EJERCICIOS ECUACIONES DIFERENCIALES

1. $\begin{cases} (4x^2-2y^2)\,dx = 2xy\,dy \\ y(1) = 3 \end{cases}$

$(4x^2-2y^2)\,dx = 2xy\,dy \rightarrow \dfrac{(4x^2-2y^2)\,dx}{dx} = 2xy\dfrac{dy}{dx}\,y'$

$\dfrac{4x^2-2y^2}{2} = 2xy\,y' \rightarrow \underbrace{2x^2-y^2}_{M}\;\underbrace{-2xy\,y'}_{N} = 0$

¿Son iguales M y N?

$\dfrac{\partial M}{dy} = -2y$

$\dfrac{dN}{dx} = -2y$

Sí son iguales $\rightarrow \exists \begin{cases} \dfrac{df}{dx} = M(x,y) \\ \dfrac{df}{dy} = N(x,y) \end{cases}$

Hallar f en M

• $\dfrac{df}{dx} = M(x,y) \Rightarrow f' = M = 2x^2-y^2 \rightarrow f = \int 2x^2-y^2\,dx$

$\rightarrow f = \dfrac{2x^3}{3} - y^2x + k(y)$

f derivado respecto de y

• $\dfrac{df}{dy} = N(x,y) \Rightarrow \boxed{-2\cancel{y}x + k'(y)} = -2x\cancel{y} \rightarrow k'(y) = 0$

Buscamos un $k'(y)$ tal que $k'(y) = 0$

$k(y) = 0$

solución. Sustituimos f con $k(y)$

$f = \dfrac{2x^3}{3} - y^2x + 0$

$\dfrac{2x^3}{3} - y^2x = C$

$$y = -\sqrt{\frac{3c-2x^3}{x}} \Longrightarrow$$

$y(1) = 3$

$$\cancel{y = -\sqrt{-11-2}}$$

$$\cancel{y = -\sqrt{-13}}$$

$$3 = -\left(\sqrt{\frac{3c-2}{1}}\right)^2$$

$$3^2 = -(3c-2)$$

$$9+2 = -(3c)$$

$$\boxed{-\frac{11}{3} = c}$$

solución:

$$\boxed{y = -\sqrt{\frac{-11-2x^3}{x}}}$$

//

② $\begin{cases} y'' + 4y = -4\,sen(2x) \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$

Ecuac. diferencial asociada

$P(x) = x^2 + 4$

$x^2 = -4 \to x = 0 \pm 2i$

raíces: $0 \pm 2i$ $\begin{cases} e^{0x} sin(2x) = sin(2x) \\ e^{0x} cos(2x) = cos(2x) \end{cases}$

$y_h(x) = C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

solución particular $y_p = Ax\sin(2x) + Bx\cos(2x)$

$y = Ax\sin(2x) + Bx\cos(2x)$

$y' = A\sin(2x) + 2Ax\cos(2x) + B\cos(2x) - 2Bx\sin(2x)$

$y'' = 2A\cos(2x) + 2A\cos(2x) - 4Ax\sin(2x) - 2B\sin(2x) - 2B\sin(2x) - 4Bx\cos(2x) = 4A\cos(2x) - 4Ax\sin(2x) - 4B\sin(2x) - 4Bx\cos(2x)$

Sustituimos:

$4A\cos(2x) - 4x\sin(2x) - 4B\sin(2x) - 4B\cos(2x) + 4Ax\sin(2x) + 4Bx\cos(2x) =$

$= -4\sin(2x)$

$4A\cos(2x) - 4B\sin(2x) = -4\sin(2x)$

$\left.\begin{matrix} -4B = -4 \\ 4A = 0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} B = 1 \\ A = 0 \end{matrix}$ $\quad y_p = x\cos(2x)$

$y(x) = x\cos(2x) + C_1\sin(2x) + C_2\cos(2x)$

Condiciones iniciales:

$y(x) = x\cos(2x) + C_1\sin(2x) + C_2\cos(2x)$

$y(0) = -1 = 0 + 0 + C_2 \to \boxed{C_2 = -1}$

Escaneado con CamScanner

$y'(x) = \cos(2x) - 2x\sin(2x) + 2C_1\cos(2x) - 2C_2\sin(2x) \to$

$y'(0) = 4 = 1 - 0 + 2C_1 - 0 \to 3 = 2C_1 \to \boxed{C_1 = 3/2}$

$$\boxed{y(x) = x\cos(2x) + \frac{3\sin(2x)}{2} - \cos(2x)}$$

3. $y' - 6y = 5e^{6x}y^4 \to y' = 5e^{6x}y^4 + 6y$

(1) Hallamos z

$z = y^{1-4}$

$z = y^{-3}$

$z' = -3y^{-4} \cdot y'$

$z' = -3y^{-4}(5e^{6x}y^4 + 6y)$

$z' = -15e^{6x} - 18\underbrace{y^{-3}}_{z}$

(2) igualar a 0

$z' + 18z = 0$

$\frac{dz}{dx} = -18z$

$\int \frac{dz}{z} = \int -18\,dx$

$\log(z) = -18x + C$

$\boxed{z = Ke^{-18x}}$

(3) hacer variable K

$z = K(x)\,e^{-18x}$

$z' = K'(x) \cdot e^{-18x} - 18K(x)e^{-18x}$

(4) Sustituimos

$K'(x)e^{-18x} - \cancel{K(x)}18e^{-18x} + 18\cancel{K(x)e^{-18x}} = -15e^{6x}$

$K'(x) = \frac{-15e^{6x}}{e^{-18x}} = -15 \cdot e^{24x}$

(5) Hallar $K(x)$

$K(x) = \int -15e^{24x}\,dx = \frac{-15}{24}\int e^{24x}\,dx = \frac{-15}{24}e^{24x} + C$

$z = \frac{1}{y^3} \to \boxed{y = \sqrt[3]{\frac{1}{5/8\,e^{18x} + Ce^{-18x}}}}$

⑥ Solución

$z = \left(\frac{-15}{24} e^{24x} + c\right) e^{-11x} = \frac{-5}{8} e^{-8x} + C e^{-8x}$

4. $\begin{cases} y'' + 6y' + 9y = 6e^{-3x} + 18 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 25 \end{cases}$

Ecua. diferencial homog. asociado

$P(x) = x^2 + 6x + 9 = (x+3)(x+3)$ raíces: -3 mult 2 $\to$

$\to e^{-3x}\ xe^{-3x}$ $y_h = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$r = \frac{-6 \pm \sqrt{36-36}}{2 \cdot 1} = -3$

Solu. particular. $y_p = Axe^{-3x} \to y_p = Ax^2 e^{-3x} + Axe^{-3x} + B$

$y = Ax^2 e^{-3x} + Axe^{-3x} + B$

$y' = 2Axe^{-3x} - 3Ax^2 e^{-3x} + Ae^{-3x} - 3Axe^{-3x}$

$= Ae^{-3x} - Axe^{-3x} - 3Ax^2 e^{-3x}$

$y'' = -3Ae^{-3x} - Ae^{-3x} + 3Axe^{-3x} - 6Axe^{-3x} + 9Ax^2 e^{-3x}$

$= -4Ae^{-3x} - 3Axe^{-3x} + 9Ax^2 e^{-3x}$

Sustituir: $6Ae^{-3x} - 6Axe^{-3x} - 18Ax^2 e^{-3x} +$

$-4Ae^{-3x} - 3Axe^{-3x} + 9Ax^2 e^{-3x} + 6Ae^{-3x} - 6Axe^{-3x} - 18Ax^2e^{-3x} +$

$+ 9Ax^2 e^{-3x} + 9Axe^{-3x} + 9B = 6e^{-3x} + 18$

$2Ae^{-3x} + 9B = 6e^{-3x} + 18$

$\left.\begin{array}{l} 2A = 6 \\ 9B = 18 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = 3 \\ B = 2 \end{array}$ $y_p = 3x^2 e^{-3x} + 3xe^{-3x} + 2$

Escaneado con CamScanner

Condicion Iniciales

$y(x) = 3x^2e^{-3x} + 3xe^{-3x} + 2 + C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x}$

