seront tous topologiquement équivalents dans le premier quadrant du plan. Ce n'est plus le cas pour le système de Holling-Tanner. De plus, l'étude ci-dessus montre que le système de Lotka-Volterra ne possède aucun cycle limite. Par contre, nous allons le voir, il existe certaines conditions sur les paramètres qui entraînent l'existence d'un ou plusieurs cycles limites pour le système de Holling-Tanner. Ce sont ces cas particuliers (et plutôt rares finalement) qui vont attirer notre attention. En particulier, pour obtenir des conclusions intéressantes d'un point de vue biologique, on s'intéresse à l'existence de cycles limites stables. On peut maintenant passer à l'étude du modèle proie-prédateur de Holling-Tanner.

CHAPITRE 3

Le modèle proie-prédateur de Holling-Tanner

3.1. Introduction

On considère la réponse fonctionnelle de type II selon le classement de Holling : $p(x) = \frac{mx}{x+A}$, et on étudie le modèle proie-prédateur proposé par Tanner, appelé Holling-Tanner,

$$HT := \begin{cases} \dot{x} &= xr \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{mxy}{x+A} \\ \dot{y} &= sy \left(1 - h\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

avec $(x, y) \in \mathcal{A} = \{(x, y)/x > 0, y \geq 0\}$ et $\lambda = (r, K, m, A, s, n) > 0$

Dans le système HT , $x(t)$ et $y(t)$ désignent la densité des proies et des prédateurs respectivement, en fonction du temps. Le but de ce chapitre est l'étude de ce système. On cherche à connaître le plus possible l'allure de son portrait de phase. Bien entendu, cette étude est beaucoup plus délicate que celle du système de Lotka-Volterra. En effet, la stabilité et le type des singularités de HT dépendent du paramètre λ . De même, l'existence ou la non existence d'un ou plusieurs cycles limites dépend des paramètres du système. Ainsi, HT_{λ_1} et HT_{λ_2} où $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ne seront pas forcément topologiquement équivalents. On a alors des phénomènes de bifurcation qui se produisent par variation des paramètres. En particulier, des conclusions différentes apparaissent alors d'un point de vue biologique sur l'évolution des deux populations en présence au cours du temps. On se concentre ici sur l'étude des singularités du système en fonction des paramètres, mais surtout, on essaye de trouver qu'elles sont les conditions sur les paramètres qui nous donnent l'existence d'un ou plusieurs cycles limites.

3.2. Étude des équations du système

Regardons d'abord plus en détail chacun des termes de ces équations pour mieux comprendre ce que représentent les paramètres r, K, m, A, s, n .

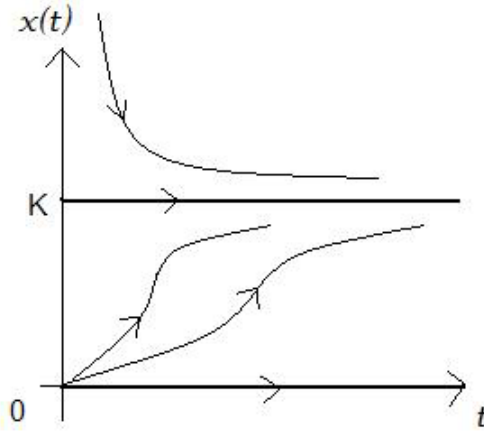
3.2.1. Du côté des proies. L'équation est

$$\dot{x} = xr - \frac{x^2r}{K} - \frac{mxy}{x+A}$$

Le terme xr représente, comme pour le modèle de Lotka-Volterra, la croissance naturelle des proies (en supposant qu'ils ont une source illimitée de nourriture et en

l'absence de prédateurs), c'est une croissance exponentielle. On a donc que r est le taux de croissance intrinsèque des proies.

Le terme $-\frac{x^2 r}{K}$ représente la décroissance naturelle des proies (en l'absence de prédateurs). On peut voir le terme x^2 comme représentant "la rencontre entre les proies et les proies". Étudions le champ de vecteurs unidimensionnel défini par $f(x) = xr - \frac{x^2 r}{K} = xr \left(1 - \frac{x}{K}\right)$. Ses singularités sont les solutions de $f(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = K$. Si $x_0 < K$, $f(x) > 0$ et si $x_0 > K$, $f(x) < 0$. On obtient alors le portrait de phase suivant :



On voit alors mieux ce que représente K . Quand le nombre de proies atteint K , \dot{x} va devenir négative, si bien que le nombre de proies va se mettre à diminuer naturellement. On peut imaginer que si leur nombre devient trop élevé, il y aura une compétition au sein même de la population des proies, pour la nourriture par exemple. On dit que K est la capacité environnementale maximale des proies.

REMARQUE. Ce type particulier de champ de vecteurs est appelé un modèle logistique de croissance avec seuil $x(t) = K$.

Le terme $\frac{mx}{x+A}y := p(x)y$ représente la décroissance des proies due à la prédation. L'application $p(x)$ est la réponse fonctionnelle d'un prédateur qui correspond ici à une réponse fonctionnelle de type II selon le classement de Holling. On a que $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = m$ et que $p(A) = \frac{m}{2}$. Ainsi, on peut dire que m est le nombre maximal de proies qui peut être consommé par un prédateur à chaque unité de temps, ou autrement dit, c'est le nombre de proies nécessaires pour que le taux de consommation des proies par un prédateur arrive à saturation. De plus, A est le nombre de proies nécessaires pour atteindre la moitié de m . On l'appelle la constante de demie-saturation.

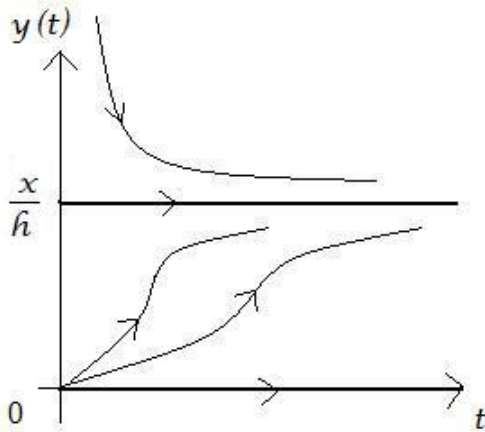
3.2.2. Du côté des prédateurs. L'équation est

$$\dot{y} = sy - \frac{hsy^2}{x}$$

REMARQUE. L'étude est analogue à celle menée pour les proies.

Le terme sy représente la croissance naturelle des prédateurs (en supposant de bonnes conditions environnementales, notamment la présence suffisante de proies), c'est une croissance exponentielle. On a donc que s est le taux de croissance intrinsèque des prédateurs.

Le terme $\frac{hsy^2}{x}$ représente la décroissance naturelle des prédateurs (en fonction des proies disponibles). Comme pour les proies, on peut étudier le champ de vecteurs unidimensionnel défini par $g(y) = sy - \frac{hsy^2}{x}$. On obtient le portrait de phase suivant :



On voit alors mieux ce que représente h . Si le nombre de prédateurs dépasse $\frac{x}{h}$, \dot{y} va devenir négative, si bien que le nombre de prédateurs va se mettre à diminuer. On remarque que la rapidité de cette diminution est directement proportionnelle au taux de croissance intrinsèque des prédateurs, s . On peut dire que $\frac{x}{h}$ est aux prédateurs ce que K est aux proies. Le facteur x apparaît puisque que les proies représentent la nourriture des prédateurs. Si le nombre de proies est trop faible, le nombre de prédateurs atteindra d'autant plus facilement $\frac{x}{h}$, la nourriture manquera et leur nombre diminuera. On dit alors que h mesure la qualité de nourriture que représentent les proies pour les prédateurs par rapport au nombre de naissances au sein de la population prédatrice.

REMARQUE. Ce champ de vecteurs unidimensionnel est un modèle logistique de croissance avec seuil $y(t) = \frac{x(t)}{h}$ (qui dépend de la densité des proies présentes).

Maintenant qu'on comprend d'où viennent les équations du système et les paramètres qu'on y trouve, on peut passer à l'étude même de ce dernier. On commence par réduire le nombre de paramètres en trouvant un système C^∞ équivalent au système initial, dépendant de trois paramètres plutôt que de six paramètres, ce qui facilite bien sur l'étude menée.

3.3. X , un système C^∞ équivalent au système initial

On va montrer que le système HT est C^∞ conjugué au système

$$\bar{X} := \begin{cases} \dot{u} &= ru(1-u) - \frac{ruv}{u+a} \\ \dot{v} &= rv(\delta - \beta \frac{v}{u}) \end{cases}$$

où $a := \frac{A}{K}$, $\beta := \frac{hs}{m}$ et $\delta := \frac{s}{r}$.

Soit l'application $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $h(u, v) = (uk, \frac{rk}{m}v) := (x, y)$. La jacobienne de h en un point (u, v) est

$$Dh(u, v) = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & \frac{rK}{m} \end{pmatrix}$$

On a que $\det(Dh(u, v)) = \frac{K^2 r}{m} > 0$ et cela entraîne que h est un difféomorphisme C^∞ qui préserve l'orientation du temps. Pour montrer que h met en évidence la C^∞ conjugaison des deux systèmes, il reste à montrer que $(Dh(u, v))^{-1}HT h(u, v) = \bar{X}(u, v)$. Or :

$$\begin{aligned} (Dh(u, v))^{-1}HT h(u, v) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{K} & 0 \\ 0 & \frac{m}{rK} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ruK(1 - \frac{uK}{K}) - \frac{muK}{A+uK} \frac{rk}{m}v \\ \frac{srkv}{m}(1 - \frac{hrKv}{uKm}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{K} & 0 \\ 0 & \frac{m}{rK} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ruK(1-u) - \frac{uK^2 r}{A+uK}v \\ \frac{srkv}{m}(1 - \frac{hrv}{um}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ru(1-u) - \frac{uKr}{A+uK}v \\ sv(1 - \frac{hrv}{um}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r[u(1-u) - \frac{uK}{aK+uK}v] \\ r[v(\frac{s}{r} - \frac{hs}{m}\frac{v}{u})] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r[u(1-u) - \frac{u}{a+u}v] \\ r[v(\delta - \beta \frac{v}{u})] \end{pmatrix} \\ &= \bar{X}(u, v) \end{aligned}$$

où $a := \frac{A}{K}$, $\beta := \frac{hs}{m}$ et $\delta := \frac{s}{r}$. Donc \bar{X} est bien C^∞ conjugué à HT .

Soit maintenant le système X définie par $X := \frac{1}{r}\bar{X}$. Alors X et \bar{X} sont C^∞ équivalents par le théorème 5, vu dans le chapitre 1.

Finalement, le système HT est C^∞ équivalent au système

$$X := \begin{cases} \dot{u} &= u(1-u) - \frac{uv}{u+a} \\ \dot{v} &= v(\delta - \beta \frac{v}{u}) \end{cases}$$

On renomme les variables $(u, v) := (x, y)$. A partir de maintenant, on étudie les dynamiques du système

$$X := \begin{cases} \dot{x} &= x(1-x) - \frac{xy}{x+a} \\ \dot{y} &= y(\delta - \beta \frac{y}{x}) \end{cases}$$

avec $(x, y) \in \mathcal{A} = \{(x, y)/x > 0, y \geq 0\}$ et $a, \beta, \delta > 0$, pour connaitre les dynamiques de HT .

On rappelle, avant de passer à la section suivante, que :

- $a = \frac{A}{K}$ est le ratio de la constante de demie saturation et de la capacité environnementale maximale des proies.
- $\delta = \frac{s}{r}$ est le ratio du taux de croissance intrinsèque des prédateurs et de celui des proies.
- $\beta = \frac{hs}{m}$ peut être réécrit $\beta := \delta \frac{hr}{m}$ où m est le nombre maximal de proies consommées par un prédateur par unité de temps et hr est le nombre de proies nécessaires pour remplacer celles tuées par un prédateur par unité de temps.

3.4. Les singularités de X

Les points singuliers du système correspondent aux solutions du système

$$\begin{cases} x(1-x) - \frac{xy}{x+a} = 0 & (3.4.1) \\ y(\delta - \beta \frac{y}{x}) = 0 & (3.4.2) \end{cases}$$

On résout d'abord l'équation (3.4.2) : $y(\delta - \beta \frac{y}{x}) = 0 \iff y = 0$ ou $y = \frac{\delta}{\beta}x$. Et on l'injecte dans l'équation (3.4.1). Pour $y = 0$ on a $x(1-x) - \frac{xy}{x+a} = 0 \iff x(1-x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 1$. On a alors deux singularités : $(0, 0)$ (qui n'est pas bien définie puisque $(0, 0) \notin \mathcal{A}$ mais qui nous donne envie de nous intéresser à ce qu'il se passe près de l'origine...) et $(1, 0)$. Pour $y = \frac{\delta}{\beta}x$ on a $x(1-x) - \frac{xy}{x+a} = 0 \iff x \left[(1-x) - \frac{\delta}{\beta} \frac{x}{x+a} \right] = 0 \iff x = 0$ (mais cela donne la singularité $(0, 0)$ dont on a déjà parlé) ou $\frac{\beta(x+a)(1-x) - \delta x}{\beta(x+a)} = 0 \iff \delta x - \beta(x+a)(1-x) = 0$.

