

Examen #2:

Diseño de un sistema de control para un sistema de péndulo invertido rotatorio

Roger Daniel Piovét García

I. MODELADO DE UN SISTEMA DINÁMICO ENTRE PRESA Y DEPRADOR

El esquema del sistema a modelar se muestra en la Figura 1. Él consta de un sistema de péndulo invertido de brazo rotatorio, incluyendo actuador y sensores para medir el cambio de los ángulos de rotación del brazo rotatorio y del péndulo. Las señales del sistema son descritas en la Tabla 1.

El modelado se realizó utilizando el demo de Simulink [Inverted Pendulum Simscape Model and Controller design](#). El valor nominal de $\alpha(t)$ y $\theta(t)$ mostrados en la Tabla 1 son los que ya venían configurados en el demo. t es el tiempo, cuyas unidades son segundos. Por simplicidad, se supondrá que ambos sensores son equivalentes. Se plantearon los siguientes objetivos para el sistema de control:

- Cero error en estado estacionario ante cambios en la perturbación y en el valor deseado.
- Menor tiempo de asentamiento a lazo cerrado en comparación a lazo abierto.

Debido a la alto grado de no linealidad del sistema en puntos de operación con $\alpha(t) \neq \pi \wedge \alpha(t) \neq 0$, no se consideraron cambios en el valor deseado, de tal forma que se consideraron valores deseados constantes.

I-A. Diseño del actuador para el péndulo invertido rotatorio

Se realizó una identificación preliminar del sistema sin actuador ni sensores. Para $P_\alpha(s)$, la constante de tiempo asociada a esta función de transferencia se muestra en (??).

$$T_\alpha = 0.12454 \quad (1)$$

Esta es la constante de tiempo dominante del sistema, ya que $P_\theta(s)$ es integrante. En base a esto, se modeló la dinámica de los sensores y actuador como funciones de transferencia de primer orden con constantes de tiempo (??).

$$\begin{aligned} T_{\text{sensor}} &= \frac{T_\alpha}{50} \\ T_{\text{actuador}} &= \frac{T_\alpha}{50} \end{aligned} \quad (2)$$

Además, se escogieron los puntos de operación mostrados en el Cuadro 1, con lo cual se normalizó cada una de las señales por medio de las relaciones (??).

$$\begin{aligned} V_m(t) &= 4\widetilde{V}_m(t) - 10 \\ \Delta\hat{\alpha}(t) &= \frac{48 \times 10^{-3}}{\pi} \alpha(t) + 12 \times 10^{-3} - \pi \\ \Delta\hat{\theta}(t) &= \frac{16 \times 10^{-3}}{\pi} \theta(t) + 12 \times 10^{-3} \end{aligned} \quad (3)$$

Señal	Unidades	Rango de valores	Valor nominal	Descripción
$\Delta\hat{\alpha}(t)$	mA	[4, 20]	12	Valor sensado de $\alpha(t)$
$\Delta\hat{\theta}(t)$	mA	[4, 20]	12	Valor sensado de $\theta(t)$
$\widetilde{V}_m(t)$	V	[0, 5]	2.5	Variable manipulada
$\alpha(t)$	rad	$[5\pi/6, 7\pi/6]$	π	Ángulo del péndulo con respecto al eje $-z$
$\theta(t)$	rad	$[-\pi/2, \pi/2]$	0	Ángulo del brazo rotatorio medido con respecto al eje x
$V_m(t)$	V	[-10, 10]	0	Tensión recibida por el motor DC del sistema
$\tau(t)$	N · m	[0, 0.037]	0	Torque aplicado al péndulo rotatorio. Perturbación

