视觉SLAM十四讲笔记

第四讲 - 李群与李代数

4.1 李群与李代数基础

李群

群定义

只有一个良好的运算的集合, 称之为群

$$egin{aligned} \mathrm{SO}(3) &= \{oldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{3 imes 3} | oldsymbol{R} oldsymbol{R}^\mathrm{T} = oldsymbol{I}, \det(oldsymbol{R}) = 1 \} \ \mathrm{SE}(3) &= \{oldsymbol{T} = egin{bmatrix} oldsymbol{R} & oldsymbol{t} \\ oldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 imes 4} | oldsymbol{R} \in \mathrm{SO}(3), t \in \mathbb{R}^3 \} \ oldsymbol{R}_1 + oldsymbol{R}_2
ot\in \mathrm{SO}(3), & oldsymbol{T}_1 + oldsymbol{T}_2
ot\in \mathrm{SE}(3) \ oldsymbol{R}_1 oldsymbol{R}_2 \in \mathrm{SO}(3), & oldsymbol{T}_1 oldsymbol{T}_2 \in \mathrm{SE}(3) \end{aligned}$$

群性质

1. 封闭性

$$\forall a_1, a_2 \in A, \quad a_1 \cdot a_2 \in A$$

2. 结合律

$$orall a_1,a_2,a_3\in A,\quad (a_1\cdot a_2)\cdot a_3=a_1\cdot (a_2\cdot a_3)$$

3. 幺元

$$\exists a_0 \in A, \quad \text{s.t.} \quad \forall a \in A, \quad a_0 \cdot a = a \cdot a_0 = a$$

4. 逆

$$\forall a \in A, \quad \exists a^{-1} \in A, \quad \text{s.t.} \quad a \cdot a^{-1} = a_0$$

一般常见的群:

- 一般线性群 GL(n)
- 特殊正交群 SO(n)
- 特殊欧式群 SE(n)

李群定义

李群指具有连续(光滑)性质的群。SO(3) 与 SE(3) 在实数空间上是连续的,想象一个刚体能够连续地在空间中运动。

李代数

李代数的引出

$$oldsymbol{R}(t) = \exp(oldsymbol{\phi}_0^\wedge t), \quad oldsymbol{\phi}(t) \in \mathbb{R}^3$$

- 1. 给定某时刻的 $m{R}$,可以求得一个 $m{\phi}$,它描述了 $m{R}$ 在局部的导数关系, $m{\phi}$ 为对应到 ${
 m SO}(3)$ 上的李代数 ${
 m \mathfrak{so}}(3)$
- 2. 李代数的指数映射, 对数映射

1. 指数映射: $oldsymbol{R} = \exp(oldsymbol{\phi}^\wedge), \quad \mathfrak{so}(3)
ightarrow \mathrm{SO}(3)$

2. 对数映射: $\boldsymbol{\phi} = \ln(\boldsymbol{R})^{\vee}$, $\mathrm{SO}(3) \to \mathfrak{so}(3)$

李代数的定义

每个李群都有与之对应的李代数。李代数描述了李群的局部性质,准确的说,是单位元附近的正切空间。一般的李代数定义如下:

- 李代数由一个集合 \mathbb{V} 、一个数域 \mathbb{F} 和一个二元运算 [,] 组成。如果它们满足以下性质,则称 $(\mathbb{V},\mathbb{F},[,])$ 为一个李代数,记为 \mathfrak{g} :
 - 1. 封闭性

$$orall oldsymbol{X}, oldsymbol{Y} \in \mathbb{V}, [oldsymbol{X}, oldsymbol{Y}] \in \mathbb{V}$$

2. 双线性

$$\forall \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \mathbb{V}, a, b \in \mathbb{F}$$
s. t. $[a\boldsymbol{X} + b\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}] = a[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z}] + b[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}], \quad [\boldsymbol{Z}, a\boldsymbol{X} + b\boldsymbol{Y}] = a[\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{X}] + b[\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Y}]$

3. 自反性

$$orall oldsymbol{X} \in \mathbb{V}, [oldsymbol{X}, oldsymbol{X}] = oldsymbol{0}$$