Étudions l'équation quadratique $\delta x - \beta(x+a)(1-x) = 0 \iff \beta x^2 + (\beta(a-1) + \delta)x - \beta a = 0$: Son discriminant est $\Delta = (\beta(a-1) + \delta)^2 + 4\beta^2 a > 0$ et elle possède donc les deux solutions suivantes :

$$x_1 = \frac{-(\beta(a-1) + \delta) + \sqrt{(\beta(a-1) + \delta)^2 + 4\beta^2 a}}{2\beta}$$

$$x_2 = \frac{-(\beta(a-1) + \delta) - \sqrt{(\beta(a-1) + \delta)^2 + 4\beta^2 a}}{2\beta}$$

Comme $-\beta a = x_1 x_2 < 0$ on sait qu'une de ces solutions est positive et l'autre négative. On travaille ici dans le premier quadrant du plan et donc seule la solution positive (qui correspond à x_1) nous intéresse. De plus on a

$$\begin{aligned} x_1 < 1 &\iff -(\beta(a-1) + \delta) + \sqrt{(\beta(a-1) + \delta)^2 + 4\beta^2 a} < 2\beta \\ &\iff \sqrt{(\beta(a-1) + \delta)^2 + 4\beta^2 a} < \beta(a+1) + \delta \\ &\iff (\beta(a-1) + \delta)^2 + 4\beta^2 a < (\beta(a+1) + \delta)^2 \\ &\iff \beta^2(a^2 - 2a + 1) + \delta^2 + 2\beta a\delta - 2\beta\delta + 4\beta^2 a \\ &\quad < \beta^2(a^2 + 2a + 1) + \delta^2 + 2\beta a\delta + 2\beta\delta \\ &\iff -\delta < \delta \end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie, si bien qu'on peut remonter l'équivalence et qu'on a bien $x_1 < 1$. La troisième singularité est donc $(x^*, y^*) = (x^*, \frac{\delta}{\beta} x^*)$ où $0 < x^* < 1$ est l'unique solution positive de l'équation $Q(x) = \delta x - \beta(x+a)(1-x) = 0$.

On veut maintenant étudier la stabilité et le type de ces trois singularités.

3.5. La stabilité des singularités de X

3.5.1. Singularité (1,0). On commence par calculer la matrice du système linéaire associé à X en un point (x, y) :

$$\begin{aligned} DX(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial[x((1-x) - \frac{xy}{x+a})]}{\partial x} & \frac{\partial[x((1-x) - \frac{xy}{x+a})]}{\partial y} \\ \frac{\partial[y(\delta - \beta \frac{y}{x})]}{\partial x} & \frac{\partial[y(\delta - \beta \frac{y}{x})]}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - 2x - \frac{a}{(a+x)^2} & -\frac{x}{a+x} \\ \beta \frac{y^2}{x^2} & \delta - 2\beta \frac{y}{x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a alors $DX(1, 0) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{a+1} \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de $DX(1, 0)$ sont réelles et non nulles donc $(1, 0)$ est un point singulier hyperbolique. De plus $-1 < 0$ et $\delta > 0$ donc c'est un point singulier hyperbolique de type selle. En particulier, il est instable.

REMARQUE. Cela est indépendant des paramètres $a, \beta, \delta > 0$.

3.5.2. Singularité (0,0). On a déjà noté que $(0, 0)$ ne fait pas parti du domaine sur lequel est défini le système X . On veut cependant étudier ce qu'il se passe lorsqu'on se rapproche de l'origine. On définit le système Z par $Z(x, y) := x X(x, y)$.

Sur \mathcal{A} , la fonction $l(x) = x$ est strictement positive, si bien que par le théorème 5, Z et X sont C^∞ équivalents. Pour regarder la dynamique de X proche de l'origine, on étudie alors la dynamique de

$$Z := \begin{cases} \dot{x} &= x^2(1-x) - \frac{x^2 y}{x+a} \\ \dot{y} &= y(x\delta - \beta y) \end{cases}$$

en $(0,0)$. La matrice du système linéaire associé à Z est

$$DZ(x, y) = \begin{pmatrix} x \left[2 - 3x - \frac{2y}{a+x} + \frac{xy}{(a+x)^2} \right] & -\frac{x^2}{a+x} \\ y\delta & \delta x - 2\beta y \end{pmatrix}$$

On a alors $DZ(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, la matrice nulle. En particulier, $(0,0)$ est un point singulier non hyperbolique du système Z . On ne peut donc pas déduire son type et sa stabilité du système linéaire associé à Z en l'origine. Pour les trouver, on effectue un éclatement de l'origine. Pour illustrer les éclatements introduits dans le chapitre 1 et voir qu'ils nous donnent bien le même résultat, on effectue d'abord un éclatement polaire de l'origine puis un éclatement projectif de l'origine.

Éclatement polaire de l'origine. On effectue d'abord un passage en coordonnées polaires. On pose $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$. On a alors les équations :

$$\dot{r} \cos(\theta) - r \sin(\theta) \dot{\theta} = r^2 \cos^2(\theta)(1 - r \cos(\theta)) - \frac{r^3 \cos^2(\theta) \sin(\theta)}{a + r \cos(\theta)}$$

$$\text{et } \dot{r} \sin(\theta) + r \cos(\theta) \dot{\theta} = r \sin(\theta)(r\delta \cos(\theta) - r\beta \sin(\theta))$$

Après quelques lignes de calculs on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r^2 \left[-\beta \sin^3(\theta) + \cos(\theta) + r \cos^2(\theta) + (\delta - 1) \cos(\theta) \sin^2(\theta) \right. \\ &\quad \left. + r \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) + \frac{r \cos(\theta) \sin^3(\theta)}{a + r \cos(\theta)} - \frac{r \cos(\theta) \sin(\theta)}{a + r \cos(\theta)} \right] \\ &:= r^2 R(r, \theta) \\ \dot{\theta} &= r^2 \left[\frac{\cos^2(\theta) \sin^2(\theta)}{a + r \cos(\theta)} + \cos^3(\theta) \sin(\theta) \right] \\ &\quad + r \left[(\delta - 1) \cos^2(\theta) \sin(\theta) - \beta \cos(\theta) \sin^2(\theta) \right] \\ &:= r \Theta(r, \theta) \end{aligned}$$

On désingularise le système en divisant les deux équations par r et finalement, on trouve le système désingularisé C^∞ équivalent au système X :

$$P := \begin{cases} \dot{r} &= r R(r, \theta) \\ \dot{\theta} &= \Theta(r, \theta) \end{cases}$$

On se place alors sur $\{r = 0\}$. On obtient :

$$\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = \Theta(0, \theta) = (\delta - 1) \cos^2(\theta) \sin(\theta) - \beta \cos(\theta) \sin^2(\theta) \end{cases}$$

Les singularités de P sur $\{r = 0\}$ correspondent aux solutions de l'équation $\dot{\theta} = \Theta(0, \theta) = 0 \iff \cos(\theta) \sin(\theta) ((\delta - 1) \cos(\theta) - \beta \sin(\theta)) = 0 \iff \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ ou $\arctan\left(\frac{\delta-1}{\beta}\right)$. On ne s'intéresse qu'au premier quadrant du plan, si bien que finalement, on doit étudier les singularités $(0, 0)$, $(0, \frac{\pi}{2})$ et $(0, \arctan\left(\frac{\delta-1}{\beta}\right))$ si $\delta - 1 > 0$, de P . La matrice du système linéaire associé au système P en un point $(0, \theta)$ est

$$DP(0, \theta) = \begin{pmatrix} (1) & (2) \\ (3) & (4) \end{pmatrix}$$

avec :

$$(1) = \cos(\theta) + (\delta - 1) \cos(\theta) \sin^2(\theta) - \beta \sin^3(\theta)$$

$$(2) = 0$$

$$(3) = \frac{\cos^2(\theta) \sin^2(\theta)}{a} + \cos^3(\theta) \sin(\theta)$$

$$(4) = (\delta - 1) \cos(\theta) (\cos^2(\theta) - 2 \sin^2(\theta)) + \beta \sin(\theta) (\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta))$$

On l'évalue en chacune des singularités qui nous intéressent :

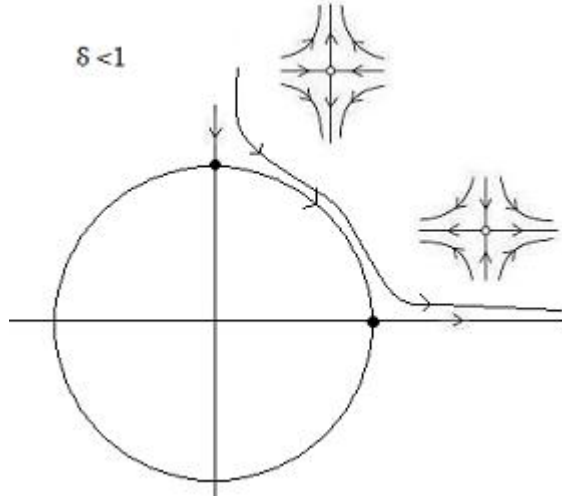
$$DP(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta - 1 \end{pmatrix}, \quad DP(0, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -\beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

et

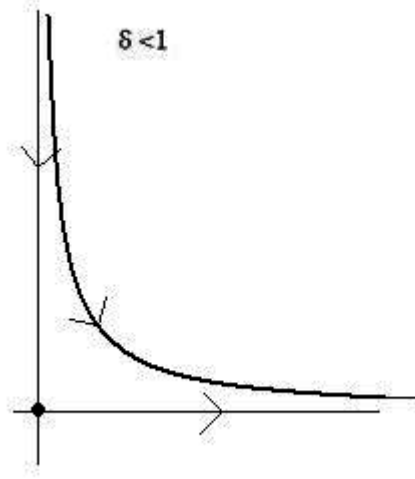
$$DP\left(0, \arctan\left(\frac{\delta-1}{\beta}\right)\right) = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + (\delta-1)^2}} & 0 \\ \frac{\beta^2(\delta-1)(\beta + \frac{\delta-1}{a})}{(\beta^2 + (\delta-1)^2)^2} & -\frac{(\delta-1)\beta}{\sqrt{\beta^2 + (\delta-1)^2}} \end{pmatrix}$$

Indépendamment des paramètres, $(0, \frac{\pi}{2})$ est une singularité hyperbolique de type selle. La stabilité des deux autres singularités dépend des paramètres, puisqu'elle dépend du signe de $\delta - 1$. On sépare l'étude en trois cas :

1. Si $\delta < 1$ on ne s'intéresse qu'aux singularités $(0, 0)$ et $(0, \frac{\pi}{2})$. Et dans ce cas, $(0, 0)$ est un point singulier hyperbolique de type selle. On obtient l'éclatement suivant :

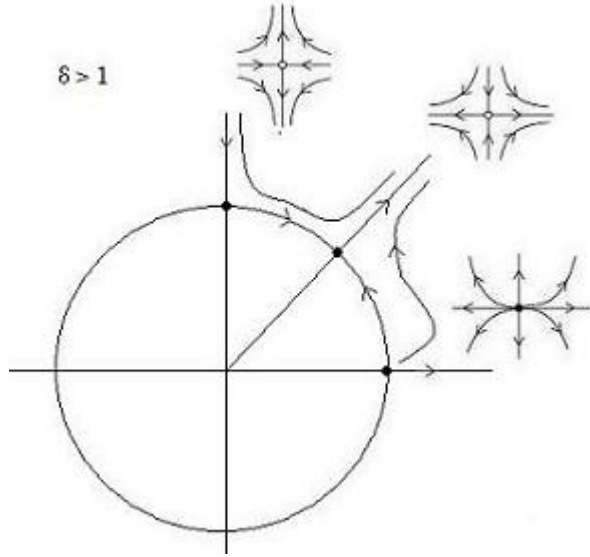


En contractant les singularités à l'origine, on obtient alors le portrait de phase de X au voisinage de l'origine dans le premier quadrant du plan si $\delta < 1$:

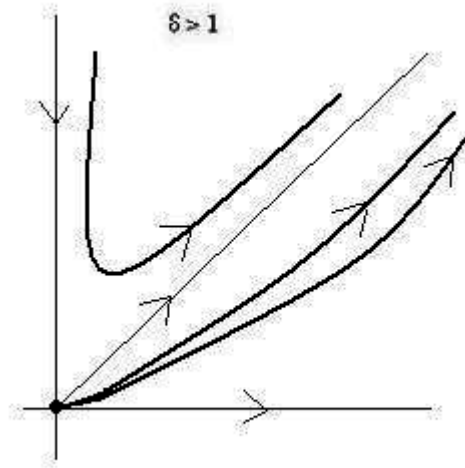


2. Si $\delta = 1$, les trois singularités sont réduites à deux puisque $\left(0, \arctan\left(\frac{\delta-1}{\beta}\right)\right) = (0, 0)$. Dans ce cas, $DP(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ C'est donc un point singulier non hyperbolique de type noeud-col du système P et le théorème de Hartman-Grobman ne s'applique pas. On laisse pour l'instant ce cas de côté, on y reviendra par la suite.

3. Si $\delta > 1$ les trois singularités appartiennent au premier quadrant du plan. Dans ce cas, $(0, 0)$ est une singularité hyperbolique de type source et $\left(0, \arctan\left(\frac{\delta-1}{\beta}\right)\right)$ est une singularité hyperbolique de type selle. On obtient l'éclatement suivant :



En contractant les singularités à l'origine, on obtient alors le portrait de phase de X au voisinage de l'origine dans le premier quadrant du plan si $\delta > 1$:



Éclatement projectif de l'origine.

