Matemática Computacional

Análise Combinatória - Arranjos e Combinações Simples

Prof. Rogério Figueredo de Sousa

rogerio.sousa@ifpi.edu.br

10/09/2024

INSTITUTO FEDERAL
Piauí

Arrajo Simples

Exemplo 1:

Um prédio tem 8 portas. De quantas maneiras 1 pessoa pode entrar por 1 porta e sair por outra diferente?

Arranjo Simples: Introdução

Exemplo 1:

Um prédio tem 8 portas. De quantas maneiras 1 pessoa pode entrar por 1 porta e sair por outra diferente?

Resolução:

$$\text{Possibilidades} \quad \underset{\text{entrada}}{\overset{}{\underline{\;8\;}}} \times \underset{\text{saída}}{\overset{}{\underline{\;7\;}}} = 56$$

Resposta:

Uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra de **56 maneiras distintas**.

Reformulação do Exemplo 1:

- Um prédio tem 8 portas. De quantas maneiras 1 pessoa pode entrar por 1 porta e sair por outra diferente?
- De quantas maneiras distintas uma pessoa pode escolher 2 portas diferentes (entrada, saída) entre 8 portas diferentes?

Resposta:

Uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra de **56 maneiras distintas**.

Resposta:

Uma pessoa pode escolher 2 portas distintas para entrar e sair entre 8 portas distintas de 56 maneiras diferentes.

Observação: $8 \cdot 7$

Reformulação do Exemplo 1:

- Um prédio tem 8 portas. De quantas maneiras 1 pessoa pode entrar por 1 porta e sair por outra diferente?
- De quantas maneiras distintas uma pessoa pode escolher 2 portas diferentes (entrada, saída) entre 8 portas diferentes?

Resposta:

Uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra de **56 maneiras distintas**.

Resposta:

Uma pessoa pode escolher 2 portas distintas para entrar e sair entre 8 portas distintas de 56 maneiras diferentes.

Observação: $8 \cdot 7 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!}$

Reformulação do Exemplo 1:

- Um prédio tem 8 portas. De quantas maneiras 1 pessoa pode entrar por 1 porta e sair por outra diferente?
- De quantas maneiras distintas uma pessoa pode escolher 2 portas diferentes (entrada, saída) entre 8 portas diferentes?

Resposta:

Uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra de **56 maneiras distintas**.

Resposta:

Uma pessoa pode escolher 2 portas distintas para entrar e sair entre 8 portas distintas de 56 maneiras diferentes.

Observação: $8 \cdot 7 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6!}$

Arranjo Simples: Introdução

Reformulação do Exemplo 1:

- Um prédio tem 8 portas. De quantas maneiras 1 pessoa pode entrar por 1 porta e sair por outra diferente?
- De quantas maneiras distintas uma pessoa pode escolher 2 portas diferentes (entrada, saída) entre 8 portas diferentes?

Resposta:

Uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra de **56 maneiras distintas**.

Resposta:

Uma pessoa pode escolher 2 portas distintas para entrar e sair entre 8 portas distintas de 56 maneiras diferentes.

Observação: $8 \cdot 7 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6!} = \frac{8!}{6!}$

Reformulação do Exemplo 1:

- Um prédio tem 8 portas. De quantas maneiras 1 pessoa pode entrar por 1 porta e sair por outra diferente?
- De quantas maneiras distintas uma pessoa pode escolher 2 portas diferentes (entrada, saída) entre 8 portas diferentes?

Resposta:

Uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra de **56 maneiras distintas**.

Resposta:

Uma pessoa pode escolher 2 portas distintas para entrar e sair entre 8 portas distintas de 56 maneiras diferentes.

Observação: $8 \cdot 7 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6!} = \frac{8!}{6!} = \frac{8!}{(8-2)!}$

Arranjo Simples

Exemplo 2:

Quantos números distinos de 3 algarismos distintos podem se formar com os dígitos 3, 5, 7, 8 e 9?

Resolução:

Possibilidades

$$\frac{5}{p_1} \times \frac{4}{p_2} \times \frac{3}{p_3}$$

posições dos dígitos no número

Resposta:

Podem se formar $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ números diferentes com 3 algarismos escolhidos entre os dígitos 3, 5, 7, 8 e 9.

Observação: $5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5!}{(5-3)!}$

- Características dos exemplos:
  - Os elementos considerados $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são diferentes.
  - Cada escolha de r elementos ($r \leq n$) distintos e ordenados entre $a_1, a_2, \ldots, a_n$ corresponde a uma possibilidade.
  - Na obtenção do número de possibilidades aplica-se os princípios aditivo e multiplicativo.

Arranjo Simples

- Definição:
  - Dados n objetos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, um arranjo simples de n elementos tomados **r** a **r** é uma ordenação de **r** elementos distintos escolhidos entre $a_1, a_2, \ldots, a_n$, sendo **r** e **n** números naturais com $1 \leq r \leq n$.

- Ilustração:
  - Dados os dígitos 3,5,7,8 e 9, **398 é um arranjo simples** de <u>5</u> elementos tomados <u>3 a 3</u>.

