视觉SLAM十四讲笔记

第四讲 - 李群与李代数

4.1 李群与李代数基础

李群

群定义

只有一个良好的运算的集合，称之为群

$$
\begin{gathered}
\mathrm{SO}(3)=\{\boldsymbol{R}\in\mathbb{R}^{3\times3}|\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I},\det(\boldsymbol{R})=1\}\\
\mathrm{SE}(3)=\{\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R} & \boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{0} & 1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times4}|\boldsymbol{R}\in\mathrm{SO}(3),t\in\mathbb{R}^3\}
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{R}_2\notin\mathrm{SO}(3),\quad \boldsymbol{T}_1+\boldsymbol{T}_2\notin\mathrm{SE}(3)\\
\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2\in\mathrm{SO}(3),\quad \boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2\in\mathrm{SE}(3)
\end{gathered}
$$

群性质

1. 封闭性

$$\forall a_1,a_2\in A,\quad a_1\cdot a_2\in A$$

2. 结合律

$$\forall a_1,a_2,a_3\in A,\quad (a_1\cdot a_2)\cdot a_3=a_1\cdot(a_2\cdot a_3)$$

3. 幺元

$$\exists a_0\in A,\quad \text{s.t.}\quad \forall a\in A,\quad a_0\cdot a=a\cdot a_0=a$$

4. 逆

$$\forall a\in A,\quad \exists a^{-1}\in A,\quad \text{s.t.}\quad a\cdot a^{-1}=a_0$$

一般常见的群：

- 一般线性群 $\mathrm{GL}(n)$
- 特殊正交群 $\mathrm{SO}(n)$
- 特殊欧式群 $\mathrm{SE}(n)$

李群定义

李群指具有连续（光滑）性质的群。$\mathrm{SO}(3)$ 与 $\mathrm{SE}(3)$ 在实数空间上是连续的，想象一个刚体能够连续地在空间中运动。

李代数

李代数的引出

$$\boldsymbol{R}(t)=\exp(\boldsymbol{\phi}_0^{\wedge}t),\quad \boldsymbol{\phi}(t)\in\mathbb{R}^3$$

1. 给定某时刻的 $\boldsymbol{R}$，可以求得一个 $\boldsymbol{\phi}$，它描述了 $\boldsymbol{R}$ 在局部的导数关系，$\boldsymbol{\phi}$ 为对应到 $\mathrm{SO}(3)$ 上的李代数 $\mathfrak{so}(3)$
2. 李代数的指数映射，对数映射
    1. 指数映射：$\boldsymbol{R}=\exp(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}),\quad \mathfrak{so}(3)\rightarrow\mathrm{SO}(3)$
    2. 对数映射：$\boldsymbol{\phi}=\ln(\boldsymbol{R})^{\vee},\quad \mathrm{SO}(3)\rightarrow\mathfrak{so}(3)$

李代数的定义

每个李群都有与之对应的李代数。李代数描述了李群的局部性质，准确的说，是单位元附近的正切空间。一般的李代数定义如下：

- 李代数由一个集合 $\mathbb{V}$、一个数域 $\mathbb{F}$ 和一个二元运算 $[,]$ 组成。如果它们满足以下性质，则称 $(\mathbb{V},\mathbb{F},[,])$ 为一个李代数，记为 $\mathfrak{g}$:
    1. 封闭性

    $$\forall\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in\mathbb{V},[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]\in\mathbb{V}$$

    2. 双线性

    $$\begin{gathered}\forall\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}\in\mathbb{V},a,b\in\mathbb{F}\\ \text{s. t.}\quad [a\boldsymbol{X}+b\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}]=a[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z}]+b[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}],\quad [\boldsymbol{Z},a\boldsymbol{X}+b\boldsymbol{Y}]=a[\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X}]+b[\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Y}]\end{gathered}$$

    3. 自反性

    $$\forall\boldsymbol{X}\in\mathbb{V},[\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}]=\mathbf{0}$$

    4. 雅可比等价

    $$\forall\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}\in\mathbb{V},[\boldsymbol{X},[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}]]+[\boldsymbol{Z},[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]]+[\boldsymbol{Y},[\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X}]]=\mathbf{0}$$

李代数 $\mathfrak{so}(3)$

1. 李代数 $\mathfrak{so}(3)$ 的反对称矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$

$$\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\phi}^{\wedge}=\begin{bmatrix}0&-\phi_3&\phi_2\\ \phi_3&0&-\phi_1\\ -\phi_2&\phi_1&0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$$