Carte 1 de l'éclatement : On effectue le passage dans les coordonnées de la carte 1 de l'éclatement projectif, c'est-à-dire qu'on pose $x = x$ et $y = tx$. On a alors les équations $\dot{x} = x^2(1-x) + \frac{tx^3}{a+x}$ et $\dot{y} = tx + t\dot{x} = tx^2(\delta - \beta t)$ desquelles on déduit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^2 \left[(1-x) + \frac{tx}{a+x} \right] \\ \dot{t} &= xt \left[(\delta - \beta t) - 1 + x - \frac{xt}{a+x} \right] \end{cases}$$

On désingularise ce système en divisant les deux équations qui le définissent par x , c'est-à-dire qu'on passe au système C^∞ équivalent :

$$T := \begin{cases} \dot{x} &= x \left[(1-x) + \frac{tx}{a+x} \right] \\ \dot{t} &= t \left[(\delta - \beta t) - 1 + x - \frac{xt}{a+x} \right] \end{cases}$$

On se place maintenant sur $\{x = 0\}$. Le système T devient :

$$\begin{cases} \dot{x} &= 0 \\ \dot{t} &= t [(\delta - \beta t) - 1] \end{cases}$$

Les singularités de T à étudier correspondent aux solutions de l'équation $\dot{t} = 0 \iff t[(\delta - \beta t) - 1] = 0 \iff t = 0$ ou $t = \frac{\delta-1}{\beta}$. Les deux singularités sont donc $(0, 0)$ et $(0, \frac{\delta-1}{\beta})$ si $\delta - 1 > 0$ (puisque'on ne s'intéresse qu'au premier quadrant du plan). La matrice du système linéaire associée à T en $(0, t)$ est

$$DT(0, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 - \frac{t}{a} & \delta - 1 - 2t\beta \end{pmatrix}$$

On a donc $DT(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \delta - 1 \end{pmatrix}$ et $DT\left(0, \frac{\delta-1}{\beta}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 - \frac{\delta-1}{\beta a} & -(\delta - 1) \end{pmatrix}$.

La stabilité et le type de ces deux singularités dépendent des paramètres du système puisqu'elles dépendent du signe de $\delta - 1$. Comme avant, on divise alors l'étude en trois cas : $\delta < 1$, $\delta = 1$ et $\delta > 1$ mais on laisse de côté pour l'instant le cas $\delta = 1$.

- Si $\delta < 1$, $(0, 0)$ est un point singulier hyperbolique de type selle, et c'est la seule singularité qui nous intéresse.
- Si $\delta > 1$, $(0, 0)$ est un point singulier hyperbolique de type source et $(0, \frac{\delta-1}{\beta})$ est un point singulier hyperbolique de type selle.

Carte 2 de l'éclatement : On effectue maintenant le passage dans les coordonnées de la carte 2 de l'éclatement projectif, c'est-à-dire qu'on pose $x = sy$ et $y = y$. On a alors les équations $\dot{x} = \dot{s}y + s\dot{y} = s^2y^2(1 - sy) + \frac{s^2y^3}{a+sy}$ et $\dot{y} = y^2\delta s - \beta y^2$ desquelles on déduit le système :

$$\begin{cases} \dot{s} &= sy \left[s - \delta s + \beta + \frac{ys}{a+ys} - s^2y \right] \\ \dot{y} &= y^2 [\delta s - \beta] \end{cases}$$

On désingularise ce système en divisant les deux équations qui le définissent par y , c'est-à-dire, on passe au système C^∞ équivalent :

$$S := \begin{cases} \dot{s} &= s \left[s - \delta s + \beta + \frac{ys}{a+ys} - s^2y \right] \\ \dot{y} &= y [\delta s - \beta] \end{cases}$$

On se place maintenant sur $\{y = 0\}$. Le système S devient :

$$\begin{cases} \dot{s} = s[(1-\delta)s + \beta] \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

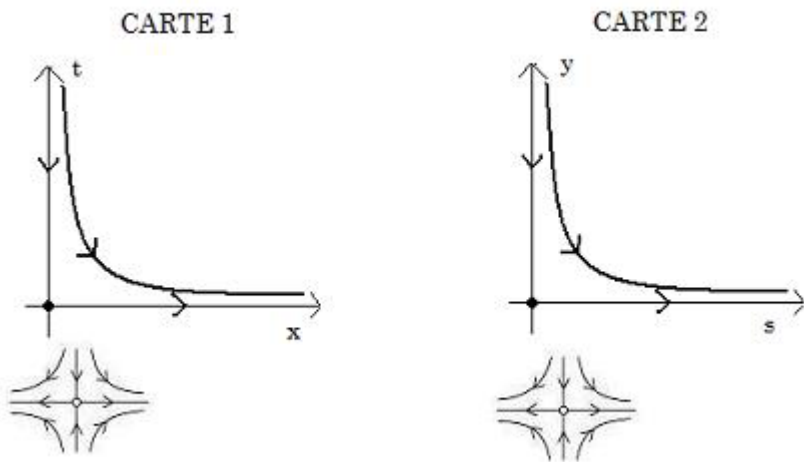
Les singularités à étudier correspondent aux solutions de l'équation $\dot{s} = 0 \iff s[(1-\delta)s + \beta] = 0 \iff s = 0$ ou $t = \frac{\beta}{\delta-1}$. Les deux singularités sont donc $(0, 0)$ et $(0, \frac{\beta}{\delta-1})$ si $\delta - 1 > 0$ (puisque'on ne s'intéresse toujours qu'au premier quadrant du plan). La matrice du système linéaire associée à S en $(s, 0)$ est

$$DS(s, 0) = \begin{pmatrix} \beta + 2s(1-\delta) & \frac{s^2}{a} - s^3 \\ 0 & \delta s - \beta \end{pmatrix}$$

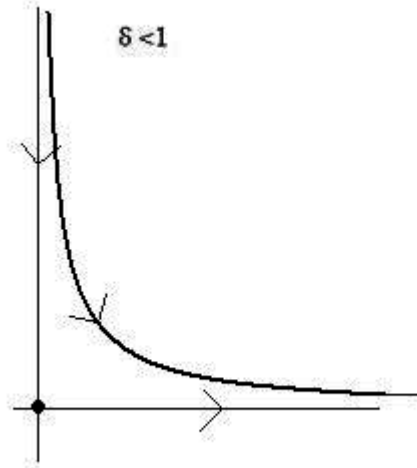
On a donc $DS(0, 0) = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix}$ et $DS\left(\frac{\beta}{\delta-1}, 0\right) = \begin{pmatrix} -\beta & c(a, \beta, \delta) \\ 0 & \frac{\beta}{\delta-1} \end{pmatrix}$ pour un certain $c(a, \beta, \delta)$ qui ne nous intéresse pas puisque les valeurs propres de $DS\left(\frac{\beta}{\delta-1}, 0\right)$ n'en dépendent pas. Alors, $(0, 0)$ est un point singulier hyperbolique de type selle, indépendamment des paramètres du système. Par contre, la stabilité et le type de $\left(\frac{\beta}{\delta-1}, 0\right)$ dépendent des paramètres du système puisqu'elles dépendent du signe de $\delta - 1$. Comme pour l'éclatement polaire et la carte 1 de l'éclatement projectif, on divise l'étude en trois cas : $\delta < 1$, $\delta = 1$ et $\delta > 1$ mais on laisse de côté pour l'instant le cas $\delta = 1$:

- Si $\delta < 1$, le point singulier $\left(\frac{\beta}{\delta-1}, 0\right)$ ne nous intéresse pas.
- Si $\delta > 1$, $\left(\frac{\delta-1}{\beta}, 0\right)$ est un point singulier hyperbolique de type selle.

Regroupement des informations des deux cartes : On commence par considérer le cas $\delta < 1$. On a les éclatements suivant :

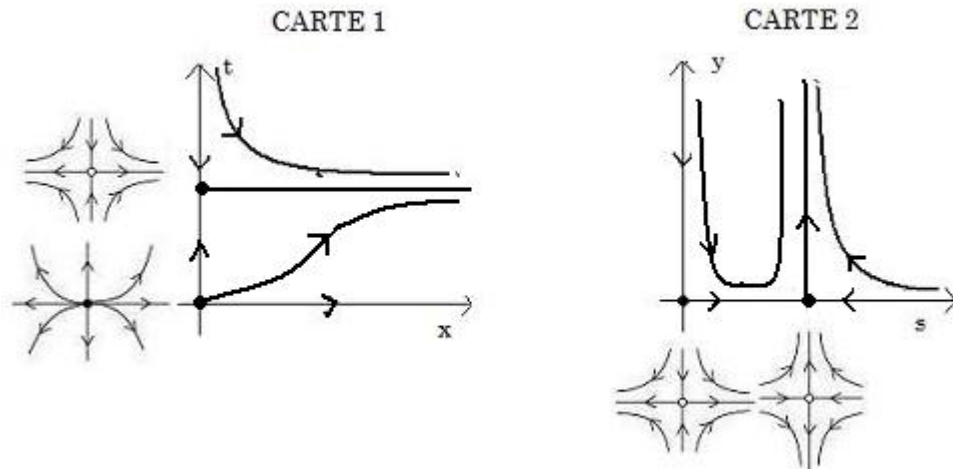


En combinant les informations des deux cartes et en contractant les singularités en l'origine, on obtient alors le portrait de phase de X au voisinage de l'origine dans le premier quadrant du plan, pour $\delta < 1$:

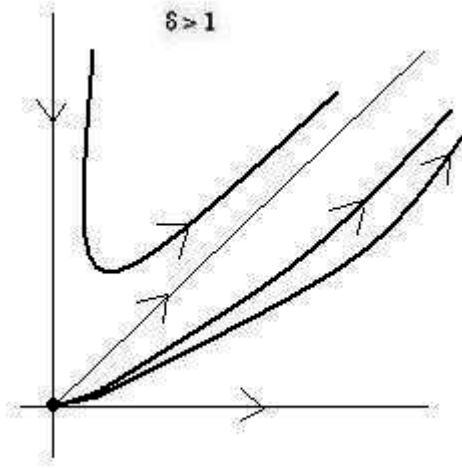


“Combiner les informations des deux cartes” signifie en fait : considérer la carte 2 au voisinage de $s = 0$ pour comprendre ce qu’il se passe quand $t = \infty$ dans la carte 1 et considérer la carte 1 au voisinage de $t = 0$ pour comprendre ce qu’il se passe quand $s = \infty$ dans la carte 2.

Passons maintenant au cas $\delta > 1$. On a les éclatements suivants :



En combinant les informations des deux cartes et en contractant les singularités en l'origine, on obtient alors le portrait de phase de X au voisinage de l'origine dans le premier quadrant du plan, pour $\delta > 1$:



Cas $\delta = 1$. Il nous reste à déterminer le portrait de phase de X au voisinage de l'origine lorsque $\delta = 1$. Pour cela, on veut appliquer le théorème 9 à notre système X . On considère à nouveau le changement de coordonnées de la carte 1 de l'éclatement projectif. On avait :

$$T := \begin{cases} \dot{x} &= x \left[(1-x) + \frac{tx}{a+x} \right] \\ \dot{t} &= t \left[(\delta - \beta t) - 1 + x - \frac{xt}{a+x} \right] \end{cases}$$

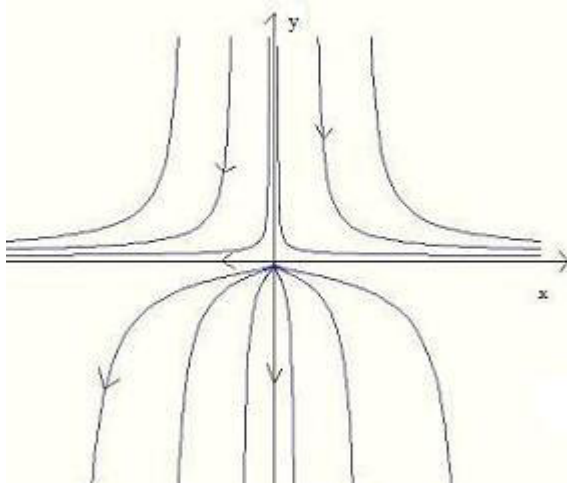
Pour $\delta = 1$ on a :

$$T := \begin{cases} \dot{x} &= x \left[1 + \left(-x + \frac{tx}{a+x} \right) \right] \\ \dot{t} &= -\beta t^2 + tx - \frac{xt^2}{a+x} \end{cases}$$

Donc, on a bien un système satisfaisant les hypothèses du théorème 9 avec $f(x, t) = -x + \frac{tx}{a+x}$ et $g(x, y) = -\beta t^2 + tx - \frac{xt^2}{a+x}$. De plus, $g(0, y) = -\beta t^2 = cy^k$ avec $c = -\beta < 0$ et $k = 2$. Le théorème 9 nous affirme alors que T (et donc X) est C^∞ équivalent au système

$$\tilde{T} := \begin{cases} \dot{x} &= x \\ \dot{t} &= -t^2 \end{cases}$$

Il ne reste donc plus qu'à comprendre le portrait de phase au voisinage de l'origine du système \tilde{T} pour obtenir celui de X dans le cas $\delta = 1$. On a vu dans le chapitre 1 que dans le cas $k = 2$, la fonction $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x, t) = x \exp\left(-\frac{1}{t}\right)$ est une intégrale première du système \tilde{T} . On obtient alors le portrait de phase suivant :



C'est le portrait de phase de X au voisinage de l'origine lorsque $\delta = 1$.

REMARQUE. Comme, dans notre étude, on se restreint au premier quadrant du plan, on ne voit pas apparaître le fait que la singularité soit de type noeud-col. De plus, on note que, dans ce cas, on s'intéresse à l'allure du portrait de phase de T pour $t \simeq 0$ si bien qu'aucune vérification dans la carte 2 de l'éclatement projectif n'est nécessaire (dans cette carte on s'intéresserait à la singularité “ $(\infty, 0)$ ”).

Finalement, on connaît bien le portrait de phase de X au voisinage de l'origine dans le premier quadrant du plan pour toutes les valeurs possibles des paramètres du système. On peut donc passer à l'étude de la dernière singularité.

3.5.3. Singularité $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$. Pour étudier la stabilité et le type de cette singularité, on transforme le système initial en un système de Liénard généralisé. C'est le sujet traité dans les sections suivantes. On s'intéresse à la présence de cycles limites autour de cette singularité mais aussi dans tout le premier quadrant du plan, en fonction des paramètres du système. Il est important de noter qu'il peut exister des cycles limites “loin” de la singularité qui n'apparaîtront pas dans l'étude locale de cette dernière. De plus, prouver l'existence ou la non existence de tels cycles limites est en général très compliqué, mais certains critères et certains théorèmes (ceux cités dans le chapitre 1) nous aiderons néanmoins à couvrir la quasi totalité des cas.

