

Reduktion der Modellkomplexität von seriell-hybriden Palettierrobotern



Studienarbeit S-05/2019-828

Weipu Shan
Matrikelnummer 10013941

Hannover, 14. Mai 2019

Erstprüfer Prof. Dr.-Ing. Tobias Ortmaier
Betreuer Moritz Schappler, M.Sc.

Ich, Weipu Shan, versichere hiermit, dass die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst wurde, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt wurden, alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht sind und die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen hat.

Hannover, 14. Mai 2019

(Weipu Shan)

Studienarbeit

Herr Weipu Shan, Matr.-Nr. 10013941

Reduktion der Modellkomplexität von seriell-hybriden Palettierrobotern

Reduction of Model Complexity of Serial-Hybrid Robotic Palletizers

Allgemeines:

Im Rahmen eines Kooperationsprojekts wird ein SPS-Modul zur Vorsteuerung der Dynamik von Palettierrobotern erstellt. Diese Roboter zeichnen sich durch ihre serielle Hauptstruktur und zusätzliche geschlossene kinematische Ketten in Form von Parallelogrammen aus. Die Dynamik dieser Systeme wird von den Parametern der Starrkörper der Hauptstruktur und der Nebenketten beeinflusst. Um die Komplexität der Eingabe in das Modul für Anwender zu reduzieren sollen unterschiedliche Möglichkeiten der Reduktion der Modellkomplexität untersucht werden.

Aufgabe:

In dieser Studienarbeit soll die kinematische und dynamische Modellierung der beiden wichtigsten Konstruktionsarten von seriell-hybriden Palettierrobotern erarbeitet werden. Die exakten Modelle sollen aus den durch geschlossene kinematische Ketten entstehenden kinematischen Zwangsbedingungen analytisch berechnet werden. Dazu können eine bestehende Maple-Toolbox und die Ergebnisse einer vorangegangenen Arbeit benutzt werden. Anschließend sollen die Modelle validiert und Vereinfachungen hinsichtlich der Parameterzahl vorgenommen werden. Zum allgemeinen Einsatz des Moduls u. a. für die Identifikation ist zusätzlich eine Implementierung der Minimalparameter-Regressorform der Dynamik für die zu erstellenden notwendig.

Im Rahmen dieser Arbeit ergeben sich insbesondere die folgenden Aufgabenpunkte:

- Literaturrecherche und Einarbeitung,
- Implementierung der kinematischen Zwangsbedingungen in impliziter und expliziter Form für Palettierroboter mit Hilfe des Computeralgebrasystems MAPLE,
- Beschreibung der Roboter und deren Zwangsbedingungen im Eingabeformat einer bestehenden Dynamik-Toolbox und Generierung der Dynamik-Gleichungen,
- Erweiterung der Dynamik-Toolbox um die Minimalparameter-Regressorform für seriell-hybride Roboter mit geschlossenen kinematischen Ketten,
- Reduktion der Anzahl der Modellparameter durch Treffen vereinfachender Annahmen,
- Vergleich der Güte der Vereinfachungen z. B. hinsichtlich des Rechenaufwands und der Sensitivität bezüglich Parameterunsicherheit für konkrete Beispielsysteme.

Die Bearbeitungszeit beträgt 300h.

Ausgabe der Aufgabenstellung: 14.11.2018

Abgabe der Arbeit: Gemäß Prüfungsamt

Betreuer: M. Sc. Moritz Schappler

.....
(Prof. T. Ortmaier)

.....
(Weipu Shan)

Kurzfassung

Seriell-hybrider Roboter spielt heutzutage eine wichtige Rolle in vielen Industriebereichen aufgrund ihrer robusten kinematischen Struktur bestehend aus seriell miteinander verbundenen geschlossenen Ketten. Dieser komplizierte hybride Struktur erfordert beim Regelung- und Automatisierungsgebiet jedoch einen hohen Rechenaufwand für die Modellierung. Um die Komplexität der Modell zu reduzieren, werden unterschiedliche Möglichkeiten der Reduktion der Modellkomplexität in dieser Arbeit untersucht. Die überwiegend Reduktionsmethode ist eine symbolische Kalkulationsmethode von [KB95], die mittels der Linearität von dem Dynamik-Modell die Standard-Inertial-Parameter regroupieren sowie eliminieren kann. In dieser Arbeit werden zwei Robotersysteme modelliert und dessen Modell reduziert. Die aktuellen Ergebnisse zeigen, dass die symbolische Kalkulation für die Basis-Inertial-Parameter bei einer einfachen Viergelenkkette sowie bei einer Viergelenkkette mit einer zusätzlichen rotatorischen Gelenk geeignet ist. Die Inertial-Parameter werden offensichtlich reduziert sowie minimiert, ohne das Energie-Modell zu verändern. Bei einer komplizierten seriell-hybriden Roboter werden die Inertial-Parameter trotzdem reduziert bis zur Minimalform, die identisch mit dem Ergebnis von einer numerischen Methode [Gau90] ist, stimmt das reduzierte Energie-Modell mit dem originalen Energie-Modell aber nicht überein. Es wäre daran liegen, dass die Linearität von dem aktuellen Dynamik-Modell nicht 100% an der Reduzierungsbeziehungen von [KB95] angepasst. Eine Anpassung des Dynamik-Modells für die Kalkulationsmethode ist dann erforderlich in weiteren Arbeiten.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Stand der Technik	2
2.1	Definition seriell-hybride Roboter	2
2.2	Modifizierte Denavit-Hartenberg Notation (MDH-Notation)	3
2.2.1	Motivation der MDH-Notation	3
2.2.2	Definition der MDH-Notation	3
2.3	Kinematik geschlossener Strukturen	5
2.3.1	Gelenkkoordinaten	5
2.3.2	Kinematische Beschreibung	6
2.3.3	Explizite Zwangsbedingungen	7
2.3.4	Implizite Zwangsbedingungen mittels Jacobi-Matrizen	9
2.4	Dynamik geschlossener Strukturen	11
2.4.1	Dynamikmodell	11
2.4.2	Dynamik mittels expliziter Zwangsbedingungen	13
2.4.3	Dynamik mittels impliziter Zwangsbedingungen	13
2.5	Beispiel: Viergelenkkette	15
2.5.1	Expliziten Zwangsbedingungen für Parallelogramm	15
2.5.2	Explizite Zwangsbedingungen für allgemeine Viergelenkkette	17
2.5.3	Implizite Zwangsbedingungen für allgemeine Viergelenkkette	20
2.6	Symbolische Kalkulation der Minimalparameter-Regressorform	22
2.6.1	Grundidee zur Elimination und Regruppierung der Inertial-Parameter	22
2.6.2	Basis-Inertial-Parameter der Baumstruktur	24
2.6.3	Basis-Inertial-Parameter der geschlossenen Strukturen	26
2.6.4	Praktische Anwendung der symbolische Methode	31
3	Modellierung seriell-hybrider Roboter	33
3.1	Modellierung einer Viergelenkkette mit rotatorischer Basis	33
3.1.1	Explizite Zwangsbedingungen	34
3.1.2	Implizite Zwangsbedingungen	37
3.2	Modellierung eines Palettierroboters mit zwei Viergelenkketten	38
3.2.1	Explizite Zwangsbedingungen	40

3.2.2	Implizite Zwangsbedingungen	44
3.3	Prüfung der Richtigkeit der Ergebnisse	47
4	Minimalparameter-Regressorform seriell-hybrider Roboter	48
4.1	Minimalparameter-Regressorform eine Viergelenkkette	48
4.1.1	Generale Viergelenkkette	48
4.1.2	Parallelogramm	52
4.1.3	Viergelenkkette mit rotatorischer Basis	55
4.2	Palettierroboter mit zwei Viergelenkketten	57
4.3	Mögliche Vereinfachungsannahme	61
5	Zusammenfassung	64
	Literaturverzeichnis	66

Bildverzeichnis

2.1	Beispiele für seriell-hybride Kinematiken (KUKA-KR700PA) [KUK]	3
2.2	Beispiele für a): geschlossene Kette, b): geöffnete Kette (Baumstruktur)	6
2.3	Viergelenkkette aus [Bej18]	8
2.4	Planare geschlossene Kette mit rotatorischer Gelenken [KB95]	9
2.5	Parallelogramm	16
2.6	Mechanismus einer Viergelenkkette mit körperfesten Koordinatensystemen [Bej18]	17
2.7	Mechanismus einer Viergelenkkette mit eingezeichnetem Ortsvektor ${}_{(0)}\mathbf{r}_{AC,2}$ [Bej18]	19
2.8	Mechanismus einer Viergelenkkette mit eingezeichnetem Ortsvektor ${}_{(0)}\mathbf{r}_{AC,3}$ [Bej18]	20
2.9	Geschlossene kinematische Kette mit körperfesten Koordinatensystemen [KB95]	22
2.10	Geschlossene kinematische Kette mit körperfesten Koordinatensystemen [KB95]	28
2.11	Parallelogramm mit körperfesten Koordinatensystemen	30
3.1	Mechanismus einer Viergelenkkette auf einer rotatorischen Basis mit körperfesten Koordinatensystemen	33
3.2	Mechanismus der Viergelenkkette mit eingezeichnetem Ortsvektor ${}_{(1)}\mathbf{r}_{AC,2}$ und ${}_{(1)}\mathbf{r}_{AC,3}$	36
3.3	Mechanismus des Palettierroboters KR700PA mit eingezeichneten Koordinatensystemen	38
3.4	CAD-Modell des KR-700PA, links: Vorderansicht, rechts: Hinteransicht. [KUK]	39
3.5	Viergelenkkette (A-B-C-D) des Palettierroboters KR700PA mit eingezeichneten Hilfswinkel	41
3.6	Viergelenkkette (B-E-P-G) des Palettierroboters KR700PA mit eingezeichneten Hilfswinkel	44
4.1	Ersatzbild der generalen Viergelenkkette mit eingezeichneten Vektoren der Inertial-Parameter \mathbf{X}_i	49
4.2	Ersatzbild der geöffneten generalen Viergelenkkette mit eingezeichneten Vektoren der Inertial-Parameter \mathbf{X}_i	51

4.3	Ersatzbild des Parallelogramms mit eingezeichneten Vektoren der Inertial-Parameter \mathbf{X}_i	52
4.4	Ersatzbild des geöffneten Parallelogramms mit eingezeichneten Vektoren der Inertial-Parameter \mathbf{X}_i	54
4.5	Ersatzbild der Viergelenkkette mit rotatorischer Basis mit eingezeichneten Vektoren der Inertial-Parameter \mathbf{X}_i	55
4.6	Ersatzbild der geöffneten Viergelenkkette mit rotatorischer Basis mit eingezeichneten Vektoren der Inertial-Parameter \mathbf{X}_i	56
4.7	Ersatzbild des Palettierroboters KR-700PA mit eingezeichneten Vektoren der Inertial-Parameter \mathbf{X}_i	58
4.8	Ersatzbild des geöffneten Palettierroboters KR-700PA mit eingezeichneten Vektoren der Inertial-Parameter \mathbf{X}_i	60
4.9	Quader rotiert um eine orthogonale Achse [Wik]	61

Tabellenverzeichnis

2.1	MDH-Tabelle der Viergelenkkette aus Bild 2.6	18
3.1	MDH-Tabelle der Viergelenkkette mit einer rotatorischen Basis	34
3.2	MDH-Tabelle der Palletierroboter KR-700PA	39
4.1	Standard-Inertial-Parameter von der generalen Viergelenkkette.	49
4.2	Reduzierte Inertial-Parameter von der generalen Viergelenkkette nach Regeln 1.	50
4.3	Reduzierte Inertial-Parameter von der generalen Viergelenkkette.	51
4.4	Standard-Inertial-Parameter von dem Parallelogramm.	52
4.5	Reduzierte Inertial-Parameter von dem Parallelogramm nach Regeln 1.	53
4.6	Reduzierte Inertial-Parameter von dem Parallelogramm.	54
4.7	Standard-Inertial-Parameter von der Viergelenkkette mit rotatorischer Basis.	55
4.8	Reduzierte Inertial-Parameter von der Viergelenkkette mit rotatorischer Basis.	57
4.9	Standard-Inertial-Parameter von der Viergelenkkette mit rotatorischer Basis.	57
4.10	Standard-Inertial-Parameter von dem Palettierroboters KR-700PA	60
4.11	Reduzierte Inertial-Parameter von der generalen Viergelenkkette mit der Blechannahme.	62
4.12	Reduzierte Inertial-Parameter von der Viergelenkkette mit rotatorischer Basis mit der Blechannahme.	63
4.13	Standard-Inertial-Parameter von dem Palettierroboters KR-700PA	63

Nomenklatur

Selten bzw. nur abschnittsweise verwendete Symbole und Formelzeichen sowie abweichende Bedeutungen werden ausschließlich im Text beschrieben.

Allgemeine Konventionen

Skalar	Kleinbuchstabe (kursiv): a
Vektor	Kleinbuchstabe (fett und kursiv): \boldsymbol{a}
Matrix	Großbuchstabe (fett und kursiv): \boldsymbol{A}
Punkt	Großbuchstabe (kursiv): A

Lateinische Buchstaben

q	Vektor aller Freiheitsgrade
q_1	Vektor der unabhängigen Freiheitsgrade
q_2	Vektor der abhängigen Freiheitsgrade
M	Massenmatrix
g	Vektor der Gravitationsterme
c	Vektor der Coriolis- und Zentrifugalterme
T	Transformationsmatrix
R	Rotationsmatrix
h	Vektor der impliziten Zwangsbedingungen
L	Lagrange'sche Funktion
\mathcal{C}	Kreis

Griechische Buchstaben

ρ, η, ξ	Rotationswinkel nach Kette sortiert
β, α, θ	Rotationswinkel für MDH Notation

Koordinatensysteme

$(\text{KS})_i$	Koordinatensystem i
-----------------	-----------------------

$(KS)_0$ Ortsfestes Inertialkoordinatensystem

Abkürzungen

MDH Modifizierte Denavit-Hartenberg Notation

SDH Standard-Denavit-Hartenberg Notation

IZ Ansatz der impliziten Zwangsbedingungen

TE Ansatz der expliziten Zwangsbedingungen durch trigonometrische Elimination

DE Ansatz der expliziten Zwangsbedingungen durch direkte Elimination

1 Einleitung

Serielle-hybrider Roboter spielt heutzutage eine wichtige Rolle in Palettieren Industriebereichen aufgrund ihrer robusten kinematischen Struktur, die aus mehreren seriell miteinander verbundenen geschlossenen Ketten besteht. Somit haben solche Roboter die Vorteile wie z.B. hohe Positionsgenauigkeit, Steifigkeit sowie Traglast zur Verfügung. In dieser Arbeit wird zunächst die kinematische Zwangsbedingungen sowie die Minimal-Regressorform der Dynamik einer einfachen Viergelenkketten beobachtet. Anschließend werden ein Beispiel für seriell-hybride Palettierroboter von KUKA (KR 700PA) [KUK] dargestellt.

Wegen der komplizierten kinematischen Struktur der hybride Roboter, ist es rechenaufwändiger beim kinematischer sowie dynamischer Modellierung als seriellen Robotern. Zur Beschreibung der homogenen Koordinatentransformation wird in dieser Arbeit die modifizierte Denavit-Hartenberg-Notation (MDH-Notation) verwendet, um die Kinematik des Roboters zu beschreiben. Durch die explizite Zwangsbedingungen mit trigonometrischer Form und die implizite Zwangsbedingungen werden das Dynamik-Modell des untersuchten System für weitere Vereinfachung ermittelt. Die Ansätze zur Zwangsbedingungen werden in dem Abschnitt 2.3 erläutert. Zur Herleitung der Dynamik wird hier eine bestehende Maple-Toolbox verwendet, dabei wird die entstehende kinematische Zwangsbedingungen analytisch berechnet. Ein wichtiger Teil in dieser Arbeit ist die Minimalparameter-Regressorform der Dynamik des Roboters. Verschiedene Ansätze für symbolische Kalkulation der Minimalparameter einer geschlossenen Kette wird in dem Abschnitten 2.6 erläutert. Die Ansätze basiert auf die Synthese von [KB95]. Beim Minimalparameter-Regressorform werden die inertiale Parameter der Körpern rekursiv von Endeffektor bis zum ersten Körper regroupiert oder eliminiert, somit wird die Anzahl der Parameter reduziert. Durch treffen vereinfachender Annahmen wird weiter die Anzahl der Parameter reduziert.

Im Kapitel 3 werden verschiedene hybride Roboter modelliert mittels unterschiedlicher Form der kinematischen Zwangsbedingungen. Aufgrund der Komplexität der kinematischen Strukturen der hybride Roboter wurde am Anfang eine einfache geschlossene Mechanismen - Viergelenkkette modelliert. Aus Viergelenkkette bestehen die untersuchten hybriden Roboter. Das von bestehendem Maple-Toolbox generierte Dynamik Modell der untersuchten hybriden Roboter wird im Kapitel 4 vereinfacht durch die symbolische Kalkulation der Minimalparameter. Eine mögliche vereinfachender Annahmen wird auch in Kapitel 4 untersucht, um weiterhin die Anzahl der Modellparameter zu reduzieren. Die Ergebnisse der symbolische Kalkulation werden durch eine numerische Methode von [Gau90] überprüft und verglichen.

2 Stand der Technik

In diesem Kapitel wird die Grundlage der Modellierung von hybriden Robotern erläutert. Es behandelt unter Verwendung verschiedener Ansätze zur Beschreibung von kinematischen Zwangsbedingungen. Drei unterschiedliche Formen der kinematischen Zwangsbedingungen werden für die Herleitung der Dynamik verwendet. Anhand der bestehenden Dynamik-Toolbox wird das Dynamikmodell generiert. Eine Synthese der symbolischen Kalkulation von Minimalparametern wird dann in diesem Kapitel deutlich dargelegt, um die Komplexität der Dynamik zu reduzieren. Eine Definition für seriell-hybride Roboter wird zunächst im Abschnitt 2.1 vorgestellt. Zur Kinematik des Roboters verwenden wir die modifizierte DH-Notation, die im Abschnitt 2.2 erläutert wird. Im Abschnitt 2.3 werden sowohl die kinematische Definition und Beschreibung, als auch die kinematischen Zwangsbedingungen erläutert, die für die Dynamik vorbereitet sollen. Eine Viergelenkkette wird als ein Beispiel vorgestellt. Abschnitt 2.4 zeigt die Dynamikmodellierung mittels kinematischer Zwangsbedingungen. Eine Viergelenkkette wird als Beispiel zur kinematischen Zwangsbedingungen im Abschnitt 2.5 vorgestellt. Im Abschnitt 2.6 wird eine praktische Synthese für die Reduzierung des Dynamik-Modells vorgestellt, durch die die Inertial-Parameter rekursiv regroupiert und eliminiert werden kann.

2.1 Definition seriell-hybride Roboter

Seriell-hybride Roboter bzw. Kinematiken sind eine Kombination aus seriellen und parallelen kinematischen Strukturen. In der Struktur steht mindestens eine geschlossene kinematische Kette, somit der Endeffektor ausgehend von der Basis entlang unterschiedliche Wege erreicht werden kann. Wenn der Roboter besteht aus mehreren geschlossenen kinematischen Ketten, werden die Ketten seriell miteinander durch die gemeinsame Glieder verbunden, wie es in Bild 2.1 gezeigt. Im Vergleich zum klassischen seriellen und parallelen Robotern, ist einerseits die höhere Komplexität der Modellierung von hybriden Robotern bemerkbar wegen der komplizierten Struktur, andererseits haben die Roboter auch andere Vorteile wie z.B. hohe Steifigkeit und Traglast in großem Arbeitsraum. [OT18]

Um die kinematischen Zwangsbedingungen der hybriden Strukturen zu entwickeln, wird hier zunächst die Modifizierte Denavit-Hartenberg Notation vorgestellt.



Bild 2.1: Beispiele für seriell-hybride Kinematiken (KUKA-KR700PA) [KUK]

2.2 Modifizierte Denavit-Hartenberg Notation (MDH-Notation)

Um die homogene Koordinatentransformation der Kinematik zu beschreiben wird in dieser Arbeit die MDH-Notation verwendet. Die MDH-Notation basiert grundsätzlich auf der Standard-Denavit-Hartenberg-Notation (SDH-Notation). Dieser Abschnitt erläutert die Gründe, wozu hier MDH-Notation verwendet wird.

2.2.1 Motivation der MDH-Notation

Zur Beschreibung der Kinematik von seriellen Robotern wird in der Robotik meistens die SDH-Notation benutzt, leider ist ihre Anwendung nur für serielle Roboter begrenzt. In [KK86] betonen Khalil und Kleinfinger auch, dass die SDH-Notation für die hybride Strukturen aus geschlossenen Ketten nicht nutzbar ist. Eine entwickelte modifizierte DH-Notation von Khalil und Kleinfinger wird in nächsten Abschnitt vorgestellt.

2.2.2 Definition der MDH-Notation

Auf Basis der SDH-Notation wurde die MDH-Notation entwickelt, deswegen beinhaltet MDH-Notation die Parameter von SDH-Notation. Zur Beschreibung der Kinematik von geschlossener Ketten und seriell-hybrider Strukturen kommt noch neue Parameter. Genau wie SDH-Notation, ist die homogene Transformation ${}^i\mathbf{T}_j$ von einem Koordinatensystem $(KS)_i$ zum nächsten Koordinatensystem $(KS)_j$ über ein Zwischenkoordinatensystem $(KS)_k$ beim MDH-Notation auch möglich. Dazu bedient die homogene Transformation ${}^i\mathbf{T}_k$ und ${}^k\mathbf{T}_j$:

$${}^i\mathbf{T}_j = {}^i\mathbf{T}_k {}^k\mathbf{T}_j. \quad (2.1)$$

Bei MDH-Notation ist v als Index für das Vorgänger-Koordinatensystem steht und es gilt:

$$v(j) = i. \quad (2.2)$$

Die homogene Transformation ${}^i\mathbf{T}_k$ wird so definiert, dass es aus zwei nicht in der SDH-Notation enthaltenen Parameter β_j und b_j besteht. Nach der beiden Transformationen erfolgt das Zwischenkoordinatensystem $(\text{KS})_k$ von dem Anfangskoordinatensystem $(\text{KS})_i$. Die homogene Transformation ${}^k\mathbf{T}_j$ besteht aus vier Parameter α_j , a_j , θ_j und d_j . Die deutliche Definition gilt:

- β_j : Drehwinkel um \mathbf{z}_i zwischen \mathbf{x}_i und \mathbf{x}_k ,
- b_j : Translation zwischen dem Ursprung von $(\text{KS})_i$ und $(\text{KS})_k$,
- α_j : Drehwinkel um \mathbf{x}_k zwischen \mathbf{z}_k und \mathbf{z}_j ,
- a_j : Translation zwischen dem Ursprung von $(\text{KS})_k$ und \mathbf{z}_j ,
- θ_j : Drehwinkel um \mathbf{z}_k zwischen \mathbf{x}_k und \mathbf{x}_j ,
- d_j : Translation zwischen dem Ursprung von \mathbf{x}_k und $(\text{KS})_j$.

Somit wird die homogene Transformation ${}^i\mathbf{T}_k$ und ${}^k\mathbf{T}_j$ so berechnet:

$${}^i\mathbf{T}_k = \mathbf{T}_{\text{rz}}(\beta_j)\mathbf{T}_{\text{tz}}(b_j), \quad (2.3)$$

$${}^k\mathbf{T}_j = \mathbf{T}_{\text{rx}}(\alpha_j)\mathbf{T}_{\text{tx}}(a_j)\mathbf{T}_{\text{rz}}(\theta_j)\mathbf{T}_{\text{tz}}(d_j). \quad (2.4)$$

Hierbei kann man schnell erkennen, dass die gleiche vier Parameter wie bei der SDH-Notation vorhanden sind, nur die Reihenfolge der Transformationsmatrizen neu definiert ist.

Um die Gelenkarten schnell zu beurteilen, wird hier für die MDH-Notation noch ein Parameter σ definiert:

- $\sigma_j = 0$: Drehgelenk,
- $\sigma_j = 1$: Schubgelenk,
- $\sigma_j = 2$: Konstante Transformation mittels eines virtuellen Koordinatensystems.

Zur Unterscheidung von unabhängiger Gelenken und abhängiger Gelenken benutzt man hier μ_j :

- $\mu_j = 0$: passives Gelenk, bzw. abhängiges Gelenk,
- $\mu_j = 1$: aktives Gelenk, bzw. unabhängiges Gelenk.