Arranjo Simples

- Problema:
  - Dados n objetos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$,
  - encontrar o número de arranjos simples dos n elementos tomados de **r** a **r**.
- Propriedade:
  - O número de arranjos simples de n elementos distintos tomados **r** a **r**, denominado $A(n, r)$, é dado por:

$$A(n, r) = n(n-1)\ldots(n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- Observação:

$$P_n = A(n, n) = n!$$

Exemplo 3:

Vários amigos combinaram passar o dia no clube. Planejaram ir para a piscina, fazer um churrasco, jogar volei e tennis. Mas, como chegaram tarde precisaram escolher 3 entre as 4 atividades. De quantas maneiras diferentes poderiam reprogramar essas atividades?

Exemplo 3:

Vários amigos combinaram passar o dia no clube. Planejaram ir para a piscina, fazer um churrasco, jogar volei e tennis. Mas, como chegaram tarde precisaram escolher 3 entre as 4 atividades. De quantas maneiras diferentes poderiam reprogramar essas atividades?

Resolução:

Programa: arranjo simples de 3 atividades escolhidas entre 4

Exemplo 3:

Vários amigos combinaram passar o dia no clube. Planejaram ir para a piscina, fazer um churrasco, jogar volei e tennis. Mas, como chegaram tarde precisaram escolher 3 entre as 4 atividades. De quantas maneiras diferentes poderiam reprogramar essas atividades?

Resolução:

Programa: arranjo simples de 3 atividades escolhidas entre 4

Número de programas possíveis: $A(4,3) = \frac{4!}{(4-3)!} = 4! = 24$

Exemplo 3:

Vários amigos combinaram passar o dia no clube. Planejaram ir para a piscina, fazer um churrasco, jogar volei e tennis. Mas, como chegaram tarde precisaram escolher 3 entre as 4 atividades. De quantas maneiras diferentes poderiam reprogramar essas atividades?

Resolução:

Programa: arranjo simples de 3 atividades escolhidas entre 4

Número de programas possíveis: $A(4,3) = \frac{4!}{(4-3)!} = 4! = 24$

Resposta:

Eles têm 24 maneiras diferentes de fazer um programa.

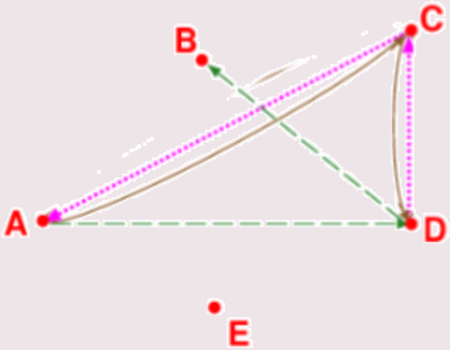
Exemplo 4:

Uma companhia aérea tem vôos ligando 5 cidades. Cada rota interliga 3 cidades. Calcule o número de rotas diferentes.

Exemplo 4:

Uma companhia aérea tem vôos ligando 5 cidades. Cada rota interliga 3 cidades. Calcule o número de rotas diferentes.

Ilustração:

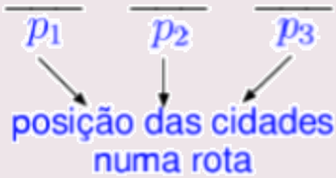


exemplos de rotas

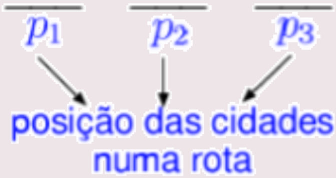
ACD, DCA, ADB

Arranjo Simples

Resolução:

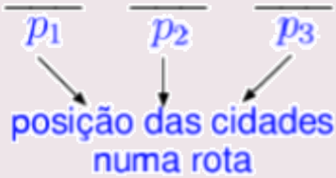


Resolução:



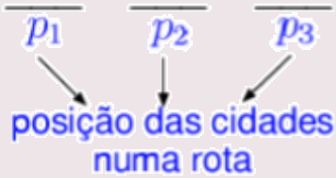
- Rota: Arranjo simples de 3 cidades escolhidas entre 5.

Resolução:



- Rota: Arranjo simples de 3 cidades escolhidas entre 5.
- Número de rotas: $A(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Resolução:



- Rota: Arranjo simples de 3 cidades escolhidas entre 5.
- Número de rotas: $A(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Resposta:

A companhia pode ter 60 rotas ligando as 5 cidades.

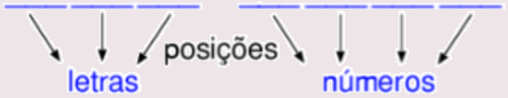
Exemplo 5:

As placas dos automóveis são formadas por três letras seguidas de quatro dígitos. Quantas placas com letras e números diferentes podem ser formadas?

Exemplo 5:

As placas dos automóveis são formadas por três letras seguidas de quatro dígitos. Quantas placas com letras e números diferentes podem ser formadas?

Resolução:



Exemplo 5:

As placas dos automóveis são formadas por três letras seguidas de quatro dígitos. Quantas placas com letras e números diferentes podem ser formadas?

Resolução:

número de letras = 26

Exemplo 5:

As placas dos automóveis são formadas por três letras seguidas de quatro dígitos. Quantas placas com letras e números diferentes podem ser formadas?

Resolução:

número de letras = 26

número de letras numa placa = 3

Exemplo 5:

As placas dos automóveis são formadas por três letras seguidas de quatro dígitos. Quantas placas com letras e números diferentes podem ser formadas?

Resolução:

número de letras = 26

número de letras numa placa = 3

número de dígitos = 10

Exemplo 5:

As placas dos automóveis são formadas por três letras seguidas de quatro dígitos. Quantas placas com letras e números diferentes podem ser formadas?

