MASD Eksamen JAB

November 2021

Contents

1 Function limits and continuity

2 Limit Laws

2.1 Definition

Chapter 2.3

Limit Laws 1 - 5. page (95)
These Five Laws:
1. The limit of a sum is the sum of the limits.
2. The limit of a difference is the difference of the limits.
3. The limit of a constant times a function is the constant times the limit of the function.
4. The limit of a product is the product of the limits.
5. The limit of a quotient is the quotient of the limits (provided that the limit of the denominator is not 0).

Power Rule
$lim_{x\to a}[f(x)]^n = [lim_{x\to a}f(x)]^n$ where n is a positive integer

Root Rule
$lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{lim_{x\to a}f(x)}$
where n is a positive integer.

[if n is even, we assume that $lim_{x\to a}f(x) > 0$]

Evaluating Limits by Direct Substitution (P. 97)
Hvis noget er kontinuert for alle reelle tal, så vil grænsen for x også gå mod et reelt tal, som en værdi i udtrykket, så er det det samme som at evaluere udtrykket ved det reelle tal. Dvs.

f is continuous at x = a if and only if $\lim_{x\to a}$f(x) = f(a)

One-sided limits (P. 100)
Nogle grænser er nemmere at regne ud ved først at finde venstre grænse og derefter højre. Derfor findes der kun two-sided grænser hvis begge deres one-sided grænser eksisterer og er lig hinanden.
Når man regner one-sided limits, gælder limit laws stadig.

Betydning
1. Define a limit for x = all real numbers(-infitiy to infinity). If not specify for which they are not.
Find en værdi der er defineret for alle reelle tal. Find de tal den ikke er defineret for.
f.eks denominatoren må ikke være 0, så der skal være defineret hvor det gælder. Man kan sætte denumenator til = 0. Hvis der er to variable i nævneren, så er man nødt til at definere det som en sætning og sige at at ikke er defineret for hvor nævneren = 0, uden at vise det matematisk.

2. Define a limit for x = interval
Find en værdi der er derfineret for et specificeret interval

2.2 Grænse værdier, for én og flere variabler uden værdier

Def for Limits ved én variable: Side 90.
Brug def 5 hvis f(x) er defineret på begge sider af a, med undtagelse af **måske** a
Brug def 6 hvis der er flere muligheder.

Properties for limit laws for flere variabler: Side 955.
Definition for limit af flere variabler: Side 952.

Hvis man har et udtryk, hvor værdierne ikke er givet, kan vi finde ud af om grænseværdien findes ved at enkeltvis sætte variablerne til 0 og se om udtrykket går imod 0 for de andre værdier.
$lim(x,y,z)- > (0,0,0)\frac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4}$ vil være et udtryk hvor værdierne ikke er defineret. Man kan enten sætte værdierne ind enkeltvis, altså $(0,y,z)og(x,0,z)og(x,y,0)$ Hvis udtrykket ikke giver 0 for alle 3 variabler, findes grænsen ikke. Vi kan solve for x = 0 for at finde de værdier det ikke gælder for.

Chapter 2.5

Continuity of a function (P. 115 Def. 1)
Når man kan udregne værdien for en funktion ved a, når grænsen for x går mod a, så er funktionen kontinuert ved a.

A function f is continuous at a number a if:

$\lim_{x\to a}$f(x) = f(a)

Continuity from the right / left (P.117 def. 2)

RIGHT:

A function f is continuous from the right at a number a if

$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

dvs. Den går FRA højre og MOD venstre, så FRA positiv MOD negativ.

LEFT:
and f is continuous from the left at a if

$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

dvs. Den går FRA venstre og MOD højre, så FRA negativ MOD positiv.

Continuity at intervals (P.117 def. 3)
En funktion er kontinuert i et interval hvis den er kontinuert ved alle tal i intervallet.

Polynomials
Theorem 5
(a) Any polynomial is continuous everywhere; that is, it is continuous on $R = (-\infty, \infty)$.
(b) Any rational function is continuous wherever it is defined; that is, it is continuous on its domain.

Functions are continuous at every number in their domains (P.120 theorem 7)
- polynomials
- rational functions
- root functions
- trigonometric functions
- inverse trigonometric functions
- exponential functions
- logarithmic functions

Rational functions are continuous everywhere apart from where the denominator is 0 (p. 120)!

3 Abs_values og Critical numbers

Absolute-værdier (max og min):

3.1 Defs

Abs max værdi (c) for en graf kan findes, i Domain D hvis $f(c) \geq f(x) \forall\ x\ i\ D$
Abs min værdi (c) for en graf kan findes, i Domain D hvis $f(c) \leq f(x) \forall; x\ i\ D$
Fermat's theorem (FT) lecture 5, slide 26: If a function f has a local optimum at c $\in D$, and $f(c)$ exists, then $f(c) = 0$

Hvis man ved f(x) $\neq$ c findes en værdi i D, kan det så være et lokalt max eller min, start med at søg efter lokal punkter.
For at finde ud af om et punkt er enten et max eller et min, tager man den afledte funktion for f(x) = 0.

3.2 Critial Numbers

Gælder for alle de punkter hvor f'(x) er = 0, altså alle lokale punkter hvor man har et min eller max. Sagt på en anden måde, så kan man finde punkterne, ved at bruge diskriminant formlen for at finde punkterne **for den afledte funktion af f(x)**
Dette kan man også gøre for 3'ed grads polymonimer.

3.2.1 Eksempel

$$f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 48x^2$$
$$f'(x) = 12x^3 + 24x^2 - 96x$$

Så faktoriser ved, at rykke 12x ud foran parentes 12x(x^2+2x-8) og brug diskriminant for at finde alle 3 rødder.

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$\frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4*1 - 8}}{2}$$

For + bliver det så $\frac{-2+6}{2} = 2$
For - bliver det så $\frac{-2-6}{2} = -4$
og endeligt har man også pga 0 reglen, at et punkt vil være ved 0, derfor er svaret
Critical Numbers are $\{-4, 0, 2\}$

4 Faktorisering

Vi har en faktoriserings regel der hedder. a(x-r1)(x-r2)
Hvor r1 og r2 er rødderne af f(x)

f.eks
$3x^2 - 5x - 2 = 0$ først finder vi rødderene. $d = b^2 - 4ac$ og $x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$
a=3, b=-4, c=-2.
$d = (-5)^2 - 4 * 3 * (-2) = 49$, $x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2*3}$ = - 0.333 og 2
Nu hvor vi har rødderene kan vi sætte dem in i vores faktorisering formel.
3(x-(-0.333)(x-2) som er 3(x+0.333)(x-2) der er vores faktoriserede udtryk

5 Derivatives

6 Basic

Afledte funktioner for f(x) betyder at du finder hældningen for et givet punkt på grafen/ i udtrykket $f'(x) = \lim_{h->0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

6.1 Lokation for definition regler ved differencering

Reglerne her kommer fra, når man skal finde den afledede funktion i et 2D vektor rum
Hvis man skal bruge for et 3D rum, se Tangent Planer

1. sumreglen: $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)]$ - Side 178
2. naturlige exponentiale funktioner: $\frac{d}{dx}(e^x)$ - Side 180
3. Product reglen: $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]$ - Side 185
4. Quotient reglen: $\frac{d}{dx}[\frac{f(x)}{g(x)}]$ - Side 187
5. Aflede funktioner af trigonomiske funktioner: Side 194
6. Chain Rule: $\frac{d}{dx}f(g(x))$ - Side 200
7. Power combined med Chain Rule: $\frac{d}{dx}(u)^n$ - Side 202
8. General Exponential Functions: $\frac{d}{dx}(b^x)$ - Side 204
9. Logarithmic Functions: $\frac{d}{dx}(log_b\ x)$ - Side 218
10. Chain rule and Logarithmic Functions: $\frac{d}{dx}(ln\ u)$ - 218
11. Inverse Trigonometric Funtions: Side 223

12. Hyperbolic Functions and identites: Side 261-263

13. Invers Hyperbloic Functions: Side 265

6.2 Tangent Planer

Definition: Side 975
Ligningen for at finde et tangent plan i (x,y,z)
$= z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$
En simple opskrift for at finde ligningen for z kan ses i eksemplet.

