HW1

資工碩二 R11922199 戎宥杰

Reference

https://blog.csdn.net/qq_44800780/article/details/102895109

source code: https://github.com/RogerJung/Robotics_HW1

根據文章內的描述可以推導出公式，繞著單位向量 n = (n_x , n_y , n_z) 逆時針旋轉 θ 度的旋轉矩陣 R (n , θ) 可以表示為：

$$\begin{bmatrix} {n_x}^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & n_xn_y(1-\cos\theta)+n_z\sin\theta & n_xn_z(1-\cos\theta)-n_y\sin\theta \\ n_xn_y(1-\cos\theta)-n_z\sin\theta & {n_y}^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & n_yn_z(1-\cos\theta)+n_x\cos\theta \\ n_xn_z(1-\cos\theta)+n_y\sin\theta & n_yn_z(1-\cos\theta)-n_x\sin\theta & {n_z}^2(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{bmatrix}$$

若要在右手座標系中作旋轉，即繞軸作順時針旋轉，則上述旋轉矩陣應轉換為 R^T，即：

$$\begin{bmatrix} {n_x}^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & n_xn_y(1-\cos\theta)-n_z\sin\theta & n_xn_z(1-\cos\theta)+n_y\sin\theta \\ n_xn_y(1-\cos\theta)+n_z\sin\theta & {n_y}^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & n_yn_z(1-\cos\theta)-n_x\cos\theta \\ n_xn_z(1-\cos\theta)-n_y\sin\theta & n_yn_z(1-\cos\theta)+n_x\sin\theta & {n_z}^2(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{bmatrix}$$

（以下皆假設在右手座標系下作答）

PART A

1. 先將向量(1,5,2)換成單位向量 n 為(1 / $\sqrt{29}$, 5 / $\sqrt{29}$, 2 / $\sqrt{29}$)，接著代入上述公式即可得到旋轉矩陣 R 為 $\begin{bmatrix} 0.033 & -0.198 & 0.980 \\ 0.532 & 0.833 & 0.151 \\ -0.846 & 0.516 & 0.133 \end{bmatrix}$。

2. 從上述公式中對二維矩陣R解聯立。由於對角項皆相等，可以得知 $n_x = n_y = n_z$，且由於 n 為單位向量，所以 ${n_x}^2 + {n_y}^2 + {n_z}^2 = 1$，即可得出 $n_x = n_y = n_z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$。

接著再計算聯立：

$$\begin{cases} n_xn_y(1-\cos\theta)-n_z\sin\theta = -0.244 \\ n_xn_y(1-\cos\theta)+n_z\sin\theta = 0.333 \end{cases}$$，求得 $\theta = 30$。

即可得矩陣R相當於繞旋轉軸 $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ 旋轉 $30°$的旋轉矩陣。

PART B

1. B對A的X,Y,Z軸作旋轉相當於B以A為標準座標系作旋轉，因此可代入公式

旋轉 [編輯]

主條目：Tait-Bryan角

生成旋轉矩陣的一種簡單方式是把它作為三個基本旋轉的序列複合。關於右手笛卡爾坐標系的 *x*-, *y*- 和 *z*-軸的旋轉分別叫做 *roll*, *pitch* 和 *yaw* 旋轉。因為這些旋轉被表達為關於一個軸的旋轉，它們的生成元很容易表達。

- 繞 *x*-軸的主動旋轉定義為:

$$\mathcal{R}_x(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{bmatrix} = \exp\left(\theta_x \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

這裡的 θ_x 是 roll 角，和右手螺旋的方向相反（在yz平面順時針）。

- 繞 *y*-軸的主動旋轉定義為:

$$\mathcal{R}_y(\theta_y) = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{bmatrix} = \exp\left(\theta_y \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

這裡的 θ_y 是 pitch 角，和右手螺旋的方向相反（在zx平面順時針）。

- 繞 *z*-軸的主動旋轉定義為:

$$\mathcal{R}_z(\theta_z) = \begin{bmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \exp\left(\theta_z \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

這裡的 θ_z 是 yaw 角，和右手螺旋的方向相反（在xy平面順時針）。

求得 R_A^B 為 $\begin{bmatrix} 0.612 & -0.047 & 0.789 \\ 0.612 & 0.660 & -0.436 \\ -0.500 & 0.750 & 0.433 \end{bmatrix}$, 接著加入平移項求得$T_A^B$為 $\begin{bmatrix} 0.612 & -0.047 & 0.789 & 3 \\ 0.612 & 0.660 & -0.436 & 6 \\ -0.500 & 0.750 & 0.433 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。

2. 先將三個旋轉軸向量縮放成單位向量並代入上述旋轉矩陣公式並依照旋轉順序作相乘可以得到R_c^{origin}為 $\begin{bmatrix} 0.169 & -0.985 & -0.010 \\ 0.982 & 0.168 & 0.091 \\ -0.088 & -0.025 & 0.996 \end{bmatrix}$, 加入平移項得到$T_c^{origin}$為 $\begin{bmatrix} 0.169 & -0.985 & -0.010 & 0 \\ 0.982 & 0.168 & 0.091 & 0 \\ -0.088 & -0.025 & 0.996 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。