INSTITUTO FEDERAL Piauí Campus Picos	**INSTITUTO FEDERAL DA PIAUÍ** **Campus Picos**
	Disciplina: Matemática Computacional
	Professor(a): Rogerio Figueredo de Sousa
	Curso: Análise e Desenvolvimento de Sistemas **Semestre:** 1
	Lista 5: Combinatória

1. De quantas maneiras as letras da palavra CURSO podem ser permutadas?

2. Um cubo de madeira tem as faces pintadas de cores diferentes. De quantos modos podem ser gravados números de 1 a 6 sobre cada uma das faces?

3. Considere 4 cidades A, B, C e D. Ana e João pensam fazer um passeio pelas 4 cidades, passando por cada uma delas apenas uma vez.

   a) Se eles podem começar por qualquer cidade e terminar em qualquer cidade, quantos trajetos são possíveis?

   b) Se eles devem começar pela cidade A, quantos caminhos são possíveis?

4. De quantos modos é possível colocar em uma prateleira 5 livros distintos de matemática, 3 diferentes de física e 2 diferentes de inglês?

5. Quantos são os anagramas da palavra ÂNGULO que:

   a) Começam com vogal?

   b) Começam e terminam por vogal?

   c) Não têm juntas as letras A e N?

6. De quantos modos 5 meninas e 5 meninos podem formar uma roda de ciranda de modo que pessoas do mesmo sexo não fiquem juntas?

7. De quantos modos 4 casais podem formar uma roda de ciranda de modo que cada homem permaneça ao lado da sua mulher e que pessoas do mesmo sexo não fiquem juntas?

8. De quantos modos 5 mulheres e 6 homens podem formar uma roda de ciranda de modo que as mulheres permaneçam juntas?

9. Em uma comissão de 10 professores devem ser escolhidos um coordenador e um subcoordenador. De quantas maneiras eles podem ser escolhidos?

10. De quantas maneiras 4 amigos entre 10 podem se colocar em uma foto?

11. Quantos tipos de bilhetes especificando a origem e o destino têm uma compania aérea que une 7 cidades?

12. Considere os números de 3 algarismos distintos formados com os dígitos 2, 3, 5, 8, e 9.

    a) Quantos são estes números?

    b) Quantos são menores do que 800?

    c) Quantos são múltiplos de 5?

    d) Quantos são pares?

e) Quantos são ímpares?

13. Quantas são as palavras de 5 letras distintas de um alfabeto de 26 letras nas quais a letra **A** aparece mas não é a letra inicial da palavra?

14. Quantos números de 3 e 4 algarismos distintos e maiores do que 300 podem ser formados com os algarismos 0, 1, 3, 5 e 7?

15. Quantos são os números de 5 algarismos distintos na base 10:

    a) Nos quais o algarismo 2 aparece?
    b) Nos quais o algarismo 2 não aparece?

16. Um estudante recebe uma prova contendo 6 questões. Ele deve escolher 4 para resolver. De quantas maneiras diferentes ele pode fazer essa escolha?

17. Uma turma de calouros tem 15 rapazes e 10 moças. Devem escolher 2 representantes. De quantas maneiras eles podem ser escolhidos?

18. De quantos modos 5 meninas e 3 meninos podem ser divididos em 2 grupos de 4 crianças de forma tal que cada grupo inclua pelo menos 1 menino?

19. Uma comissão formada por 3 homens e 3 mulheres deve ser escolhida em um grupo de 8 homens e 5 mulheres.

    a) Quantas comissões podem ser formadas?
    b) Qual seria a resposta se um dos homens não aceitasse participar da comissão se nela estivesse determinada mulher?

20. Para a seleção brasileira foram convocados 2 goleiros, 6 zagueiros, 7 meios de campo e 4 atacantes. De quantos modos é possível escalar a seleção com 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meios de campo e 2 atacantes?

21. Considere 3 vogais diferentes (incluindo o A) e 7 consoantes diferentes (incluindo o B).

    a) Quantas anagramas de 5 letras diferentes podem ser formados com 3 consoantes e 2 vogais?
    b) Quantas começam com A?

Gabarito

Questão 1:

Cada anagrama de CURSO nada mais é que uma ordenação das letras C, U, R, S, O. Assim, o número de anagramas de CURSO é $P_5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$.

Questão 2:

Devemos colocar seis cores em seis lugares. Logo, a resposta é $P_6 = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$.

Questão 3:

a) $4! = 4.3.2.1 = 24$ trajetos possíveis, pois cada passeio corresponde a uma forma diferente de visitar a cidade.

b) $3! = 3.2.1 = 6$, pois a cidade A é fixa.