Es soll berücksichtigt, dass die von unterschiedlicher Wegen hergeleitete homogene Transformationsmatrizen bei einer geschlossenen Ketten am Schnittpunkt identisch bleiben sollen. Wenn alle Transformationsmatrizen zwischen der Körperfesten Koordinatensystemen entlang der geschlossenen Ketten miteinander multipliziert, wird dann eine Einheitsmatrix E generiert. Um die Transformationsmatrizen von der Basis des Roboters bis zum Schnittpunkt der geschlossenen Ketten entlang unterschiedlicher Wege zu beschreiben, wird ein virtuelles Koordinatensystem am Schnittpunkt der geschlossenen Ketten definiert. Dieses virtuelle Koordinatensystem ist identisch mit dem auf dem Schnittpunkt festgelegten Koordinatensystem, das zeitabhängige Größen enthält. Somit wird der Struktur in dem Schnittgelenk mathematisch schließen [SLH19], [KD02]. Die zusammentreffende Koordinatensysteme soll nach [KR14] am Ende der MDH-Tabelle in der selben Reihenfolge stehen. Die konkrete Beispiele werden in der Tabelle 2.1 und im Kapitel 3 deutlich gezeigt.

2.3 Kinematik geschlossener Strukturen

2.3.1 Gelenkkoordinaten

Bei seriellen Robotern sind alle Gelenke aktiv bzw. unabhängig, im Gegensatz dazu gibt es bei der geschlossenen Ketten sowie beim hybriden Robotern nicht nur die aktive Gelenke, sondern auch passive Gelenke bzw. abhängige Freiheitsgrade. Der gesamte Vektor der Koordinaten von Freiheitsgraden gilt:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1^T & \mathbf{q}_2^T \end{pmatrix}^T, \quad (2.5)$$

wobei

- \mathbf{q} : Vektor der verallgemeinerten Koordinaten,
- \mathbf{q}_1 : die unabhängige Koordinaten bzw. aktive Freiheitsgraden,
- \mathbf{q}_2 : die abhängige Koordinaten bzw. passive Freiheitsgraden.

Hier wird \mathbf{q}_2 als abhängige Koordinaten genannt, weil die passive Freiheitsgraden werden in folgenden Abschnitt über den bekannten \mathbf{q}_1 ausgedrückt, um die Kinematik zu beschreiben.

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_2(\mathbf{q}_1) \quad (2.6)$$

2.3.2 Kinematische Beschreibung

Um den kinematischen Struktur eines hybriden Roboters oder einer geschlossenen Ketten zu beschreiben, wird die Beschreibungsmethode von [KK86] und [KB95] verwendet. Das Robotersystem beinhaltet $n + 1$ Glieder (Segmente) und L Gelenke (Joints), Segment 0 wird als die Basis des Systems definiert, und Segment n wird als Endeffektor definiert. Die Anzahl der geschlossener Ketten B ist äquivalent wie $L - n$. Die Anzahl der aktiven (unabhängigen) Gelenken ist m . Zur Beschreibung einer geschlossenen Ketten wird zunächst eine Baumstruktur mit n Gelenken und n beweglicher Segmenten konstruieren. Diese Baumstruktur wird von einer virtuell geöffneten geschlossenen Kette generiert. Das geöffnete Schnittgelenk ist einer der unabhängigen Gelenken in der Mitte von der geschlossener Ketten. Somit funktioniert die kinematische Zwangsbedingungen als eine Begrenzung, um die Baumstruktur im Arbeitsraum von der geschlossener Kette zu beschränken.

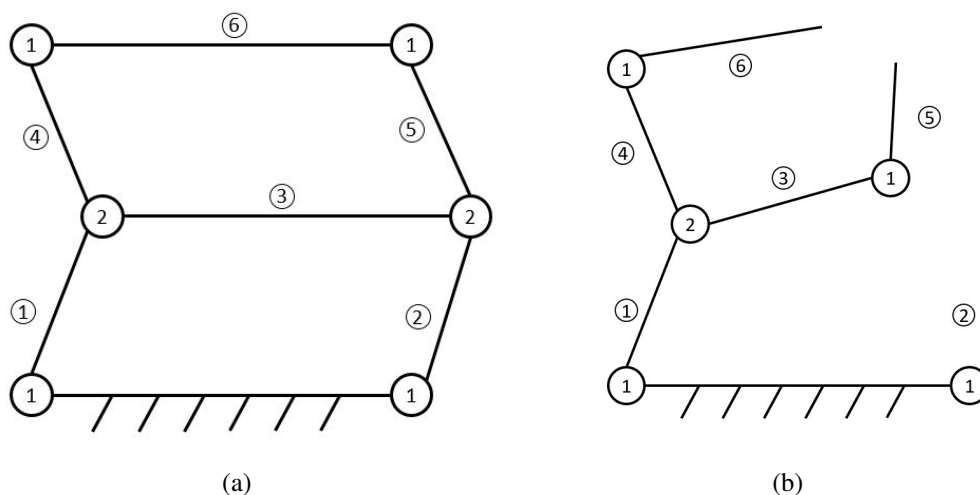


Bild 2.2: Beispiele für a): geschlossene Kette, b): geöffnete Kette (Baumstruktur)

Das Ersatzbild 2.2 zeigt eine geschlossene Kette und die entsprechende geöffnete Kette. Jeder Glied der Kette wird numeriert. Die Nummer im Gelenk zeigt die Anzahl der Gelenken von dem Ort. Aus der obigen Abbildung 2.2 ist es leicht zu erkennen, dass bei der geschlossenen Ketten die Anzahl der Gliedern $n = 6$ (ohne Basis), die Anzahl der Gelenken $L = 8$, dann gilt die Anzahl der geschlossener Ketten des Systems $B = L - n = 2$. Nach der Öffnung der Ketten ist die Anzahl der Gliedern $n = 6$, die Anzahl der Gelenken $L = 6$ und die Anzahl der geschlossener Ketten $B = L - n = 0$.

Ein anderes Ziel der Methode ist zur Ermöglichung der Minimalparameter-Regressorform der

Dynamik. Durch Öffnung einer geschlossenen Ketten wird die Minimalparameter-Regressorform bei der Baumstruktur erreichbar. Es wird im Abschnitt 2.5 deutlich erläutert. Die deutliche mathematische Beschreibungen der Kinematik bzw. die kinematische Zwangsbedingungen werden im nächsten Abschnitt erläutert.

2.3.3 Explizite Zwangsbedingungen

Trigonometrische Elimination

Mittels der expliziten kinematischen Zwangsbedingungen durch trigonometrische Elimination werden die abhängige Gelenkkoordinaten als cos- und sin-Terme vorgestellt, die über die cos- und sin-Terme der unabhängiger Gelenkkoordinaten vorgestellt werden. Die Zusammenhänge zwischen abhängiger Gelenkkoordinaten und unabhängiger Gelenkkoordinaten werden so definiert [SLH19]:

- direkte Elimination:

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{q}_1), \quad (2.7)$$

- trigonometrische Elimination:

$$\sin(\mathbf{q}_{2R}) = \mathbf{f}_{R\sin}(\mathbf{q}_1), \quad (2.8)$$

$$\cos(\mathbf{q}_{2R}) = \mathbf{f}_{R\cos}(\mathbf{q}_1), \quad (2.9)$$

$$\mathbf{q}_{2T} = \mathbf{f}_T(\mathbf{q}_1), \quad (2.10)$$

wobei

- \mathbf{q}_{2R} : der Vektor der rotatorischen abhängigen Koordinaten (mit $\sigma_j = 0$ und $\mu_j = 0$)
- \mathbf{q}_{2T} : der Vektor der translatorischen abhängigen Koordinaten (mit $\sigma_j = 1$ und $\mu_j = 0$)

Zur Ermöglichung der explizite Zwangsbedingung durch trigonometrische Elimination, wird in dieser Arbeit eine geometrische Methode der Kreisschnittpunkte verwendet, die in [SLH19] und [Bej18] benutzt wurde. Alternativ gibt es auch eine analytische Berechnungen in [WG98] zur trigonometrische Form, die auch in [Bej18] erläutert wurde, wird jedoch nicht in dieser Arbeit verwendet. Weiterhin wird ein Beispiel gezeigt, um den geometrische Ansatz zu erläutern.

Direkte Elimination

Mit der trigonometrischen Elimination kann die explizite Zwangsbedingungen weiter herleitet in der Form von direkte Elimination, somit wird die abhängige Freiheitsgraden direkt ausgedrückt. Die erhaltene Ausdrücke sind dann in einer Form von verschalteten Funktionen umgerechnet. Zur deutlichen Erläuterung wird hier ein Beispiel von einer Viergelenkkette vorgestellt [Bej18].

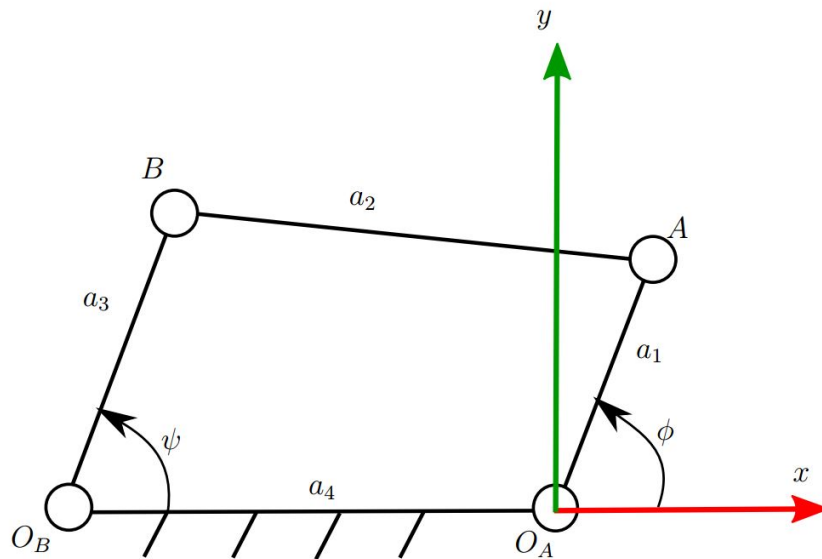


Bild 2.3: Viergelenkkette aus [Bej18]

Wie es in Bild 2.3 gezeigt hat, die geschlossene Viergelenkkette hat eine unabhängige Gelenk ϕ . Der abhängige Winkel ψ wird in einer verschalteten Form und abhängig von unabhängige Winkel ϕ ausgedrückt:

$$\psi = f(f_{\arctan}(\cos(\phi), \sin(\phi))) \quad (2.11)$$

Da die cos- sowie sin-Terme der abhängigen Gelenkkoordinaten schon durch die trigonometrische Elimination der expliziten Form herleitet, ist hier die direkte Elimination der explizite Form auch einfach erkennbar:

$$\psi = \arctan\left(\frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)}\right) \quad (2.12)$$

Ebenfalls wie trigonometrische Elimination, wird die entsprechende Lagrange'sche Funktion L_c zur Dynamik bei der direkter Elimination umgerechnet. Die weitere Umrechnung der Lagrange'sche Funktion zur Dynamik wird in der praktischen Anwendung mittels einer existierende Dynamik-Toolbox generiert [Sch19].

2.3.4 Implizite Zwangsbedingungen mittels Jacobi-Matrizen

Bei der impliziten Form der kinematischen Zwangsbedingungen geschlossener Ketten wird differentielle Zusammenhänge (Jacobi-Matrizen) zwischen der impliziten Zwangsbedingungen und der abhängige sowie unabhängige Gelenkkoordinaten hergeleitet, um die Dynamik aufzustellen. Die Dynamik mittels impliziter Form der Kinematik wird auch als eine Überprüfung für die explizite Form der Kinematik verwendet. In diesem Abschnitt wird die wichtigste Ausdrücke der impliziten Form vorgestellt und erläutert.

Die implizite Zwangsbedingungen hat großer Abhängigkeit von der kinematischen Struktur. Anhand der MDH-Notation ist die homogene Transformationen entlang verschiedener Wege von der Basis bis zum Schnittgelenk erreichbar, somit wird die Zweige der geschlossenen Kette am Schnittgelenk geschlossen. Aus der Erläuterung vom Abschnitt 2.2 wird ein virtuelles Koordinatensystem auf dem Schnittgelenk definiert, um bei der Transformationskette der verschiedenen Zweigen zu helfen. Das virtuelle Koordinatensystem muss identisch mit dem existierenden Koordinatensystem des Schnittgelenks sein. Dadurch wird die Zwangsbedingungen so definiert, dass die Differenz der verschiedenen homogenen Transformationen zwischen der Basis und dem Schnittgelenk gleich Null bleiben. Zur Herleitung der impliziten Form wird hier eine planare geschlossene Kette aus [KB95] als Beispiel vorgestellt:

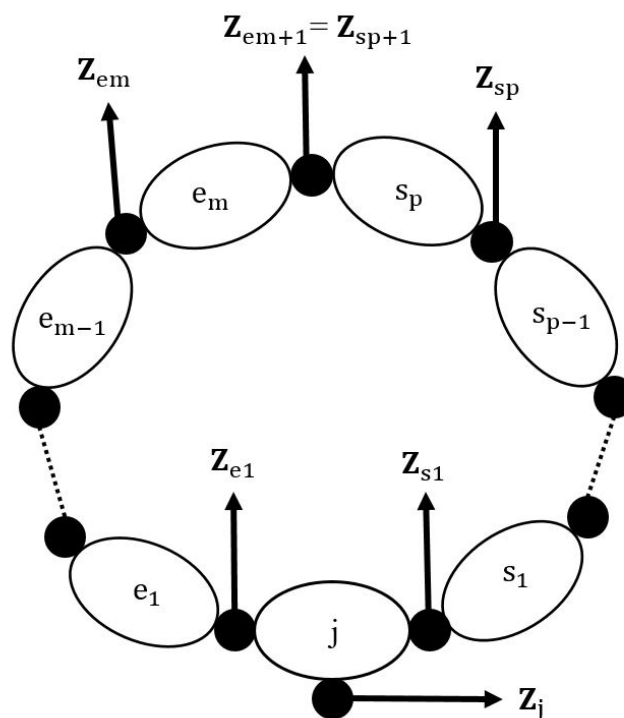


Bild 2.4: Planare geschlossene Kette mit rotatorischen Gelenken [KB95]

Die im Bild 2.4 vorgestellte geschlossene Kette beinhaltet $m + p + 2$ Gelenken und $m + p + 1$ Glieder. Durch Öffnung der geschlossener Ketten entstehen zwei Zweige mit paralleler Achsen e_1, e_2, \dots, e_m und s_1, s_2, \dots, s_p . Gelenke j wird als die Basis der geschlossenen Ketten behandelt. Die Koordinatensysteme auf dem geöffneten Schnittgelenke sind $(KS)_{e_{m+1}}$ und $(KS)_{s_{p+1}}$. Hier definieren wir, dass das Koordinatensystem $(KS)_{s_{p+1}}$ virtuell ist.

Nach obiger Erläuterung ist es erkennbar, dass die beide Koordinatensysteme auf dem geöffneten Schnittgelenke die identische Position und Orientierung haben. Somit wird die homogene Transformationsketten zwischen der Basis und dem Schnittgelenken auch identisch sein:

$${}^0T_{e_1} {}^{e_1}T_{e_2} \dots {}^{e_k}T_{e_{k+1}} = {}^0T_{s_1} {}^{s_1}T_{s_2} \dots {}^{s_p}T_{s_{p+1}} \quad (2.13)$$

$${}^0T_{e_{k+1}} = {}^0T_{s_{p+1}} \quad (2.14)$$

$$\begin{pmatrix} {}^0R_{e_{k+1}} & (0)r_{e_{k+1}} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^0R_{s_{p+1}} & (0)r_{s_{p+1}} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Aus den Rotationsmatrizen und den Ortsvektoren der homogenen Transformationsmatrizen wird die rotatorischen impliziten Zwangsbedingungen und translatorischen impliziten Zwangsbedingungen entnommen.

Für die rotatorischen Zwangsbedingungen h_r gilt im Fall planarer geschlossenen Kette, aus der die untersuchten Palettierroboter vorkommen:

$${}^{e_{k+1}}R_{s_{p+1}} = ({}^0R_{e_{k+1}})^T ({}^0R_{s_{p+1}}) = R_z(h_r) \stackrel{!}{=} E \quad (2.16)$$

$$h_r \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.17)$$

Für die translatorischen Zwangsbedingungen h_t gilt für planare geschlossene Kette:

$$\mathbf{h}_t = (0)r_{e_{k+1}} - (0)r_{s_{p+1}} = (h_{tx} \ h_{ty} \ 0)^T \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \quad (2.18)$$

Der gesamten impliziten Zwangsbedingungen \mathbf{h} der geschlossene Kette lautet dann:

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = (h_{tx} \ h_{ty} \ h_r)^T \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \quad (2.19)$$

Durch einfaches Differenzieren der impliziten Zwangsbedingungen nach der Zeit resultiert die Beziehung ([PCP99], [Bej18]):

$$\mathbf{J}_1 \frac{d\mathbf{q}_1}{dt} + \mathbf{J}_2 \frac{d\mathbf{q}_2}{dt} = \mathbf{0}, \quad (2.20)$$

mit

$$\mathbf{J}_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)}{\partial \mathbf{q}_1}, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{J}_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)}{\partial \mathbf{q}_2}, \quad (2.22)$$

wobei

- \mathbf{J}_1 : die Jacobi-Matrix der unabhängigen Freiheitsgrade,
- \mathbf{J}_2 : die Jacobi-Matrix der abhängigen Freiheitsgrade.

Die differentielle Kinematik beschreibt die Zusammenhänge zwischen den unabhängigen Gelenkgeschwindigkeiten bzw. -beschleunigungen $\dot{\mathbf{q}}_1, \ddot{\mathbf{q}}_1$ und den abhängigen Gelenkgeschwindigkeiten bzw. -beschleunigungen $\dot{\mathbf{q}}_2, \ddot{\mathbf{q}}_2$. Die Zusammenhänge werden im nächsten Teil für die Herleitung der Dynamik verwendet.

2.4 Dynamik geschlossener Strukturen

2.4.1 Dynamikmodell

Auf Basis der Dynamik von Baumstrukturen wird die Dynamik geschlossener Strukturen und hybrider Roboter entwickelt. Es wurde von Nakamura und Ghodoussi [NG89] erläutert, dass die inverse Dynamik der geschlossener Strukturen ausgehend von offener Ketten herleitet wird. In dem Fall gilt die inverse Dynamik:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_o(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L_o(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}, \quad (2.23)$$

wobei $\boldsymbol{\tau}$ ist der Vektor der Kräfte bzw. Momente, und L_o ist die Lagrange'sche Funktion offener Strukturen, die von \mathbf{q} und $\dot{\mathbf{q}}$ abhängig ist. Die Freiheitskoordinaten \mathbf{q} bei seriellen Robotern entspricht der unabhängigen Freiheitsgraden bzw. der Anzahl der existierenden Gelenken, weil es nur aktive Gelenke gibt. Bei der geschlossenen Strukturen ist es aber im anderen Fall. Gemäß dem Prinzip der virtuellen Verschiebung nach D'Alembert [NG89] wurde die Gleichung der inverse Dynamik offener Strukturen ausgehend von Gleichung (2.6) hergeleitet:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_c(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)}{\partial \dot{\mathbf{q}}_1} \right) - \frac{\partial L_c(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)}{\partial \mathbf{q}_1} = \boldsymbol{\tau}_1, \quad (2.24)$$

wobei die Lagrange'sche Funktion L_c sich auf die geschlossene Kette beziehen und hängt nur von unabhängige Koordinaten \mathbf{q}_1 und $\dot{\mathbf{q}}_1$. Der Vektor $\boldsymbol{\tau}_1$ beziehen sich auf die Kräfte bzw.

Momente der aktiven Gelenken und kann als eine lineare Beziehung mit Berücksichtigung der Standard-Inertial-Parameter erkannt [KB95]:

$$\tau_1 = \mathbf{w}(q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1) \mathbf{X}, \quad (2.25)$$

wobei \mathbf{X} ist der Vektor von Standard-Inertial-Parameter aller Glieder, es wird so definiert:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^1 \\ \dots \\ \mathbf{X}^n \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

und \mathbf{X}^j ist der Vektor von Standard-Inertial-Parameter des Glieds j . Für jedes Glied wird zehn Standard-Inertial-Parameter definiert:

$$\mathbf{X}^j = \left[XX_j, XY_j, XZ_j, YY_j, YZ_j, ZZ_j, MX_j, MY_j, MZ_j, M_j \right]^T \quad (2.27)$$

Davon repräsentiert Parameter (XX_j, \dots, ZZ_j) die Elemente der Trägheitstensor ${}^j\mathbf{J}_j$ des Glieds j bezüglich des Ursprungs von KS_j . (MX_j, MY_j, MZ_j) repräsentiert die Elemente von dem ersten Moment des Glieds j bezüglich des Ursprungs von KS_j , und M_j ist die Masse des Glieds j .

Die Informationsmatrix \mathbf{w} beinhaltet die geometrische Parameter und die Informationen der unabhängigen Gelenken, ist einfach von dem Dynamik Modell durch partielle Ableitung von Standard-Inertial-Parameter generierbar. Das wichtige Ziel in dieser Arbeit ist die Reduktion der Komplexität der Dynamik. Die vorwiegende Methode ist die Anzahl der Standard-Inertial-Parameter zu reduzieren. Durch Elimination der Parameter, die keine Effekt haben, oder durch Regruppierung Parametern auf anderen Parameter bekommen wir die Basis-Inertial-Parameter. Das Basis-Dynamik-Modell wird dann so vorgestellt:

$$\tau_1 = \mathbf{w}_b(q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1) \mathbf{X}_b, \quad (2.28)$$

wobei \mathbf{X}_b ist der Vektor von Basis-Inertial-Parameter aller Gliedern (Links), und \mathbf{w}_b ist die korrespondierende Informationsmatrix von \mathbf{w} .

Die Methode zur symbolischen Kalkulation des Basis-Inertial-Parameters für geschlossene kinematische Kette sowie für hybride Robotern wird im Abschnitt 2.6 erläutert. Anschließend wird die kinematische Zwangsbedingungen der geschlossene Kette vorgestellt.

2.4.2 Dynamik mittels expliziter Zwangsbedingungen

Auf Basis vom Abschnitt 2.4.1 wird die Dynamik geschlossener Ketten mit der Zwangsbedingungsdefinition von [SLH19] definiert. Zur Verbindung der explizite kinematische Zwangsbedingungen durch trigonometrische Elimination werden zunächst die Lagrange'sche Funktion L_o für offene Ketten, die alle kinematischen Gelenkgrößen enthält, so geliefert:

$$L_o = L_o(\sin(\mathbf{q}_{1R}), \cos(\mathbf{q}_{1R}), \mathbf{q}_{1T}, \dot{\mathbf{q}}_1, \sin(\mathbf{q}_{2R}), \cos(\mathbf{q}_{2R}), \mathbf{q}_{2T}, \dot{\mathbf{q}}_2) \quad (2.29)$$

Mit der Zusammenhängen zwischen unabhängigen Gelenkkoordinaten und abhängigen Gelenkkoordinaten wird L_o in L_c für geschlossene Ketten umgerechnet [SLH19]:

$$L_c = L_c(\sin(\mathbf{q}_{1R}), \cos(\mathbf{q}_{1R}), \mathbf{q}_{1T}, \dot{\mathbf{q}}_1, \mathbf{f}_{R\sin}(\mathbf{q}_1), \mathbf{f}_{R\cos}(\mathbf{q}_1), \mathbf{f}_T(\mathbf{q}_1), \mathbf{f}_{\text{diff}}(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)) \quad (2.30)$$

Die hergeleitete Lagrange'sche Funktion L_c ist zur Beschreibung geschlossener Strukturen mit Hilfe der explizite kinematischen Zwangsbedingungen durch trigonometrische Elimination geeignet. Weitere Umrechnung der Lagrange'sche Funktion zur Dynamik wird mittels einer existierenden Dynamik-Toolbox [Sch19] erhalten.

