# 视觉SLAM十四讲笔记

## 第三讲 - 三维空间刚体运动

### 向量计算

• 向量内积,可以描述向量间的投影关系

$$oldsymbol{a} \cdot oldsymbol{b} = oldsymbol{a}^{ ext{T}} oldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = |oldsymbol{a}| |oldsymbol{b}| \cos < oldsymbol{a}, oldsymbol{b} >$$

• 向量外积,外积的结果是一个垂直于叉乘的两个向量的向量,大小为|a||b|sin < a, b>,是两个向量张成的四边形的有向面积

$$egin{aligned} m{a} imes m{b} = egin{aligned} m{e}_1 & m{e}_2 & m{e}_3 \ a_1 & a_2 & a_3 \ b_1 & b_2 & b_3 \end{aligned} \end{bmatrix} = egin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \ a_3b_1 - a_1b_3 \ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} = egin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \ a_3 & 0 & -a_1 \ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} m{b} \stackrel{ ext{def}}{=\!=\!=\!=} m{a}^{\wedge} m{b} \end{aligned}$$

• 反对称矩阵:

$$m{a}^\wedge = egin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \ a_3 & 0 & -a_1 \ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

#### 旋转矩阵R

- 旋转矩阵是正交矩阵, 其逆为自身的转置
- 旋转矩阵的行列式为1
- 旋转矩阵属于特殊正交群 SO(3) (Special Orthogonal Group)

$$\mathrm{SO}(3) = \{oldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{3 imes 3} | oldsymbol{R} oldsymbol{R}^\mathrm{T} = oldsymbol{I}, \det(oldsymbol{R}) = 1\}$$
 $oldsymbol{a}' = oldsymbol{R}^{-1} oldsymbol{a} = oldsymbol{R}^\mathrm{T} oldsymbol{a}$ 

## 变换矩阵T

• 变换矩阵属于特殊欧式群SE(3)

$$egin{aligned} ext{SE}(3) &= \{m{T} = egin{bmatrix} m{R} & m{t} \ m{0} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 imes4} | m{R} \in ext{SO}(3), t \in \mathbb{R}^3 \} \ m{b} &= m{T}_1 m{a}, m{c} = m{T}_2 m{a} \Rightarrow m{c} = m{T}_2 m{T}_1 m{a} \ m{T}^{-1} &= egin{bmatrix} m{R}^{ ext{T}} & -m{R}^{ ext{T}} m{t} \ m{0} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## 旋转向量 $\theta n$

- 任意旋转都可以用一个旋转轴和一个旋转角来刻画
- 旋转向量的方向与单位长度的旋转轴n一致,长度等于旋转角 $\theta$ ,则可以表示为 $\theta n$
- 罗德里格斯公式
  - o 从旋转向量  $\theta n$  到旋转矩阵 R

$$oldsymbol{R} = \cos( heta) oldsymbol{I} + (1-\cos( heta)) oldsymbol{n} oldsymbol{n}^{ ext{T}} + \sin( heta) oldsymbol{n}^{\wedge}$$

 $\circ$  从旋转矩阵 R 到旋转向量  $\theta n$ , 通过对 R 求迹(即求矩阵对角线元素之和):

$$egin{aligned} heta &= rccos(rac{( ext{tr}(oldsymbol{R}))-1}{2}) \ heta &= rccos(rac{(1+2\cos( heta))-1}{2}) \ oldsymbol{R}oldsymbol{n} &= oldsymbol{n}, (oldsymbol{R}-oldsymbol{I})oldsymbol{n} &= oldsymbol{0} \end{aligned}$$

• 旋转向量的奇异性发生在转角 $\theta$ 超过 $2\pi$ 时产生周期性

#### 欧拉角

- 使用三个分离的旋转角
- 常用的RPY(Roll-Pitch-Yaw), 即ZYX旋转, 假设刚体正前方为X轴朝向
  - o 绕Z旋转,偏航角Yaw
  - o 绕新Y旋转, 俯仰角Pitch
  - o 绕新X旋转,翻滚角Roll
- 欧拉角有万向锁从而产生奇异性问题,俯仰角为±90°时,第一次旋转与第三次旋转在宏观层面效果相同,使系统丢失一个自由度。

# 四元数q

- 四元数没有奇异性,可以解决三维向量描述旋转时的奇异性问题
- 四元数基本定义

$$egin{aligned} oldsymbol{q} &= q_0 + q_1 \mathrm{i} + q_2 \mathrm{j} + q_3 \mathrm{k} \ oldsymbol{q} &= [s, oldsymbol{v}^\mathrm{T}], s = q_0 \in \mathbb{R}, oldsymbol{v} = [q_1, q_2, q_3]^\mathrm{T} \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

