ECUACIONES DIFERENCIALES

JUAN MANUEL MARTINEZ MARTINEZ

49443572-N

GRUPO 1 GIM

$$1. \quad \begin{cases} (4x^2-2y^2)\,dx = 2xy\,dy \\ y(1)=3 \end{cases}$$

$$v=\frac{y}{x} \rightarrow y=vx \rightarrow y'=v'x+v$$

$$\frac{(4x^2-2y^2)\,dx}{dx} = \frac{2xy\,dy}{dx} \ ; \quad 4x^2-2y^2=(2xy)\,y' ;$$

$$\boxed{y'=\frac{4x^2-2y^2}{2xy}}$$

$$v'x+v=\frac{4x^2-2(vx)^2}{2x\cdot(vx)} \ ; \quad v'x+v=\frac{4x^2-2v^2\cdot x^2}{2x^2\cdot v} \ ; \quad v'x+v=\frac{\cancel{x^2}(4-2v^2)}{\cancel{x^2}(2v)} \ ;$$

$$; \quad v'x=\frac{4-2v^2}{2v}-\frac{2v^2}{2v} \ ; \quad v'x=\frac{4-4v^2}{2v}.$$

$$\frac{dv}{dx}\,x=\frac{4-4v^2}{2v} \ ; \quad \frac{2v}{4-4v^2}\,dv=\frac{dx}{x} \ ; \quad \underbrace{\int\frac{2v}{4-4v^2}\,dv}_{-1/4\ \ln|4-4v^2|}=\overbrace{\int\frac{dx}{x}}^{\ln x + C_1} = -1/4\ \ln|4-4v^2| = \ln x + C_1$$

$$C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{-1/4\ \ln\left|4-4\left(\frac{y}{x}\right)^2\right| = \ln x + C_1}$$

Esta expresión define de forma implícita las soluciones de la ec. diferencial homogénea

$$-1/4\ \ln\left|4-4\left(\frac{3}{1}\right)^2\right| = \cancelto{0}{\ln 1} + C_1 \ ; \quad \underline{C_1=-0{,}86}$$

$$\boxed{-1/4\ \ln\left|4-4\left(\frac{y}{x}\right)^2\right| = \ln x - 0{,}86}$$

2. $\begin{cases} y'' + 4y = -4\operatorname{sen}(2x) \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$

$y'' + 4y = 0 \xrightarrow{P.C} x^2 + 4 = 0$ raices $\longrightarrow 2i$ con mult $1 \rightsquigarrow$ $e^{0x} \cdot \cos(2x)$, $e^{0x} \cdot \operatorname{sen}(2x)$

$x = \sqrt{-4} = 2i$

$\boxed{y_h(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \operatorname{sen}(2x) \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$

- Solución particular

$y(x) = Ax\operatorname{sen}(2x) + Bx\cos(2x)$;

$y'(x) = A\operatorname{sen}(2x) + 2Ax\cos(2x) + B\cos(2x) - 2Bx\operatorname{sen}(2x)$;

$y''(x) = 2A\cos(2x) - 4Ax\operatorname{sen}(2x) - 2B\operatorname{sen}2x - 4Bx\cos(2x)$;

- $4A\cos(2x) \cancel{- 4Ax\operatorname{sen}(2x)} - 4B\operatorname{sen}2x \cancel{- 4Bx\cos(2x)} + 4(\cancel{Ax\operatorname{sen}(2x)} + \cancel{Bx\cos(2x)}) =$

$= -4\operatorname{sen}(2x)$;

$\begin{cases} 4A = 0 \ ; \boxed{A = 0} \\ -4B = -4 \ ; \boxed{B = 1} \end{cases}$

- Solución general

$\boxed{y(x) = x\cos(2x) + C_1\cos(2x) + C_2\operatorname{sen}(2x)}$

- Solución condiciones iniciales

$\boxed{y(x) = x\cos(2x) - \cos(2x) + \tfrac{3}{2}\operatorname{sen}(2x)}$

- $-1 = y(0) = 0 \cos(2\cdot 0) + C_1 \cdot \cos(2\cdot 0) + C_2 \operatorname{sen}(2\cdot 0) = \boxed{C_1 = -1}$

