

Matemática Computacional

Lógica Formal

Prof. Rogério Figueredo de Sousa

rogerio.sousa@ifpi.edu.br

21/03/2024



As proposições podem ser combinadas na forma "**se** proposição 1, **então** proposição 2"

B

■ A

■ A

A

A

A



As proposições podem ser combinadas na forma "**se** proposição 1, **então** proposição 2"

- Essa proposição composta é denotada por \rightarrow
- Seja proposição 1 dada por A e proposição 2 dada por B, reescrevemos $A \rightarrow B$, onde A é o **antecedente** e B é o **consequente**.
- Esse conectivo lógico leva o nome de **implicação** ou **condicional**.



- Por convenção, $A \rightarrow B$ é verdadeira se A for falsa, independentemente do valor lógico de B .

Exemplo: **Se** Fulano foi até a loja de esportes **então** foi até a casa de sua avó.



■ Tabela-Verdade

| A | B | $A \rightarrow B$ |
|---|---|-------------------|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |



As proposições podem ser combinadas na forma "proposição 1 **se, e somente se**, proposição 2"

- Essa proposição composta é denotada por \leftrightarrow
- Seja proposição 1 dada por A e proposição 2 dada por B, reescrevemos $A \leftrightarrow B$
- Esse conectivo lógico leva o nome de **Bicondicional**
- É uma abreviação de $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.



Tabela-Verdade

| A | B | $A \rightarrow B$ | $A \rightarrow B$ | $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ |
|---|---|-------------------|-------------------|--|
| V | V | V | V | V |
| V | F | F | V | F |
| F | V | V | F | F |
| F | F | V | V | V |

Para construir uma tabela-verdade, será necessário resolver todas as possíveis combinações de valores lógicos das proposições existentes;

A resolução de um sistema formal deve seguir uma ordem, assim como acontece nas equações matemáticas:

1 $()$, $\{\}$

2 $'$

3 \vee , \wedge , \oplus

4 \rightarrow

5 \leftrightarrow



Precedência de Operadores

1 $()$, $\{ \}$

2 $'$

3 \vee , \wedge , \oplus

4 \rightarrow

5 \leftrightarrow

| Equação Original | Certo | Errado |
|--|--|--|
| $A' \vee B$ | $(A)' \vee B$ | $(A \vee B)'$ |
| $A \vee B \rightarrow C$ | $(A \vee B) \rightarrow C$ | $A \vee (B \rightarrow C)$ |
| $A \wedge B \rightarrow C \leftrightarrow D$ | $((A \wedge B) \rightarrow C) \leftrightarrow D$ | $A \wedge (B \rightarrow (C \leftrightarrow D))$ |



Expressões em Português

| Português | Conectivo Lógico | Expressão Lógica |
|---|---------------------|-----------------------|
| Não A. É falso que A... Não é verdade que A... | Negação | A' |
| E; mas; também; além disso | Conjunção | $A \wedge B$ |
| Ou | Disjunção | $A \vee B$ |
| Ou A, Ou B. | Disjunção exclusiva | $A \oplus B$ |
| Se A, então B. A implica B. A, logo B. A só se B; A somente se B. B segue A A é uma condição suficiente para B; basta A para B. B é uma condição necessária para A. | Condicional | $A \rightarrow B$ |
| A se e somente se B. A é condição necessária e suficiente para B. | Bicondicional | $A \leftrightarrow B$ |



"O fogo é uma condição necessária para a fumaça".

De que outra maneira podemos escrever?

"Se houver fumaça, então haverá fogo."

Antecedente e consequente?



