Matemática Computacional

Análise Combinatória

Prof. Rogério Figueredo de Sousa

rogerio.sousa@ifpi.edu.br

27/08/2024

INSTITUTO FEDERAL
Piauí

Objetivos:

- Desenvolver as idéias e técnicas básicas para problemas de contagem.
- Reduzir um problema grande a vários problemas pequenos, usando os Princípios Aditivo e Multiplicativo.

Importância:

- Os problemas de contagem aparecem naturalmente no nosso dia a dia.
- Muitas vezes estamos apenas interessados em contar os elementos de um determinado conjunto, sem enumerá-los.
- No desenvolvimento de técnicas de contagem que veremos mais adiante, tais como: permutações, combinações, etc, estaremos usando basicamente os **Princípios Aditivo e Multiplicativo**.

Problemas de contagem:

Exemplo 1:

- Dados quatro livros distintos de **Matemática (M1,M2,M3,M4)** e três livros distintos de **Português (P1,P2,P3)**, de quantas maneiras podemos selecionar (escolher):

  a. Um livro (ou de Matemática ou de Português).

  b. Dois livros, sendo um de Matemática e outro de Português.

Exemplo 1 (continuação):

a **Um livro (<u>ou</u> de Matemática <u>ou</u> de Português)**

O livro de Matemática pode ser escolhido de 4 maneiras:

- livro M_1 ou
- livro M_2 ou
- livro M_3 ou
- livro M_4

O livro de Português pode ser escolhido de 3 maneiras:

- P_1 ou
- P_2 ou
- P_3

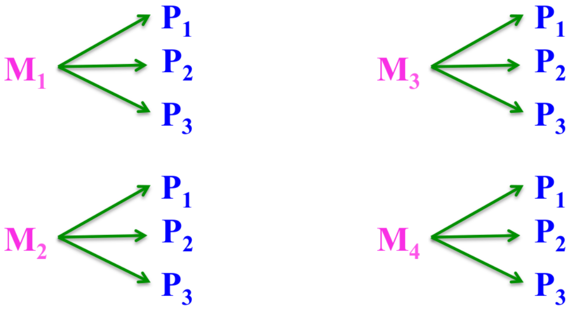
Número de maneiras: $4 + 3 = 7$

Exemplo 1 (continuação):

a **Dois livros, sendo um de Matemática e outro de Português.**

Temos dois conjuntos:

$$A = \{ M_1, M_2, M_3, M_4 \} \qquad B = \{ P_1, P_2, P_3 \}$$



Resumindo

a. De quantas maneira podemos escolher <u>um</u> livro qualquer (ou de Matemática ou de Português)?

Resposta:

- Temos 4 maneiras de escolher um livro de Matemática e 3 maneiras de escolher um livro de Português.
- Logo, temos $\mathbf{4 + 3 = 7}$ maneiras de escolher um livro qualquer dentre os de Matemática e Português.

a. De quantas maneira podemos escolher dois livros sendo um de Matemática e outro de Português?

Resposta:

- Para cada livro de Matemática, temos 3 maneiras de escolher os livros de Português.
- Como temos 4 maneiras de escolher os livros de Matemática, teremos $\mathbf{3 \times 4 = 12}$ maneiras de escolher um livro de matemática e outro de Português.

Exemplo 2:

Maria vai a uma papelaria para comprar **lapiseira** e **borracha**. Nessa papelaria há **7** tipos diferentes de lapiseiras e **5** tipos diferentes de borrachas.

a) Se o dinheiro de Maria só dá para comprar um item, ou uma lapiseira ou uma borracha, de quantas maneiras diferentes ela pode fazer isso?

$$L = \{L_1, L_2, ..., L_7\} \qquad B = \{B_1, B_2, ..., B_5\}$$

ou L_1, ou L_2, ou ... ou $L_7 \rightarrow$ 7 maneiras
ou B_1, ou B_2, ou ... ou $B_5 \rightarrow$ 5 maneiras

Número de maneiras de escolher um item: $\mathbf{7 + 5 = 12}$

Exemplo 2 (continuação):

b Suponha agora que Maria tem dinheiro para comprar 2 itens, sendo que ela quer uma lapiseira e uma borracha. De quantas maneiras diferentes ela pode fazer isso?

