

Matemática Computacional

Conjuntos

Prof. Rogério Figueredo de Sousa

rogerio.sousa@ifpi.edu.br

05/07/2024



Conjunto não se define formalmente. Usa-se uma ideia intuitiva de que se trata de uma coleção de objetos, logo, informalmente, um conjunto é uma coleção desordenada de zero ou mais objetos, denominados elementos do conjunto. Dizemos que um conjunto contém seus elementos.

- Esses objetos de um conjunto possuem alguma propriedade em comum.
- Em geral, trata-se de uma estrutura discreta, usada para construir outras estruturas;
- O propósito fundamental é o de agrupar elementos.



Notação: Indicamos um conjunto, em geral, com uma letra maiúscula e um elemento com letra minúscula.

- Se A é um conjunto e x pertence a A , esse fato é denotado por: $x \in A$.
- Se, por outro lado, tivermos que x não pertence ao conjunto A , escrevemos: $x \notin A$.

Usamos chaves para indicar um conjunto.

- Se $A = \text{azul, verde, branco}$, então $\text{verde} \in A$ e $\text{preto} \notin A$.
- Os elementos em um conjunto não tem nenhuma ordem, de modo que $\text{azul, verde, branco}$ é o mesmo que $\text{branco, azul, verde}$.



Dois conjuntos são **iguais** se contêm os mesmos elementos. Ou seja,

$$A = B \text{ significa } (\forall x)[x \in A \rightarrow x \in B \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)]$$

- Ao descrever um conjunto particular, temos que identificar seus elementos.
- Para um **conjunto finito** (com n elementos para $n > 0$), isso é feito listando-se todos os seus elementos.
- Para um **conjunto infinito**, podemos indicar a forma geral listando os primeiros elementos.



Conjunto infinito: exemplos:

- $A = 2, 4, 6, \dots$
- $B = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$
- $C = 2, 4, 8, 16, \dots$

Ou podemos representar por uma relação de recorrência.

- $2 \in A$
- se $n \in A$, então $n + 2 \in A$

Temos, $A = 2, 4, 6, \dots$



Conjunto infinito: exemplos:

- $0 \in B$
- se $n \in B$, então $n + 1 \in B$

Temos, $B = 0, 1, 2, \dots$

- $2 \in C$
- se $n \in C$, então $2n \in C$

Temos, $C = 2, 4, 8, 16, \dots$



A **descrição** um conjunto pode ser feita de várias maneiras, conforme segue.

a) Enumerando seus elementos, entre chaves:

Exemplos:

1 $V = a, e, i, o, u$

2 $I = 1, 3, 5, 7, 9, \dots$

3 $D = 0, 1, 2, 3, \dots, 9$

4 $Q = 0, 1, 4, 9, 25, 36, \dots$

5 $P = 2, 3, 5, 7, 11, \dots$



b) Quando conhecemos uma certa propriedade característica de seus elementos:

Escrevemos $A = \{x \mid P(x)\}$, x tem um predicado P . Ou seja,

$$A = \{x \mid P(x)\} \text{ significa } (\forall x)[(x \in S \rightarrow P(x)) \wedge (P(x) \rightarrow x \in S)]$$

Exemplo:

$$A = \{x \mid x \text{ é um inteiro positivo par}\}$$

“O conjunto de todos os x tais que x é um inteiro positivo par”



Exemplos:

1 $L = \{x | x \text{ é aluno do primeiro semestre do Curso de ADS}\}$

2 $D = \{x | x \text{ é inteiro positivo menor que } 10\}$

3 $N = \{x | x \text{ é número natural e } 4 < x < 3500\}$

4 $M = \{x | x \text{ é múltiplo de } 5\}$

5 $P = \{x | x \text{ é um número real}\}$



Exemplo:

Seja um conjunto A dado por:

$$A = \{x | (\exists y)(y \in \{0, 1, 2\} \text{ e } x = y^3)\}$$

- Esse conjunto é da forma $A = \{x | P(x)\}$.
- Encontra-se cada elemento de A atribuindo-se a y cada um dos valores e elevando-os ao cubo.
- Então $A = \{0, 1, 8\}$



c) Por uma relação de recorrência:

Exemplos:

1 Sequência de Fibonacci

- $F(1) = 1$
- $F(2) = 1$
- $F(n) = F(n-1) + F(n-2),$

2 ■ $1 \in S$

- Se $x \in S$, então $x + 2 \in S$



Conjuntos

É conveniente usarmos uma notação padrão para determinados conjuntos, de modo que se possa se referir mais facilmente a eles.