Resolução:

número de letras = 26

número de letras numa placa = 3

número de dígitos = 10

número de dígitos numa placa = 4

Característica:

Característica:

- Pares ordenados de 3 letras e 4 números

Arranjo Simples

Característica:

- Pares ordenados de 3 letras e 4 números

Número de possibilidades:

letras números

Característica:

- Pares ordenados de 3 letras e 4 números

Número de possibilidades:

letras   números

$A(26, 3)$

Arranjo Simples

Característica:

- Pares ordenados de 3 letras e 4 números

Número de possibilidades:

$$\begin{array}{ccc} \text{letras} & & \text{números} \\ A(26,3) & \times & A(10,4) \end{array}$$

Arranjo Simples

Característica:

- Pares ordenados de 3 letras e 4 números

Número de possibilidades:

$$\underset{\text{letras}}{A(26,3)} \quad \times \quad \underset{\text{números}}{A(10,4)} = \frac{26!}{23!} \times \frac{10!}{6!} = 78624 \times 10^3$$

Arranjo Simples

Característica:

- Pares ordenados de 3 letras e 4 números

Número de possibilidades:

$$\underset{\text{letras}}{A(26,3)} \quad \times \quad \underset{\text{números}}{A(10,4)} = \frac{26!}{23!} \times \frac{10!}{6!} = 78624 \times 10^3$$

Resposta:

- Tem-se 78624000 placas com 3 letras e 4 números diferentes

Exemplo 6:

Quantos números naturais de três algarismos distintos (na base 10) existem?

Exemplo 6:

Quantos números naturais de três algarismos distintos (na base 10) existem?

Resolução:

- dígitos? 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Exemplo 6:

Quantos números naturais de três algarismos distintos (na base 10) existem?

Resolução:

- dígitos? 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

$$\underline{\cancel{0}}\quad\underline{\qquad}\quad\underline{\qquad}$$

Raciocínio 1: $\underbrace{\underline{\cancel{0}}}\quad\underbrace{\underline{\qquad}\quad\underline{\qquad}}$

Possibilidades: $9 \quad \times \quad A(9,2) = 9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$

Exemplo 6 (raciocínio 2):

Usamos o conceito de complemento:

- U := conjunto universo := o conjunto das ordenações de três dígitos
- A := conjunto dos números de 3 algarismos.
- B := conjunto dos elementos de U que iniciam com 0
  - $A = U - B$
  - $N = |A| = |U| - |B|$

Exemplo 6 (raciocínio 2):

Usamos o conceito de complemento:

- U := conjunto universo := o conjunto das ordenações de três dígitos
- A := conjunto dos números de 3 algarismos.
- B := conjunto dos elementos de U que iniciam com 0
  - $A = U - B$
  - $N = |A| = |U| - |B|$
  - $|U| = A(10,3) = \frac{10!}{7!}, |B| = A(9,2) = \frac{9!}{7!}$
  - $N = \frac{10!}{7!} - \frac{9!}{7!} = \frac{10 \cdot 9! - 9!}{7!} = 648$

Exemplo 6 (raciocínio 2):

Usamos o conceito de complemento:

- U := conjunto universo := o conjunto das ordenações de três dígitos
- A := conjunto dos números de 3 algarismos.
- B := conjunto dos elementos de U que iniciam com 0
  - $A = U - B$
  - $N = |A| = |U| - |B|$
  - $|U| = A(10,3) = \frac{10!}{7!}, |B| = A(9,2) = \frac{9!}{7!}$
  - $N = \frac{10!}{7!} - \frac{9!}{7!} = \frac{10 \cdot 9! - 9!}{7!} = 648$

Resposta:

- Tem-se 648 números naturais de três algarismos distintos.

- Recomendação
    - Em geral é conveniente começar a análise dos eventos (ou possibilidades) por aquelas que tem algum tipo de impedimento (ou dificuldade)

Exemplo 7:

Quantos números naturais com todos os dígitos distintos ímpares, m, existem entre 1000 e 9999 ($1000 < m < 9999$)?

Exemplo 7:

Quantos números naturais com todos os dígitos distintos ímpares, m, existem entre 1000 e 9999 ($1000 < m < 9999$)?

Resolução:

- Os números m tem 4 dígitos

Exemplo 7:

Quantos números naturais com todos os dígitos distintos ímpares, m, existem entre 1000 e 9999 (1000 < m < 9999)?

Resolução:

- Os números m tem 4 dígitos
- Dígitos ímpares: 1,3,5,7,9

$\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}$
$p_1\ p_2\ p_3\ p_4$

n: quantidade de dígitos ímpares = 5

Arranjo Simples

Exemplo 7:

Quantos números naturais com todos os dígitos distintos ímpares, m, existem entre 1000 e 9999 (1000 < m < 9999)?

Resolução:

- Os números m tem 4 dígitos
- Dígitos ímpares: 1,3,5,7,9

$$\overline{\;p_1\;}\quad\overline{\;p_2\;}\quad\overline{\;p_3\;}\quad\overline{\;p_4\;}$$

n: quantidade de dígitos ímpares = 5

r: quantidade de dígitos de um número = 4

Exemplo 7:

Quantos números naturais com todos os dígitos distintos ímpares, m, existem entre 1000 e 9999 (1000 < m < 9999)?

