Nombre: Elisabet Guirao Espinosa
DNI:49697268H
Grupo: GIM1

1:) $\begin{cases} (4x^2-2y^2)\,dx = 2xy\,dy \\ y(1)=3 \end{cases} \rightarrow y' = \dfrac{4x^2-2y^2\,dx}{2xy}$

$v=\dfrac{y}{x} \rightarrow y = vx \rightarrow y' = v'x+v$

$v'x+v = \dfrac{2x^2-(vx)^2}{x^2\cdot v} = \dfrac{2x^2-v^2\cdot x^2}{x^2\cdot v} = \dfrac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\cdot v} - \dfrac{v^2\cdot\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\cdot v} = \boxed{\dfrac{2-v^2}{v} = v'x+v} \rightarrow v'x = \dfrac{2-v^2}{v} - v = \dfrac{2-v^2}{v} - \dfrac{v^2}{v} = \dfrac{2-v^2-v^2}{v} = \dfrac{2-2v^2}{v} \rightarrow v'x = \dfrac{2-2v^2}{v}$

$\dfrac{dv}{dx}\cdot x = \dfrac{2-2v^2}{v} \rightarrow dv\cdot v = \dfrac{2-2v^2}{x}dx \rightarrow \dfrac{dv\cdot v}{(2-2v^2)} = \dfrac{dx}{x} \rightarrow \underbrace{\int\dfrac{v}{2-2v^2}dv}_{1} = \underbrace{\int\dfrac{dx}{x}}_{2} \rightarrow ⊛$

1 $\displaystyle\int\frac{v}{-2v^2+2}dv = \int\frac{v}{t}\cdot\frac{dt}{-4dv} = -\frac{1}{4}\cdot \ln(v^2-1)+C_1 \;, C_1\in\mathbb{R}$

2 $\ln(x)$

⊛ $\rightarrow -\dfrac{1}{4}\ln(v^2-1) = \ln(x)+C \rightarrow -\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{y}{x}-1\right) = \ln x + C_1 \;, C_1\in\mathbb{R}$

$\ln(v^2-1) = -4\cdot\ln(x)+C \rightarrow \cancel{e}^{\cancel{\ln}(v^2-1)} = \cancel{e}^{-4(\cancel{\ln}(x)+C)} \rightarrow v^2-1 = \left(\cancel{e}^{\cancel{\ln}(x)+C}\right)^{-4} \rightarrow v^2-1 = (x+C)^{-4}$

$e^{\ln(v^2-1)} = e^{-4(\ln(x)+C)}$

• Tomando: $v=\dfrac{y}{x}$; $\dfrac{y^2}{x^2}-1 = (x+C_1)^{-4} \rightarrow \dfrac{y^2}{x^2}-1 = \dfrac{1}{x^4+C^4} \rightarrow y = \sqrt[2]{\dfrac{x^2}{x^4+C_1^4}+1}$

• $y(1)=3$

$\dfrac{3^2}{1^2}-1 = \dfrac{1}{1+C_1^4} \rightarrow C = \sqrt{\dfrac{-7}{8}} \;, C_1\in\mathbb{R}$

2-) $\begin{cases} y'' + 4y = 4\operatorname{sen}(2x) \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$

• Ecuación dif. hom. asociada: $y'' + 4y = 0 \rightarrow P(x) = x^2 + 4 = 0$, $x = \sqrt{-4} = \pm 2i$

Raíces 0 ± 2 $\rightarrow \cos(2x)$, $\rightarrow \operatorname{sen}(2x)$

• Solución ecuación dif. hom. asociada: $y(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \operatorname{sen}(2x)$; $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

• Solución particular: $y(x) = Ax\cos(2x) + Bx\operatorname{sen}(2x)$

$y'(x) = -2Ax\cdot\operatorname{sen}(2x) + B\sin(2x) + 2Bx\cos(2x) + A\cos(2x)$

$y''(x) = -4A\operatorname{sen}(2x) - 4Ax\cos(2x) + 4B\cos(2x) - 4B\operatorname{sen}(2x)$

• Sustituimos en $y'' + 4y = -4\operatorname{sen}(2x)$

$-4A\operatorname{sen}(2x) - 4A\cancel{x\cos}(2x) + 4B\cos(2x) - 4B\cancel{x\operatorname{sen}}(2x) + 4Ax\cancel{\cos}(2x) + 4Bx\cancel{\operatorname{sen}}(2x)$