Observe que temos os pares:

$$(L_1, B_1)(L_1, B_2)...(L_1, B_5), ..., (L_7, B_1), (L_7, B_2), ..., (L_7, B_5)$$

Número de maneiras de escolher 2 itens, sendo um item uma lapiseira e outro uma borracha: $\mathbf{5 + 5 + ... + 5 = 5 \times 7 = 35}$

Resumindo

a) De quantas maneiras diferentes Maria pode comprar um item (ou um lapiseira ou um borracha)?

Resposta:

Ela tem 7 possibilidades de escolha de lapiseira e 5 possibilidades de escolha de borracha.

Logo, Maria tem **7 + 5** possibilidades diferentes de comprar ou uma lapiseira ou uma borracha.

b De quantas maneiras diferentes Maria pode comprar 2 itens: uma lapiseira e uma borracha?

Resposta:

Para cada escolha de lapiseira, ela tem 5 escolhas de borracha.

Como ela tem 7 escolhas de lapiseiras diferentes, ela terá 7×5 maneiras diferentes de comprar uma lapiseira e uma borracha.

- **Princípio Aditivo** (para dois conjuntos)

  Se A e B são dois conjuntos disjuntos ($A \cap B = \emptyset$),

  então $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

- Outra notação usual

  $$n(A) = |A|$$

  $$n(B) = |B|$$

  $$n(A \cup B) = |A \cup B| = |A| + |B|$$

- Outra interpretação da formulação:
  - Sejam **A** e **B** eventos mutuamente exclusivos. Se um evento **A** pode ocorrer de **m** maneiras e outro evento **B** pode ocorrer de **n** maneiras, então existem $m + n$ maneiras em que algum desses dois eventos podem ocorrer.

Voltando ao exemplo 1:

- Dados quatro livros distintos de Matemática e três livros distintos de Português:
  a. De quantas maneiras podemos escolher um livro qualquer?

Podemos identificar os conjuntos:

$$A = \{M1, M2, M3, M4\} \qquad B = \{P1, P2, P3\}$$

$$A \cap B = \emptyset \qquad |A| = n(A) = 4 \qquad |B| = n(B) = 3$$

- Pelo P. A. temos
  $|A \cup B| = |A| + |B| = 7$ maneiras de escolher um livro qualquer, ou de Matemática ou de Português.

Voltando ao exemplo 2:

- Na papelaria há 7 tipos diferentes de lapiseira e 5 tipos diferentes de borracha:
  a. De quantas maneiras Maria pode comprar um item?

Identificando os conjuntos:

$$L = \{L1, L2, ..., L\} \qquad B = \{B1, B2, ..., B5\}$$

$$L \cap B = \emptyset \qquad |L| = 7 \qquad |B| = 5$$

- Pelo P. A., Maria tem
  $|L \cup B| = |L| + |B| = 7 + 5 = 12$ maneiras de escolher ou uma lapiseira ou uma borracha.

- Princípio Multiplicativo (para dois conjuntos)

  Se A é um conjunto com m elementos e B é um conjunto com n elementos então o conjunto $A \times B$

$$A \times B = \{(a, b)|a \in A \text{ e } b \in B\}$$

tem $m \times n$ elementos

$$|A \times B| = |A|.|B| = m \times n$$

- Outra interpretação da formulação:
  - Se um evento A pode ocorrer de m maneiras e um evento B pode ocorrer de n maneiras então o par de eventos, primeiro um e depois o outro, podem ocorrer de $m \times n$ maneiras.

Voltando ao exemplo 1:

- Dados quatro livros distintos de Matemática e três livros distintos de Português:
  - b) De quantas maneiras podemos escolher 2 livros sendo um de Matemática e outro de Português?