3.6. Un système de Liénard généralisé C^∞ équivalent au système X

Le but de cette section est de transformer le système initial X en le système de Liénard généralisé

$$L := \begin{cases} \dot{x} &= \exp(z) - (1-x)(a+x)x^{-\beta} \exp\left(\frac{a\beta}{x}\right) \\ \dot{z} &= -(\delta x - \beta(1-x)(a+x))(a+x)x^{-2-\beta} \exp\left(\frac{a\beta}{x}\right) \end{cases}$$

On définit les fonctions ω et g par $\omega(x) = x^\beta \exp\left(-\frac{a\beta}{x}\right)$ et $g(x) = (\delta x - \beta(1-x)(a+x))(a+x)$. Le système de Liénard L s'écrit alors

$$L := \begin{cases} \dot{x} &= \exp(z) - \frac{(1-x)(a+x)}{\omega(x)} \\ \dot{z} &= -\frac{g(x)}{x^2\omega(x)} \end{cases}$$

Soit la fonction $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $h(x, z) = (x, \omega(x) \exp(z)) := (x, y)$. La matrice Jacobienne de h en un point (x, z) est

$$\begin{aligned} Dh(x, z) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega'(x) \exp(z) & \omega(x) \exp(z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\omega(x)\beta(a+x)}{x^2} \exp(z) & \omega(x) \exp(z) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a que $\det(Dh(x, z)) = \omega(x) \exp(z) > 0$ et cela entraîne que h est un difféomorphisme C^∞ qui préserve l'orientation du temps. On calcule $(Dh(x, z))^{-1}Xh(x, z) :$

$$\begin{aligned} &(Dh(x, z))^{-1}Xh(x, z) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\omega'(x)}{\omega(x)} & \frac{1}{\omega(x) \exp(z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(1-x) - \frac{x}{a+x}\omega(x) \exp(z) \\ \omega(x) \exp(z) \left(\delta - \beta \frac{\omega(x) \exp(z)}{x} \right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\beta(a+x)}{x^2} & \frac{1}{\omega(x) \exp(z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(1-x) - \frac{x}{a+x}\omega(x) \exp(z) \\ \omega(x) \exp(z) \left(\delta - \beta \frac{\omega(x) \exp(z)}{x} \right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x(1-x) - \frac{x}{a+x}\omega(x) \exp(z) \\ -\frac{\beta(a+x)}{x} \left((1-x) - \frac{1}{a+x}\omega(x) \exp(z) \right) + \left(\delta - \beta \frac{\omega(x) \exp(z)}{x} \right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{x}{a+x}\omega(x) \left(-\frac{(a+x)(1-x)}{\omega(x)} + \exp(z) \right) \\ -\frac{\beta(a+x)(1-x)}{x} + \frac{\beta\omega(x) \exp(z)}{x} + \delta - \frac{\beta\omega(x) \exp(z)}{x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{x}{a+x}\omega(x) \left(-\frac{(a+x)(1-x)}{\omega(x)} + \exp(z) \right) \\ -\frac{x}{a+x}\omega(x) \left(\frac{\beta(a+x)(a+x)(1-x)}{x^2\omega(x)} - \frac{\delta x(a+x)}{x^2\omega(x)} \right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{x}{a+x}\omega(x) \left(-\frac{(a+x)(1-x)}{\omega(x)} + \exp(z) \right) \\ -\frac{x}{a+x}\omega(x) \left(-\frac{(\delta x - \beta(1-x)(a+x))(a+x)}{x^2\omega(x)} \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et on a donc montré que X est C^∞ conjugué au système

$$\tilde{L} := \begin{cases} \dot{x} &= -\frac{x}{a+x}\omega(x) \left(-\frac{(a+x)(1-x)}{\omega(x)} + \exp(z) \right) \\ \dot{z} &= -\frac{x}{a+x}\omega(x) \left(-\frac{g(x)}{x^2\omega(x)} \right) \end{cases}$$

et que le difféomorphisme h met en évidence cette C^∞ conjugaison. Si l'on divise les deux équations définissant le système \tilde{L} par $-\frac{x}{a+x}\omega(x)$, on retrouve le système de Liénard L énoncé au début de la section. Mais attention, ici, on ne peut pas appliquer directement le théorème 5 puisque que la fonction $l(x) = -\frac{x}{a+x}\omega(x)$ n'est pas strictement positive sur le premier quadrant du plan, au contraire elle est strictement négative. En fait, on a, selon la remarque suivant le théorème 5, que X est C^∞ équivalent au système L quitte à renverser le sens du temps. Il faudra le prendre en compte quand on déduira, d'un résultat prouvé pour L , un résultat pour X .

3.7. La singularité $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ pour le système de Liénard

Le point singulier $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ est transformé par h en la singularité (x^*, z^*) du système de Liénard où z^* vérifie $\frac{\delta}{\beta}x^* = \omega(x^*) \exp(z^*) \iff z^* = \ln\left(\frac{\delta x^*}{\beta \omega(x^*)}\right)$. La matrice du système linéaire associé à L est

$$DL(x, z) = \begin{pmatrix} -\frac{f(x)}{x^2\omega(x)} & \exp(z) \\ -\frac{g'(x)x^2 - g(x)(2x + \beta(a+x))}{x^4\omega(x)} & 0 \end{pmatrix}$$

où $f(x) = (1-a)x^2 - 2x^3 - \beta(1-x)(a+x)^2$. On a donc

$$DL(x^*, z^*) = \begin{pmatrix} -\frac{f(x^*)}{x^{*2}\omega(x^*)} & \exp(z^*) \\ -\frac{g'(x^*)x^{*2} - g(x^*)(2x^* + \beta(a+x^*))}{x^{*4}\omega(x^*)} & 0 \end{pmatrix}$$

En remarquant que : $f(x) = (1-a)x^2 - 2x^3 - \beta(1-x)(a+x)^2 = (1-a)x^2 - 2x^3 + (Q(x) - \delta x)(a+x)$ et $g(x) = (\delta x - \beta(1-x)(a+x))(a+x) = Q(x)(a+x)$. Et en se rappelant que : $z^* = \ln\left(\frac{\delta x^*}{\beta \omega(x^*)}\right)$ et $Q(x^*) = 0$, on obtient que

$$\begin{aligned} DL(x^*, z^*) &= \begin{pmatrix} -\frac{(1-a)x^{*2} - 2x^{*3} - \delta x^*(a+x^*)}{x^{*2}\omega(x^*)} & \frac{\delta x^*}{\beta \omega(x^*)} \\ -\frac{g'(x^*)}{x^{*2}\omega(x^*)} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{x^*[x^* - ax^* - 2x^{*2} - \delta a + \delta x^*]}{x^{*2}\omega(x^*)} & \frac{\delta x^*}{\beta \omega(x^*)} \\ -\frac{Q'(x^*)(a+x^*)}{x^{*2}\omega(x^*)} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{x^*P(x^*)}{x^{*2}\omega(x^*)} & \frac{\delta x^*}{\beta \omega(x^*)} \\ -\frac{\beta(a+x)^2 + a\delta}{x^{*2}\omega(x^*)} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $P(x) = 2x^2 + (a + \delta - 1)x + \delta a$. Remarquons tout de suite que, puisque $\delta a > 0$, les deux racines de $P(x)$, si elles existent, sont de même signe. De plus, par la discussion menée dans la section 1.3.2, on sait que :

- (1) La singularité (x^*, z^*) est de type anti-selle puisque $\det(DL(x^*, z^*)) = \frac{\delta x^*}{\beta \omega(x^*)} \frac{\beta(a+x)^2 + a\delta}{x^{*2}\omega(x^*)} = \frac{\delta \beta(a+x)^2 + a\delta^2}{\beta x^* \omega^2(x^*)} > 0$, c'est-à-dire que le produit de ses valeurs propres est strictement positif.

- (2) La stabilité de (x^*, z^*) dépend du signe de $\text{Tr}(DL(x^*, z^*)) = \frac{x^*P(x^*)}{x^{*2}\omega(x^*)}$, c'est-à-dire qu'elle dépend du signe de $P(x^*)$.

On s'intéresse essentiellement aux cycles limites que l'on pourrait trouver autour de la singularité et cela nous donne certaines conditions sur les paramètres. Par exemple, si $P(x)$ ne change pas de signe sur le premier quadrant du plan, il n'y aura pas de cycles limites par le critère de Dulac-Bendixson. En effet, sur l'ouvert simplement connexe $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0\}$ du plan, considérons le système D , C^∞ équivalent à L , défini par $D = \exp(-z)L$. Alors la divergence de D , $\text{div}(D) = \frac{P(x)}{x\omega(x)} \exp(-z)$, n'est pas identiquement nulle et si $P(x)$ a un signe constant, $\text{div}(D)$ aussi. Le théorème 19 nous affirme alors que, dans ce cas, le système D n'admet aucun cycle limite sur U . Par C^∞ équivalence, c'est aussi le cas pour L .

On a que $P(x)$ ne change pas de signe sur le premier quadrant du plan si $\Delta_P \leq 0$ où si $\Delta_P > 0$ et que $P(x)$ possède deux racines négatives. Ainsi, le seul cas intéressant est celui où $P(x)$ a deux racines distinctes positives x_1^* et x_2^* . Puisque $x_1^* + x_2^* = 1 - (\delta + a) < 1$ on peut spécifier que $0 < x_1^* < x_2^* < 1$. Cela nous donne des conditions sur les paramètres δ et a . On peut trouver la région du plan δa qui correspond au cas où $P(x)$ a deux racines distinctes positives. Déjà, pour que les deux racines, si elles existent, soient positives, il nous faut la condition $1 - (\delta + a) > 0 \iff \delta + a < 1$ sur les paramètres δ et a . On déduit que $\delta < 1$ et que $a < 1$. Il nous reste à comprendre ce que signifie, en terme de conditions sur les paramètres δ et a , le fait que ces deux racines existent bien, c'est-à-dire que $\Delta_P > 0$.

$P(x)$ à deux racines distinctes

$$\iff \Delta_P > 0$$

$$\iff (a + \delta - 1)^2 - 8\delta a > 0$$

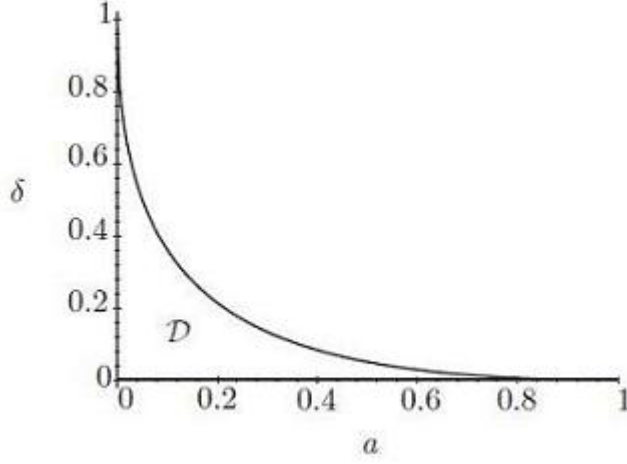
$$\iff A(a) = a^2 - 2a(3\delta + 1) + (\delta - 1)^2 > 0$$

Les racines, si elles existent, de $A(a)$ sont :

$$a_1 = \frac{2(3\delta + 1) - \sqrt{(2(3\delta + 1))^2 - 4(\delta - 1)^2}}{2} = 3\delta + 1 - 2\sqrt{2\delta^2 + 2\delta}$$

$$a_2 = \frac{2(3\delta + 1) + \sqrt{(2(3\delta + 1))^2 - 4(\delta - 1)^2}}{2} = 3\delta + 1 + 2\sqrt{2\delta^2 + 2\delta}$$

Alors, $A(a)$ est strictement positif si $a \in [0, a_1] \cup [a_2, 1]$. On sait que $a_1 a_2 > 0$ et que $a_2 > 0$, on en déduit que $a_1 > 0$. Mais puisque $a_2 > 1$ et qu'on a vu que $a < 1$ on a finalement que $a \in [0, a_1]$. On s'intéresse donc uniquement, à partir de maintenant, à la région du plan δa correspondant à $0 < \delta < 1$ et $0 < a < 3\delta + 1 - 2\sqrt{2\delta^2 + 2\delta}$. Elle est la seule région pouvant mener à un ou plusieurs cycles limites autour de (x^*, z^*) . On l'appelle \mathcal{D} , et on la représente dans le plan δa :



En dehors de cette région, c'est-à-dire si $\delta \geq 1$ ou si $\delta < 1$ et $a + \delta \geq 1$ ou encore si $\delta < 1$, $a + \delta < 1$ et $\Delta_P \leq 0$, on a donc la présence d'aucun cycle limite dans le premier quadrant du plan. En particulier, aucun cycle limite n'entourent la singularité $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$. On peut montrer (voir [13]), que dans ces cas, $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ est globalement asymptotiquement stable. D'un point de vue biologique, cela signifie que, par exemple, si le taux de croissance intrinsèque des prédateurs est supérieur ou égal à celui des proies, peu importe les effectifs initiaux des deux populations, elles tendront vers le point d'équilibre $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$.

Stabilité de la singularité (x^*, z^*) . On a vu que la stabilité de la singularité (x^*, z^*) , qui est de type anti-selle, dépend du signe de $P(x^*)$. Si $P(x^*) < 0$, $\text{Tr}(DL(x^*, z^*)) < 0$ et donc (x^*, z^*) est stable, même asymptotiquement stable, alors que si $P(x^*) > 0$, $\text{Tr}(DL(x^*, z^*)) > 0$ et donc (x^*, z^*) est instable. Cela implique au contraire que si $P(x^*) < 0$, la singularité (x^*, y^*) de X est instable, alors que si $P(x^*) > 0$ elle est stable, même asymptotiquement stable. On déduit de cela la proposition suivante :

PROPOSITION 28. *Sur \mathcal{D} , pour le système dynamique X :*

Si $0 < x^ < x_1^*$ où si $x_2^* < x^* < 1$ alors la singularité $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ est asymptotiquement stable.*

Si $x_1^ < x^* < x_2^*$ alors la singularité $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ est instable.*

DÉMONSTRATION. Elle découle uniquement de la discussion ci-dessus.