$y'(x) = -2x\operatorname{sen}(2x) + \cos(2x) - 2C_1\operatorname{sen}(2x) + 2C_2\cos(2x)$

$4 = y'(0) = -2\cdot 0 \ \overset{0}{\cancel{\operatorname{sen}(2\cdot 0)}} + \overset{1}{\cancel{\cos(2\cdot 0)}} - 2C_1 \cdot \overset{0}{\cancel{\operatorname{sen}(2\cdot 0)}} + 2C_2 \ \overset{1}{\cancel{\cos(2\cdot 0)}}$

$2C_2 + 1 = 4$; $\boxed{C_2 = \tfrac{3}{2}}$

3. $y' - 6y = 5e^{6x} y^4$ $\qquad \alpha = 4 \; ; \; z = y^{1-4} = y^{-3} \Rightarrow z = y^{-3}$

- $y' = 5e^{6x} y^4 + 6y$

$z' = -3y^{-4} y' \; ; \; -3y^{-4} \cdot \left(5e^{6x} y^4 + 6y\right) = 5e^{6x} \cdot (\cancel{-3y^{-4}}) \cdot \cancel{y^4} - 18 \underbrace{y^{-3}}_{z} =$

$= -15e^{6x} - 18z \; ; \; \underline{z' = -15e^{6x} - 18z} \; ; \; z' + 18z = -15e^{6x}$

Ec. dif. asoc.

- $z' + 18z = 0 \; ; \; \frac{dz}{dx} = -18z \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int -18 \, dx \Rightarrow \ln z = -18x + C_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow z = e^{-18x} + \underbrace{e^{C_1}}_{K} \Rightarrow \boxed{z = K e^{-18x}}$ Solución de la ecuación diferencial homogénea asociada

Imponemos que sea solución de la ecuación diferencial.

- $z' = K' \cdot e^{-18x} + K \cdot -18 e^{-18x}$

$K' e^{-18x} \cancel{- 18K e^{-18x}} \cancel{+ 18K e^{-18x}} = -15e^{6x} \Rightarrow K' e^{-18x} = -15e^{6x} \Rightarrow K' = \frac{-15e^{6x}}{e^{-18x}} \Rightarrow$

$\Rightarrow K = \int -15 e^{24x} = \frac{1}{24}(-15) \int e^{-12} \cdot (24) = -\frac{5}{8} e^{24x} + C_1 \; , \; C \in \mathbb{R}$

- Así $z = \left(\frac{5}{8} e^{24x} + C_1\right) \cdot e^{-18x} = \frac{5}{8} e^{6x} + C_1 e^{-18x}$

$\frac{5}{4} e^{6x} + C_1 e^{-18x} = y^{-3} \Rightarrow \frac{5}{4} e^{6x} + C_1 e^{-18x} = \frac{1}{y^3} \Rightarrow$

$$\boxed{y = \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{5}{8} e^{6x} + C_1 e^{-18x}}}}$$

$C_1 \in \mathbb{R}$. Solución general de la ecuación diferencial

4. $\begin{cases} y'' + 6y' + 9y = 6e^{-3x} + 18 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 25 \end{cases}$

$y'' + 6y' + 9y = 0 \xrightarrow{P.C} x^2 + 6x + 9 = 0$ raíces $\rightarrow -3$ con mul $2 \rightarrow (e^{-3x})^2$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = \frac{-6 \pm 0}{2} = -3$$

$$\boxed{y_h(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}}$$

- Solución particular

$y(x) = Axe^{-3x} + Bx^2 e^{-3x}$

$y'(x) = Ae^{-3x} - 3Axe^{-3x} + 2Bxe^{-3x} - 3Bx^2 e^{-3x}$

$y''(x) = -3Ae^{-3x} + 9Axe^{-3x} - 3Ae^{-3x} + 2Be^{-3x} - 6Bxe^{-3x} - 6Bxe^{-3x} + 9Bx^2 e^{-3x}$

