④ $\begin{cases} y''+6y'+9y = 6e^{-3x}+18 \\ y(0)=2 \\ y'(0)=25 \end{cases}$

Ec. dif. lin. homogénea asociada

$y''+6y'+9y=0$

$\hookrightarrow p(x) = x^2+6x+9 \to$ Raíces -3 con multipl 2 $\to e^{-3x}, xe^{-3x}$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-4\cdot(1)\cdot 9}}{2} = \frac{-6\pm\sqrt{0}}{2} = \begin{cases} -3 \\ -3 \end{cases}$$

• Solución homogénea

$$y_h(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$$

• Sol particular

$$y(x) = Ae^{-3x}+B$$

$$y'(x) = -3Ae^{-3x}$$

Sustituimos

$$y''(x) = 9Ae^{-3x}$$

$$9Ae^{-3x} + 6(-3Ae^{-3x}) + 9(Ae^{-3x}+B) = 6e^{-3x}+18$$

$$9Ae^{-3x} - 18Ae^{-3x} + 9Ae^{-3x} + 9B = 6e^{-3x}+18$$

$$9B = 6e^{-3x}+18$$

$$\begin{cases} \boxed{A=0} \\ 9B = 18 \to B = \frac{18}{9} = 2 \to \boxed{B=2} \end{cases} \to \boxed{y_p(x) = 2}$$

• Solución general

$$\boxed{y(x) = 2 + C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}}$$

$$2 = y(0) \to 2 = 2 + C_1 \cdot \overbrace{e^{-3\cdot 0}}^{1} + \cancel{C_2 0 \cdot e^{-3\cdot 0}} \to 2 = 2 + C_1 \to \boxed{C_1 = 0}$$

$$25 = y'(0) \to 25 = -3\underbrace{C_1}_{0}\overbrace{e^{-3\cdot 0}}^{1} + C_2(\overbrace{e^{-3\cdot 0}}^{1} - \cancel{3\cdot 0\cdot e^{-3\cdot 0}}) \to \boxed{25 = C_2}$$

• Solución problema condiciones iniciales

$$\boxed{y(x) = 2 + 25xe^{-3x}}$$