Si $0 < x^* < x_1^*$ où si $x_2^* < x^* < 1$ alors $P(x^*) > 0$ donc la singularité est asymptotiquement stable.

Si $x_1^* < x^* < x_2^*$ alors $P(x^*) < 0$ donc la singularité est instable. \square

On peut même montrer la proposition plus forte suivante :

PROPOSITION 29. *Sur \mathcal{D} , pour le système dynamique X :*

1. *Si $x_2^* < x^* < 1$ alors la singularité $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ est globalement asymptotiquement stable.*
2. *Si x^* est suffisamment proche de 0 alors la singularité $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ est globalement asymptotiquement stable.*
3. *Si $x_1^* < x^* < x_2^*$ alors il existe au moins un cycle limite stable entourant la singularité $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$.*

Pour la démonstration, on aura besoin du lemme suivant (voir [13] pour la démonstration) :

LEMME. (*)

Les solutions du système X sont positives et bornées.

De plus, il existe $t^ \geq 0$ tel que $x(t) < 1$ et $y(t) < \frac{\delta}{\beta}$ pour $t \geq t^*$.*

DÉMONSTRATION. On commence par démontrer le point 3.

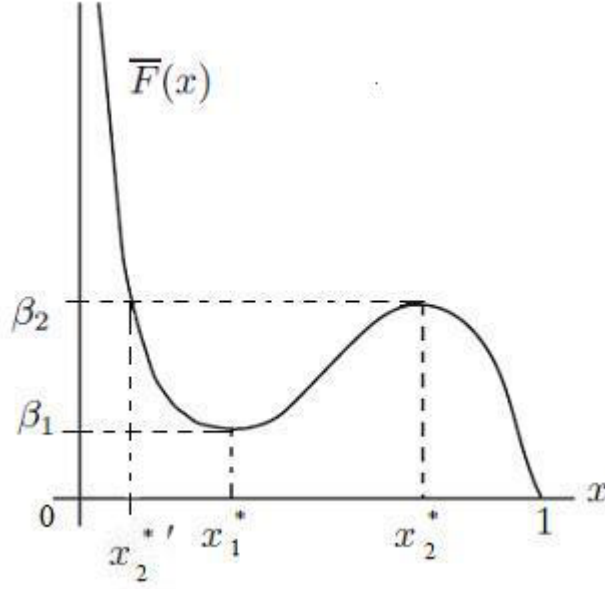
Comme $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ est instable pour $x_1^* < x^* < x_2^*$, on peut déduire, grâce au lemme (*) et au théorème de Poincaré Bendixson, l'existence d'au moins un cycle limite entourant la singularité. En effet, le système X ne possède que des points singuliers isolés et si on considère une orbite positive de X on sait, par le lemme (*), qu'elle est bornée. De plus, puisque dans ce cas les trois points singuliers du système sont instables, l' ω -limite de cette orbite ne peut en contenir aucun (si l'orbite se rapproche d'un point singulier elle sera repoussée par lui si bien qu'elle ne pourra jamais l'atteindre). Ainsi, puisqu'ici le système étudié est analytique, on peut appliquer la proposition 18 et conclure que l' ω -limite de l'orbite positive considérée est un cycle limite (stable). Cela prouve donc bien l'existence d'au moins un cycle limite autour de $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ dans ce cas. Et le troisième point est démontré.

Pour les deux premiers points, on se contente de donner une esquisse de la démonstration (voir [13] pour la démonstration complète).

On commence par montrer que, sous les conditions citées, aucun cycle limite ne peut entourer la singularité $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$. On définit $\bar{f}(x) = \frac{f(x)}{x^2\omega(x)}$. Alors $\bar{F}(x) = \frac{(a+x)(1-x)}{\omega(x)}$ est une primitive de $\bar{f}(x)$. En effet,

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{F}(x)}{dx} &= \frac{[-(a+x) + (1-x)]\omega(x) - (1-x)(a+x)\omega'(x)}{\omega^2(x)} \\
 &= \frac{[1-2x-a]x^2 - \beta(1-x)(a+x)^2}{x^2\omega(x)} \\
 &= \frac{(1-a)x^2 - 2x^3 - \beta(1-x)(a+x)^2}{x^2\omega(x)} \\
 &= \bar{f}(x)
 \end{aligned}$$

On sait que $\bar{F}(x)$ a au plus deux extrémaux. Dans le cadre de la proposition 29, on suppose de $P(x)$ possède deux racines distinctes positives x_1^* et x_2^* . Comme $\bar{f}(x_1^*) = \bar{f}(x_2^*) = 0$, on se place dans le cas où $\bar{F}(x)$ à deux extrémaux exactement. On obtient un graphe de ce genre pour $\bar{F}(x)$:



Affirmation : Pour $x_2^* < x^* < 1$ et $0 < x^* < x_2^{*'}$, la singularité $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ n'est entourée par aucun cycle limite.

En admettant cette affirmation, la conclusion découle du lemme (*). En effet, on sait par le lemme (*) que quelque soit la condition initiale $p_o \in \mathbb{R}^2$ considérée, sa trajectoire $\{\varphi_t(p_o)/t \in \mathbb{R}\}$ va finir par rentrer dans le rectangle de côté 1 et $\frac{\delta}{\beta}$ et y rester. On sait également que $x^* < 1$ et que $y^* = \frac{\delta}{\beta}x^* < \frac{\delta}{\beta}$ donc le point singulier étudié est inclus dans ce rectangle. De plus, on a vu que pour $x_2^* < x^* < 1$ et $0 < x^* < x_2^{*'}$, la singularité $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ est localement asymptotiquement stable. Alors, par le théorème de Poincaré Bendixson, puisqu'il n'existe pas de cycle limite entourant la singularité et que l'origine est un point singulier instable, on a que $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(p_o) = (x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$. Et, par définition de la stabilité asymptotique globale, les deux premiers points sont démontrés. \square

Pour avoir étudié tous les cas possibles, il nous reste à nous intéresser aux cas $x^* = x_1^*$ et $x^* = x_2^*$, c'est-à-dire, les cas où x^* est une racine du polynôme $P(x)$. Dans ce cas $DL(x^*, z^*) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\delta x^*}{\beta \omega(x^*)} \\ -\frac{\beta(a+x)^2 + a\delta}{x^{*2}\omega(x^*)} & 0 \end{pmatrix}$ et ses valeurs propres sont donc deux nombres complexes conjugués imaginaires purs. La singularité est alors non hyperbolique de type centre ou foyer faible. En particulier, on ne peut pas

déduire du système linéaire associé à L en (x^*, z^*) sa stabilité et son type. Il nous faut nous intéresser aux termes non linéaires d'ordre supérieur pour déterminer s'il s'agit d'un centre ou d'un foyer faible. C'est un point plus délicat que ceux étudiés précédemment. Pour déterminer de quel type de singularité il s'agit, on va calculer les coefficients de Lyapunov pour le système X quand $x^* = x_1^*$ ou $x^* = x_2^*$. C'est le sujet de la section suivante. Pourquoi pour le système X ? On sait, qu'à une constante strictement négative près, ils seront les mêmes que pour L . Et comme, dans le système de Liénard, les termes en $\exp(z)$ et $\exp(x)$ risquent de nous poser problème, on revient au système X . Avant de calculer ces coefficients, on remarque qu'ils ne sont pas nécessaires dans le cas où $x^* = x_2$. En effet, on peut prouver la proposition suivante :

PROPOSITION 30. *Si $x^* = x_2^*$ alors la singularité $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ est asymptotiquement stable.*

DÉMONSTRATION. Si $x^* = x_2^*$, $(x_2^*, \frac{\delta}{\beta}x_2^*)$ peut être soit un foyer faible stable, soit un foyer faible instable, soit un centre. Si l'on montre que les deux dernières possibilités ne peuvent arriver, on aura bien que la singularité $(x_2^*, \frac{\delta}{\beta}x_2^*)$ est asymptotiquement stable, et la proposition 30.

Premièrement, $(x_2^*, \frac{\delta}{\beta}x_2^*)$ ne peut être instable. En effet, si elle l'était, on pourrait prouver l'existence d'au moins un cycle limite entourant la singularité $(x_2^*, \frac{\delta}{\beta}x_2^*)$ grâce au lemme (*) et au théorème de Poincaré Bendixson. Mais alors, par continuité, on aurait l'existence de ce cycle limite dans le cas où $x^* \gtrsim x_2^*$ et cela est impossible puisqu'on a vu que si $x_2^* < x^* < 1$ alors $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ est globalement asymptotiquement stable.

Deuxièmement, $(x_2^*, \frac{\delta}{\beta}x_2^*)$ ne peut être un centre. En effet, si c'était le cas, la singularité serait entourée par une famille d'orbites fermées. Cependant, par le lemme (*), les orbites de X sont contenues dans le rectangle de côtés 1 et $\frac{\delta}{\beta}$ pour un temps t assez grand, si bien que toutes les orbites fermées de cette famille devraient être contenues entièrement dans ce rectangle. Il en existerait donc une contenant toutes les autres (notons là α). Alors α verrait une infinité d'orbites périodiques d'un côté et aucune orbite périodique de l'autre. Mais cela est impossible pour un système analytique comme X . \square

On déduit des deux propositions précédentes le corollaire suivant :

COROLLAIRE 31. *Pour x^* très proche de x_2^* allant en décroissant, il se produit une bifurcation de Hopf super-critique, générant un cycle limite stable autour de la singularité $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ pour $x^* \lesssim x_2^*$.*

On peut maintenant s'intéresser à $x^* = x_1^*$, et étudier le signe du premier coefficient de Lyapunov non nul pour X en $(x_1^*, \frac{\delta}{\beta}x_1^*)$.

3.8. Les coefficients de Lyapunov pour X

On veut calculer les premiers coefficients de Lyapunov pour le système X en la singularité $(x_1^*, \frac{\delta}{\beta}x_1^*)$ qui est une singularité de type centre ou foyer faible. Par des changements de coordonnées standards on arrive à mettre le système sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + P(x, y) \\ \dot{y} &= x + Q(x, y) \end{cases}$$

où P et Q sont des polynômes en x et y de degré supérieur ou égal à 2, et où la singularité $(x_1^*, \frac{\delta}{\beta}x_1^*)$ est transformée en l'origine. On n'explicite pas ici les calculs puisqu'ils deviennent très vite très grands. Dans [3], on les effectue à l'aide du logiciel de calcul formel maple. A l'aide de maple également, dans [3], on calcule les coefficients de Lyapunov pour le système X quand $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ est une singularité de type centre ou foyer faible. On obtient :

$$V_o = \exp\left(\frac{-2\pi(2x^* + (a + \delta - 1)x^* + \delta a)}{\sqrt{\Delta}}\right) - 1 = \exp\left(\frac{-2\pi P(x^*)}{\sqrt{\Delta}}\right) - 1$$

$$\text{où } \Delta = 6\delta ax^*a + 4x^{*3} - 4x^{*4} - 2\delta ax^{*2} + 2ax^{*2} - a^2x^{*2} - 4ax^{*3} - x^{*2} + 2\delta x^{*2} - \delta^2x^{*2} + 4\delta a^2 - 2\delta^2x^*a - \delta^2a^2 - 2\delta a^2x^* = -P(x^*)^2 + \frac{4a\delta^2x^*}{\beta} + 4\delta x^*(a + x^*)^2$$

$$V_1 = \frac{\pi a(-1 + x^*)(2x^* + a - 1)}{4S(a + x^{*2})(a + x^*)^4} V_1^N$$

$$\text{où } S = \sqrt{\frac{-x^*(2x^* + a - 1)(a + x^{*2})}{(a + x^*)^2}}$$

$$\text{et } V_1^N = -a^3 - 6a^2x^* + a^2 - ax^{*3} - 6ax^{*2} - 3x^{*3}$$

$$V_2 = -\frac{\pi a(-1 + x^*)S}{96x^{*2}(a + x^{*2})^4(a + x^*)^5} V_2^N$$

$$\text{où } V_2^N = 3a^8x^{*2} - 4a^8 + 45a^7x^{*3} + 43a^3x^{*9} + 405a^4x^{*7} + 188a^7x^{*6} + \dots + 42x^{*7}a + 42x^{*4}a^3 + 4ax^{*11} + 250a^2x^{*9} + 18a^4x^{*8} + 106ax^{*10} = \text{une formule longue fonction des puissances de } a \text{ et de celles de } x^* \dots$$

On a alors la proposition suivante (voir [3] pour la démonstration) :

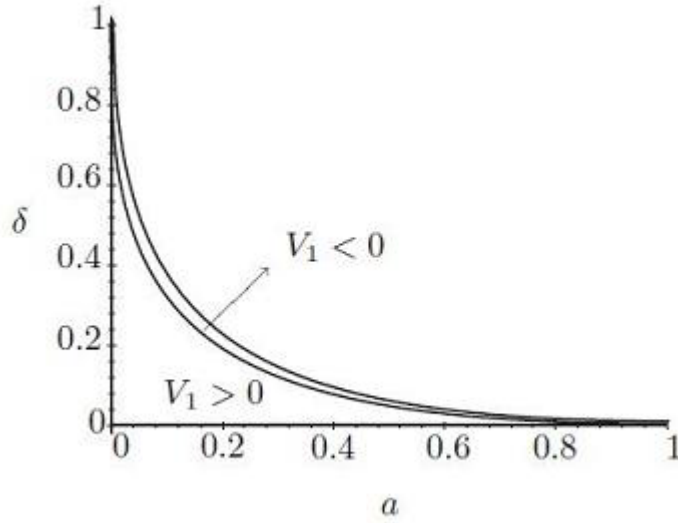
PROPOSITION 32. *Sur \mathcal{D} :*

1. $V_i = 0$ si et seulement si $V_i^N = 0$ pour $i = 1, 2$.
2. V_i^N et V_i ont même signe pour $i = 1, 2$.
3. Si $V_1 = 0$ alors $V_2 < 0$.