- $\cancel{9Axe^{-3x}} - 6Ae^{-3x} + 9Bx^2e^{-3x} - 12Bxe^{-3x} + 2Be^{-3x} + 6Ae^{-3x} - 18Axe^{-3x} + 12Bxe^{-3x} - 18Bx^2e^{-3x} + 9Axe^{-3x} + 9Bx^2e^{-3x} = 6e^{-3x} + 18$

$\begin{cases} \boxed{A = 0} \\ \boxed{B = 3 + 9e^{3x}} \end{cases}$

- Solución general

$\boxed{y(x) = 3 + 9e^{3x} + C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}}$

- Solución condiciones iniciales

$\boxed{y(x) = 3 + 9e^{3x} - 10e^{-3x} + 28xe^{-3x}}$

- $2 = y(0) = 3 + 9e^{3\cdot 0} + C_1 e^{-3\cdot 0} + C_2 x e^{-3\cdot 0}$; $\boxed{C_1 = -10}$

$y'(x) = 27e^{3x} - 3C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-3x} - 3C_2 x e^{-3x}$; $C_2 =$

$25 = y'(0) = 27 \cdot 1 - 3(-10) \cdot 1 + C_2 e^{-3x} - 0$; $\boxed{C_2 = 28}$

5. $\begin{cases} y' + xy = 3x e^{x^2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$

$$y' + xy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -xy \;; \int \frac{dy}{y} = \int -x\,dx \Rightarrow \ln y = -\frac{x^2}{2} + C_1 \Rightarrow$$

$$y = e^{-x^2/2 + C_1} = e^{-x^2/2} \cdot e^{C_1} = \underline{K \cdot e^{-x^2/2}}$$

$$y'(x) = K' \cdot e^{-x^2/2} + K \cdot -x e^{-x^2/2}$$

$$K' e^{-x^2/2} + \cancel{K \cdot -x e^{-x^2/2}} + \cancel{x \cdot K e^{-x^2/2}} = 3x e^{x^2} ;$$

$$K' = \frac{3x e^{x^2}}{e^{-x^2/2}} = 3x \; e^{x^2 - \left(\frac{-x^2}{2}\right)} = 3x \, e^{\frac{3}{2}x^2}$$

$$K = \int 3x \; e^{\frac{3}{2}x^2} dx = e^{3/2 \, x^2} + C_1 \,,\; C_1 \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \left(e^{3/2 \, x^2} + C_1\right) \cdot e^{-x^2/2} = \boxed{e^{x^2} + C_1 e^{-x^2/2} \,,\; C \in \mathbb{R}}$$ Solución general de la ecuación diferencial.

$$2 = y(0) = \cancel{e^{0^2}}^{1} + C_1 \cancel{e^{-0^2/2}}^{1} = \boxed{C_1 = 1}$$

$\boxed{y(x) = e^{x^2/2}}$ Solución de la ec. diferencial con condiciones iniciales.

6. $\underbrace{2xy - 3x^2y^2}_{M} + \underbrace{(x^2 - 2x^3y)}_{N}\, y' = 0$

▸

$$\left.\begin{aligned} \frac{dM}{dy} &= 2x - 6x^2y \\ \frac{dN}{dx} &= 2x - 6x^2y \end{aligned}\right\}\ \underline{\text{Exactas}}$$

▸ Como $\frac{df}{dx} = M(x,y) \Rightarrow \frac{df}{dx} = 2xy - 3x^2y^2 \Rightarrow f = \int (2xy - 3x^2y^2)\,dx =$

$$= 2y\int x\,dx - 3y^2\int x^2\,dx = \cancel{2}y \cdot \frac{x^2}{\cancel{2}} - \cancel{3}y^2 \cdot \frac{x^3}{\cancel{3}} + C(y)$$

$$f = x^2y - x^3y^2 + C(y)$$

• $\frac{df}{dy} = x^2 - 2x^3y \Rightarrow \cancel{x^2 - 2x^3y} + C'(y) = \cancel{x^2 - 2x^3y}$; $\underline{C'(y) = 0}$

$$\boxed{f = x^2y - x^3y^2 = C}$$

Define de forma implícita las soluciones de la ec. dif

$C, \in \mathbb{R}$

7. $y' - \frac{2}{x+2} y = 2(x+2)^3$

$y' - \frac{2}{x+2} y = 0 \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x+2} y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x+2} dx = \ln y = 2 \ln x+2 + C_1'$