2. $\mathfrak{so}(3)$ 的定义

$$\mathfrak{so}(3)=\left\{\boldsymbol{\phi}\in\mathbb{R}^3,\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\in\mathbb{R}^{3\times3}\right\}$$

3. $\mathfrak{so}(3)$ 到 $\mathrm{SO}(3)$ 的指数映射

$$\boldsymbol{R}=\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)$$

4. $\mathfrak{so}(3)$ 的李括号

$$[\boldsymbol{\phi}_1,\boldsymbol{\phi}_2]=(\boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{\Phi}_2-\boldsymbol{\Phi}_2\boldsymbol{\Phi}_1)^{\vee}$$

李代数 $\mathfrak{se}(3)$

1. $\mathfrak{se}(3)$ 的定义

$$\mathfrak{se}(3)=\left\{\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\rho}\\ \boldsymbol{\phi}\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^6,\boldsymbol{\rho}\in\mathbb{R}^3,\boldsymbol{\phi}\in\mathfrak{so}(3),\boldsymbol{\xi}^{\wedge}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\phi}^{\wedge} & \boldsymbol{\rho}\\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times 4}\right\}$$

2. $\mathfrak{se}(3)$ 到 $\mathrm{SO}(3)$ 的指数映射

$$\boldsymbol{T}=\exp\left(\boldsymbol{\xi}^{\wedge}\right)$$

3. $\mathfrak{se}(3)$ 的李括号

$$[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2]=\left(\boldsymbol{\xi}_1^{\wedge}\boldsymbol{\xi}_2^{\wedge}-\boldsymbol{\xi}_2^{\wedge}\boldsymbol{\xi}_1^{\wedge}\right)^{\vee}$$

4.2 指数与对数映射

$\mathfrak{so}(3)$ 指数映射与对数映射

定义 $\boldsymbol{\phi}$ 的模长为 θ，方向为 $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{\phi}=\theta\boldsymbol{a},\quad \|\boldsymbol{a}\|=1$$

$\mathfrak{so}(3)$ 到 $\mathrm{SO}(3)$ 的指数映射（**类似罗德里格斯公式！*）：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}&=\exp(\boldsymbol{\phi}^{\wedge})\\ &=\exp\left(\theta\boldsymbol{a}^{\wedge}\right)\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\theta\boldsymbol{a}^{\wedge}\right)^n\\ &=\cos\theta\boldsymbol{I}+(1-\cos\theta)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}+\sin\theta\boldsymbol{a}^{\wedge}\end{aligned}$$

$\mathrm{SO}(3)$ 到 $\mathfrak{so}(3)$ 的对数映射（通过对 $\boldsymbol{R}$ 求迹，即求矩阵对角线元素之和）：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi}=\ln(\boldsymbol{R})^{\vee}&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{I})^{n+1}\right)^{\vee}\\ &=\theta\boldsymbol{a}\\ \theta&=\arccos\left(\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{R})-1}{2}\right)\\ \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},&\quad(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{a}=\mathbf{0}\end{aligned}$$

$\mathfrak{se}(3)$ 指数映射与对数映射

$\mathfrak{se}(3)$ 到 $\mathrm{SE}(3)$ 的指数映射:

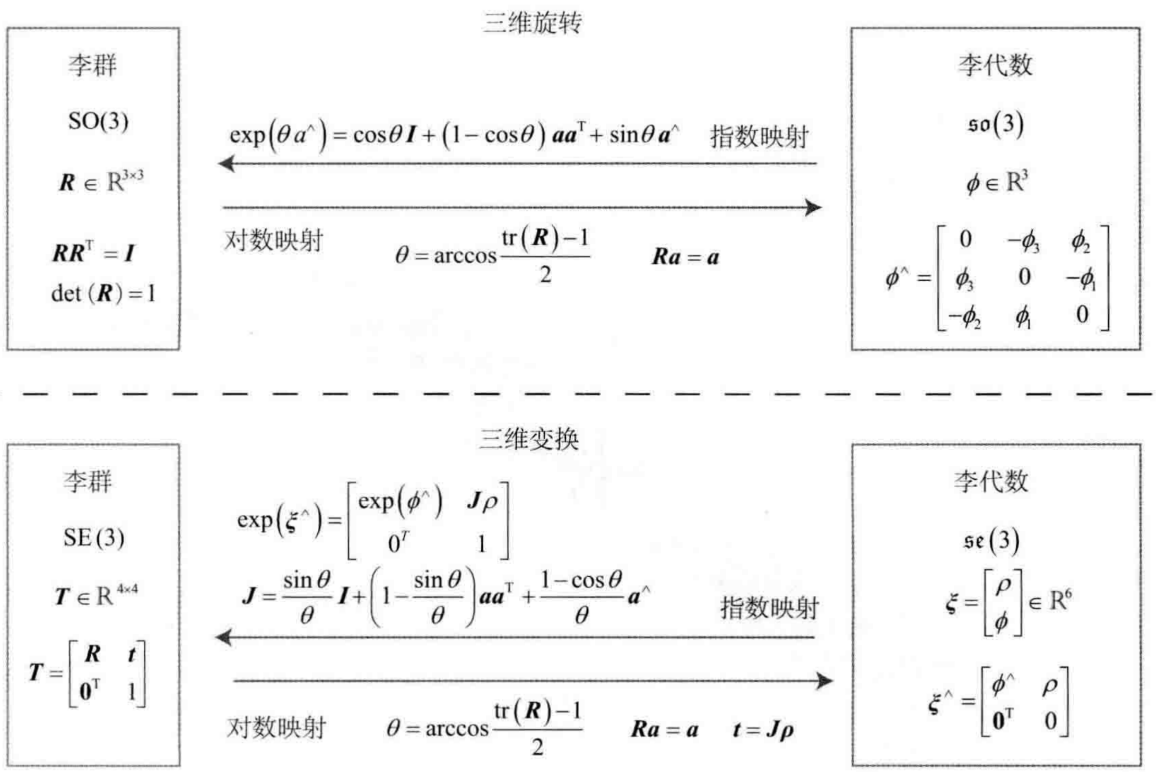
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{T} &= \exp\left(\boldsymbol{\xi}^{\wedge}\right) \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)^{n} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)^{n}\boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} \\
&\triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{J}\boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\phi} = \theta\boldsymbol{a}, \quad \|\boldsymbol{a}\| = 1, \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{\rho} \end{bmatrix} \\
&\boldsymbol{R} = \cos\theta\boldsymbol{I} + (1-\cos\theta)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} + \sin\theta\boldsymbol{a}^{\wedge} \\
&\boldsymbol{J} = \frac{\sin\theta}{\theta}\boldsymbol{I} + \left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} + \frac{1-\cos\theta}{\theta}\boldsymbol{a}^{\wedge} \\
&\boldsymbol{t} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{\rho}
\end{aligned}
$$

$\mathrm{SE}(3)$ 到 $\mathfrak{se}(3)$ 的对数映射:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\phi} &= \theta\boldsymbol{a} \\
\theta &= \arccos\left(\frac{\operatorname{tr}(\boldsymbol{R})-1}{2}\right) \\
\boldsymbol{R}\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{a}, \quad (\boldsymbol{R}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{a} = \mathbf{0} \\
\boldsymbol{J}\boldsymbol{\rho} &= \boldsymbol{t} \\
\boldsymbol{\xi} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{\rho} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{a} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

三维旋转与三维变换指数映射与对数映射关系表



4.3 李代数求导与扰动模型

BCH近似

在 $\mathrm{SO}(3)$ 中的两个矩阵相乘，无法对应 $\mathfrak{so}(3)$ 中的两个李代数相加，因为对于矩阵来说，下式不成立:

$$\ln(\exp(\boldsymbol{A})\exp(\boldsymbol{B})) = \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$$

两个李代数指数映射**乘积**的完整形式如下(BCH公式), 其中[ ]为李括号:

$$\ln(\exp(\boldsymbol{A})\exp(\boldsymbol{B})) = \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\frac{1}{2}[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]+\frac{1}{12}[\boldsymbol{A},[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]]-\frac{1}{12}[\boldsymbol{B},[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]]+\cdots$$