Si on se place en $x^* = x_1^*$, on a $V_0(x_1^*) = 0$. On s'intéresse alors, pour connaître la stabilité de la singularité $(x_1^*, \frac{\delta}{\beta}x_1^*)$, au signe de $V_1(x_1^*)$. Si $V_1(x_1^*)$ est nul, on s'intéresse au signe de $V_2(x_1^*)$. Etc...

REMARQUE. Le point 3. de la proposition précédente implique qu'il n'est pas nécessaire, dans cette étude, de calculer les coefficients de Lyapunov plus grands que V_2 pour le système X .

On sait que $x_1^* = \frac{-(\delta+a-1)-\sqrt{\Delta_p}}{4} = \frac{-(\delta+a-1)-\sqrt{(a+\delta-1)^2-8\delta a}}{4}$ ne dépend que de δ et a et par conséquent $V_1^N(x_1^*) = -a^3 - 6a^2x_1^* + a^2 - ax_1^{*3} - 6ax_1^{*2} - 3x_1^{*3}$, aussi. On trace le graphe de $V_1^N(x_1^*) = 0$ dans le plan $a\delta$ (ce graphe est le même que celui de $V_1(x_1^*) = 0$ par la proposition 32). On obtient qu'il divise la région \mathcal{D} en deux parties :



On a donc trois sous ensembles de \mathcal{D} (dont l'union est \mathcal{D} tout entier) qui sont pertinents à étudier pour connaître le portrait de phase de X au voisinage de $(x_1^*, \frac{\delta}{\beta} x_1^*)$:

- (1) $\{\delta, a \in \mathcal{D} / V_1(x_1^*) < 0\}$
- (2) $\{\delta, a \in \mathcal{D} / V_1(x_1^*) > 0\}$
- (3) $\{\delta, a \in \mathcal{D} / V_1(x_1^*) = 0\}$

3.9. Le portrait de phase de X au voisinage de $(x_1^*, \frac{\delta}{\beta} x_1^*)$

On commence par changer les paramètres considérés. On avait δ , a et β , on considère maintenant δ , a et x^* . Cela ne pose pas de problème puisqu'on sait que $\beta = \frac{\delta x^*}{(1-x^*)(a+x^*)}$ ne dépend que de ces trois nouveaux paramètres. De plus, δ et a sont restreints à l'ensemble \mathcal{D} , pendant que x^* varie entre 0 et 1 en passant par x_1^* et x_2^* . On se place, selon le signe de $V_1(x_1^*)$, sur un des sous ensembles de \mathcal{D} cités ci-dessus. On fait ensuite varier x^* au voisinage de x_1^* pour comprendre le portrait de phase de X au voisinage de $(x_1^*, \frac{\delta}{\beta} x_1^*)$ et les bifurcations qui s'y produisent.

1. Si $V_1(x_1^*) < 0$, alors $(x_1^*, \frac{\delta}{\beta}x_1^*)$ est asymptotiquement stable par la discussion menée dans la section 1.5. On a vu que pour $x^* < x_1^*$ assez proche de x_1^* (ou assez loin de 0...) $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ est également asymptotiquement stable sans être forcément globalement asymptotiquement stable et que pour $x^* > x_1^*$ assez proche de x_1^* (et plus petit que x_2^* ...), $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ est instable. Cela entraîne qu'il se produit dans ce cas, en x_1^* , une bifurcation de Hopf super-critique générant un cycle limite stable autour de $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ pour $x^* \gtrsim x_1^*$.

2. Si $V_1(x_1^*) > 0$, alors $(x_1^*, \frac{\delta}{\beta}x_1^*)$ est instable. On a vu que pour $x^* \gtrsim x_1^*$, $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ est instable également et que pour $x^* \lesssim x_1^*$, $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ est asymptotiquement stable (sans être forcément globalement asymptotiquement stable). Cela entraîne qu'il se produit dans ce cas, en x_1^* , une bifurcation de Hopf sous-critique générant un cycle limite instable autour de $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ pour $x^* \lesssim x_1^*$. De plus, grâce au lemme (*) vu précédemment et au théorème de Poincaré Bendixson, on sait que si $(x_1^*, \frac{\delta}{\beta}x_1^*)$ est instable alors il existe au moins un cycle limite stable qui l'entoure. Ce cycle limite stable est encore présent autour de $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ pour $x^* \lesssim x_1^*$ par continuité. Finalement, si $V_1(x_1^*) > 0$, pour $x^* \lesssim x_1^*$, $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ est entouré par au moins 2 cycles limites (un stable et un instable). On a également vu que pour $x^* \gtrsim 0$, $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ est globalement asymptotiquement stable, si bien qu'il ne peut être entouré par aucun cycle limite. On passe donc, en parcourant $[0, x_1^*[$ (partant de $x^* \lesssim x_1^*$ et décroissant jusqu'à $x^* = 0$), de deux cycles limites à zéro cycle limite. Cela entraîne qu'il se produit, dans cet intervalle, une bifurcation noeud-col pour les cycles limites. Il existe donc, pour $V_1(x_1^*) > 0$, $\tilde{x}^* \in [0, x_1^*[$ tel que :

- pour $x^* \in [0, \tilde{x}^*[$, $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ est globalement asymptotiquement stable et donc, en particulier, entourée par aucun cycle limite.
- pour $x^* \in]\tilde{x}^*, x_1^*[$, $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ est asymptotiquement stable et entourée par au moins deux cycles limites.
- pour $x^* = \tilde{x}^*$, $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ est asymptotiquement stable et entourée par un cycle limite semi-stable.

De plus, pour $x^* \in [\tilde{x}^*, x_1^*[$, $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ est asymptotiquement stable mais n'est évidemment pas globalement asymptotiquement stable. En effet, la présence d'au moins un cycle limite autour de la singularité empêche sa stabilité asymptotique globale puisque deux trajectoires d'un champ de vecteurs ne peuvent jamais se couper. Dans le cas où $x^* \in]\tilde{x}^*, x_1^*[$, le plus petit cycle limite entourant $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ est instable alors que le plus grand est stable. On a alors un phénomène de bistabilité intéressant par la coexistence d'un point d'équilibre stable et d'un cycle limite stable. Si les conditions initiales sont choisies assez proches du point d'équilibre, les trajectoires vont tendre vers ce point d'équilibre. Par contre, si elles sont choisies

assez loin de ce point d'équilibre, elles tendront vers le cycle limite stable. La stabilité des deux cycles limites entraîne que, dans le cas où $x^* = \tilde{x}^*$, le cycle limite semi-stable entourant $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ sera stable à l'extérieur et instable à l'intérieur.

3. Si $V_1(x_1^*) = 0$, alors la stabilité de $(x_1^*, \frac{\delta}{\beta}x_1^*)$ dépend du signe de $V_2(x_1^*)$ qu'on a assumé être toujours négatif. Il s'en suit que, dans ce cas, $(x_1^*, \frac{\delta}{\beta}x_1^*)$ est asymptotiquement stable. Avec uniquement cette information, on ne peut pas conclure sur le nombre de cycles limites entourant la singularité. On sait qu'il en existe localement au plus deux grâce à la discussion menée dans la sous section 1.6.5 (qui ne nous dit pas s'il en existe 0, 1 ou 2) mais il pourrait en exister d'autres, trop loin de $(x_1^*, \frac{\delta}{\beta}x_1^*)$ pour les voir. Par une discussion analogue à celle menée pour le cas $V_1(x_1^*) < 0$ on montre qu'il se produit, dans ce cas, en x_1^* , une bifurcation de Hopf super-critique générant un cycle limite stable autour de $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ pour $x^* \gtrsim x_1^*$.

Malgré cette description complète du comportement local de X au voisinage de chacune de ses singularités, plusieurs problèmes sont encore ouverts. C'est le sujet de la section suivante.

3.10. Problèmes ouverts

3.10.1. Problème ouvert 1. On a vu que si $V_1(x_1^*) \leq 0$, alors la singularité $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$, pour $x^* \leq x_1^*$, est asymptotiquement stable. Pour comprendre le portrait de phase de X au voisinage de $(x_1^*, \frac{\delta}{\beta}x_1^*)$ et les bifurcations qui s'y produisent dans le cas où $V_1(x_1^*) \leq 0$ il reste à savoir si cette stabilité asymptotique est globale ou si au moins un cycle limite entoure la singularité $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ dans ces cas. Sans pouvoir la prouver, on énonce la conjecture suivante :

CONJECTURE 33. *Si $V_1(x_1^*) \leq 0$ alors $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ est globalement asymptotiquement stable pour $0 < x^* \leq x_1^*$.*

3.10.2. Problème ouvert 2. On a vu que si $V_1(x_1^*) > 0$, alors la singularité $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$, pour $x^* \lesssim x_1^*$, est instable et entourée par au moins 2 cycles limites. Pour comprendre le portrait de phase de X au voisinage de $(x_1^*, \frac{\delta}{\beta}x_1^*)$ et les bifurcations qui s'y produisent dans le cas où $V_1(x_1^*) > 0$, il reste à savoir si d'autres cycles limites peuvent exister, qu'on ne voit pas localement. Sans pouvoir la prouver, on énonce la conjecture suivante :

CONJECTURE 34. *Si $V_1(x_1^*) > 0$ alors $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ est entourée par au plus deux cycles limites pour $0 < x^* \leq x_1^*$.*

3.10.3. Problème ouvert 3. La proposition 29 affirme que si $x_1^* < x^* < x_2^*$ alors il existe au moins un cycle limite stable entourant la singularité $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$. On aimerait pouvoir montrer la conjecture suivante :

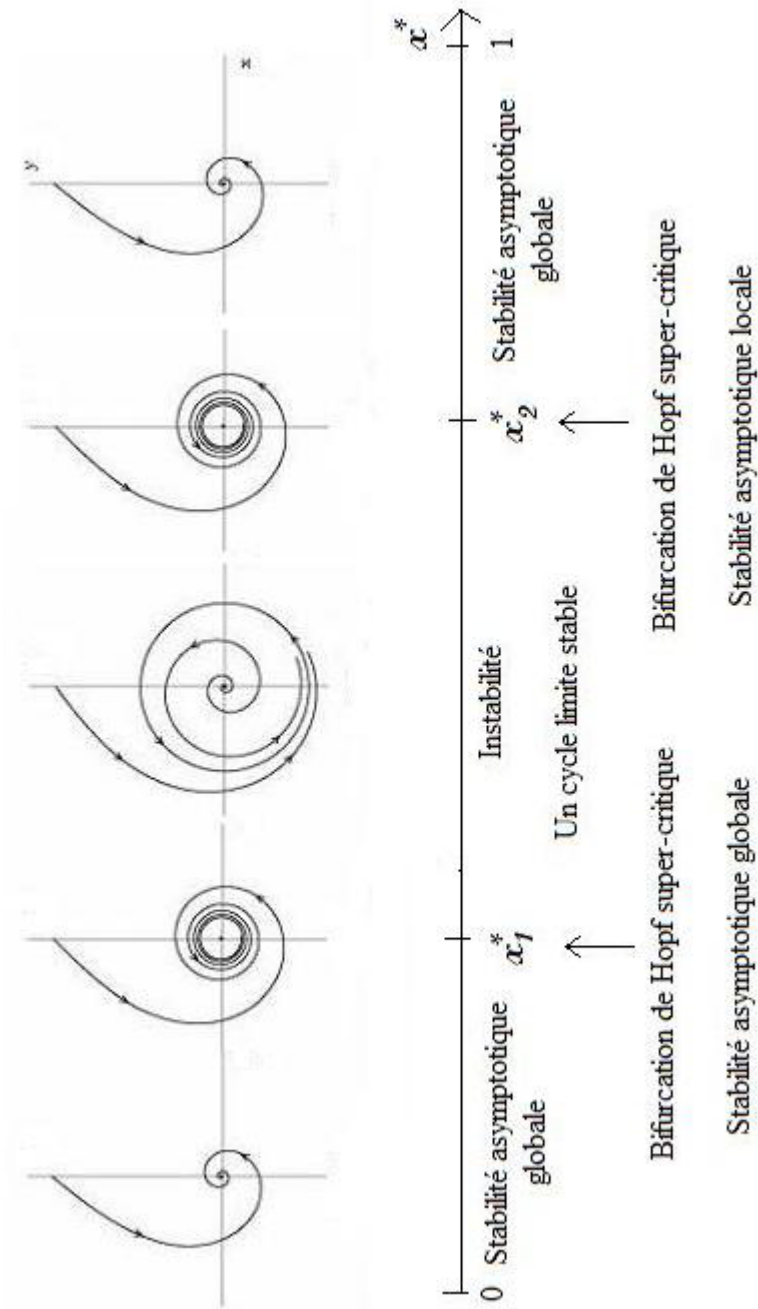
CONJECTURE 35. *Si $x_1^* < x^* < x_2^*$ alors il existe exactement un cycle limite stable entourant la singularité $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$.*

L'idée de la démonstration serait d'utiliser le critère d'unicité des cycles limites donné par le théorème de Zhang Zhifen, mais il faudrait pour cela élargir les hypothèses de ce dernier.

