Matemática Computacional

Conjuntos

Prof. Rogério Figueredo de Sousa

rogerio.sousa@ifpi.edu.br

05/07/2024

INSTITUTO FEDERAL
Piauí

Conjunto não se define formalmente. Usa-se uma ideia intuitiva de que se trata de uma coleção de objetos, logo, informalmente, um conjunto é uma coleção desordenada de zero ou mais objetos, denominados elementos do conjunto. Dizemos que um conjunto contém seus elementos.

- Esses objetos de um conjunto possuem alguma propriedade em comum.
- Em geral, trata-se de uma estrutura discreta, usada para construir outras estruturas;
- O propósito fundamental é o de agrupar elementos.

Conjuntos

Notação: Indicamos um conjunto, em geral, com uma letra maiúscula e um elemento com letra minúscula.

- Se A é um conjunto e x pertence a A, esse fato é denotado por: $x \in A$.
- Se, por outro lado, tivermos que x não pertence ao conjunto A, escrevemos: $x \notin A$.

Usamos chaves para indicar um conjunto.

- Se $A = \{azul, verde, branco\}$, então $verde \in A$ e $preto \notin A$.
- Os elementos em um conjunto não tem nenhuma ordem, de modo que $\{azul, verde, branco\}$ é o mesmo que $\{branco, azul, verde\}$.

Conjuntos

Dois conjuntos são **iguais** se contêm os mesmos elementos. Ou seja,

$$A = B \textit{ significa } (\forall x)[x \in A \rightarrow x \in B \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)]$$

- Ao descrever um conjunto particular, temos que identificar seus elementos.
- Para um **conjunto finito** (com n elementos para $n > 0$), isso é feito listando-se todos os seus elementos.
- Para um **conjunto infinito**, podemos indicar a forma geral listando os primeiros elementos.

Conjunto infinito: exemplos:

- $A = \{2, 4, 6, ...\}$
- $B = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$
- $C = \{2, 4, 8, 16, ..\}$

Ou podemos representar por uma relação de recorrência.

- $2 \in A$
- se $n \in A$, então $n + 2 \in A$

Temos, $A = \{2, 4, 6, ...\}$

Conjunto infinito: exemplos:

- $0 \in B$
- se $n \in B$, então $n + 1 \in B$

Temos, $B = \{0, 1, 2, ...\}$

- $2 \in C$
- se $n \in C$, então $2n \in C$

Temos, $C = \{2, 4, 8, 16...\}$

Conjuntos

A **descrição** um conjunto pode ser feita de várias maneiras, conforme segue.

a) Enumerando seus elementos, entre chaves:

Exemplos:

1. $V = \{a, e, i, o, u\}$
2. $I = \{1, 3, 5, 7, 9, ...\}$
3. $D = \{0, 1, 2, 3, ..., 9\}$
4. $Q = \{0, 1, 4, 9, 25, 36, ...\}$
5. $P = \{2, 3, 5, 7, 11, ...\}$

b) Quando conhecemos uma certa propriedade característica de seus elementos:

Escrevemos $A = \{x \mid P(x)\}$, x tem um predicado P. Ou seja,

$$A = \{x \mid P(x)\} \textit{ significa } (\forall x)[(x \in S \rightarrow P(x)) \wedge (P(x) \rightarrow x \in S)]$$

Exemplo:

$A = \{x | x \textit{ é um inteiro positivo par}\}$

"O conjunto de todos os x tais que x é um inteiro positivo par"

Conjuntos

Exemplos:

1. $L = \{x | x \text{ é aluno do primeiro semestre do Curso de ADS}\}$
2. $D = \{x | x \text{ é inteiro positivo menor que } 10\}$
3. $N = \{x | x \text{ é número natural e } 4 < x < 3500\}$
4. $M = \{x | x \text{ é múltiplo de } 5\}$
5. $P = \{x | x \text{ é um número real}\}$

