Matemática Computacional

Lógica Formal

Prof. Rogério Figueredo de Sousa

rogerio.sousa@ifpi.edu.br

21/03/2024

INSTITUTO FEDERAL
Piauí

Implicação

As proposições podem ser combinadas na forma "**se** proposição 1, **então** proposição 2"

- Essa proposição composta é denotada por $\rightarrow$
- Seja proposição 1 dada por A e proposição 2 dada por B, reescrevemos $A \rightarrow B$, onde A é o **antecedente** e B é o **consequente**.
- Esse conectivo lógico leva o nome de **implicação** ou **condicional**.

Implicação

- Por convenção, $A \to B$ é verdadeira se A for falsa, independentemente do valor lógico de B.

Exemplo: **Se** Fulano foi até a loja de esportes **então** foi até a casa de sua avó.

- **Tabela-Verdade**

A	B	$A \rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondicional

As proposições podem ser combinadas na forma "proposição 1 **se, e somente se**, proposição 2"

- Essa proposição composta é denotada por $\leftrightarrow$
- Seja proposição 1 dada por A e proposição 2 dada por B, reescrevemos $A \leftrightarrow B$
- Esse conectivo lógico leva o nome de **Bicondicional**
- É uma abreviação de $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

Bicondicional

Tabela-Verdade

A	B	$A \rightarrow B$	$A \rightarrow B$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Precedência de Operadores

Para construir uma tabela-verdade, será necessário resolver todas as possíveis combinações de valores lógicos das proposições existentes;

A resolução de um sistema formal deve seguir uma ordem, assim como acontece nas equações matemáticas:

1. $()$, $\{\}$
2. $'$
3. $\vee$, $\wedge$, $\oplus$
4. $\rightarrow$
5. $\leftrightarrow$

Precedência de Operadores

1. $()$, $\{\}$
2. $'$
3. $\vee$, $\wedge$, $\oplus$
4. $\rightarrow$
5. $\leftrightarrow$

Equação Original	Certo	Errado
$A' \vee B$	$(A)' \vee B$	$(A \vee B)'$
$A \vee B \rightarrow C$	$(A \vee B) \rightarrow C$	$A \vee (B \rightarrow C)$
$A \wedge B \rightarrow C \leftrightarrow D$	$((A \wedge B) \rightarrow C) \leftrightarrow D$	$A \wedge (B \rightarrow (C \leftrightarrow D))$

Expressões em Português

figs/tabelaExpressoes.png

Exemplos

"O fogo é uma condição necessaria para a fumaça".

De que outra maneira podemos escrever?

"Se houver fumaça, então haverá fogo."

Antecedente e consequente?

Negações corretas e incorretas

figs/tabelanegacoes.png

Negação

Quais das proposições a seguir representa P' se P é a proposição: "Júlia gosta de manteiga, mas detesta creme"?

- A Júlia detesta manteiga e creme;
- B Júlia não gosta de manteiga nem de creme;
- C Júlia não gosta de manteiga mas adora creme;
- D Júlia não gosta de manteiga ou adora creme.

Faça a tabela-verdade.

Fórmula Bem Formulada

Uma cadeia, no qual obedece as regras de sintaxe, como

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

é denominada uma **fórmula bem formulada (fbf)**.

Exemplo de fórmula mal formulada,

$$((A' \rightarrow BC$$

Letras maiúsculas do final do alfabeto (P,Q,R,S,...) serão utilizadas para representar fbf's.
Exemplo: $((A \wedge B) \wedge C) \rightarrow (B \vee C')$ pode ser representada por

$$P \rightarrow Q$$

Exercícios

1. Faça a tabela-verdade para cada uma das fbf:
   a. $A \vee B' \rightarrow (A \vee B)'$
   b. $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (B \wedge B')$
   c. $(A \vee A') \rightarrow (B \wedge B')$
   d. $[(A \wedge B') \rightarrow C']'$
   e. $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (B' \rightarrow A')$

Tautologia

Uma fbf como a do item E), que assume apenas o valor V, é denominada **tautologia**.

Ou seja, é **verdadeira** independentemente dos valores lógicos atribuídos às proposições.

Exemplo: $A \vee A'$

"Hoje vai ter sol ou hoje não vai ter sol".

Tautologia

É dito tautológico todo sistema lógico cuja tabela-verdade resulta apenas em valores Verdadeiros:

$A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$: (comutatividade)

A	B	$A \wedge B$	$B \wedge A$	$\leftrightarrow$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	F	V

Contradição

Uma fbf como a do item C), cujo valor lógico é sempre falso, é denominada **contradição**.