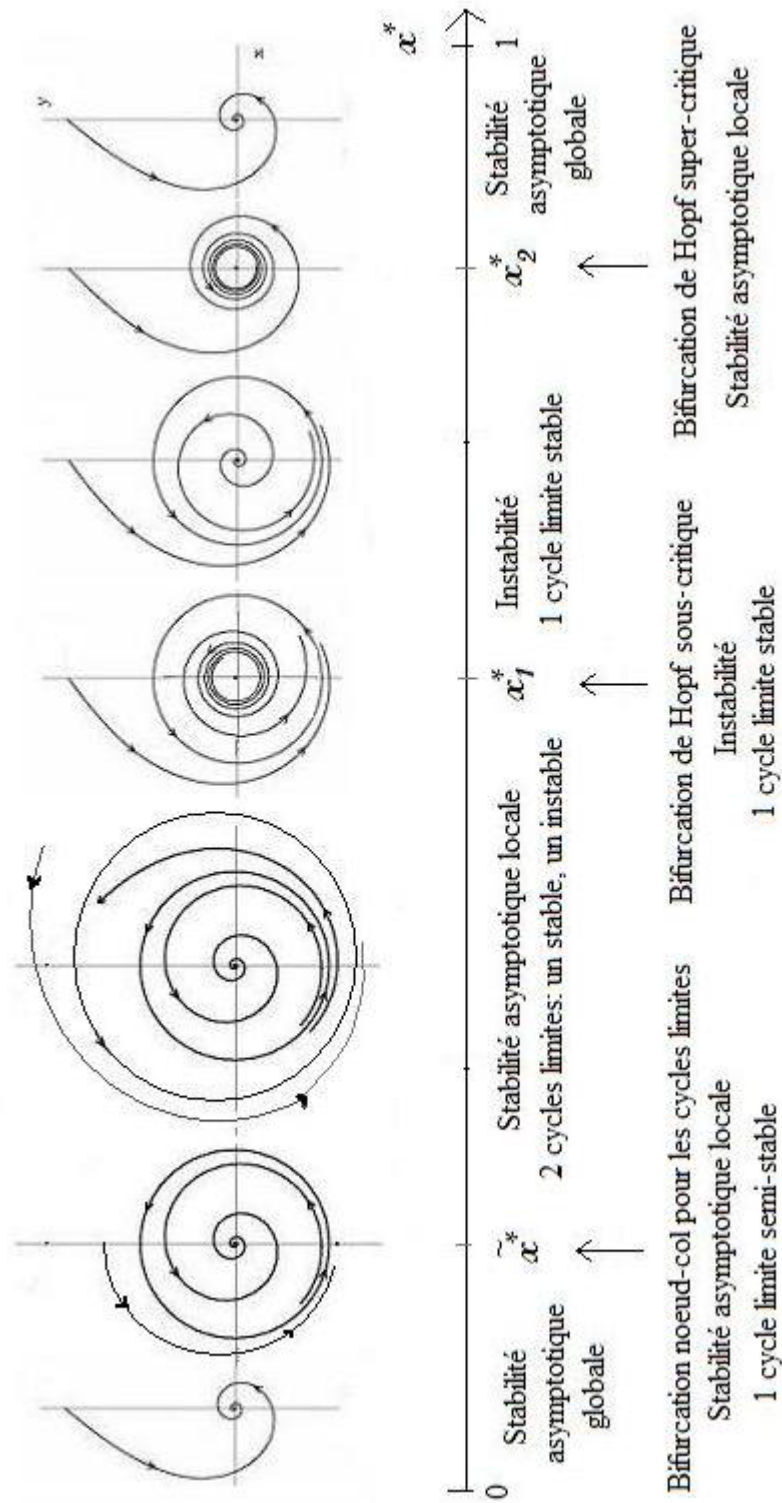
3.11. Diagrammes de bifurcations et simulations numériques

Le but de cette section est, dans un premier temps, de résumer l'étude faite ci dessus sous forme de diagrammes de bifurcation . On suppose vraies les conjectures 33, 34 et 35, on se place sur la région \mathcal{D} , et on étudie les bifurcations qui se produisent quand x^* parcourt l'intervalle $[0, 1]$, en fonction du signe de $V_1(x_1^*)$. Dans un second temps, on donne quelques exemples de simulations numériques. En particulier, on appuie les conjectures supposées vraies ci-dessus.

3.11.1. Diagrammes de Bifurcation. Pour δ, a et x_1^* dans l'ensemble $\{\delta, a \in \mathcal{D} / V_1(x_1^*) \leq 0\}$ on obtient le diagramme de bifurcation suivant :



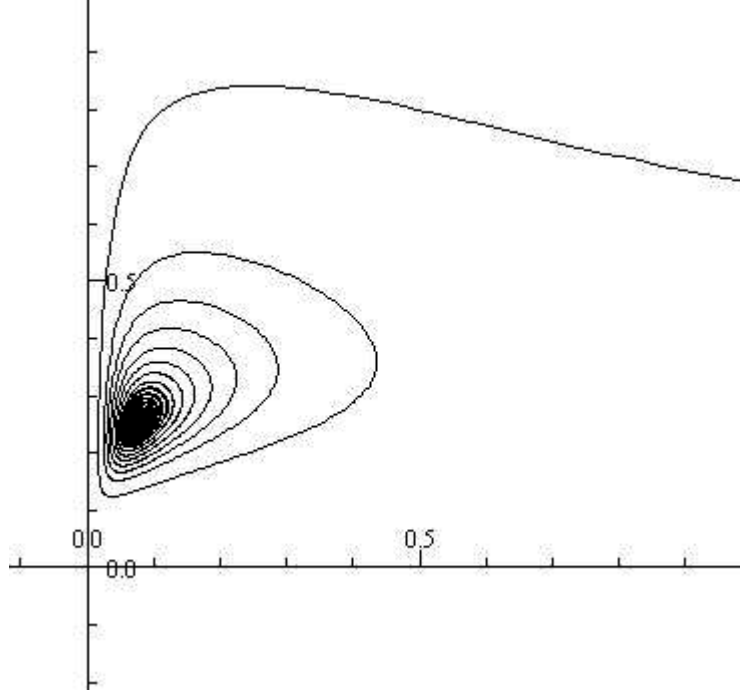
Pour δ , a et x_1^* dans l'ensemble $\{\delta, a \in \mathcal{D}/V_1(x_1^*) > 0\}$ on obtient le diagramme de bifurcation suivant :



3.11.2. Simulations numériques.

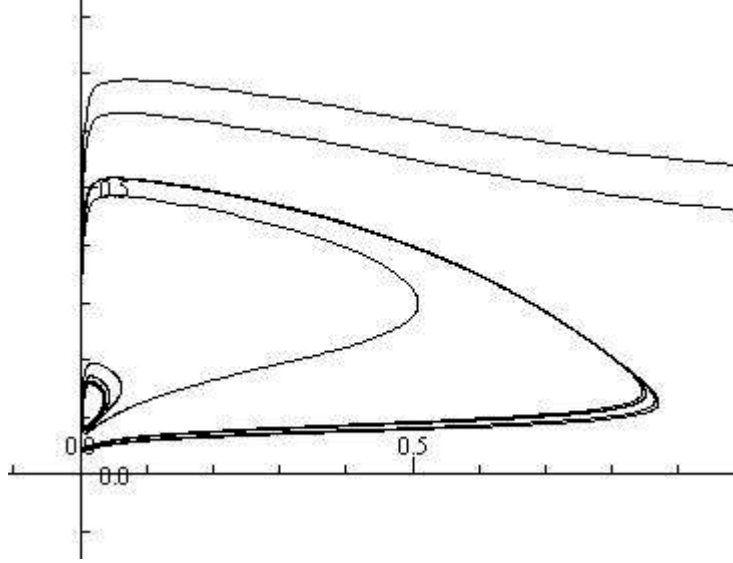
Conjecture 33 : On pose d'abord $\delta = 0.2$. On a alors, par définition de la région \mathcal{D} , que $0 < a \lesssim 0.21$. Si on prend $a = 0.2$, on a bien que le couple $(\delta, a) \in \mathcal{D}$. Dans ce cas, $P(x^*) = 2x^{*2} - 0.6x + 0.04$. On en déduit que $\Delta_P = 0.04$ et donc que $x_1^* = 0.1$ et $x_2^* = 0.2$. Les puissances de x_1^* deviennent très vite très petites et il est désagréable de calculer $V_1^N(x_1^*)$ par exemple, pour connaître son signe. Mais avec un logiciel adapté (comme Excel), on trouve que $V_1^N(x_1^*) \simeq -0.023 < 0$. Il faut maintenant choisir une valeur pour β . On a $\beta = \frac{\delta x^*}{(1-x^*)(a+x^*)}$ et dans ce cas, $\beta(x_1^*) \simeq 0.074$ et $\beta(x_2^*) \simeq 0.125$. Considérons β comme une fonction de x^* , $\beta(x^*)$. Pour δ et a fixés, on a que $\beta'(x^*) = \frac{\delta(a+x^{*2})}{((1-x^*)(a+x^*))^2} > 0$. Donc $\beta(x^*)$ est croissante selon x^* . Si l'on prend $\beta < \beta(x_1^*)$, 0.06 par exemple, et qu'on se réfère au premier diagramme de bifurcation, on voit que le système $X(0.2, 0.2, 0.06)$ aura une singularité de type foyer attracteur dont la stabilité est globale. En particulier, il n'y aura ici la présence d'aucun cycle limite dans le plan. Et cela est en accord avec la conjecture 33.

Finalement, on obtient le portrait de phase suivant pour $X(0.2, 0.2, 0.06)$:



Conjecture 34 : On pose maintenant $\delta = 0.1$. On a alors, par définition de la région \mathcal{D} , que $0 < a \lesssim 0.36$. Si on prend $a = 0.1$, on a bien que le couple $(\delta, a) \in \mathcal{D}$. Dans ce cas, $P(x^*) = 2x^{*2} - 0.8x + 0.01$. On en déduit que $\Delta_P = 0.56$ et donc que $x_1^* \simeq 0.013$ et $x_2^* \simeq 0.39$. Ici encore, il est désagréable de calculer $V_1^N(x_1^*)$, mais avec

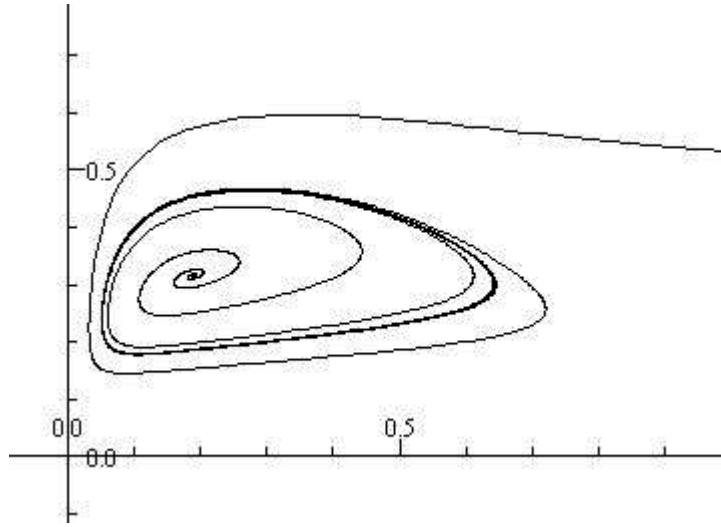
un logiciel adapté, on trouve que $V_1^N(x_1^*) \simeq 0.006 > 0$. Il faut maintenant choisir une valeur pour β . Dans ce cas, $\beta(x_1^*) \simeq 0.012$ et $\beta(x_2^*) \simeq 0.129$. On aimerait trouver une valeur de β pour laquelle la singularité $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ du système $X(0.1, 0.1, \beta)$ et une singularité asymptotiquement stable entourée par deux cycles limites. C'est-à-dire qu'on aimerait trouver une valeur de β pour laquelle $x^* \in]\tilde{x}^*, x_1^*[$, mais on ne connaît pas la valeur de \tilde{x}^* ... On sait que β doit être inférieur à $\beta(x_1^*) \simeq 0.012$ mais pas trop proche de 0. On fait plusieurs essais, et finalement, on obtient le portrait de phase suivant pour $X(0.1, 0.1, 0.01)$:



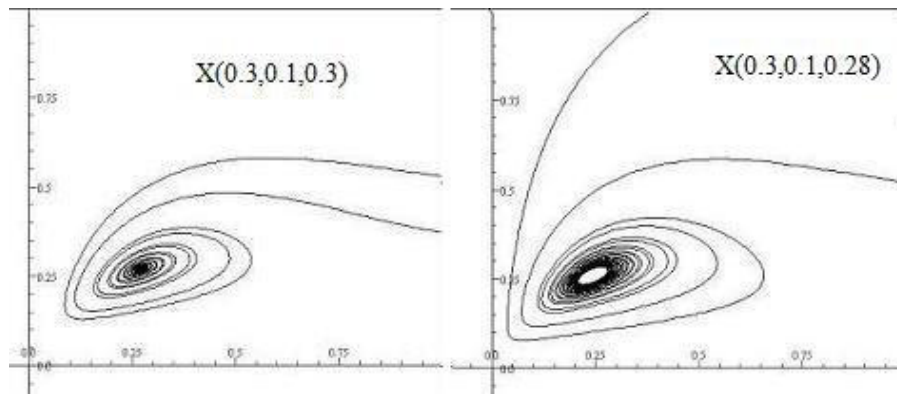
Et cela est en accord avec la conjecture 34.