Identificando os conjuntos:

$$A = \{M_1, M_2, M_3, M_4\} \qquad B = \{P_1, P_2, P_3\}$$

$$|A| = 4 \qquad |B| = 3$$

- Pelo P.M. temos então:
  $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \times |\mathbf{B}| = \mathbf{4} \times \mathbf{3} = \mathbf{12}$ maneiras de escolher dois livros sendo um de Matemática e outro de Português.

Exercício: Interpretação do exercício 2 b).

Exemplo 3:

- Um prédio tem oito portas:
  - a) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar e sair?

$$A = B = \{P_1, P_2, ..., P_8\} \qquad |A| = 8$$

$$\left.\begin{array}{llll}
(P_1, P_1), & (P_1, P_2) \ldots & (P_1, P_7), & (P_1, P_8) \\
(P_2, P_1), & (P_2, P_2) \ldots & (P_2, P_7), & (P_2, P_8) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(P_8, P_1), & (P_8, P_2) \ldots & (P_8, P_7), & (P_8, P_8)
\end{array}\right\} 8 \times 8$$

$$|A \times B| = |A| \times |A| = 8 \times 8 = 64$$

Resposta:

- Uma pessoa pode entrar e sair do prédio de 64 maneiras.

Introdução ao Princípio Multiplicativo (PM)

Exemplo 3 (continuação):

b De quantas maneiras uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra diferente?

Observe: Se usarmos a porta P_1 para entrar, ela não pode ser usada para sair.

$$\left.\begin{array}{cccc} (P_1, P_2), & (P_1, P_3) \dots & (P_1, P_7), & (P_1, P_8) \\ (P_2, P_1), & (P_2, P_3) \dots & (P_2, P_7), & (P_2, P_8) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (P_8, P_1), & (P_8, P_2) \dots & (P_8, P_6), & (P_8, P_7) \end{array}\right\} 8 \times 7$$

Resposta:

- Uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por uma outra diferente de 56 maneiras.

Exemplo 3 (continuação):

b Formalização:

$$A = \{P_1, P_2, \ldots, P_8\}, |A| = 8$$

$$D = \{(P_1, P_1), \ldots, (P_8, P_8)\}, |D| = 8$$

$$C = A \times A - D$$

$$|C| = |A \times A| - |D| \quad \text{(Princípio Aditivo)}$$
$$|C| = |A|.|A| - |D| \quad \text{(Princípio Multiplicativo)}$$

$$= 8 \times 8 - 8 = 8(8-1) = 8\ .\ 7$$

Exemplo 3 (continuação):

- Interpretação:
  - a) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar e sair?

    Maneiras de entrar - 8

    Maneiras de sair - 8

    $8 \times 8 = 64$

  - b) De quantas maneiras uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra diferente?

    Maneiras de entrar - 8

    Maneiras de sair - 7

    $8 \times 7 = 56$

Exemplo 4:

- Numa sala estão reunidos cinco homens, seis mulheres e quatro crianças.
- De quantas maneiras podemos selecionar:
  a. Uma pessoa?
  b. um homem, uma mulher e uma criança?

Exemplo 4 (continuação):

a) De quantas maneiras podemos selecionar uma pessoa?

$$H = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$$

$$M = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6\}$$

$$C = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$$

$$H \cap M = \emptyset \qquad H \cap C = \emptyset \qquad M \cap C = \emptyset$$

$$|H| = 5 \qquad |M| = 6 \qquad |C| = 4$$

$$|H \cup M \cup C| = |H| \cup |M| \cup |C| = 5 + 6 + 4 = 15$$

$$H \cup M \cup C = h_1, h_2, ..., h_5, m_1, m_2, ..., m_6, c_1, ..., c_4$$

Exemplo 4 (continuação):

a. De quantas maneiras podemos selecionar um homem, uma mulher e uma criança?

