MASD Assignment 4

hfc635
wqm216
wgh762

October 2021

1 Introduction

1

a

Per definition er $\lim_{x\to\infty} cf(x) = c\lim_{x\to\infty} f(x)$ hvor c er en konstant. Derfor kan vi også sige at:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow -1 * \lim_{n\to\infty} a_n = -1 * a \iff \lim_{n\to\infty} -a_n = -a$$

Med andre ord vil -a konvergere mod -a hvis a konvergere mod a.

b

Vi vil gerne bevise at a_n konvergere mod a for alle n større en n_0 hvis og kun hvis $(a_n)_i$ konvergere mod a_i.

$$\Rightarrow 0 < |a_n - a| < \epsilon$$
$$\Rightarrow 0 < \left\| \begin{pmatrix} (a_n)_1 \\ (a_n)_2 \\ \vdots \\ (a_n)_d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (a)_1 \\ (a)_2 \\ \vdots \\ (a)_d \end{pmatrix} \right\| < \epsilon$$
$$\Rightarrow 0 < \sqrt{((a_n)_1 - (a)_1)^2 + ... + ((a_n)_d - (a)_d)^2} < \epsilon$$

Dette medføre at dette også må gælde at et hvert led i $|a_n - a|$ også er mindre end epsilon, da $\sqrt{((a_n)_1 - (a)_1)^2 + ... + ((a_n)_d - (a)_d)^2} \geq \sqrt{((a_n)_i - (a)_i)^2}$

$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{((a_n)_i - (a)_i)^2} < \epsilon$
$\Rightarrow 0 \leq |(a_n)_i - (a)_i| < \epsilon,$
$\Rightarrow (a_n)_i \to (a)_i$

Hermed kan vi se at hvert $(a_n)_i$ nødvendigvis må konvergere mod a_i for alle $n > n_0$ hvis a_n konvergere mod a.

Dernæst formodes det at $(a_n)_i \mapsto a_i$ for alle $i = 1, ..., d$ er sandt, for at bevise udsagnet $a_n \mapsto a$. Lad $\epsilon > 0$ of $i = \{1, ..., d\}$, derudover defineres: $\epsilon' = \frac{\epsilon}{\sqrt{d}}$. Gennem definitionen for konvergens, samt formodningen, vides det at der eksistere et naturligt tal N_i så hvis $n > N_i$ så er følgende tilfældet:

$$|(a_n)_i - a_i| < \epsilon' \Rightarrow |(a_n)_i|^2 = |(a_n)_i| \cdot |(a_n)_i| < \epsilon'^2 = (\frac{\epsilon}{\sqrt{d}})^2 = \frac{\epsilon^2}{d}$$

Siden dette holder for enhver i, mellem 1 og d, så kan N sættes til at være lig $max\{N_i|i\}$. På den måde, hvis $n > N$, så er det også tilfældet at $n > N_i$ for alle i mellem 1 og d. Derigennem, hver eneste gang $n > N$ så haves det at:

$$\|a_n - a\|^2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} |(a_n)_i - a_i|^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{d} \epsilon'^2} = \sqrt{d\epsilon'^2} = \sqrt{d}\epsilon' = \sqrt{d}\frac{\epsilon}{\sqrt{d}} = \epsilon$$

,

På dette tidspunkt, gennem definitionen for konvergens, haves det at $a_n \mapsto a$

Begge retninger er nu bevist.

2

Vi skal bevise at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

Dette gøres ved at vi opskriver serien c_n såleds

$$C_n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Serien beskriver at der starteds med én hel kage samt formlen for hvorleds der tages en halvdel af helheden for hvert "n".
Næste trin er at vise at $c_n \to 0$ for $n \to \infty$, altså at at c_n går mod 0 når antallet stiger. Vi løser dette vha induktion.

Første trin er basis trinet:

$P(1) = 1\frac{1}{2^1}$, hvilket er sandt da $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Det samme gør sig gældende for $P(2) = 1 - \frac{1}{2^2} \rightarrow 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Næste trin er induktions trinet:

Vi skal nu viste at $k \geq 1$ hvis P(k) er sand, så er P(k + 1) også sand.

Vi antager at for et fiksed $k \geq 1, C_k = \frac{1}{2^k}$. Vi ønsker nu at vise at P(k + 1) er sand.

$$c_{k+1} = 1 - \sum_{n=1}^{k+1} \frac{1}{2^n} = 1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \ )$$

Da $c_{k+1} = 1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^k}$, så kan det øvrige udtryk omskrives til

$$c_k - \frac{1}{2^{k+1}}$$

Da vi tidligere har antaget af der findes et fiksed $k \geq 1$ bliver dette til:

$$\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}} = (\frac{1}{2})^k - (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^k = (\frac{1}{2})^k(1 - \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^k$$

Derved finder vi følgende:

$$c_k - c_{k+1} = c_{k+1}$$

Hvis vi isolere c_k:

$$c_k = 2c_{k+1} \Rightarrow \frac{1}{2}c_k = c_{k+1}$$

Derved kan det ses at c_{k+1} altid vil være halvdelen af c_k og derved vil udtrykket være lig 0 når k går mod uendelig.