Exemplo:

Seja um conjunto A dado por:

$$A = \{x | (\exists y)(y \in \{0, 1, 2\} \text{ e } x = y^3\}$$

- Esse conjunto é da forma $A = \{x | P(x)\}$.
- Encontra-se cada elemento de A atribuindo-se a y cada um dos valores e elevando-os ao cubo.
- Então $A = \{0, 1, 8\}$

c) Por uma relação de recorrência:

Exemplos:

1. Sequência de Fibonacci
   - $F(1) = 1$
   - $F(2) = 1$
   - $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$,
2.
   - $1 \in S$
   - Se $x \in S$, então $X + 2 \in S$

Conjuntos

É conveniente usarmos uma notação padrão para determinados conjuntos, de modo que se possa se referir mais facilmente a eles.

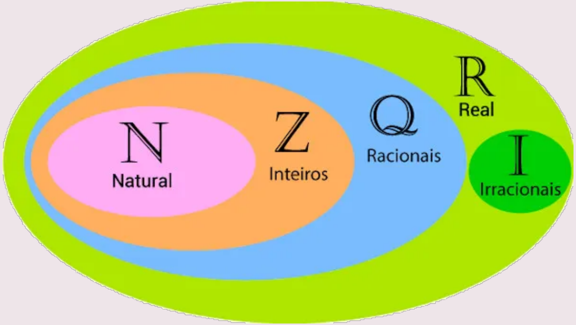
$\mathbb{N} =$ Números naturais

$\mathbb{Z} =$ Números inteiros

$\mathbb{R} =$ Números reais

$\mathbb{Q} =$ Números racionais

$\mathbb{I} =$ Números Irracionais



Exercício 1: Julgue se os conjuntos são finitos ou infinitos:

1. Conjunto das letras do alfabeto;
2. $P = \{y | y = 2x \ e \ x \in \mathbb{N}\}$
3. $M = \{x \in \mathbb{N} | x > 0 \ e \ x < 6\}$
4. O conjunto do números naturais.

Exercício 2: Descreva cada um dos conjuntos a seguir listando seus elementos:

1. $A = \{x | x \text{ é um inteiro e } 3 < x < 8\}$
2. $B = \{x | x \text{ é um mês com exatamente 30 dias}\}$
3. $C = \{x | x \text{ é a capital do Brasil}\}$
4. $D = \{x | (\exists y)(y \in \{0, 1, 2\} \text{ e } x = y^3)\}$
5. $E = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ e } (\exists y)(y \in \mathbb{N} \text{ e } x \leq y)\}$
6. $F = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ e } (\forall y)(y \in \mathbb{N} \ \rightarrow \ x \leq y)\}$
7. $A = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ e } (\forall y)(y \in \{2, 3, 4, 5\}) \rightarrow x \geq y\}.$
8. $B = \{x | (\exists y)(\exists z)(y \in \{1, 2\} \text{ e } z \in \{2, 3\} \text{ e } x = y + z)\}$

Exercício 3: Descreva cada um dos conjuntos a seguir através de uma relação de recorrência.

1. $A = \{2, 4, 16, 256, ...\}$
2. $B = \{1, 4, 9, 16, ...\}$
3. $C = \{1, 3, 9, 27, ...\}$
4. $D = \{2, 3, 5, 7, 11, ...\}$

Conjuntos importantes:

1. Conjunto Conjunto Unitário: é um conjunto que possui um único elemento.

   Exemplos:

   i) Conjunto das soluções da equação $5x + 4 = 19$.

   ii) Conjunto de todos os números que são pares e primos simultaneamente.