2.4.3 Dynamik mittels impliziter Zwangsbedingungen

Auf Basis den obigen hergeleiteten impliziten kinematischen Zwangsbedingungen werden die Dynamik aufgestellt. In diesem Abschnitt wird die wichtigsten dynamischen Terme sowie die davon abhängigen kinematischen Größen vorgestellt. Die Bestimmung verschiedener Terme der Dynamik mittels impliziten kinematischen Zwangsbedingungen wurde von Docquier in [DPF13] deutlich erläutert. Die Vektoren der unabhängigen Gelenkkoordinaten sowie ihre Geschwindigkeiten und Beschleunigungen $\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1$, und $\ddot{\mathbf{q}}_1$ werden als bekannte Inputs des Dynamikmodells behandelt. Zunächst sollen die differentielle Zusammenhänge zwischen den abhängigen Gelenkkoordinaten \mathbf{q}_2 und den unabhängigen Gelenkkoordinaten \mathbf{q}_1 bestimmt werden. Mittels obigen vorgestellten Jacobi-Matrizen wird folgende Beziehung erhalten [DPF13]:

$$\dot{\mathbf{q}}_{2,IZ} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_1. \quad (2.31)$$

Die obige Gleichung zeigt den Zusammenhang der Geschwindigkeit von unabhängigen und abhängigen Gelenkkoordinaten, wobei Matrix \mathbf{B} , die aus den beiden Jacobi-Matrizen der unabhängigen Freiheitsgrade und der abhängigen Freiheitsgrade besteht, wird hier als eine Kopplungsmatrix behandelt. Es gilt:

$$\mathbf{B} = -(\mathbf{J}_2)^{-1}\mathbf{J}_1. \quad (2.32)$$

Die Vektoren gesamten Gelenkkoodinaten mit impliziter Form wird in einem zusammenfassenden Vektor dargestellt:

$$\dot{\mathbf{q}}_{\text{IZ}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_{2,\text{IZ}} \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Die Dynamik geschlossener Kette mit impliziten Zwangsbedingungen wird dann auf Basis von der Dynamik offener Kette mittels der Kopplungsmatrix \mathbf{B} entwickelt:

$$\boldsymbol{\tau}_{1,\text{IZ}}(\mathbf{q}_1) = \boldsymbol{\tau}_{1,\text{o}}(\mathbf{q}_1) + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\tau}_{2,\text{o}}(\mathbf{q}_{2,\text{IZ}}). \quad (2.34)$$

Der in obiger Beziehung enthaltene Vektor $\boldsymbol{\tau}$ bezieht sich auf die Momente und Kräfte. $\boldsymbol{\tau}_{1,\text{IZ}}(\mathbf{q}_1)$ beinhaltet die Momente und Kräfte der unabhängigen Gelenkkoodinaten mittels impliziten Zwangsbedingungen. $\boldsymbol{\tau}_{1,\text{o}}(\mathbf{q}_1)$ beinhaltet die Momente und Kräfte der unabhängigen Gelenkkoodinaten einer offenen Kette, während $\boldsymbol{\tau}_{2,\text{o}}(\mathbf{q}_{2,\text{IZ}})$ für die Momente und Kräfte der abhängigen Gelenkkoodinaten einer offenen Kette steht.

Nach [PCP99] wird die wichtigsten Dynamik-Terme wie folgende Beziehungen hergeleitet:

$$\mathbf{M}_{\text{IZ}}(\mathbf{q}_1) = \mathbf{W}^T \mathbf{M}_o \mathbf{W}, \quad (2.35)$$

$$\mathbf{c}_{1,\text{IZ}}(\mathbf{q}_1) = \mathbf{W}^T \mathbf{c}_o + \mathbf{W}^T \mathbf{M}_o \dot{\mathbf{W}} \dot{\mathbf{q}}_1, \quad (2.36)$$

$$\mathbf{g}_{1,\text{IZ}}(\mathbf{q}_1) = \mathbf{g}_{1,\text{o}}(\mathbf{q}_1) + \mathbf{B}^T \mathbf{g}_{2,\text{o}}(\mathbf{q}_{2,\text{IZ}}), \quad (2.37)$$

wobei:

- $\mathbf{M}_{\text{IZ}}(\mathbf{q}_1)$: Massenmatrix mittels impliziten Zwangsbedingungen bezüglich der unabhängigen Gelenkkoodinaten,
- \mathbf{M}_o : Massenmatrix der offenen Kette,
- $\mathbf{c}_{1,\text{IZ}}(\mathbf{q}_1)$: Vektor der Coriolis- und Zentrifugalterme mittels impliziten Zwangsbedingungen bezüglich der unabhängigen Gelenkkoodinaten,
- \mathbf{c}_o : Vektor der Coriolis- und Zentrifugalterme der offene Kette
- $\mathbf{g}_{1,\text{IZ}}(\mathbf{q}_1)$: Vektor der Gravitationsanteil mittels impliziten Zwangsbedingungen bezüglich der unabhängigen Gelenkkoodinaten,
- $\mathbf{g}_{1,\text{o}}(\mathbf{q}_1)$: Vektor der Gravitationsanteil der offenen Kette bezüglich der unabhängigen Gelenkkoodinaten mittels impliziten Form,

- $\mathbf{g}_{2,o}(\mathbf{q}_{2,IZ})$: Vektor der Gravitationsanteil der offenen Kette bezüglich der abhängigen Gelenkkoordinaten,
- \mathbf{W} : Projektionsmatrix, es gilt: $\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}$.

Die in diesem Abschnitt vorgestellte Dynamik-Terme mittels impliziten Zwangsbedingungen und Jacobi-Matrizen werden in der praktischen Anwendungen mit Hilfe der existierenden Dynamik-Toolbox [Sch19] implementiert. Weiterhin werden die erläuterte verschiedene kinematische sowie dynamische Ansätze für einen einfachen Viergelenkkette als ein konkretes Beispiel verwendet und vorgestellt.

2.5 Beispiel: Viergelenkkette

Zur deutliche Erläuterung den verschiedenen Ansätzen der Zwangsbedingungen wird einige Konkrete Beispiele in diesem Abschnitt vorgestellt. Zunächst wird ein einfaches Parallelogramm mit einem unabhängigen Gelenkkoordinate und drei davon abhängigen Gelenkkoordinaten mittels Expliziten Zwangsbedingungen erläutert. Die implizite Zwangsbedingungen des Parallelogramms ist ähnlich wie allgemeine Viergelenkkette. Danach kommt die explizite und die implizite Zwangsbedingungen einer allgemeinen Viergelenkkette, die weiterhin für komplizierten hybriden Robotern bedient. Wegen praktischer Gründen sind zuerst nur die Gelenktypen von parallelen und rotatorischen Achsen in dieser Arbeit berücksichtigt.

Die Kinematik der Viergelenkketten aus rotatorischen Gelenken wurde von mehreren Quellen untersucht. Bevor die kinematische Ansätze gezeigt wird, soll die Viergelenkketten mit der Grashof-Theorie von [Hun78] [CLW05] zunächst erfüllen. Die Voraussetzung gilt:

$$l + s \leq p + q, \quad (2.38)$$

wobei l für die längste Segmentlänge und s für die kürzeste stehen, p und q für die restliche Segmentlänge. $l + s = p + q$ zeigt den Grenzfall einer Viergelenkketten.

2.5.1 Expliziten Zwangsbedingungen für Parallelogramm

Zunächst wird ein einfaches Parallelogramm mit einem unabhängigen Gelenkkoordinate und drei davon abhängigen Gelenkkoordinaten definiert. Das untere Ersatzbild zeigt die Gelenkwinkel und die Segmentlängen.

Die untere Beziehungen werden vom Bild leicht zu entnehmen:

- $q_1 = \phi$: aktive bzw. unabhängige Gelenkkoodinate,

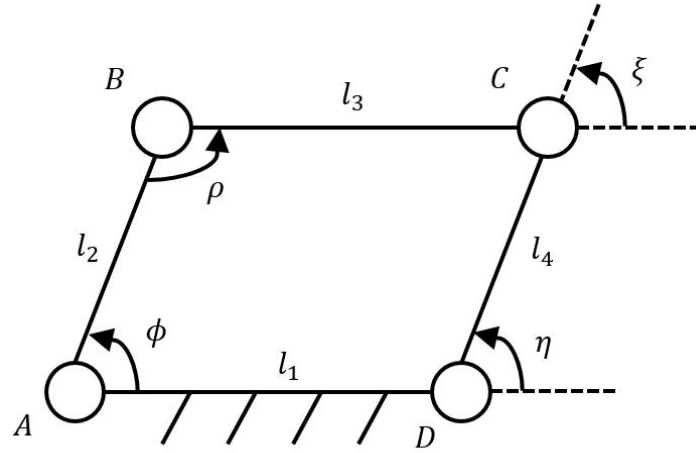


Bild 2.5: Parallelogramm

- $\mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} \rho & \xi & \eta \end{pmatrix}^T$: passive bzw. abhängige Gelenkkoodinaten,
- Segmentlänge gilt: $l_1 = l_3, l_2 = l_4$.

Somit wird auch die Explizite Form den kinematischen Zwangsbedingungen bezüglich der unabhängigen Gelenkkoordinate leicht ausgedrückt:

$$\rho = \pi - \phi \xi = \phi \eta = \phi \quad (2.39)$$

wie die Erläuterung im Abschnitt 2.3.3 gezeigt, erfüllt die obigen Beziehungen die Zusammenhänge der Explizite Zwangsbedingungen durch trigonometrische Elimination:

$$\sin(\mathbf{q}_{2R}) = \mathbf{f}_{R\sin}(\mathbf{q}_1) \quad (2.40)$$

$$\cos(\mathbf{q}_{2R}) = \mathbf{f}_{R\cos}(\mathbf{q}_1) \quad (2.41)$$

Für allgemeine Viergelenkketten kann die explizite Zwangsbedingungen nicht direkt entnommen werden, hier in dieser Arbeit wird der geometrische Ansatz mittels Kreisschnittpunkten in [SLH19] für die explizite Form den Zwangsbedingungen verwendet. Alternativ gibt es noch analytischen Ansätzen wie z.B [WG98], wird die aber nicht in dieser Arbeit erläutert. Die Ermittlung den impliziten Zwangsbedingungen eines Parallelogramms ist ähnlich wie

allgemeinen Viergelenkketten, es wird in weiteren Abschnitt vorgestellt.

2.5.2 Explizite Zwangsbedingungen für allgemeine Viergelenkkette

Zur Ermittlung der expliziten Zwangsbedingungen einer allgemeinen Viergelenkketten wird zunächst ein Ersatzbild existierendes Viergelenkkettesystems vorgestellt:

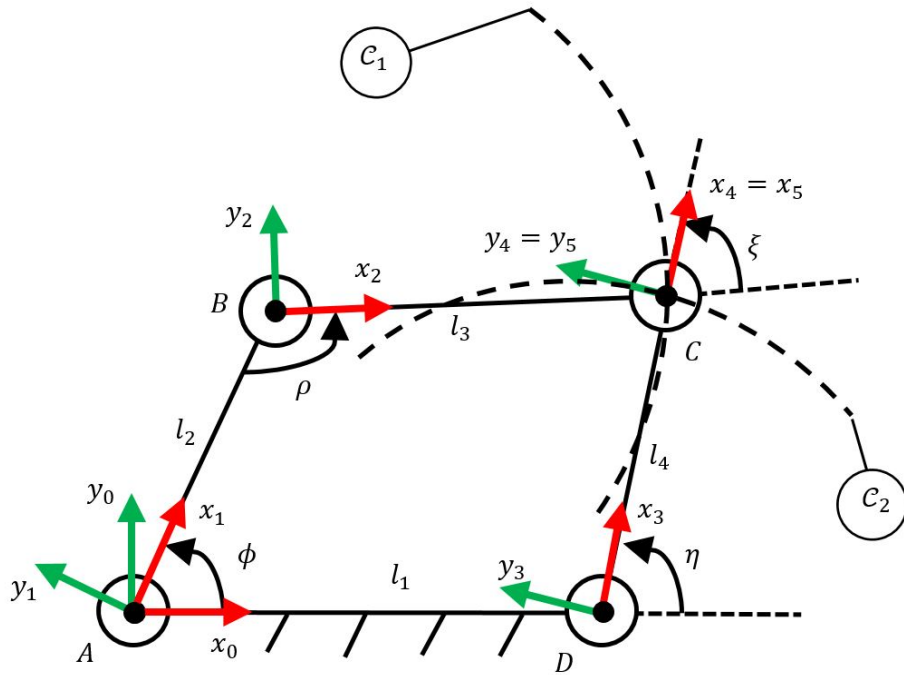


Bild 2.6: Mechanismus einer Viergelenkkette mit körperfesten Koordinatensystemen [Bej18]

Wobei:

- $q_1 = (\phi)$: die aktive bzw. unabhängige Gelenkkoordinate,
- $\mathbf{q}_2 = (\rho \ \xi \ \eta)^T$: die passive bzw. abhängigen Gelenkkoordinaten,
- $\mathbf{P}_{\text{kin}} = (|AB| \ |AD| \ |BC| \ |DC|)^T$: Segmentelängen,
- $(\text{KS})_i$: das i -te körperfeste Koordinatensystem.

Zur Beschreibung der homogenen Transformation der Kinematik unter Berücksichtigung der Vorschriften im Abschnitt 2.2, wird die entsprechende MDH-Tabelle erzeugt. Hiermit wird das Gelenk C als ein Schnittgelenk ausgewählt und die Kette wird dadurch geöffnet. Auf dem

v	i	σ_i	μ_i	β_i	b_i	α_i	a_i	θ_i	d_i
				\mathbf{R}_z	\mathbf{T}_z	\mathbf{R}_x	\mathbf{T}_x	\mathbf{R}_z	\mathbf{T}_z
0	1	0	1	0	0	0	0	ϕ	0
1	2	0	0	0	0	0	$ AB $	$\pi + \rho$	0
0	3	0	0	0	0	0	$ AD $	η	0
2	4	0	0	0	0	0	$ BC $	ξ	0
3	5	2	0	0	0	0	$ DC $	0	0

Tabelle 2.1: MDH-Tabelle der Viergelenkkette aus Bild 2.6

Gelenk C wird ein virtuelles Koordinatensystem $(\text{KS})_5$ definiert, das mit dem körperfesten Koordinatensystem $(\text{KS})_4$ identisch ist. Die MDH-Tabelle lautet dann:

Zur Ermittlung den expliziten Zwangsbedingungen mittels trigonometrischer Elimination wird die Zusammenhänge zwischen den unabhängigen Gelenkkoordinaten und den abhängigen Gelenkkoordinaten im sin- oder cos-Form ausgedrückt. Dazu wird der geometrische Ansatz von [SLH19] mit Hilfe des Kreisschnittpunkts verwendet. Der Kreisschnittpunkt liegt auf dem Schnittgelenk C und wird mit zwei Kreise definiert:

- \mathcal{C}_1 ist der Kreis, dessen Mittelpunkt B und dessen Radius $|BC|$ sind.
- \mathcal{C}_2 ist der Kreis, dessen Mittelpunkt D und dessen Radius $|DC|$ sind.

Durch den zwei Kreise wird der Ortsvektor des Schnittpunkts C umgerechnet. Dazu erfordert es die zwei Kreis-Funktionen mit jeweils dem Mittelpunkt B und D bezüglich des Basiskoordinatensystems $(\text{KS})_0$:

$$\mathcal{C}_1 : ({}_{(0)}\mathbf{x} - {}_{(0)}\mathbf{x}_B)^2 + ({}_{(0)}\mathbf{y} - {}_{(0)}\mathbf{y}_B)^2 = (|BC|)^2, \quad (2.42)$$

$$\mathcal{C}_2 : ({}_{(0)}\mathbf{x} - {}_{(0)}\mathbf{x}_D)^2 + ({}_{(0)}\mathbf{y} - {}_{(0)}\mathbf{y}_D)^2 = (|DC|)^2, \quad (2.43)$$

mit:

$$x_B = |AB| \cos(\phi), y_B = |AB| \sin(\phi), \quad (2.44)$$

$$x_D = |AD|, y_D = 0. \quad (2.45)$$

Die deutliche Erläuterung für die Methode Kreisschnittpunkte ist im Studienarbeit von [Bej18] zu sehen. Hier wird die Ausdrücke der abhängigen Gelenkkoordinaten für die trigonometrische Elimination bezüglich der abhängigen Gelenkkoordinaten vorgestellt. Aus der Ortsvektor ${}_{(0)}\mathbf{r}_{AC,k}$:

$${}_{(0)}\mathbf{r}_{AC,k} = {}_{(0)}\mathbf{r}_{AC,k}(\cos(\phi), \sin(\phi)), \quad (2.46)$$

$${}_{(0)}\mathbf{r}_{AC,2} = {}_{(0)}\mathbf{r}_{AC,2}(\cos(\phi), \sin(\phi), \cos(\rho), \sin(\rho)), \quad (2.47)$$

$${}_{(0)}\mathbf{r}_{AC,3} = {}_{(0)}\mathbf{r}_{AC,3}(\cos(\phi), \sin(\phi), \cos(\rho), \sin(\rho)), \quad (2.48)$$

ist es zu entnehmen:

$$(\cos(\rho), \sin(\rho)) = \mathbf{f}(\cos(\phi), \sin(\phi)), \quad (2.49)$$

$$(\cos(\eta), \sin(\eta)) = \mathbf{f}(\cos(\phi), \sin(\phi)). \quad (2.50)$$

Und unter Anwendung der Winkelsumme eines Viereckes:

$$\xi = \pi - \phi - \rho + \eta, \quad (2.51)$$

ist es zu entnehmen:

$$(\cos(\xi), \sin(\xi)) = \mathbf{f}(\cos(\phi), \sin(\phi)) \quad (2.52)$$

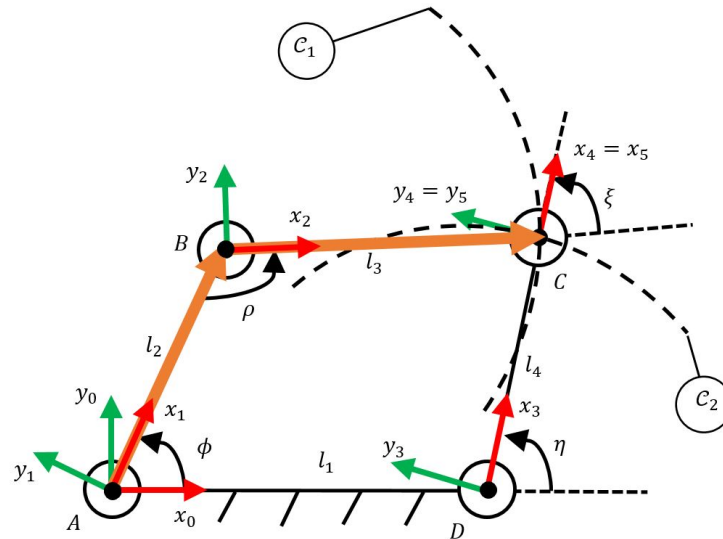


Bild 2.7: Mechanismus einer Viergelenkkette mit eingezeichnetem Ortsvektor ${}_{(0)}\mathbf{r}_{AC,2}$ [Bej18]

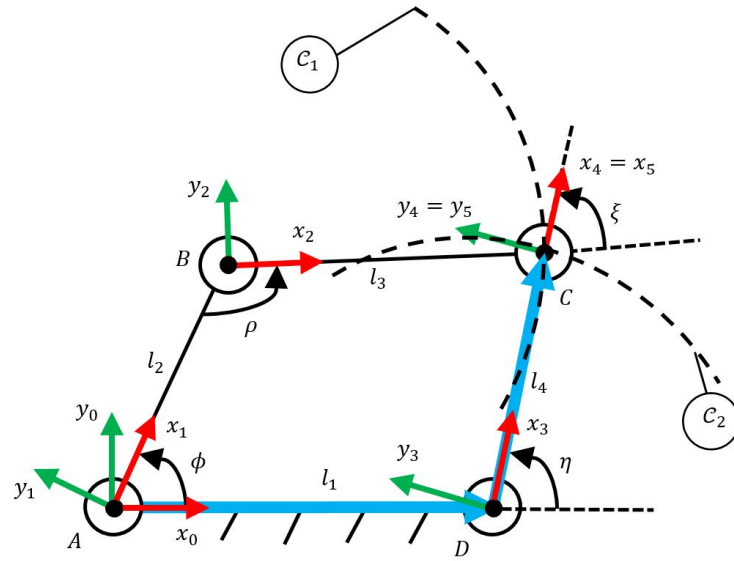


Bild 2.8: Mechanismus einer Viergelenkkette mit eingezeichnetem Ortsvektor ${}_{(0)}\mathbf{r}_{AC,3}$ [Bej18]

Bisher wurde die explizite Zwangsbedingungen der Viergelenkkette mit trigonometrischer Elimination hergeleitet. Die konkreten Zusammenhänge werden in der praktischen Anwendungen mit Hilfe der Software MAPLE implementiert. Mittels der Matlab-Toolbox [Sch19] wird die Kinematik des Roboters sowohl numerisch als auch durch eine Bewegungsanimation des Roboters überprüft.

2.5.3 Implizite Zwangsbedingungen für allgemeine Viergelenkkette

Dieser Abschnitt erläutert die impliziten Zwangsbedingungen der Viergelenkkette, die zur Herstellung der passiven sowie aktiven Jacobi-Matrizen bedienen. Mit Hilfe der MDH-Tabelle werden die homogenen Transformationen durch zwei unterschiedlichen Wege von der Basis bis zum Schnittgelenk verkettet. Somit entsteht die zwei homogene Transformationen zwischen der Basis und der zwei Koordinatensystemen am Schnittgelenk, die miteinander identisch sind. Somit wird die Viergelenkkette im Schnittgelenk mathematisch geschlossen. Es gilt:

$${}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_4 = {}^0T_3 {}^3T_5 \quad (2.53)$$

$${}^0T_4 = {}^0T_5 \quad (2.54)$$

$$\begin{pmatrix} {}^0R_4 & {}_{(0)}\mathbf{r}_4 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^0R_5 & {}_{(0)}\mathbf{r}_5 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

Aus den Rotationsmatrizen und den Ortsvektoren der homogenen Transformationsmatrizen wird die rotatorische implizite Zwangsbedingungen und translatorische implizite Zwangsbedingungen entnommen.

Für die rotatorischen Zwangsbedingungen gilt es:

$${}^4\mathbf{R}_5 = ({}^0\mathbf{R}_4)^T ({}^0\mathbf{R}_5) = \mathbf{R}_z(h_r) \stackrel{!}{=} \mathbf{E} \quad (2.56)$$

$$h_r \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.57)$$

Für die translatorischen Zwangsbedingungen \mathbf{h}_t gilt es:

$$\mathbf{h}_t = {}_{(0)}\mathbf{r}_4 - {}_{(0)}\mathbf{r}_5 = (h_{tx} \ h_{ty} \ 0)^T \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \quad (2.58)$$

Der gesamten impliziten Zwangsbedingungen \mathbf{h} lautet dann:

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = (h_{tx} \ h_{ty} \ h_r)^T \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \quad (2.59)$$

Die von den impliziten Zwangsbedingungen entstehenden Jacobi-Matrizen werden dann mittels existierende Dynamik-Toolbox [Sch19] implementiert.

2.6 Symbolische Kalkulation der Minimalparameter-Regressorform

Die im Abschnitt 2.3 und 2.5 erläuterten kinematischen Ansätze zur expliziten sowie impliziten Zwangsbedingungen werden mit Hilfe von der Software Maple und die existierende Dynamik-Toolbox [Sch19] implementiert. Es ist leicht zu erkennen, dass die davon generierte Dynamik sehr kompliziert und rechenaufwändig ist. Eine Möglichkeit zur Vereinfachung des Dynamik-Modells ist die Minimalparameter-Regressorform, die durch symbolische Kalkulation des Dynamik-Modells erreichen können. Die Anwendung der Minimalparameter-Regressorform für serielle-Robotern wurde von Khalil und Dombre in [KD02] vorgestellt. Die Anwendung für Baumstruktur und geschlossene kinematische Kette sowie Parallelogramm wurde von Khalil und Bennis in [KB95] erläutert. In diesem Abschnitt wird der wichtigste Inhalt der Minimalparameter-Regressorform für geschlossene Kette vorgestellt.