6.2.1 Eksempel

For udtrykket: $z = 2x^2 + y^2 - 5y$ i punktet (1,2,-4)
Hvor værdierne sættes til:
$x_0 = 1$
$y_0 = 2$
$z_0 =$ -4.
Disse værdier bruges også til at indsætte i de differentierede f_x(x,y) og f_y(x,y) (Se step 2) For at finde ligningen til tangent planen i det givet punkt skal man:

1. Differentier for x og så y
2. Sæt værdier ind
3. isoler z og forkort

$f_x(x, y) = 4x$
$f_y(x, y) = 2y - 5$

$f_x(1, 2) = 4 * 1 = 4$
$f_y(1, 2) = 2 * 2 - 5 = -1$

$z + 4 = 4(x - 1) - 1(y - 2)$
$z = 4x - 4 - 1y + 2 - 4$
$4x - 2 - 1y - 4$
$4x - 1y - 6 -> z$

7 Integrale

Helt Basic
Integralet handler om at finde stamfunktionen til en funktion. Dvs. Når vi finder den afledte så DIFFERENTIERER vi, hvorimod når vi finder stamfunktionen så INTEGRERER vi. Derfor kan det altså opskrives således:

$f'(x) <--$ differentering $- f(x) -$ integrering $--> F(x)$

Derfor er det også væsenligt at vide:

$f'(x) -$ integrering $--> f(x) <--$ differentiering $- F(x)$

Integrationsprøven:
Hvis man er i tvivl om man er kommet frem til den rigtige stamfunktion, findes der en måde at prøve det efter på. Man differentierer simpelthen bare den formodede stamfunktion og ser, om man får den oprindelige funktion frem:
Eks.

Er F(x) = $2x^2 + 3x^3$ stamfunktion til f(x) = $4x + 10x^2$?

Test via integrationsprøven:

$F(x) = 2 * 2x^{2-1} + 3 * 3x^{3-1} = 4x + 9x^2 \neq f(x)$
Det er altså ikke stamfunktionen.

Regneregler for integrale (Se bagest i bogen for alle regler)
Sumreglen: Hvis man skal integrere summen af to funktioner
$\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Differensreglen:
$\int f(x) - g(x)dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$
Produkt af konstant og funktion:
Hvis man skal integrere produktet af en konstantg og en funktion, så lader man den stå og ganger den på integralet af funktionen:

$\int c * f(x)dx = c * \int f(x)dx$

Ubestemt integral
$\int f(x)dx = F(x)$

Stamfunktionen gennem et punkt (aka. find konstanten k)

Eks.

$f(x) = 6x^2 + 4x$. Find den stamfunktion der går gennem punktet (-1,3).
Først finder vi alle stamfunktionerne:
$F(x) = \int 6x^2 + 4xdx = 2x^3 + 2x^2 + k$

Nu indsætter vi punktets koordinator i ligningen. så -1 ind på x's plads og 3 ind på stamfunktionsværdien:
$F(-1) = 3$
$2 * (-1)^3 + 2 * (-1)^2 + k = 3$
$-2 + 2 + k = 3$
k = 3

Vi ved nu at k = 3 og vi kan indsætte det i ligningen (der er integreret)

$F(x) = 2x^3 + 2x^2 + 3$

Areal mellem/ under grafer - Page 372
Page 377 def. 2
"The area A of the region S that lies under the graph of the continuous function f is the limit of the sum of the areas of approximating rectangle".

Page 381 def. 5 - Velocity

For at finde areal mellem eller under grafer så bruger man bestemt integral.

$Areal_{fg} \int_a^b (f(x) - g(x))dx$

Find a og b: Sæt forskriften lig med hinanden. og løs.
Find den funktion med størst værdi: indsæt vilkårligt tal og løs begge.

integrerer med intervallet.

Eks. Arealet af M afgrænset af $f(x) = -0.5x^2 + 3x - 3$ og $g(x) = x - 3$

1. vi finder a og b:

$f(x) = g(x)$
$-0.5x^2 + 3x - 3 = x - 3$
$-0.5^x + 2x = 0$
Andengradslinging vi løser med nulreglen:
$-0.5x(x - 4) = 0$
x = 0 V x = 4

vi finder den værdi der er størst:

$f(2) = -0.5 * 2^2 + 3 * 2 - 3 = -2 + 6 - 3 = 1$
$g(2) = 2 - 3 = -1$
f(x) er størst.

Nu kender vi alle faktorer og integrerer.
$A_m = \int_0^4 (f(x) - g(x))dx = \int_0^4 -0.5x^2 + 3x - 3 - (x - 3)dx$

$= \int_0^4 -0.5x^2 + 2xdx = \left[-\frac{1}{2} * \frac{1}{2+1}x^{2+1} + 2 * \frac{1}{1+1}x^{1+1}\right]_0^4$

$= \left[-\frac{1}{6}x^3 + x^2\right]_0^4 = \frac{-1}{6} * 4^3 + 4^2 - (\frac{-1}{6} * 0^3 + 0^2) = \frac{-64}{6} + 16 - 0$

$= 5.333...$

7.1 Definite integrals

Page 384 - Definite integral def. 2 (called Reiman's sum)

Page 386 - theorem 3: continuity in interval

Page 387 - theorem integrable in interval

En af de vigtigste forskelle på det bestemte og det ubestemte integral er, at mens det ubestemte integral giver en funktion (nemlig stamfunktionen) så giver det bestemte integral et tal!

Page 387 - Evaluating definite integrals (sum of powers)

Page 388 - Properties of sums

Page 390 - def. midpoint rule

Page 391 - properties of definite integrals

7.2 The substitution rule

Page 419 - substitution rule for indefinite integrals

Page 420 - the substitution rule

Page 423 - Substitution rule for definite integrals

Hvornår bruger man substitution rule?
Så snart man skal integrere et produkt af funktioner eller en sammensat funktion, er der ikke nogen klare regler, man bare kan følge slavisk. I stedet findes der en del forskellige metoder, man kan bruge til at omskrive integralet til noget, der er lettere at have med at gøre. En af de vigtigste metoder til integration er integration ved substitution. Når integranden (indmaden i integralet) indeholder et produkt af funktioner, og når en af dem er sammensat.

Integration ved substitution er følgende:

Ubestemt:
$\int f(g(x)) * g'(x)dx = \int f(t)dt$

Bestemt:
$\int_a^b f(g(x)) * g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt, hvor\ t = g(X)$

Eksempel: Ubestemt
Vi har følgende integral: $\int x * e^{x^2} dx$

Steps:
1. Find den indre funktion og kald den t
2. Differentier t, dvs. find dt/dx
3. Isolér dx
4. Indsæt nu t samt udtrykket for dx i integralet
5. Tilbage-substituer den indre funktion på t's plads

Vi ser, at der både er tale om et produkt af funktioner, og at den ene er sammensat. Derfor bruger vi integration ved substitution.
Det første, man gør, er at finde den indre funktion i den sammensatte funktion. I vores tilfælde er det x^2. Vi kalder den indre funktion for t.

