MASD Assignment 1

Group 56: wgh762, wqm216, hfc635

September 2021

Exercise 1

a

Vi starter denne opgave med funktionen $f : D \to R, D \subseteq R$, som har en grænse L når x går imod $c \in D$ hvis for hvert tal $\epsilon > 0$ der et nummer $\delta > 0$ således at:

$$0 < |x - c| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon \tag{1}$$

I denne opgave skal vi bevise at hvis den forgående implikation holder for nogen $\epsilon_0 > 0$, at den også holder for alle $\epsilon \geq \epsilon_0$.

Da vi ved at $\epsilon > 0$ holder og at for hvert $\epsilon > 0$ eksistere der $\delta > 0$, således at vores (1) ovenfor holder, vil det medføre at for alle $\epsilon \geq \epsilon_0$ vil den samme δ medføre at $|f(x) - L| < \epsilon$.

Dette gør at når grænsen skal bestemmes, så behøves det ikke at vise at implikationen gælder for alle $\epsilon > 0$.

b

Vi ved at: $x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2)$ og at $f^{-1}(f(x)) = x$
Vi kan derfor skrive vores første udtryk om til $f^{-1}(f(x_1)) < f^{-1}(f(x_2))$. Dermed kan vi se at $f^{-1}(x)$ er strengt stigende, da f(x) også er det.

c

Det skal vises at funktionen er kontinuerlig i alle punkter. Placeholderen for ethvert givet punkt kan kaldes y_0. Hvis man lader x_0 være en værdi sådan at $y_0 = f(x_0)$, så skal det vises at:

$lim_{y->y_0}(f^{-1}(y)) = x_0$

Eller, skrevet på en anden måde:

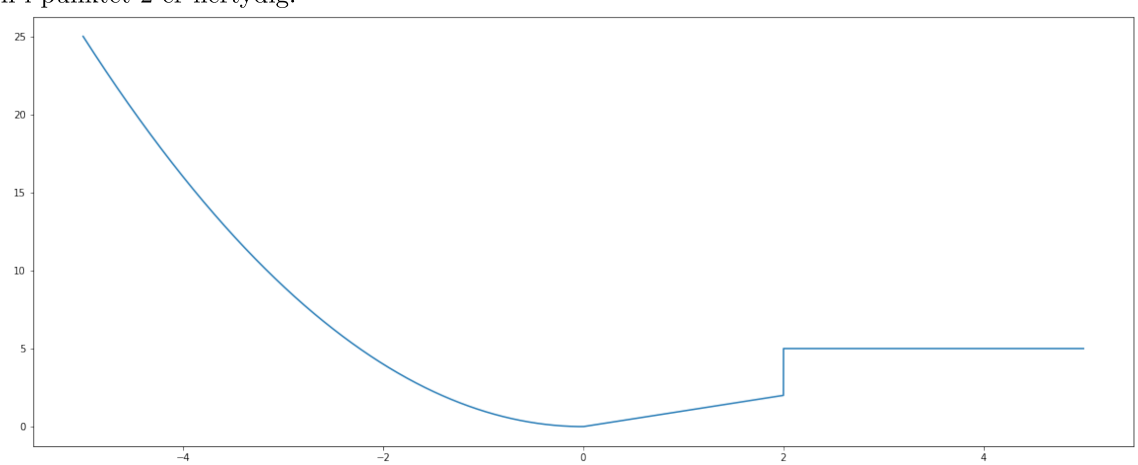
$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall y : |y - y_0| < \delta \implies |f^{-1}(y) - x_0| < \epsilon$

Hvis man har en $\epsilon_0 > 0$ sådan at $x_0 - \epsilon_0 \in D$ og $x_0 + \epsilon_0 \in D$. Sådan en ϵ_0 eksisterer altid, da 'D' er et åbent interval.
Fra resultatet af 'a' så kan vi formode at $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$. Derfor vides det at:
$x_0 - \epsilon < f(x_0) < x_0 + \epsilon$
Siden funktionen er strengt stigende, så haves det at:
$f(x_0 - \epsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \epsilon)$
Lad følgende være sandt:
$\delta = min\{f(x_0) - f(x_0 - \epsilon), f(x_0 + \epsilon) - f(x_0)\}$
Så ville:
$\delta \leq f(x_0) - f(x_0 - \epsilon) \iff f(x_0 - \epsilon) \leq f(x_0) - \delta$
og lignende:
$\delta \leq f(x_0 + \epsilon) - f(x_0) \iff f(x_0) + \delta \leq f(x_0 + \epsilon)$
Hvis det så følger at:
$f(x_0) - \delta < y < f(x_o) + \delta$
så kan følgende siges:
$f(x_0 - \epsilon) < y < f(x_0 + \epsilon)$
Siden den inverse funktion, ifølge 'b', er strengt stigende, så fås det at:
$f^{-1}(f(x_0 - \epsilon)) < f^{-1}(y) < f^{-1}(f(x_0 + \epsilon)) \iff x_0 - \epsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \epsilon$
Med andre ord: At den inverse funktion er kontinuerlig.