Negações corretas e incorretas

| Proposições | Correta | Incorreta |
|-------------------------------|---|--|
| Vai chover amanhã. | É falso que vá chover amanhã. Não vai chover amanhã | |
| Pedro é alto e magro. | É falso que Pedro seja alto e magro. Pedro não é alto ou não é magro. Pedro é baixo ou gordo. | Pedro é baixo e gordo. (Pode ser que Pedro não tenha apenas 1 das propriedades) |
| O rio é raso ou está poluído. | É falso que o rio seja raso ou esteja poluído. O rio não é raso e não está poluído. O rio é fundo e não está poluído. | O rio não é raso ou não está poluído. (Ambas devem ser falsas!) |



Quais das proposições a seguir representa P' se P é a proposição: "Júlia gosta de manteiga, mas detesta creme"?

- A** Júlia detesta manteiga e creme;
- B** Júlia não gosta de manteiga nem de creme;
- C** Júlia não gosta de manteiga mas adora creme;
- D** Júlia não gosta de manteiga ou adora creme.

Faça a tabela-verdade.



Fórmula Bem Formulada

Uma cadeia, no qual obedece as regras de sintaxe, como

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

é denominada uma **fórmula bem formulada (fbf)**.

Exemplo de fórmula mal formulada,

$$((A' \rightarrow BC$$

Letras maiúsculas do final do alfabeto (P,Q,R,S,...) serão utilizadas para representar fbf's.

Exemplo: $((A \wedge B) \wedge C) \rightarrow (B \vee C')$ pode ser representada por

$$P \rightarrow Q$$



1 Faça a tabela-verdade para cada uma das fbf:

a $A \vee B' \rightarrow (A \vee B)'$

b $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (B \wedge B')$

c $(A \vee A') \rightarrow (B \wedge B')$

d $[(A \wedge B') \rightarrow C']'$

e $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (B' \rightarrow A')$



Uma fbf como a do item E), que assume apenas o valor V, é denominada **tautologia**.

Ou seja, é **verdadeira** independentemente dos valores lógicos atribuídos às proposições.

Exemplo: $A \vee A'$

"Hoje vai ter sol ou hoje não vai ter sol".



Tautologia

É dito tautológico todo sistema lógico cuja tabela-verdade resulta apenas em valores Verdadeiros:

$A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$: (comutatividade)

| A | B | $A \wedge B$ | $B \wedge A$ | \leftrightarrow |
|---|---|--------------|--------------|-------------------|
| V | V | V | V | V |
| V | F | F | F | V |
| F | V | F | F | V |
| F | F | F | F | V |



Uma fbf como a do item C), cujo valor lógico é sempre falso, é denominada **contradição**.

Ou seja, é **falsa** independentemente dos valores lógicos atribuídos às proposições.

Exemplo: $A \wedge A'$

“Hoje é terça-feira e hoje não é terça-feira”.



Contradição

É dita contradição todo sistema lógico cuja tabela-verdade resulta apenas em valores Falsos:

$$(A \rightarrow B) \wedge (A \wedge B')$$

| A | B | $A \rightarrow B$ | $A \wedge B'$ | $(A \rightarrow B) \wedge (A \wedge B')$ |
|---|---|-------------------|---------------|--|
| V | V | V | F | F |
| V | F | F | V | F |
| F | V | V | F | F |
| F | F | V | F | F |



Todo e qualquer sistema lógico que não seja Tautologia ou Contradição, será considerado contingência.



Equivalência

Seja P e Q duas fbf's e suponha que a fbf $P \leftrightarrow Q$ seja uma tautologia. Se fizermos uma tabela-verdade observamos que os valores lógicos de P e Q seriam iguais em todas as linhas.

Exemplo:

■ $P: A \vee B$

■ $Q: B \vee A$

| A | B | $A \vee B$ | $B \vee A$ | $P \leftrightarrow Q$ |
|-----|-----|------------|------------|-----------------------|
| V | V | V | V | V |
| V | F | V | V | V |
| F | V | V | V | V |
| F | F | F | F | V |



Então, dizemos que P e Q são **equivalentes**, denotamos por $P \iff Q$.

Ou seja, $P \iff Q$ se, e somente se, $P \leftrightarrow Q$ é uma tautologia.