2. Conjunto vazio: é um conjunto que não possui elemento algum. Notação: $A = \{\} = \emptyset$

   Exemplos:

   i) Conjunto dos brasileiros com mais de 400 anos.

   ii) $\{x | x \text{ é ímpar e múltiplo de } 2\}$

3. Conjuntos Numéricos:
   a. Naturais: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
   b. Inteiros: $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
   c. Racionais: $\mathbb{Q} = \{p/q | p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$
   d. Irracionais ($\mathbb{I}$): *{x|x não pode ser escrito na forma de fração, com p e q inteiros}*
   e. Reais($\mathbb{R}$): é a reunião dos racionais com irracionais.
   f. Complexos ($\mathbb{C}$): tem a forma $a + bi$, com $i^2 = -1$

Um conjunto **A é subconjunto de um conjunto B** se, e somente se, **todo elemento de A também é elemento de B**.

Dizemos neste caso que **A está contido em B**, ou ainda, que **B contém A**.

$$A \subseteq B \leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

Se existe

$$b \in B \text{ e } b \notin A, \; então \; A \subset B$$

Neste caso A é um subconjunto próprio de B.

OBS.: $A \subseteq A$ e $\emptyset \subseteq A$

Exemplos:

1. Para $A = \{2, 3, 5, 12\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5, 9, 12\}$, todo elemento de A é, também, elemento de B.
   - A é um subconjunto de B. ($A \subseteq B$)
   - A é também subconjunto próprio de B. ($A \subset B$)
2. Sejam $A = \{1, 7, 9, 15\}$, $B = \{7, 9\}$ e $C = \{7, 9, 15, 20\}$, então as seguintes proposições são verdadeiras (entre outras):
   - $B \subseteq C$
   - $B \subseteq A$
   - $B \subset C$
   - $A \nsubseteq C$
   - $15 \in C$
   - $\{7, 9\} \subseteq B$
   - $\{7\} \subset A$
   - $\emptyset \subseteq C$

Exemplos:

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
  - Todo elemento de $\mathbb{N}$ é também um elemento de $\mathbb{Z}$.
  - Porém, nem todo inteiro está presente em $\mathbb{N}$.
  - Contra-exemplo: inteiros negativos.
- $S \subset \mathbb{N}$, onde $S = \{x | x \text{ é } primo\}$:
  - Todo número primo é também um número natural.
  - Porém, nem todo natural é um número primo.
  - Contra-exemplos: naturais pares (exceto 2).

Exercício:

Sejam $A = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ e } x \geq 5\}$, $B = \{10, 12, 16, 20\}$ e $C = \{x | (\exists y)(y \in \mathbb{N} \text{ e } x = 2y)\}$
Quais das proposições abaixo são verdadeiras:

- $B \subseteq C$
- $B \subset A$
- $A \subseteq C$
- $26 \in C$
- $\{11, 12, 13\} \subseteq A$
- $\{11, 12, 13\} \subset C$
- $\{12\} \in B$
- $\{12\} \subseteq B$
- $\{x | x \in \mathbb{N} \text{ e } x < 20\} \not\subseteq B$
- $5 \subseteq A$
- $\{\emptyset\} \subseteq B$
- $\emptyset \notin A$

Exercício:

Sejam:

$$A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ } e \text{ } x^2 - 4x + 3 = 0\}$$

e

$$B = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ } e \text{ } 1 \leq x \leq 4\}$$

Prove que $A \subset B$.

Conjuntos iguais: dois conjuntos são iguais se todo elemento de A pertence a B e vice-versa, ou seja eles possuem os mesmos elementos.

Formalmente,

$$A = B \leftrightarrow \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Exemplos:

- $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{5, 3, 1\}$. $A = B$
- $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{1, 1, 5, 5, 5, 5, 3\}$. $A = B$
- $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 1, 5, 5, 5, 5, 3\}$ e C = $\{3, 1, 5\}$. $A = B = C$
- $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 5, \}$ e $C = \{5, 5, 5, 3, 3, 1\}$. $A = B$, $A \neq B$.
- $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{1, 5, 1, 5, 1, 5\}$. $A \neq B$

Exercício: Sejam

$$A = \{x | x \in \mathbb{N} \ e \ x^2 < 15\}$$

e

$$B = \{x | x \in \mathbb{N} \ e \ 2x < 7\}$$

Prove que $A = B$.