3

a

I denne første opgave vil jeg opskrive hele powerregelen, når jeg brugere den senere, vil jeg blot henvise til den. Derudover er $C \in R$

Vi skal integrere følgende udtryk:

$$\int 3x^2 dx$$

Først flytter vi 3 udenfor integrationen og få derfor udtrykket:

$$3^2 dx$$

Vha. powerreglen som siger at $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, hvor n = 2 bliver dette til:

$$\frac{x^3}{3}$$

Vi løser nu intergralet og få resultate:

$$x^3 + C$$

b

Vi skal integrere følgende udtryk:

$$\int_{-1}^{1} x^{100} dx$$

Ved at bruger powerreglen fås følgende udtryk

$$\frac{x^{100+1}}{100+1} + C$$

Derefter er det blot at indsætte værdierne 1 og -1.

$$\frac{1^{101}}{101} - \frac{(-1)^{101}}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{101} = \frac{2}{101}$$

c

Vi skal integrere følgende udtryk:

$$\int_{1}^{8} \sqrt[3]{x} dx$$

Først findes stamfunktionen:

$$\int x^{\frac{1}{3}}$$

Ved at bruger powerreglen fås følgende udtryk:

$$\frac{3}{4} x^{\frac{3}{4}}$$

Derefter er det blot at indsætte værdierne 8 og 1:

$$\frac{3}{4} 8^{\frac{3}{4}} - \frac{3}{4} 1^{\frac{3}{4}} = \frac{45}{4}$$

d

Vi skal integrere følgende udtryk:

$$\int_0^1 (3 + x\sqrt{x})dx$$

Først findes stamfunktionen:

$$\int x^{\frac{3}{2}} + 3$$

Vi deler nu udtrykket op i to led vha af sumreglen

$$\int x^{\frac{3}{2}} + 3 \int 1$$

Derefter benytter vi potensrelgen på først det første led og derefter konstantreglen på det andet led og derved fås følgende udtryk:

$$\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + 3x$$

Derefter er det blot at indsætte værdierne 1 og 0:

$$\frac{2}{5} 1^{\frac{5}{2}} + 3 * 1 + \frac{2}{5} 0^{\frac{5}{2}} + 3 * 0 = \frac{17}{5}$$

e

Vi skal integrere følgende udtryk med subsution $u = -x^2$:

$$\int xe^{-x^2} dx$$

Først substituere vi med u og derefter finder vi u':

$$\int xe^u$$

$$u' = \frac{du}{dx} = -2x = \int xe^{-x^2} = -\frac{1}{2} \int e^u du$$

Derefter integere vi udtrykket som indeholder u:

$$-\frac{1}{2} e^u \Rightarrow -\frac{e^u}{2} + C$$

Vi indsætter nu $-x^2$ og får det endelige udtryk

$$-\frac{e^{-x^2}}{2} + C$$

f

Vi skal integrere følgende udtryk med delvis integration med $u = ln(x)$ og $dv = \sqrt{x}dx$:

$$\int \sqrt{x}ln(x)dx$$

Jeg benytter mig af den kompakte formel:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Dette kan for vores tilfælde skrives som:

$$ln(x) * \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} * \frac{1}{x}dx$$

Det endelige resultat bliver:

$$ln(x) * \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}} + C$$

g

Vi skal integrere følgende udtryk:

$$\int (3x-2)^{2}0dx$$

Vi løser denne opgave ved at substituere 3x - 2 med u og det fører til følgende udtryk:

$$\int u^{20} * \frac{1}{3}du$$

Derefter følger vi samme fremgangsmåde som tidligere. Først intergere vi med hensyn til du og derefter indsætter vi 3x - 2.

$$\frac{1}{3}\int u^{20}du = \frac{1}{3} * \frac{u^{21}}{21} + C = \frac{u^{21}}{63} + C = \frac{(3x-2)^{21}}{63} + C$$

h

Vi skal integrere følgende udtryk:

$$\int x^2e^{x^3}dx$$

Vi løser denne opgave med delvis intergration og sætter $u = x^3$. Dette giver følgende udtryk:

$$\int x^2e^{x^3}dx = \frac{1}{3}\int e^u du = \frac{1}{3}e^u + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C$$

i

Vi skal integrere følgende udtryk:

$$\int s2^s ds$$

Vi løser denne opgave med delvis intergration og sætter $u = s$ $u = s$, $u' = 1$, $v' = 2$ og $v = \frac{2^s}{ln2}$.