2.6.1 Grundidee zur Elimination und Regruppierung der Inertial-Parameter

Definition der kinematischen Struktur

Zunächst wird die kinematische Struktur der geschlossenen Ketten neu definiert, um die weitere Definitionen anzupassen. Das Ersatzbild gilt dann:

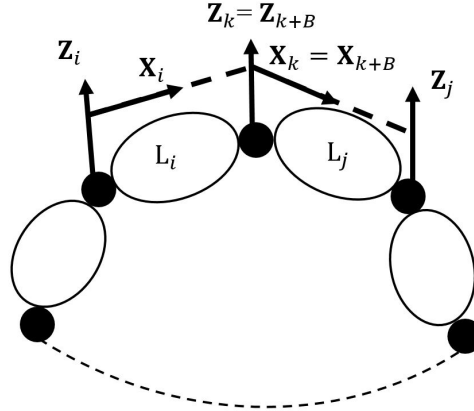


Bild 2.9: Geschlossene kinematische Kette mit körperfesten Koordinatensystemen [KB95]

Die geschlossene Kette wird für die Minimalparameter-Regressorform bei einem Schnittgelenk geöffnet, somit wird die kinematische Struktur als Baumstruktur behandelt. Für jede geöffnete Schnittgelenk k wird ein Koordinatensystem $(KS)_k$ auf ein Glied des Gelenks definiert (Glieder L_i oder L_j). Analog wie im Abschnitt 2.3 erläutert, wird hier ein virtuelles Koordinatensystem $(KS)_{k+B}$ definiert. Für die Reihenfolge der homogenen Transformationen mittels MDH-Notation wird die Reihenfolge der Koordinatensysteme so definiert:

$$v(k) = i, \quad (2.60)$$

$$v(k + B) = j, \quad (2.61)$$

wobei die v Zeichen bedeutet den Vorgänger des Koordinatensystems, k steht für die Index des Koordinatensystems beim Schnittgelenk, B steht für die Anzahl den geschlossenen Ketten des Roboters und $k + B$ ist die Index des virtuellen Koordinatensystems. Das virtuelle Koordinatensystems $(KS)_{k+B}$ ist identisch mit dem körperfesten Koordinatensystem $(KS)_k$ und gilt dann:

$${}^k\mathbf{T}_i \dots {}^j\mathbf{T}_{k+B} = \mathbf{E}_4, \quad (2.62)$$

mit \mathbf{E}_4 die 4×4 Einheitsmatrix.

Linearität der Energie-Modell

Die reduzierte Inertial-Parameter wird von den Standard-Inertial-Parameter rekursiv ermittelt. Der Standard-Inertial-Parameter eines Roboters ist wie im Abschnitt 2.4 definiert:

$$\mathbf{X}^j = \left[X X_j, X Y_j, X Z_j, Y Y_j, Y Z_j, Z Z_j, M X_j, M Y_j, M Z_j, M_j \right]^T. \quad (2.63)$$

Durch Elimination der Parametern, die keine Effekte auf dem Dynamik-Modell haben, oder durch Regruppierung anderen Parametern wird die Basis-Inertial-Parameter erhalten. Es wird dazu die Linearität der kinematischen und potentiellen Energie des Roboters verwendet, um die Inertial-Parameter zu vereinfachen [KB95]. Die gesamte Energiemodell, die den kinetischen Teil und den potentiellen Teil beinhaltet, wird dann in einer lineare Funktion ausgedrückt:

$$H = \sum_{i=1}^{10n} \frac{\partial H}{\partial X_i} X_i = \sum_{i=1}^{10n} h_i X_i = \mathbf{hX}, \quad (2.64)$$

wobei X_i ist der einzelne Inertial-Parameter, $10n$ ist die Anzahl die Standard-Inertial-Parametern, und n ist die Anzahl der beweglichen Glieder. Der Vektor \mathbf{h} steht für die geometrische Koeffizienten den Inertial-Parametern und gilt:

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^1 & \mathbf{h}^2 & \dots & \mathbf{h}^1 \end{bmatrix}. \quad (2.65)$$

Vektor \mathbf{h}^j beinhaltet die geometrische Koeffizienten jeden Inertial-Parametern und gilt:

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_{XX_j} h_{XY_j} h_{XZ_j} h_{YY_j} h_{YZ_j} h_{ZZ_j} h_{MX_j} h_{MY_j} h_{MZ_j} h_{M_j} \end{bmatrix}. \quad (2.66)$$

Parameter ohne Effekte auf dem Dynamikmodell

Ein Inertial-Parameter X_i hat keine Effekte auf dem Dynamikmodell wenn [KD02]:

$$h_i = \text{const.} \quad (2.67)$$

In dieser Situation wird dann $X_j = 0$ behandelt und eliminiert.

Regruppierung der Inertial-Parametern

Zur Regruppierung der Inertial-Parametern X_i auf die anderen Inertial-Parameter X_{i1}, \dots, X_{ir} wird hier die Eigenschaft der Linearität von der Funktion h_i benutzen. Das heißt, wenn:

$$h_i = t_{i1}h_{i1} + \dots + t_{ir}h_{ir} = \sum_{k=1}^r t_{ik}h_{ik} + \text{const} \quad (2.68)$$

mit $t_{ik} = \text{const}$, dann ist der entsprechende Parameter X_i nicht mehr Teil der Basis-Inertial-Parametern, sondern wird es auf den Parameter X_{ik} regrouppiert. Der Parameter X_{ik} wird dann als XR_{ik} ersetzt:

$$XR_{ik} = X_{ik} + t_{ik}X_i, \text{ mit } k = 1, \dots, r \quad (2.69)$$

Hier wird nicht die Gleichung (2.68) benutzt, da die geometrische Koeffizienten \mathbf{h} zu kompliziert und kaum lösbar ist. Eine direkte Lösung von [KB95] wird verwendet um die Basis-Inertial-Parameter zu erreichen.

2.6.2 Basis-Inertial-Parameter der Baumstruktur

Die symbolische Kalkulation der Basis-Inertial-Parameter einer Baumstruktur ist ähnlich wie generale serielle Struktur. Die Inertial-Parameter von jedem Körper werden entlang jeder Branche der Baumstruktur vom Endeffektor bis zur Basis rekursiv umberechnet. Wegen Raumangel wird in dieser Arbeit nur die rotatorische Gelenken vorgestellt. Die kinematische Strukturen und hybride Roboter, die in dieser Arbeit behandelt werden, hat auch nur rotatorische Gelenken. Die Methode zur Elimination oder Regruppierung der Inertial-Parametern ist in [KB95] zu sehen. Mit einem rotatorischen Gelenk, werden die folgende drei Beziehungen immer funktionieren:

$$h_{M_j} = \mathbf{h}^{ii} \lambda_j^{10}, \quad (2.70)$$

$$h_{MZ_j} = \mathbf{h}^{ii} \lambda_j^9, \quad (2.71)$$

$$h_{XX_j} + h_{YY_j} = \mathbf{h}^{ii} \lambda_j^{1+4}, \quad (2.72)$$

wobei

$${}^i\lambda_j^{1+4} = {}^i\lambda_j^1 + {}^i\lambda_j^4, \quad (2.73)$$

mit

$${}^i\lambda_j^{10} = [P_y^2 + P_z^2, -P_x P_y, -P_x P_z, P_x^2 + P_z^2, -P_y P_z, P_x^2 + P_y^2, P_x, P_y, P_z, 1]^T, \quad (2.74)$$

$${}^i\lambda_j^9 = [2P_z C\alpha - 2P_y C\beta S\alpha, P_x C\beta S\alpha - P_y S\beta S\alpha, -P_x C\alpha - P_z S\beta S\alpha, 2P_x S\beta S\alpha + 2P_z C\alpha, -P_y C\alpha + P_z C\beta S\alpha, 2P_x S\beta S\alpha - 2P_y C\beta S\alpha, S\beta S\alpha, -C\beta S\alpha, C\alpha, 0]^T, \quad (2.75)$$

$${}^i\lambda_j^{1+4} = [1 - SS\beta SS\alpha, SC\beta SS\alpha, -S\beta SC\alpha, 1 - CC\beta SS\alpha, C\beta CS\alpha, SS\alpha, 0, 0, 0, 0]^T. \quad (2.76)$$

wobei $SS(\cdot) = \sin^2(\cdot)$, $CC(\cdot) = \cos^2(\cdot)$, $CS(\cdot) = \cos(\cdot)\sin(\cdot)$, P_x , P_y , P_z sind die Komponenten von dem Ortsvektor der entsprechenden homogenen Transformationsmatrix. ${}^i\lambda_j^m$ ist die m -te Spalte von dem 10×10 Matrix ${}^i\lambda_j$. Mit diese Matrix ${}^i\lambda_j$ wird die Inertial-Parameter von dem Körper j bezüglich $(KS)_j$ in $(KS)_i$ umberechnet:

$${}^iX^j = {}^i\lambda_j^j X_j. \quad (2.77)$$

Die Matrix ${}^i\lambda_j$ wird in [KB95] so definiert:

$${}^i\lambda_j = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \mathbf{0}_{3 \times 6} & {}^iR_j & {}^iP_j \\ \mathbf{0}_{1 \times 6} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

Die gesamte ${}^i\lambda_j$ sowie die Vektoren λ_{11} , λ_{12} , λ_{13} sind in [KB95] zu sehen, wegen Raummannigfaltigkeiten werden die Vektoren hier nicht mehr vorgestellt.

Nach dem Regeln der Regruppierung (2.68) und (2.69) sowie die Beziehung der geometrischen Koeffizienten (2.70) (2.71) (2.72) ist zu entnehmen, dass die drei Parameter M_j , MZ_j , YY_j regruppiert werden kann, wie unten vorgestellt [KB95]:

$$XXR_j = XX_j - YY_j, \quad (2.79)$$

$$XR^i = X^i + YY_j {}^i\lambda_j^{1+4} + MZ_j {}^i\lambda_j^9 + M_j {}^i\lambda_j^{10}, \quad (2.80)$$

Die Beziehungen zur Regruppierung der Inertial-Parameter gilt die Reihenfolge von $j =$

$n, \dots, 2$ der jeder Branche.

2.6.3 Basis-Inertial-Parameter der geschlossenen Strukturen

Allgemeine geschlossene Strukturen

Zur Regruppierung der Inertial-Parameter einer geschlossenen Strukturen, wird zunächst die Kette in der Mitte bei einem Schnittgelenk geöffnet. Die Koordinatensysteme $(KS)_k$ und $(KS)_{k+B}$ sind auf dem Schnittgelenk festgelegt und identisch mit einander. Die generale lineare Beziehungen zwischen der geometrische Koeffizienten h einer geschlossenen Strukturen werden dann ermittelt, ohne der Lösung der geometrischen Gleichungen von der geschlossene Kette [KB95].

Zunächst ist die folgende Beziehung zu erkennen:

$$\mathbf{h}^k = \mathbf{h}^{k+B} \quad (2.81)$$

Und hier wird die Definition von dem Ersatz Bild 2.9 verwendet, dass $a(k) = i$ und $a(k+B) = j$. Mit der Beziehungen von (2.70) (2.71) (2.72) und (2.81) werden die folgende drei Beziehungen ermittelt [KB95]:

$$\mathbf{h}^{jj} \lambda_{k+B}^{10} = \mathbf{h}^{ii} \lambda_k^{10}, \quad (2.82)$$

$$\mathbf{h}^{jj} \lambda_{k+B}^9 = \mathbf{h}^{ii} \lambda_k^9, \quad (2.83)$$

$$\mathbf{h}^{jj} \lambda_{k+B}^{1+4} = \mathbf{h}^{ii} \lambda_k^{1+4}, \quad (2.84)$$

Die Vektoren ${}^j \lambda_{k+B}^{10}$, ${}^j \lambda_{k+B}^9$, ${}^j \lambda_{k+B}^{1+4}$ sind konstant und werden von dem Koordinatensystem $(KS)_{k+B}$ definiert, während die Vektoren ${}^j \lambda_k^{10}$, ${}^j \lambda_k^9$, ${}^j \lambda_k^{1+4}$ konstant sind und werden von dem Koordinatensystem $(KS)_k$ definiert. Weiterhin werden unterschiedliche Inertial-Parameter beim rotatorischen Gelenk in vier Situationen regroupiert oder eliminiert:

1. $a_{k+B} \neq 0$ und $S\alpha_{k+B} \neq 0$
2. $a_{k+B} \neq 0$ und $S\alpha_{k+B} = 0$
3. $a_{k+B} = 0$ und $S\alpha_{k+B} \neq 0$
4. $a_{k+B} = 0$ und $S\alpha_{k+B} = 0$

Die geschlossene Ketten, die in dieser Arbeit untersucht werden, sind immer planare Kette, und ihre Achsen sind miteinander immer parallel. Deswegen wird hier nur die zweite Situation angepasst, also $a_{k+B} \neq 0$ und $S\alpha_{k+B} = 0$. Mit einer zusätzlichen Regel $S\beta_{k+B} = 0$ wird dann

Wenn $S\beta_{k+B} = 0$ wird dann in dieser Situation MY_j und YZ_j regroupiert. Mit Hilfe von Beziehung (2.82) wird MY_j regroupiert:

$$\mathbf{XR}^j = \mathbf{X}^j - (1/a_{k+B}S\beta_{k+B})\mathbf{I}_{10}(8)^j\boldsymbol{\lambda}_{k+B}^{10}MY_j, \quad (2.90)$$

$$\mathbf{XR}^i = \mathbf{X}^i + (1/a_{k+B}S\beta_{k+B})^i\boldsymbol{\lambda}_k^{10}MY_j. \quad (2.91)$$

Mit Hilfe von Beziehung (2.83) wird YZ_j regroupiert:

$$\mathbf{XR}^j = \mathbf{X}^j - (1/a_{k+B}S\beta_{k+B})\mathbf{I}_{10}(5)^j\boldsymbol{\lambda}_{k+B}^9YZ_j, \quad (2.92)$$

$$\mathbf{XR}^i = \mathbf{X}^i - (1/a_{k+B}S\beta_{k+B})^i\boldsymbol{\lambda}_k^9YZ_j. \quad (2.93)$$

Hier ist $I_{10}(8)$ analog vom $I_{10}(7)$ eine (10×10) Matrix und beinhaltet die Elemente von (10×10) Einheitsmatrix mit der Ersetzung des Elements (8×8) von Null.

Planare geschlossene Strukturen

Zur Regruppierung oder Elimination der Inertial-Parametern einer planaren geschlossenen Strukturen wird hier noch mal das Ersatzbild gezeigt, um die weitere Beziehungen besser zu erläutern.

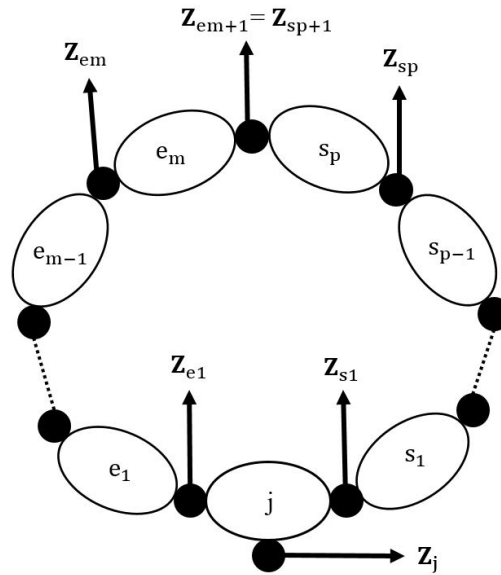


Bild 2.10: Geschlossene kinematische Kette mit körperfesten Koordinatensystemen [KB95]

Die im Ersatzbild gezeigte geschlossene Kette beinhaltet $(m + p + 2)$ Gelenken und $m + p + 1$

Glieder. Durch Öffnung der Kette werden zwei Branche mit parallelen Achsen (e_1, e_2, \dots, e_m) und (s_1, s_2, \dots, s_m). Glied j steht hier für die Basis der Struktur. Die Koordinatensysteme auf dem Schnittgelenk sind e_{m+1} und s_{p+1} .

Die folgende Beziehungen wurde in [KB95] dann erläutert:

$${}^j\omega_j^T \mathbf{A}^j \omega_j + \sum_{i=1}^m [-h_{xzei} P_{yei+1} + h_{yzei} P_{xei+1}] = \sum_{i=1}^P [-h_{xysi} P_{ysi+1} + h_{yysi} P_{xsi+1}], \quad (2.94)$$

mit

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}(\mathbf{z}, \beta_{e1}) \mathbf{R}(\mathbf{x}, \alpha_{e1}) \mathbf{L} \mathbf{R}(\mathbf{x}, -\alpha_{e1}) \mathbf{R}(\mathbf{z}, -\beta_{e1}) [{}^j\hat{\mathbf{H}}_{s1} - {}^j\hat{\mathbf{H}}_{e1}], \quad (2.95)$$

wobei

- die Matrix \mathbf{L} ist eine (3×3) Matrix mit $L_{i,j} = 0$ außer $L_{1,1} = 1$ und $L_{2,2} = 1$,
- $\mathbf{R}(\mathbf{z}, \beta)$ ist die (3×3) Rotationsmatrix um Achse \mathbf{z} mit Rotationswinkel β ,
- $\hat{\mathbf{V}}$ ist eine 3×3 Matrix von dem Kreuzprodukt des Vektors \mathbf{V} .

Mit diese Beziehung (2.94) und die Beziehung (2.83) wird die Regruppierungsbeziehung ermittelt. Beziehung (2.83) wird zunächst in dieser Form umgeschrieben:

$$\mathbf{h}^{em \ em} \lambda_{em+1}^9 = \mathbf{h}^{sp \ sp} \lambda_{sp+1}^9, \quad (2.96)$$

Somit werden XZ_{sp} und YZ_{sp} auf anderen Parametern regroupiert. Es gilt [KB95]:

for $i = 1, \dots, m$:

$$XZR_{ei} = XZ_{ei} - \frac{C\alpha_{sp+1}}{a_{sp+1}} P_{yei+1} (-S\beta_{sp+1} XZ_{sp} + C\beta_{sp+1} YZ_{sp}) \quad (2.97)$$

$$YZR_{ei} = YZ_{ei} + \frac{C\alpha_{sp+1}}{a_{sp+1}} P_{yei+1} (-S\beta_{sp+1} XZ_{sp} + C\beta_{sp+1} YZ_{sp}) \quad (2.98)$$

for $i = 1, \dots, p-1$:

$$XZR_{si} = XZ_{si} + \frac{C\alpha_{sp+1}}{a_{sp+1}} P_{ysi+1} (-S\beta_{sp+1} XZ_{sp} + C\beta_{sp+1} YZ_{sp}) \quad (2.99)$$

$$YZR_{si} = YZ_{si} - \frac{C\alpha_{sp+1}}{a_{sp+1}} P_{ysi+1} (-S\beta_{sp+1} XZ_{sp} + C\beta_{sp+1} YZ_{sp}) \quad (2.100)$$

Parallelogramm

Eine wichtige geschlossene Struktur eines hybriden Roboters ist Parallelogramm. Hier wird auch die spezifische Regeln zur Kalkulation der Inertial-Parametern beim Parallelogramm vorgestellt. Zunächst wird das Ersatzbild eines Parallelogramms gezeigt, das mit weiteren Ausdrücke angepasst ist.

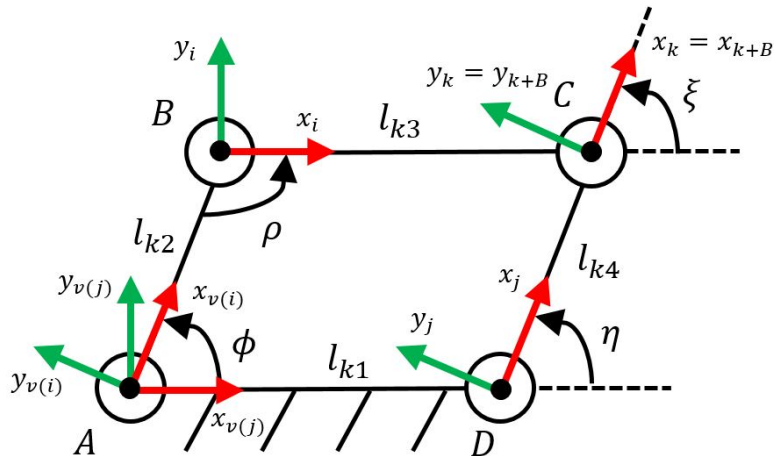


Bild 2.11: Parallelogramm mit körperfesten Koordinatensystemen

Die Reihenfolge der Segmentlängen $L_{k1}, L_{k2}, L_{k3}, L_{k4}$ gilt wie das Ersatzbild gezeigt. Der Schnittgelenk k liegt zwischen dem Glied k_3 und k_4 . Die Reihenfolge der Koordinatensystemen gelten dann:

$$j = v(k + B) \quad (2.101)$$

$$i = v(k) \quad (2.102)$$

Die Regruppierung der Inertial-Parametern gelten zwei Regeln. Zunächst werden die generale Beziehungen von geschlossenen Strukturen berücksichtigt und dann die spezifische Regel für Parallelogramm [KB95]:

1. Mit Hilfe von generale Beziehungen (2.82) für geschlossene Strukturen, die Parameter MX_{k4} wird regruppiert auf die Inertial-Parametern vom Glied k_3 und k_4 . Die Regruppierungsbeziehung gilt wie (2.85) und (2.86), wird hier noch mal vorgestellt mit dem

entsprechenden Index:

$$\mathbf{X}\mathbf{R}^{k4} = \mathbf{X}^{k4} - (1/a_{k+B}C\beta_{k+B})\mathbf{I}_{10}(7)^j\lambda_{k+B}^{10}MX_{k4}, \quad (2.103)$$

$$\mathbf{X}\mathbf{R}^{k3} = \mathbf{X}^{k3} + (1/a_{k+B}C\beta_{k+B})^i\lambda_k^{10}MX_{k4}. \quad (2.104)$$

Mit Beziehung (2.83) wird auch die Regruppierungsbeziehung für YZ_{k4} ermittelt, wird aber hier nicht regroupiert, weil es weiter mit der spezifische Regel für Parallelogramm regroupiert.

2. Spezifische Regel für Parallelogramm: Da die Glieder L_{k1} und L_{k3} parallel miteinander sind, ist die Rotationsmatrix ${}^{k1}\mathbf{A}_{k3}$ zwischen den Koordinatensystemen von der beiden Gliedern konstant. Aus dem Ersatzbild ist zu entnehmen, dass die konstante Rotationsmatrix identisch mit der Einheitsmatrix ist:

$${}^{k1}\mathbf{A}_{k3} = \text{const} = \mathbf{E}, \quad (2.105)$$

$${}^{k2}\mathbf{A}_{k4} = \text{const} = \mathbf{E}. \quad (2.106)$$

Hier wie das Ersatzbild zeigt, ist die Rotationsmatrizen ${}^{k1}\mathbf{A}_{k3}$ und ${}^{k2}\mathbf{A}_{k4}$ identisch mit der Einheitsmatrix. Mit der Tatsache, dass die parallele Glieder beinhaltet die gleiche Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega_{k1} = \omega_{k3}, \quad (2.107)$$

$$\omega_{k2} = \omega_{k4}, \quad (2.108)$$

wird die Inertial-Matrix vom Glied k_4 auf die Inertial-Matrix vom Glied k_2 regroupiert, während die Inertial-Matrix vom Glied k_4 auf die Inertial-Matrix vom Glied k_2 regroupiert wird. Die Regruppierungsbeziehungen gelten wie:

$${}^{k1}\mathbf{J}\mathbf{R}_{k1} = {}^{k1}\mathbf{J}_{k1} + {}^{k1}\mathbf{A}_{k1}{}^{k3}\mathbf{J}_{k3}{}^{k3}\mathbf{A}_{k1}, \quad (2.109)$$

$${}^{k2}\mathbf{J}\mathbf{R}_{k2} = {}^{k2}\mathbf{J}_{k2} + {}^{k2}\mathbf{A}_{k4}{}^{k4}\mathbf{J}_{k4}{}^{k4}\mathbf{A}_{k2}, \quad (2.110)$$

wobei die Matrix ${}^{ki}\mathbf{J}_{ki}$ beinhaltet die Inertialelemente XX, XY, XZ, YY, YZ, ZZ vom Glied k_i bezüglich der Koordinatensystem auf dem Glied k_i .