考虑 $\mathrm{SO}(3)$ 上的李代数 $\ln\left(\exp\left(\boldsymbol{\phi}_1^\wedge\right)\exp\left(\boldsymbol{\phi}_2^\wedge\right)\right)^\vee$, 当 $\boldsymbol{\phi}_1$ 或 $\boldsymbol{\phi}_2$ 为小量时, 小量二次以上的项都可以被忽略, 此时BCH拥有线性近似表达:

$$\ln\left(\exp\left(\boldsymbol{\phi}_1^\wedge\right)\exp\left(\boldsymbol{\phi}_2^\wedge\right)\right)^\vee \approx \begin{cases}\boldsymbol{J}_l(\boldsymbol{\phi}_2)^{-1}\boldsymbol{\phi}_1+\boldsymbol{\phi}_2 & \text{当 } \boldsymbol{\phi}_1 \text{ 为小量},\\ \boldsymbol{J}_r(\boldsymbol{\phi}_1)^{-1}\boldsymbol{\phi}_2+\boldsymbol{\phi}_1 & \text{当 } \boldsymbol{\phi}_2 \text{ 为小量}.\end{cases}$$

以第一个近似为例。该式告诉我们，当对一个旋转矩阵 $\boldsymbol{R}_2$（李代数为 $\boldsymbol{\phi}_2$）左乘一个微小旋转矩阵 $\boldsymbol{R}_1$（李代数为 $\boldsymbol{\phi}_1$）时，可以近似地看作，在原有的李代数 $\boldsymbol{\phi}_2$ 上加上了一项 $\boldsymbol{J}_l(\boldsymbol{\phi}_2)^{-1}\boldsymbol{\phi}_1$。同理，第二个近似描述了右乘一个微小位移的情况。于是，李代数在 BCH 近似下，分成了左乘近似和右乘近似两种，在使用时我们须注意使用的是左乘模型还是右乘模型。

本书以左乘为例。左乘 BCH 近似雅可比 $\boldsymbol{J}_l$ 事实上就是式 (4.27) 的内容：

$$\boldsymbol{J}_l = \boldsymbol{J} = \frac{\sin\theta}{\theta}\boldsymbol{I}+\left(1-\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}+\frac{1-\cos\theta}{\theta}\boldsymbol{a}^\wedge. \tag{4.31}$$

它的逆为

$$\boldsymbol{J}_l^{-1} = \frac{\theta}{2}\cot\frac{\theta}{2}\boldsymbol{I}+\left(1-\frac{\theta}{2}\cot\frac{\theta}{2}\right)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}-\frac{\theta}{2}\boldsymbol{a}^\wedge. \tag{4.32}$$

而右乘雅可比仅需要对自变量取负号即可：

$$\boldsymbol{J}_r(\boldsymbol{\phi}) = \boldsymbol{J}_l(-\boldsymbol{\phi}). \tag{4.33}$$

BCH近似的意义:

- 对于 $\mathfrak{so}(3)$
  - 李群上的乘法对应李代数上的加法, 对于某个旋转 $\boldsymbol{R}$, 对应的李代数为 $\boldsymbol{\phi}$。对它左乘一个微小旋转 $\Delta\boldsymbol{R}$, 对应李代数 $\Delta\boldsymbol{\phi}$, 在李群上得到结果 $\Delta\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}$, 李代数上根据BCH近似，为 $\boldsymbol{J}_l^{-1}(\boldsymbol{\phi})\Delta\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\phi}$, 如下:

    $$\exp\left(\Delta\boldsymbol{\phi}^\wedge\right)\exp\left(\boldsymbol{\phi}^\wedge\right) = \exp\left(\left(\boldsymbol{\phi}+J_l^{-1}(\boldsymbol{\phi})\Delta\boldsymbol{\phi}\right)^\wedge\right)$$

  - 李代数上的加法对应李群上的乘法:

    $$\exp\left((\boldsymbol{\phi}+\Delta\boldsymbol{\phi})^\wedge\right) = \exp\left((\boldsymbol{J}_l\Delta\boldsymbol{\phi})^\wedge\right)\exp\left(\boldsymbol{\phi}^\wedge\right) = \exp\left(\boldsymbol{\phi}^\wedge\right)\exp\left((\boldsymbol{J}_r\Delta\boldsymbol{\phi})^\wedge\right)$$

- 对于$\mathfrak{se}(3)$

$$\exp\left(\Delta\boldsymbol{\xi}^\wedge\right)\exp\left(\boldsymbol{\xi}^\wedge\right) \approx \exp\left(\left(\mathcal{J}_l^{-1}\Delta\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\xi}\right)^\wedge\right)$$
$$\exp\left(\boldsymbol{\xi}^\wedge\right)\exp\left(\Delta\boldsymbol{\xi}^\wedge\right) \approx \exp\left(\left(\mathcal{J}_r^{-1}\Delta\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\xi}\right)^\wedge\right)$$