$t = x^2$
Vi differentierer:

$\frac{dt}{dx}2x$

Vi lader som om differentialesymbolet er en brøk og isolerer x:

$dx = \frac{1}{2x}dt$

Vi indsætter integralet i det nye udtryk for dx:

$\int x * e^{x^2} dx = \int x * e^t * \frac{1}{2x}dt$

Vi reducerer integranden og udfører integration:

$\int x * e^t * \frac{1}{2x} dt = \int \frac{1}{2} e^t dt = \frac{1}{2} e^t + c$

Vi slutter af med at substituere den indre funktion tilbage ind på t's plads

$\int x * e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$

Eksempel bestemt:

Vi har følgende integral:
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin(x))^3 cos(x) dx$

Vi kan se, at den indre funktion er sin(x) dvs:

t = sin(x)

Vi differentierer t:

$\frac{\partial t}{\partial x} = cos(x)$

Vi laver om til brøk og isolerer dx:

$dx = \frac{1}{cos(x)} dt$

Vi skal finde de nye integrationsgrænser, ved at sætte de gamle grænser ind i funtiionen og substituere os ud af det:

$sin(0) = 0$
$sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

Vi sætter vi t og udtrykket for dx samt de nye grænser, ind i integralet:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin(x))^3 * cos(x) dx = \int_0^1 t^3 * cos(x) * \frac{1}{cos(x)} dt$

Vi kan se at cos(x) går ud med hinanden så vi har:

$\int_0^1 t^3 * cos(x) * \frac{1}{cos(x)} dt = \int_0^1 t^3 dt = \left[\frac{1}{4} t^4\right]_0^1 = \frac{1}{4} * 1^4 - \frac{1}{4} * 0^4 = \frac{1}{4}$

Det bestemte integrale er altså $= \frac{1}{4}$

Integration by parts

"Every differentiation rule has a corresponding integration rule. For instance, the Substitution Rule for integration corresponds to the Chain Rule for differentiation. The integration rule that corresponds to the Product Rule for differentiation is called integration by parts."

Page 486 - formula for integration by parts

Man bruger partiel integration, når integranden (indmaden i integralet) er et produkt af funktioner.

Den formel, man bruger, når man integrerer partielt er:

$\int f(x)g(x)dx = f(x)G(x) - f'(x)G(x)dx$

$\int_a^b f(x)g(x)dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)dx$

Man kan selv vælge, hvilken af de to funktioner, man vil differentiere og hvilken man vil integrere. Dette valg er vigtigt for, om det bliver et pænere eller et grimmere integral, man ender ud med efter den partielle integration. Et hint er, at hvis der er en funktion af formen x eller xn, så skal man vælge at differentiere den.

Integration by parts: Indefinite integrals
Produktreglen siger, at hvis f og g er differentiable funktioner så gælder det at:

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x)g(x)\right] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$

Dette kan opskrives således:

$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$

Alternativ måde at læse det på;

Lad u = f(x) og v = g(x).
Så kan det opskrives således:

$du = f'(x)dx$ og $dv = g'(x)dx$ ved brug af substitution rule bliver formlen nu:

$\int udv = uv - \int vdu$

Eksempel - ubestemt integral:

Vi har integralet: $\int 2x * cox(x)dx$

Vi vælger her, at differentiere 2x og integrere cos(x). Det betyder at vi har:

$f(x) = 2x, g(x) = cos(x), f'(x) = 2, G(x) = sin(x)$

Det kan vi sætte ind i formlen:

$\int 2xcos(x)dx = 2x * sin(x) - \int 2 * sin(x)dx$

Dette giver os:

$2x * sin(x) - 2 * (-cos(x)) + c = 2x * sin(x) + 2cos(x) + c$

Integration by parts: Definite integrals

$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$

Eksempel - Bestemt Integral:

Vi har integralet: $\int_0^1 x^2 e^{\frac{x}{2}} dx$

Vi vælger at differentiere x^2 og integrere $e^{\frac{x}{2}}$ så vi har:

$f(x) = x^2, g(x) = e^{\frac{x}{2}}, f'(x) = 2x, G(x) = 2e^{\frac{x}{2}}$

Nu sætter vi det ind i formlen:

$\int_0^1 x^2 e^{\frac{\pi}{2}} = \left[x^2 * 2e^{\frac{\pi}{2}}\right]_0^1 - \int_0^1 2x * 2e^{\frac{\pi}{2}} dx = \left[2x^2 e^{\frac{\pi}{2}}\right]_0^1 - \int_0^1 4x * e^{\frac{\pi}{2}} dx$

Det integral, vi er nået frem til på højre side, kan vi endnu ikke udregne. Derfor bruger vi partiel integration endnu engang.

$h(x) = 4x, k(x) = e^{\frac{\pi}{2}}, h'(x) = 4, K(x) = 2e\frac{\pi}{2}$

$\left[2x^2 * e^{\frac{x}{2}}\right]_0^1 - \int_0^1 4x * e^{\frac{x}{2}} dx = \left[2x^2 e^{\frac{x}{2}}\right]_0^1 - (\left[4x * 2e^{\frac{x}{2}}\right]_0^1 - \int_0^1 4 * 2e^{\frac{x}{2}} dx))$

Det sidste integral består af en enkelt funktion og det kan integreres således:

$= \left[2x^2 e^{\frac{x}{2}}\right]_0^1 - \left[8x * e^{\frac{x}{2}}\right]_0^1 + \left[16e^{\frac{x}{2}}\right]_0^1$

$= (2 * 1 * e^{\frac{1}{2}} - 2 * 0 * e^0) - (8 * 1 * e^{\frac{1}{2}} - 8 * 0 * e^0) + (16e^{\frac{1}{2}} - 16e^0)$

$= 2e^{\frac{1}{2}} - 8e^{\frac{1}{2}} + 16e^{\frac{1}{2}} - 16$

$= 10e^{\frac{1}{2}} - 16$

$= 10\sqrt{e} - 16$

Other:

Page 1040 - Def. the double integral of f

Page 1042 - def. Midpoint rule for double integrals

8 Taylor_and_Maclaurin

Taylor serien beskriver hvordan vi finder et differntiale estimat for polymonier af n grad. Hvor man samtidigt kan teste om ens power serie er "Convergent eller Divergent"

8.1 Definitions

If f has a power series representation (expansion) at a, that is, if:
$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \|x-a\| < R$ **Hvor er den radius omkring din graf**
Mange af R værdierne kan findes på: Side 804
Its coefficients are given by the formula $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$
Kan også omformuleres som:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^(n)}{n!}(x-a)^n$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + ...$$

Hvis i det særlige tilfælde at a = 0 så får vi formlen:

$$f(a) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2....$$

Hvilket bliver kaldt for Maclaurin serien.

8.2 Special Maclaurin series

Side 804 viser særlige tilfælde for Maclaurin serien og deres R forhold af convergens.

8.2.1 The Root Test

The root test shows how wether or not the power series is converget, not divergent or if the test is inconclusive. Definition findes på side 777.
If L 1 then the series is absolutly convergent
If L 1 eller ∞ then the series is divergent

8.3 Binominal Series

Binominal Series if k is any R og $|x| < 1$

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!}x^4 ...$$

Serien converges ved 1 iff $-1 < k \leq 0$
Serien converges at endpoints iff k ≤ 0
Hvis n $>$ k så holder $\binom{n}{k}$ en faktor (k-k), så $\binom{n}{k} = 0$
Hvilket er en normal Binominal Theorem når k ≤ 0

9 Gradient

The gradient stores all the partial derivative information of a multivariable function.

Hvor man så finde gradianten i forhold til x og y ..

f.eks $f(x,y) = x^2 - xy$
find f i forhold til x, $x^2 - xy = 2x - y$
find f forhold til y, $x^2 - xy = -x$

f.eks f(x,y,z)= $(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2$
What is the directional derivative of f in the gradient vector direction at the point(2,-1,2)?
Først finder vi f i forhold til x,y,z:
$f_x(x,y,z) = 2(x+y) + 2(z+x)$
$f_y(x,y,z) = 2(x+y) + 2(y+z)$
$f_z(x,y,z) = 2(y+z) + 2(z+x)$

Herefter sætter vi vores tal i som vi er givet x=2,y=-1,z=2
$2*(2-1) + 2*(2+2) = 10$

$2*(2-1)+2*(-1+2)=4$
$2*(-1+2)+2*(2+2)=10$
så svaret er $(f(2,-1,2)) = \langle 10,4,10\rangle$

Skal man finde en equation til et specifik points skal vi bruge formlen:
$z-z_0 = x-x_0+y-y_0$ findes på side 975.

f.eks: Find an equation of the tangent plane to the given surface at the specific point.
$z=2x^2+y^2-5y,(1,2,-4)$
Partial diffirence:
$f_x(x,y)=4x$ so $f_x(1,2)=4$
$f_x(x,y)=2y-5$ so $f_y(1,2)=-1$
(4 og -1 som vi har regnet ud, er det der sættes foran ())

Dette kan sætte ind i formlen:
$z+4=4(x-1)-1(y-2)=$
$z+4=4x-4)-y+2)=$
$z=4x-y-6$

10 Counting_Ordered_Unordered

11 Ordered/With Replacement

Chapter 2 in "Introduction to Probability, Statistics, and Random Processes - Hossein Pishro-Nik"
Hvornår brug?:
1)Hvis du har en eller flere endelige sets (notationer kunne være $|A|$ der skal findes en combination på.