Questão 4:

Como não existe restrição, podemos ordenar os livros de qualquer maneira.Como temos ao todo 10 livros, daí a resposta é $P_10 = 10! = 3628800$.

Questão 5:

a) A vogal inicial pode ser escolhida de 3 maneiras, e as letras restantes podem ser arrumadas de $P_5 = 5!$ maneiras. Logo, pelo princípio multiplicativo, a resposta é $3.5! = 360$.

b) A vogal inicial pode ser escolhida de 3 maneiras, a vogal final de 2 maneiras e as 4 letras restantes podem ser arrumadas entre essas duas vogais de $P_4 = 4!$ modos. Logo, a resposta é $3.2.4! = 3.2.4.3.2.1 = 144$. Observemos que obtemos o mesmo resultado se começamos com a possibilidade da última letra, depois continuamos coma as possi- bilidades da primeira letra e finalmente as quatro letras restantes.

c) O número de anagramas com 6 letras é $P_6 = 6! = 720$. O número de maneiras de ordenar 6 letras de modo que 2 letras, A e N , fiquem juntas é 2.5!, pois para formar um anagrama, devemos inicialmente decidir em que ordem se colocarão A e N (AN ou NA), e, em seguida, formar o anagrama com 5 letras. Portanto a resposta é $6! - 2.5! = 720 - 240 = 480$.

Questão 6:

Existe uma permutação circular com as 5 meninas, isto é, $(PC)_5 = 4!$ modos de formar uma roda com as meninas. Depois disso, os 5 meninos devem ser postos nos lugares entre as meninas, o que pode ser feito de 5! modos. A resposta é $4!5! = 2880$.

Questão 7:

Existe uma permutação circular com os 4 homens, isto é, $(PC)_4 = 3!$ modos de formar uma roda como os 4 homens. Depois disso, há dois modos de pôr as esposas na roda: à direita ou à esquerda de seus maridos. A resposta é $2.3! = 12$.

Questão 8:

Podemos formar uma roda com os homens de $(PC)_6 = 5!$ modos. Depois, devemos escolher um dos 6 espaços entre os homens (o que pode ser feito de 6 modos) para aí colocarmos todas as mulheres. Finalmente, devemos decidir em que ordem as 5 mulheres se colocarão nesse espaço (5! modos). A resposta é $5!6.5! = 5!6! == 86400$.

Questão 9:

Observemos que temos 10 professores e devemos fazer 2 escolhas, coordenador e subcoordenador (importa a ordem emq ue são considerados). Portanto, esta questão tem as características dos arranjos simples, onde o número total de elementos diferentes considerados são 10 e cada escolha de 2 professores corresponde a uma possibilidade. Então, o número de maneiras emq ue eles podem ser escolhidos é $A(10,2) = \dfrac{10!}{(10-2)!} = 10.9 = 900$

Questão 10:

Observemos que, escolhidos 4 amigos dentre 10, a ordem como eles podem aparecer na foto dá lugar a possibilidades diferentes. Portanto, o número de maneiras como 4 amigos dentre 10 podem se colocar em uma foto corresponde a arranjos simples, $A(10,4) = \dfrac{10!}{6!}$

Questão 11:

42

Questão 12:

a) O número de 3 algarismos distintos formados com os dígitos 2,3,5,8 e 9 é $A(5,3) = 60$

b) Como os números devem ser menores do que 800, significa que o primeiro algarismo (centena) não pode começar nem com 8 nem com 9. Portanto, para esta posição, temos 3 possibilidades. Escolhida uma possibilidade para a primeira posição, sobram 4 números para as outras 2 posições (dezena e unidade), isto é, temos $A(4,2)$ possibilidades. Então, pelo princípio multiplicativo, temos que a quantidade de números de 3 algarismos menores de 800 que podem ser formados com os números 2,3,5,8 e 9 é $3.A(4,2) = 36$

c) Com os dígitos dados, os únicos números múltiplos de 5 são os que finalizam em 5. Portanto, restam para as outras duas posições (centenas e dezenas) os números 2,3,8 e 9 tomados 2 a 2. Logo, os múltiplos de 5 são $A(4,2) = 12$.

d) Os números pares são $2.A(4,2) = 24$

e) Os números ímpares são $3.A(4,2) = 36$

Questão 13:

Para a letra inicial das palavras de 5 letras distintas temos 25 possibilidades pois não pode ser a letra A.

Fixada a primeira letra, a letra A pode ocupar na palavra 4 posições diferentes.

Fixada a primeira letra e a posição de A na palavra de 5 letras, restam 3 posições que podem ser preenchidas com 24 letras diferentes do alfabeto. Então, dadas 24 letras, o número de possibilidades de formar anagramas de 3 letras distintas é $A(24,3) = \dfrac{24!}{21!}$.