Ou seja, é **falsa** independentemente dos valores lógicos atribuídos às proposições.

Exemplo: $A \wedge A'$

“Hoje é terça-feira e hoje não é terça-feira”.

Contradição

É dita contradição todo sistema lógico cuja tabela-verdade resulta apenas em valores Falsos:
$(A \rightarrow B) \wedge (A \wedge B')$

A	B	$A \rightarrow B$	$A \wedge B'$	$(A \rightarrow B) \wedge (A \wedge B')$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F

Contingências

Todo e qualquer sistema lógico que não seja Tautologia ou Contradição, será considerado contingência.

Seja P e Q duas fbf's e suponha que a fbf $P \leftrightarrow Q$ seja uma tautologia. Se fizermos uma tabela-verdade observamos que os valores lógicos de P e Q seriam iguais em todas as linhas.

Exemplo:

- P: $A \vee B$
- Q: $B \vee A$

A	B	$A \vee B$	$B \vee A$	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	F	F	V

Equivalência

Então, dizemos que P e Q são **equivalentes**, denotamos por $P \iff Q$.

Ou seja, $P \iff Q$ se, e somente se, $P \leftrightarrow Q$ é uma tautologia.

Logo, o item 1-E) é uma equivalência, segue

$$(A \to B) \iff (B' \to A')$$

Quando uma fbf é equivalente a outra, elas podem ser substituídas uma pela outra.

Algumas Equivalências Tautológicas

- Comutatividade:

$$A \lor B \iff B \lor A$$
$$A \land B \iff B \land A$$

- Associatividade:

$$(A \lor B) \lor C \iff A \lor (B \lor C)$$
$$(A \land B) \land C \iff A \land (B \land C)$$

- Distributividade:

$$A \lor (B \land C) \iff (A \lor B) \land (A \lor C)$$
$$A \land (B \lor C) \iff (A \land B) \lor (A \land C)$$

- Elementos neutros:

$$A \lor 0 \iff A$$
$$A \land 1 \iff A$$

Tabela-verdade elemento neutro B):

A	1	$A \wedge 1$	$A \wedge 1 \rightarrow A$
V	V	V	V
F	V	F	V

- Complementares

$$A \vee A' \iff 1$$

$$A \wedge A' \iff 0$$

Leis de *De Morgan*

O matemático inglês Augusto De Morgan (1806 - 1871) foi o primeiro a enunciar algumas equivalências lógicas (e de conjuntos). Estas equivalências convertem operações lógicas E em OU e vice-versa e são amplamente utilizadas na construção de sistemas lógicos:

$$(A \vee B)' \iff A' \wedge B'$$

$$(A \wedge B)' \iff A' \vee B'$$

Na prática, não importa o número de proposições. Ex.:

$$(A \vee B \vee C \vee D)' \iff A' \wedge B' \wedge C' \wedge D'$$

$$(A \wedge B \wedge C \wedge D \wedge E)' \iff A' \vee B' \vee C' \vee D' \vee E'$$

figs/equivalencias.png

Questões Poscomp (1/7)

Poscomp[2013, q11]: Considere as sentenças a seguir:
P: Pedro faz as tarefas todos os dias.
Q: Pedro terá boas notas no final do ano.

- Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a tradução em linguagem simbólica da negação da sentença composta a seguir:
- "Se Pedro faz as tarefas todos os dias, então Pedro terá boas notas no final do ano."
  1. $P \rightarrow Q$
  2. $P \leftrightarrow Q$
  3. $P \wedge \sim Q$
  4. $\sim P \wedge \sim Q$
  5. $\sim P \wedge Q$

Questões Poscomp (2/7)

Poscomp[2013, q13]: Admita que um novo conectivo binário, rotulado pelo símbolo $\updownarrow$, seja definido pela tabela-verdade ao lado. Com base nessa definição e nas operações usuais com os conectivos $\vee$, $\wedge$ e $\sim$, considere as afirmativas a seguir.

- I $P \updownarrow Q$ é equivalente a $Q \updownarrow P$
- II $(P \updownarrow Q) \vee (Q \updownarrow P)$ não é uma contingência.
- III $(Q \updownarrow P) \wedge (P \updownarrow Q)$ é uma contradição.
- IV $\sim [(Q \updownarrow P) \wedge (P \updownarrow Q)]$ é uma tautologia.

Assinale a alternativa correta.