Cuadro I: Señales del sistema por controlar

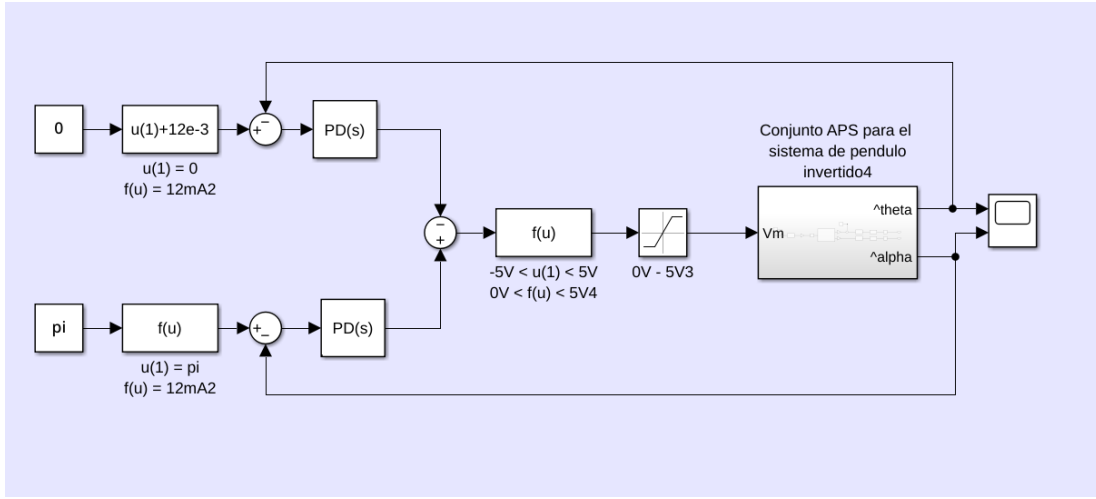


Figura 1: Esquema de control para péndulo invertido rotatorio

Por tanto, las ganancias de los sensores tendrán unidades A/rad, mientras que el actuador tendrá unidades p.u, ya que recibe y entrega señales de tensión.

I-B. Identificación del sistema

Al ser el sistema por controlar tipo SIMO, se identificaron dos plantas, $P_\alpha(s)$ y $P_\theta(s)$ que satisfacen la relación (??).

$$P_\alpha(s) = \left. \frac{\Delta \hat{\alpha}(s)}{\widetilde{V_m}(s)} \right|_{\theta(t)=0}$$

$$P_\theta(s) = - \left. \frac{\Delta \hat{\theta}(s)}{\widetilde{V_m}(s)} \right|_{\alpha(t)=\pi}$$
(4)

$\forall t > 0$ s. Las condiciones que se impusieron sobre $\alpha(s)$ y $\theta(s)$ para identificar cada una de las dos plantas se lograron al modificar la fricción de los rodamientos que unen las piezas del modelo de Simscape, permitiendo mantener un ángulo fijo cuando se está intentando ver el efecto de $\widetilde{V_m}(t)$ sobre el otro. Las funciones de transferencia identificadas se muestran en (??).

$$P_\alpha(s) = \frac{5.248 \times 10^{-3}}{(0.1094s)^2 - 1}$$

$$P_\theta(s) = \frac{-5.527 \times 10^{-2}}{s(0.3385s + 1)}$$
(5)

El signo negativo de la ganancia de $P_\theta(s)$ proviene del esquema de control utilizado.

II. SIMULADO DEL SISTEMA

Debido a que la simulación se realizó utilizando un modelo de Simscape de MATLAB, se tuvo que escoger cuidadosamente la configuración del tamaño de paso y el solver de Simulink para la simulación. Se usó el solver ode23tb, siendo este solver el que mejor resultados proporcionó debido a errores con otros solvers, los cuales generaban singularidades en algunas variables durante la simulación. Por ser una simulación de Simscape, se configuró el tamaño de paso para que fuese variable con step size automático, lo cual es necesario para que la simulación de Simscape se ejecute adecuadamente. Por tanto, no se calculó un tamaño de paso máximo.

III. DISEÑO DEL SISTEMA DE CONTROL

III-A. Esquema de control

Se utilizó un esquema de control con dos lazos de retroalimentación que actúan directamente sobre una sola variable manipulada, siendo esta $\widetilde{V_m}(t)$. Se optó por este esquema por encima de un esquema de control en cascada debido a que reacciona más rápido a cambios en $\Delta \hat{\alpha}(t)$ en comparación a un esquema de control en cascada, lo cual es crucial para un sistema altamente inestable como en el que se está trabajando. Este esquema de control fue implementado como un diagrama de bloques en Simulink, y puede ser consultado en la Figura ??.

	LGR/Empírico		Opt Desempeño		Opt Robustez	
	$C_\alpha(s)$	$C_\theta(s)$	$C_\alpha(s)$	$C_\theta(s)$	$C_\alpha(s)$	$C_\theta(s)$
K_p	3001	500	2671.475	788.703	669.650	3722.750
K_d	145.704	200	212.090	320.988	239.262	154.931
K_f	7524.45	2000	2176.104	503.486	2389.741	6838.319

Cuadro II: Parámetros de los controladores para diferentes métodos de sintonización.

Por tanto, la variable manipulada se compone como una combinación lineal de la respuesta de dos controladores distintos, $C_\theta(s)$ y $C_\alpha(s)$, cada uno para un ángulo diferente. Como la señal realimentada es de corriente, se tuvo que normalizar los valores deseados. Y también, como se restan las salidas de ambo PIDs cuyas salidas están saturadas en el rango especificado, se tuvo que normalizar nuevamente. Estas relaciones vienen dadas por (??).