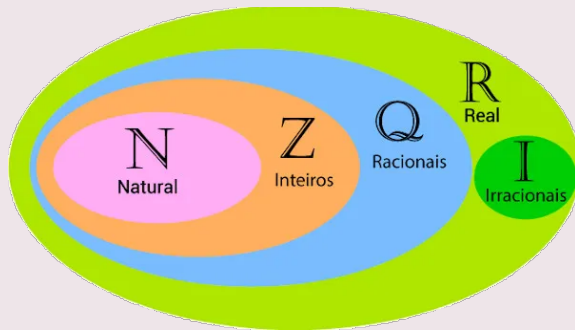
\mathbb{N} = Números naturais

\mathbb{Z} = Números inteiros

\mathbb{R} = Números reais

\mathbb{Q} = Números racionais

\mathbb{I} = Números Irracionais



Exercício 1: Julgue se os conjuntos são finitos ou infinitos:

- 1 Conjunto das letras do alfabeto;
- 2 $P = \{y | y = 2x \text{ e } x \in \mathbb{N}\}$
- 3 $M = \{x \in \mathbb{N} | x > 0 \text{ e } x < 6\}$
- 4 O conjunto dos números naturais.



Exercício 2: Descreva cada um dos conjuntos a seguir listando seus elementos:

- 1 $A = \{x | x \text{ é um inteiro e } 3 < x < 8\}$
- 2 $B = \{x | x \text{ é um mês com exatamente 30 dias}\}$
- 3 $C = \{x | x \text{ é a capital do Brasil}\}$
- 4 $D = \{x | (\exists y)(y \in \{0, 1, 2\} \text{ e } x = y^3)\}$
- 5 $E = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ e } (\exists y)(y \in \mathbb{N} \text{ e } x \leq y)\}$
- 6 $F = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ e } (\forall y)(y \in \mathbb{N} \rightarrow x \leq y)\}$
- 7 $A = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ e } (\forall y)(y \in \{2, 3, 4, 5\}) \rightarrow x \geq y\}$.
- 8 $B = \{x | (\exists y)(\exists z)(y \in \{1, 2\} \text{ e } z \in \{2, 3\} \text{ e } x = y + z)\}$



Exercício 3: Descreva cada um dos conjuntos a seguir através de uma relação de recorrência.

1 $A = \{2, 4, 16, 256, \dots\}$

2 $B = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$

3 $C = \{1, 3, 9, 27, \dots\}$

4 $D = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$



Conjuntos importantes:

- 1 Conjunto Unitário: é um conjunto que possui um único elemento.

Exemplos:

- i) Conjunto das soluções da equação $5x + 4 = 19$.
- ii) Conjunto de todos os números que são pares e primos simultaneamente.

- 2 Conjunto vazio: é um conjunto que não possui elemento algum. Notação: $A = \{\} = \emptyset$

Exemplos:

- i) Conjunto dos brasileiros com mais de 400 anos.
- ii) $\{x | x \text{ é ímpar e múltiplo de } 2\}$



3 Conjuntos Numéricos:

- a Naturais: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- b Inteiros: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- c Racionais: $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$
- d Irracionais (\mathbb{I}): *$\{x \mid x \text{ não pode ser escrito na forma de fração, com } p \text{ e } q \text{ inteiros}\}$*
- e Reais (\mathbb{R}): é a reunião dos racionais com irracionais.
- f Complexos (\mathbb{C}): tem a forma $a + bi$, com $i^2 = -1$



Um conjunto **A** é **subconjunto de um conjunto B** se, e somente se, **todo elemento de A também é elemento de B**.