2.6.4 Praktische Anwendung der symbolische Methode

In der praktischen Anwendung werden die folgende Kalkulationsregeln implementiert, somit wird die meiste Inertial-Parameter ausgefunden, die regroupiert oder eliminiert werden können. Die reste Inertial-Parameter kann als Basis-Inertial-Parameter behandelt. Für die Glieder von

dem Endeffektor bis der Basis gilt (Hier werden nur die Regeln für rotatorische Gelenken vorgestellt) [KB95]:

1. Durch Bestimmung der konstante Koeffiziente werden die entsprechende Inertial-Parameter am Anfang eliminiert.
2. Wenn es serielle Struktur auf einer geschlossenen Struktur gibt, wie z.B. der rotatorische Gelenk, werden die generale Regruppierungsbeziehungen für Baumstruktur verwendet, um die Parameter YY_j , MZ_j , M_j zu regruppieren:

$$XXR_j = XX_j - YY_j, \quad (2.111)$$

$$XR^i = X^i + YY_j^i \lambda_j^{1+4} + MZ_j^i \lambda_j^9 + M_j^i \lambda_j^{10}, \quad (2.112)$$

3. Wenn das Glied j repräsentiert k_4 oder k_3 in einem Parallelogramm oder s_p in einer planaren geschlossenen Kette, wird das Parallelogramm oder die planare geschlossene Kette mit Hilfe von den entsprechenden Regruppierungsbeziehungen geöffnet:
 - Parallelogramm: MX_{k_4} und Inertialmatrix \mathbf{J} werden regruppiert mit Hilfe von (2.103), (2.104) bzw. (2.109), (2.110)
 - Generale geschlossene Kette: XZ_{sp} und YZ_{sp} werden regruppiert mit Hilfe von (2.97), (2.98), (2.99) und (2.100)
4. Nach der Öffnung der geschlossenen Ketten wird die hybride Struktur nun als eine Baumstruktur behandelt. Mit Hilfe von der generalen Regruppierungsbeziehungen werden die Parameter YY_j , MZ_j , M_j regruppiert.
5. Parameter XX_j , XY_j , XZ_j , YZ_j werden eliminiert, wenn j rotatorisch ist und gilt $r1 \leq j < r2$ ($r1$ ist das erste rotatorische Gelenk von der Basis und $r2$ ist das erste rotatorische Gelenk, das nicht parallel mit $r1$ ist.)
6. Parameter MX_j , MY_j , MZ_j haben keine Effekte wenn j rotatorisch ist und gilt $r1 \leq j < r2$, Achse \mathbf{a}_j ist entlang \mathbf{a}_{r1} , und $\mathbf{a}_{r1} // \mathbf{a}_i // \mathbf{a}_{r1} \mathbf{g}$ für alle $i < j$.
7. Nach der Regruppierung werden die regruppierte Inertial-Parameter mit konstante Koeffiziente wieder eliminiert. Der reste Parameter-Vektor steht für die reduzierte sowie minimale Form der Inertial-Parametern.

Die obige vorgestellte Synthese werden mit Hilfe der Software Maple implementiert und das Ergebnis der reduzierten Inertial-Parameter von Inertial-Parameter als Matlab-Code expotiert. Beim konkreten Beispiel werden dann die reduzierte Inertial-Parameter mit Hilfe einer numerische Methode von [Gau90] überprüft. Die numerische Methode wurde auch in [SC14] verfolgt und verwendet.

3 Modellierung seriell-hybrider Roboter

In diesem Kapitel werden zwei unterschiedliche hybride Systeme mit expliziten sowie impliziten kinematischen Ansätzen modelliert. Die Kinematik dient zum Dynamik-Modell, das in nächstem Kapitel reduziert sowie minimiert wird. Das erste System basiert auf die einfache Viergelenkkette mit einem zusätzlichen Gelenk auf der Basis. Das zweite System aus KUKA (KR-700PA) besteht aus zwei Viergelenkketten [KUK].

3.1 Modellierung einer Viergelenkkette mit rotatorischer Basis

In diesem Abschnitt wird die Kinematik einer Viergelenkkette auf einer rotatorischen Basis vorgestellt, die grundsätzlich identischen wie das Beispiel im Abschnitt 2.5.4. Das Ersatzbild ist wie unten:

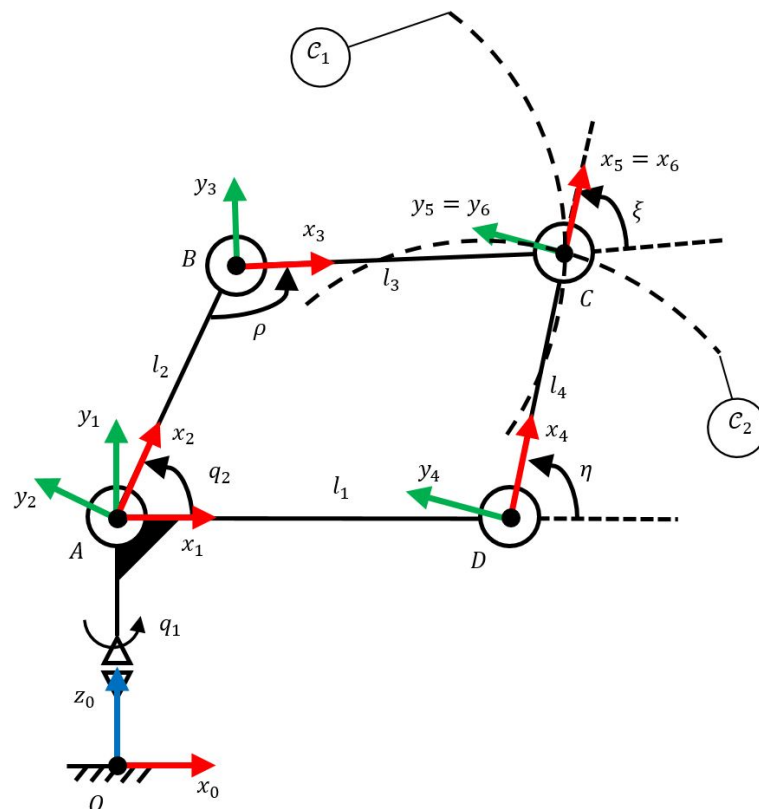


Bild 3.1: Mechanismus einer Viergelenkkette auf einer rotatorischen Basis mit körperfesten Koordinatensystemen

Wobei:

- $\mathbf{q}_1 = (q_1, q_2)^T$: die aktive bzw. unabhängige Gelenkkoordinate,
- $\mathbf{q}_2 = (\rho, \xi, \eta)^T$: die passive bzw. abhängigen Gelenkkoordinaten,
- $\mathbf{P}_{\text{kin}} = (|OA|, |AD|, |AB|, |BC|, |DC|)^T$: Segmentelängen, die mit der Grashof-Theorie erfüllt.
- $(\text{KS})_i$: das i -te körperfeste Koordinatensystem.

Zur Beschreibung der homogenen Transformation wird das Gelenk C als ein Schnittgelenk ausgewählt und die Kette wird dadurch geöffnet. Auf dem Gelenk C wird ein virtuelles Koordinatensystem $(\text{KS})_6$ definiert, das mit dem körperfesten Koordinatensystem $(\text{KS})_5$ identisch ist. Die MDH-Tabelle lautet dann:

v	i	σ_i	μ_i	β_i	b_i	α_i	a_i	θ_i	d_i
				\mathbf{R}_z	\mathbf{T}_z	\mathbf{R}_x	\mathbf{T}_x	\mathbf{R}_z	\mathbf{T}_z
0	1	0	1	0	0	$\frac{\pi}{2}$	0	q_1	$ OA $
1	2	0	1	0	0	0	0	q_2	0
2	3	0	0	0	0	0	$ AB $	$\pi + \rho$	0
1	4	0	0	0	0	0	$ AD $	η	0
3	5	0	0	0	0	0	$ BC $	ξ	0
4	6	2	0	0	0	0	$ DC $	0	0

Tabelle 3.1: MDH-Tabelle der Viergelenkkette mit einer rotatorischen Basis

3.1.1 Explizite Zwangsbedingungen

Zur expliziten Form der Zwangsbedingungen mit trigonometrischen Elimination werden die Kreisschnittmethode von [SLH19] verwendet. Der Kreisschnittpunkt liegt auf dem Schnittgelenk C und wird mit zwei Kreise definiert:

- \mathcal{C}_1 ist der Kreis, dessen Mittelpunkt B und dessen Radius $|BC|$ sind.
- \mathcal{C}_2 ist der Kreis, dessen Mittelpunkt D und dessen Radius $|DC|$ sind.

Durch den zwei Kreise wird der Ortsvektor des Schnittpunkts C umgerechnet. Dazu erfordert es die zwei Kreis-Funktionen mit jeweils dem Mittelpunkt B und D bezüglich des Koordinatensystems $(KS)_1$:

$$\mathcal{C}_1 : ({}_{(1)}\mathbf{x} - {}_{(1)}\mathbf{x}_B)^2 + ({}_{(1)}\mathbf{y} - {}_{(1)}\mathbf{y}_B)^2 = (|BC|)^2, \quad (3.1)$$

$$\mathcal{C}_2 : ({}_{(1)}\mathbf{x} - {}_{(1)}\mathbf{x}_D)^2 + ({}_{(1)}\mathbf{y} - {}_{(1)}\mathbf{y}_D)^2 = (|DC|)^2, \quad (3.2)$$

mit

$${}_{(1)}\mathbf{x}_B = |AB| \cos(\phi), {}_{(1)}\mathbf{y}_B = |AB| \sin(\phi), \quad (3.3)$$

$${}_{(1)}\mathbf{x}_D = |AD|, {}_{(1)}\mathbf{y}_D = 0. \quad (3.4)$$

Der Ortsvektor des Schnittpunkt C bezüglich des Koordinatensystems $(KS)_1$ gilt den folgenden Ausdruck:

$${}_{(1)}\mathbf{r}_{AC,k} = {}_{(1)}\mathbf{r}_{AC,k}(\cos(\phi), \sin(\phi)). \quad (3.5)$$

Durch die zwei unterschiedliche Wege in dem Bild 3.2 werden der Ortsvektor ${}_{(1)}\mathbf{r}_{AC}$ bezüglich des Koordinatensystems $(KS)_1$ mit Hilfe von MDH-Tabelle ermittelt:

$${}_{(0)}\mathbf{r}_{AC,2} = {}_{(0)}\mathbf{r}_{AC,2}(\cos(\phi), \sin(\phi), \cos(\rho), \sin(\rho)), \quad (3.6)$$

$${}_{(0)}\mathbf{r}_{AC,3} = {}_{(0)}\mathbf{r}_{AC,3}(\cos(\phi), \sin(\phi), \cos(\eta), \sin(\eta)). \quad (3.7)$$

Somit werden die abhängige Gelenkkoordinaten ρ , η , ξ bezüglich die unabhängige Gelenkkoordinaten ϕ in trigonometrischer Form ausgedrückt:

$$(\cos(\rho), \sin(\rho)) = \mathbf{f}(\cos(\phi), \sin(\phi)), \quad (3.8)$$

$$(\cos(\eta), \sin(\eta)) = \mathbf{f}(\cos(\phi), \sin(\phi)). \quad (3.9)$$

Und unter Anwendung der Winkelsumme eines Viereckes wird die letzte abhängige Gelenkordinate ξ bestimmt:

$$\xi = \pi - \phi - \rho + \eta, \quad (3.10)$$

somit lautet die trigonometrische Form von Gelenkordinate ξ :

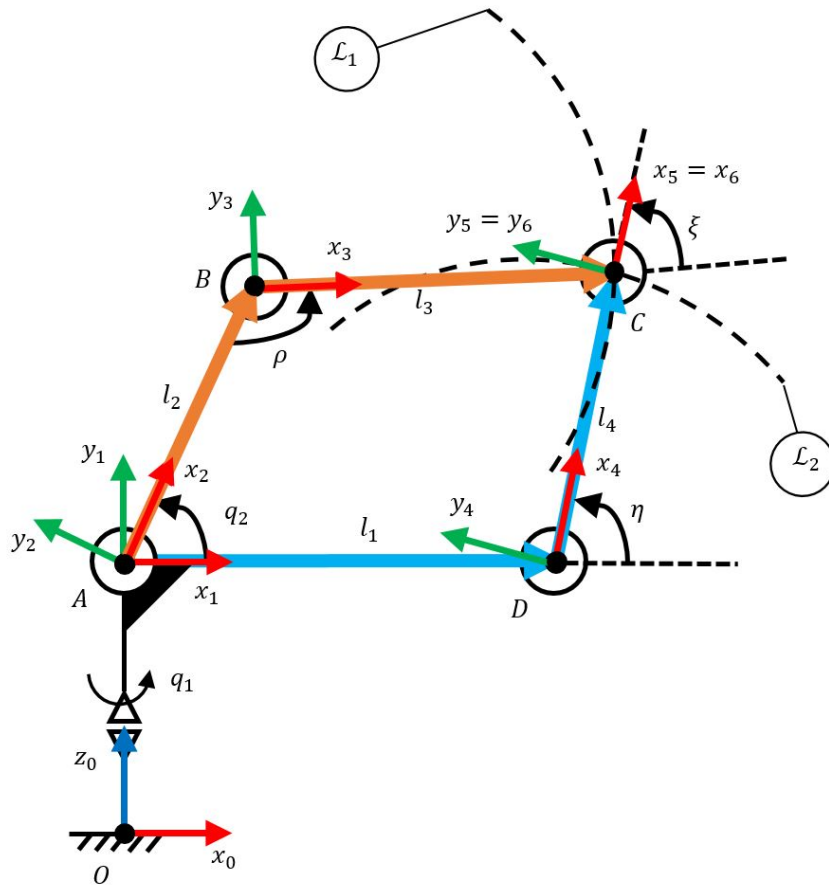


Bild 3.2: Mechanismus der Viergelenkkette mit eingezeichnetem Ortsvektor ${}^{(1)}\mathbf{r}_{AC,2}$ und ${}^{(1)}\mathbf{r}_{AC,3}$

$$\cos(\xi) = -(\cos(\phi) \cos(\phi - \eta) - \sin(\phi) \sin(\phi - \eta)), \quad (3.11)$$

$$\sin(\xi) = (\sin(\phi) \cos(\phi - \eta) + \cos(\phi) \sin(\phi - \eta)), \quad (3.12)$$

mit

$$\cos(\phi - \eta) = \cos(\phi) \cos(\eta) + \sin(\phi) \sin(\eta), \quad (3.13)$$

$$\sin(\phi - \eta) = \sin(\phi) \cos(\eta) - \cos(\phi) \sin(\eta). \quad (3.14)$$

Die ermittelte explizite Zwangsbedingungen wurde mit Hilfe von der Software Maple implementiert und das Ergebnis als Matlab-Code expotiert. Die Kinematik wird sowohl numerisch

als auch mit Hilfe einer Animation der Strukturen überprüft. Die Implementierung wurde in der Umgebung von der existierenden Dynamik-Toolbox [Sch19] ermöglicht.

3.1.2 Implizite Zwangsbedingungen

In diesem Abschnitt wird die implizite Zwangsbedingungen der Vergelenkette vorgestellt, die zur Herstellung der passiven sowie aktiven Jacobi-Matrizen für die Dynamik bedienen. Mit Hilfe der MDH-Tabelle werden die homogenen Transformationen durch zwei unterschiedlichen Wege von der Basis bis zum Schnittgelenk verkettet. Somit entsteht die zwei homogene Transformationen zwischen der Basis und der zwei Koordinatensystemen am Schnittgelenk, die miteinander identisch sind. Somit wird die Viergelenkkette im Schnittgelenk mathematisch geschlossen. Es gilt:

$${}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_5 = {}^1T_4 {}^4T_6 \quad (3.15)$$

$${}^1T_5 = {}^1T_6 \quad (3.16)$$

$$\begin{pmatrix} {}^1R_5 & (1)r_5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^1R_6 & (1)r_6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Aus den Rotationsmatrizen und den Ortsvektoren der homogenen Transformationsmatrizen wird die rotatorische implizite Zwangsbedingungen und translatorische implizite Zwangsbedingungen entnommen.

Für die rotatorischen Zwangsbedingungen gilt es:

$${}^5R_6 = ({}^1R_5)^T ({}^1R_6) = R_z(h_r) \stackrel{!}{=} E \quad (3.18)$$

$$h_r \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.19)$$

Für die translatorischen Zwangsbedingungen h_t gilt es:

$$h_t = (1)r_5 - (1)r_6 = (h_{tx} \ h_{ty} \ 0)^T \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.20)$$

Der gesamten impliziten Zwangsbedingungen h lautet dann:

$$h(q_1, q_2) = (h_{tx} \ h_{ty} \ h_r)^T \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.21)$$

Die von den impliziten Zwangsbedingungen entstehenden Jacobi-Matrizen sowie die weitergehende Dynamik werden dann mittels existierende Dynamik-Toolbox [Sch19] implementiert.

3.2 Modellierung eines Palettierroboters mit zwei Viergelenkketten

In diesem Abschnitt wird die kinematische Zwangsbedingungen des im Bild 3.3 gezeigten Palettierroboters KR-700PA von KUKA [KUK] betrachtet. Diese Struktur besteht aus zwei Viergelenkketten ($A-B-C-D$) und ($B-G-P-E$). Wie das Ersatzbild dargestellt:

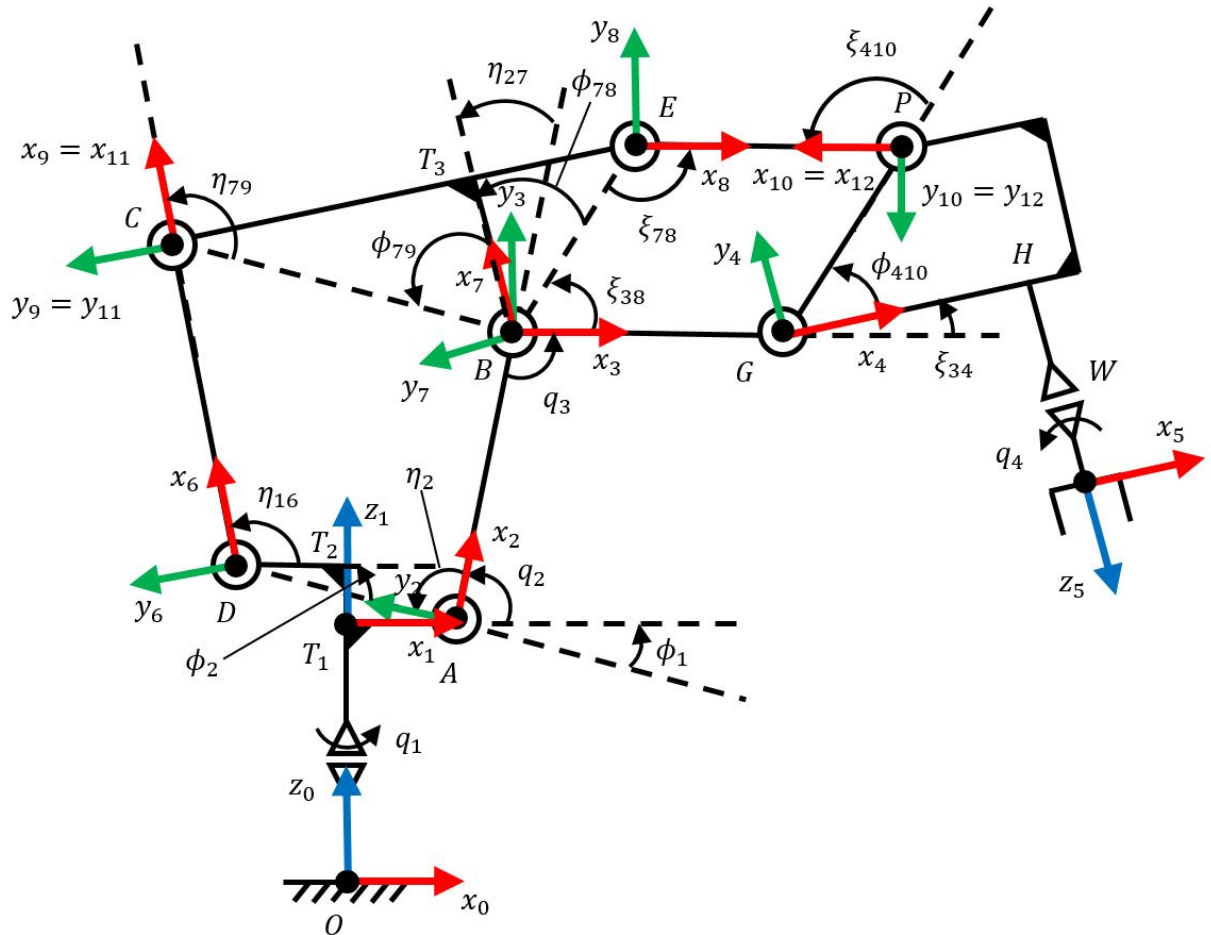


Bild 3.3: Mechanismus des Palettierroboters KR700PA mit eingezeichneten Koordinatensystemen

Der Vektor der Gelenkkoordinaten lautet:

- unabhängige Gelenkkoordinaten: $\mathbf{q}_1 = (q_1, q_2, q_3, q_4)^T$
- abhängige Gelenkkoordinaten: $\mathbf{q}_1 = (\eta_{16}, \eta_{27}, \eta_{79}, \xi_{34}, \xi_{78}, \xi_{410})^T$
- konstante Winkel: $(\phi_1, \phi_2, \phi_{78}, \phi_{79}, \phi_{410})^T$

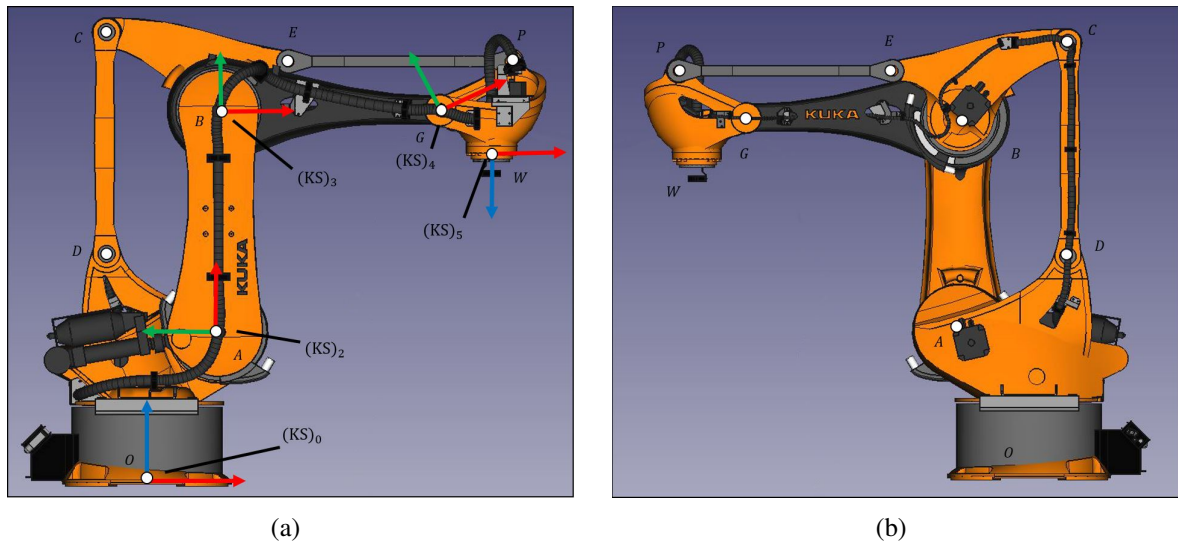


Bild 3.4: CAD-Modell des KR-700PA, links: Vorderansicht, rechts: Hinteransicht. [KUK]

v	i	σ_i	μ_i	β_i	b_i	α_i	a_i	θ_i	d_i
				R_z	T_z	R_x	T_x	R_z	T_z
0	1	0	1	0	0	0	0	q_1	OT1
1	2	0	1	0	0	$\frac{\pi}{2}$	T1A	q_2	0
2	3	0	1	0	0	0	AB	$q_3 + \pi$	0
3	4	0	0	0	0	0	BG	ξ_{34}	0
4	5	0	1	0	0	$\frac{\pi}{2}$	GH	q_4	HW
1	6	0	0	0	T1T2	$\frac{\pi}{2}$	- DT2	η_{16}	0
2	7	0	0	0	0	0	AB	η_{27}	0
7	8	0	0	$-\phi_{78}$	0	0	BE	$\xi_{78} + \pi$	0
7	9	0	0	ϕ_{79}	0	0	BC	$\eta_{79} + \pi$	0
4	10	0	0	ϕ_{410}	0	0	GP	ξ_{410}	0
6	11	2	0	0	0	0	DC	0	0
8	12	2	0	π	0	0	- EP	0	0

Tabelle 3.2: MDH-Tabelle der Palletierroboter KR-700PA

Zur Unterscheidungen zwischen den Winkeln der drei Ketten werden η für die Winkel der Kette (A-B-C-D) und ξ für die Winkel der Kette (B-G-P-E) verwendet. Auf der Basis der Kinematik von Viergelenkkette werden die kinematische Zwangsbedingungen für dieses System ermittelt.