2) Eller hvis du får en sample size (n + m) og S = (n + m) så kan P(A) findes = $\binom{n}{k}(p)^k(p^c)^{n-k}$

Med et sæt A: n med n værdier og k er en et ønske tal hvor at tælle combinationer af inden for n, det medfører at n > k og $k \neq 0$.
For at udtrykke k = $n^k = n * n * n * n$ Dette holder hvis n altid er samme værdi. Ellers ganger du bare dine værdier sammen = N. For at finde sandsynligheden for at få netop ét af disse events er derfor så $P(G_i) = \frac{1}{N}$.
Generelt er notationen for at finde sandsynligheden: $P(A) = 1 - \frac{|A^c|}{|S|}$.$A^c$ er bare S - A.

12 Unordered_Without_Replacement

Hvornår brug?
1) Hvis man har en skål med 30 røde bolde og 70 blå: Først sæt $|A|$ til den del mængde du vil undersøge. S = $30 + 70 = 100 = |S|$
Hvis vi vælger A som de røde bolde, med en sample size på 20, får vi $|A| = \binom{20}{k}\binom{70}{k-20}$ Hvilket betyder at $P(A) = \frac{\binom{30}{k}\binom{70}{20-k}}{\binom{100}{20}}$

Chapter 2.1.3 in "Introduction to Probability, Statistics, and Random Processes - Hossein Pishro-Nik"
For set $A = n$ værdier $P(\binom{n}{k}) \times k! = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ Husk hvis k > n så er resultatet altid 0.
Vandermonde's identity: $\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$

13 Bernoulli Trials and Binomial Distribution:

Chapter 2.1.3 "Introduction to Probability, Statistics, and Random Processes - Hossein Pishro-Nik" Bernoulli har 2 udfald: Failure eller Success med random experiment med en af de to udfald.
Hvis vi tæller alle tilfældende for success for bliver det kaldt for binominal.

13.1 Eksempel på Binomial Distribution

Hvis vi har: $P(H) = p$ and $P(T) = 1 - p$
Sandsynligheden for at "outcome" er THHHH kan udregens som:

$$\text{Hvor } A = THHHH, P(A) = P(THHHH) = p(T) \times p(H) \times p(H) \times p(H) \times p(H) \times = (1-p)p^4$$

13.2 Binominal Formular

Def: 2.1.3:
For n independent Bernoulli trials where each trial has success probability p , the probability of k successes is given by

$P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ Fra en øvelses er det godt at huske at hvis man skal finde en model med denne formel og man ikke har p skal man ikke finde et endelig tal.

14 Unordered with Replacement

For at finde en bestemt mængden af løsninger, kan man bruge formlen:
Def: 2.14

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

Hvornår Brug?:
Hvis du er giver en sekvens, hvor alle værdierne i sættet skal indgå og ende i et bestemt resultat.
F.x: $A = \{x_1 + x_2 + x_3 + x_4\} = 100$ such that
$x_1 \in \{1, 2, 3...\}, x_2 \in \{2, 3, 4...\}, x_3, x_4 \in \{0, 1, 2, 3...\}$
Her gælder det om, at få dem på samme form, så man kan bruge formlen $\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$. Dette opnås ved notationen:

$$y_1 = x_1 - 1 \text{ da } y_1 \text{ bliver til} \in \{0, 1, 2, 3...\}$$
$$y_2 = x_2 - 2 \text{ da } y_2 \text{ bliver til} \in \{0, 1, 2, 3...\}$$
$$y_1 + 1 + y_2 + 2 + x_3 + x_4 = 100$$
$$\text{Meaning that:}$$
$$\binom{4+97-1}{3} = \binom{100}{3}$$

15 Inclusion-Exclusion Princip

Hvornår brug?: Når du ønsker at beregne sandsynligheden af et event, hvor eventsne kan overlappe. Case: Sandsynligheden for at en bold med nummeret i bliver valgt i runde i.
Matching problem som findes ved 2.1.5 ved Problem 7 (Matching problem)
Generelt kan det bruges hvis du har to forskellige mængder, hvor den ene bliver blandet og du vil finde sandsynligheden for at 1 eller flere dele finder tilbage til det orginale område.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C)P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Generelt for n events $A_1, A_2, A_3, ...A_n$ har vi at:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - .... + (-1)^{n-1} P(\cap_{i=1}^{n} A_i)$$

16 Sandsynlighed

16.1 Sandsynlighedsmodeller

16.1.1 Sample space (udfaldsrum)

Sample space S er en sandsynlighedmodel for alle mulige udfald i et sæt. (Sample space = udfaldsrum = Ω (omega))
De følgende eksempler, er eksempler på ***random experiment***, da udkommet er usikkert. I kontekst til ***random eksperiment*** er ***sample space*** vores universal set. (Probabilitycourse kapitel 1.3.1)
Når vi gentager et ***random experiment*** flere gange, kalder vi dem for **trials**.

Eksempel 1:
Observerer antal mål i en fodboldkamp, ***Sample space S***: ***S***={0,1,2,3, ...}

Eksempel 2:
En skål med fem forskellige bolde, hver i deres farve, bliver taget i en tilfældig rækkefølge, vil ***Sample space S*** være: ***S***={hvid, sort, grøn, blå, rød}

Eksempel 3:
En skål med fem bolde, 2 blå og 3 røde, bliver der taget én bold vil ***Sample space S*** være ***S***= {red, blue}

Eksempel 4:
2 skåle, én med 2 blå bolde og én med 3 røde bolde, 2 bolde bliver taget i tilfældig rækkefølge (fre en eller bægge skåle), vil ***Sample space S*** være:***S***= {(2 røde), (2 blå), (1 rød og 1 blå)}

Eksempel 5:(kapitel 1.3.1 i probabilitycourse.com example 1.7)
Kaster en mønt 3 gange. Observerer sekvensen af krone/plat, vil ***Sample space S*** være: ***S***={(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H)

Når målet er et finde specifikke **events** til et ***random experiment***, eksempelvis at finde ud af sandsynligheden for at en terning slå et lige tal: ***E***={2,4,6}(= $\frac{1}{2}$). Et event er et subsæt af ***sample space***, hvilket vi tildeler en sandsynlighed. Hvis resultatet af ***random experiment*** tilhører vores subsæt ***E***, siger vi at ***E*** har opstået. (probabilitycourse.com chapter 1.3.1)

Udregne sandsynligheden for ethvert event er:

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|}$$

Hvor $|A|$ og $|S|$ repræsenterer længden af sættene A og S
Eksempel 1:

Hvis vores ***Sample space S*** er: ***S***={hvid, sort, grøn, blå, rød} og vi er interesseret i at få fat på en hvid bold, sætter vi vores sandsynligheds event til at være P(A)=$\frac{1}{5}$, da $|A|$ mærke er ét udfald og $|S|$ er alle fem mulige udfald. Hvis vi bare skulle have 1 tilfældig bold ville P(A)=1.
(P(A) skal være et tal mellem 0 og 1 ($0 \leq P(A) \leq 1$))
Eksempel 2:
Hvis vores skål med bolde indeholder 3 forkellige bolde, 4 hvide 2 blå og 1 rød, vi skriver vores ***Sample space S*** således: ***S***={hvid, blå, rød}. Vi ønsker at finde ud af hvor mange gange vi får et **event** hvor bolden er hvid **E**= $\frac{4}{7}$, hvis vi udfører vores **random eksperiment** 210 gange:
Vi ved at vores **event** for én gang vi udfører eksperimentet er $\frac{4}{7}$, når vi ønsker at finde resultatet efter 210 gange indsætter vi det således: $210 * \frac{4}{7} = 120$ gange.