Conjuntos de Conjuntos

- Para um conjunto S, podemos formar um novo conjunto cujos elementos são subconjuntos de S.
  - Esse novo conjunto é chamado de **conjunto das partes** de S e é denotado por $\wp(S)$
  - Para $S = \{0, 1\}$, $\wp(S) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.
  - Os elementos do conjunto das partes de S são conjuntos.
  - Para qualquer conjunto S, $\wp(S)$ sempre tem, pelo menos $\emptyset$ e S como elementos, já que é sempre verdade que $\emptyset \subseteq S$ e $S \subseteq S$.
  - Para encontrar $\wp(S)$, comece com $\emptyset$, depois coloque os conjuntos formados por 1 elemento de S, depois ao formados por 2 elementos de S, por 3 e assim por diante, até o próprio S.

Exercício:

1. Para $A = \{1, 2, 3\}$, qual é o $\wp(A)$?

2. Se S tem n elementos, então $\wp(A)$ tem quantos elementos?

Partição de um Conjunto - Definição: Uma partição de um conjunto A é um conjunto de subconjuntos não-vazios, disjuntos entre si, cuja união é igual a A.

Requisitos:

- Cada subconjunto na partição deve ser não-vazio.
- Os subconjuntos devem ser mutuamente disjuntos (não têm elementos em comum).
- A união de todos os subconjuntos na partição deve ser igual ao conjunto original A.

Exemplo:

Para $A = \{1, 2, 3, 4\}$, uma partição possível de A é $\mathcal{P}(A) = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$.

Questão: Sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, considere as afirmativas a seguir.

1 $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{2, 3, 4\}\}$ é uma partição de A.

2 $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{3, 4\}\}$ é uma partição de A.

3 $\mathcal{P}(A) = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ é uma partição de A.

4 $\mathcal{P}(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$ é uma partição de A.

Assinale a alternativa correta.

a) Somente as afirmativas I e II são corretas;

b) Somente as afirmativas I e IV são corretas;

c) Somente as afirmativas III e IV são corretas;

d) Somente as afirmativas I, II e III são corretas;

e) Somente as afirmativas II, III e IV são corretas;

Definição(Cardinalidade): Seja A um conjunto. Se existem exatamente n elementos distintos em A, com $n \geq 0$, então dizemos que A é um conjunto finito e que n é a cardinalidade de A.

OBS.: A cardinalidade de A é denotada por $|A|$.

1. $A = \{x | x \text{ é inteiro ímpar e } x < 10\}$. Logo, $|A| = 5$.
2. $B = \{x | x \text{ é uma letra do alfabeto}\}$. Logo, $|B| = 26$.
3. $P = \{x | x \text{ é primo e } x < 30\}$. Logo, $|P| = 10$.
4. $C = \emptyset$. Como o conjunto vazio não possui elementos, Então $|\emptyset| = 0$.

Operações em Conjuntos

- A maior parte das operações que envolvem números podem ser efetuadas também em conjuntos.
- Dado um conjunto S, podemos definir operações no conjunto $\wp(S)$.
  - S, nesse caso, é chamado de **conjunto universo**, que define o contexto dos objetos em discussão.
  - Se $S = \mathbb{Z}$, então os subconjuntos conterão apenas inteiros.
- Operação unária e binária
  - Unária: quando age em apenas um elemento do conjunto (por exemplo, uma negação de um elemento).
  - Binária: quando acontece em dois inteiros do conjunto (por exemplo, uma subtração).

União: Dados os conjuntos A e B chama-se união ou reunião de A e B, denotada por $A \cup B$, ao conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B.