j

Vi skal integrere følgende udtryk:

$$\int (lnx)^2 dx$$

Vi løser denne opgave ved følgende omskrivning:

$$\int ln(x) * ln(x) dx$$

Dette kan delvis integreres således:

$$\begin{aligned}
ln(x) * (x * ln(x) - x) - \int \frac{1}{x} * (x * ln(x) - x) &\Rightarrow \\
ln(x) * (x * ln(x) - x) - \int ln(x) - 1 &\Rightarrow \\
xln(x)^2 - 2xln(x) + 2x &\Rightarrow \\
xln(x)^2 - 2ln(x) + 2 &
\end{aligned}$$

4

a)

Det vides at:

$$\begin{aligned}
lim_{n\to\infty} magic(n) = \int_0^3 x \exp x^2 dx = \frac{1}{2} \exp x^2 \mid_0^3 = \frac{1}{2}(\exp 9 - \exp 0) \\
\approx \frac{1}{2} 8103.08 = 4051.04 \approx 4051
\end{aligned}$$

b)

siden $(x, y) \mapsto x \exp(xy)$ er kontinuerlig, kan følgende opsættes:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{-1}^2 x \exp(xy) dx dy = \int_{-1}^2 \int_0^1 x \exp(xy) dx dy \\
= \int_{-1}^2 \exp(xy)|_0^1 dx = \int_{-1}^2 \exp(x) - 1 dx \\
= \exp(x) - x|_{-1}^2 = \exp(2) - 2 - \exp(-1) - 1 \\
= \exp(2) - \exp(-1) - 3
\end{aligned}$$

5

```
samples = np.linspace(1, 10, 100)
```

```python
def f(x):
    return 1/x

def integrate_approx(arr, s):
    ret_list = [0]
    a = arr[0]
    b = arr[-1]
    temp_list=[0]
    x = a

    while (x < b):
        temp = ( (x+s) - x ) * ( 1/2 ) * ( f(x) + f(x+s) )
        temp_list.append(temp_list[-1]+temp)
        x = x+s

    for x in range(len(arr)-1) :
        ret_list.append(temp_list[int (x * len (temp_list) /len(arr))])

    return ret_list

def known_sol(x):
    return np.log(x)

def graphMake(s, stepsize):
    plt.figure(figsize=(20,5))
    plt.subplot(1,3,1)
    x = s
    y = integrate_approx(s, stepsize)
    xx = s
    yy = known_sol(samples)
    plt.title("Bl  prikker er den kendte l sning , r de prikker approximation.")
    plt.plot(xx, yy, 'b.', markersize=10)
    plt.plot(x, y, 'r.', markersize=10)

graphMake(samples, 1)
graphMake(samples, 0.1)
graphMake(samples, 0.01)
```

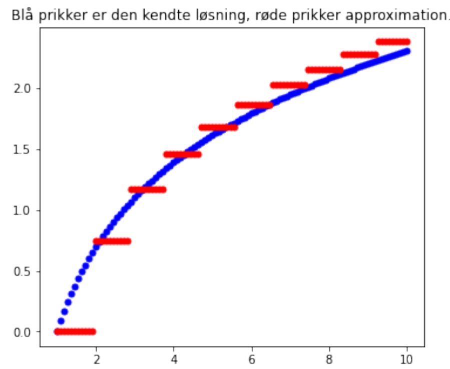

Figure 1: Approximation med stepsize 1

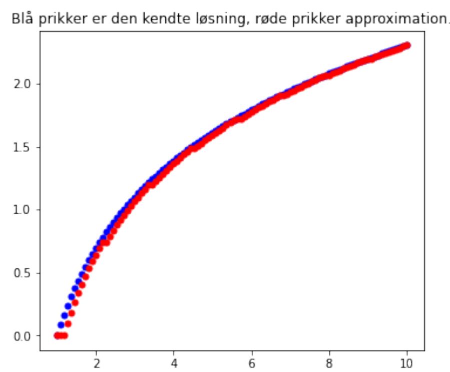

Figure 2: Approximation med stepsize 0.1

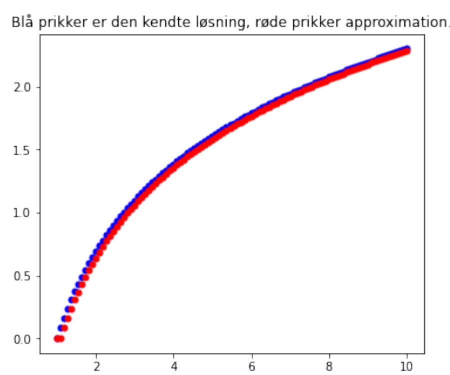

Figure 3: Approximation med stepsize 0.01