Logo, o item 1-E) é uma equivalência, segue

$$(A \rightarrow B) \iff (B' \rightarrow A')$$

Quando uma fbf é equivalente a outra, elas podem ser substituídas uma pela outra.



Algumas Equivalências Tautológicas

■ Comutatividade:

$$A \vee B \iff B \vee A$$

$$A \wedge B \iff B \wedge A$$

■ Associatividade:

$$(A \vee B) \vee C \iff A \vee (B \vee C)$$

$$(A \wedge B) \wedge C \iff A \wedge (B \wedge C)$$

■ Distributividade:

$$A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

$$A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

■ Elementos neutros:

$$A \vee 0 \iff A$$

$$A \wedge 1 \iff A$$



Tabela-verdade elemento neutro B):

| A | 1 | $A \wedge 1$ | $A \wedge 1 \rightarrow A$ |
|---|---|--------------|----------------------------|
| V | V | V | V |
| F | V | F | V |

■ Complementares

$$A \vee A' \iff 1$$

$$A \wedge A' \iff 0$$



O matemático inglês Augusto De Morgan (1806 - 1871) foi o primeiro a enunciar algumas equivalências lógicas (e de conjuntos). Estas equivalências convertem operações lógicas E em OU e vice-versa e são amplamente utilizadas na construção de sistemas lógicos:

$$(A \vee B)' \iff A' \wedge B'$$

$$(A \wedge B)' \iff A' \vee B'$$



Na prática, não importa o número de proposições. Ex.:

$$(A \vee B \vee C \vee D)' \iff A' \wedge B' \wedge C' \wedge D'$$

$$(A \wedge B \wedge C \wedge D \wedge E)' \iff A' \vee B' \vee C' \vee D' \vee E'$$



Regras de Equivalência

| Equivalência | Nome / Abreviatura |
|--|--------------------------------|
| $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ | Comutatividade / <i>com</i> |
| $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$ $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ | Associatividade / <i>ass</i> |
| $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ | Distributividade / <i>dist</i> |
| $A \wedge 1 \Leftrightarrow A$ $A \vee 0 \Leftrightarrow A$ | Elementos neutros |
| $A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$ $A \vee 1 \Leftrightarrow 1$ | Outras propriedades do 0 e 1 |
| $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$ $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$ | Complementares |

| Equivalência | Nome / Abreviatura |
|--|--|
| $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ | Lei de Morgan / <i>De Morgan</i> |
| $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$ | Definição de Equivalência / <i>que</i> |
| $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg A \vee B$ | Condicional / <i>cond</i> |
| $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ | Contraposição / <i>cont</i> |
| $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ | Dupla Negação / <i>dn</i> |
| $A \Leftrightarrow A \wedge A$ $A \Leftrightarrow A \vee A$ | Idempotência / <i>id</i> |



Poscomp[2013, q11]: Considere as sentenças a seguir:

P: Pedro faz as tarefas todos os dias.

Q: Pedro terá boas notas no final do ano.

- Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a tradução em linguagem simbólica da negação da sentença composta a seguir:
- “Se Pedro faz as tarefas todos os dias, então Pedro terá boas notas no final do ano.”

1 $P \rightarrow Q$

2 $P \leftrightarrow Q$

3 $P \wedge \sim Q$

4 $\sim P \wedge \sim Q$

5 $\sim P \wedge Q$



Poscomp[2013, q13]: Admita que um novo conectivo binário, rotulado pelo símbolo \updownarrow , seja definido pela tabela-verdade ao lado. Com base nessa definição e nas operações usuais com os conectivos \vee , \wedge e \sim , considere as afirmativas a seguir.