Formalmente:

$$A \cup B = \{x | x \in A \textbf{ ou } x \in B\}$$

Exemplo:
Sejam $A = \{1, 2, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$.
$A \cup B = \{1, 2, 4\} \cup \{1, 3, 5\}$
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Interseção: Dados os conjuntos A e B a interseção de A e B, denotada por $A \cap B$, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e a B.

Formalmente:

$$A \cap B = \{x | x \in A \textbf{ e } x \in B\}$$

Exemplo:
Sejam $A = \{1, 2, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$.
$A \cap B = \{1, 2, 4\} \cap \{1, 3, 5\}$
$A \cap B = \{1\}$

Conjuntos Disjuntos: Dois conjuntos A e B são disjuntos se $A \cap B = \emptyset$. **Exemplo:**

Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{5, 6, 7, 8\}$.
$A \cap B$ = elementos em comum entre A e B
$A \cap B = \emptyset$
Logo, A e B são disjuntos.

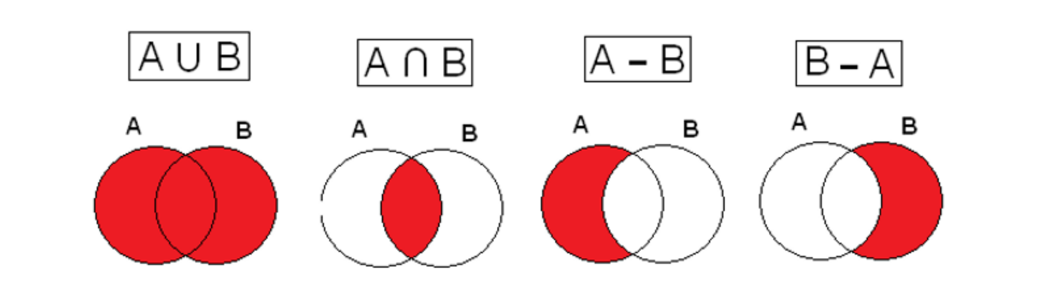
Diferença: Dados os conjuntos A e B. A diferença $A - B$ ou $A \backslash B$ contém os elementos que estão em A mas não estão em B.

Formalmente:

$$A - B = \{x | x \in A \land x \notin B\}$$

Exemplo:
Sejam $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{c, d, e, f, g\}$.
$A \backslash B = \{a, b\}$

Operações em Conjuntos



Complementar: Dados os conjuntos A e U(universo). O complementar de A em relação a U é o conjunto formado pela diferença $U - A$.

Formalmente:

$$A' = \{x|x \in U \text{ e } x \notin A\}$$

Exemplos:

1. Seja $A = \{a, e, i, o, u\}$, onde o conjunto U são as letras do alfabeto.
   $A' = \{b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, v, w, x, y, z\}$
2. Seja $A = \{x|x > 10\}$ e $U = \mathbb{Z}^+$
   $A' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Exercícios

Sejam

$$A = \{x | x \text{ é um inteiro não} - \text{negativo par}\}$$

$$B = \{x | (\exists y)(y \in \mathbb{N} \text{ e } x = 2y + 1)\}$$

$$C = \{x | (\exists y)(y \in \mathbb{N} \text{ e } x = 4y)\}$$

Julgue a veracidade de cada alternativa:

a) $A \cup B$

b) $A = B$

c) $C \subset A$

d) $A \cup C$

e) $A - C = \{x | (\exists y)(y \in \mathbb{N} \text{ e } x = 4y + 2)\}$

Exercícios

Sejam

$$A = \{1, 2, 3, 5, 10\}$$

$$B = \{2, 4, 7, 8, 9\}$$

$$C = \{5, 8, 10\}$$

Se $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, encontre:

a) $|A| + |B|$

b) $A \cup B$

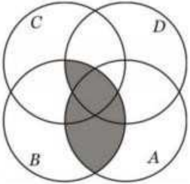
c) $A - C$

d) $B \cap (A \cup C)$

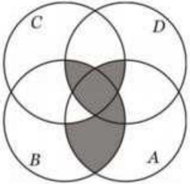
e) C'

Exercícios

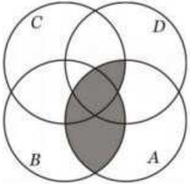
18 Considerando os conjuntos A, B, C e D, assinale a alternativa que representa, corretamente, a região sombreada associada à relação $\{(A \cap B) \cup (C \cap D)\} \cap \{(A \cap B) \cup (B \cap C)\}$.