Resolução:

- Os números m tem 4 dígitos
- Dígitos ímpares: 1,3,5,7,9

$\overline{}\ \overline{}\ \overline{}\ \overline{}$
$p_1\ p_2\ p_3\ p_4$

n: quantidade de dígitos ímpares = 5

r: quantidade de dígitos de um número = 4

Possibilidades: $A(5,4) = \frac{5!}{(5-4)!} = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Resposta: Existem 120 números com todos os dígitos distintos ímpares entre 1000 e 9999.

- Observação

$$A(5,4) = \frac{5!}{(5-4)!} = 5! = P_5 = A(5,5) = \frac{5!}{(5-5)!}$$

  - Em geral,

$$A(n, n-1) = A(n,n) = P_n = n!$$

Exemplo 8:

Quantos números pares de quatro dígitos têm dígitos distintos?

Exemplo 8:

Quantos números pares de quatro dígitos têm dígitos distintos?

Resolução:

$$\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}$$
$$p_1\quad p_2\quad p_3\quad p_4$$

Exemplo 8:

Quantos números pares de quatro dígitos têm dígitos distintos?

Resolução:

$$\begin{array}{cccc} & & & 0 \\ & & & 2 \\ & & & 4 \\ & & & 6 \\ & & & 8 \\ \overline{p_1} & \overline{p_2} & \overline{p_3} & \overline{p_4} \end{array}$$

Exemplo 8:

Quantos números pares de quatro dígitos têm dígitos distintos?

Resolução:

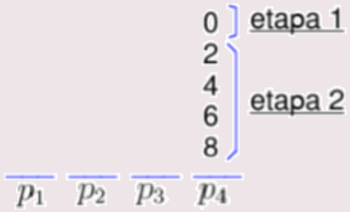
0] etapa 1
2
4
6
8

$\underline{\quad}_{p_1}$ $\underline{\quad}_{p_2}$ $\underline{\quad}_{p_3}$ $\underline{\quad}_{p_4}$

Exemplo 8:

Quantos números pares de quatro dígitos têm dígitos distintos?

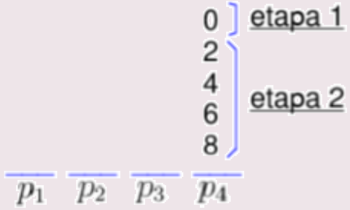
Resolução:



Exemplo 8:

Quantos números pares de quatro dígitos têm dígitos distintos?

Resolução:



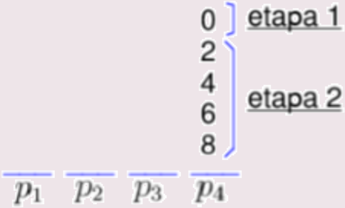
M: quantidade de números naturais de 4 dígitos terminados em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Arranjo Simples

Exemplo 8:

Quantos números pares de quatro dígitos têm dígitos distintos?

Resolução:



M: quantidade de números naturais de 4 dígitos terminados em 0, 2, 4, 6 ou 8.

$M = M_1 + M_2$, sendo

M_1: quantidade de números de 4 dígitos terminados em 0 (etapa 1)

M_2: quantidade de números de 4 dígitos terminados em 2, 4, 6 ou 8 (etapa 2)

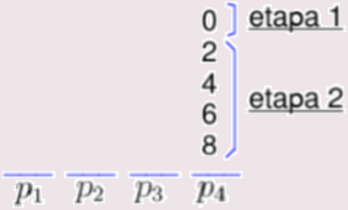
Exemplo 8 (etapa 1):

Obtenção de M_1, quantidade de números de dígitos distintos, com 4 dígitos terminados em 0:

Exemplo 8 (etapa 1):

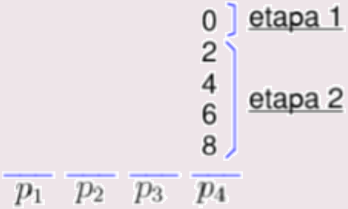
Obtenção de M_1, quantidade de números de dígitos distintos, com 4 dígitos terminados em 0:

Possibilidades:



Exemplo 8 (etapa 1):

Obtenção de M_1, quantidade de números de dígitos distintos, com 4 dígitos terminados em 0:



Possibilidades:

Como $A(n, r) = n(n-1)\ldots(n-(r-1))$

$n = 9, r = 3$

Exemplo 8 (etapa 2):

Obtenção de M_2, quantidade de números de dígitos distintos, entre 1000 e 9999 terminados em 2, 4, 6 ou 8:

Exemplo 8 (etapa 2):

Obtenção de M_2, quantidade de números de dígitos distintos, entre 1000 e 9999 terminados em 2, 4, 6 ou 8:

$$\begin{array}{cccc} & & & 2\\ & & & 4\\ & & & 6\\ \cancel{0} & & & 8\\ \hline p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{array}$$

Possibilidades:

$$\underbrace{p_1}_{8} \times \underbrace{p_2 \quad p_3}_{A(8,2)} \times \underbrace{p_4}_{4}$$

Exemplo 8 (etapa 2):

Obtenção de M_2, quantidade de números de dígitos distintos, entre 1000 e 9999 terminados em 2, 4, 6 ou 8:

$$\underbrace{\underset{p_1}{\underline{\cancel{0}}}}_{8} \times \underbrace{\underset{p_2}{\underline{\quad}}\ \underset{p_3}{\underline{\quad}}}_{A(8,2)} \times \underbrace{\underset{p_4}{\underline{\begin{matrix}2\\4\\6\\8\end{matrix}}}}_{4}$$

Possibilidades:

Resposta da etapa 2: $M_2 = 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4$

Exemplo 8 (análise final):

Enunciado: Quantos números naturais entre 1000 e 9999 têm dígitos distintos e são pares?

