

Transformada de Fourier de tempo discreto

João Arthur, Roger de Almeida, Sofia Lopes

13 de Fevereiro de 2020

- Definição
- Propriedades
- Exemplo Teórico
- DTFT x DFT
- Exemplo Simulado 1
- Exemplo Simulado 2
- Aplicação Prática
- Referências

A Transformada de Fourier de Tempo Discreto(DTFT) é dada por:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

Também chamada de equação de análise ou espectro, onde j é a unidade imaginária e ω é a frequência angular. Note que a entrada da DTFT é um sinal discreto($x[n]$), porém sua saída é contínua e periódica.[1][2]

A Transformada Inversa de Fourier para Tempo Discreto é dada por:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

Também chamada de equação de síntese.

- Periódica em ω com período 2π
- $X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$
- $ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$
- $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) \Rightarrow x^*[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X^*(e^{-j\omega})$
- $x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$
- $x[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{-j\omega})$
- $nx[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
- $y[n] = x[n]^* h[n] \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$
- $x[n]y[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$

Exemplo Teórico

Calcular a DTFT para $x[n] = a^n u[n]$, $|a| < 1$.

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{-\infty}^{\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} \\ &= \sum_0^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \end{aligned}$$

DTFT x DFT

DTFT	DFT
Usado para sinais de duração finita e infinita	Apenas sinais de duração finita
Saída contínua e periódica	Saída discreta e não periódica
Não pode ser implementada de maneira exata	Pode ser implementada de maneira exata
Necessita de outras ferramentas matemáticas que a aproximem	É uma aproximação da DTFT

Exemplo Simulado 1

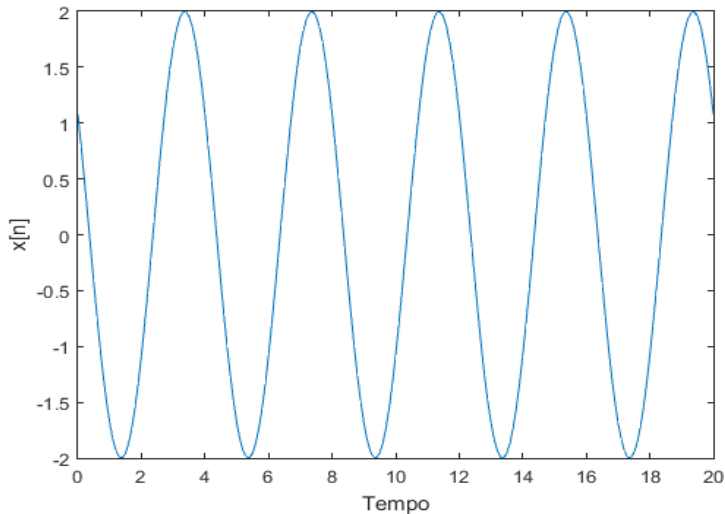
Calcule e plote no MATLAB a Transformada de Fourier de Tempo Discreto do sinal:

$$x[n] = 2\cos(0.5\pi n + 1), n = 0, 1, \dots, 20$$

Exemplo Simulado 1

```
1 N=21;
2 A=2;
3 w=0.5*pi;
4 p=1;
5 n1=0:0.1:N-1;
6 x=A*cos(w*n1+p);
7 plot(n1, x);
8 xlabel('Tempo')
9 ylabel('x[n]')
```