$y'(x) = 6xe^{-3x} - 9x^2e^{-3x} + 3e^{-3x} - 9xe^{-3x} - 3C_1e^{-3x} +$

$+ C_2e^{-3x} - 3C_2xe^{-3x}$

$y(0) = 2 = 0 + 0 + 2 + C_1 + 0 \rightarrow \boxed{C_1 = 0}$

$y'(0) = 25 = 0 + 0 + 3 - 0 - 0 + C_2 \rightarrow \boxed{C_2 = 22}$

solu: $\boxed{y(x) = 3x^2e^{-3x} + 3xe^{-3x} + 2 + 22xe^{-3x}}$

2

5 $\begin{cases} y' + xy = 3xe^{x^2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$

1 $\underline{y' + xy = 0}$

$y' = -xy \to \frac{dy}{dx} = -xy \to \int \frac{dy}{y} = \int -x\,dx \to$

$\to \log(y) = -\frac{x^2}{2} + C \to y = e^{-x^2/2} \cdot K = K \cdot e^{-x^2/2}$

2 Hacer variable $K(x) \to K'(x)$

$y = K(x)\, e^{-x^2/2}$

$y' = K(x)' e^{-x^2/2} - xK(x) \cdot e^{-x^2/2}$

3 Sustituimos en la Ecua. principal

$K(x)' e^{-x^2/2} - x\, K(x)\, e^{-x^2/2} + xK(x)\, e^{-x^2/2} = 3xe^{x^2}$

$= 3x e^{3/2\, x^2} = 3x \cdot e^{3/2\, x^2}$

$K(x)' = \frac{3xe^{x^2}}{e^{-x^2/2}} = 3xe$

4 Hallar $K(x)$

$K(x) = \frac{3}{3} \int 3xe^{3/2\, x^2} dx = e^{3/2\, x^2} + C$

$\left(\frac{3x^2}{2}\right)' = 3x$

5) Sustituir

$y = (e^{3/2\, x^2} + C)\, e^{-x^2/2}$

$\boxed{y = e^{x^2} + C e^{-x^2/2}}$

6 solución

$y(0) = 2$

$2 = e^{0^2} + C e^{-0^2/2}$

$2 = 1 + C$

$\boxed{C = 1}$

$\boxed{y = e^{x^2} + e^{-x^2/2}}$

⑤ solución

$y(0) = 2$

$$2 = e^{0^2} + C e^{-0^2/2}$$

$$2 = 1 + C$$

$$C = 2 - 1 \rightarrow \boxed{C = 1}$$

$$\boxed{y = e^{x^2} + e^{-x^2/2}}$$

⑥ $2xy - 3x^2y^2 + (x^2 - 2x^3y)y' = 0$

$$\frac{dM}{dy} = 2x - 6x^2y$$

$$\frac{dN}{dx} = 2x - 6x^2y$$

iguales $\to \exists \begin{cases} \frac{df}{dx} = M(x,y) \\ \frac{df}{dy} = N(x,y) \end{cases}$

$$\frac{df}{dx} = M(x,y) \to f' = 2xy - 3x^2y^2 \to f = \int 2xy - 3x^2y^2 dx$$

$$f = \frac{\cancel{2}x^2y}{\cancel{2}} - \frac{\cancel{3}x^2y^2}{\cancel{3}} + K(y) = \boxed{x^2y - x^3y^2 + K(y)}$$

derivada de f

$$\frac{df}{dy} = N(x,y) \Rightarrow \cancel{x^2 - 2x^3y} + K'(y) = \cancel{x^2 - 2x^3y} \to$$

$\to K'(y) = 0$

Buscar $K(y)$ que al derivar lo te de $K'(y)$

$\begin{cases} K'(y) = 0 \\ K(y) = 0 \end{cases} \to$ Solución: $f = x^2 - x^3y^2 + \underbrace{0}_{K(y)}$

$$\boxed{x^2 - x^3y^2 = 0}$$

7

$$y' - \frac{2}{x+2} y = 2(x+2)^3$$

1) Ecua. diferencial. 1º orden

$$y' - \frac{2}{x+2} y = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x+2} y \rightarrow \int \frac{dy}{y} = 2 \int \frac{dx}{x+2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \log(y) = 2\log(x+2) + C$$