Resolução:

- $M = M_1 + M_2$, sendo
- M: total de números naturais de 4 dígitos terminados em 0, 2, 4, 6 ou 8
- M_1: total de números de 4 dígitos terminados em 0 (etapa 1)
- M_2: total de números de 4 dígitos terminados em 2, 4, 6 ou 8 (etapa 2)

Exemplo 8 (análise final):

Enunciado: Quantos números naturais entre 1000 e 9999 têm dígitos distintos e são pares?

Resolução:

- $M = M_1 + M_2$, sendo
- M: total de números naturais de 4 dígitos terminados em 0, 2, 4, 6 ou 8
- M_1: total de números de 4 dígitos terminados em 0 (etapa 1)
- M_2: total de números de 4 dígitos terminados em 2, 4, 6 ou 8 (etapa 2)

Resposta:

- Como, $M_1 = A(9,3) = 504$, $M_2 = 8 \cdot 4 \cdot A(8,2) = 1792$ tem-se que $M = 504 + 1792 = 2296$

Combinações Simples

Exemplo 1:

Numa sala estão reunidas três pessoas, P_1, P_2 e P_3. De quantas maneiras podemos selecionar duas pessoas?

Exemplo 1:

Numa sala estão reunidas três pessoas, P_1, P_2 e P_3. De quantas maneiras podemos selecionar <u>duas</u> pessoas?

Reformulação do exemplo:

Seja $A = \{P_1, P_2, P_3\}$. Quantos subconjuntos de 2 elementos possui A?

Exemplo 1 (continuação):

Resolução:

$$A = \{P_1, P_2, P_3\}$$

Exemplo 1 (continuação):

Resolução:

$$A = \{P_1, P_2, P_3\}$$

- N: número de subconjuntos de 2 elementos de A
- Raciocínio 1: enumeração dos subconjuntos de A

$$B = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, P_3\}, \{P_2, P_3\}\}$$

Exemplo 1 (continuação):

Resolução:

$$A = \{P_1, P_2, P_3\}$$

- N: número de subconjuntos de 2 elementos de A
- Raciocínio 1: enumeração dos subconjuntos de A

$$B = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, P_3\}, \{P_2, P_3\}\}$$

- **Resposta:**

$$N = |B| = n(B) = 3$$

Exemplo 1 (raciocínio 2):

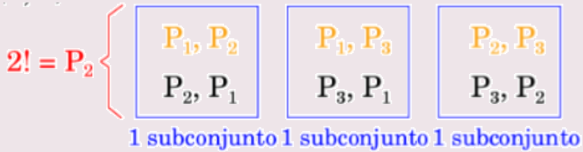
Sem enumeração dos subconjuntos de A (usando arranjos e permutações)

- Os arranjos de 3 elementos tomados 2 a 2 consideram a ordem!
- Então devemos reduzir a 1 possibilidade todas as permutações dos mesmos elementos.

Combinações Simples: Introdução

Exemplo 1 (continuação):

$A(3,2)$



Combinações Simples: Introdução

Exemplo 1 (continuação):

$A(3,2)$

$$2! = P_2 \left\{ \begin{array}{ccc} \boxed{\begin{array}{c} P_1, P_2 \\ P_2, P_1 \end{array}} & \boxed{\begin{array}{c} P_1, P_3 \\ P_3, P_1 \end{array}} & \boxed{\begin{array}{c} P_2, P_3 \\ P_3, P_2 \end{array}} \\ \text{1 subconjunto} & \text{1 subconjunto} & \text{1 subconjunto} \end{array} \right.$$

Resumindo:

$P_2 \xrightarrow{\text{correspondem}}$ 1 subconjunto

Combinações Simples: Introdução

Exemplo 1 (continuação):

$A(3,2)$

$$2! = P_2 \begin{cases} \underbrace{\boxed{\begin{matrix} P_1, P_2 \\ P_2, P_1 \end{matrix}}}_{\text{1 subconjunto}} & \underbrace{\boxed{\begin{matrix} P_1, P_3 \\ P_3, P_1 \end{matrix}}}_{\text{1 subconjunto}} & \underbrace{\boxed{\begin{matrix} P_2, P_3 \\ P_3, P_2 \end{matrix}}}_{\text{1 subconjunto}} \end{cases}$$

Resumindo:

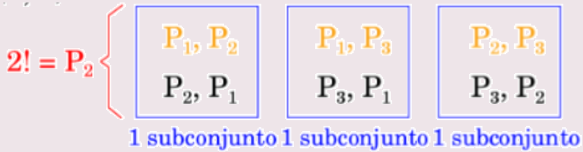
$P_2 \xrightarrow{\text{correspondem}}$ 1 subconjunto

$A(3,2) \xrightarrow{\text{correspondem}}$ $N = \frac{A(3,2)}{P_2}$ total de subconjuntos

Combinações Simples: Introdução

Exemplo 1 (continuação):

$A(3,2)$



Resumindo:

$P_2 \xrightarrow{\text{correspondem}}$ 1 subconjunto

$A(3,2) \xrightarrow{\text{correspondem}}$ $N = \frac{A(3,2)}{P_2}$ total de subconjuntos

Resposta:

$$N = \frac{A(3,2)}{P_2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3 \cdot 2!}{2! \cdot 1!} = 3$$

Exemplo 2:

Uma fábrica de sucos está lançando no mercado 5 novos sabores. Como propaganda, cada pessoa pode experimentar 2 sabores diferentes. Quantas opções tem cada um?