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_m(t) &= \frac{1}{2}(V_m^\alpha - V_m^\theta) + 2.5 \\ \Delta\alpha^*(t) &= \frac{12 \times 10^{-3}}{\pi} \Delta\alpha_{rad}^* \\ \Delta\theta^*(t) &= \Delta\theta_{rad}^* + 12 \times 10^{-3}\end{aligned}\tag{6}$$

III-B. Sintonización de controladores

Las funciones de transferencia $C_\theta(s)$ y $C_\alpha(s)$ se implementaron por medio de controladores de la familia PID tipo paralelo. Al ser $P_\theta(s)$ integrante y $P_\alpha(s)$ inestable, se escogió usar controladores tipo PD, con filtro derivativo. Estos controladores aseguraron cero error en estado estacionario alrededor del punto de operación escogido, el cual corresponde a un punto de estabilidad del mismo. Por tanto, la forma general de estos controladores es (??).

$$C(s) = K_p + \frac{K_d s}{\frac{s}{K_f} + 1}\tag{7}$$

A pesar de que (??) no sea la forma en la que se implementan esta familia de controladores en Simulink, se escogió trabajar con esta topología, que previamente se ha trabajado en el programa de simulación PLECs, debido a comodidad, y no con la forma en que MATLAB lo trabaja. Se sintonizaron ambos controladores de 3 formas diferentes:

- LGR y sintonización empírica
- Optimización para servocontrol centrada en desempeño con respecto al IAE
- Optimización para servocontrol centrada en robustez con respecto al IAE

Para cada caso, primero se sintonizó $C_\alpha(s)$ y después $C_\theta(s)$. La sintonización por LGR implicó la cancelación de los polos de las plantas por medio de ceros del controlador. Se tuvieron problemas con la ganancia negativa de $P_\theta(s)$ al realizar LGR, por lo que $C_\theta(s)$ se sintonizó empíricamente en este caso. Los problemas de optimización que se plantearon para las últimas dos sintonizaciones se muestran en (??).

$$\begin{aligned}\min_{K_p, K_d, K_f} IAE_{des} \\ \min_{K_p, K_d, K_f} IAE_{opt} \quad \text{s.t.} \quad M_s = 1.1\end{aligned}\tag{8}$$

Lo cual se aplicó para cada controlador. Es decir, cuatro problemas de optimización, cada una con una función de costo, cuya forma general es (??).

$$IAE = \int_0^t r(t) - y(t) dt\tag{9}$$

Por efectos de hacer el reporte lo más al grano posible, no se pondrán todas las ecuaciones que implica lo anterior. Las optimizaciones se realizaron simulando el diagrama de bloques de Simulink del sistema a lazo cerrado dentro de la función de costo que `fmincon` y `fminsearch` utiliza. Se usaron los parámetros obtenidos a partir de LGR y la sintonización empírica como parámetros de partida para las optimizaciones que se realizaron. Los parámetros obtenidos se muestran en el Cuadro ??.

IV. VALIDACIÓN DEL SISTEMA DE CONTROL

En [este video](#) se muestra la validación del sistema de control. A pesar de que se debían de colocar las curvas dinámicas del sistema, se me imposibilitó debido a que no encuentro por ningún lado el archivo de Simulink que se muestra en el video. Sin embargo, esto permite que el reporte sea aun más al grano, ya que puede visualizar las gráficas de la validación del sistema de control en conjunto con la simulación de Simscape que muestra la respuesta física del péndulo. Los eventos que suceden en la simulación se muestran a continuación.

- $t \in [0, 3]$ s: Se parte la simulación con el péndulo inclinado 30° con respecto al eje z . El lazo de control centrado a desempeño es el que se asienta más rápido de los tres, pero tiene la respuesta más agresiva, seguida por el lazo de control con `rltool`, y por último el lazo de control centrado en robustez, siendo este el que dura más en asentarse. Esto es esperado, debido a que existe un compromiso entre robustez y desempeño, por tanto es normal que este último lazo dure varios segundos más en asentarse en comparación a los otros dos.
- $t \in [3, 7.5]$ s: Se aplica un cambio escalón en la perturbación. Menos de medio segundo después, se quita el efecto de la perturbación. Esto se debe a que, si $\Delta\hat{\alpha}(t)$ se sale del punto de operación establecido en el Cuadro 1, el sistema se desestabiliza y es imposible recuperar el control del mismo. Como $\sum \tau = I\alpha$, donde α denota aceleración angular e I momento de inercia, es necesario desaplicar el torque para que $\Delta\hat{\alpha}(t)$ no llegue a un punto crítico en donde se desestabilice el sistema. Como los 3 lazos de control se sintonizaron para servocontrol, la respuesta entre el lazo de `rltool` y el lazo centrado en desempeño es muy similar. Por otro lado, se observan oscilaciones nuevamente en el lazo centrado en robustez, debido a que una menor sensibilidad provoca un peor desempeño, lo cual se ve reflejado en un mayor tiempo de asentamiento y la presencia de sobrepasos más prolongados.

Note que los controladores son tipo PD, por lo que no tiene sentido hablar sobre anti-windup para el sistema de control diseñado, ya que esto solo se implementa en controladores con modo integral.