16.1.2 Venn Diagrams

(probabilitycourse.com chapter 1.2.1 Venn Diagrams)
Venn diagrammer er en visuel repræsentation af relationerne mellem sæts.

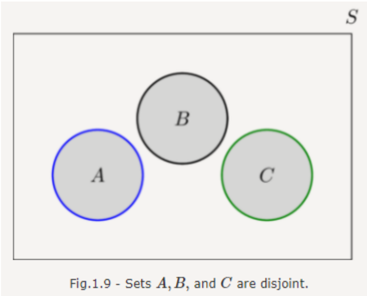
16.2 Axioms

Når vi tildeler en *probability measure* P(A) til et event A, vil det være en værdi mellem 0 og 1. hvis P(A) er tæt på 0, vil det være højst usandsynligt at event A vil ske, imens hvis P(A) er tæt på 1, er det højst sandsynligt at event A vil ske.

Axioms of Probability:

- Axiom 1: For any event A, $P(A) \geq 0$.
- Axiom 2: Probability of the sample space S is $P(S) = 1$.
- Axiom 3: If $A_1, A_2, A_3, \cdots$ are disjoint events, then $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots$

(probabilitycourse.com kapitel 1.3.2 Probability)
Axiom 1: Beskriver at sandsynlighed ikke kan være negativ og at den mindste værdi for P(A) = 0. Dette betyder også at hvis P(A) = 0, vil event A ikke ske.
Axiom 2: Konstaterer at sandsynligheden for at hele ***sample space*** = 1 i.e 100%. Hvert *trail* tilhører altid ***S*** og eventet ***S*** sker altid og P(S)=1
Axiom 3: Disjoint betyder at hvis two events er disjoint, er sandsynligheden for at de sker samtidig = 0.
Dette medfører at deres sandsynlighed for deres **union** bliver den summerede værdi af deres sandsynlighed.



Venn diagram for disjoint
(Probabilitycourse.com shapter 1.2.2 set operations)

16.2.1 Symboler anvendt i Axiom

$\cup$ = **Union** er 2 sæt der indeholder alle elementer i A **eller** i B, måske begge.
$\cap$ = **Intersection** er 2 sæt der indeholder alle DELTE elementer i A **og** B, så hvis A = {1,2,3,4,5} og B = {3,4,5,6,7} så er A$\cap$B = {3,4,5}
$\overline{A}$ = **Complement** hvor alle elementer er i det universelle sæt ***S***, men ikke i A.
A-B = **Difference (substraction** består af elementer der er i A men ikke i A
A$\cap$ B = Ø = **mutually exclusive (disjoint)** Hvis de ikke deler nogen elementer, i.e. deres intersection er tom.
$\subset$ = alle elementer af sæt A er elementer i sæt B.
$\supset$ = A er et supersæt af et andet sæt B, hvis alle elementer i mængden B er elementer i mængden A.

16.3 Models

16.3.1 Discrete Model

I **Discrete** beregner vi sandsynligheden af events ved at addere alle de tilsvarende resultater sammen. Anvend **Discrete model** hvis ***sample space S*** er et *countable* sæt.
Når ***S*** er *countable* kan liste alle elemter i ***S*** således:

$$S = \{s_1, s_2, s_3, ...\}$$

X er også en diskret variable, hvis dens *range* er countable.

Hvis A $\subset$ S er et event, så hvis A er *countable* og ved brug af det tredje **axiom**, kan modellen skrives således:

$$P(A) = P\Big(\bigcup_{s_j \in A} \{s_j\}\Big) = \sum_{s_j \in A} P(s_j).$$

kapitel 1.3.4 Discrete Probability Models
Så når det er et *countable* ***sample space***, for at finde sandsynligheden for et event, skal vi summerer sandsynligheden for hver individuel element i det set.
Hvis et sprøgsmål lyder på et specifikt mål: ramme præcist et punkt på en dartskive, er det en næsten umulig eller så lille at den er 0.

16.3.2 Continuous Model

Når ens ***sample spase S*** er: [0,1], er det et *uncountable* sæt.

16.4 Independence

The probability of two random variables does not have an impact on one another. Thus,

$$discrete\ :\ P_{X,Y}(x,y) = P_X(x)P_Y(y) continuous\ :\ f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Where $P_{X,Y}(x,y)$ is their joint PMF (discrete) and $f_{X,Y}(x,y)$ is their joint PDF (continous).
Follows from def. 4.4.:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

16.5 Dependent

If the above does not hold. Then you need to calculate the conditional probability for each pair in the joint PDF/ PMF.

16.6 Laws

16.6.1 De Morgan's law

Used to compute complements:

$$(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$$

16.6.2 Distributive law

16.6.3 Bayes law

Let $B_1, ..., B_n$ be a partion (union of all B's will give the whole sample space) of the sample space with P(B_i) ¿ 0. Then

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}$$

Think about the example of calcualating the probability of being sick, if you have a positive test. Then if you have the probability of being sick given a positive test you can calculate the left side. Then it would be as follows:
The probability of being sick = The probabilty of being sick GIVEN a positive test divided by the probability of being healthy given a negative test.

16.6.4 LOTUS

Law of the unconcious statistician:

$$discrete\ :\ E[g(X)] = \sum_{x \in R_X} g(x) P_X(x)$$
$$continuous\ :\ E[g(X)] = \int_{R_X} g(x) f_X(x) dx$$

17 Probability Mass Function (PMF)

Anvendes når X er en ***discrete random variable***, d.v.s at dens *range* $\boldsymbol{R}_X$ er *countable*:

$$R_X = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$$

Vi er interesseret at kende til sandsynligheden af $\{X = x_k\}$.
Hvilket gør at event A $= \{X = x_k\}$ der er defineret som:

$$A = \{s \epsilon S | X(s) = x_k\}$$

The probabilities of events $\{X = x_k\}$ are formally shown by the **probability mass function (pmf)** of X.

Definition 3.1
Let X be a discrete random variable with range $R_X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ (finite or countably infinite). The function

$$P_X(x_k) = P(X = x_k), \text{ for } k = 1, 2, 3, \ldots,$$

is called the *probability mass function (PMF)* of X.