$-4A\operatorname{sen}(2x) + 4B\cos(2x) = 4\operatorname{sen}(2x)$

$\begin{cases} -4A = -4 \longrightarrow A = 1 \\ 4B = 0 \longrightarrow B = 0 \end{cases}$

$y = x\cos(2x)$

• Solución general: $y(x) = x\cos(2x) + C_1\cos(2x) + C_2\operatorname{sen}(2x)$

$y'(x) = \cos(2x) - 2x\operatorname{sen}(2x) - 2C_1\operatorname{sen}(2x) + 2C_2\operatorname{sen}(2x)$

$y(0) = -1$

$y'(0) = 4$

$-1 = y(0) = 0\cdot\cancel{\cos(2x)}^{\,0} + C_1\underbrace{\cos(2\cdot 0)}_{=1} + C_2\cancel{\operatorname{sen}(2\cdot 0)}^{\,0} \rightarrow C_1 = -1$

$4 = y'(0) = \underbrace{\cos(0\cdot 2)}_{=1} - \cancel{2\cdot 0\cdot\operatorname{sen}(2\cdot 0)} - \cancel{2\cdot C_1\operatorname{sen}(2\cdot 0)} + \underbrace{2C_2\cos(2\cdot 0)}_{=+2\cdot 1} \rightarrow$

$4 = 1 + 2C_2 \rightarrow C_2 = \frac{3}{2}$

$y(x) = x\cdot\cos(2x) - \cos(2x) + \frac{3}{2}\operatorname{sen}(2x)$

Solución problema de cond. iniciales

3º) $y' - 6y = 5e^{6x} y^4 \rightarrow y' = 5e^{6x} \cdot y^4 + 6y$

$x = 3 \quad , \quad z = y^{1-4} , \ y^{-3}$

$z' = -3y^{-4} \cdot y' = -3y^{-4} \cdot (5e^{6x} y^4 + 6y) = -15e^{6x} - 18z \rightarrow z' = -15e^{6x} - 18z \rightarrow z' + 18z = -15e^{6x}$

• Ecuación dif. 1er orden, trabajamos con la ec. dif. hom. asociada.

$$z' + 18z = 0 \rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int -18dx \rightarrow \log(z) = -18x + C_1 \rightarrow = \cancel{e}^{\cancel{\log}(z)} = e^{-18x} \cdot \underbrace{e^{C_1}}_{\substack{\parallel \\ K}} \rightarrow z = e^{-18x} \cdot K \quad , K > 0$$

• Imponemos solución:

$$z' = K'(x) e^{-18x} + K(x) \cdot 18 e^{-18x} = K'(x) = \frac{-15e^{6x}}{e^{-18x}} \rightarrow K'(x) = -15e^{6x} \cdot e^{18x} = -15e^{24x}$$

$$K = \int -15e^{24x} dx = -15 \int e^{24x} dx = -15e^{24x} \cdot 24 = -360e^{24x} + C_1 \ , \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

$$z = K(x) \cdot e^{-18x} = (-360e^{24x} + C_1)\, e^{-18x} = -360e^{6x} + Ce^{-18x}$$

$$z = -360e^{6x} + Ce^{-18x} \quad , C \in \mathbb{R}$$

$$z = y^{-3} \rightarrow z = \frac{1}{y^3} \quad , \ y^3 = \frac{1}{z} \rightarrow y = \frac{1}{\sqrt[3]{z}}$$

• Solución: $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{-360e^{6x} + C_1 e^{-18x}}} \quad , C_1 \in \mathbb{R}$

4°)

$$\begin{cases} y''+6y'+9y=6e^{-3x}+18 \\ y(0)=2 \\ y'(0)=25 \end{cases}$$

$$x^2+6x+9=0$$

- ECUACIÓN DIF. HOM. ASOCIADA: $y''+6y'+9y=0$, Raices: $x^2+6x+9=0$, $x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot1\cdot9}}{2\cdot1}=\frac{-6}{2}=-3=k_1$

SOLUCIÓN ECUACIÓN DIF. HOM. ASOCIADA: $y(x)=C_1e^{-3x}+C_2xe^{-3x}$; $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

SUSTITUIMOS $k_1=-3$

LA SOLUCIÓN GENERAL: $y(x)=C_1(x)e^{-3x}+C_2xe^{-3x}$

$$xe^{-3x}\frac{d}{dx}C_2(x)+e^{-3x}\frac{d}{dx}C_1(x)=0$$

$$\frac{d}{dx}xe^{-3x}\frac{d}{dx}C_2(x)+\frac{d}{dx}C_1(x)\frac{d}{dx}e^{-3x}=18+6e^{-3x}$$

$$\downarrow$$

$$(-3xe^{-3x}+e^{-3x})\frac{d}{dx}C_2(x)-3e^{-3x}\frac{d}{dx}C_1(x)=18+6e^{-3x}$$