SO(3) 上的求导

为了优化位姿的估计值, 经常会讨论关于位姿函数的导数, 有以下两种方法对位姿函数的求导

- 李代数求导法: 用李代数表示姿态, 根据李代数加法进行李代数求导
- 扰动求导法: 对李群左乘或右乘一个微小扰动, 对该扰动求导

李代数求导法

对空间点 $\boldsymbol{p}$ 旋转 $\boldsymbol{R}$, 得到 $\boldsymbol{Rp}$, 设 $\boldsymbol{R}$ 对应的李代数为 $\boldsymbol{\phi}$, 计算旋转之后点的坐标相对于旋转的导数:

$$\frac{\partial(\boldsymbol{Rp})}{\partial \boldsymbol{R}}=\frac{\partial\left(\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}\right)}{\partial \boldsymbol{\phi}}=-(\boldsymbol{Rp})^{\wedge}\boldsymbol{J}_l$$

扰动模型求导法(左乘)

对空间点 $\boldsymbol{p}$ 旋转 $\boldsymbol{R}$, 得到 $\boldsymbol{Rp}$, 对$\boldsymbol{R}$ 进行一次扰动 $\Delta\boldsymbol{R}$, 看结果相对于扰动的变化率. 以左扰动为例, 设左扰动 $\Delta\boldsymbol{R}$ 对应的李代数为 $\boldsymbol{\varphi}$, 对 $\boldsymbol{\varphi}$ 求导, **结果比李代数求导法省去一个 $\boldsymbol{J}_l$ 的计算:**

$$\frac{\partial(\boldsymbol{Rp})}{\partial \boldsymbol{\varphi}}=\lim_{\boldsymbol{\varphi}\rightarrow 0}\frac{\exp\left(\boldsymbol{\varphi}^{\wedge}\right)\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}-\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{\varphi}}=-(\boldsymbol{Rp})^{\wedge}$$

SE(3) 上的求导

扰动模型求导法(左乘)

假设某空间点 $\boldsymbol{p}$ 经过一次变换 $\boldsymbol{T}$ (对应李代数为$\boldsymbol{\xi}$), 得到 $\boldsymbol{Tp}$, 给 $\boldsymbol{T}$ 左乘一个扰动 $\Delta\boldsymbol{T}=\exp(\delta\boldsymbol{\xi}^{\wedge})$, 设扰动项的李代数为 $\delta\boldsymbol{\xi}=[\delta\boldsymbol{\rho},\delta\boldsymbol{\phi}]^{\mathrm{T}}$, 那么:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\boldsymbol{Tp})}{\partial\delta\boldsymbol{\xi}}&=\lim_{\delta\boldsymbol{\xi}\rightarrow 0}\frac{\exp\left(\delta\boldsymbol{\xi}^{\wedge}\right)\exp\left(\boldsymbol{\xi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}-\exp\left(\boldsymbol{\xi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}}{\delta\boldsymbol{\xi}}\\&=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & -(\boldsymbol{Rp}+\boldsymbol{t})^{\wedge}\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\stackrel{\text{def}}{=}(\boldsymbol{Tp})^{\odot}\end{aligned}$$

4.4 评估轨迹误差

- 绝对误差 (ATE, Absolute Trajectory Error)
  - 绝对轨迹误差 (ATE, Absolute Trajectory Error), 实际也是均方根误差 (RMSE, Root-Mean-Squared Error)

$$\mathrm{ATE}_{\text{all}}=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\|\log\left(\boldsymbol{T}_{\mathrm{gt},i}^{-1}\boldsymbol{T}_{\mathrm{esti},i}\right)^{\vee}\right\|_2^2}$$

  - 平均平移误差 (ATE, Average Translational Error), $\operatorname{trans}()$ 表示取括号内部变量的平移部分

$$\mathrm{ATE}_{\text{trans}}=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\|\operatorname{trans}\left(\boldsymbol{T}_{\mathrm{gt},i}^{-1}\boldsymbol{T}_{\mathrm{esti},\,i}\right)\right\|_2^2}$$