kapitel 3.1.3

17.1 Properties af PMF

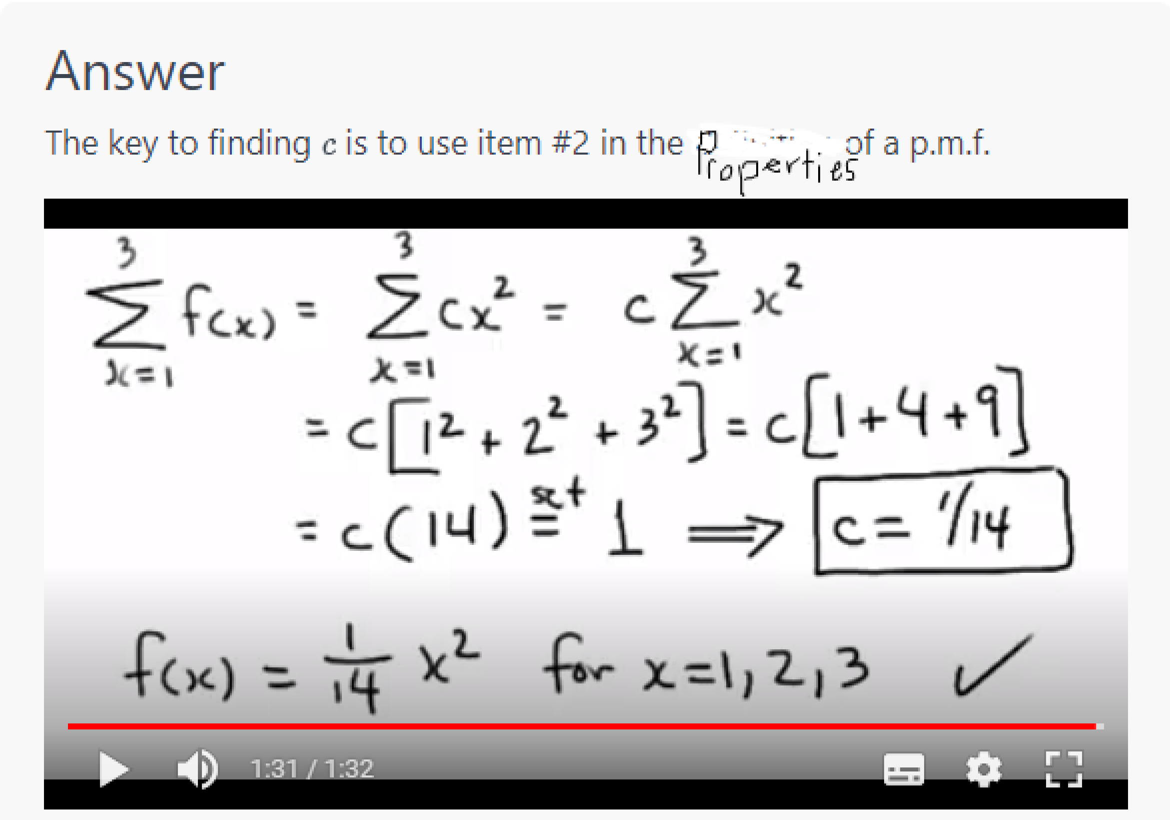
Properties of PMF:

- $0 \leq P_X(x) \leq 1$ for all x;
- $\sum_{x \in R_X} P_X(x) = 1$;
- for any set $A \subset R_X, P(X \in A) = \sum_{x \in A} P_X(x)$.

kapitel 3.1.3

17.2 Eksempler med properties (SUM) og range

Let $f(x) = cx^2$ for $x = 1, 2, 3$. Determine the constant c so that the function $f(x)$ satisfies the conditions of being a probability mass function.



17.3 Formler

17.3.1 Binomial distribution PMF

binormial distribution bliver brugt i sandsynlighed af **SUCCESS** eller **FAILURE** resultat der bliver gentaget mange gange. Så den binomiale har 2 mulige resultater.

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

n = antal af gange eksperimentet bliver kørt
p = sandsynligheden for ét specifikt udkom.

17.3.2 kriterier for binormial distribution

- Antallet af observationer eller *trails* er bestemt/fixeret
- Hver observation er *independent* (ingen af dine *trails* har en effekt på sandsynligheden på den næste *trial.*)
- Sandsynligheden for at sandsynligheden af **SUCCESS** er præsist den samme som fra en af de andre *trials*

17.4 Poisson distribution PMF

Poisson distribution hjælper med at forudse bestemte *events* når man ved hvor ofte *eventet* har fundet sted. Hvilket giver os sandsynligheden for et given antal af *events* der sker i et fixed tids interval.

$$\Pr\{Y = k \mid \mu\} = \frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!} \qquad \text{for } k = 0, 1, 2, \ldots.$$

λ (også skrevet som μ) = det forventede antal af tilfælde (nogle gange skrevet som *event rate* eller *rate parameter*
! = symbol for fakultet.
e = Eulers nummer, er en konstant

18 PDF

deff. 4.1.1 med en *continuous random variable* anvender vi PDF, der er densiteten af sandsynligheden.
X er kontinuert og er en definition af funktionen $fX(x)$ der følger hvor end **limit** eksisterer:

$$f_X(x) = \lim_{\Delta \to 0^+} \frac{P(x < X \leq x + \Delta)}{\Delta}.$$

18.1 Determine PDF

18.1.1 Uniform

For at finde PDF af en **uniform random variable** X**:**

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & x < a \text{ or } x > b \end{cases}$$

kapitel 4.1.1

PDF er konstant i intervallet a til b. På den måde anser vi X til at være uniformly distributed over

$$a, b$$

18.1.2 Uniform (exp()

Formlen for en **uniform Exponentiel** PDF, anvender vi denne form:

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

wiki

Indsæt i λ værdien der er angivet i exp(). Ved brug af denne formel, finder du den øvre og nedre værdi i integral sættet.

Den nedre er næsten altid 0.

18.1.3 properties af PDF

Consider a continuous random variable X with PDF $f_X(x)$. We have

1. $f_X(x) \geq 0$ for all $x \in \mathbb{R}$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)du = 1$.
3. $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(u)du$.
4. More generally, for a set A, $P(X \in A) = \int_A f_X(u)du$.

4.1.1

Eksempel for 4.

Ønsker at finde $P(X \epsilon [0, 1] \cup [3, 4]) =$

$$P(X \in [0,1] \cup [3,4]) = \int_0^1 f_X(u)du + \int_3^4 f_X(u)du.$$

19 CDF

Deff: 3.2.1
$\int PDF = CDF$
Hvis **absolut continuity:**

CDF = Cumulative distribution function is the sum for all the propability: P in the Space: S.
CDF is also a non-decreasing function i.e if y$\geq$ x then FX(y) $\geq$ Fx(x).
As CDF approaches 1 as x becomes large:

$$\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1.$$

3.2.1 Cumulative Distribution Function

19.0.1 Cumulative distribution function

$$F(x; \lambda) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Wiki

19.0.2 Eksempel

Notation:
$P(X = x)$ meaning X is thing are you testing on (People, balls in a basket, numbers ect) x being the specific value you are testing on.
Like on 15 balls, find the propability of

$$x = 5\ P(15 = 5)$$
$$= P(X \leq x)$$
$$= P(a \leq X \leq b$$
For all propabilitiess from a to b
$$= \int_a^b f(t)dt$$
Eller $P(a < X \leq b) = F_x(b) - F_x(a)$

Det burde være åbenlyst at hvis a = b så er P(X = a) = 1.

20 Expected value

Expected value bruges når man kigger på Continuous distribution.
Det kaldes også ofte at finde mean ($\bar{x}$) som er defineret som

$\frac{(x_1 * P_1)+(x_2 * P_2)+(x_3 * P_3)}{P_1 + P_2 + P_3}$

Hvor man normalt når man finder expected value opstiller man det således:

For discrete random variables:
$E(x) = \sum xP(x)$ hvor P er probability

And

For continuous random variables:
$E(x) = \int_a^b xf(x)dx$ hvor er probability densitiy function

FORSKELLEN:

Discrete: distinkte eller seperate værdier, dvs. værdier der er tællelige

Continous: kan være alle værdier i et interval

Vi kigger på hvad den expected value E[x] vil være for en given situation.

20.1 Først tager vi et meget simpelt eksempel

Lisa plays a game with 2 outcomes, she wins and get 500 or she loose and looses 100. With a probability of winning the game is 20%

So the formular to find the expected value is:
$E(x) = x_1 * p_1 + x_2 * p_2$

Where x_1 is how must she wins, and p_1 is the probability for that to happen. x_2 and p_2 is how must she looses and the probability for that to happen.
So we know its 10% chance of winning, so that means 80% chance of loosing.So we can put that all into the formula and find the expected value.

$E(x) = 500 * 0.20 + (-100) * 0.80 = 20.$
So each game the expected value she would gain is 20.
So after 10 games she would be expected to win $10 * 20 = 200$ and so on.

20.2 Expected value and variance of a discrete random variables:

Side 193 i introduction to probability statistics and random process.

"The expected value of a random variable is the theoretical mean of the random variable."

Expected of X, også kaldes μ:
E(x) = $\sum x * p(x)$ (sum tegnet er for all x), (definition 3.11, 3.2.2 side 193)
E[g(x)] = $\sum g(x) * p(x)$ (expected value for en function g(x)), (Law of the unconscious statistician(LOTUS), side 200)

Variance of X: (side 202, 3.2.4)
$E[(X-\mu)^2] = \sum (x-\mu)^2 * p(x)$
$E[(X-\mu)^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$ (lettere af finde, hvis man kan finde E(x) for derefter man kan også finde $e(x^2)$.