$$H \times M \times C = \{(h, m, c) \mid h \in H, m \in M, c \in C\}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H} \times \mathbf{M} \times \mathbf{C} = \{&(h_1, m_1, c_1), (h_1, m_2, c_1), (h_1, m_3, c_1),\\ &(h_1, m_4, c_1), (h_1, m_5, c_1), (h_1, m_6, c_1),\\ &(h_1, mb_1, c_2), (h_1, m_1, c_3), (h_1, m_1, c_4), \ldots\}\end{aligned}$$

- Observação

$$|H \times M \times C| = |H| \times |M| \times |C| = 5 \times 6 \times 4 = 120$$

- Se $A_1, A_2, ...A_n$ são conjuntos disjuntos dois a dois

$$(A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j)$$

$$e\ |A_1| = m_1, |A_2| = m_2, ..., |A_n| = m_n$$

então o conjunto $\bigcup_{i=1}^{n} = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$

possui $m_1 + m_2 + ... + m_n$ elementos

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_n| = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

- Outra interpretação da formulação:

  Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ eventos mutuamente exclusivos. Se cada evento A_i pode ocorrer de m_i maneiras então existem $m_1 + m_2 + ... + m_n$ maneiras em que algum desses n eventos podem ocorrer.

Extensão do Princípio Multiplicativo

- Sejam $A_1, A_2, ...A_n$ conjuntos tais que

$$|A_1| = m_1, |A_2| = m_2, ..., |A_n| = m_n$$

então o conjunto $\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$

possui $m_1 \times m_2 \times ... \times m_n$ elementos

$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times ... \times |A_n| = \prod_{i=1}^{n} m_i$$

- Outra interpretação da formulação:

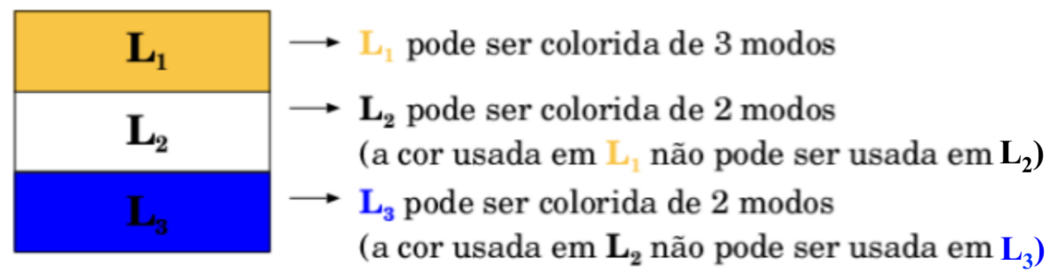
  Se temos n eventos $A_1, A_2, ..., A_n$, onde cada evento A_i pode ocorrer de m_i maneiras então existem $m_1 \times m_2 \times ... \times m_n$ maneiras em que esses n eventos podem ocorrer sucessivamente.

Extensão do Princípio Aditivo

Exemplo 5:

- Uma bandeira é formada por três listras que devem ser coloridas usando-se apenas as cores: amarelo, branco, azul, de tal maneira que listras adjacentes não recebam a mesma cor.

  De quantos modos podemos colorir esta bandeira?



Logo pelo PM temos $3 \times 2 \times 2$ modos de colorir esta bandeira.

Extensão do Princípio Aditivo

Exemplo 6:

- Um teste de matemática consta de 20 perguntas para serem classificadas como Verdadeiras ou Falsas.

  Quantos são os possíveis gabaritos para este teste?