Portanto, considerando as possibilidades para a letra inicial, para a posição de A e para as 3 letras restantes e usando o princípio multiplicativo, concluímos que o número de palavras de 5 letras distintas de um alfabeto de 26 letras nas quais a letra A figura mas não é a letra inicial da palavra é $25 \cdot 4 \cdot \dfrac{24!}{21!} = 4 \cdot \dfrac{25!}{21!}$.

Questão 14:

Começamos calculando a quantidade de números de 3 algarismos distintos e maiores do que 300 formados com 0, 1, 3, 5 e 7. Observemos que para o primeiro dígito (centena) temos 3 possibilidades

(3, 5 ou 7). Para as duas posições restantes temos $A(4,2)$ possibilidades (incluímos 0 e 1). Portanto, devido ao princípio multiplicativo, neste caso temos $3A(4,2) = 36$ modos diferentes.

Agora calculamos a quantidade de números com 4 algarismos distintos formados com 0, 1, 3, 5 e 7. Para a primeira posição temos 4 maneiras $(1,3,5$ ou $7)$. Fixado um número na primeira posição, temos $A(4,3)$ possibilidades, pois também devemos considerar o 0. Logo, neste caso, usando o princípio multiplicativo temos $4A(4,3) = 96$ possibilidades.

Finalmente, usando o princípio aditivo, obtemos que a quantidade de números de 3 e 4 algarismos distintos e maiores do que 300 que podem ser formados com os algarismos 0, 1, 3, 5 e 7 é $36+96 = 132$.

Questão 15:

a) Separamos o raciocínio em duas partes. Na primeira consideramos que o 2 está na primeira posição e na segunda etapa consideramos que o 2 não aparece na primeira posição.

   Na primeira situação, temos de escolher 4 algarismos distintos dentre 9 dígitos. Portanto, os números de 5 algarismos distintos na base 10 que começam com 2 são $A(9,4) = 3024$.

   Na segunda parte, os números podem começar de 8 formas diferentes (estão excluídos 0 e 2). Logo, uma das 4 posições restantes deve ser ocupada por 2. Fixados o primeiro dígito do número e a posição do 2, restam 3 lugares a serem preenchidos com 8 dígitos diferentes que pode ser feito de $A(8,3)$ modos diferentes. Portanto, neste caso, pelo princípio multiplicativo temos $8 \cdot 4 \cdot A(8,3) = 10752$ possibilidades.

   Os números de 5 algarismos distintos na base 10 nos quais o algarismo 2 figura é a união do conjunto de números de 5 algarismos distintos na base 10 que começam com 2 e do conjunto de números de 5 algarismos distintos na base 10 que não começam com 2, que são disjuntos. Logo, pelo princípio aditivo, temos que a quantidade dos números de 5 algarismos distintos na base 10 nos quais o algarismo 2 figura é $9 \cdot \frac{8!}{5!} + 32 \cdot \frac{8!}{5!} = 13776$.

b) O problema é equivalente a encontrar a quantidade de números de 5 algarismos distintos formados com os algarismos 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, que corresponde a $8.A(8,4) = 8.\frac{8!}{4!}$.

Questão 16:

O estudante deve selecionar um grupo de 4 num total de 6 questões.

Note que a ordem da resolução das questões não é importante: Resolvendo em ordem 1, 2, 3 e 4 ou, resolvendo 4, 3, 2 e 1 nesta ordem, de qualquer forma o aluno terá resolvido as mesmas questões.

Portanto, o aluno pode fazer esta escolha de $C(6,4) = 15 maneiras$.

Questão 17: A turma tem 25 alunos, dentre estes podemos escolher 2 alunos de $C(25,2) = 300$ maneiras.

Questão 18: Nessa questão adotaremos o seguinte raciocínio: Ao invés de contar o que é pedido no problema, contaremos seu complementar, subtrairemos este resultado do total e assim obteremos o número desejado.

O conjunto complementar é calculado em relação ao conjunto formado pelas possíveis divisões de 8 crianças em 2 grupos de 4 (conjunto universo).

Note que o único jeito de partirmos as crianças em 2 grupos de 4, de tal forma que algum desse grupos não tenha pelo menos um menino, é distribuir as crianças em um grupo com 4 meninas e outro com 3 meninos e uma menina.

Podemos dividir 8 crianças em 2 grupos de 4 crianças da seguinte forma: Escolhemos 4 crianças para ficar num grupo, para isso temos $C(8,4)$ maneiras e as restantes colocamos no outro grupo. Note que uma distribuição fixa é contada mais de uma vez, pois se enumerarmos as crianças de 1 a 8, o agrupamento $\{1,2,3,4\}$, $\{5,6,7,8\}$, onde o primeiro grupo representa o grupo formado pela escolha de 4 entre 8 crianças e o segundo pelas crianças restantes é equivalente a $\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4\}$. Precisamos portanto dividir o total pelo número de permutações entre os 2 grupos que é $P_2 = 2$. Logo, podemos distribuir 8 crianças em 2 grupos de 4 de $\dfrac{C(8,4)}{P_2} = \dfrac{70}{2} = 35$ maneiras.