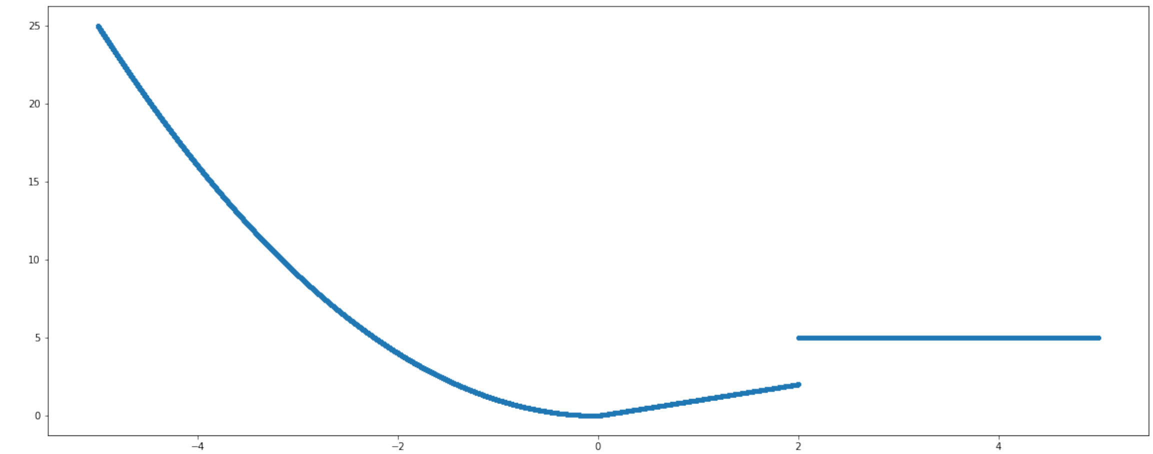
Exercise 2

a)

Når vi tegner vores funktion med plt.plot(x,y), bliver funktionen tegnet som kontinuert. Dog er punktet (2,y) en lodret streg. Hvilket altså kunne tyde på at den ikke kontinuert, da funktionsværdien i punktet 2 er flertydig.



Hvis vi i stedet tegner vores graf for funktion med prikker ved hjælp af plt.plot(x,y, '.') og laver vores interval mellem prikkerne meget små, ser vi i stedet at funktionsværdien hopper fra 2 til 5 omkring x værdien 2.



Dette giver selvfølgelig god mening når man kigger på selve funktionen. Vi påstår ud fra dette at punktet (2,f(2)) ikke er kontinuert, mens at resten af punkterne i intervallet er kontinuerte.

b)

Jeg vil starte med at bevise at alle punkter i intervallet $a \in [-5, 5]$ på nær a=2, så er funktionsværdien i a det samme som grænseværdien $\lim_{x\to a} f(x)$ $\forall \mathbf{a} \in [\mathbf{-5}, \mathbf{5}] \neq \mathbf{2}, \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$, Da funktionen f(x) består af flere polynomier med hver deres domæne, ved vi at disse er kontinuerte i alle punkterne i deres domæne. (Stewart et. al 2021: kap. 2.5, Sætning 7). Derfor skal vi blot finde ud af hvorvidt de er kontinuerte i de punkter hvor den skifter mellem de forskellige domæner.

Jeg har valgt at dele de tilfælde op i 3 funktioner for at behandle dem enkeltvis. Jeg har kaldt dem $f(x)_1$,$f(x)_2$ og $f(x)_3$
$f(x)_1 = x^2 | x < 0$
$f(x)_2 = x | x \geq 0 \wedge x \leq 2$
$f(x)_3 = 5 | x > 2$

Disse er altså alle polynomier og er derfor alle hver især kontinuerte inden for deres domæne. Men da de alle indgår i den samme funktion skal vi nu kigge på om overgangende mellem domænerne og se om disse punkter er kontinuerte. Dette gør vi ved at kigge på om om grænseværdien fra begge sider er det samme som funktionsværdien i punkterne. Hvis dette er tilfældet er funktionen kontinuerte i dette punkt. (Stewart et. al 2021: kap. 2.5, definition 1).