Dizemos neste caso que **A está contido em B**, ou ainda, que **B contém A**.

$$A \subseteq B \leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

Se existe

$$b \in B \text{ e } b \notin A, \text{ então } A \subset B$$

Neste caso A é um subconjunto próprio de B.

OBS.: $A \subseteq A$ e $\emptyset \subseteq A$



Exemplos:

- 1 Para $A = \{2, 3, 5, 12\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5, 9, 12\}$, todo elemento de A é, também, elemento de B .
 - A é um subconjunto de B . ($A \subseteq B$)
 - A é também subconjunto próprio de B . ($A \subset B$)
- 2 Sejam $A = \{1, 7, 9, 15\}$, $B = \{7, 9\}$ e $C = \{7, 9, 15, 20\}$, então as seguintes proposições são verdadeiras (entre outras):

| | |
|-----------------------|---------------------------|
| ■ $B \subseteq C$ | ■ $15 \in C$ |
| ■ $B \subseteq A$ | ■ $\{7, 9\} \subseteq B$ |
| ■ $B \subset C$ | ■ $\{7\} \subset A$ |
| ■ $A \not\subseteq C$ | ■ $\emptyset \subseteq C$ |



Exemplos:

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
 - Todo elemento de \mathbb{N} é também um elemento de \mathbb{Z} .
 - Porém, nem todo inteiro está presente em \mathbb{N} .
 - Contra-exemplo: inteiros negativos.
- $S \subset \mathbb{N}$, onde $S = \{x | x \text{ é primo}\}$:
 - Todo número primo é também um número natural.
 - Porém, nem todo natural é um número primo.
 - Contra-exemplos: naturais pares (exceto 2).



Exercício:

Sejam $A = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ e } x \geq 5\}$, $B = \{10, 12, 16, 20\}$ e $C = \{x | (\exists y)(y \in \mathbb{N} \text{ e } x = 2y)\}$

Quais das proposições abaixo são verdadeiras:

- $B \subseteq C$
- $B \subset A$
- $A \subseteq C$
- $26 \in C$
- $\{11, 12, 13\} \subseteq A$
- $\{11, 12, 13\} \subset C$
- $\{12\} \in B$
- $\{12\} \subseteq B$
- $\{x | x \in \mathbb{N} \text{ e } x < 20\} \subsetneq B$
- $5 \subseteq A$
- $\{\emptyset\} \subseteq B$
- $\emptyset \notin A$



Exercício:

Sejam:

$$A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ e } x^2 - 4x + 3 = 0\}$$

e

$$B = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ e } 1 \leq x \leq 4\}$$

Prove que $A \subset B$.



Conjuntos iguais: dois conjuntos são iguais se todo elemento de A pertence a B e vice-versa, ou seja eles possuem os mesmos elementos.

Formalmente,

$$A = B \leftrightarrow \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Exemplos:

- $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{5, 3, 1\}$. $A = B$
- $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{1, 1, 5, 5, 5, 5, 3\}$. $A = B$
- $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 1, 5, 5, 5, 5, 3\}$ e $C = \{3, 1, 5\}$. $A = B = C$
- $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 5, \}$ e $C = \{5, 5, 5, 3, 3, 1\}$. $A = B$, $A \neq C$.
- $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{1, 5, 1, 5, 1, 5\}$. $A \neq B$



Exercício: Sejam

$$A = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ e } x^2 < 15\}$$

e

$$B = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ e } 2x < 7\}$$

Prove que $A = B$.