- Resolviendo el sistema: $\frac{d}{dx}C_1(x)=-6x(3e^{3x}+1)$

$$\frac{d}{dx}C_2(x)=18e^{3x}+6$$

$$\left.\begin{array}{l} C_1(x)=C_3+\int(-6x(3e^{3x}+1))\,dx \\ C_2(x)=C_4+\int(18e^{3x}+6)\,dx \end{array}\right\} C_1(x)=C_3-3x^2-2(3x-1)e^{3x}$$

; $C_3, C_4 \in \mathbb{R}$, son constantes.

- SOLUCIÓN: $y(x)=(C_1+C_2x+3x^2)e^{-3x}+2$

para $y(0)=2$
$y'(0)=25$

$$\frac{d}{dx}y(x)=(C_2+6x)e^{-3x}-3(C_1+C_2x+3x^2)e^{-3x}$$

$$y(x)=(C_1+C_2x+3x^2)e^{-3x}+2$$

$$25=(C_2+0\cdot6)\cdot e^{-0}-3C_1$$

Resolviendo tenemos: $C_1=0$

$$C_2=25$$

$$y(x)=(3x^2+25x)e^{-3x}+2$$

SOLUCIÓN PROBLEMA DE COND. INICIALES

5º) $\begin{cases} y' + xy = 3xe^{x^2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$

• ECUACIÓN DIF. HOM. ASOCIADA: $y' + xy = 0 \longrightarrow y' = -xy \rightarrow \frac{dy}{dx} = -xy \rightarrow \frac{dy}{y} = -x \cdot dx \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -x\, dx \rightarrow \log y = \frac{-x^2}{2} + c_1$

$c \in \mathbb{R}$.

$\log y = \frac{-x^2}{2} + c_1 \longrightarrow \cancel{e}^{\cancel{\log} y} = e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{= k,\ k>0}$

• Solución: $y = e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot k$

$(k>0)$

• COMPROBAMOS QUE ES SOL. DE LA EC. LINEAL HOM. ASOCIADA.

$\left.\begin{array}{l} y = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot k \\ y' = e^{-\frac{x^2}{2}} xk \end{array}\right\}$ SUSTITUYO IMPONIENDO LA SOLUCIÓ.

$y' + xy = 3xe^{x^2}$

$\cancel{e^{-\frac{x^2}{2}} xk}^{=0} + \cancel{e^{-\frac{x^2}{2}}}^{=0} \cdot k \cdot x = 3xe^{x^2}$

$0 = 3xe^{x^2}$

6º) $2xy - 3x2y^2 + (x^2 - 2x^3 y) y' = 0$

$$\frac{d}{dx} y(x) - \frac{2y(x)}{x+2} = 2(x+2)^3$$

$$p(x) = -\frac{2}{x+2}$$

$$Q(x) = 2(x+2)^3$$

• Ecuación lineal homogénea, de primer orden.

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int p(x)\,dx \rightarrow \log(y) = -\int p(x)\,dx \rightarrow |y| = -e^{-\int p(x)\,dx} \begin{cases} y_1 = e^{-\int p(x)\,dx} \\ y_2 = -e^{-\int p(x)\,dx} \end{cases}$$

• Calculamos la integral: $\int p(x)\,dx \rightarrow \int \left(-\frac{2}{x+2}\right) dx = -2\log(x+2) + C_1$

• La solución de la ecuación lineal homogénea es:

$$y_1 = (x+2)^2 e^{C_1}$$
$$y_2 = -(x+2)^2 e^{C_2}$$

// C no tiene porqué ser igual a 0.

$$y = C(x+2)^2 \rightarrow y = (x+2)^2 C_1(x)$$

$$\frac{d}{dx} C(x) = Q(x) e^{\int p(x)\,dx} \rightarrow \frac{d}{dx} C(x) = 2x + 4$$

Es decir:

$$C(x) = \int (2x+4)\,dx = x^2 + 4x + C$$

• Sustituimos: $y = (x+2)^2 \cdot C_1(x)$

$C \in \mathbb{R}$

• Solución para $y(x) = (x+2)^2 (x^2 + 4x + C_1)$

$$y(x) = C_1 x^2 + 4C_1 x + 4C_1 + x^4 + 8x^3 + 20x^2 + 16x$$