- I $P \updownarrow Q$ é equivalente a $Q \updownarrow P$
- II $(P \updownarrow Q) \vee (Q \updownarrow P)$ não é uma contingência.
- III $(Q \updownarrow P) \wedge (P \updownarrow Q)$ é uma contradição.
- IV $\sim [(Q \updownarrow P) \wedge (P \updownarrow Q)]$ é uma tautologia.

| P | Q | $P \updownarrow Q$ |
|---|---|--------------------|
| V | V | F |
| V | F | V |
| F | V | F |
| F | F | F |

Assinale a alternativa correta.

- a Somente as afirmativas I e II são corretas.
- b Somente as afirmativas I e IV são corretas.
- c Somente as afirmativas III e IV são corretas.
- d Somente as afirmativas I, II e III são corretas.



Assinale a proposição logicamente equivalente a $\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q)$

- a $\neg p \wedge (q \vee \neg q)$
- b $\neg p$
- c $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$
- d $(p \vee q) \vee (p \wedge \neg q)$
- e p



Considere as seguintes proposições:

I $\neg p \vee q$

II $\neg(p \wedge \neg q)$

III $p \rightarrow q$

IV $(V \rightarrow q) \vee (p \rightarrow F)$

Quais as proposições acima são logicamente equivalentes?

a Somente I \equiv III

b Somente I \equiv II

c Somente I \equiv II \equiv III

d I \equiv III e II \equiv III mas III $\not\equiv$ IV

e I, II, III, IV são todas equivalentes.



A sentença lógica $A \wedge (B \vee \neg C)$ é equivalente a

- A** $A \wedge (\neg B \wedge C)$
- B** $\neg A \vee \neg(B \vee \neg C)$
- C** $\neg A \vee (\neg B \wedge C)$
- D** Todas as respostas anteriores
- E** Nenhuma das respostas anteriores



Existem três suspeitos de invadir uma rede de computadores: André, Bruna e Carlos. Sabe-se que a invasão foi efetivamente cometida por um ou por mais de um deles, já que podem ter agido individualmente ou não. Sabe-se, ainda, que:

- I Se André é inocente, então Bruna é culpada.
- II Ou Carlos é culpado ou Bruna é culpada, mas não os dois.
- III Carlos não é inocente.

Com base nestas considerações, conclui-se que:

- A Somente André é inocente.
- B Somente Bruna é culpada.
- C Somente Carlos é culpado.
- D São culpados apenas Bruna e Carlos.
- E São culpados apenas André e Carlos.



Os conectores lógicos \vee , \rightarrow são lidos como “ou” e “implica”. O operador “não” é representado por \neg . Considerando esta notação, a tabela verdade da proposição $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \vee P)$, assumindo que a sequência de valores de P é $\{V, V, F, F\}$ e a de Q é $\{V, F, V, F\}$, tem os valores:

- a $\{ F, F, F, F \}$
- b $\{ V, V, V, V \}$
- c $\{ V, V, F, V \}$
- d $\{ F, F, V, V \}$
- e $\{ V, F, V, F \}$



Lógica Proposicional



Um argumento pode ser representado em forma simbólica como

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q$$

Onde $P_1, P_2, P_3 \dots$ são proposições dadas, chamadas de **hipóteses** do argumento, e Q é a **conclusão**.

Em geral, P_i e Q representam fbf's.

Quando que deve ser considerado um argumento válido?



Quando deve ser considerado um argumento válido?

Q é uma conclusão lógica de P_1, \dots, P_n sempre que a verdade das proposições P_1, \dots, P_n implica na verdade de Q .

Considere o argumento (contra-exemplo):

“Luis Inácio é o presidente do Brasil. Florianópolis é a capital de Santa Catarina. Portanto, o dia tem 24 horas”.

$$A \wedge B \rightarrow C$$

Duas hipóteses e a conclusão, mas nesse caso **não** consideramos o argumento válido, pois a conclusão é um fato verdadeiro isolado das hipóteses.



Um argumento válido deveria ser intrinsecamente verdadeiro, sendo assim, segue definição.

Definição: A fbf proposicional

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q$$

é um **argumento válido** quando for uma tautologia.