4. 雅可比等价

$$orall m{X}, m{Y}, m{Z} \in \mathbb{V}, [m{X}, [m{Y}, m{Z}]] + [m{Z}, [m{X}, m{Y}]] + [m{Y}, [m{Z}, m{X}]] = m{0}$$

李代数 50(3)

1. 李代数 $\mathfrak{so}(3)$ 的反对称矩阵 Φ

$$oldsymbol{\Phi} = oldsymbol{\phi}^\wedge = egin{bmatrix} 0 & -\phi_3 & \phi_2 \ \phi_3 & 0 & -\phi_1 \ -\phi_2 & \phi_1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 imes 3}$$

2. so(3) 的定义

$$\mathfrak{so}(3) = \left\{oldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^3, oldsymbol{\Phi} = oldsymbol{\phi}^\wedge \in \mathbb{R}^{3 imes 3}
ight\}$$

3. so(3) 到 SO(3) 的指数映射

$$oldsymbol{R} = \exp\left(oldsymbol{\phi}^\wedge
ight)$$

4. \$0(3) 的李括号

$$[oldsymbol{\phi}_1,oldsymbol{\phi}_2]=(oldsymbol{\Phi}_1oldsymbol{\Phi}_2-oldsymbol{\Phi}_2oldsymbol{\Phi}_1)^ee$$

李代数 \$e(3)

1. $\mathfrak{se}(3)$ 的定义

$$\mathfrak{se}(3) = \left\{ oldsymbol{\xi} = egin{bmatrix} oldsymbol{
ho} \\ oldsymbol{\phi} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6, oldsymbol{
ho} \in \mathbb{R}^3, oldsymbol{\phi} \in \mathfrak{so}(3), oldsymbol{\xi}^\wedge = egin{bmatrix} oldsymbol{\phi}^\wedge & oldsymbol{
ho} \\ oldsymbol{0}^\mathrm{T} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 imes 4}
ight\}$$

2. se(3) 到 SO(3) 的指数映射

$$oldsymbol{T} = \exp\left(oldsymbol{\xi}^\wedge
ight)$$

3. se(3) 的李括号

$$[oldsymbol{\xi}_1,oldsymbol{\xi}_2] = ig(oldsymbol{\xi}_1^\wedge oldsymbol{\xi}_2^\wedge - oldsymbol{\xi}_2^\wedge oldsymbol{\xi}_1^\wedgeig)^ee$$

4.2 指数与对数映射

50(3) 指数映射与对数映射

定义 ϕ 的模长为 θ ,方向为a:

$$\phi = \theta a$$
, $\|a\| = 1$

 $\mathfrak{so}(3)$ 到 $\mathrm{SO}(3)$ 的指数映射 (*类似罗德里格斯公式!):

$$egin{aligned} oldsymbol{R} &= \exp\left(oldsymbol{\phi}^{\wedge}
ight) \ &= \exp\left(oldsymbol{ heta}oldsymbol{a}^{\wedge}
ight) \ &= \sum_{n=0}^{\infty}rac{1}{n!}ig(oldsymbol{a}oldsymbol{a}^{\wedge}ig)^{n} \ &= \cos heta oldsymbol{I} + (1-\cos heta)oldsymbol{a}oldsymbol{a}^{ ext{T}} + \sin hetaoldsymbol{a}^{\wedge} \end{aligned}$$

SO(3) 到 $\mathfrak{so}(3)$ 的对数映射 (通过对 \mathbf{R} 求迹, 即求矩阵对角线元素之和):

$$egin{aligned} oldsymbol{\phi} &= \ln(oldsymbol{R})^ee = \left(\sum_{n=0}^\infty rac{(-1)^n}{n+1} (oldsymbol{R} - oldsymbol{I})^{n+1}
ight)^ee \ &= oldsymbol{a} oldsymbol{e} \ eta &= rccos(rac{\operatorname{tr}(oldsymbol{R}) - 1}{2}) \ oldsymbol{R}oldsymbol{a} &= oldsymbol{a}, \quad (oldsymbol{R} - oldsymbol{I})oldsymbol{a} &= oldsymbol{0} \end{aligned}$$

se(3) 指数映射与对数映射

 $\mathfrak{se}(3)$ 到 SE(3) 的指数映射:

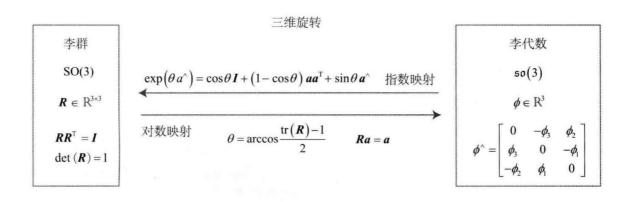
$$egin{aligned} oldsymbol{T} &= \expig(oldsymbol{\xi}^{\wedge}ig) \ &= egin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} rac{1}{n!} (oldsymbol{\phi}^{\wedge})^n & \sum_{n=0}^{\infty} rac{1}{(n+1)!} (oldsymbol{\phi}^{\wedge})^n oldsymbol{
ho} \ oldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} \ &\triangleq egin{bmatrix} oldsymbol{R} & oldsymbol{J} oldsymbol{
ho} \ oldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$egin{aligned} oldsymbol{\phi} &= oldsymbol{a}oldsymbol{a}, \quad \|oldsymbol{a}\| &= 1, \quad oldsymbol{\xi} = egin{bmatrix} oldsymbol{\phi} \\ oldsymbol{R} &= \cos oldsymbol{ heta} oldsymbol{I} + (1 - \cos oldsymbol{ heta}) oldsymbol{a}oldsymbol{a}^{\mathrm{T}} + \sin oldsymbol{ heta}oldsymbol{a}^{\wedge} \\ oldsymbol{J} &= rac{\sin oldsymbol{ heta}}{oldsymbol{ heta}} oldsymbol{I} + \left(1 - rac{\sin oldsymbol{ heta}}{oldsymbol{ heta}}
ight) oldsymbol{a}oldsymbol{a}^{\mathrm{T}} + rac{1 - \cos oldsymbol{ heta}}{oldsymbol{ heta}} oldsymbol{a}^{\wedge} \\ oldsymbol{t} &= oldsymbol{J} oldsymbol{
ho} \end{aligned}$$

SE(3) 到 $\mathfrak{se}(3)$ 的对数映射:

$$egin{aligned} oldsymbol{\phi} &= oldsymbol{a} oldsymbol{a} \ oldsymbol{ heta} &= rccos(rac{\operatorname{tr}(oldsymbol{R}) - 1}{2}) \ oldsymbol{R}oldsymbol{a} &= oldsymbol{a}, \quad (oldsymbol{R} - oldsymbol{I})oldsymbol{a} &= oldsymbol{0} \ oldsymbol{J}oldsymbol{
ho} &= oldsymbol{t} \ oldsymbol{\xi} &= egin{bmatrix} oldsymbol{\phi} \\ oldsymbol{
ho} \end{bmatrix} = egin{bmatrix} oldsymbol{\phi} \\ oldsymbol{ heta} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

三维旋转与三维变换指数映射与对数映射关系表



三维变换

李群
SE(3)
$$T \in \mathbb{R}^{4\times4}$$

$$T = \begin{bmatrix} R & t \\ \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & 1 \end{bmatrix}$$
対数映射
$$\theta = \arccos \frac{\operatorname{tr}(R) - 1}{2}$$

$$Ra = a \quad t = J\rho$$

李代数
$$\mathfrak{se}(3)$$

4.3 李代数求导与扰动模型

BCH近似

在SO(3)中的两个矩阵相乘,无法对应 $\mathfrak{so}(3)$ 中的两个李代数相加,因为对于矩阵来说,下式不成立:

$$\ln(\exp(\boldsymbol{A})\exp(\boldsymbol{B})) = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$$

两个李代数指数映射**乘积**的完整形式如下(BCH公式), 其中[]为李括号:

$$\ln(\exp(oldsymbol{A})\exp(oldsymbol{B})) = oldsymbol{A} + oldsymbol{B} + rac{1}{2}[oldsymbol{A},oldsymbol{B}] + rac{1}{12}[oldsymbol{A},[oldsymbol{A},oldsymbol{B}]] - rac{1}{12}[oldsymbol{B},[oldsymbol{A},oldsymbol{B}]] + \cdots$$