3.2.1 Explizite Zwangsbedingungen

Zunächst wird die explizite Zwangsbedingungen mit trigonometrischer Elimination ermittelt, die im Abschnitt 2.5 erläutert wurde. Aufbauend auf dem Beispiel Viergelenkkette vom Abschnitt 2.5.4 werden die entsprechenden Winkel in der zwei Viergelenkketten des Palletierroboters analog ermittelt. Dazu dienen hier die Hilfswinkel zur Ermittlung der entsprechenden Winkel von der Viergelenkkette.

Viergelenkkette (A-B-C-D)

Für Viergelenkkette (A-B-C-D) wird zuerst die Hilfswinkel η_2 bezüglich der unabhängigen Gelenkkoordinate in trigonometrischer Form ausgedrückt:

$$\eta_2 = \pi - q_2 - \phi_2, \quad (3.22)$$

$$\cos(\eta_2) = \sin(q_2) \sin(\phi_2) - \cos(q_2) \cos(\phi_2), \quad (3.23)$$

$$\sin(\eta_2) = \sin(q_2) \cos(\phi_2) + \cos(q_2) \sin(\phi_2). \quad (3.24)$$

Zur Ermittlung der abhängigen Winkel einer Viergelenkkette wird die geometrische Methode von Kreisschnittpunkt verwendet. Hier in der Viergelenkkette (A-B-C-D) ist der Punkt C als Schnittpunkt behandelt. Für die Kreise \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_2 gilt:

- \mathcal{C}_1 : Kreis mit dem Mittelpunkt D und dem Radius $|DC|$,
- \mathcal{C}_2 : Kreis mit dem Mittelpunkt B und dem Radius $|BC|$.

Die Hilfswinkel $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$, gelten dann die folgende Korrespondenz mit der Winkel von einer generalen Viergelenkkette ϕ, ρ, η, ξ :

$$\eta_2 \hat{=} \phi, \quad (3.25)$$

$$\eta_1 \hat{=} \rho, \quad (3.26)$$

$$\eta_3 \hat{=} \eta, \quad (3.27)$$

$$\eta_4 \hat{=} \xi. \quad (3.28)$$

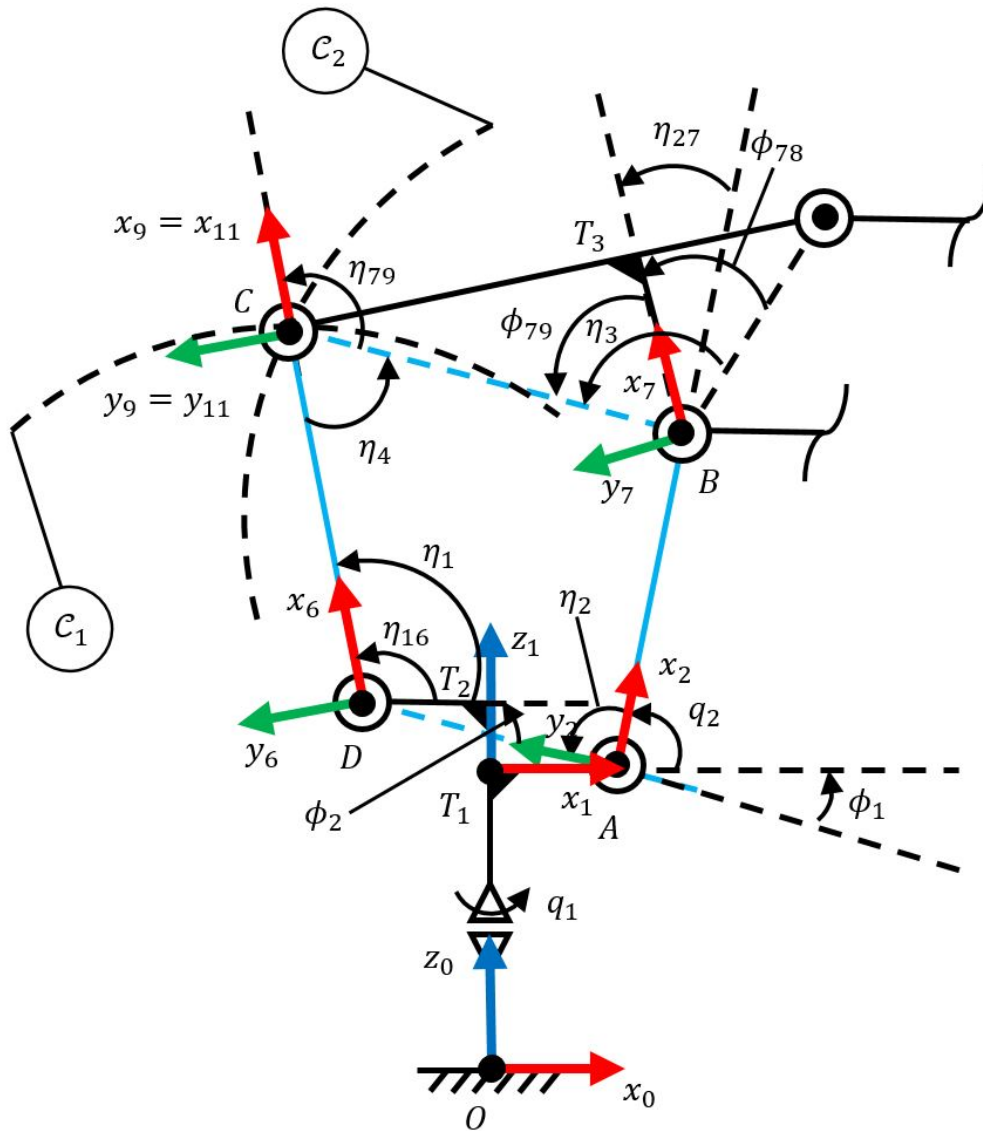


Bild 3.5: Viergelenkkette (A-B-C-D) des Palettierroboters KR700PA mit eingezeichneten Hilfswinkel

Wie es in Ersatzbild 3.5 vorgestellt, werden die abhängige Winkel in der Viergelenkkette (A-B-C-D) mit der Hilfswinkel η_1 , η_3 , η_4 ausgedrückt:

$$\begin{aligned}
 \eta_{16} &= \eta_1 - \phi_1, \\
 \cos(\eta_{16}) &= \cos(\eta_1) \cos(\phi_1) + \sin(\eta_1) \sin(\phi_1), \\
 \sin(\eta_{16}) &= \sin(\eta_1) \cos(\phi_1) - \cos(\eta_1) \sin(\phi_1),
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{79} &= \pi - \eta_4, \\
\cos(\eta_{79}) &= -\cos(\eta_4), \\
\sin(\eta_{79}) &= \sin(\eta_4),
\end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{27} &= \eta_3 - \phi_{79}, \\
\cos(\eta_{27}) &= \cos(\eta_3) \cos(\phi_{79}) + \sin(\eta_3) \sin(\phi_{79}), \\
\sin(\eta_{27}) &= \sin(\eta_3) \cos(\phi_{79}) - \cos(\eta_3) \sin(\phi_{79}).
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Mit Hilfe der explizite Zwangsbedingungen in trigonometrische Elimination einer generalen Viergelenkkette werden dann die explizite Zwangsbedingungen für Viergelenkkette (A-B-C-D) auch ausgedrückt:

$$(\cos(\eta_{16}), \sin(\eta_{16})) = f(\cos(q_2), \sin(q_2)), \tag{3.32}$$

$$(\cos(\eta_{79}), \sin(\eta_{79})) = f(\cos(q_2), \sin(q_2)), \tag{3.33}$$

$$(\cos(\eta_{27}), \sin(\eta_{27})) = f(\cos(q_2), \sin(q_2)). \tag{3.34}$$

Viergelenkkette (B-E-P-G)

Analog wird für Viergelenkkette (B-E-P-G) zuerst die Hilfswinkel ξ_2 bezüglich der unabhängigen Gelenkkoordinate in trigonometrischer Form ausgedrückt. Hier wird die Ausdrücke von η_3 bezüglich der unabhängigen Gelenkkoordinate q_2 verwendet:

$$\begin{aligned}
\xi_2 &= \xi_{38} = \pi - q_3 - (\phi_{78} - \eta_{27}) \\
&= \pi - q_3 - (\phi_{78} - (\eta_3 - \phi_{79})) \\
&= \pi - (\phi_{78} + \phi_{79}) + (\eta_3 - q_3), \\
\cos(\xi_2) &= -\cos((\phi_{78} + \phi_{79}) - (\eta_3 - q_3)) \\
&= f(\cos(q_2), \sin(q_2), \cos(q_3), \sin(q_3)), \\
\sin(\xi_2) &= \sin((\phi_{78} + \phi_{79}) - (\eta_3 - q_3)) \\
&= f(\cos(q_2), \sin(q_2), \cos(q_3), \sin(q_3)),
\end{aligned} \tag{3.35}$$

(3.36)

In der Viergelenkkette (B-E-P-G) ist der Punkt C als Schnittpunkt behandelt. Für die Kreise \mathcal{C}_3 und \mathcal{C}_4 gilt:

- \mathcal{C}_3 : Kreis mit dem Mittelpunkt E und dem Radius $|EP|$,
- \mathcal{C}_4 : Kreis mit dem Mittelpunkt G und dem Radius $|GP|$.

Die Hilfswinkel $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, gelten dann die folgende Korrespondenz mit der Winkel von einer generalen Viergelenkkette ϕ, ρ, η, ξ :

$$\xi_2 \hat{=} \phi, \quad (3.37)$$

$$\xi_1 \hat{=} \rho, \quad (3.38)$$

$$\xi_3 \hat{=} \eta, \quad (3.39)$$

$$\xi_4 \hat{=} \xi. \quad (3.40)$$

Wie es in Ersatzbild 3.6 vorgestellt, werden die abhängige Winkel in der Viergelenkkette (B-E-P-G) mit der Hilfswinkel ξ_1, ξ_3, ξ_4 ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \xi_{78} &= \xi_1, \\ \cos(\xi_{78}) &= \cos(\xi_1), \\ \sin(\xi_{78}) &= \sin(\xi_1), \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \xi_{34} &= \xi_3 - \phi_{410}, \\ \cos(\xi_{34}) &= \cos(\xi_3) \cos(\phi_{410}) + \sin(\xi_3) \sin(\phi_{410}), \\ \sin(\xi_{34}) &= \sin(\xi_3) \cos(\phi_{410}) - \cos(\xi_3) \sin(\phi_{410}), \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \xi_{410} &= \pi - \xi_4, \\ \cos(\xi_{410}) &= -\cos(\xi_4), \\ \sin(\xi_{410}) &= \sin(\xi_4). \end{aligned} \quad (3.43)$$

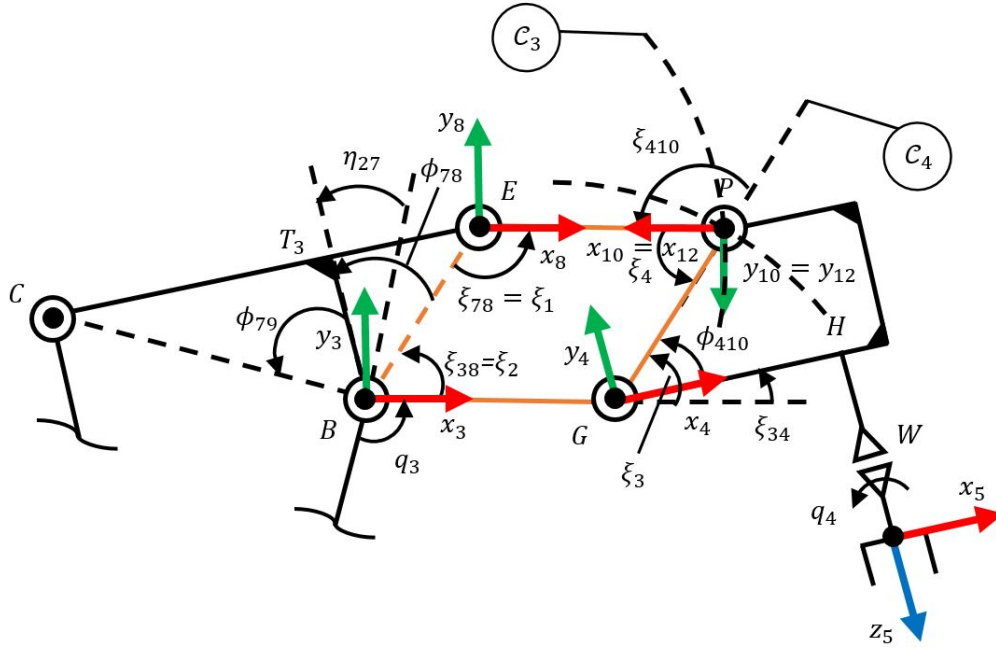


Bild 3.6: Viergelenkkette (B-E-P-G) des Palettierroboters KR700PA mit eingezeichneten Hilfs-winkel

Mit Hilfe der explizite Zwangsbedingungen in trigonometrische Elimination einer generalen Viergelenkkette werden dann die explizite Zwangsbedingungen für Viergelenkkette (B-E-P-G) auch ausgedrückt:

$$(\cos(\xi_{78}), \sin(\xi_{78})) = f(\cos(q_2), \sin(q_2), \cos(q_3), \sin(q_3)), \quad (3.44)$$

$$(\cos(\xi_{34}), \sin(\xi_{34})) = f(\cos(q_2), \sin(q_2), \cos(q_3), \sin(q_3)), \quad (3.45)$$

$$(\cos(\xi_{410}), \sin(\xi_{410})) = f(\cos(q_2), \sin(q_2), \cos(q_3), \sin(q_3)). \quad (3.46)$$

3.2.2 Implizite Zwangsbedingungen

Zur Überprüfung der Richtigkeit von expliziten Zwangsbedingungen werden hier auch die implizite Zwangsbedingungen implementiert. Der Palettierroboter werden wieder in zwei Viergelenkketten getrennt. Die entsprechende implizite Zwangsbedingungen werden auf der Basis vom Abschnitt 2.5.3 ermittelt.

Viergelenkkette: A-B-C-D

Nach der MDH-Tabelle 3.2 und dem Bild 3.5 wird die Viergelenkkette (A-B-C-D) in dem Schnittpunkt C durch die identischen Koordinatensystemen $(KS)_9$ und $(KS)_{11}$ verbunden. Die Kinematik wird dann somit beschränkt. Die homogene Transformationskette durch die zwei Wege von dem $(KS)_1$ bis zum Schnittgelenk der Viergelenkkette werden wie folgende Ausdrücke verbunden:

$${}^1T_2 {}^2T_7 {}^7T_9 = {}^1T_6 {}^6T_{11} \quad (3.47)$$

$${}^1T_9 = {}^1T_{11} \quad (3.48)$$

$$\begin{pmatrix} {}^1R_9 & {}_{(1)}r_9 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^1R_{11} & {}_{(1)}r_{11} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Aus den Rotationsmatrizen und den Ortsvektoren der homogenen Transformationsmatrizen wird die rotatorische implizite Zwangsbedingungen und translatorische implizite Zwangsbedingungen entnommen.

Für die rotatorischen Zwangsbedingungen gilt es:

$${}^9R_{11} = ({}^1R_9)^T ({}^1R_{11}) = R_z(h_r) \stackrel{!}{=} E \quad (3.50)$$

$$h_r \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.51)$$

Für die translatorischen Zwangsbedingungen h_t gilt es:

$$h_t = {}_{(1)}r_9 - {}_{(1)}r_{11} = (h_{tx} \ h_{ty} \ 0)^T \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \quad (3.52)$$

Der impliziten Zwangsbedingungen der Viergelenkkette (A-B-C-D) h lautet dann:

$$h(q_1, q_2) = (h_{tx} \ h_{ty} \ h_r)^T \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \quad (3.53)$$

Viergelenkkette: B-E-P-G

Nach der MDH-Tabelle 3.2 und dem Bild 3.5 wird die Viergelenkkette (B-E-P-G) in dem Schnittpunkt P durch die identischen Koordinatensystemen $(KS)_{10}$ und $(KS)_{12}$ verbunden. Die Kinematik wird dann somit beschränkt. Die homogene Transformationskette durch die zwei Wege von dem $(KS)_2$ bis zum Schnittgelenk der Viergelenkkette werden wie folgende

Ausdrücke verbunden:

$${}^2T_7 {}^7T_8 {}^8T_{12} = {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_{10} \quad (3.54)$$

$${}^2T_{12} = {}^2T_{10} \quad (3.55)$$

$$\begin{pmatrix} {}^2R_{12} & {}^{(2)}r_{12} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^2R_{10} & {}^{(2)}r_{10} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

Aus den Rotationsmatrizen und den Ortsvektoren der homogenen Transformationsmatrizen wird die rotatorische implizite Zwangsbedingungen und translatorische implizite Zwangsbedingungen entnommen.

Für die rotatorischen Zwangsbedingungen gilt es:

$${}^{10}R_{12} = ({}^2R_{10})^T ({}^2R_{12}) = R_z(h_r) \stackrel{!}{=} E \quad (3.57)$$

$$h_r \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.58)$$

Für die translatorischen Zwangsbedingungen \mathbf{h}_t gilt es:

$$\mathbf{h}_t = {}^{(2)}r_{10} - {}^{(2)}r_{12} = (h_{tx} \ h_{ty} \ 0)^T \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \quad (3.59)$$

Der impliziten Zwangsbedingungen der Viergelenkkette (B-E-P-G) \mathbf{h} lautet dann:

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = (h_{tx} \ h_{ty} \ h_r)^T \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \quad (3.60)$$

3.3 Prüfung der Richtigkeit der Ergebnisse

Für die in diesem Kapitel untersuchten Roboter werden die Kinematik und davon generierte Dynamik auf Richtigkeit geprüft. Für jeden Roboter wird auch eine Animation mittels MATLAB generiert, um die Koordinatentransformation überzuprüfen. Eine Kreuzüberprüfung für unterschiedliche Ansätze wird durchgeführt, wenn die mittels dem Ansatz der direkten Elimination berechnete Winkel in den Vektor der impliziten Zwangsbedingungen sowie die differentiellen Zusammenhängen eingesetzt, dann werden die beiden den Nullvektor geliefert. Weiterhin wird auch die Terme der Dynamik aus den unterschiedlichen kinematischen Ansätzen miteinander verglichen [Bej18]:

- für Massenmatrix:

$$\mathbf{M}_{1,IC}(\mathbf{q}_1) - \mathbf{M}_{1,TE}(\mathbf{q}_1) = \mathbf{0}, \quad (3.61)$$

$$\mathbf{M}_{1,IC}(\mathbf{q}_1) - \mathbf{M}_{1,DE}(\mathbf{q}_1) = \mathbf{0}, \quad (3.62)$$

- für Coriolis- und Zentrifugalterme:

$$\mathbf{c}_{1,IC}(\mathbf{q}_1) - \mathbf{c}_{1,TE}(\mathbf{q}_1) = \mathbf{0}, \quad (3.63)$$

$$\mathbf{c}_{1,IC}(\mathbf{q}_1) - \mathbf{c}_{1,DE}(\mathbf{q}_1) = \mathbf{0}, \quad (3.64)$$

- für Gravitationsterme:

$$\mathbf{g}_{1,IC}(\mathbf{q}_1) - \mathbf{g}_{1,TE}(\mathbf{q}_1) = \mathbf{0}, \quad (3.65)$$

$$\mathbf{g}_{1,IC}(\mathbf{q}_1) - \mathbf{g}_{1,DE}(\mathbf{q}_1) = \mathbf{0}. \quad (3.66)$$

4 Minimalparameter-Regressorform seriell-hybrider Roboter

In diesem Kapitel werden die Minimalparameter-Regressorform von der im Kapitel 3 modellierten seriell-hybriden Roboter mit Hilfe der symbolische Kalkulation ermittelt. Die Kalkulations-synthese wurde im Abschnitt 2.6 schon vorgestellt. Die reduzierte Inertial-Parameter werden dann mit Hilfe eine numerische Kalkulationsmethode zur Basis-Inertial-Parameter [Gau90] überprüft, ob die reduzierte Inertial-Parameter die Minimalform erreicht ist. Die untersuchte seriell-hybride Systeme sind:

1. generale Viergelenkkette, die in expliziter Form mit trigonometrischer Elimination und in impliziter Form modelliert wird,
2. Parallelogramm, das in expliziter Form mit trigonometrischer Elimination modelliert wird,
3. generale Viergelenkkette auf einer rotatorischen Basis, die in expliziter Form mit trigonometrischer Elimination modelliert wird,
4. Palettierroboter mit zwei generalen Viergelenkketten, der in expliziter Form mit trigonometrischer Elimination modelliert wird.

Folgende Abschnitte zeigen die Algorithmen zur Reduktion der Inertial-Parameter, die für jedes System angepasst wird, und die Ergebnisse der reduzierten sowie minimierten Inertial-Parameter.

4.1 Minimalparameter-Regressorform eine Viergelenkkette

4.1.1 Generale Viergelenkkette

In diesem Abschnitt wird die generale Viergelenkkette mit sowohl expliziter Zwangsbedingungen in trigonometrischer Form als auch impliziter Zwangsbedingungen modelliert. Mit Hilfe der existierende Dynamik-Toolbox [Sch19] wird das Energie-Modell von TE oder IC für Dynamik generiert. Das Ersatzbild 4.1 zeigt die entsprechende Vektoren der Inertial-Parameter für jeden beweglichen Körper X_i .

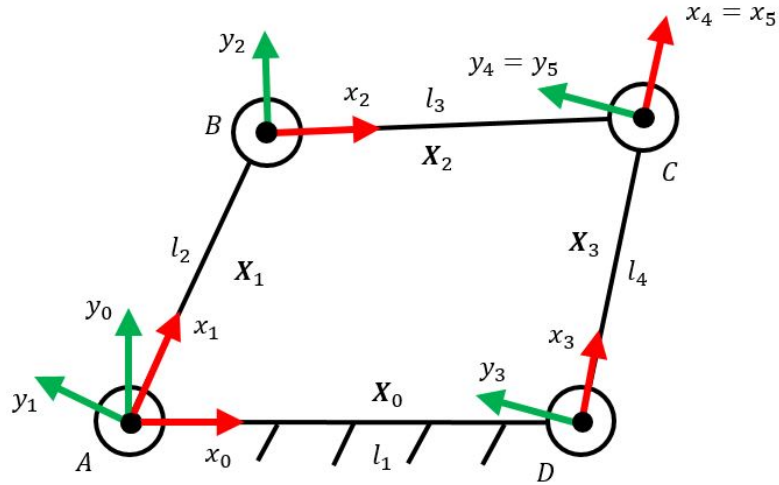


Bild 4.1: Ersatzbild der generalen Viergelenkkette mit eingezeichneten Vektoren der Inertial-Parameter X_i

Die Standard-Inertial-Parameter für die beweglicher Körper von der Viergelenkkette ist in Tabelle 4.1 dargestellt. In dieser Arbeit wird die Inertial-Parameter von der Basis nicht berücksichtigt, da die Basis bei der Modellierung nicht bewegen kann.

j	XX_j	XY_j	XZ_j	YY_j	YZ_j	ZZ_j	MX_j	MY_j	MZ_j	M_j
1	XX_1	XY_1	XZ_1	YY_1	YZ_1	ZZ_1	MX_1	MY_1	MZ_1	M_1
2	XX_2	XY_2	XZ_2	YY_2	YZ_2	ZZ_2	MX_2	MY_2	MZ_2	M_2
3	XX_3	XY_3	XZ_3	YY_3	YZ_3	ZZ_3	MX_3	MY_3	MZ_3	M_3

Tabelle 4.1: Standard-Inertial-Parameter von der generalen Viergelenkkette.

Mit folgender Regeln werden die Standard-Inertial-Parameter reduziert:

1. Durch Bestimmung der konstante Koeffiziente werden die entsprechende Inertial-Parameter zunächst eliminiert. Bei dieser Struktur werden die folgende eliminierte Inertial-Parameter mit Null ersetzt:

j	XX_j	XY_j	XZ_j	YY_j	YZ_j	ZZ_j	MX_j	MY_j	MZ_j	M_j
1	0	0	0	0	0	ZZ_1	MX_1	MY_1	0	0
2	0	0	0	0	0	ZZ_2	MX_2	MY_2	0	M_2
3	0	0	0	0	0	ZZ_3	MX_3	MY_3	0	0

Tabelle 4.2: Reduzierte Inertial-Parameter von der generalen Viergelenkkette nach Regeln 1.