Exemplo 2:

Uma fábrica de sucos está lançando no mercado 5 novos sabores. Como propaganda, cada pessoa pode experimentar 2 sabores diferentes. Quantas opções tem cada um?

Resolução:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$$

Exemplo 2:

Uma fábrica de sucos está lançando no mercado 5 novos sabores. Como propaganda, cada pessoa pode experimentar 2 sabores diferentes. Quantas opções tem cada um?

Resolução:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$$

- 1 opção: uma escolha de 2 sabores entre 5 (não importa a ordem)
- N: número de opções

Exemplo 2:

Uma fábrica de sucos está lançando no mercado 5 novos sabores. Como propaganda, cada pessoa pode experimentar 2 sabores diferentes. Quantas opções tem cada um?

Resolução:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$$

- 1 opção: uma escolha de 2 sabores entre 5 (não importa a ordem)
- N: número de opções

$P_2 \xrightarrow{\text{da lugar a}}$ 1 opção

Exemplo 2:

Uma fábrica de sucos está lançando no mercado 5 novos sabores. Como propaganda, cada pessoa pode experimentar 2 sabores diferentes. Quantas opções tem cada um?

Resolução:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$$

- 1 opção: uma escolha de 2 sabores entre 5 (não importa a ordem)
- N: número de opções

$P_2 \xrightarrow{\text{da lugar a}}$ 1 opção

$A(5,2) \xrightarrow{\text{da lugar a}}$ N opções = $\frac{A(5,2)}{P_2}$

Exemplo 2:

Uma fábrica de sucos está lançando no mercado 5 novos sabores. Como propaganda, cada pessoa pode experimentar 2 sabores diferentes. Quantas opções tem cada um?

Resolução:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$$

- 1 opção: uma escolha de 2 sabores entre 5 (não importa a ordem)
- N: número de opções

$P_2 \xrightarrow{\text{da lugar a}}$ 1 opção

$A(5,2) \xrightarrow{\text{da lugar a}}$ N opções = $\frac{A(5,2)}{P_2}$

Resposta:

$$N = \frac{A(5,2)}{P_2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5}{2! \cdot 3!} = 10$$

Características dos exemplos

- Os elementos considerados $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são diferentes.
- Cada escolha de r elementos distintos (sem importar a ordem) entre $a_1, a_2, \ldots, a_n$ corresponde a uma possibilidade.
- Na obtenção do número de possibilidades aplica-se os princípios aditivo e multiplicativo (usa-se os conceitos de arranjos e permutações).

- Definição:
  - Dados n objetos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, uma combinação simples de n elementos tomados de r a r é uma seleção de r elementos distintos escolhidos entre $a_1, a_2, \ldots, a_n$, não importando a ordem da escolha, sendo r e n números naturais com $1 \leq r \leq n$.
- Ilustração:
  - Dadas as pessoas P_1, P_2, P_3,
  - P_1, P_3 é uma combinação de 3 elementos tomados de 2 a 2.

Número de Combinações Simples

- Problema:

  Dados n elementos ditintos, $a_1, a_2, \ldots, a_n$,

  encontrar o número de combinações simples dos n elementos tomados r a r.

- Propriedade:
  - O número de combinações simples de n elementos distintos tomados de r a r, denominado C(n,r), é:

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{A(n,r)}{P_r}$$

- Observação:

$$C(n,r) = C(n,n-r) = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!}$$

Exemplo 3:

Um técnico convocou 9 jogadores para um campeonato de vôlei. Para formar a equipe inicial deve escolher 5 jogadores. Quantas opções ele tem?

Exemplo 3:

Um técnico convocou 9 jogadores para um campeonato de vôlei. Para formar a equipe inicial deve escolher 5 jogadores. Quantas opções ele tem?

Resolução:

n = número de jogadores = 9

Exemplo 3:

Um técnico convocou 9 jogadores para um campeonato de vôlei. Para formar a equipe inicial deve escolher 5 jogadores. Quantas opções ele tem?

Resolução:

n = número de jogadores = 9

r = número de jogadores da equipe = 5

Exemplo 3:

Um técnico convocou 9 jogadores para um campeonato de vôlei. Para formar a equipe inicial deve escolher 5 jogadores. Quantas opções ele tem?

Resolução:

n = número de jogadores = 9

r = número de jogadores da equipe = 5

total de opções:

$$C(9,5) = \frac{9!}{5!(9-5)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 9 \cdot 2 \cdot 7 = 126$$

Resposta:

O técnico tem 126 opções de formar a equipe inicial.

Exemplo 4:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formadas?

Exemplo 4:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formadas?

Resolução:

n = número de professores = $12 + 12 = 24$

Exemplo 4:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formadas?

Resolução:

n = número de professores = $12 + 12 = 24$

r = número de professores em uma comissão = 8

Exemplo 4:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formadas?

Resolução:

n = número de professores = $12 + 12 = 24$

r = número de professores em uma comissão = 8

N: Numero de comissões possíveis

Exemplo 4:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formadas?

Resolução:

n = número de professores = $12 + 12 = 24$

r = número de professores em uma comissão = 8

N: Numero de comissões possíveis

Resposta:

Podem ser formadas:

$$N = C(24, 8) = \frac{24!}{8!16!} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 735471 \; comissões$$

.

