视觉SLAM十四讲笔记

第三讲 - 三维空间刚体运动

向量计算

- 向量内积，可以描述向量间的投影关系

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{3}a_ib_i=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$$

- 向量外积，外积的结果是一个垂直于叉乘的两个向量的向量，大小为$|a||b|sin<a,b>$,是两个向量张成的四边形的有向面积

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{Vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{Vmatrix}=\begin{bmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\ a_3b_1-a_1b_3\\ a_1b_2-a_2b_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{b}\stackrel{\text{def}}{=\!=}\boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{b}$$

- 反对称矩阵：

$$\boldsymbol{a}^{\wedge}=\begin{bmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{bmatrix}$$

旋转矩阵$\boldsymbol{R}$

- 旋转矩阵是正交矩阵，其逆为自身的转置
- 旋转矩阵的行列式为1
- 旋转矩阵属于特殊正交群 SO(3) (Special Orthogonal Group)

$$\mathrm{SO}(3)=\{\boldsymbol{R}\in\mathbb{R}^{3\times3}|\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I},\det(\boldsymbol{R})=1\}$$
$$\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}$$

变换矩阵$\boldsymbol{T}$

- 变换矩阵属于特殊欧式群SE(3)

$$\mathrm{SE}(3)=\{\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R} & \boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{0} & 1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times4}|\boldsymbol{R}\in\mathrm{SO}(3),t\in\mathbb{R}^3\}$$
$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}=\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{a}\Rightarrow\boldsymbol{c}=\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{a}$$
$$\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{0} & 1\end{bmatrix}$$

旋转向量$\theta\boldsymbol{n}$

- 任意旋转都可以用一个旋转轴和一个旋转角来刻画
- 旋转向量的方向与单位长度的旋转轴$\boldsymbol{n}$一致，长度等于旋转角θ，则可以表示为$\theta\boldsymbol{n}$
- **罗德里格斯公式**
    - 从旋转向量 $\theta\boldsymbol{n}$ 到旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$

$$\boldsymbol{R}=\cos(\theta)\boldsymbol{I}+(1-\cos(\theta))\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}+\sin(\theta)\boldsymbol{n}^{\wedge}$$

- 从旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$ 到旋转向量 $\theta\boldsymbol{n}$，通过对 $\boldsymbol{R}$ 求迹（即求矩阵对角线元素之和）：

$$\theta = \arccos\left(\frac{(\operatorname{tr}(\boldsymbol{R})) - 1}{2}\right)$$
$$\theta = \arccos\left(\frac{(1 + 2\cos(\theta)) - 1}{2}\right)$$
$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}, (\boldsymbol{R} - \mathbf{I})\boldsymbol{n} = \mathbf{0}$$

- 旋转向量的奇异性发生在转角θ超过2π时产生周期性

欧拉角

- 使用三个分离的旋转角
- 常用的RPY(Roll-Pitch-Yaw)，即ZYX旋转，假设刚体正前方为X轴朝向
  - 绕Z旋转，偏航角Yaw
  - 绕新Y旋转，俯仰角Pitch
  - 绕新X旋转，翻滚角Roll
- 欧拉角有万向锁从而产生奇异性问题，俯仰角为$\pm 90^\circ$ 时，第一次旋转与第三次旋转在宏观层面效果相同，使系统丢失一个自由度。

四元数$\boldsymbol{q}$

- 四元数没有奇异性，可以解决三维向量描述旋转时的奇异性问题
- 四元数基本定义

$$\boldsymbol{q} = q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_3\mathrm{k}$$
$$\boldsymbol{q} = [s, \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}], s = q_0 \in \mathbb{R}, \boldsymbol{v} = [q_1, q_2, q_3]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$$

- 四元数运算
  - 加减

$$\boldsymbol{q}_a \pm \boldsymbol{q}_b = [s_a \pm s_b, \boldsymbol{v}_a \pm \boldsymbol{v}_b]^{\mathrm{T}}$$

  - 乘法

$$\boldsymbol{q}_a\boldsymbol{q}_b = [s_a s_b - \boldsymbol{v}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_b, s_a\boldsymbol{v}_b + s_b\boldsymbol{v}_a + \boldsymbol{v}_a \times \boldsymbol{v}_b]^{\mathrm{T}}$$

  - 模长

$$\|\boldsymbol{q}_a\| = \sqrt{s_a^2 + x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$$
$$\|\boldsymbol{q}_a\boldsymbol{q}_b\| = \|\boldsymbol{q}_a\|\,\|\boldsymbol{q}_b\|$$

  - 共轭

$$\boldsymbol{q}^* = [s_a, -\boldsymbol{v}_a]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{q}^*\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^* = [s_a^2 + \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}, \mathbf{0}]^{\mathrm{T}}$$

  - 逆

$$\boldsymbol{q}^{-1} = \boldsymbol{q}^*/\|\boldsymbol{q}\|^2$$
$$\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^{-1} = \boldsymbol{q}^{-1}\boldsymbol{q} = 1$$
$$(\boldsymbol{q}_a\boldsymbol{q}_b)^{-1} = \boldsymbol{q}_b^{-1}\boldsymbol{q}_a^{-1}$$

- 数乘

$$\mathrm{k}\boldsymbol{q} = [\mathrm{k}s, \mathrm{k}\boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}}$$

- 四元数旋转
  - 空间三维点 $\boldsymbol{p} = [x, y, z] \in \mathbb{R}^3$ 经过旋转 $\boldsymbol{q}$ 变为 $\boldsymbol{p}'$

$$\boldsymbol{p} = [0, x, y, z]^{\mathrm{T}} = [0, \boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{q}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^{-1}$$

- 四元数转换
  - 四元数到旋转矩阵

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} + s^2\boldsymbol{I} + 2s\boldsymbol{v}^{\wedge} + (\boldsymbol{v}^{\wedge})^2$$

  - 四元数到旋转向量

$$\theta = 2\arccos(s)$$
$$[n_x, n_y, n_z]^{\mathrm{T}} = [q_1, q_2, q_3]^{\mathrm{T}}/\sin(\frac{\theta}{2})$$

相似、仿射、射影变换

- 欧式变换
  - 自由度：6
  - 不变性质：长度、夹角、体积
  - $$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}$$
- 相似变换
  - 自由度：7
  - 不变性质：体积比
  - 特点:
    - 比欧式变换多一个自由度，允许物体均匀缩放
    - 相似变换的集合也叫做相似变换群Sim(3)
  - $$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} s\boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}$$
- 仿射变换
  - 自由度：12
  - 不变性质：平行性、体积比
  - 特点:
    - 只要求 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，不必是正交矩阵，

        - 仿射变换也叫做正交投影，经过仿射变换后，立方体不再是方的，但各个平面仍然是平行四边形
    - $$T = \begin{bmatrix} A & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 射影变换
    - 自由度：15
    - 不变性质：接触平面的相交与相切
    - 特点:
        - 左上角是可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$，右上角是平移向量 $\boldsymbol{t}$，左下角是缩放向量 $\boldsymbol{a}^\mathrm{T}$。
        - 当 $v \neq 0$ 时，可以对整个矩阵除以 v 得到右下角为1的矩阵，否则得到右下角为0的矩阵
        - 从真实世界到相机照片的变换可以看成是一个射影变换
    - $$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{a}^\mathrm{T} & v \end{bmatrix}$$

CPP Demo

- useEigen
    - 使用 Eigen 库的例子
- useGeometry
    - 使用 Eigen 中的几何库的例子
- visualizeGeometry
    - 使用 pangolin 库进行可视化的例子
- examples
    - 使用 pangolin 库可视化预先储存的轨迹