- a Somente as afirmativas I e II são corretas.
- b Somente as afirmativas I e IV são corretas.
- c Somente as afirmativas III e IV são corretas.
- d Somente as afirmativas I, II e III são corretas.

figs/tabelaposcomp.png

Assinale a proposição logicamente equivalente a $\neg(p \lor q) \lor (\neg p \land q)$

- a $\neg p \land (q \lor \neg q)$
- b $\neg p$
- c $(p \lor q) \land (p \lor \neg q)$
- d $(p \lor q) \lor (p \land \neg q)$
- e p

Questões Poscomp (4/7)

Considere as seguintes proposições:

- I $\neg p \lor q$
- II $\neg(p \land \neg q)$
- III $p \to q$
- IV $(V \to q) \lor (p \to F)$

Quais as proposições acima são logicamente equivalentes?

- a Somente I $\equiv$ III
- b Somente I $\equiv$ II
- c Somente I $\equiv$ II $\equiv$ III
- d I $\equiv$ III e II $\equiv$ III mas III $\not\equiv$ IV
- e I, II, III, IV são todas equivalentes.

A sentença lógica $A \land (B \lor \neg C)$ é equivalente a

- A $A \land (\neg B \land C)$
- B $\neg A \lor \neg(B \lor \neg C)$
- C $\neg A \lor (\neg B \land C)$
- D Todas as respostas anteriores
- E Nenhuma das respostas anteriores

Questões Poscomp (6/7)

Existem três suspeitos de invadir uma rede de computadores: André, Bruna e Carlos. Sabe-se que a invasão foi efetivamente cometida por um ou por mais de um deles, já que podem ter agido individualmente ou não. Sabe-se, ainda, que:

I. Se André é inocente, então Bruna é culpada.

II. Ou Carlos é culpado ou Bruna é culpada, mas não os dois.

III. Carlos não é inocente.

Com base nestas considerações, conclui-se que:

A. Somente André é inocente.

B. Somente Bruna é culpada.

C. Somente Carlos é culpado.

D. São culpados apenas Bruna e Carlos.

E. São culpados apenas André e Carlos.

Os conectores lógicos $\vee$, $\rightarrow$ são lidos como “ou” e "implica". O operador “não” é representado por $\neg$. Considerando esta notação, a tabela verdade da proposição $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \vee P)$, assumindo que a sequencia de valores de P é {V,V,F,F} e a de Q é {V,F,V,F}, tem os valores:

- a { F,F,F,F }
- b { V,V,V,V }
- c { V,V,F,V }
- d { F,F,V,V }
- e { V,F,V,F }

Lógica Proposicional

Argumentos Válidos

Um argumento pode ser representado em forma simbólica como

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge ... \wedge P_n \rightarrow Q$$

Onde P_1, P_2, $P_3 \ldots$ são proposições dadas, chamadas de **hipóteses** do argumento, e Q é a **conclusão**.

Em geral, P_i e Q representam fbf's.

Quando que deve ser considerado um argumento válido?

Argumentos Válidos

Quando deve ser considerado um argumento válido?

Q é uma conclusão lógica de $P_1, \ldots, P_n$ sempre que a verdade das proposições $P_1, \ldots, P_n$ implica na verdade de Q.

Considere o argumento (contra-exemplo):
"Luis Inácio é o presidente do Brasil. Florianópolis é a capital de Santa Catarina. Portanto, o dia tem 24 horas".

$$A \wedge B \rightarrow C$$

Duas hipóteses e a conclusão, mas nesse caso **não** consideramos o argumento válido, pois a conclusão é um fato verdadeiro isolado das hipóteses.

Um argumento válido deveria ser intrinsicamente verdadeiro, sendo assim, segue definição.

Definição: A fbf proposicional

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge ... \wedge P_n \rightarrow Q$$

é um **argumento válido** quando for uma tautologia.

Obs: no último exemplo o argumento $(A \wedge B \rightarrow C)$ *não é uma tautologia, por isso não era um argumento válido.*

Exemplo 1)
"Se Luis Inácio for presidente do Brasil, então Geraldo Alckmin é o vice-presidente. Luis Inácio é presidente do Brasil. Portanto, Geraldo Alckmin é o vice-presidente do Brasil".

Duas hipóteses:

1. Se Luis Inácio for presidente do Brasil, então Geraldo Alckmin é o vice-presidente
2. Luis Inácio é presidente do Brasil.

Conclusão:
Geraldo Alckmin é o vice-presidente do Brasil.

Representação simbólica: $A \rightarrow B \wedge A \rightarrow B$, que é uma tautologia.