Example 1:
The probabity distribution of X is:

x	0	1	2
p(x)	0.16	0.48	0.36

Find e(x):
$e(x) = 0 * 0.16 + 1 * 0.48 + 2 * 0.36 = 1.2$ find Variance:
Først finder vi $e(x^2) = 0^2 * 0.16 + 1^2 * 0.48 + 2^2 * 0.36 = 1.92$
$E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$
$E[(X - \mu)^2] = 1.92 - 1.2^2 = 0.48$

Example 2:
f(x) = x^2 uniform distributed at [0,1]

e[x] = $\int_0^1 x^2 * x dx = \frac{1}{4}$
$e[x^2] = \int_0^1 x^2 * x^2 dx = \frac{1}{5}$
var[x] = $\frac{1}{5} - (\frac{1}{4})^2 = \frac{11}{80}$

21 Covariance and Correlation

"Consider two random variables X and Y . Here, we define the covariance between X and Y , written Cov(X,Y). The covariance gives some information about how X and Y are statistically related. Let us provide the definition, then discuss the properties and applications of covariance."

Covariance between X and Y is defined as: (5.3.1, side 391)
$Cov(X, Y) = E[(x - EX)(Y - EY)] = E[XY] - (EX)(EY)$

Se side 392 for lemma 5.3, for Covariance properties

Example 5.33

Let X and Y be two independent $N(0,1)$ random variables and

$$\begin{aligned} Z &= 1 + X + XY^2, \\ W &= 1 + X. \end{aligned}$$

Find Cov(Z, W).

Solution

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Z,W) &= \text{Cov}(1 + X + XY^2, 1 + X) \\ &= \text{Cov}(X + XY^2, X) && \text{(by part 5 of Lemma 5.3)} \\ &= \text{Cov}(X,X) + \text{Cov}(XY^2, X) && \text{(by part 6 of Lemma 5.3)} \\ &= \text{Var}(X) + E[X^2Y^2] - E[XY^2]EX && \text{(by part 1 of Lemma 5.3 \& definition of} \\ &= 1 + E[X^2]E[Y^2] - E[X]^2E[Y^2] && \text{(since } X \text{ and } Y \text{ are independent)} \\ &= 1 + 1 - 0 = 2. \end{aligned}$$

Variance of a sum:

One of the applications of covariance is finding the variance of a sum of several random variables. In particular, if $Z = X + Y$, then

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Z) &= \mathrm{Cov}(Z, Z) \\ &= \mathrm{Cov}(X + Y, X + Y) \\ &= \mathrm{Cov}(X, X) + \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(Y, X) + \mathrm{Cov}(Y, Y) \\ &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y). \end{aligned}$$

More generally, for $a, b \in \mathbb{R}$, we conclude:

$$\boxed{\mathrm{Var}(aX + bY) = a^2\mathrm{Var}(X) + b^2\mathrm{Var}(Y) + 2ab\mathrm{Cov}(X, Y) \qquad (5.21)}$$

22 Færdige Opgaver

22.1 Uge 1 (Limits, Continuouity, Derivatives)

2.2.6 For the function h whose graph is given, state the value of each quantity, if it exsists. If not, explain why.

2.3.8 Guess the value of the limit by evaluating the function at the given numbers

2.3.10 Evaluate the limit and justify each step by indicating the appropriate Limit Law

2.4.19 What is wrong with this?:

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$$

in view of this, explain why this is correct

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \to 2} x + 3$$

2.4.19 Prove $\lim_{x \to 1} \frac{2+4x}{3} = 2$ using the fancy e and d definition

2.5.13 Use the definition of continuity and properties of limits to show that the function is continuous at the given number "a"

2.5.17 Explain why the function is discontinuous at the given numver "a"
Sketch the graph

2.6.4 For the function g whose graph is given, state the following:
Limits of different points and directsions (- / +)

2.8.28 Find the derivative of the followiing using the definition of derivative. State the domain od the function and the domain of the derivative.

3.2.4 Differentiate

3.2.12 Differentiate

22.2 Uge 2 (Derivatives, two function derivatives)

3.4.2 Write the composite function in the form f(g (x)), then find the derivative dy/dx.

3.4.6 Write the composite function in the form f(g (x)), then find the derivative dy/dx.

3.4.10 Find the derivative of the function

3.4.18 Find the derivative of the function

3.4.22 Find the derivative of the function

3.4.24 Find the derivative of the function

3.5.2 a) Find y' by implicit differentiation
b) Solve the equation explicitly for y and differentiate to get y' in terms of x
c) Check that your solutions to parts (a) and (b) are consistent by substituting thr expression for y into your soltion for part a

3.5.8 Find dy/dx by implicit differentiation

3.5.36 Find y" by implicit differentiation

3.6.6 Differentiate

3.6.34 Find an equation of the tangent line to trhe curve at the given point

14.2.28 Graph the function and observe where it is discontinuous. Then use the formula to explain what you have observed.

14.2.34 Determine the set of points at which the function is continuous.

14.2.44 Let: $f(x,y) = \begin{cases} 0 & if\ y \leq 0\ or\ y \geq 0 \\ 1 & if\ 0 < y < x^4 \end{cases}$
a) show that $f(x,y) -> 0$ as $(x,y) -> (0,0)$ along any path through $(0,0)$ of the form $y = mx^a$ with $0 < a < 4$
b) Despite part (a) show that f is discontinuous at $(0,0)$
c) Show that f is discontinuous on the two entire curves

14.3.18 Find the first partial derivatives of the function

14.3.42 Find the indicated partial derivative

14.4.4 Find an equation of the tangent plane to the given surface at the specified point

14.4.20 Find the linear approximation of the function $f(x,y) = 1 - xy\ cos\pi\ at\ (1,1)$ and use it to approximate $f(1.02, 0, 97)$
Illustrate by graphing

22.3 Uge 3 (Gradient, min. max., sequence, series, taylor, newton)

4.1.6 Use the graph to state the absolute and local maximum and minimum values of the function

4.1.8 Sketch the graph pf a function f that is continuous on $[1,5]$ and has the given properties

4.1.30 Find the critical numbers of the function

4.1.36 Find the critical numbers of the function

4.1.42 Find the critical numbers of the function

4.1.52 Find the absolute max and min values of f on the given interval

4.2.10 Let $f(x) = 1 - x^2/3$ Show that $f(-1) = f(1)$ but there is no number c in $(-1, 1)$ such that $f'(c) = 0$ Why does this not contradict Rolle's Theorem?

4.2.26 Suppose that $3 \leq f'(x) \leq 5$ for all values of x. Show that $18 \leq f(8) - f(2) \leq 30$

4.3.2 Use the given graph of f to find the following: Open intervals, Increasing and Decreasing, Concave up / Concane Down and Inflection points.

4.3.24 Sketch the graph of a function that satifies all of the given conditions.

4.3.30 Sketch the graph of a function that satifies all of the given conditions.

4.3.50 Find: Vertical + Horizontal asymptotes. Intervals of in/decrease. Local max / min. Intervals of concavity anf inflection.
Use this to sketch the graph

4.3.64 Estimate the intervals of concavity to one decimal place by using a computer algebra system to compute and graph f''

4.8.6 Use Newton's method with the specified initial approximation x, to find x_3 the third approximation to the root of the given equation.

4.8.24 Use Newton's method to find all of the solutions of the equation correct to eight decimal places. Start by drawing a graph to find initial approximations.

4.6.8 Produce graphs of f that reveal all the important aspects of the curve. In particular, you should use graphs of f' and f'' to estimate the intervals of in/decrease, extreme values, intervals of concavity and inflection points.

4.7.12 Consider the following problem. A box with an open top is to be constructed from a square piece of cardboard, 3 ft wide, by cutting out a square from each of the four corners and bending up the sides. Find the largest volume that such a box can have.