2. Das Glied 3 (mit \mathbf{X}_3 gezeichnet) repräsentiert s_p in einer planaren geschlossenen Kette, die mit dem Ersatzbild 2.10 entspricht, wird dann die planare geschlossene Kette mit folgender Regruppierungsbeziehungen geöffnet mit die Bedingung $\sin(\beta_{k+B}) = 0$:

- a) Mit der Regruppierungsregel für allgemeine geschlossene Kette wird MX_3 regroupiert (Die Index $i, j, k, k+B$ sind mit dem Ersatzbild 2.9 analog zu entnehmen):

$$\mathbf{X}\mathbf{R}^j = \mathbf{X}^j - (1/a_{k+B}C\beta_{k+B})\mathbf{I}_{10}(7)^j\boldsymbol{\lambda}_{k+B}^{10}MX_3, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{X}\mathbf{R}^i = \mathbf{X}^i + (1/a_{k+B}C\beta_{k+B})^i\boldsymbol{\lambda}_k^{10}MX_3. \quad (4.2)$$

- b) Mit der Regruppierungsregel für planare geschlossene Kette werden XZ_3 und YZ_3 regroupiert (Die Index $ei, ei+1j, si, si+1, sp, sp+1$ sind mit dem Ersatzbild 2.10 analog zu entnehmen):

for $i = 1, \dots, m$:

$$XZR_{ei} = XZ_{ei} - \frac{C\alpha_{sp+1}}{a_{sp+1}}P_{yei+1}(-S\beta_{sp+1}XZ_3 + C\beta_{sp+1}YZ_3) \quad (4.3)$$

$$YZR_{ei} = YZ_{ei} + \frac{C\alpha_{sp+1}}{a_{sp+1}}P_{yei+1}(-S\beta_{sp+1}XZ_3 + C\beta_{sp+1}YZ_3) \quad (4.4)$$

for $i = 1, \dots, p-1$:z

$$XZR_{si} = XZ_{si} + \frac{C\alpha_{sp+1}}{a_{sp+1}}P_{ysi+1}(-S\beta_{sp+1}XZ_3 + C\beta_{sp+1}YZ_3) \quad (4.5)$$

$$YZR_{si} = YZ_{si} - \frac{C\alpha_{sp+1}}{a_{sp+1}}P_{ysi+1}(-S\beta_{sp+1}XZ_3 + C\beta_{sp+1}YZ_3) \quad (4.6)$$

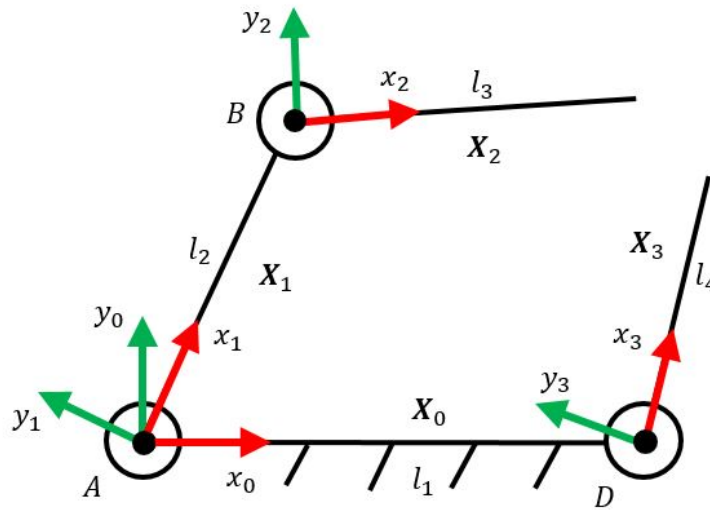


Bild 4.2: Ersatzbild der geöffneten generalen Viergelenkkette mit eingezeichneten Vektoren der Inertial-Parameter X_i

- Nach der Öffnung der geschlossenen Ketten wird die Viergelenkkette nun als eine Baumstruktur wie Bild 4.2 behandelt. Mit Hilfe von der generalen Regruppierungsbeziehungen werden die Parameter YY_j , MZ_j , M_j durch den rotatorischen Gelenk j in das vorgängige Glied regroupiert, mit $j = 2$:

$$XXR_j = XX_j - YY_j, \quad (4.7)$$

$$XR^i = X^i + YY_j^i \lambda_j^{1+4} + MZ_j^i \lambda_j^9 + M_j^i \lambda_j^{10}, \quad (4.8)$$

- Nach der Regruppierung werden die regroupierte Inertial-Parameter mit konstante Koeffiziente wieder eliminiert. Die reste Inertial-Parameter stehen für die reduzierte sowie minimale Form der Inertial-Parameter.

Tabelle 4.3 stellt die reduzierte Inertial-Parameter dar:

j	XX_j	XY_j	XZ_j	YY_j	YZ_j	ZZ_j	MX_j	MY_j	MZ_j	M_j
1	0	0	0	0	0	ZZR_1	MXR_1	MY_1	0	0
2	0	0	0	0	0	ZZR_2	MXR_2	MY_2	0	0
3	0	0	0	0	0	ZZR_3	0	MY_3	0	0

Tabelle 4.3: Reduzierte Inertial-Parameter von der generalen Viergelenkkette.

Der Buchstabe R steht hier für die regroupierte Inertial-Parameter. Nach der symbolischen Kalkulation werden die Standard-Inertial-Parameter von der Anzahl 30 bis zu der Anzahl 8 reduziert. Mit Hilfe von der existierenden Dynamik-Toolbox [Sch19] werden die reduzierte Inertial-Parameter durch die numerischen Methode von [Gau90] überprüft. Das Ergebnis zeigt, dass die reduzierte Inertial-Parameter von dem Energie-Modell mit TE oder IC mit Hilfe von symbolischer Kalkulation zur Basis-Inertial-Parameter erfolgreich erreicht, ohne das Energie-Modell zu verändern.

4.1.2 Parallelogramm

In diesem Abschnitt wird die Standard-Inertial-Parameter eines Parallelogramms reduziert, das durch TE kinematisch modelliert wird. Das Ersatzbild 4.3 zeigt die entsprechende Vektoren der Inertial-Parameter für jeden beweglichen Körper X_i .

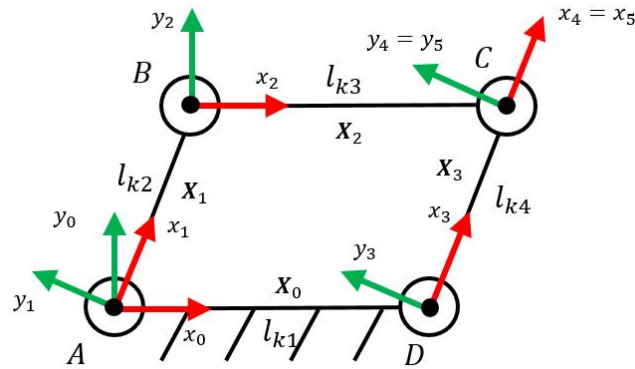


Bild 4.3: Ersatzbild des Parallelogramms mit eingezeichneten Vektoren der Inertial-Parameter X_i

Die Standard-Inertial-Parameter für die beweglicher Körper von der Viergelenkkette ist wie unten dargestellt. In dieser Arbeit wird die Inertial-Parameter von der Basis nicht berücksichtigt, da die Basis bei der Modellierung nicht bewegen kann.

j	XX_j	XY_j	XZ_j	YY_j	YZ_j	ZZ_j	MX_j	MY_j	MZ_j	M_j
1	XX_1	XY_1	XZ_1	YY_1	YZ_1	ZZ_1	MX_1	MY_1	MZ_1	M_1
2	XX_2	XY_2	XZ_2	YY_2	YZ_2	ZZ_2	MX_2	MY_2	MZ_2	M_2
3	XX_3	XY_3	XZ_3	YY_3	YZ_3	ZZ_3	MX_3	MY_3	MZ_3	M_3

Tabelle 4.4: Standard-Inertial-Parameter von dem Parallelogramm.

Mit folgender Operationen werden die Standard-Inertial-Parameter reduziert:

1. Durch Bestimmung der konstante Koeffiziente werden die entsprechende Inertial-Parameter zunächst eliminiert. Bei dieser Struktur werden die folgende Inertial-Parameter eliminiert, die mit Null ersetzt werden:

j	XX_j	XY_j	XZ_j	YY_j	YZ_j	ZZ_j	MX_j	MY_j	MZ_j	M_j
1	0	0	0	0	0	ZZ_1	MX_1	MY_1	0	0
2	0	0	0	0	0	ZZ_2	MX_2	MY_2	0	M_2
3	0	0	0	0	0	ZZ_3	MX_3	MY_3	0	0

Tabelle 4.5: Reduzierte Inertial-Parameter von dem Parallelogramm nach Regeln 1.

2. Das Glied 3 (mit \mathbf{X}_3 gezeichnet) repräsentiert k_4 in dem Parallelogramm, wird das Parallelogramm dann mit Hilfe von den entsprechenden Regruppierungsbeziehungen geöffnet (Die Index k_3 , k_4 , k , $k+B$ sind mit dem Ersatzbild 2.11 analog zu entnehmen):

- a) Mit der Regruppierungsregel für allgemeine geschlossene Kette wird MX_3 regruppiert:

$$\mathbf{X}\mathbf{R}^{k4} = \mathbf{X}^{k4} - (1/a_{k+B}C\beta_{k+B})\mathbf{I}_{10}(7)^j\boldsymbol{\lambda}_{k+B}^{10}MX_3, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{X}\mathbf{R}^{k3} = \mathbf{X}^{k3} + (1/a_{k+B}C\beta_{k+B})^i\boldsymbol{\lambda}_k^{10}MX_3. \quad (4.10)$$

- b) Mit der Regruppierungsregel für Parallelogramm werden die Inertial-Matrix von dem Glied 3 auf die Inertial-Matrix von dem Glied 1 regruppiert, während die Inertial-Matrix von dem Glied 2 auf die Inertial-Matrix von dem Glied 0 regruppiert wird:

$${}^{k1}\mathbf{J}\mathbf{R}_{k1} = {}^{k1}\mathbf{J}_{k1} + {}^{k1}\mathbf{A}_{k1}{}^{k3}\mathbf{J}_{k3}{}^{k3}\mathbf{A}_{k1}, \quad (4.11)$$

$${}^{k2}\mathbf{J}\mathbf{R}_{k2} = {}^{k2}\mathbf{J}_{k2} + {}^{k2}\mathbf{A}_{k4}{}^{k4}\mathbf{J}_{k4}{}^{k4}\mathbf{A}_{k2}, \quad (4.12)$$

3. Nach der Öffnung des Parallelogramms wird die hybride Struktur nun als eine Baumstruktur wie Bild 4.4 behandelt. Mit Hilfe von der generalen Regruppierungsbeziehungen werden die Parameter YY_j , MZ_j , M_j für jeden rotatorischen Gelenk $j = 2$ regruppiert.

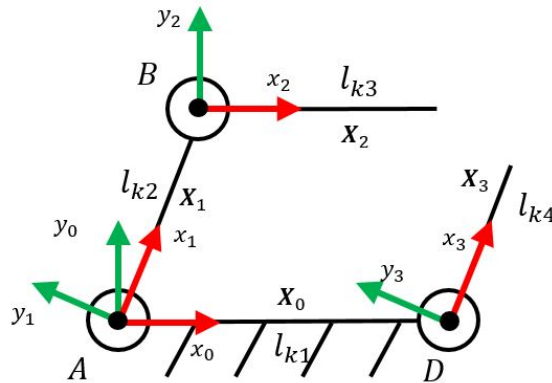


Bild 4.4: Ersatzbild des geöffneten Parallelogramms mit eingezeichneten Vektoren der Inertial-Parameter \mathbf{X}_i

4. Nach der Regruppierung werden die regroupierte Inertial-Parameter mit konstante Koeffiziente wieder eliminiert. Der rechte Inertial-Parameter-Vektor steht für die reduzierte sowie minimale Form der Inertial-Parametern.

Die reduzierte Inertial-Parameter steht in Tabelle 4.6:

j	XX_j	XY_j	XZ_j	YY_j	YZ_j	ZZ_j	MX_j	MY_j	MZ_j	M_j
1	0	0	0	0	0	ZZR_1	MXR_1	MY_1	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabelle 4.6: Reduzierte Inertial-Parameter von dem Parallelogramm.

Nach der symbolischen Kalkulation werden die Standard-Inertial-Parameter von der Anzahl 30 bis zu der Anzahl 3 reduziert. Mit Hilfe von der existierenden Dynamik-Toolbox [Sch19] werden die reduzierte Inertial-Parameter durch die numerischen Methode von [Gau90] überprüft. Das Ergebnis zeigt, dass die reduzierte Inertial-Parameter von dem Energie-Modell mit TE mit Hilfe von symbolischer Kalkulation zur Basis-Inertial-Parameter erfolgreich erreicht, ohne das Energie-Modell zu verändern.

4.1.3 Viergelenkkette mit rotatorischer Basis

In diesem Abschnitt wird die Standard-Inertial-Parameter einer Viergelenkkette mit rotatorischer Basis reduziert, das durch TE kinematisch modelliert wird. Das Ersatzbild 4.5 zeigt die entsprechenden Vektoren der Inertial-Parameter für jeden beweglichen Körper X_i .

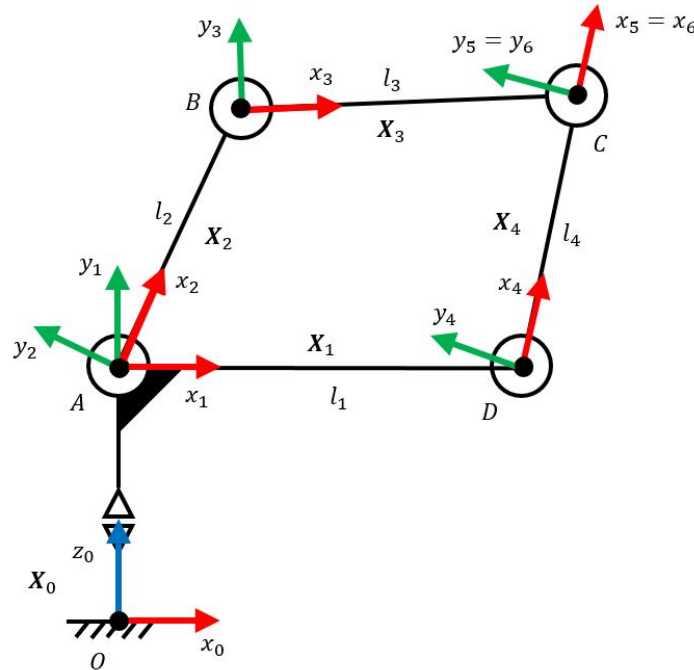


Bild 4.5: Ersatzbild der Viergelenkkette mit rotatorischer Basis mit eingezeichneten Vektoren der Inertial-Parameter X_i

Die Standard-Inertial-Parameter für die beweglichen Körper von der Viergelenkkette ist wie unten dargestellt:

j	XX_j	XY_j	XZ_j	YY_j	YZ_j	ZZ_j	MX_j	MY_j	MZ_j	M_j
1	XX_1	XY_1	XZ_1	YY_1	YZ_1	ZZ_1	MX_1	MY_1	MZ_1	M_1
2	XX_2	XY_2	XZ_2	YY_2	YZ_2	ZZ_2	MX_2	MY_2	MZ_2	M_2
3	XX_3	XY_3	XZ_3	YY_3	YZ_3	ZZ_3	MX_3	MY_3	MZ_3	M_3
4	XX_4	XY_4	XZ_4	YY_4	YZ_4	ZZ_4	MX_4	MY_4	MZ_4	M_4

Tabelle 4.7: Standard-Inertial-Parameter von der Viergelenkkette mit rotatorischer Basis.

Prinzipiell wird die Regruppierung- sowie Eliminationsregel bei der Viergelenkkette mit rotatorischer Basis analog wie allgemeine Viergelenkkette:

1. Durch Bestimmung der konstante Koeffiziente werden die entsprechende Inertial-Parameter zunächst eliminiert.
2. Das Glied 4 repräsentiert s_p in einer planaren geschlossenen Kette wie das Ersatzbild 2.10, wird die planare geschlossene Kette mit Hilfe von den entsprechenden Regruppierungsbeziehungen geöffnet. Die Parameter MX_4 , XZ_4 und YZ_4 werden dann regroupiert.

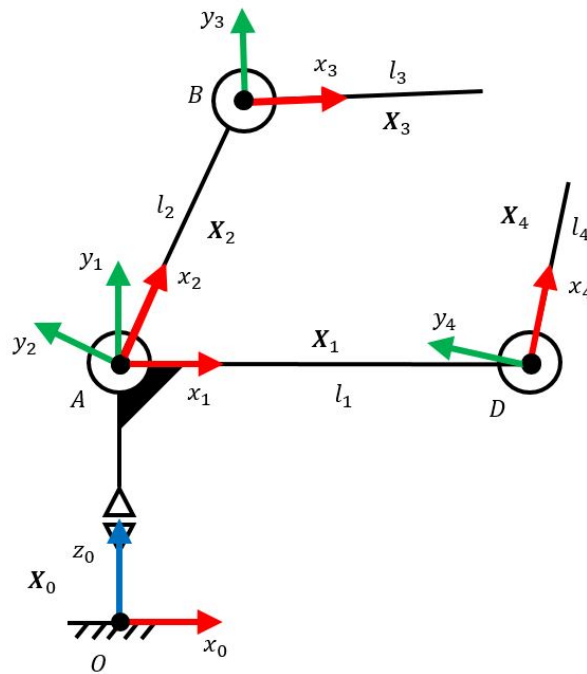


Bild 4.6: Ersatzbild der geöffneten Viergelenkkette mit rotatorischer Basis mit eingezeichneten Vektoren der Inertial-Parameter X_i

3. Nach der Öffnung der geschlossenen Ketten wird die hybride Struktur nun als eine Baumstruktur behandelt. Mit Hilfe von der generalen Regruppierungsbeziehungen werden die Parameter YY_j , MZ_j , M_j für jeden rotatorischen Gelenk $j = 4, 3, 2$ regroupiert.
4. Nach der Regruppierung werden die regroupierte Inertial-Parameter mit konstante Koeffiziente wieder eliminiert. Der reste Parameter-Vektor steht für die reduzierte sowie minimale Form der Inertial-Parametern.

Die reduzierte Inertial-Parameter steht in Tabelle 4.8:

j	XX_j	XY_j	XZ_j	YY_j	YZ_j	ZZ_j	MX_j	MY_j	MZ_j	M_j
1	0	0	0	0	0	ZZR_1	MXR_1	MY_1	0	0
2	0	0	0	0	0	ZZR_2	MXR_2	MY_2	0	0
3	0	0	0	0	0	ZZR_3	MXR_3	MY_3	0	0
4	0	0	0	0	0	ZZR_4	0	MY_4	0	0

Tabelle 4.8: Reduzierte Inertial-Parameter von der Viergelenkkette mit rotatorischer Basis.

Nach der symbolischen Kalkulation werden die Standard-Inertial-Parameter von der Anzahl 40 bis zu der Anzahl 11 reduziert. Mit Hilfe von der existierenden Dynamik-Toolbox [Sch19] werden die reduzierte Inertial-Parameter nach der numerischen Methode von [Gau90] überprüft. Das Ergebnis zeigt, dass die reduzierte Inertial-Parameter von dem Energie-Modell mit TE mit Hilfe von symbolischer Kalkulation zur Basis-Inertial-Parameter erfolgreich erreicht, ohne das Energie-Modell zu verändern.

4.2 Palettierroboter mit zwei Viergelenkketten

In diesem Abschnitt wird die Standard-Inertial-Parameter eines Palettierroboters mit zwei Viergelenkketten reduziert, der durch TE kinematisch modelliert wird. Das Ersatzbild 4.7 zeigt die entsprechende Vektoren der Inertial-Parameter für jeden beweglichen Körper \mathbf{X}_i . Die Standard-Inertial-Parameter für die beweglicher Körper von der Viergelenkkette ist in der Tabelle 4.9 dargestellt:

j	XX_j	XY_j	XZ_j	YY_j	YZ_j	ZZ_j	MX_j	MY_j	MZ_j	M_j
1	XX_1	XY_1	XZ_1	YY_1	YZ_1	ZZ_1	MX_1	MY_1	MZ_1	M_1
2	XX_2	XY_2	XZ_2	YY_2	YZ_2	ZZ_2	MX_2	MY_2	MZ_2	M_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
8	XX_8	XY_8	XZ_8	YY_8	YZ_8	ZZ_8	MX_8	MY_8	MZ_8	M_8

Tabelle 4.9: Standard-Inertial-Parameter von der Viergelenkkette mit rotatorischer Basis.

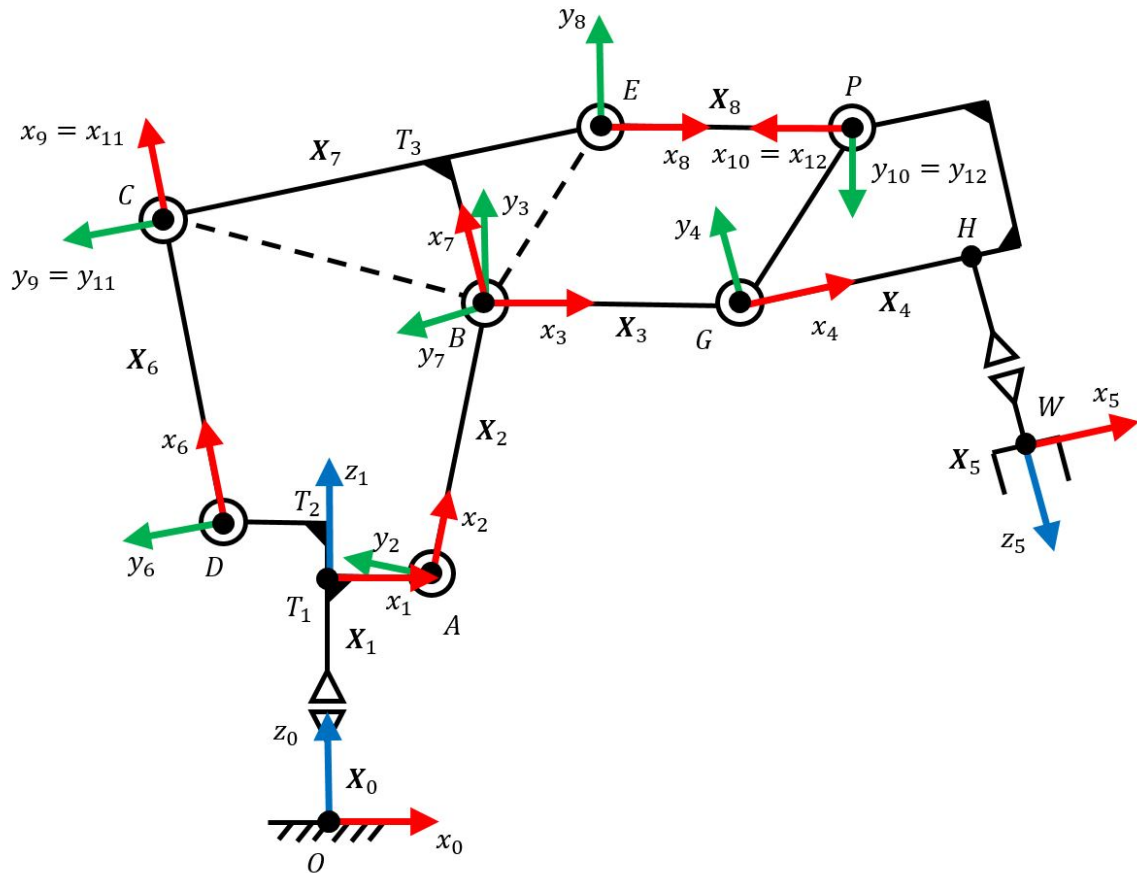


Bild 4.7: Ersatzbild des Palettierroboters KR-700PA mit eingezeichneten Vektoren der Inertial-Parameter X_i

Prinzipiell wird die Regruppierung- sowie Eliminationsregel bei dem Palettierroboter mit zwei Viergelenkketten analog wie allgemeine Viergelenkkette. Es wird für jede geschlossene Kette die Öffnungsoperation und die entsprechende Regruppierung sowie Elimination durchgeführt. Die Reihenfolge für die Operationen von dem Endeffektor bis zur Basis ist hier wichtig.