Ex. 2: Validade de Argumentos

Argumento: $P_1 \wedge P_2 \rightarrow Q$

P_1: "Se está chovendo, então há nuvens."

P_2: "Está chovendo."

Q: "Há nuvens."

Proposições:

A: Está chovendo.

B: Há nuvens

Dedução/validação:

P_1: $A \rightarrow B$

P_2: A

Q: B

Dedução Válida?

Ex. 3: Validade de Argumentos

Argumento: $P_1 \wedge P_2 \rightarrow Q$

P_1: “Se está chovendo, então há nuvens.”

P_2: “Há Nuvens.”

Q: “Está chovendo.”

Proposições:

A: Está chovendo.

B: Há nuvens

Dedução/validação:

P_1: $A \rightarrow B$

P_2: B

Q: A

Dedução Válida?

Sequência de demonstração:

Hipóteses: P_1**,** P_2**, ... ,** P_n

Fbf’s: fbf1, fbf2,..

Conclusão: Q.

Existem, basicamente, dois tipos de regra de dedução: **equivalências e inferências**.

Equivalências

Permitem que as fbf's sejam reescritas mantendo o valor lógico.

Inferências

Permitem a dedução de novas fbf's a partir de fbf's anteriores.

Regras de Equivalência

figs/equivalencias.png

Exemplo: suponha o argumento proposicional

$$(A' \vee B') \vee C$$

então uma sequência de demonstração ficaria,

- $(A' \vee B') \vee C$ (hipótese)
- $(A \wedge B)' \vee C$ (1, De Morgam)
- $(A \wedge B) \rightarrow C$ (2, condicional)

Exemplo: Se Marcia não está com fome, então ela não vai a padaria. Além disso, se Márcia está com fome e vai à padaria ou não vai à padaria, então ela vai à padaria.
A: Márcia vai à padaria. B: Márcia está com fome.

Exemplo: Se Marcia não está com fome, então ela não vai a padaria. Além disso, se Márcia está com fome e vai à padaria ou não vai à padaria, então ela vai à padaria.
A: Márcia vai à padaria. B: Márcia está com fome.

$$(B' \rightarrow A') \wedge (B \wedge (A \vee A') \rightarrow A)$$

Exemplo: Se Marcia não está com fome, então ela não vai a padaria. Além disso, se Márcia está com fome e vai à padaria ou não vai à padaria, então ela vai à padaria.
A: Márcia vai à padaria. B: Márcia está com fome.

$$(B' \to A') \wedge (B \wedge (A \vee A') \to A)$$

(Complementares) $A \vee A' \leftrightarrow 1$:
$(B' \to A') \wedge (B \wedge (1) \to A)$

Regras de Equivalência

Exemplo: Se Marcia não está com fome, então ela não vai a padaria. Além disso, se Márcia está com fome e vai à padaria ou não vai à padaria, então ela vai à padaria.
A: Márcia vai à padaria. B: Márcia está com fome.

$$(B' \to A') \wedge (B \wedge (A \vee A') \to A)$$

(Complementares) $A \vee A' \leftrightarrow 1$:
$(B' \to A') \wedge (B \wedge (1) \to A)$
Contraposição $(A \to B) \leftrightarrow (B' \to A')$ **e Elemento Neutro:** $A \wedge 1 \leftrightarrow A$:
$(A \to B) \wedge (B \to A)$

Exemplo: Se Marcia não está com fome, então ela não vai a padaria. Além disso, se Márcia está com fome e vai à padaria ou não vai à padaria, então ela vai à padaria.
A: Márcia vai à padaria. B: Márcia está com fome.

$$(B' \rightarrow A') \wedge (B \wedge (A \vee A') \rightarrow A)$$

(Complementares) $A \vee A' \leftrightarrow 1$:
$(B' \rightarrow A') \wedge (B \wedge (1) \rightarrow A)$
Contraposição $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (B' \rightarrow A')$ **e Elemento Neutro:** $A \wedge 1 \leftrightarrow A$:
$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
Definição de Equivalência: $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)$:
$A \leftrightarrow B$

Exemplo: Se Marcia não está com fome, então ela não vai a padaria. Além disso, se Márcia está com fome e vai à padaria ou não vai à padaria, então ela vai à padaria.
A: Márcia vai à padaria. B: Márcia está com fome.

$$(B' \to A') \wedge (B \wedge (A \vee A') \to A)$$

(Complementares) $A \vee A' \leftrightarrow 1$:
$(B' \to A') \wedge (B \wedge (1) \to A)$
Contraposição $(A \to B) \leftrightarrow (B' \to A')$ **e Elemento Neutro:** $A \wedge 1 \leftrightarrow A$:
$(A \to B) \wedge (B \to A)$
Definição de Equivalência: $(A \to B) \wedge (B \to A) \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)$:
$A \leftrightarrow B$

Márcia vai à padaria se, e somente se ela está com fome

Regras de Inferência

figs/inferencia.png

Regras de Inferência

Se uma ou mais fbf's contidas na primeira coluna das regras de inferência, fazem parte de uma sequência da demonstração, então podemos substituí-las pela fbf contida na segunda coluna.