Obs: no último exemplo o argumento $(A \wedge B \rightarrow C)$ não é uma tautologia, por isso não era um argumento válido.



Exemplo 1)

“Se Luis Inácio for presidente do Brasil, então Geraldo Alckmin é o vice-presidente. Luis Inácio é presidente do Brasil. Portanto, Geraldo Alckmin é o vice-presidente do Brasil”.

Duas hipóteses:

- 1 Se Luis Inácio for presidente do Brasil, então Geraldo Alckmin é o vice-presidente
- 2 Luis Inácio é presidente do Brasil.

Conclusão:

Geraldo Alckmin é o vice-presidente do Brasil.

Representação simbólica: $A \rightarrow B \wedge A \rightarrow B$, que é uma tautologia.



Ex. 2: Validade de Argumentos

Argumento: $P_1 \wedge P_2 \rightarrow Q$

P_1 : "Se está chovendo, então há nuvens."

P_2 : "Está chovendo."

Q : "Há nuvens."

Proposições:

A: Está chovendo.

B: Há nuvens

Dedução/validação:

$P_1: A \rightarrow B$

$P_2: A$

$Q: B$

Dedução Válida?



Ex. 3: Validade de Argumentos

Argumento: $P_1 \wedge P_2 \rightarrow Q$

P_1 : "Se está chovendo, então há nuvens."

P_2 : "Há Nuvens."

Q : "Está chovendo."

Proposições:

A: Está chovendo.

B: Há nuvens

Dedução/validação:

P_1 : $A \rightarrow B$

P_2 : B

Q : A

Dedução Válida?



Sequência de demonstração:

Hipóteses: P_1, P_2, \dots, P_n

Fbf's: fbf1, fbf2,..

Conclusão: Q.



Existem, basicamente, dois tipos de regra de dedução: **equivalências e inferências**.

Equivalências

Permitem que as fbf's sejam reescritas mantendo o valor lógico.

Inferências

Permitem a dedução de novas fbf's a partir de fbf's anteriores.



Regras de Equivalência

| Equivalência | Nome / Abreviatura |
|--|--------------------------------|
| $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ | Comutatividade / <i>com</i> |
| $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$ $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ | Associatividade / <i>ass</i> |
| $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ | Distributividade / <i>dist</i> |
| $A \wedge 1 \Leftrightarrow A$ $A \vee 0 \Leftrightarrow A$ | Elementos neutros |
| $A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$ $A \vee 1 \Leftrightarrow 1$ | Outras propriedades do 0 e 1 |
| $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$ $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$ | Complementares |

| Equivalência | Nome / Abreviatura |
|--|--|
| $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ | Lei de Morgan / <i>De Morgan</i> |
| $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$ | Definição de Equivalência / <i>que</i> |
| $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg A \vee B$ | Condicional / <i>cond</i> |
| $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ | Contraposição / <i>cont</i> |
| $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ | Dupla Negação / <i>dn</i> |
| $A \Leftrightarrow A \wedge A$ $A \Leftrightarrow A \vee A$ | Idempotência / <i>id</i> |



Exemplo: suponha o argumento proposicional

$$(A' \vee B') \vee C$$

então uma sequência de demonstração ficaria,

- $(A' \vee B') \vee C$ (hipótese)
- $(A \wedge B)' \vee C$ (1, De Morgam)
- $(A \wedge B) \rightarrow C$ (2, condicional)



Exemplo: Se Marcia não está com fome, então ela não vai a padaria. Além disso, se Márcia está com fome e vai à padaria ou não vai à padaria, então ela vai à padaria.

A: Márcia vai à padaria. B: Márcia está com fome.



Exemplo: Se Marcia não está com fome, então ela não vai a padaria. Além disso, se Márcia está com fome e vai à padaria ou não vai à padaria, então ela vai à padaria.