Vi starter med punktet (0,f(0)).

$f(0) = x = 0$

$\lim_{x\to 0} f(x)_1 = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$

$\lim_{x\to 0} f(x)_2 = \lim_{x\to 0} x = 0$

$\downarrow$

$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

Dermed kan vi altså se at ligegyldig om vi kommer fra negative x eller positive bevæger vi os mod grænseværdien 0 hvis x bevæger sig mod 0, og da funktionsværdien for x=0 også er 0, kan vi sige at den er funktionen er kontinuert punktet (0,f(0)). (Stewart et. al 2021: kap. 2.5, definition 1)

Så har vi bevist at funktionen er kontinuert for alle punkter i $a \in [-5,5] \neq 2$.

Så skal vi bare vise at den ikke er kontinuert ved punktet 2. Dette kan vi se da: $\lim_{x\to 2} f(x)_2 = \lim_{x\to 2} 5 = 5$ og $f(2) = x = 2$

Vi kunne også skrive dette ved at tage den originale funktion f(x) og specificere at vi bevæger os fra et x større end 2.

Altså er funktionen ikke kontinuert fra højre i punktet (2,f(2)).

Dog er dette punkt kontinuert fra venstre da f(2) = 2 og $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$

Exercise 3

Først lades sættet $P_n = C_1, C_2, C_3, ..., C_n$ være hjørnerne af polygonen, talt i urets retning. Alle fortløbende hjørner, C_i og $C_i + 1$, danner en trekant med O værende det tredje hjørne.

Hvis man så sætter et mellempunkt mellem to fortløbende medlemmer af P_n, så kan man danne retvinklede trekanter, dette punkt kaldes M_i. den indre vinkel af denne retvinklede trekant, ved O, er $\frac{\pi}{n}$

h sættes til at være længden mellem M_i og O, dette ville svare til: radius (da længden mellem C_i og O går fra midten af cirklen til kanten af cirklen) gange cosinus af den indre vinkel der tidligere blev fundet. Med andre ord:

$r \cdot cos(\frac{\pi}{n})$.

I samme retning, så ville længden mellem C_i og M_i, l, være:

$r \cdot sin(\frac{\pi}{n})$

Med dette kan vi opbygge formularen for det areal der ville blive optaget af polygonen:

$S_n = 2n \cdot \frac{1}{2} lh = n \cdot r^2 sin(\frac{\pi}{n}) cos(\frac{\pi}{n})$

Med dette, kan man begynder at sætte grænser på:

$S = lim_{n\to\infty} S_n = lim_{n\to\infty}(n \cdot r^2 sin(\frac{\pi}{n}) cos(\frac{\pi}{n})) = lim_{n\to\infty}(\pi r^2 \cdot \frac{sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}} cos(\frac{\pi}{n})) = lim_{n\to\infty}(\pi r^2) \cdot lim_{n\to\infty}(\frac{sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}} cos(\frac{\pi}{n})) = \pi r^2$

Grunden til det sidste step er følgende grænseregler:

$lim_{n\to\infty} \pi r^2 = \pi r^2, lim_{n\to\infty}(\frac{sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}}) = 1, lim_{n\to\infty}(cos(\frac{\pi}{n})) = 1$

Den specifikke grund til at følgende sker:

$n \cdot r^2 sin(\frac{\pi}{n}) cos(\frac{\pi}{n}) = \pi r^2 \cdot \frac{sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}} cos(\frac{\pi}{n})$

Er at man kan erstatte det 'usynlige' ettal foran 'n' med $\frac{\pi}{\pi}$. Dette fører til følgende udsagn:

$\frac{n\pi \cdot r^2 sin(\frac{\pi}{n}) cos(\frac{\pi}{n})}{\pi}$

derfra kan 'n' sættes til at være nævners nævner, og divisionstregen kan begrænses til sinus for læsbarhed og løsbarhed. hvilket fører til det førnævnte udsagn:

$\pi r^2 \cdot \frac{sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}} cos(\frac{\pi}{n})$