考虑 SO(3) 上的李代数 $\ln \left(\exp \left(\phi_1^{\wedge} \right) \exp \left(\phi_2^{\wedge} \right) \right)^{\vee}$, 当 ϕ_1 或 ϕ_2 为小量时, 小量二次以上的项都可以被忽略, 此时BCH拥有线性近似表达:

$$\ln\left(\exp\left(oldsymbol{\phi}_{1}^{\wedge}
ight)\exp\left(oldsymbol{\phi}_{2}^{\wedge}
ight)
ight)^{ee}pprox egin{dcases} oldsymbol{J}_{l}(oldsymbol{\phi}_{2})^{-1}oldsymbol{\phi}_{1}+oldsymbol{\phi}_{2} & ext{ 当}oldsymbol{\phi}_{1}$$
 为小量、 $oldsymbol{J}_{T}(oldsymbol{\phi}_{1})^{-1}oldsymbol{\phi}_{2}+oldsymbol{\phi}_{1} & ext{ 当}oldsymbol{\phi}_{2}$ 为小量、

以第一个近似为例。该式告诉我们,当对一个旋转矩阵 \mathbf{R}_2 (李代数为 ϕ_2) 左乘一个微小旋转矩阵 \mathbf{R}_1 (李代数为 ϕ_1) 时,可以近似地看作,在原有的李代数 ϕ_2 上加上了一项 $\mathbf{J}_l(\phi_2)^{-1}\phi_1$ 。同理,第二个近似描述了右乘一个微小位移的情况。于是,李代数在 BCH 近似下,分成了左乘近似和右乘近似两种,在使用时我们须注意使用的是左乘模型还是右乘模型。

本书以左乘为例。左乘 BCH 近似雅可比 J_1 事实上就是式 (4.27) 的内容:

$$\boldsymbol{J}_{l} = \boldsymbol{J} = \frac{\sin \theta}{\theta} \boldsymbol{I} + \left(1 - \frac{\sin \theta}{\theta}\right) \boldsymbol{a} \boldsymbol{a}^{\mathsf{T}} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta} \boldsymbol{a}^{\wedge}. \tag{4.31}$$

它的逆为

$$\boldsymbol{J}_{l}^{-1} = \frac{\theta}{2} \cot \frac{\theta}{2} \boldsymbol{I} + \left(1 - \frac{\theta}{2} \cot \frac{\theta}{2}\right) \boldsymbol{a} \boldsymbol{a}^{\mathsf{T}} - \frac{\theta}{2} \boldsymbol{a}^{\wedge}. \tag{4.32}$$

而右乘雅可比仅需要对自变量取负号即可:

$$J_r(\phi) = J_l(-\phi). \tag{4.33}$$

BCH近似的意义:

- 对于so(3)
 - 。 李群上的乘法对应李代数上的加法, 对于某个旋转 $m{R}$, 对应的李代数为 $m{\phi}$ 。对它左乘一个微小旋转 $\Delta m{R}$, 对应李代数 $\Delta m{\phi}$, 在李群上得到结果 $\Delta m{R} \cdot m{R}$, 李代数上根据BCH近似,为 $m{J}_l^{-1}(m{\phi})\Delta m{\phi} + m{\phi}$, 如下:

$$\exp\left(\Deltaoldsymbol{\phi}^{\wedge}
ight)\exp\left(oldsymbol{\phi}^{\wedge}
ight)=\exp\left(\left(oldsymbol{\phi}+J_{l}^{-1}(oldsymbol{\phi})\Deltaoldsymbol{\phi}
ight)^{\wedge}
ight)$$

o 李代数上的加法对应李群上的乘法:

$$\exp\left((oldsymbol{\phi}+\Deltaoldsymbol{\phi})^{\wedge}
ight)=\exp\left((oldsymbol{J}_{l}\Deltaoldsymbol{\phi})^{\wedge}
ight)\exp\left(oldsymbol{\phi}^{\wedge}
ight)=\exp\left(oldsymbol{\phi}^{\wedge}
ight)\exp\left((oldsymbol{J}_{r}\Deltaoldsymbol{\phi})^{\wedge}
ight)$$

对于se(3)

$$egin{aligned} \exp\left(\Deltaoldsymbol{\xi}^\wedge
ight) & \exp\left(\left(oldsymbol{\mathcal{J}}_l^{-1}\Deltaoldsymbol{\xi}+oldsymbol{\xi}
ight)^\wedge
ight) \ \exp\left(oldsymbol{\xi}^\wedge
ight) & \exp\left(\left(oldsymbol{\mathcal{J}}_r^{-1}\Deltaoldsymbol{\xi}+oldsymbol{\xi}
ight)^\wedge
ight) \end{aligned}$$