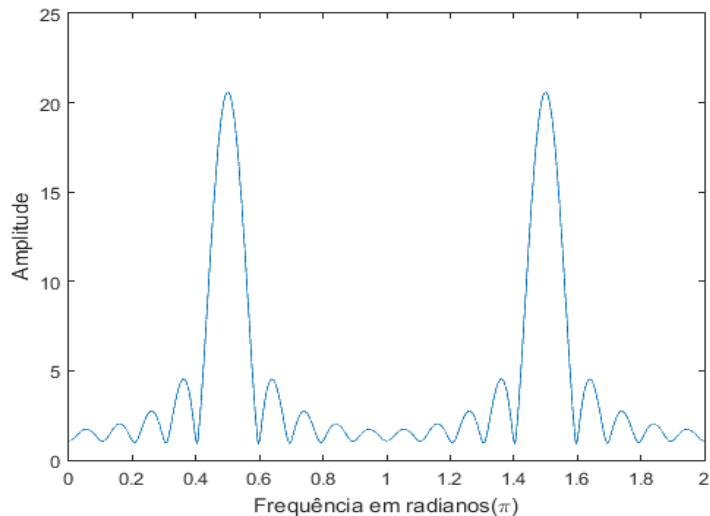
Exemplo Simulado 1



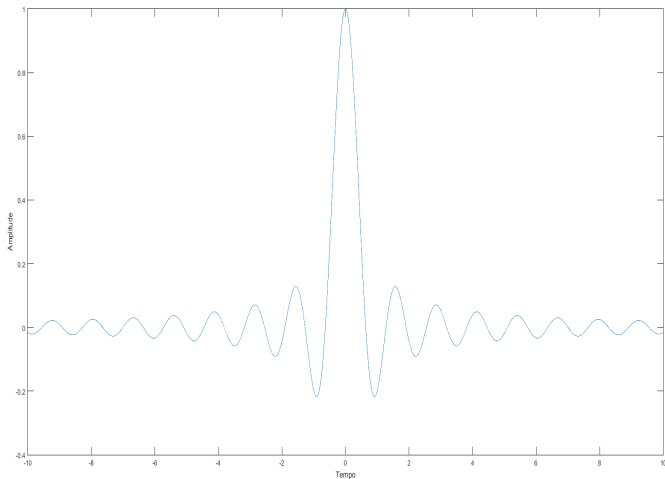
Exemplo Simulado 1

```
1  N=21;
2  A=2;
3  w=0.5* pi ;
4  p=1;
5  n=0:N-1;
6  x=A*cos(w*n+p) ;
7  for k=1:2001
8      w=(k-1)* pi /1000;
9      e=(exp(j.*w.*n)).';
10     X(k) = x*e;
11 end
12 X=abs(X);
13 k=1:2001;
14 f=(k-1)./1000;
15 plot(f,X)
```

Exemplo Simulado 1

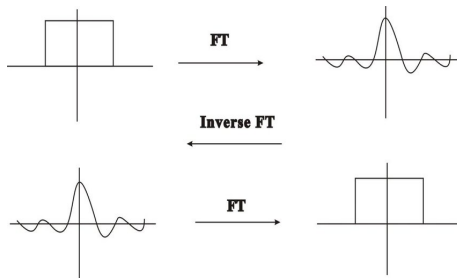


Exemplo Simulado 2



Exemplo Simulado 2

A função *sinc* (seno cardinal) é dada por $\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x}$.

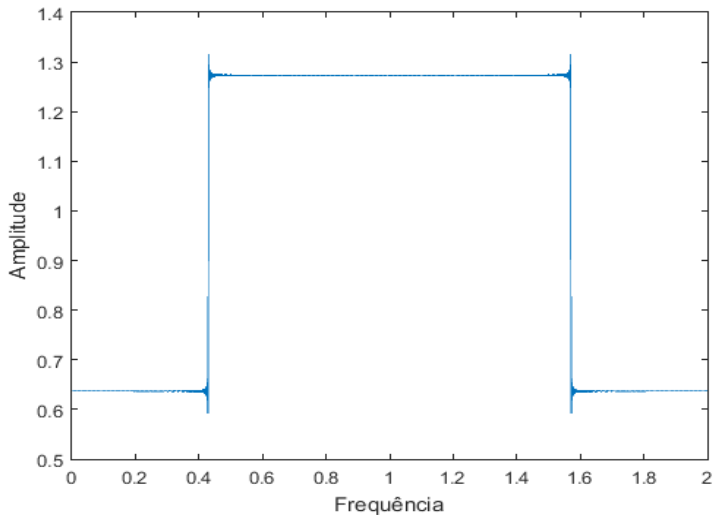


Calcule e plote a Transformada Fourier de Tempo Discreto da função sinc no MATLAB.

Exemplo Simulado 2

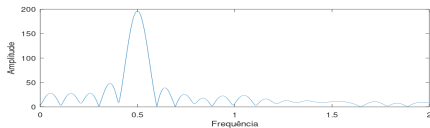
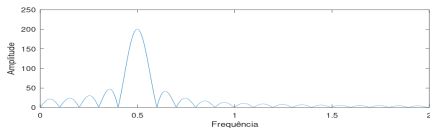
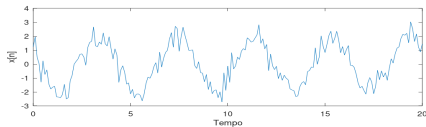
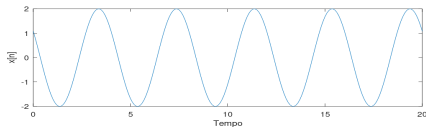
```
1  N=1000;
2  w=0.5*pi;
3  n = -N:N;
4  x = sinc(w*n);
5
6  for k=1:2001
7      w=(k-1)*pi/1000;
8      e=(exp(j.*w.*n)).';
9      X(k) = x*e;
10 end
11 X=abs(X);
12 k=1:2001;
13 f=(k-1)./1000;
14
15 plot(f,X)
16 xlabel('Frequencia')
17 ylabel('Amplitude')
```

Exemplo Simulado 2



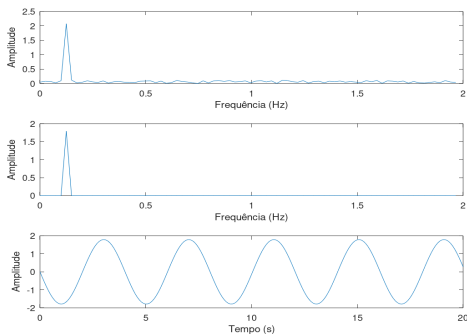
- Análise espectral de sinal
- Processamento de imagem e de som
- Compactação de dados
- Filtragem de sinal

