MASD Assignment 6

hfc635
wqm216
wgh762

October 2021

Problem 1

1

Eftersom 'A' er et subset af 'S', og $\hat{P}(A) = P(A|B)$ så ville $\hat{P}$, være en probability distribution på S. Dette er fordi P er en probability distribution på S, samt det at $\hat{P}$ er forbundet til P igennem førnævnte definition af $\hat{P}(A)$.

2

Til at starte med, ved hjælp af loven om total sandsynlighed, så kan følgende udtryk for chancen af at det sidste træk er rødt opstilles:

$$P(R) = P(R|A_{rr}) \cdot P(A_{rr}) + P(R|A_{br}) \cdot P(A_{br}) + P(R|A_{rb}) \cdot P(A_{rb}) + P(R|A_{bb}) \cdot P(A_{bb})$$

Hvor diverse 'A' udtryk er spiltilstanden for hvis der kun bliver trukket røde, kun bliver trukket blå, 1. er blå 2. er rød og 1. er rød 2. er blå. Disse findes så igennem samme metode:

$P(A_{rr}) = P(A_{rr}|X_r) \cdot p(X_r)$
$P(A_{br}) = P(A_{br}|X_b) \cdot p(X_b)$
$P(A_{rb}) = P(A_{rb}|X_r) \cdot p(X_r)$
$P(A_{bb}) = P(A_{bb}|X_b) \cdot p(X_b)$

Hvor endnu engang, 'X' er udtryk for hvis det første træk er rødt eller blåt. dette regnes nu ud:

$P(A_{rr}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = 0,4$
$P(A_{br}) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = 0,2$
$P(A_{rb}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} = 0,2$
$P(A_{bb}) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = 0,2$

Nu kan dette indsættes i den større ligning:

$$P(R) = \frac{6}{8} \cdot 0,4 + \frac{5}{8} \cdot 0,2 + \frac{4}{8} \cdot 0,2 + \frac{3}{8} \cdot 0,2 = 0,6 = 60\%$$

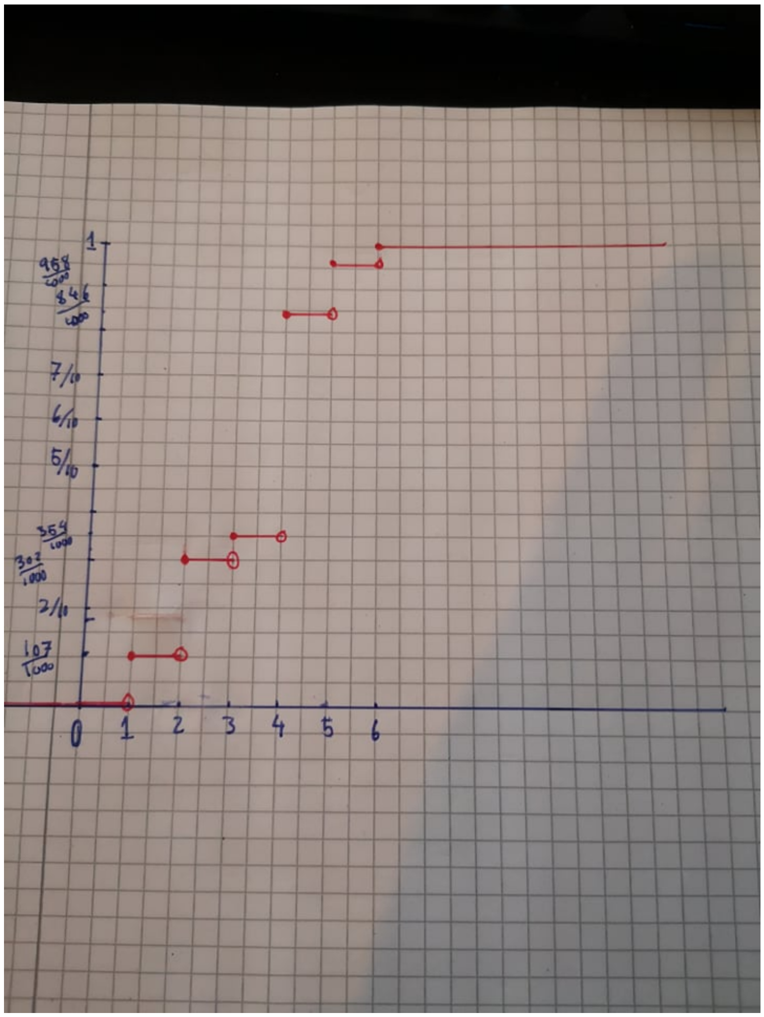
Problem 2

1

Da CDF ved x i denne sammenhæng vil svare til sandsynligheden for at få x eller mindre med terningen. Dermed er CDF blot:

$F_X(x) = \sum_{i=1}^{x} P(X = i)$.

Således er eksempelvis $F_X(4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$.



2

Vi ved at PDF er $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ Og vi ved at det det ubestemte integrale med hensyn til x skal være lig 1. Hermed har vi at:

$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx$
$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-|x|}\,dx$
Siden at vi med integralet tager summen af alle resultater fra $-\infty$ til ∞ og at x er absolut. Kan vi derfor sige at:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-|x|}\,dx = \int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx \ = 1$$

Dermed kan vi udtrykke et bestemt integrale som også er vores CDF:

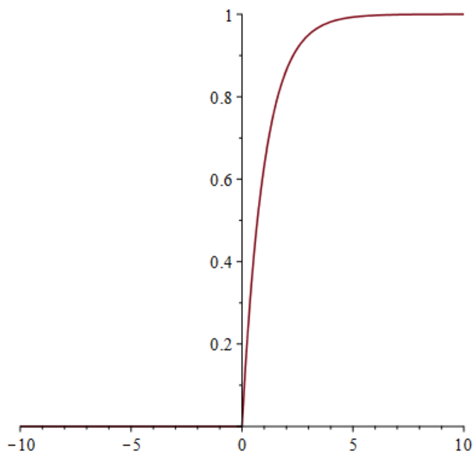
$$F_X(x) = \int_0^x e^{-x}\,dx \quad , \ x \geq 0$$
$$F_X(x) = [-e^{-x}]_0^x = 1 - e^{-x} \ , \ x \geq 0$$

Dermed er CDF:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Plottet i Maple:

$$F := x \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-x} & 0 \leq x \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



3

Her finder vi den afledte af vores CDF $F_X(x) = 4x \ \ x \in [0, \frac{1}{4}]$

$$F'_X(x) = f_X(x) = 4$$

Da $\int_0^{\frac{1}{4}} f_X(x)dx = \frac{1}{4} * 4 - (\frac{1}{4} * 0) = 1$

Kan vi sige at dette dækker alle tilfælde. Dermed er vores PDF:

$$f_X(x) = \begin{cases} 4 & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} < x < 0 \end{cases}$$

4

Da denne ikke er kontiuert, går vi ud fra at der er tale om en PMF. Det vil sige at vi at skal finde et udtryk for stigningen i vores CDF mellem heltal. For x=1 er der ingen stigning da dette er vores basistilfælde. Dermed er $f_X(x) = F_X(x) = 0 \ \ x = 1$.

For alle andre x, kan vi utrykke forskellen ved: $\frac{F_X(x) - F_X(x-\epsilon)}{\lfloor x \rfloor - \lfloor x-\epsilon \rfloor} \ \ x > 1$

Dette skyldes at vi er interesseret i forskellen mellem heltal i vores CDF og det er ikke noget problem at resten er undefined. Hvis man ikke vil have undefined værdier, kunne man i stedet fjerne nævner, da den altid kun vil være enten 0 eller 1. Dermed har vi blot værdier 0 for alle x som ikke er et heltal.

Dermed er vores PMF $f_X(x) = \begin{cases} 0 & x = 1 \\ \frac{F_X(x) - F_X(x-\epsilon)}{\lfloor x \rfloor - \lfloor x-\epsilon \rfloor} & x > 1 \end{cases}$

Problem 3

1

Vi gentager problemet fra opgave 5 1.2 men med blot et kast fremfor 1000. Derfor kan vi opstille vores udregninger således:

$$x = \sum_{j=i}^{n} x_i p_j = E(x) = \frac{107}{1000}(1) + \frac{192}{1000}(2) + \frac{52}{1000}(3) + \frac{492}{1000}(4) + \frac{112}{1000}(5) + \frac{42}{1000}(6) = 3.427$$

Varianten udregnes således:

$$Var(x) = \sum x^2 * p - \mu^2 = 13.539 - 3.427^2 = 1.75311$$

Det vil sige at E(x) = 3.427 og vores variation er 1.75311

2

Vi lader X være lige med $4Y + 3$ hvor Y $\sim$ Bernoulli(p):

$$E(4Y + 3) = 4 \cdot E(Y) + 3$$

Herfra, behøves det at vide, for en Bernoulli fordeling, at E(Y) = p, derved findes E(X) til at være:

$$E(X) = 4p \tag{1}$$

Varianten udregnes således:

$$VAR(X) = VAR(4Y + 3) = 4^2 \cdot VAR(Y)$$

Eftersom vi har, når det gælder bernoulli, at E(Y) = p. Så kan vi igennem definitionen på varians finde varationen på bernoulli fordelingen:

$$E((Y - E(Y))^2) = (1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2 \cdot (1-p) = p - 2p^2 + p^3 + p^2 - p^3 = p - p^2 = p(1-p)$$

Dette kan indsættes så vi får:

$$VAR(X) = 4^2 \cdot p(1-p)$$

Det vil sige at E(X) = er $4 \cdot E(Y) + 3$ og vores variation er $4^2 \cdot p(1-p)$

3

Vi lader X $\sim$ Binomial(n; p):
Da en binomial fordeling i essens er n antal identiske Bernoulli fordelinger med den forventede værdi p, så kan E(X) opskrives således:

$$E(X) = np$$

Varianten udregnes meget på samme måde, eftersom summen af en række uafhængige tilfældige variabler, er det samme som summen af hver variabels varians. Derfor har vi:

$$VAR(X) = np(1-p)$$

4

Vi lader X = log Y, og Y være uniformt fordelt på [0; 1]:
for at finde E(X), så gøres der brug af $E(X) = \int xf(x)dx$ hvor x i dette tilfælde så ville være Y (med andre ord, PDF for en uniform fordeling mellem 0 og 1)

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \log(Y)dY = \int_0^1 \log(Y)dY = -0,43 \tag{2}$$

Varians udregnes gennem $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$:

$$Var(X) = E((\log Y)^2) - -0.43^2$$

Hvis Y erstattes med udtrykket for dens PDF, fås:

$$Var(X) = E((\log \frac{1}{1-0})^2) - -0.43^2 = E((\log 1)^2) - -0.43^2 = 0 - -0.43^2 = -0.1849$$

Derfor har vi at E(X) = -0,43 og Var(X) = -0.1849

5

Vi lader X havde CDF $F_x(X) = 1 - e^{-ax}$ for $x \geq 0$, for en konstant $\alpha \geq 0$:
Det kan ses fra definition 5.5.1 i "Introduction to Propability", at dette er en exponential-distribution. Igennem dette vides følgende

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

og

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} \tag{3}$$

Hvor lambda er tilsvarende til alpha i opgaven.

derfor er $E(X) = \frac{1}{\alpha}$ of varians er $\frac{1}{\alpha^2}$