SO(3) 上的求导

为了优化位姿的估计值,经常会讨论关于位姿函数的导数,有以下两种方法对位姿函数的求导

- 李代数求导法: 用李代数表示姿态, 根据李代数加法进行李代数求导
- 扰动求导法: 对李群左乘或右乘一个微小扰动, 对该扰动求导

李代数求导法

对空间点 p 旋转 R, 得到 Rp, 设 R 对应的李代数为 ϕ , 计算旋转之后点的坐标相对于旋转的导数:

$$rac{\partial (m{R}m{p})}{\partial m{R}} = rac{\partial \left(\exp \left(m{\phi}^{\wedge}
ight) m{p}
ight)}{\partial m{\phi}} = - (m{R}m{p})^{\wedge} m{J}_l$$

扰动模型求导法(左乘)

对空间点 p 旋转 R, 得到 Rp, 对R 进行一次扰动 ΔR , 看结果相对于扰动的变化率. 以左扰动为例, 设左扰动 ΔR 对应的李代数为 φ , 对 φ 求导, **结果比李代数求导法省去一个** J_l 的计算:

$$rac{\partial (oldsymbol{R}oldsymbol{p})}{\partial oldsymbol{arphi}} = \lim_{oldsymbol{arphi} o 0} rac{\exp{(oldsymbol{arphi}^\wedge)}\exp{(oldsymbol{\phi}^\wedge)}oldsymbol{p} - \exp{(oldsymbol{\phi}^\wedge)}oldsymbol{p}}{oldsymbol{arphi}} = -(oldsymbol{R}oldsymbol{p})^\wedge$$

SE(3) 上的求导

扰动模型求导法(左乘)

假设某空间点 p 经过一次变换 T (对应李代数为 ξ), 得到 Tp, 给 T 左乘一个扰动 $\Delta T = \exp(\delta \xi^{\wedge})$, 设 扰动项的李代数为 $\delta \xi = [\delta \rho, \delta \phi]^{\mathrm{T}}$, 那么:

$$egin{aligned} rac{\partial (m{T}m{p})}{\partial \delta m{\xi}} &= \lim_{\delta m{\xi} o 0} rac{\exp{(\delta m{\xi}^\wedge)} \exp{(m{\xi}^\wedge)} m{p} - \exp{(m{\xi}^\wedge)} m{p}}{\delta m{\xi}} \ &= egin{bmatrix} m{I} & -(m{R}m{p} + m{t})^\wedge \ m{0}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (m{T}m{p})^\odot \end{aligned}$$

4.4 评估轨迹误差

- 绝对误差 (ATE, Absolute Trajectory Error)
 - o 绝对轨迹误差 (ATE, Absolute Trajectory Error), 实际也是均方根误差 (RMSE, Root-Mean-Squared Error)

$$ext{ATE}_{ ext{all}} = \sqrt{rac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left\| \log \left(oldsymbol{T}_{ ext{gt},i}^{-1} oldsymbol{T}_{ ext{esti},i}
ight)^ee
ight\|_2^2}$$

o 平均平移误差 (ATE, Average Translational Error), trans() 表示取括号内部变量的平移部分

$$ext{ATE}_{ ext{trans}} = \sqrt{rac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left\| ext{trans} \left(oldsymbol{T}_{ ext{gt},i}^{-1} oldsymbol{T}_{ ext{esti},\,i}
ight)
ight\|_{2}^{2}}$$

- 相对误差 (RPE, Relative Pose Error)
 - 相对轨迹误差

$$ext{RPE}_{ ext{all}} = \sqrt{rac{1}{N-\Delta t}\sum_{i=1}^{N-\Delta t}\|\log\left(\left(T_{ ext{gt},i}^{-1}oldsymbol{T}_{ ext{gt},i+\Delta t}
ight)^{-1}\left(oldsymbol{T}_{ ext{esti},i}^{-1}oldsymbol{T}_{ ext{esti},i+\Delta t}
ight)
ight)^{ee}\|_2^2}$$

o 相对平移误差

$$\mathrm{RPE}_{\mathrm{trans}} \, = \sqrt{\frac{1}{N - \Delta t} \sum_{i=1}^{N - \Delta t} \| \operatorname{trans} \left(\left(\boldsymbol{T}_{\mathrm{gt},i}^{-1} \boldsymbol{T}_{\mathrm{gt},i+\Delta t} \right)^{-1} \left(\boldsymbol{T}_{\mathrm{est},i}^{-1} \boldsymbol{T}_{\mathrm{est},i+\Delta t} \right) \right) \|_2^2}$$