As regras de inferência não funcionam em ambas direções.
Exemplo: suponha $A \rightarrow (B \wedge C)$ e A duas hipóteses de um argumento, uma sequência de demonstração seria:

- $A \rightarrow (B \wedge C)$ **(hipótese)**
- A **(hipótese)**
- $B \wedge C$ **(1,2,modus ponens)**

Depois da última movimentação, a FBF se parece com a adição, mas não podemos inferir nem B e nem C

Exemplo: dê o próximo passo da demonstração e justifique.

- $(A \wedge B') \rightarrow C$ **(hipótese)**
- C' **(hipótese)**
- ?

Exemplo: dê o próximo passo da demonstração e justifique.

- $(A \wedge B') \to C$ **(hipótese)**
- C' **(hipótese)**
- $(A \wedge B')'$ **(1,2,mt)**

Argumento: $P_1 \wedge P_2 \rightarrow Q$

P_1: "Se está chovendo, então há nuvens."

P_2: "Está chovendo."

Q: "Há nuvens."

Proposições:

A: Está chovendo.

B: Há nuvens

Dedução/validação:

P_1: $A \rightarrow B$

P_2: A

Q: B

Dedução Válida?

Exemplo 1 :Demonstração

$$(A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow B$$

- $A \rightarrow B$ **(hipótese, V)**
- A **(hipótese, V)**
- B **(1,2,mp)**

Exemplo 2

Argumento: $P_1 \wedge P_2 \rightarrow Q$

P_1: “Se está chovendo, então há nuvens.”

P_2: “Está chovendo.”

Q: “Há nuvens.”

Proposições:

A: Está chovendo.

B: Há nuvens

Dedução/validação:

P_1: $A \rightarrow B$

P_2: B

Q: B

Dedução Válida? Não, não é um argumento válido.

Exemplo de Demonstração Completa

Usando lógica proposicional, prove que o argumento é válido.

$$A \wedge (B \to C) \wedge \left[(A \wedge B) \to (D \vee C')\right] \wedge B \to D$$

Exercício 1: provar a validade de:

$$[A \to (B \vee C)] \wedge B' \wedge C' \to A'$$

Exercício 2: provar a validade de:

$$A' \wedge B \wedge [B \to (A \vee C)] \to C$$

Suponha que o argumento que queremos provar tenha a forma

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow (R \rightarrow S)$$

onde a conclusão é uma implicação.
Ao invés de usar $P_1, \ldots, P_n$ como hipótese e $R \rightarrow S$ de conclusão, o método dedutivo nos permite adicionar R como hipótese,

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n \wedge R \rightarrow S$$

Exemplo

Use lógica proposicional para provar

$$[A \to (A \to B)] \to (A \to B)$$

e

$$(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$$

(silogismo hipotético)

Exercícios

Use lógica proposicional para provar

- $(A' \vee B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
- $(A \rightarrow B) \wedge (C' \vee A) \wedge C \rightarrow B$

Exemplo 1: Considere o argumento “Se as taxas de juros caírem, o mercado imobiliário vai melhorar. A taxa federal de descontos vai cair ou o mercado imobiliário não vai melhorar. As taxas de juros vão cair. Portanto, a taxa federal de descontos vai cair

Resolução:
J: A taxa de juros vai cair.
I: O mercado imobiliário vai melhorar.
F: A taxa federal de descontos vai cair.
O argumento fica: $(J \to I) \wedge (F \vee I') \wedge J \to F$, basta **provar se o argumento é válido**.

Exemplo 2: “Meu cliente é canhoto mas, se o diário não tiver sumido, então meu cliente não é canhoto; portanto o diário sumiu.”

Exemplo 3: “Se segurança é um problema, então o controle será aumentado. Se segurança não é um problema, então os negócios na Internet irão aumentar. Portanto, se o controle não for aumentado, os negócios na Internet crescerão.”