1. Durch Bestimmung der konstante Koeffiziente werden die entsprechende Inertial-Parameter zunächst eliminiert.
2. Wenn es serielle Struktur auf einer geschlossenen Struktur gibt, wie z.B. der rotatorische Gelenk, werden die generale Regruppierungsbeziehungen für Baumstruktur verwendet, um die Parameter YY_j , MZ_j , M_j zu regruppieren. Für diesen Palettierroboter wird zunächst die Parameter YY_5 , MZ_5 , M_5 vom Glied 5 (Endeffektor) auf den Körper 4

regruppiert:

$$XXR_5 = XX_5 - YY_5, \quad (4.13)$$

$$XR^4 = X^4 + YY_5^4 \lambda_5^{1+4} + MZ_5^4 \lambda_j^9 + M_5^4 \lambda_5^{10}, \quad (4.14)$$

3. Für diesen Palettierroboter wird die Viergelenkkette (B-E-P-G) zunächst geöffnet. Das Glied 8 repräsentiert s_p in einer planaren geschlossenen Kette wie das Ersatzbild 2.10, wird die planare geschlossene Kette mit Hilfe von den entsprechenden Regruppierungsbeziehungen geöffnet:
 - a) Mit der Regruppierungsregel für allgemeine geschlossene Kette wird MX_8 regruppiert:
 - b) Mit der Regruppierungsregel für planare geschlossene Kette werden XZ_8 und YZ_8 regruppiert:
4. Nach der Öffnung der Viergelenkkette (B-E-P-G) wird die geöffnete Struktur nun als eine Baumstruktur behandelt. Mit Hilfe von der generalen Regruppierungsbeziehungen werden die Parameter YY_j , MZ_j , M_j mit $j = 8, 4, 3$ regruppiert.
5. Anschließend wird dann die Viergelenkkette (A-B-C-D) geöffnet. Das Glied 7 repräsentiert s_p in einer planaren geschlossenen Kette wie das Ersatzbild 2.10, wird die planare geschlossene Kette mit Hilfe von den entsprechenden Regruppierungsbeziehungen geöffnet:
 - a) Mit der Regruppierungsregel für allgemeine geschlossene Kette wird MY_7 regruppiert mit die Bedingung $\sin(\beta_{k+B}) \neq 0$ (Die Index $i, j, k, k+B$ sind mit dem Ersatzbild 2.9 analog zu entnehmen):

$$\mathbf{XR}^j = \mathbf{X}^j - (1/a_{k+B} S \beta_{k+B}) \mathbf{I}_{10} (8)^j \lambda_{k+B}^{10} MY_7, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{XR}^i = \mathbf{X}^i + (1/a_{k+B} S \beta_{k+B})^i \lambda_k^{10} MY_7. \quad (4.16)$$
 - b) Mit der Regruppierungsregel für planare geschlossene Kette werden XZ_7 und YZ_7 regruppiert.
6. Nach der Öffnung der Viergelenkkette (A-B-C-D) wird die geöffnete Struktur nun als eine Baumstruktur behandelt. Mit Hilfe von der generalen Regruppierungsbeziehungen werden die Parameter YY_j , MZ_j , M_j mit $j = 7, 6, 2$ regruppiert.
7. Nach der Regruppierung werden die regruppierte Inertial-Parameter mit konstante Koeffiziente wieder eliminiert. Der reste Parameter-Vektor steht für die reduzierte sowie minimale Form der Inertial-Parametern.

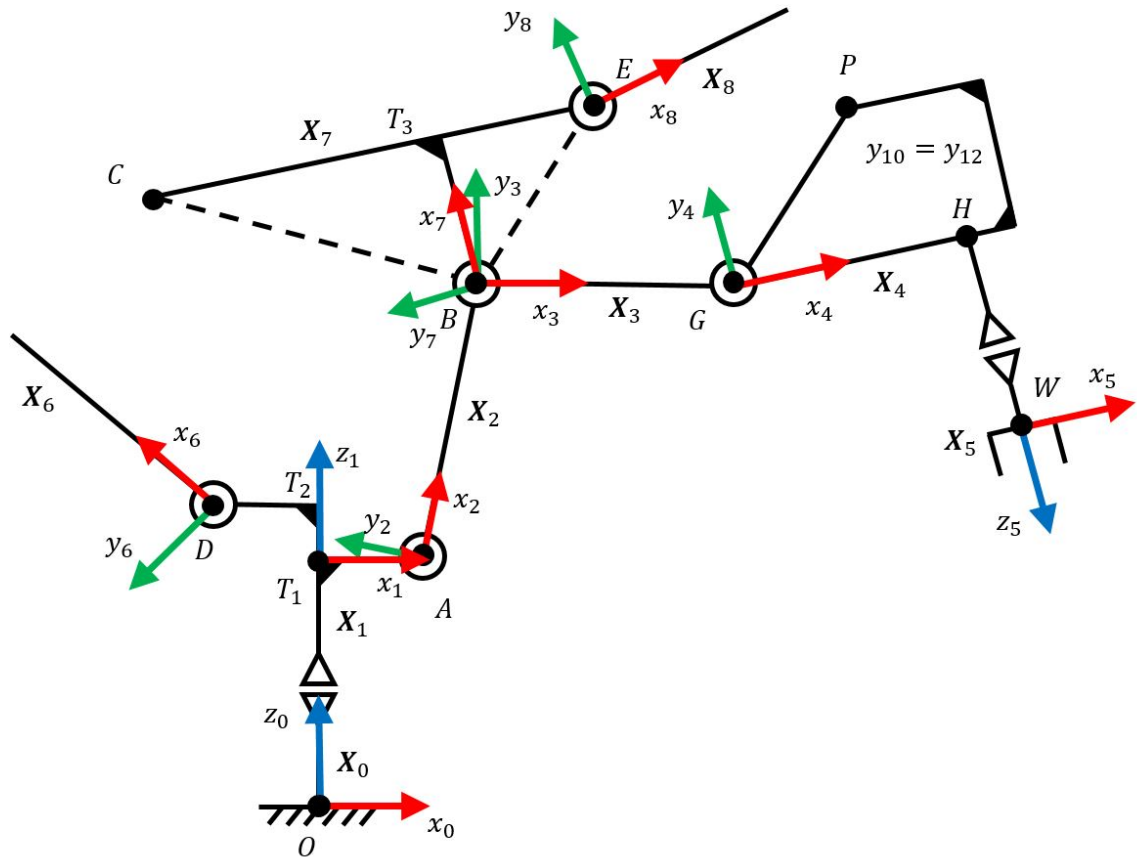


Bild 4.8: Ersatzbild des geöffneten Palettierroboters KR-700PA mit eingezeichneten Vektoren der Inertial-Parameter X_i

Die reduzierte Inertial-Parameter steht in Tabelle 4.10:

j	XX_j	XY_j	XZ_j	YY_j	YZ_j	ZZ_j	MX_j	MY_j	MZ_j	M_j
1	0	0	0	0	0	ZZR_1	MXR_1	MYR_1	0	0
2	XXR_2	XY_2	XZR_2	0	YZ_2	ZZR_2	MXR_2	MY_2	0	0
3	XXR_3	XY_3	XZR_3	0	YZR_3	ZZR_3	MXR_3	MY_3	0	0
4	XXR_4	XYR_4	XZ_4	0	YZR_4	ZZR_4	MXR_4	MYR_4	0	0
5	XXR_5	XY_5	XZ_5	0	YZ_5	ZZ_5	MX_5	MY_5	0	0
6	XXR_6	XY_6	XZR_6	0	YZR_6	ZZ_6	MX_6	MY_6	0	0
7	XXR_7	XY_7	0	0	0	ZZR_7	MXR_7	0	0	0
8	XXR_8	XYR_8	0	0	0	ZZR_8	0	MYR_8	0	0

Tabelle 4.10: Standard-Inertial-Parameter von dem Palettierroboters KR-700PA

Nach der symbolischen Kalkulation werden die Standard-Inertial-Parameter von der Anzahl 80 bis zu der Anzahl 46 reduziert. Mit Hilfe von der existierenden Dynamik-Toolbox [Sch19] werden die reduzierte Inertial-Parameter nach der numerischen Methode von [Gau90] überprüft. Das Ergebnis zeigt, dass die reduzierte Inertial-Parameter von dem Energie-Modell mit TE mit Hilfe von symbolischer Kalkulation zur Basis-Inertial-Parameter erreicht, aber das Energie-Modell von dem symbolisch reduzierte Inertial-Parameter und dem numerische reduzierte Inertial-Parameter stimmen nicht miteinander überein. Durch die Überprüfung zwischen der TE- und IC-Modellierung wird die kinematische Zwangsbedingungen validiert. Die Animation zeigt auch die Funktionsfähigkeit von der Kinematik. Es wäre dann dran liegen, dass die Linearität des Energie-Modells bei dem Palettierroboter KR-700PA durch die existierende Dynamik-Toolbox [Sch19] mit der Regruppierungsbeziehungen sowie die Eliminationsregel nicht 100% angepasst. Trotz des falschen Energie-Modells werden die reduzierte Inertial-Parameter durch die numerische Kalkulation überprüft, dass sie die Basis-Inertial-Parameter erreicht haben. Was nicht angepasst, ist die geometrische Koeffizienten von dem Inertial-Parameter. Es ist erforderlich, in der weiteren Arbeiten die Regruppierungsbeziehungen in der praktischen Anwendungen besser anzupassen.

4.3 Mögliche Vereinfachungsannahme

In diesem Abschnitt wird eine mögliche Vereinfachungsannahme für die vorher untersuchte kinematische Strukturen vorgestellt, somit das Dynamik-Modell für die kinematische Strukturen noch weiter vereinfacht werden kann. Durch die Annahme einiger Körper als dünnes Blech werden die Trägheitsmomente in eine Beziehung bezüglich der Masse des Körpers ersetzt.

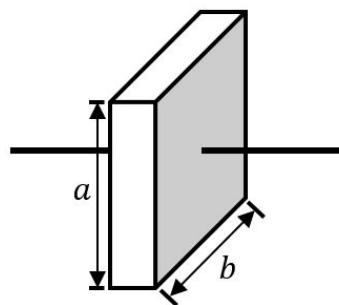


Bild 4.9: Quader rotiert um eine orthogonale Achse [Wik]

Wie das Bild 4.9 gezeigt, rotiert der Quader um eine orthogonale Achse, liefert das entsprechende Trägheitsmoment:

$$I = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2) \quad (4.17)$$

Durch die Annahme einiger Körper j als dünnes Blech werden dann die Trägheitsmomente XX_j , YY_j , ZZ_j in einer Beziehung bezüglich der Masse des Körpers ausgedrückt:

$$XX_j = k_{XX_j} M \quad (4.18)$$

$$YY_j = k_{YY_j} M \quad (4.19)$$

$$ZZ_j = k_{ZZ_j} M \quad (4.20)$$

Mit der Linearität des Energie-Modells werden dann die geometrische Koeffiziente der Inertial-Paramter XX_j , YY_j , ZZ_j auf die geometrische Koeffiziente der Masse M regroupiert. Es liefert:

$$h_{M_j,R} = k_{XX_j} h_{XX_j,R} + k_{YY_j} h_{YY_j,R} + k_{ZZ_j} h_{ZZ_j,R} \quad (4.21)$$

Wegen des Motors auf dem Körper wird nicht jeder Körper des Roboters als ein dünnes Blech angenommen. Folgede Liste zeigt die in dieser Arbeit untersuchte Struktur und ihre reduzierte Parameter durch die Annahme:

- Viergelenkkette und Parallelogramm: Körper 2 und 3
- Viergelenkkette mit rotatorischer Basis: Körper 3 und 4
- Palettierroboter KUKA-700PA: Körper Körper 6 und 8

Nach der Annahme sind die reduzierte Inertial-Parameter der untersuchten Strukturen in den Tabellen 4.11, 4.12, 4.13 dargestellt. Die Anzahl der reduzierten Inertial-Parameter von Viergelenkeketten, Parallelogramm sowie Viergelenkkette mit rotatorischer Basis wird nicht geändert, während die Anzahl der reduzierten Inertial-Parameter von Palettierroboter von 46 bis 44 reduziert.

j	XX_j	XY_j	XZ_j	YY_j	YZ_j	ZZ_j	MX_j	MY_j	MZ_j	M_j
1	0	0	0	0	0	ZZR_1	MXR_1	MY_1	0	0
2	0	0	0	0	0	0	MXR_2	MY_2	0	M_2
3	0	0	0	0	0	0	0	MY_3	0	M_3

Tabelle 4.11: Reduzierte Inertial-Parameter von der generalen Viergelenkkette mit der Blechannahme.

j	XX_j	XY_j	XZ_j	YY_j	YZ_j	ZZ_j	MX_j	MY_j	MZ_j	M_j
1	0	0	0	0	0	ZZR_1	MXR_1	MY_1	0	0
2	0	0	0	0	0	ZZR_2	MXR_2	MY_2	0	0
3	0	0	0	0	0	0	MXR_3	MY_3	0	M_3
4	0	0	0	0	0	0	0	MY_4	0	M_4

Tabelle 4.12: Reduzierte Inertial-Parameter von der Viergelenkkette mit rotatorischer Basis mit der Blechannahme.

j	XX_j	XY_j	XZ_j	YY_j	YZ_j	ZZ_j	MX_j	MY_j	MZ_j	M_j
1	0	0	0	0	0	ZZR_1	MXR_1	MYR_1	0	0
2	XXR_2	XY_2	XZR_2	0	YZ_2	ZZR_2	MXR_2	MY_2	0	0
3	XXR_3	XY_3	XZR_3	0	YZR_3	ZZR_3	MXR_3	MY_3	0	0
4	XXR_4	XYR_4	XZ_4	0	YZR_4	ZZR_4	MXR_4	MYR_4	0	0
5	XXR_5	XY_5	XZ_5	0	YZ_5	ZZ_5	MX_5	MY_5	0	0
6	0	XY_6	XZR_6	0	YZR_6	0	MX_6	MY_6	0	M_6
7	XXR_7	XY_7	0	0	0	ZZR_7	MXR_7	0	0	0
8	0	XYR_8	0	0	0	0	0	MYR_8	0	M_8

Tabelle 4.13: Standard-Inertial-Parameter von dem Palettierroboters KR-700PA

5 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Modellierung kinematischer Zwangsbedingungen hybrider Roboter, die Dynamik mittels existierender Dynamik-Toolbox und die Reduktion der Komplexität des Dynamik-Modells. Zur Modellierung kinematischer Zwangsbedingungen werden in dieser Arbeit die explizite Form mit trigonometrischer Elimination und die implizite Form verwendet. Zur Reduktion der Komplexität des Dynamik-Modells wird eine symbolische Kalkulationsmethode zur Minimalparameter-Regressorform implementiert.

Bei der expliziten Zwangsbedingungen durch trigonometrische Elimination werden die cos- und sin- Ausdrücke der abhängigen Gelenkkoordinaten in einer Beziehung bezüglich der cos- und sin- Terme der unabhängigen Gelenkkoordinaten ausgedrückt. Dazu wird eine geometrische Methode Kreisschnittpunkt in dieser Arbeit verwendet. Mittels cos- und sin- Terme der abhängigen Gelenkkoordinaten kann die expliziten Zwangsbedingungen durch direkte Elimination auch ermittelt. Bei der implizite Form werden die translatorische und die rotatorische Zwangsbedingungen ermittelt, durch Treffen der zwei Wege in einer geschlossenen Kette und mit Hilfe der bei dem Schnittpunkt geschlossenen homogenen Transformationsketten. Eine Kreuzüberprüfung für unterschiedliche Ansätze wird durchgeführt, wenn die mittels dem Ansatz der direkten Elimination berechnete Winkel in den Vektor der impliziten Zwangsbedingungen sowie die differentiellen Zusammenhängen eingesetzt, dann werden die beiden den Nullvektor geliefert. Die Modellierung wird im Kapitel 3 für eine Viergelenkkette mit rotatorischer Basis und ein Palettierroboter KUKA KR-700PA implementiert. Die Dynamik wird dann mittels existierender Dynamik-Toolbox generiert.

Zur Reduktion der Komplexität des Dynamik-Modells wird die symbolische Kalkulationsmethode unter der Annahme der Linearität des Energie-Modells durchgeführt. Jeder beweglichen Körper der Struktur beinhaltet insgesamt 10 Inertial-Parameter und auch 10 geometrische Koeffiziente. Mittels die Linearität der Beziehungen zwischen unterschiedlichen Inertial-Parameter von unterschiedlichen Körper, ist es möglich, die Inertial-Parameter zu eliminieren oder auf die anderen zu regroupieren. Zuerst werden die Inertial-Parameter mit der konstante Koeffiziente eliminieren. Wenn es serielle Struktur auf einer geschlossenen Struktur gibt, wie z.B. der rotatorische Gelenk, werden die generale Regruppierungsbeziehungen für Baumstruktur verwendet, um die Parameter YY_j , MZ_j , M_j zu regroupieren. Anschließend werden die geschlossene Kette von der hybriden Struktur nach der Regel für allgemeine geschlossene Kette oder für Parallelogramm geöffnet, dafür werden auch die entsprechende Inertial-Parameter regroupiert. Somit wird die hybride Struktur in einer Baumstruktur transformiert. Mit Hilfe von

der generalen Regruppierungsbeziehungen werden die Parameter YY_j , MZ_j , M_j regroupiert. Nach der Regruppierung werden die regroupierte Inertial-Parameter mit konstante Koeffiziente wieder eliminiert. Der reste Parameter-Vektor steht für die reduzierte sowie minimale Form der Inertial-Parametern.

Vier Beispiele wurden im Kapitel 4 untersucht, um die reduzierte sowie die minimale Inertial-Paramter zu ermitteln. Zur Überprüfung der Richtigkeit der reduzierte Inertial-Paramter werden die numerischen Methode von [Gau90] verwendet. Die Ergebnisse zeigen, dass die in dieser Arbeit verwendete symbolische Kalkulationsmethode für die Viergelenkkette, das Parallelogramm sowie die Viergelenkkette mit rotatorsicher Basis funktioniert, um die Basis-Inertial-Parameter zu erreichen. Für der Palettierroboter KUAK KR-700PA erreicht die reduzierte Inertial-Parameter mit Hilfe von symbolischer Kalkulation zur Basis-Inertial-Parameter, aber die Energie-Modelle bei dem symbolisch reduzierte Inertial-Parameter und dem numerische reduzierte Inertial-Parameter stimmen nicht miteinander überein. Es wäre dran liegen, dass die Linearität des Energie-Modells bei dem Palettierroboter KR-700PA durch die existierende Dynamik-Toolbox [Sch19] mit der Regruppierungsbeziehungen sowie die Eliminationsregel nicht 100% angepasst.

Weiterhin wurde noch eine Vereinfachungsannahme in dieser Arbeit erläutert, dass durch die Annahme einiger Körper als dünnes Blech die Trägheitsmomente in eine Beziehung bezüglich der Masse des Körpers ersetzt werden können. Bei der Viergelenkkette, dem Parallelogramm sowie der Viergelenkkette mit rotatorsicher Basis beinhaltet die Vereinfachungsannahme keine offensichtliche Reduktion, während bei dem Palettierroboter KR-700PA insgesamt 2 Inertial-Parameter reduziert werden kann.

Zusammenfassend lässt es sich sagen, dass die in dieser Arbeit verwendete symbolische Kalkulationsmethode zur Basis-Inertial-Parameter für einfache Strukturen wie z.B Viergelenkkette, Parallelogramm und Viergelenkkette mit einer rotatorsichen Basis gut funktionieren kann, während bei komplizierte hybride Struktur wie z.B. Palettierroboter KR-700PA nicht 100% angepasst ist, somit das Energie-Modell bei der Reduktion verändert werden kann. Es ist erforderlich, in der weiteren Arbeiten die Regruppierungsbeziehungen in der praktischen Anwendungen besser anzupassen, oder andererseits die Dynamik-Toolbox mit der Kalkulationsmethode besser anzupassen.

Literaturverzeichnis

- [Bej18] BEJAOU, A.: *Modellierung kinematischer Zwangsbedingungen für hybride serielle Roboter mit planaren Parallelmechanismen*. Insitut für Mechatronische Systeme, Leibniz Universität Hannover, Studienarbeit, 2018
- [CLW05] CHANG, Wen-Tung ; LIN, Chen-Chou ; WU, Long-Long: A note on Grashof's theorem, 2005
- [DPF13] DOCQUIER, N. ; PONCELET, A. ; FISETTE, P.: ROBOTRAN: a powerful symbolic gnerator of multibody models. In: *Mechanical Sciences* 4 (2013), Nr. 1, 199–219. <http://dx.doi.org/10.5194/ms-4-199-2013>. – DOI 10.5194/ms-4-199-2013
- [Gau90] GAUTIER, M.: Numerical calculation of the base inertial parameters of robots. In: *Proceedings., IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1990, S. 1020–1025 vol.2
- [Hun78] HUNT, K. H.: *Kinematic Geometry of Mechanisms* (K. H. Hunt). (1978)
- [KB95] KHALIL, Wisama ; BENNIS, Fouad: Symbolic Calculation of the Base Inertial Parameters of Closed-Loop Robots. In: *The International Journal of Robotics Research* 14 (1995), Nr. 2, 112-128. <http://dx.doi.org/10.1177/027836499501400202>. – DOI 10.1177/027836499501400202
- [KD02] KHALIL, Wisama ; DOMBRE, Etienne: *Modeling, Identification and Control of Robots*. 3rd. Bristol, PA, USA : Taylor & Francis, Inc., 2002. – ISBN 1560329831
- [KK86] KHALIL, W. ; KLEINFINGER, J.: A new geometric notation for open and closed-loop robots. In: *Proceedings. 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation* Bd. 3, 1986, S. 1174–1179
- [KR14] KHALIL, W. ; RONGÈRE, F.: Dynamic modeling of floating systems: Application to eel-like robot and rowing system. In: *2014 IEEE 13th International Workshop on Advanced Motion Control (AMC)*, 2014. – ISSN 1943–6572, S. 21–30

- [KUK] KUKA: *KUKA-KR-700PA*. <https://www.kuka.com/en-cn/products/robotics-systems/industrial-robots/kr-700-pa>. – Abrufdatum 29.04.2019
- [NG89] NAKAMURA, Y. ; GHODOUSSI, M.: Dynamics computation of closed-link robot mechanisms with nonredundant and redundant actuators. In: *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 5 (1989), June, Nr. 3, S. 294–302. <http://dx.doi.org/10.1109/70.34765>. – DOI 10.1109/70.34765. – ISSN 1042–296X
- [OT18] ORTMAIER, T. ; TAPPE, S.: *Skript zur Vorlesung Robotik II*. Insitut für Mechatronische Systeme, Leibniz Universität Hannover, 2018
- [PCP99] PARK, F. ; CHOI, Jihyeon ; PLOEN, Stephanie: Symbolic formulation of closed chain dynamics in independent coordinates, 1999
- [SC14] SOUSA, Cristóvão D. ; CORTESÃO, Rui: Physical feasibility of robot base inertial parameter identification: A linear matrix inequality approach. In: *The International Journal of Robotics Research* 33 (2014), Nr. 6, S. 931–944
- [Sch19] SCHAPPLER, M.: *HybrDyn-Toolbox*. http://phabricator.imes.uni-hannover.de/source/robot_dynamics-hybriddyn/. Version: 15.11.2018 - 01.05.2019
- [SLH19] SCHAPPLER, Moritz ; LILGE, Torsten ; HADDADIN, Sami: Kinematics and Dynamics Model via Explicit Trigonometric Elimination of Kinematic Constraints for a Force Assistance Exoskeleton. In: *Proc. of the 15th IFToMM World Congress*, 2019. – Accepted for publication
- [WG98] WANG, Jiegao ; GOSSELIN, Clément M.: A New Approach for the Dynamic Analysis of Parallel Manipulators. In: *Multibody System Dynamics* 2 (1998), Sep, Nr. 3, 317–334. <http://dx.doi.org/10.1023/A:1009740326195>. – DOI 10.1023/A:1009740326195. – ISSN 1573–272X
- [Wik] WIKIPEDIA: *Trägheitsmoment*. <https://de.wikipedia.org/wiki/Tr%C3%A4gheitsmoment>. – Abrufdatum 17.05.2019