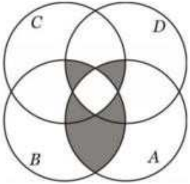
a)



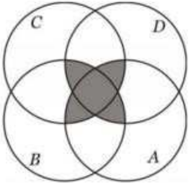
b)



c)



d)



e)

Produto cartesiano: Sejam A e B subconjuntos de S. O produto cartesiano de A e B, denotado por $A \times B$, é definido por

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$$

- Os elementos do resultado não pertencem a S mas são pares ordenados de elementos de S.
- O produto $A \times A$ é denotado por A^2.
- A^n denota o conjunto $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de elementos de A.

Exemplo: sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{3, 4\}$

1. Encontre $A \times B$
2. Encontre $B \times A$
3. Encontre A^2
4. Encontre A^3

Identidades básicas envolvendo conjuntos:

- Existem várias igualdades entre conjuntos nas operações de união, interseção, diferença e complementação.
- Essas igualdades são independentes dos subconjuntos particulares utilizados e são chamadas de identidades.
  - Essas identidades são semelhantes às equivalências tautológicas da lógica formal.

Identidades básicas envolvendo conjuntos:

Propriedade	**Identidade 1**	**Identidade 2**
Elementos Neutros	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap U = A$
Dominação	$A \cup U = U$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
Idempotentes	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Complementação	$\overline{(\overline{A})} = A$	-
Comutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Associativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
De Morgan	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
Absorção	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$

Tabela: Propriedades e Identidades

- **Provando identidades:** Ex. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Queremos então provar que:

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

e que

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$$

Podemos, então, proceder da seguinte maneira:

(seja x um elemento arbitrário de $A \cup (B \cap C)$):

1. $x \in A \cup (B \cap C) \rightarrow x \in A$ ou $x \in (B \cap C)$
2. $\rightarrow x \in A$ ou $(x \in B$ e $x \in C)$
3. $\rightarrow (x \in A$ ou $x \in B)$ e $(x \in A$ ou $x \in C)$
4. $\rightarrow x \in (A \cup B)$ e $x \in (A \cup C)$
5. $\rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Para mostrarmos que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$, basta fazer o argumento de trás para frente.

Ex: Use as identidades básicas para provar que:

$$[A \cup (B \cap C)] \cap ([\overline{A} \cup (B \cap C)] \cap \overline{(B \cap C)}) = \emptyset$$

1. $\{[A \cup (B \cap C)] \cap (\overline{A} \cup (B \cap C))\} \cap \overline{(B \cap C)}$ (associatividade)
2. $\{[(B \cap C) \cup A] \cap [(B \cap C) \cup \overline{A}]\} \cap \overline{(B \cap C)}$ (comutatividade)
3. $[(B \cap C) \cup (A \cap \overline{A})] \cap \overline{(B \cap C)}$ (distributividade)
4. $[(B \cap C) \cup \emptyset] \cap \overline{(B \cap C)}$ (complemento)
5. $(B \cap C) \cap \overline{(B \cap C)}$ (elemento neutro)
6. $\emptyset$ (complemento)