Para dividir as crianças em grupos onde um dos grupos não tenha nenhum menino, devemos colocar os 3 meninos num único grupo, depois temos $C(5,1)$ maneiras para determinar qual das meninas fará parte do grupo onde estão os 3 meninos. As meninas restantes irão compor o outro grupo.

O total de grupos com pelo menos 1 menino é $\dfrac{C(8,4)}{P_2} - C(5,1) = 35 - 5 = 30$.

Questão 19:

a) Para compor a comissão devemos escolher 3 em um grupo de 8 homens, o que nos dá um total de $C(8,3) = 56 maneiras$. Analogamente para as mulheres temos $C(5,3) = 10 maneiras$. Portanto, pelo princípio multiplicativo temos $C(8,3).C(5,3) = 56.10 = 560$ comissões distintas.

b) Dividiremos as comissões em dois grupos: Comissões onde se encontra a determinada mulher e comissões onde a mesma não se encontra.

Contando o número de comissões onde a mulher se encontra, temos $C(4,2) = 6$ maneiras de preencher as outras vagas destinadas a mulheres, e como não poderemos contar com um dos homens, temos $C(7,3) = 35$ maneiras de selecionar os homens que vão compor a comissão. Portanto, pelo princípio multiplicativo, temos $C(4,2)\cdot C(7,3) = 210$ comissões distintas.

Sabendo que a determinada mulher não se encontra na comissão, temos $C(4,3) = 4$ formas de escolher as 3 mulheres e $C(8,3) = 56$ maneiras de escolher os 3 homens. Portanto, pelo princípio multiplicativo, temos $C(4,3)\cdot C(8,3) = 224$ comissões distintas.

Logo, pelo princípio aditivo, podemos montar um total de $210 + 224 = 434$ comissões distintas.

Questão 20: Podemos escalar o goleiro de $C(2,1) = 2$ maneiras, os zagueiros de $C(6,4) = 15$ formas, os meio de campo de $C(7,4) = 35$ maneiras e os atacantes de $C(4,2) = 6$ maneiras. Pelo princípio multiplicativo, podemos montar o time de $C(2,1).C(6,4).C(7,4).C(4,2) = 2.15.35.6 = 6300$ maneiras.

Questão 21:

a) Inicialmente devemos selecionar quais vogais irão ser utilizadas nos anagramas, podemos fazer isso de $C(3,2) = 3$ formas. Agora determinamos as posições destas vogais no anagrama, podemos fazer isto de $A(5,2) = 20$ maneiras. Pelo princípio multiplicativo, temos $C(3,2)A(5,2) = 60$ formas de selecionar e alocar as vogais.

Em relação às consoantes, devemos inicialmente selecionar 3, podemos fazer isto de $C(7,3) = 35$ maneiras. Depois temos que distribuir as consoantes escolhidas nas 3 posições restantes, isto pode ser feito de $P_3 = 6$ maneiras. Pelo princípio multiplicativo, temos $C(7,3)P_3 = 210$ formas de selecionar e alocar as vogais.

Logo, pelo princípio multiplicativo, o número total de anagramas é $60 \cdot 210 = 12600$.

b) Fixemos a vogal A no início da palavra, devemos agora preencher o anagrama das letras à direita do A, isto é, um anagrama de 4 letras onde devemos usar uma vogal e 3 consoantes. O procedimento adotado será análogo ao do item anterior.

Primeiro selecionamos qual é a outra vogal a ser utilizada no anagrama (observe que não podemos mais usar a vogal A), podemos fazer isso de $C(2,1) = 2$ formas. Agora determinamos a posição desta vogal no anagrama, podemos fazer isto de $A(4,1) = 4$ maneiras. Pelo princípio multiplicativo, temos $C(2,1)A(4,1) = 8$ formas de selecionar e alocar as vogais.

Para as consoantes, devemos inicialmente selecionar 3, podemos fazer isto de $C(7,3) = 35$ maneiras. Depois temos que distribuir as consoantes escolhidas nas 3 posições restantes, isto pode ser feito de $P_3 = 6$ maneiras. Pelo princípio multiplicativo, temos $C(7,3)P_3 = 210$ formas de selecionar e alocar as vogais.

Logo, pelo princípio multiplicativo, o número total de anagramas é $8 \cdot 210 = 1680$.