MASD assignment 4

Anton (ckf216), Simon (wgh762) og Kirstine (zbf480)

September 2020

Exercise 1

a)

Vi skal bevise at:

når $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ da vil $\lim_{n\to\infty} -a_n = -a$

Til dette vil der bruges følgende lov:

$\lim_{x\to a} cf(x) = c \lim_{x\to a} f(x)$

Loven kan findes i Calculus - early transcendence 9th edition, side 95
lad $c = -1$ hvorved det kan ses at:

$\lim_{n\to\infty} -1 * a_n = -1 * \lim_{n\to\infty} a_n = -1 * a = -a$

For at vise at følgen er konvergent, bruges definition 2 af om uendelige følger set i kapitel ?11? som går:

en sekvens (a_n) har begrænsningen L, og det skrives:

$\lim_{x\to\infty} a_n = L$ eller $a_n \to L$ as $n \to \infty$

hvis for hver $\epsilon > 0$ der er et korresponderende integer N så følgende er sandt:

hvis $n > N$ så $|a_n - L| < \epsilon$

Efter som definitionen gør brug af den absolutte værdi, betyder det ikke noget om grænsen samt værdien der nærmer sig grænsen er negative eller positive, da det vides at definitionen holder for udtrykket med positive fortegn, kan det udvides til at udtrykket også ville holde med negative fortegn.

Exercise 2

Til dette, omdannes udtrykket til "the cake eating problem", altså at en uendelig mængde folk tager hver halvdelen af kagen der er tilbage. Det fører til dette udtryk:

$$c_n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Da man starter med 1 kage, og for hvert "n", fjerner halvdelen af den helhed der er tilbage.
Vi skal så vise at:

$$c_n \to 0 \text{ for } n \to \infty$$

1: $c_1 = \frac{1}{2^1}$ er sandt, da $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Og $c_2 = \frac{1}{2^2}$ er sandt. da $(1 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2*2} = \frac{1}{4}$
2: Antag $c_k = \frac{1}{2^k}$ for $\forall m \leq k$
3: nu vil det vises at det også gælder for $m = k + 1$, altså: $c_{k+1} = \frac{1}{2^{k+1}}$

$$c_{k+1} = 1 - \sum_{n=1}^{k+1} \frac{1}{2^n} = 1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}})$$

da $c_k = 1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^k})$ så kan øvrige udtryk omskrives til:

$$c_k - \frac{1}{2^{k+1}}$$

med antagelsen i (2) bliver det til:

$$\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}} = (\frac{1}{2})^k - (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^k = (\frac{1}{2})^k(1 - \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^k$$

Derved findes følgen:

$$c_k - c_{k+1} = c_{k+1}$$

Hvis man så isolere c_k:

$$c_k = 2c_{k+1} \Rightarrow \frac{1}{2}c_k = c_{k+1}$$

Derved kan det ses at c_{k+1} altid ville være halvdelen af c_k, derved ville udtrykket fra "the cake-eating problem" være lig 0 når $k \to \infty$. Da "the cake-eating problem" består af:

$$c_k = 1 - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n}$$

Og det er udtrykket $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ som der skal bevises er lig 1, så kan det udtryk ovenfor isoleres:

$$c_k = 1 - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} \text{ hvor } c_k \to 0, k \to \infty \Rightarrow 0 = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

Exercise 3

a)

$\int 3x^2 dx$

Produktreglen bruges:

$$3 \int x^2 dx$$

Potensreglen bruges:

$$3(\tfrac{1}{3}x^3) + c$$

Den færdige stamfunktion fås til:

$$x^3 + c$$

b)

Stamfunktionen til udtrykket findes:

$$\int x^{100} dx \Rightarrow \tfrac{1}{101}x^{101}$$

Værdien for en bestemt funktion kan ses som:

$$\int_a^b f(x) \Rightarrow F(b) - F(a)$$

Værdier indsættes:

$$\tfrac{1}{101}1^{101} - \tfrac{1}{101}(-1^{101}) = \tfrac{2}{101}$$

c)

først findes stamfunktionen:

$$\int x^{\frac{1}{3}}$$

Der gøres brug af potensreglen:

$$\tfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$$

Værdier indsættes:

$$\tfrac{3}{4}8^{\frac{4}{3}} - \tfrac{3}{4}1^{\frac{4}{3}} = 11,25$$

d)

Først findes stamfunktionen:

$\int x^{\frac{3}{2}} + 3$

Sumreglen bruges:

$\int x^{\frac{3}{2}} + 3 \int 1$

potensreglen bruges på første led:

$\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + 3 \int 1$

konstantreglen bruges på andet led:

$\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + 3x$

værdier indsættes:

$\frac{2}{5} 1^{\frac{5}{2}} + 3 * 1 - \frac{2}{5} 0^{\frac{5}{2}} + 3 * 0 = 3,4$

e)

Da $-x^2$ skal substitueres med u, bliver udtrykket:

$\int xe^u$

u' findes:

$u' = \frac{du}{dx} = -2x$

$\int xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int e^u du$

udtrykket der indeholder u integeres:

$-\frac{1}{2} e^u \Rightarrow -\frac{e^u}{2} + k$

til sidst fås det færdige udtryk:

$-\frac{e^{-x^2}}{2} + k$

f)

Til denne bruges den kompakte formel for ”integration by parts”:

$\int udv = uv - \int vdu$

hvor $du = \frac{1}{x}dx$ og $v = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, værdier indsættes:

$\ln(x) * \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} * \frac{1}{x}dx$

$\frac{1}{x}$ går delvist ud med $x^{\frac{3}{2}}$ så udtrykket bliver til:

$\ln(x) * \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}dx \Rightarrow$
$\ln(x) * \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} * \frac{2}{3} * x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow$
$\ln(x) * \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} * \frac{2}{3} * x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow$
$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(\ln(x) - \frac{2}{3}) + k$

g)

I dette udtryk substitueres $(3x - 2)$ med u, dette fører til udtrykket:

$\frac{1}{3}\int u^{20}\frac{du}{dx}dx \Rightarrow$
$\frac{1}{3}\int u^{20}du \Rightarrow$
$\frac{1}{3} * \frac{1}{21}x^{21} + k$

h)

I denne gøres der det samme som i (e):

x^3 substitueres med u, udtrykket bliver:

$\int x^2 e^u$

u' findes:

$u' = \frac{du}{dx} = 3x^2$

$\int x^2 e^{x^3}dx = \frac{1}{3}\int e^u du$

udtrykket der indeholder u integeres:

$\frac{1}{3}e^u \Rightarrow \frac{e^u}{3} + k$

til sidst fås det færdige udtryk:

$\frac{e^{x^3}}{3} + k$

i)

Vi har problemet:

$$\int s * 2^s$$

Dette løses igennem partialintegration:

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

hvor $f' = 1$ og $g = \frac{e^{\ln(2)*s}}{\ln(2)}$, dette indsættes:

$$s * \frac{e^{\ln(2)*s}}{\ln(2)} - \int \frac{e^{\ln(2)*s}}{\ln(2)} \Rightarrow s * \frac{e^{\ln(2)*s}}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(2)} \int e^{\ln(2)*s} \Rightarrow s * \frac{2^s}{\ln(2)} - \frac{2^s}{\ln(2)^2}$$

Hvorved det endelige udtryk bliver til:

$$s * \frac{2^s}{\ln(2)} - \frac{2^s}{\ln(2)^2}$$

j)

Vi har problemet (udvidet):

$$\int \ln(x) * \ln(x)$$

Som der partialintegreres til:

$$\ln(x) * (x * \ln(x) - x) - \int \frac{1}{x} * (x * \ln(x) - x) \Rightarrow$$
$$\ln(x) * (x * \ln(x) - x) - \int \ln(x) - 1 \Rightarrow$$
$$x \ln(x)^2 - 2x \ln(x) + 2x \Rightarrow$$
$$x(\ln(x)^2 - 2\ln(x) + 2)$$

Exercise 4

a)

the np.linspace is the interval of the integral, while the line below the np.sum expression is the function itself. So the function can be written as:

$$f(x) = \frac{3}{n} \cdot s \cdot e^{s \cdot s}$$

calculation of that integral with 8 rectangle n = 8: first we want to find the width of every rectangle:

$$\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{8} = 0.375$$

when running magic(8) we get an array containing [0.375 0.75 1.125 1.5 1.875 2.25 2.625 3.] these numbers are representing where every rectangle width are ended. We can use these width values to calculate the hight of every rectangle by using these values as s in our function 'f'

$$A_L = \Delta x(f(0.375) + f(0.75) + f(1.125) + f(1.5) + f(1.875) + f(2.25) + f(2.625) + f(3)$$

$$= 0.375(0.16 + 0.5 + 1.5 + 5.33 + 23.65 + 133 + 967 + 9115) = 3842.3025$$

b)

first we using the rule of changing the order of integration in double integrals using Fubini's theorem.
$\int_0^1 \int_{-1}^2 xe^{xy} dxdy \Rightarrow \int_{-1}^2 \int_0^1 xe^{xy} dydx$