Exemplo 5:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formadas havendo 3 professores de matemática?

Exemplo 5:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formadas havendo 3 professores de matemática?

Resolução:

número de professores = $12 + 12 = 24$

Exemplo 5:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formadas havendo 3 professores de matemática?

Resolução:

número de professores = $12 + 12 = 24$

número de professores de matemática em uma comissão = 3

Exemplo 5:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formadas havendo 3 professores de matemática?

Resolução:

número de professores = $12 + 12 = 24$

número de professores de matemática em uma comissão = 3

número de professores de informática em uma comissão = 8 - 3 = 5

Exemplo 5:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formadas havendo 3 professores de matemática?

Resolução:

número de professores = $12 + 12 = 24$

número de professores de matemática em uma comissão = 3

número de professores de informática em uma comissão = 8 - 3 = 5

Possibilidades: $\dfrac{C(12,3)}{matemática\ (3\ de\ 12)} \times \dfrac{C(12,5)}{informática\ (5\ de\ 12)} = \dfrac{12!}{3!9!} \times \dfrac{12!}{5!7!}$

Resposta:

O número de comissões é 174240.

Exemplo 6:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formadas havendo pelo menos 1 professor de matemática?

Exemplo 6:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formadas havendo pelo menos 1 professor de matemática?

Resolução:

- Raciocínio 1:

  U: conjunto universo := o conjunto de todas as comissões de 8 professores

Exemplo 6:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formadas havendo pelo menos 1 professor de matemática?

Resolução:

- Raciocínio 1:

  U: conjunto universo := o conjunto de todas as comissões de 8 professores

  A:= conjunto de todas as comissões com pelo menos 1 professor de matemática

Exemplo 6:

Um grupo de trabalho tem 12 professores do curso de informática e 12 professores do curso de matemática. Quantas comissões de 8 professores podem ser formadas havendo pelo menos 1 professor de matemática?

Resolução:

- Raciocínio 1:

  U: conjunto universo := o conjunto de todas as comissões de 8 professores

  A:= conjunto de todas as comissões com pelo menos 1 professor de matemática

  B:= conjunto de todas as comissões sem professor de matemática

Exemplo 6 (continuação):

$A = U - B$

número de comissões := $N = |A| = |U| = |B|$

Número de Combinações Simples

Exemplo 6 (continuação):

$$A = U - B$$

número de comissões := $N = |A| = |U| = |B|$

$$|U|$$

Exemplo 6 (continuação):

$A = U - B$

número de comissões := $N = |A| = |U| = |B|$

$|U| = C(24, 8)$,

Exemplo 6 (continuação):

$A = U - B$

número de comissões := $N = |A| = |U| = |B|$

$|U| = C(24, 8)$, $|B|$

Exemplo 6 (continuação):

$A = U - B$

número de comissões := $N = |A| = |U| = |B|$

$|U| = C(24, 8)$, $|B| = C(12, 8)$

Exemplo 6 (continuação):

$A = U - B$

número de comissões := $N = |A| = |U| = |B|$

$|U| = C(24, 8)$, $|B| = C(12, 8)$

$N = C(24, 8) - C(12, 8) = \frac{24!}{8!16!} - \frac{12!}{8!4!} = 734976$

Resposta:

- O número de comissões possíveis neste caso é 734976.

Número de Combinações Simples

Exemplo 6 (raciocínio 2):

A_i := conjunto de todas as comissões com i professores de matemática, para $i = 1, 2, \ldots, 8$

$$A = \bigcup_{i=1}^{8} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_8$$

$$N = |A| \overset{\text{princípio}}{\underset{\text{aditivo}}{=}} \sum_{i=1}^{8} |A_i| = |A_1| \; 1 \; |A_2| + \ldots + |A_8|$$

$$|A_i| \overset{\text{princípio}}{\underset{\text{multiplicativo}}{=}} C(12, i)\, C(12, 8-i) \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, 8$$

$$\begin{aligned} N = {} & C(12, 1)\, C(12, 7) + C(12, 2)\, C(12, 6) + C(12, 3)\, C(12, 5) + \\ & C(12, 4)\, C(12, 4) + C(12, 5)\, C(12, 3) + C(12, 6)\, C(12, 2) + \\ & C(12, 7)\, C(12, 1) + C(12, 8)\, C(12, 0) \end{aligned}$$

Exemplo 7:

De quantos modos é possível dividir 20 pessoas em um grupo de 12 e um grupo de 8?

Exemplo 7:

De quantos modos é possível dividir 20 pessoas em um grupo de 12 e um grupo de 8?

Resolução:

Raciocínio 1:

- N: modos de dividir 20 em 1 grupo de 12 e outro de 8

Exemplo 7:

De quantos modos é possível dividir 20 pessoas em um grupo de 12 e um grupo de 8?

Resolução:

Raciocínio 1:

- N: modos de dividir 20 em 1 grupo de 12 e outro de 8
- M: quantidade de grupos de 12 dentre 20 = C(20,12)

Exemplo 7:

De quantos modos é possível dividir 20 pessoas em um grupo de 12 e um grupo de 8?

Resolução:

Raciocínio 1:

- N: modos de dividir 20 em 1 grupo de 12 e outro de 8
- M: quantidade de grupos de 12 dentre 20 = C(20,12)
- Dado 1 grupo de 12, o grupo de 8 fica definido.