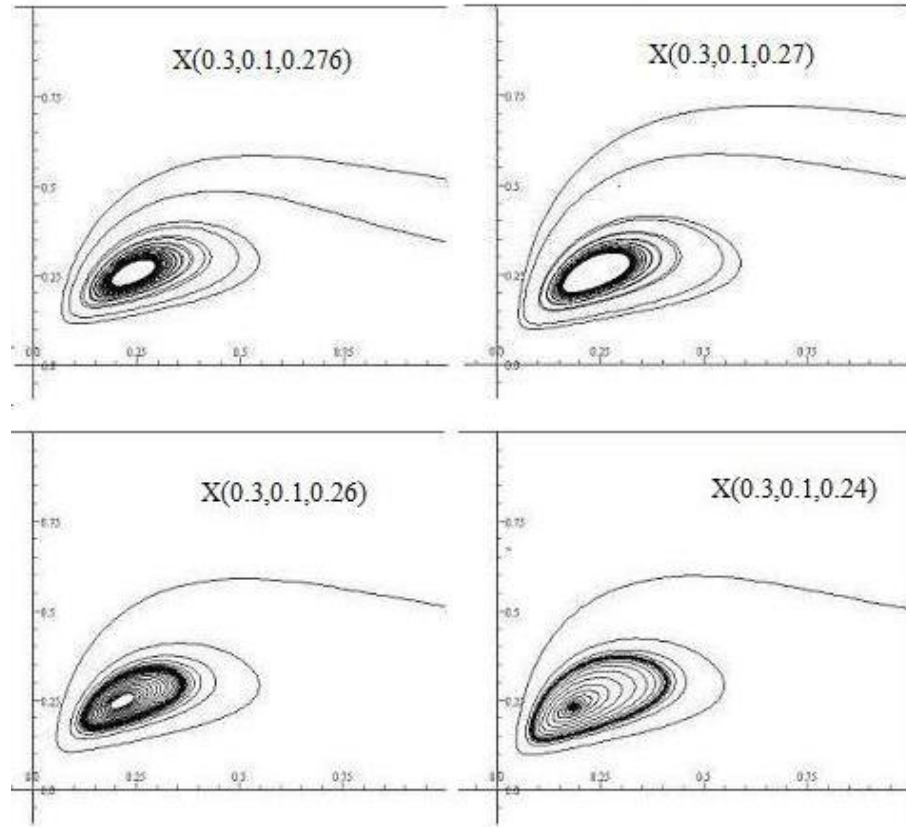
Conjecture 35 : On pose a nouveau $\delta = 0.1$. Si on prend $a = 0.2$, on a bien que le couple $(\delta, a) \in \mathcal{D}$. Dans ce cas, $P(x^*) = 2x^{*2} - 0.7x + 0.02$. On en déduit que $\Delta_P = 0.33$ et donc que $x_1^* \simeq 0.0313$ et $x_2^* \simeq 0.319$. Avec un logiciel adapté, on trouve que $V_1(x_1^*) \simeq 0.007 > 0$. Dans ce cas, $\beta(x_1^*) \simeq 0.014$ et $\beta(x_2^*) \simeq 0.090$. Ainsi, si l'on prend $\beta(x_1^*) < \beta < \beta(x_2^*)$, 0.06 par exemple, et qu'on se réfère au second diagramme de bifurcation, on voit que le système $X(0.1, 0.2, 0.06)$ aura une singularité de type foyer répulseur (donc instable) entourée par un unique cycle limite stable, selon la conjecture 35. On peut calculer explicitement la valeur de la singularité. On a vu que la singularité correspond à $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ où $0 < x^* < 1$ est l'unique solution positive de l'équation $Q(x) = \delta x - \beta(x + a)(1 - x) = 0$. Avec ces valeurs particulières de δ, a et β , on a que $Q(x) = 0.006x^2 + 0.052x - 0.012$ donc que $\Delta_Q \simeq 0.005$. La racine positive de Q dans ce cas est $x_2 \simeq 0.19$. Alors la singularité sera aux alentours de $(x, y) \simeq (0.19, 0.32)$.

Finalement, on obtient le portrait de phase suivant pour $X(0.1, 0.2, 0.06)$:

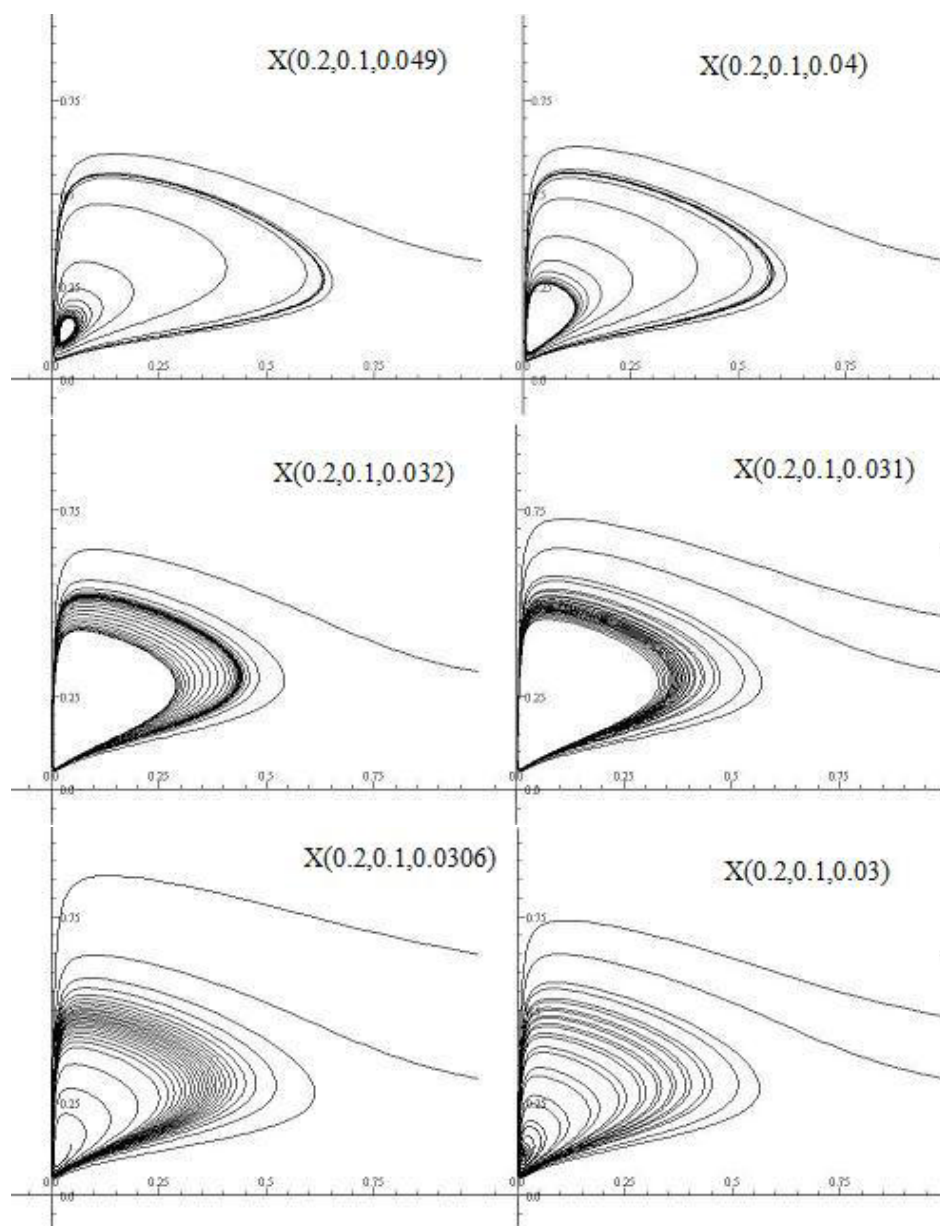


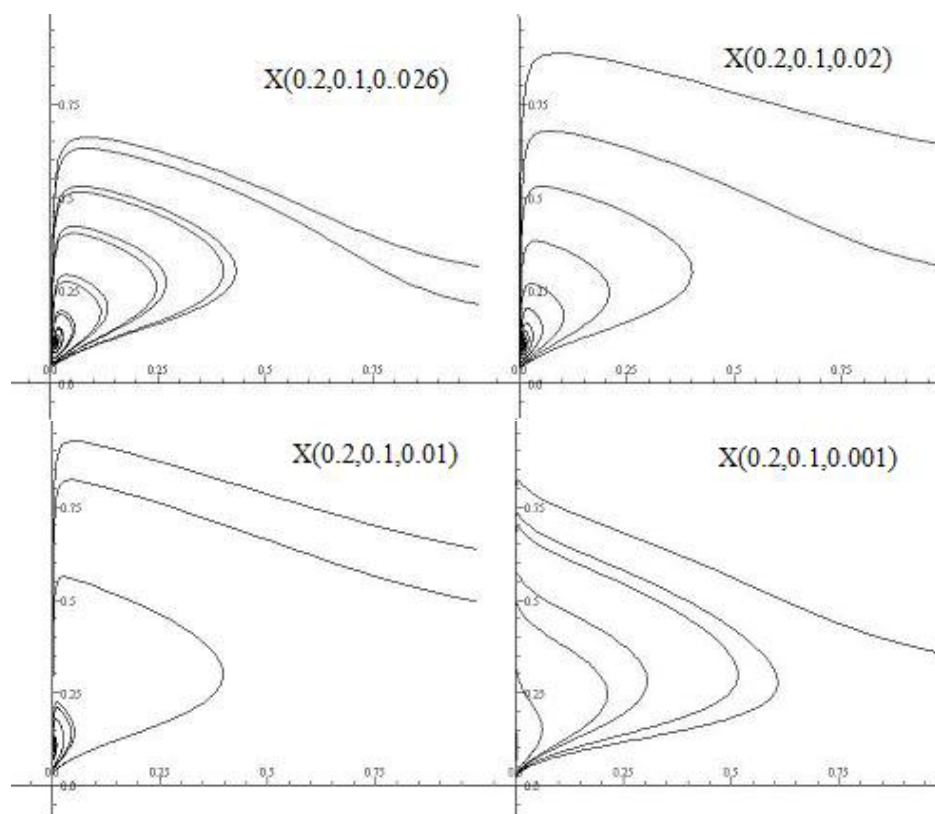
Bifurcation de Hopf super-critique : On s'intéresse maintenant à la bifurcation de Hopf super-critique générant un cycle limite stable autour de la singularité $(x^*, \frac{\delta}{\beta}x^*)$ pour $x^* \lesssim x_2^*$. Dans ce cas, le point de bifurcation est $(x_2^*, \frac{\delta}{\beta}x_2^*)$ et la valeur de bifurcation est x_2^* , quand on considère les paramètres comme étant a , δ et x^* . On prend $\delta = 0.3$. On a alors, par définition de la région \mathcal{D} , que $0 < a \lesssim 0.134$. Si on prend $a = 0.1$, on a bien que le couple $(\delta, a) \in \mathcal{D}$. Dans ce cas, $P(x^*) = 2x^{*2} - 0.6x + 0.03$. On en déduit que $\Delta_P \simeq 0.12$ et donc que $x_1^* \simeq 0.063$ et $x_2^* \simeq 0.237$. De plus on trouve $V_1^N(x_1^*) \simeq -5.3 \cdot 10^{-6} \lesssim 0$, $\beta(x_1^*) \simeq 0.124$ et $\beta(x_2^*) \simeq 0.276$. En prenant quelques valeurs de β entre 0.30 et 0.24, on obtient les portraits de phase successifs suivants pour X :





Bifurcation nœud col pour les cycles limites : On s'intéresse pour finir à la bifurcation nœud col pour les cycles limites qui se produit quand $V_1^N(x_1^*) > 0$. En considérant les paramètres a , δ et x^* , le point de bifurcation est $(\tilde{x}^*, \frac{\delta}{\beta}\tilde{x}^*)$ et la valeur de bifurcation est \tilde{x}^* . On prend $\delta = 0.2$. On a alors, par définition de la région \mathcal{D} , que $0 < a \lesssim 0.214$. Si on prend $a = 0.1$, on a bien que le couple $(\delta, a) \in \mathcal{D}$. Dans ce cas, $P(x^*) = 2x^{*2} - 0.7x + 0.02$. On en déduit que $\Delta_P \simeq 0.33$ et donc que $x_1^* \simeq 0.031$ et $x_2^* \simeq 0.318$. De plus on trouve $V_1^N(x_1^*) \simeq 0.004 > 0$, $\beta(x_1^*) \simeq 0.049$ et $\beta(x_2^*) \simeq 0.223$. En prenant quelques valeurs de β entre 0.049 et 0.001, on obtient les portraits de phase successifs suivants pour X :





Bibliographie

- [1] J.T TANNER, *The stability and the intrinsic growth rates of prey and predator populations*, Ecology 56 (1975), 855-867
- [2] C.S HOLLING, *The components of predation as revealed by a study of small-mammal predation of the European pine sawfly*, Canadian Entomologist 91 (1959), 293-320
- [3] A. GASULL, E. KOIJ, J. TORREGROSA, *Limit cycles in the Holling Tanner model*, SIAM 41 (1997) 149-167
- [4] J. PALIS Jr, W. DEMELO, *Geometric theory of dynamical systems*, Springer-Verlag New-York (1982)
- [5] A.J LOTKA, *Elements of physical biology*, Williams and Wilkins, Baltimore (1925)
- [6] V. VOLTRRA, *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*, Mem. R. Com. Tolassogr. Ital. 131 (1927) 1-142
- [7] S. WIGGINS, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, Springer (1990) 193-210
- [8] D.K ARROWSMITH, C.M PLACE, *An introduction to dynamical systems*, Cambridge University Press (1990)
- [9] A.M LYAPUNOV, *The general problem of the stability of motion* (in Russian), Doctoral dissertation, Univ. Kharkov (1892)
- [10] L. PERKO, *Differential equations and dynamical systems*, Springer-Verlag (2006)
- [11] Z. Zhang, *Proof of the uniqueness theorem of limit cycles of generalized Lienard equations*, Appl. Anal. 23 (1986) 63-76
- [12] S-N CHOW, C. LI, D. WANG, *Normal Forms and bifurcation of planar vector fields*, Cambridge University Press (1994)
- [13] S-B HSU, T. W. HUANG, *Global stability for a class of predator prey systems*, SIAM, J. Appl. Math. 55(3) (1995) 763-783
- [14] H. DULAC - *Recherches sur les points singuliers des équations différentielles*, Journal of École Polytechnique, 2(9) (1904) 1-125