Conjuntos de Conjuntos

- Para um conjunto S , podemos formar um novo conjunto cujos elementos são subconjuntos de S .
 - Esse novo conjunto é chamado de **conjunto das partes** de S e é denotado por $\wp(S)$
 - Para $S = \{0, 1\}$, $\wp(S) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.
 - Os elementos do conjunto das partes de S são conjuntos.
 - Para qualquer conjunto S , $\wp(S)$ sempre tem, pelo menos \emptyset e S como elementos, já que é sempre verdade que $\emptyset \subseteq S$ e $S \subseteq S$.
 - Para encontrar $\wp(S)$, comece com \emptyset , depois coloque os conjuntos formados por 1 elemento de S , depois os formados por 2 elementos de S , por 3 e assim por diante, até o próprio S .



Exercício:

- 1 Para $A = \{1, 2, 3\}$, qual é o $\wp(A)$?
- 2 Se S tem n elementos, então $\wp(A)$ tem quantos elementos?



Partição de um Conjunto - Definição: Uma partição de um conjunto A é um conjunto de subconjuntos não-vazios, disjuntos entre si, cuja união é igual a A .

Requisitos:

- Cada subconjunto na partição deve ser não-vazio.
- Os subconjuntos devem ser mutuamente disjuntos (não têm elementos em comum).
- A união de todos os subconjuntos na partição deve ser igual ao conjunto original A .

Exemplo:

Para $A = \{1, 2, 3, 4\}$, uma partição possível de A é $\mathcal{P}(A) = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$.



Questão: Sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, considere as afirmativas a seguir.

- 1 $\wp(A) = \{\emptyset, \{2, 3, 4\}\}$ é uma partição de A .
- 2 $\wp(A) = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{3, 4\}\}$ é uma partição de A .
- 3 $\wp(A) = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ é uma partição de A .
- 4 $\wp(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$ é uma partição de A .

Assinale a alternativa correta.

- a) Somente as afirmativas I e II são corretas;
- b) Somente as afirmativas I e IV são corretas;
- c) Somente as afirmativas III e IV são corretas;
- d) Somente as afirmativas I, II e III são corretas;
- e) Somente as afirmativas II, III e IV são corretas;



Definição(Cardinalidade): Seja A um conjunto. Se existem exatamente n elementos distintos em A , com $n \geq 0$, então dizemos que A é um conjunto finito e que n é a cardinalidade de A .

OBS.: A cardinalidade de A é denotada por $|A|$.

1 $A = \{x | x \text{ é inteiro ímpar e } x < 10\}$. Logo, $|A| = 5$.

2 $B = \{x | x \text{ é uma letra do alfabeto}\}$. Logo, $|B| = 26$.

3 $P = \{x | x \text{ é primo e } x < 30\}$. Logo, $|P| = 10$.

4 $C = \emptyset$. Como o conjunto vazio não possui elementos, Então $|\emptyset| = 0$.



- A maior parte das operações que envolvem números podem ser efetuadas também em conjuntos.
- Dado um conjunto S , podemos definir operações no conjunto $\wp(S)$.
 - S , nesse caso, é chamado de **conjunto universo**, que define o contexto dos objetos em discussão.
 - Se $S = \mathbb{Z}$, então os subconjuntos conterão apenas inteiros.
- Operação unária e binária
 - Unária: quando age em apenas um elemento do conjunto (por exemplo, uma negação de um elemento).
 - Binária: quando acontece em dois inteiros do conjunto (por exemplo, uma subtração).



União: Dados os conjuntos A e B chama-se união ou reunião de A e B, denotada por $A \cup B$, ao conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B.

Formalmente:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Exemplo:

Sejam $A = \{1, 2, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$.

$$A \cup B = \{1, 2, 4\} \cup \{1, 3, 5\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$



Interseção: Dados os conjuntos A e B a interseção de A e B, denotada por $A \cap B$, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e a B.

Formalmente:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Exemplo:

Sejam $A = \{1, 2, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$.

$$A \cap B = \{1, 2, 4\} \cap \{1, 3, 5\}$$

$$A \cap B = \{1\}$$



Conjuntos Disjuntos: Dois conjuntos A e B são disjuntos se $A \cap B = \emptyset$. **Exemplo:**

Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{5, 6, 7, 8\}$.