- 相对误差 (RPE, Relative Pose Error)
  - 相对轨迹误差

$$\mathrm{RPE}_{\text{all}}=\sqrt{\frac{1}{N-\Delta t}\sum_{i=1}^{N-\Delta t}\left\|\log\left(\left(\boldsymbol{T}_{\mathrm{gt},i}^{-1}\boldsymbol{T}_{\mathrm{gt},i+\Delta t}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{T}_{\mathrm{est},i}^{-1}\boldsymbol{T}_{\mathrm{esti}\,,i+\Delta t}\right)\right)^{\vee}\right\|_2^2}$$

- 相对平移误差

$$\mathrm{RPE}_{\text{trans}} = \sqrt{\frac{1}{N-\Delta t}\sum_{i=1}^{N-\Delta t}\|\operatorname{trans}\left(\left(\boldsymbol{T}_{\mathrm{gt},i}^{-1}\boldsymbol{T}_{\mathrm{gt},i+\Delta t}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{T}_{\mathrm{est},i}^{-1}\boldsymbol{T}_{\mathrm{est},i+\Delta t}\right)\right)\|_2^2}$$

4.5 相似变换群 $\mathrm{Sim}(3)$ 与李代数

- 相似变换

$$\boldsymbol{p}' = \begin{bmatrix} s\boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{p} = s\boldsymbol{R}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{t}$$

- 相似变换群 $\mathrm{Sim}(3)$

$$\mathrm{Sim}(3) = \left\{ \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} s\boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times4} \right\}$$

- 相似变换群的李代数 $\mathfrak{sim}(3)$

$$\mathrm{sim}(3) = \left\{ \boldsymbol{\zeta} \mid \boldsymbol{\zeta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho} \\ \boldsymbol{\phi} \\ \sigma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^7, \boldsymbol{\zeta}^\wedge = \begin{bmatrix} \sigma\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\phi}^\wedge & \boldsymbol{\rho} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times4} \right\}$$

- 相似变换群的指数映射

$$\begin{aligned} \exp\left(\boldsymbol{\zeta}^\wedge\right) &= \begin{bmatrix} \mathrm{e}^\sigma \exp\left(\phi^\wedge\right) & \boldsymbol{J}_s \rho \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}, \\ s &= \mathrm{e}^\sigma, \boldsymbol{R} = \exp\left(\boldsymbol{\phi}^\wedge\right), \boldsymbol{t} = \boldsymbol{J}_s\boldsymbol{\rho}, \\ \boldsymbol{J}_s &= \frac{\mathrm{e}^\sigma - 1}{\sigma}\boldsymbol{I} + \frac{\sigma\mathrm{e}^\sigma\sin\theta + (1-\mathrm{e}^\sigma\cos\theta)\theta}{\sigma^2+\theta^2}\boldsymbol{a}^\wedge \\ &\quad + \left(\frac{\mathrm{e}^\sigma - 1}{\sigma} - \frac{(\mathrm{e}^\sigma\cos\theta - 1)\sigma + (\mathrm{e}^\sigma\sin\theta)\theta}{\sigma^2+\theta^2}\right)\boldsymbol{a}^\wedge\boldsymbol{a}^\wedge. \end{aligned}$$

- 相思变换群的扰动模型
  - $\mathrm{Sim}(3)$ 的 BCH 近似与 $\mathrm{SE}(3)$ 是类似的。我们可以讨论一个点 $\boldsymbol{p}$ 经过相似变换 $\boldsymbol{Sp}$ 后, 相对于 $\boldsymbol{S}$ 的导数。同样地, 存在微分模型和扰动模型两种方式, 而扰动模型较为简单。我们省略推导 过程, 直接给出扰动模型的结果。设给予 $\boldsymbol{Sp}$ 左侧一个小扰动 $\exp\left(\boldsymbol{\zeta}^\wedge\right)$, 并求 $\boldsymbol{Sp}$ 对于扰动的导数。因为 $\boldsymbol{Sp}$ 是 4 维的齐次坐标, $\boldsymbol{\zeta}$ 是 7 维向量, 所以该导数应该是 4×7 的雅可比。方便起见, 记 $\boldsymbol{Sp}$ 的前 3 维组成向量为 $\boldsymbol{q}$, 那么:

$$\frac{\partial\boldsymbol{Sp}}{\partial\boldsymbol{\zeta}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{q}^\wedge & \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$$

4.6 CPP Demo

- useSophus
  - 本程序演示 Sophus 库的基本用法，SO3 <---> so3，SE3 <---> se3
- example
  - trajectoryError

- 本程序演示了如何通过 Sophus 库计算真值轨迹与预测轨迹之间的误差