A: Márcia vai à padaria. B: Márcia está com fome.

$$(B' \rightarrow A') \wedge (B \wedge (A \vee A') \rightarrow A)$$



Exemplo: Se Marcia não está com fome, então ela não vai a padaria. Além disso, se Márcia está com fome e vai à padaria ou não vai à padaria, então ela vai à padaria.

A: Márcia vai à padaria. B: Márcia está com fome.

$$(B' \rightarrow A') \wedge (B \wedge (A \vee A') \rightarrow A)$$

(Complementares) $A \vee A' \leftrightarrow 1$:

$$(B' \rightarrow A') \wedge (B \wedge (1) \rightarrow A)$$



Exemplo: Se Marcia não está com fome, então ela não vai à padaria. Além disso, se Márcia está com fome e vai à padaria ou não vai à padaria, então ela vai à padaria.

A: Márcia vai à padaria. B: Márcia está com fome.

$$(B' \rightarrow A') \wedge (B \wedge (A \vee A') \rightarrow A)$$

(Complementares) $A \vee A' \leftrightarrow 1$:

$$(B' \rightarrow A') \wedge (B \wedge (1) \rightarrow A)$$

Contraposição $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (B' \rightarrow A')$ e **Elemento Neutro**: $A \wedge 1 \leftrightarrow A$:

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$



Exemplo: Se Marcia não está com fome, então ela não vai à padaria. Além disso, se Márcia está com fome e vai à padaria ou não vai à padaria, então ela vai à padaria.

A: Márcia vai à padaria. B: Márcia está com fome.

$$(B' \rightarrow A') \wedge (B \wedge (A \vee A') \rightarrow A)$$

(Complementares) $A \vee A' \leftrightarrow 1$:

$$(B' \rightarrow A') \wedge (B \wedge (1) \rightarrow A)$$

Contraposição $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (B' \rightarrow A')$ e **Elemento Neutro**: $A \wedge 1 \leftrightarrow A$:

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

Definição de Equivalência: $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)$:

$$A \leftrightarrow B$$



Exemplo: Se Marcia não está com fome, então ela não vai à padaria. Além disso, se Márcia está com fome e vai à padaria ou não vai à padaria, então ela vai à padaria.

A: Márcia vai à padaria. B: Márcia está com fome.

$$(B' \rightarrow A') \wedge (B \wedge (A \vee A') \rightarrow A)$$

(Complementares) $A \vee A' \leftrightarrow 1$:

$$(B' \rightarrow A') \wedge (B \wedge (1) \rightarrow A)$$

Contraposição $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (B' \rightarrow A')$ e **Elemento Neutro**: $A \wedge 1 \leftrightarrow A$:

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

Definição de Equivalência: $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)$:

$$A \leftrightarrow B$$

Márcia vai à padaria se, e somente se ela está com fome



Regras de Inferência

| De | Deduzimos | Nome / Abreviatura |
|--|-----------------------------------|----------------------------------|
| A $A \Rightarrow B$ | B | Modus ponens / <i>mp</i> |
| $\neg B$ $A \Rightarrow B$ | $\neg A$ | Modus Tollens / <i>mt</i> |
| A B | $A \wedge B$ | Conjunção / <i>conj</i> |
| $A \wedge B$ | A | Simplificação / <i>simp</i> |
| $A \wedge B$ | B | Simplificação / <i>simp</i> |
| A | $A \vee B$ | Adição / <i>ad</i> |
| $A \Rightarrow B$ $B \Rightarrow C$ | $A \Rightarrow C$ | Silogismo Hipotético / <i>sh</i> |
| $\neg A$ $A \vee B$ | B | Silogismo Disjuntivo / <i>sd</i> |
| $(A \wedge B) \Rightarrow C$ | $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ | Exportação / <i>exp</i> |



Se uma ou mais fbf's contidas na primeira coluna das regras de inferência, fazem parte de uma sequência da demonstração, então podemos substituí-las pela fbf contida na segunda coluna.