Ex: Use as identidades básicas para provar que:

$$[C \cap (A \cup B)] \cup [(A \cup B) \cap \overline{C}] = (A \cup B)$$

Ex: Use as identidades básicas para provar que:

$$[C \cap (A \cup B)] \cup [(A \cup B) \cap \overline{C}] = (A \cup B)$$

1. $[(A \cup B) \cap C] \cup [(A \cup B) \cap \overline{C}]$ (comutatividade)
2. $(A \cup B) \cap (C \cup \overline{C})$ (distributividade)
3. $(A \cup B) \cap S$ (complemento)
4. $(A \cup B)$ (elemento neutro)

- A,B e C são subconjuntos de S. Demonstre a seguinte identidade usando as identidades básicas de conjuntos.

$$[A \cap (B \cup C)] \cup ([\overline{A} \cap (B \cup C)] \cup \overline{(B \cup C)}) = S$$

Identidades envolvendo Conjuntos

- A,B e C são subconjuntos de S. Demonstre a seguinte identidade usando as identidades básicas de conjuntos.

$$[A \cap (B \cup C)] \cup ([\overline{A} \cap (B \cup C)] \cup \overline{(B \cup C)}) = S$$

Identidades envolvendo Conjuntos

- O dual de cada identidade é obtido permutando-se $\cup$ com $\cap$ e S com $\emptyset$. Por exemplo: O dual de
$$[A \cup (B \cap C)] \cap \left([\overline{A} \cup (B \cap C)] \cap \overline{(B \cap C)}\right) = \emptyset \text{ é}$$
$$[A \cap (B \cup C)] \cup \left([\overline{A} \cap (B \cup C)] \cup \overline{(B \cup C)}\right) = S$$
- Essa identidade também pode ser provada substituindo cada identidade básica pela sua dual.

- **Ex. 1** Usando as identidades básicas, prove a identidade:

$$[C \cap (A \cup B)] \cup \left[(A \cup B) \cap \overline{C}\right] = A \cup B$$

(A, B e C são subconjuntos arbitrários de S.)

- **Ex. 2** Enuncie a identidade dual do exemplo anterior.
- **Ex. 3** Usando as identidades básicas, prove a identidade:

$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$$

Resumo

Resumo dos métodos para provar identidades envolvendo conjuntos

Método	**Comentário**
Desenhe um diagrama de venn	Não é um bom plano, já que nenhum diagrama vai cobrir todos os casos e não demonstrará a identidade no caso geral.
Prove a inclusão em cada direção	Tome um elemento arbitrário de um dos termos da identidade e mostre que ele pertence ao outro termo, e reciprocamente.
Use identidades já demonstradas	Verifique se a forma da expressão é exatamente igual à forma da identidade que você quer usar.

- Um conjunto é dito contável, quando podemos contar, ou enumerar, todos os seus elementos. Ser contável não significa que podemos dizer qual o número total de elementos do conjunto; significa que podemos dizer "aqui está o primeiro elemento", "aqui está o segundo elemento", e assim por diante.
- **Todo conjunto finito é contável** pois podemos ordenar seus elementos em uma lista como a seguinte, onde cada elemento da lista representa um elemento do conjunto:

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$$

Conjuntos enumeráveis e não enumeráveis

- Um conjunto infinito também pode ser contável, desde que tenhamos uma relação biunívoca com o números naturais. Ou seja, podemos relacionar cada elemento desse conjunto infinito com um elemento dos números naturais.
- Um conjunto é dito **enumerável**, quando for **infinito e contável**.

Para verificar se um conjunto é enumerável precisamos organizar uma lista de seus elementos.

Exemplos:

Verifique que os conjuntos a seguir são enumeráveis:

1. Conjunto dos números ímpares positivos.
2. Conjunto dos múltiplos de 5.
3. Conjunto dos números naturais.
4. Conjuntos dos números inteiros.

Os conjuntos infinitos que não podem ser enumerados são não-enumeráveis.

Exemplos:

1. O conjunto de todos os reais entre 0 e 1.
2. Um intervalo de números reais.
3. O conjunto dos números reais.