$A \cap B$ = elementos em comum entre A e B

$$A \cap B = \emptyset$$

Logo, A e B são disjuntos.



Diferença: Dados os conjuntos A e B . A diferença $A - B$ ou $A \setminus B$ contém os elementos que estão em A mas não estão em B .

Formalmente:

$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

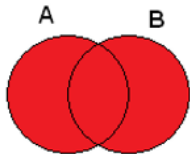
Exemplo:

Sejam $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{c, d, e, f, g\}$.

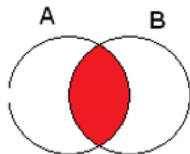
$$A \setminus B = \{a, b\}$$



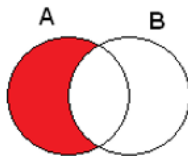
$$A \cup B$$



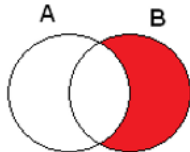
$$A \cap B$$



$$A - B$$



$$B - A$$



Complementar: Dados os conjuntos A e U (universo). O complementar de A em relação a U é o conjunto formado pela diferença $U - A$.

Formalmente:

$$A' = \{x | x \in U \text{ e } x \notin A\}$$

Exemplos:

- 1 Seja $A = \{a, e, i, o, u\}$, onde o conjunto U são as letras do alfabeto.
 $A' = \{b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, v, w, x, y, z\}$
- 2 Seja $A = \{x | x > 10\}$ e $U = \mathbb{Z}^+$
 $A' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$



Sejam

$$A = \{x \mid x \text{ é um inteiro não-negativo par}\}$$

$$B = \{x \mid (\exists y)(y \in \mathbb{N} \text{ e } x = 2y + 1)\}$$

$$C = \{x \mid (\exists y)(y \in \mathbb{N} \text{ e } x = 4y)\}$$

Julgue a veracidade de cada alternativa:

a) $A \cup B$

b) $A = B$

c) $C \subset A$

d) $A \cup C$

e) $A - C = \{x \mid (\exists y)(y \in \mathbb{N} \text{ e } x = 4y + 2)\}$



Sejam

$$A = \{1, 2, 3, 5, 10\}$$

$$B = \{2, 4, 7, 8, 9\}$$

$$C = \{5, 8, 10\}$$

Se $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, encontre:

a) $|A| + |B|$

b) $A \cup B$

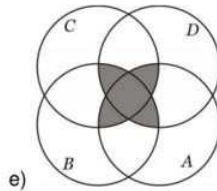
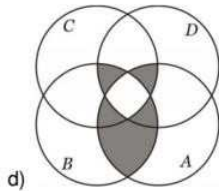
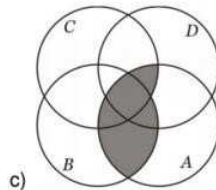
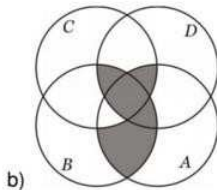
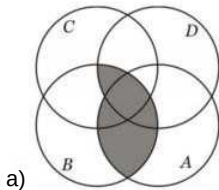
c) $A - C$

d) $B \cap (A \cup C)$

e) C'



18 Considerando os conjuntos A , B , C e D , assinale a alternativa que representa, corretamente, a região sombreada associada à relação $\{(A \cap B) \cup (C \cap D)\} \cap \{(A \cap B) \cup (B \cap C)\}$.



Produto cartesiano: Sejam A e B subconjuntos de S . O produto cartesiano de A e B , denotado por $A \times B$, é definido por

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$$

- Os elementos do resultado não pertencem a S mas são pares ordenados de elementos de S .
- O produto $A \times A$ é denotado por A^2 .
- A^n denota o conjunto (x_1, x_2, \dots, x_n) de elementos de A .

Exemplo: sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{3, 4\}$

1 Encontre $A \times B$

2 Encontre $B \times A$

3 Encontre A^2

4 Encontre A^3