4.5 相似变换群 Sim(3) 与李代数

• 相似变换

$$m{p}' = egin{bmatrix} sm{R} & m{t} \ m{0}^{ ext{T}} & 1 \end{bmatrix}m{p} = sm{R}m{p} + m{t}$$

• 相似变换群 Sim(3)

$$ext{Sim}(3) = \left\{ oldsymbol{S} = egin{bmatrix} s oldsymbol{R} & oldsymbol{t} \ oldsymbol{0}^{ ext{T}} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 imes 4}
ight\}$$

• 相似变换群的李代数 sim(3)

$$ext{sim}(3) = \left\{ oldsymbol{\zeta} \mid oldsymbol{\zeta} = egin{bmatrix} oldsymbol{
ho} \ oldsymbol{\phi} \ \sigma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^7, oldsymbol{\zeta}^\wedge = egin{bmatrix} \sigma oldsymbol{I} + oldsymbol{\phi}^\wedge & oldsymbol{
ho} \ oldsymbol{0}^ ext{T} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 imes 4}
ight\}$$

• 相似变换群的指数映射

$$egin{aligned} \exp\left(oldsymbol{\zeta}^{\wedge}
ight) &= egin{bmatrix} \mathrm{e}^{\sigma} \exp\left(\phi^{\wedge}
ight) & oldsymbol{J}_{s}
ho \ oldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}, \ s &= \mathrm{e}^{\sigma}, oldsymbol{R} = \exp\left(\phi^{\wedge}
ight), oldsymbol{t} = oldsymbol{J}_{s}oldsymbol{
ho}, \ oldsymbol{J}_{s} &= rac{\mathrm{e}^{\sigma} - 1}{\sigma} oldsymbol{I} + rac{\sigma\mathrm{e}^{\sigma}\sin\theta + (1 - \mathrm{e}^{\sigma}\cos\theta)\theta}{\sigma^{2} + \theta^{2}} oldsymbol{a}^{\wedge} \ &+ \left(rac{\mathrm{e}^{\sigma} - 1}{\sigma} - rac{(\mathrm{e}^{\sigma}\cos\theta - 1)\sigma + (\mathrm{e}^{\sigma}\sin\theta)\theta}{\sigma^{2} + \theta^{2}}
ight) oldsymbol{a}^{\wedge} oldsymbol{a}^{\wedge}. \end{aligned}$$

- 相思变换群的扰动模型
 - 。 Sim(3) 的 BCH 近似与 SE(3) 是类似的。我们可以讨论一个点 p 经过相似变换 Sp 后,相对于 S 的导数。同样地,存在微分模型和扰动模型两种方式,而扰动模型较为简单。我们省略推导 过程,直接给出扰动模型的结果。设给予 Sp 左侧一个小扰动 $\exp(\zeta^{\wedge})$,并求 Sp 对于扰动的导数。因为 Sp 是 4 维的齐次坐标, ζ 是 7 维向量,所以该导数应该是 4×7 的雅可比。方便起见,记 Sp 的前 3 维组成向量为 q,那么:

$$egin{aligned} rac{\partial oldsymbol{Sp}}{\partial oldsymbol{\zeta}} = egin{bmatrix} oldsymbol{I} & -oldsymbol{q}^\wedge & oldsymbol{q} \ oldsymbol{0}^{ ext{T}} & oldsymbol{0}^{ ext{T}} & 0 \end{bmatrix}$$

4.6 CPP Demo

- useSophus
 - o 本程序演示 Sophus 库的基本用法, SO3 <---> so3, SE3 <---> se3
- example
 - trajectoryError

■ 本程序演示了如何通过 Sophus 库计算真值轨迹与预测轨迹之间的误差