- 四元数运算
  - 0 加减

$$oldsymbol{q}_a \pm oldsymbol{q}_b = [s_a \pm s_b, oldsymbol{v}_a \pm oldsymbol{v}_b]^{ ext{T}}$$

o 乘法

$$oldsymbol{q}_a oldsymbol{q}_b = [s_a s_b - oldsymbol{v}_a^{ ext{T}} oldsymbol{v}_b, s_a oldsymbol{v}_b + s_b oldsymbol{v}_a + oldsymbol{v}_a imes oldsymbol{v}_b]^{ ext{T}}$$

o 模长

$$egin{aligned} \|oldsymbol{q}_a\| &= \sqrt{s_a^2 + x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \ \|oldsymbol{q}_aoldsymbol{q}_b\| &= \|oldsymbol{q}_a\| \|oldsymbol{q}_b\| \end{aligned}$$

o 共轭

$$egin{aligned} oldsymbol{q}^* &= [s_a, -oldsymbol{v}_a]^{\mathrm{T}} \ oldsymbol{q}^*oldsymbol{q} &= oldsymbol{q}oldsymbol{q}^* &= [s_a^2 + oldsymbol{v}^{\mathrm{T}}oldsymbol{v}, oldsymbol{0}]^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

0 逆

$$egin{aligned} oldsymbol{q}^{-1} &= oldsymbol{q}^*/\|oldsymbol{q}\|^2 \ oldsymbol{q} oldsymbol{q}^{-1} &= oldsymbol{q}^{-1}oldsymbol{q} &= 1 \ (oldsymbol{q}_a oldsymbol{q}_b)^{-1} &= oldsymbol{q}_b^{-1} oldsymbol{q}_a^{-1} \end{aligned}$$

o 数乘

$$k q = [ks, kv]^T$$

- 四元数旋转
  - 空间三维点  $\boldsymbol{p} = [x, y, z] \in \mathbb{R}^3$  经过旋转  $\boldsymbol{q}$  变为  $\boldsymbol{p}'$

$$oldsymbol{p} = [0, x, y, z]^{\mathrm{T}} = [0, oldsymbol{v}]^{\mathrm{T}} \ oldsymbol{p}' = oldsymbol{q} oldsymbol{p}^{q-1}$$

- 四元数转换
  - o 四元数到旋转矩阵

$$oldsymbol{R} = oldsymbol{v} oldsymbol{v}^{ ext{T}} + s^2 oldsymbol{I} + 2 s oldsymbol{v}^\wedge + (oldsymbol{v}^\wedge)^2$$

o 四元数到旋转向量

$$egin{aligned} heta &= 2 \arccos(s) \ [n_x, n_y, n_z]^{ ext{T}} &= [q_1, q_2, q_3]^{ ext{T}} / \sin(rac{ heta}{2}) \end{aligned}$$

## 相似、仿射、射影变换

- 欧式变换
  - 自由度: 6
  - o 不变性质:长度、夹角、体积

$$m{T} = egin{bmatrix} m{R} & m{t} \ m{0} & 1 \end{bmatrix}$$

- 相似变换
  - o 自由度: 7
  - o 不变性质: 体积比
  - o 特点:
    - 比欧式变换多一个自由度, 允许物体均匀缩放
    - 相似变换的集合也叫做相似变换群Sim(3)

$$oldsymbol{ au} = egin{bmatrix} s oldsymbol{R} & oldsymbol{t} \ oldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}$$

- 仿射变换
  - o 自由度: 12
  - o 不变性质: 平行性、体积比
  - o 特点:
    - 只要求 **A** 是可逆矩阵,不必是正交矩阵,

■ 仿射变换也叫做正交投影,经过仿射变换后,立方体不再是方的,但各个平面仍然是平 行四边形

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}$$

• 射影变换

o 自由度: 15

o 不变性质:接触平面的相交与相切

o 特点:

■ 左上角是可逆矩阵  $\boldsymbol{A}$ ,右上角是平移向量  $\boldsymbol{t}$ ,左下角是缩放向量  $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$ 。

■ 当 $v \neq 0$ 时,可以对整个矩阵除以v得到右下角为1的矩阵,否则得到右下角为0的矩阵

■ 从真实世界到相机照片的变换可以看成是一个射影变换

$$oldsymbol{T} = egin{bmatrix} oldsymbol{A} & oldsymbol{t} \ oldsymbol{a}^{ ext{T}} & v \end{bmatrix}$$

#### **CPP Demo**

- useEigen
  - o 使用 Eigen 库的例子
- useGeometry
  - o 使用 Eigen 中的几何库的例子
- visualizeGeometry
  - o 使用 pangolin 库进行可视化的例子
- examples
  - o 使用 pangolin 库可视化预先储存的轨迹