$$y = e^{2\log(x+2)} \cdot e^{C}$$

$$y = K e^{2\log(x+2)}$$

2) Hacer variable $K(x)$

$$y = K(x)\, e^{2\log(x+2)}$$

$$y' = K'(x)\, e^{2\log(x+2)} + K(x) e^{2\log(x+2)} \cdot 2 \frac{1}{x+2}$$

3) sustituir en la Ecuación principal

$$K'(x)\, e^{2\log(x+2)} + \cancel{\frac{2}{x+2} K(x) e^{\log(x+2)}} - \cancel{\frac{2}{x+2} K(x) e^{\log(x+2)}} = 2(x+2)^3$$

$$K'(x) = \frac{2(x+2)^3}{e^{2\log(x+2)}} = 2(x+2)^3 \cdot e^{-2\log(x+2)}$$

4) Hallar $K(x)$, integrando

$$K(x) = \int 2(x+2)^3 \cdot e^{-2\log(x+2)} = \int 2(x+2)^3 \cdot e^{\log(x+2)^{-2}} dx \ (*)$$

$$= \int 2(x+2)^3 \cdot (x+2)^{-2} dx$$

$$(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

$(x+2)^2(x+2) = (x^2+4x+4)(x+2) = x^3+4x^2+4x+2x^2+8x+8 =$

$= x^3+6x^2+12x+8$

(*) $\displaystyle\int \frac{2(x+2)^3}{(x+2)^2}dx = \int 2(x+2)dx = \cancel{\int ...} \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} + 4x =$

$= x^2+4+C_1$

⑤ Despejamos y obtenemos la solución buscada.

$y = (x^2+4x+C_1)e^{2\log(x+2)}, \quad C \in \mathbb{R}$

Escaneado con CamScanner

(9) $y^{VII} + y^{VI} + 2y^{V} + 10y^{IV} + 13y^{III} + 5y^{II} = 0$

$P(x) = x^7 + x^6 + 2x^5 + 10x^4 + 13x^3 + 5x^2 = x^2(x^5 + x^4 + 2x^3 + 10x^2 + 13x + 5)$

	1	1	+2	10	13	5
-1		-1	0	-2	-8	-5
	1	0	2	8	5	0
-1		-1	1	-3	-5	
	1	-1	3	5	0	
-1		-1	2	-5		
	1	-2	5	0		

$x - 2x + 5 = 0$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}\,\sqrt{-1}}{2} = 1 \pm \frac{4i}{2} = 1 \pm 2i$

$P(x) = x^2 (x+1)^3 (x - 2x + 5)$

raíces: 0 mult 2 $\rightarrow e^{0x}, xe^{0x} \rightarrow 1, x$

-1 mult 3 $\rightarrow e^{-x}, xe^{-x}, x^2 e^{-x}$

$1 \pm 2i \begin{cases} e^x \sin(2x) \\ e^x \cos(2x) \end{cases}$

$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x} + C_5 x^2 e^{-x} + C_6 e^x \sin(2x) +$
$+ C_7 e^x \cos(2x)$

$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7 \in \mathbb{R}$

(9) $y^{VII} + y^{VI} + 2y^{V} + 10y^{IV} + 13y^{III} + 5y^{II} = 0$

$P(x) = x^7 + x^6 + 2x^5 + 10x^4 + 13x^3 + 5x^2 = x^2(x^5 + x^4 + 2x^3 + 10x^2 + 13x + 5)$

	1	1	+2	10	13	5
-1		-1	0	-2	-8	-5
	1	0	2	8	5	0
-1		-1	1	-3	-5	
	1	-1	3	5	0	
-1		-1	2	-5		
	1	-2	5	0		

$x - 2x + 5 = 0$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}\sqrt{-1}}{2} = 1 \pm \frac{4i}{2} = 1 \pm 2i$

$P(x) = x^2 (x+1)^3 (x - 2x + 5)$

raíces: 0 mult 2 $\rightarrow$ $e^{0x}, xe^{0x} \rightarrow 1, x$

-1 mult 3 $\rightarrow$ $e^{-x}, xe^{-x}, x^2 e^{-x}$

$1 \pm 2i \begin{cases} e^x \sin(2x) \\ e^x \cos(2x) \end{cases}$

$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + C_4 xe^{-x} + C_5 x^2 e^{-x} + C_6 e^x \sin(2x) + C_7 e^x \cos(2x)$

$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7 \in \mathbb{R}$

Escaneado con CamScanner