Resposta:

Cada pergunta tem duas possibilidades de resposta:

Verdadeiro ou Falso

$$\left.\begin{array}{l} P_1 \; - \; 2 \text{ possibilidades} \\ P_2 \; - \; 2 \text{ possibilidades} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ P_{20} - 2 \text{ possibilidades} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Logo pelo PM temos} \\ 2\times 2\times \ldots \times 2 = 2^{20} \text{ gabaritos} \end{array}$$

Extensão do Princípio Aditivo

Exemplo 7:

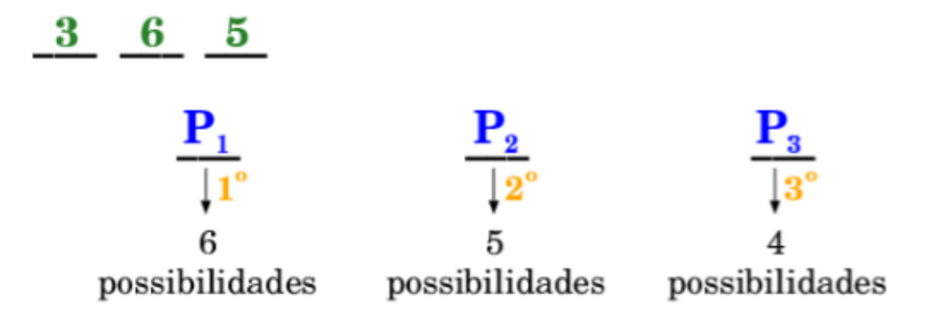
- Considerando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantos números naturais de três algarismos distintos podem ser formados?

  Para formar números naturais de três algarismos, podemos considerar que temos três posições a serem preenchidas:

$$\underline{P_1} \quad \underline{P_2} \quad \underline{P_3} \qquad \begin{cases} P_1 \text{ - posição das centenas} \\ P_2 \text{ - posição das dezenas} \\ P_3 \text{ - posição das unidades} \end{cases}$$

Exemplo 7 (continuação):

- Exemplo de número formado

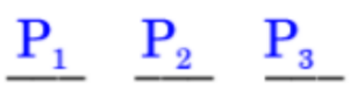


Logo pelo PM temos $\mathbf{6} \times \mathbf{5} \times \mathbf{4} = \mathbf{120}$ números naturais de três algarismos distintos formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Exemplo 8:

- Quantos números naturais de três algarismos distintos (na base 10) existem?

  Observação: Estamos considerando agora os algarismos $0, 1, 2, ..., 9$.



- Na posição P_1 temos 9 possibilidades (estamos excluindo o zero)
- Na posição P_2 temos 9 possibilidades (diferentes do anterior)
- Na posição P_3 temos 8 possibilidades (diferente dos dois anteriores)

Logo pelo PM temos $\mathbf{9} \times \mathbf{9} \times \mathbf{8}$ números naturais de três algarismos distintos.

Exemplo 8 (continuação):

- E se neste exemplo em vez de começarmos analizando a posição P_1, começassemos pela P_3?

- Na posição P_3 temos 10 possibilidades
- Na posição P_2 temos 9 possibilidades (diferente do anterior)
- Na posição P_1 temos:
  - 8 (se o algarismo zero já tiver sido usado), ou
  - 7 (caso contrário)

Exemplo 8 (continuação):

- Quebramos o problema em dois:

1. Ignoramos o fato do zero não estar na posição P_1 e contamos todas as possibilidades (com ele incluído)

$$\underline{P_1} \quad \underline{P_2} \quad \underline{P_3}$$

- Na posição P_3 temos 10 possibilidades
- Na posição P_2 temos 9 possibilidades
- Na posição P_1 temos 8 possibilidades

Logo pelo PM temos $\mathbf{10 \times 9 \times 8 = 720}$ números de três algarismos distintos onde o zero pode estar na posição **P**.

Extensão do Princípio Aditivo

Exemplo 8 (continuação):

2. Contamos os números de três algarismos distintos que tem apenas o zero na posição P_1

$$\underline{P_1} \quad \underline{P_2} \quad \underline{P_3}$$

- Na posição P_1 temos 1 possibilidade
- Na posição P_2 temos 9 possibilidades
- Na posição P_3 temos 8 possibilidades

Logo pelo PM temos $\mathbf{1 \times 9 \times 8 = 72}$ números de três algarismos distintos que tem apenas o zero na posição $\mathbf{P_1}$.

Temos então $\mathbf{720 - 72 = 648}$ números naturais de três algarismos distintos.