As regras de inferência não funcionam em ambas direções.

Exemplo: suponha $A \rightarrow (B \wedge C)$ e A duas hipóteses de um argumento, uma sequência de demonstração seria:

- $A \rightarrow (B \wedge C)$ (**hipótese**)
- A (**hipótese**)
- $B \wedge C$ (**1,2,modus ponens**)

Depois da última movimentação, a FBF se parece com a adição, mas não podemos inferir nem B e nem C



Exemplo: dê o próximo passo da demonstração e justifique.

- $(A \wedge B') \rightarrow C$ (**hipótese**)
- C' (**hipótese**)
- ?



Exemplo: dê o próximo passo da demonstração e justifique.

- $(A \wedge B') \rightarrow C$ (hipótese)
- C' (hipótese)
- $(A \wedge B')'$ (1,2,mt)



Ex. 1: Demonstração

Argumento: $P_1 \wedge P_2 \rightarrow Q$

P_1 : "Se está chovendo, então há nuvens."

P_2 : "Está chovendo."

Q : "Há nuvens."

Proposições:

A: Está chovendo.

B: Há nuvens

Dedução/validação:

$P_1: A \rightarrow B$

$P_2: A$

$Q: B$

Dedução Válida?



$$(A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow B$$

- $A \rightarrow B$ (hipótese, V)
- A (hipótese, V)
- B (1,2,mp)



Exemplo 2

Argumento: $P_1 \wedge P_2 \rightarrow Q$

P_1 : "Se está chovendo, então há nuvens."

P_2 : "Está chovendo."

Q : "Há nuvens."

Proposições:

A: Está chovendo.

B: Há nuvens

Dedução/validação:

P_1 : $A \rightarrow B$

P_2 : B

Q: B

Dedução Válida? Não, não é um argumento válido.



Usando lógica proposicional, prove que o argumento é válido.

$$A \wedge (B \rightarrow C) \wedge [(A \wedge B) \rightarrow (D \vee C')] \wedge B \rightarrow D$$

Exercício 1: provar a validade de:

$$[A \rightarrow (B \vee C)] \wedge B' \wedge C' \rightarrow A'$$

Exercício 2: provar a validade de:

$$A' \wedge B \wedge [B \rightarrow (A \vee C)] \rightarrow C$$



Suponha que o argumento que queremos provar tenha a forma

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow (R \rightarrow S)$$

onde a conclusão é uma implicação.

Ao invés de usar P_1, \dots, P_n como hipótese e $R \rightarrow S$ de conclusão, o método dedutivo nos permite adicionar R como hipótese,

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \wedge P_n \wedge R \rightarrow S$$



Use lógica proposicional para provar

$$[A \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow (A \rightarrow B)$$

e

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$$

(silogismo hipotético)



Use lógica proposicional para provar

■ $(A' \vee B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$

■ $(A \rightarrow B) \wedge (C' \vee A) \wedge C \rightarrow B$



Exemplo 1: Considere o argumento “Se as taxas de juros caírem, o mercado imobiliário vai melhorar. A taxa federal de descontos vai cair ou o mercado imobiliário não vai melhorar. As taxas de juros vão cair. Portanto, a taxa federal de descontos vai cair

Resolução:

J: A taxa de juros vai cair.

I: O mercado imobiliário vai melhorar.

F: A taxa federal de descontos vai cair.

O argumento fica: $(J \rightarrow I) \wedge (F \vee I') \wedge J \rightarrow F$, basta **provar se o argumento é válido**.



Exemplo 2: “Meu cliente é canhoto mas, se o diário não tiver sumido, então meu cliente não é canhoto; portanto o diário sumiu.”

Exemplo 3: “Se segurança é um problema, então o controle será aumentado. Se segurança não é um problema, então os negócios na Internet irão aumentar. Portanto, se o controle não for aumentado, os negócios na Internet crescerão.”