then we start with calculating the integral of $\int_0^1 xe^{xy} dy$:
then we take the constant out: $\int a \cdot f(x)\, dx = a \cdot \int f(x)\, dx = x \cdot \int_0^1 e^{xy} dy$
next we are using the u-substitution: u=xy, we ends up with $\frac{du}{dy} = x$
now we have this expression: $x \cdot \int_0^x \frac{e^u}{x} du$
we are using the take the constant out rule again to get: $x\frac{1}{x} \cdot \int_0^x e^u du$
using the common integral: $\int e^u du = e^u = x\frac{1}{x}\left[e^u\right]_0^x$
we simplify: Simplify $x\frac{1}{x}\left[e^u\right]_0^x$: $\left[e^u\right]_0^x$
last we compute the boundaries $\left[e^u\right]_0^x = e^x - 1$

The inner integral is calculated, now we want to calculate the outer integral
with the our discovered value: $\int_{-1}^2 e^x - 1dx$
first we apply the sum rule: $\int f(x) \pm g(x)\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx = \int_{-1}^2 e^x dx - \int_{-1}^2 1dx$
now we use the common integral rule to get: $= \left[e^x\right]_{-1}^2$, after computing of boundaries: $e^2 - \frac{1}{e}$
last we are taking the limit of our boundaries both from left and right and that gives us 3
so the finale result of this double integral is: $e^2 - \frac{1}{e} - 3$

Exercise 5

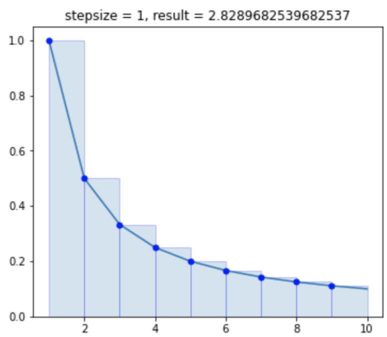
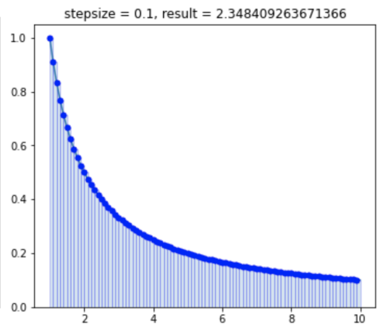
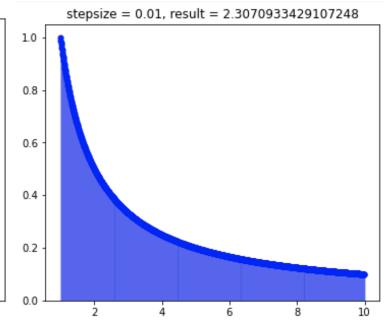
python code:

```
def g_approx(w, b):
    # creating the graph
    k = (w-1)/b
    k = int(k)
    a = 1
    x = np.linspace(a,w,k+1)
    y = 1/x

    #calculating the integral
```

```
    f = lambda x : 1/x
    dx = (w-a)/k
    x_left = np.linspace(a,w-dx,k)
    left_riemann_sum = np.sum(f(x_left) * dx)
    print("result",left_riemann_sum, b)

    #plotting the graph 1/x
    plt.figure(figsize=(20,5))
    plt.subplot(1,3,1)
    plt.plot(x,y)
    x_left = x[:-1]; y_left = y[:-1]
    plt.plot(x_left,y_left,'b.',markersize=10)
    plt.bar(x_left,y_left,width=(w-a)/k,alpha=0.2,align='edge',edgecolor='b')
    plt.title('1/x, b = {}'.format(b))

    #plotting the graph ln(x)
    yy = np.log(x)
    plt.figure(figsize=(20,5))
    plt.subplot(1,3,1)
    plt.plot(x,yy)
    x_left = x[:-1]; y_left = yy[:-1]
    plt.plot(x_left,y_left,'b.',markersize=10)
    plt.bar(x_left,y_left,width=(w-a)/k,alpha=0.2,align='edge',edgecolor='b')
    plt.title('ln(x), b = {}'.format(b))


g_approx(10, 1)
g_approx(10, 0.1)
g_approx(10, 0.01)
```

we can conclude from our plots that the lower our step size is, which means that more rectangles are created, the more precise is the result being calculated.

$\int_1^{10} \frac{1}{x}\, dx = 2.30258$


stepsize = 1, result = 2.8289682539682537
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
2
4
6
8
10

stepsize = 0.1, result = 2.348409263671366
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
2
4
6
8
10

stepsize = 0.01, result = 2.3070933429107248
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
2
4
6
8
10