Número de Combinações Simples

Exemplo 7:

De quantos modos é possível dividir 20 pessoas em um grupo de 12 e um grupo de 8?

Resolução:

Raciocínio 1:

- N: modos de dividir 20 em 1 grupo de 12 e outro de 8
- M: quantidade de grupos de 12 dentre 20 = C(20,12)
- Dado 1 grupo de 12, o grupo de 8 fica definido.

Resposta:

- $N = C(20, 12) = \frac{20!}{12!8!}$

Exemplo 7 (raciocínio 2):

- N: modos de dividir 20 em 1 grupo de 12 e outro de 8
- M: quantidade de grupos de 8 dentre 20 = $C(20, 8)$

Exemplo 7 (raciocínio 2):

- N: modos de dividir 20 em 1 grupo de 12 e outro de 8
- M: quantidade de grupos de 8 dentre 20 = $C(20, 8)$
- Dado 1 grupo de 8, o grupo de 12 fica definido.

Exemplo 7 (raciocínio 2):

- N: modos de dividir 20 em 1 grupo de 12 e outro de 8
- M: quantidade de grupos de 8 dentre 20 = $C(20, 8)$
- Dado 1 grupo de 8, o grupo de 12 fica definido.

Resposta:

- $N = C(20, 8) = \frac{20!}{8!12!} = C(20, 12)$

Exemplo 8:

- De quantos modos é possível dividir 20 pessoas em 2 grupos de 10?

Exemplo 8:

- De quantos modos é possível dividir 20 pessoas em 2 grupos de 10?

Resolução:

- N: modos de dividir 20 em 2 grupos de 10

Exemplo 8:

- De quantos modos é possível dividir 20 pessoas em 2 grupos de 10?

Resolução:

- N: modos de dividir 20 em 2 grupos de 10
- M: quantidade de grupos de 10 dentre 20 = $C(20, 10)$

Exemplo 8:

- De quantos modos é possível dividir 20 pessoas em 2 grupos de 10?

Resolução:

- N: modos de dividir 20 em 2 grupos de 10
- M: quantidade de grupos de 10 dentre 20 = $C(20, 10)$
- Dado 1 grupo de 10, o outro grupo fica definido.

Exemplo 8 (continuação):

- Diferença com o exemplo 7:
  - Os 2 grupos são de 10 pessoas (estamos dividindo as 20 pessoas por 2)

Número de Combinações Simples

Exemplo 8 (continuação):

- Diferença com o exemplo 7:
  - Os 2 grupos são de 10 pessoas (estamos dividindo as 20 pessoas por 2)

Ilustração:

$$p_1, p_2, \ldots, p_{20} \text{ as pessoas}$$

- a escolha $p_1, p_2, \ldots, p_{10}$ define o outro grupo $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{20}$
- a escolha $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{20}$ define o outro grupo $p_1, p_2, \ldots, p_{10}$

Exemplo 8 (continuação):

- Diferença com o exemplo 7:
  - Os 2 grupos são de 10 pessoas (estamos dividindo as 20 pessoas por 2)

Ilustração:

$$p_1, p_2, \ldots, p_{20} \text{ as pessoas}$$

- a escolha $p_1, p_2, \ldots, p_{10}$ define o outro grupo $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{20}$
- a escolha $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{20}$ define o outro grupo $p_1, p_2, \ldots, p_{10}$

Resposta:

$$N = \frac{C(20,10)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{20!}{10!10!}$$

Exemplo 9:

- Um concurso para professor tem 20 inscritos. Devem ser selecionadas 10 pessoas para realizar a prova em 1 dia e 10 para fazê-la no dia seguinte. De quantos modos é possível fazer a seleção?

Exemplo 9:

- Um concurso para professor tem 20 inscritos. Devem ser selecionadas 10 pessoas para realizar a prova em 1 dia e 10 para fazê-la no dia seguinte. De quantos modos é possível fazer a seleção?

Resolução:

- Relações com o exercício 8:
  - Semelhança: Escolha de 2 grupos de 10 entre 20
  - Diferença: Existe uma ordem entre os grupos determinada pelo dia da prova.

Exemplo 9 (continuação):

- a escolha $p_1, p_2, \ldots, p_{10}$ (1º dia) define o grupo $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{20}$ (2º dia)
- a escolha $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{20}$ (1º dia) define o grupo $p_1, p_2, \ldots, p_{10}$ (2º dia)

Exemplo 9 (continuação):

- a escolha $p_1, p_2, \ldots, p_{10}$ (1º dia) define o grupo $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{20}$ (2º dia)
- a escolha $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{20}$ (1º dia) define o grupo $p_1, p_2, \ldots, p_{10}$ (2º dia)

Resolução:

- Relações com o exercício 8:
  - Semelhança: Escolha de 2 grupos de 10 entre 20
  - Diferença: Existe uma ordem entre os grupos determinada pelo dia da prova.

Exemplo 9 (continuação):

- a escolha $p_1, p_2, \ldots, p_{10}$ (1º dia) define o grupo $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{20}$ (2º dia)
- a escolha $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{20}$ (1º dia) define o grupo $p_1, p_2, \ldots, p_{10}$ (2º dia)

Resolução:

- Relações com o exercício 8:
  - Semelhança: Escolha de 2 grupos de 10 entre 20
  - Diferença: Existe uma ordem entre os grupos determinada pelo dia da prova.

Resposta:

- Tem-se $C(20, 10)$ possibilidades de seleção.