Aplicação Prática - Filtrar ruído de um sinal



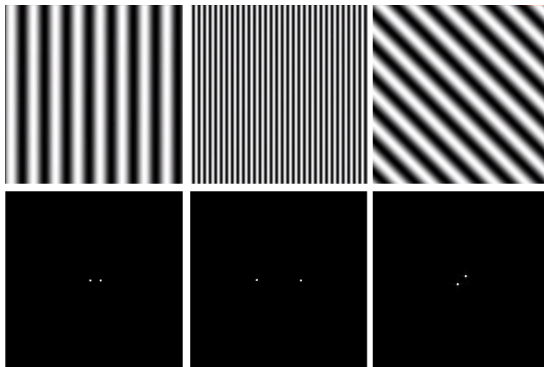
Aplicação Prática - Filtrar ruído de um sinal

```
1 x_noise = x + randn(1, size(x, 2))/2;  
2  
3 X_fixed = fix(fft(x_noise)/180)*180;  
4 ifX = ifft(X_fixed);
```

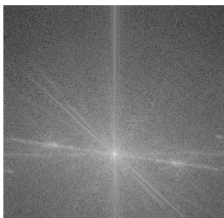
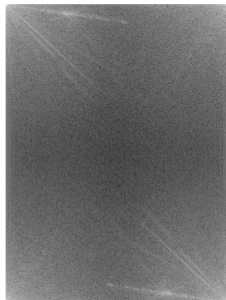


Aplicação Prática - Processamento de imagem

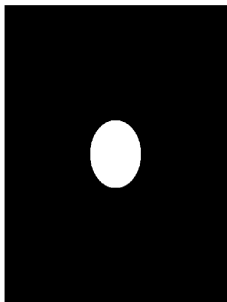
$$F(u, v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n, m] e^{-j\omega(un, vm)}$$



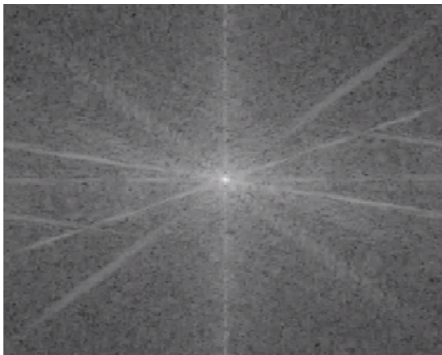
Aplicação Prática - Filtro em imagem



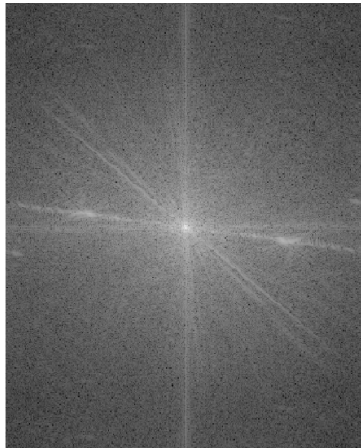
Aplicação Prática - Filtro em imagem



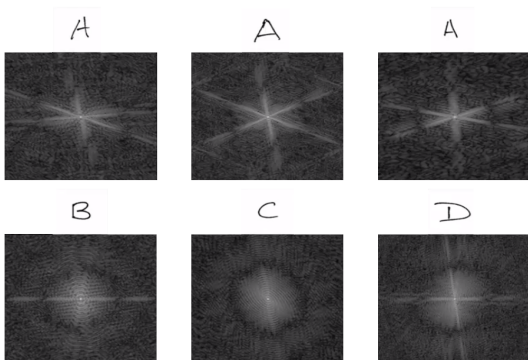
Aplicação Prática - Reconhecimento ótico de caracteres



Aplicação Prática - Reconhecimento ótico de caracteres



Aplicação Prática - Reconhecimento ótico de caracteres





A. V. Oppenheim, *Sinais e sistemas*. Prentice-Hall, 2010.



B. P. Lathi, *Sinais e Sistemas Lineares-2*. Bookman, 2006.

Outras referências

http://www.ee.cityu.edu.hk/~hcso/EE3210_6.pdf

[https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/
discrete-time-fourier-transform](https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/discrete-time-fourier-transform)

[http://www.commsp.ee.ic.ac.uk/~tania/teaching/dsp/Lectures%
203-4%20DTFT%20DFT%20and%20z-%20Transforms.pdf](http://www.commsp.ee.ic.ac.uk/~tania/teaching/dsp/Lectures%203-4%20DTFT%20DFT%20and%20z-%20Transforms.pdf)

[https://www.feis.unesp.br/Home/departamentos/
engenhariaeletrica/ele1095_4_dft.pdf](https://www.feis.unesp.br/Home/departamentos/engenhariaeletrica/ele1095_4_dft.pdf)

<https://www.youtube.com/watch?v=3RJHw5ClesQ>