4.7.36 A poster is to have area of 180 in^2 with 1 inch margins at the bottom and sides and a 2 inch margin at the top. What dimensions will give the largest printed area?

22.4 Uge 4 (Integration, numerical integration, integration with two functions)

11.1.2 What is convergent sequence? What is divergent sequence?

11.1.34 Whether the sequence converges or diverges. If it converges find the limit.

11.2.2 Explain what it means to say that: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5$

11.2.17 Determine whether the geometric series is convergent or divergent. If it is convergent, find its sum

11.8.13 Find the radius of convergence and interval of convrgence of the series.

11.10.6 Use the definition of a Taylor series to find the first four non-zero terms of the series for $f(x)$ centered at the given value of a

11.10.13 Find the MacLaurin series for $f(x)$ using the definition of a MacLaurin series. Also find the associated radius of convergence.

5.2.10 Use the Midpoint rule with the guven value of n to approximate the integral. Round to 4 decimals.

5.3.9 Use part 1 of the Fundemental Theorem of Calculus to find the derivative of the function.

5.4.5 Find the general indefinite integral.

5.4.10 Find the general indefinite integral.

5.5.5 Evaluate the integral by making the given substitution.

5.5.10 Evaluate the indefinite integral.

7.7.10 Use:
a) Trapezoidal Rule
b) Midpoint Rule
c) Simpsons Rule
To approximate the given integral is convergent or divergent. Evaluate the convergent.

7.8.8 Determine whether each integral is convergent or divergent. Evaluate the convergent.

7.8.10 Determine whether each integral is convergent or divergent. Evaluate the convergent.

15.1.6 A 30 ft by 30 swimming pool is filled with water. The depth is measured at 5 ft intervals, starting at one corner of the pool, and the values are recorded in the table. Estimate the volume of the pool.

22.5 Uge 5 (Uniform distributions, conditional probability and basic concepts of probability)

Ch 1, prob 1 Suppose that the universal set S is defined as $S = \{1, 2, ..., 10\}$ and $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{X \in S : 2 \leq X \leq 7\}$ and $C = \{7, 8, 9, 10\}$ Find:
a) $A \cup B$
b) $(A \cup C) - B$
c) $\bar{A} \cup (B - C)$
d) Do A, B and C form a partion of S?

Ch 1, prob 3 For each of the following Venn Diagrams, write the set denoted by the shaded area

Ch 1, prob 9 Let $A_n = \left[0, \frac{1}{n}\right] = \left\{x \in R \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{n}\right\}$ for n = 1, 2, . Define $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cap A_2 ...$
Find A

Ch 1, prob 13 Two teaams A and B play a soccer match, and we are ineterested in the winner. The sample space can be defined as: $S = \{a, b, d\}$, where a shows the outcome that A wins, b shows the outcome that B wins and d shows the outcome that they draw. Suppose that we know that:
(1) The probability that A wins is $P(a) = P(\{a\}) = 0,5$
(2) The probability of a draw is $P(d) = P(\{d\}) = 0,25$
a) Find the probability that B wins
b) Find the probability that B wins or a draw occurs.

Ch 1, prob 25 A professor things students who live on campus are more likely to A in the probability course. To check this, the professor combines data from the past few years:
a) 600 students have taken the course.
b) 120 students have gotten A
c) 200 students lived on campus.
d) 8+ students lived off campus and got A
Does this data suggest that "getting an A" and "living on campus" are dependent or independent?

Ch 1, prob 31 One way to design a spam filter is to look at the words in an email. In particular, some words are more frequent in spam emails. Suppose that we have the following info:
50% of emails are spam;
1% of spam emails contain the word "refinance";
0.001% of non-spam emails contain the word "refinance"
Suppose that an email contains the word "refinance". What is the probability that the email is spam?

Ch 2, prob 1 A coffee shop has 4 differnent types of coffee. You can order your coffee in a small medium, or large cup. You can also choose whether you want to add cream, sugar or milk. In how many wats can you order your coffee?

Ch 2, prob 3 There are 20 black cell phones and 30 white cell phones in a store. An employee takes 10 at random. Find that probability that:
a) There will be exactly 4 black cell phone among the chosen phones.
b) There will be less than 3 black cell phones among the chosen phones.

Ch 2, prob 5 Five cards are dealt from a shuffled deck. What is the probability that the dealt hand contains exactly two aces, given that we know that it contains at least 1.

22.6 Uge 6 (Combinatorics, discrete and continuous random variables, expectation and variance)

Ch 3, prob 1 Let X be a discrete random variable with the PMF:

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & for x = 0 \\ \frac{1}{3} & for x = 1 \\ \frac{1}{6} & for x = 2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

a) Find R_x the range of the random variable X
b) Find $P(X \geq 1,5)$

c) Find $P(0 < X < 2)$
d) Find $P(X = 0|X < 2)$

Ch 3, prob 3 I roll two dice and observe two numbers X and Y.If $Z = X - Y$ Find the range and PMF af Z. item[Ch 3, prob 5] 50 students live in a dorm. The parking lot has a capacity for 30 cars. If each student has a car with probability $\frac{1}{2}$ (independent from other students), what is the probability that there won't be enough parking spaces for all the cars?

Ch 3, prob 11 The number of emails I get in a week day (Mon - Fri) can be modeled by a Possion distribution with an average of $\frac{1}{6}$ emails per minute. The number of emails that receive on weekends (Sat - Sun) can be modeled by Possion distribution with an average of $\frac{1}{30}$ per minute.
a) What is the probability that I get no emails in an interval of length of 4 hours on a Sunday.
b) A random day is chosen and a random interval of length one hour is selected on the chosen day. It is observed that I did not recieve any emails in the interval. What is the probability that the chosen day is a weekday?

Ch 3, prob 13 Let X be a discrete random variable with the following CDF:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & for\, x < 0 \\ \frac{1}{6} & for\, 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & for\, 1 \leq x < 2 \\ \frac{3}{4} & for\, 2 \leq x < 3 \\ 1 & for\, x \geq 3 \end{cases}$$

Find the range and PMF of X

Ch 3, prob 19 Suppose that: $Y = -2X + 3$. If we know $EY = 1$ and $EY^2 = 9$, find EX and Var(X)

Ch 4, prob 1 Chose a real number uniformly at random in the interval $[2, 6]$ and call it X.
a) Find the CDF of X
b) Find EX

Ch 4, prob 3 Let X be a continuous random variable with PDF:

$$f_X(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{2}{3} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

a) Find $E(X^n)$, for n = 1,2,3 ...
b) Find the variance of X

Ch 4, prob 7 Let X $\sim$ $Exponential(\lambda)$. Show that:
a) $EX^n = \frac{n}{\lambda} EX^{n-1}$ for, n = 1,2,3 ...
b) $EX^n = \frac{n!}{\lambda}$ for, n = 1,2,3 ...

Ch 4, prob 11 Let X $\sim$ $Exponential(2)$. and $Y = 2 + 3X$ Find:
a) $P(X > 2)$
b) Find EX and VAR(X)
c) $P(X > 2|Y < 11)$

Ch 4, prob 17 A continuous random variable is said to have a $Laplace(\mu, b)$ distribution [14] if its PDF is given by:

$f_X(x) = \frac{1}{2b}exp(-\frac{|x-\mu|}{b})$

$= \begin{cases} \frac{1}{2b}exp(\frac{x-\mu}{b}) & if x < \mu \\ \frac{1}{2b}exp(-\frac{x-\mu}{b}) & if x \geq \mu \end{cases}$

where $\mu \in R$ and $b > 0$

a) if $X \sim Laplace(0, 1)$, Find EX and VAR(X)
b) if $X \sim Laplace(0, 1)$ and $Y = bX + \mu$, Show that $Y \sim Laplace(\mu, b)$
c) Let $Y \sim Laplace(\mu, b)$, where $\mu \in R$ and $b > 0$. Find EY and VAR(Y)