$y = e^{2\ln|x+2| + C_1}$; $\boxed{y = K^2 (x+2)^2}$ Solución de la ec. dif. homogénea asociada

• $y = K^2 (x+2)^2$

$y' = 2K'(x+2)^2 + 2K^2(x+2)$

$2K'(x+2)^2 + 2K^2(x+2) - 2K^2(x+2) = 2(x+2)^3$; $K'(x) = x+2 \Rightarrow$

$K(x) = \int x+2 \, dx = \frac{x^2}{2} + 2x + C_1 \quad , C_1 \in \mathbb{R}$

$\boxed{y = \left(2\frac{x^2}{2} + 2x + C_1\right)(x+2)^2, \ C_1 \in \mathbb{R}}$ Solución de la ecuación diferencial planteada.

8. $e^x y^2 + y\,\mathrm{sen}x + (3ye^x - 2\cos x)y' = 0$

$3ye^x - 2\cos x \; dy = -e^x y^2 - y\,\mathrm{sen}x\, dx \;; (3ye^x - 2\cos x)dy + (e^x y^2 + y\,\mathrm{sen}x)dx \;;$

$$; \frac{2ye^x - \mathrm{sen}x - 3ye^x - 2\mathrm{sen}x}{e^x y^2 + y\,\mathrm{sen}x} = \frac{-3\mathrm{sen}x - ye^x}{y(e^x y + \mathrm{sen}x)} = \frac{-1}{y}$$

$$e^{\int -\left(\frac{-1}{y}\right)dy} = e^{\ln y} = \underline{y}$$

Así $\underbrace{e^{\ln y}(e^x y^2 + y\,\mathrm{sen}x)}_{M(x,y)} + \underbrace{e^{\ln y}(3ye^x - 2\cos x)}_{N(x,y)} y' = 0$ Es EXACTA

$$\frac{df}{dx} = e^{\ln y}(e^x y^2 + y\,\mathrm{sen}x) \Rightarrow f = \int e^{\ln y}(e^x y^2 + y\,\mathrm{sen}x)\,dx = y^3 e^x - y^2\cos(x) + k(y)$$

$$\frac{df}{dy} = \cancel{3y^2e^x} - \cancel{2y\cos x} + k'(y) = \cancel{3y^2e^x} - \cancel{2y\cos x} \Rightarrow k'(y) = 0 \;;\; \underline{k(y) = 0}$$

$$f = y^3 e^x - y\cos x \;;\quad \boxed{C = y^3 e^x - y^2 \cos x}\; C \in \mathbb{R}$$

Solución que define de forma implícita las soluciones y de la ecuación diferencial

9. $y^{vii} + y^{vi} + 2y^{v} + 10y^{iv} + 13y''' + 5y'' = 0$

$p(x) = x^7 + x^6 + 2x^5 + 10x^4 + 13x^3 + 5x^2 = x^2\left(x^5 + x^4 + 2x^3 + 10x^2 + 13x + 5\right) =$
$= x^2(x+1)^3(x^2 - 2x + 5)$

• raíces
- 0 mut $2 \rightarrow e^{0x}, xe^{0x} \Rightarrow 1, x$
- -1 mut $3 \rightarrow e^{-x}, xe^{-x}, x^2e^{-x}$
- $e^x sen(4x)$
- $e^x \cos(4x)$

	1	1	2	10	13	5
-1		-1	0	-2	-8	-5
	1	0	2	8	5	$\boxed{0}$
-1		-1	1	-3	-5	
	1	-1	3	5	$\boxed{0}$	
-1		-1	2	-5		
	1	-2	5	$\boxed{0}$		

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = 1 \pm \sqrt{16}\, i = 1 \pm 4i$

* Solución general

$$\boxed{\begin{gathered} y(x) = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + C_4xe^{-x} + C_5x^2e^{-x} + C_6e^x sen(4x) + C_7e^x\cos(4x) \\ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7 \in \mathbb{R} \end{gathered}}$$