第一章　　绪论

1．设 $x>0$，x 的相对误差为 δ，求 $\ln x$ 的误差。

解：近似值 x^* 的相对误差为 $\delta =$ $e_r^*=\frac{e*}{x*}=\frac{x*-x}{x*}$

而 $\ln x$ 的误差为 $e\left(\ln x*\right)=\ln x*-\ln x\approx\frac{1}{x*}e*$

进而有 $\varepsilon(\ln x*)\approx\delta$

2．设 x 的相对误差为 2%，求 x^n 的相对误差。

解：设 $f(x)=x^n$，则函数的条件数为 $C_p=|\frac{xf'(x)}{f(x)}|$

又$\because f'(x)=nx^{n-1}$，$\therefore C_p=|\frac{x\cdot nx^{n-1}}{n}|=n$

又$\because \varepsilon_r((x*)n)\approx C_p\cdot\varepsilon_r(x*)$

且 $e_r(x*)$ 为 2

$\therefore \varepsilon_r((x*)^n)\approx 0.02n$

3．下列各数都是经过四舍五入得到的近似数，即误差限不超过最后一位的半个单位，试指出它们是几位有效数字：$x_1^*=1.1021$，$x_2^*=0.031$，$x_3^*=385.6$，$x_4^*=56.430$，$x_5^*=7\times1.0.$

解：$x_1^*=1.1021$ 是五位有效数字；

$x_2^*=0.031$ 是二位有效数字；

$x_3^*=385.6$ 是四位有效数字；

$x_4^*=56.430$ 是五位有效数字；

$x_5^*=7\times1.0.$ 是二位有效数字。

4．利用公式(2.3)求下列各近似值的误差限：(1) $x_1^*+x_2^*+x_4^*$,(2) $x_1^*x_2^*x_3^*$,(3) x_2^*/x_4^*.

其中 x_1^*,x_2^*,x_3^*,x_4^* 均为第 3 题所给的数。

解：

$$\varepsilon(x_1^*)=\frac{1}{2}\times10^{-4}$$

$$\varepsilon(x_2^*)=\frac{1}{2}\times10^{-3}$$

$$\varepsilon(x_3^*)=\frac{1}{2}\times10^{-1}$$

$$\varepsilon(x_4^*)=\frac{1}{2}\times10^{-3}$$

$$\varepsilon(x_5^*)=\frac{1}{2}\times10^{-1}$$

$$\begin{aligned}
&(1)\varepsilon(x_1^*+x_2^*+x_4^*)\\
&=\varepsilon(x_1^*)+\varepsilon(x_2^*)+\varepsilon(x_4^*)\\
&=\frac{1}{2}\times10^{-4}+\frac{1}{2}\times10^{-3}+\frac{1}{2}\times10^{-3}\\
&=1.05\times10^{-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(2)\varepsilon(x_1^*x_2^*x_3^*)\\
&=\left|x_1^*x_2^*\right|\varepsilon(x_3^*)+\left|x_2^*x_3^*\right|\varepsilon(x_1^*)+\left|x_1^*x_3^*\right|\varepsilon(x_2^*)\\
&=\left|1.1021\times0.031\right|\times\frac{1}{2}\times10^{-1}+\left|0.031\times385.6\right|\times\frac{1}{2}\times10^{-4}+\left|1.1021\times385.6\right|\times\frac{1}{2}\times10^{-3}\\
&\approx0.215
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(3)\varepsilon(x_2^*/x_4^*)\\
&\approx\frac{\left|x_2^*\right|\varepsilon(x_4^*)+\left|x_4^*\right|\varepsilon(x_2^*)}{\left|x_4^*\right|^2}\\
&=\frac{0.031\times\frac{1}{2}\times10^{-3}+56.430\times\frac{1}{2}\times10^{-3}}{56.430\times56.430}\\
&=10^{-5}
\end{aligned}$$

5 计算球体积要使相对误差限为 1，问度量半径 R 时允许的相对误差限是多少？

解：球体体积为$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

则何种函数的条件数为

$$C_p=\left|\frac{R\cdot V'}{V}\right|=\left|\frac{R\cdot4\pi R^2}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right|=3$$

$$\therefore\varepsilon_r(V^*)\approx C_p\cdot\varepsilon_r(R^*)=3\varepsilon_r(R^*)$$

又$\because\varepsilon_r(V^*)=1\%1$

故度量半径 R 时允许的相对误差限为 $\varepsilon_r(V^*)=\frac{1}{3}*1\%=\frac{1}{300}$

6．设$Y_0=28$，按递推公式$Y_n=Y_{n-1}-\frac{1}{100}\sqrt{783}$ （n=1,2,…）

计算到Y_{100}。若取$\sqrt{783}\approx 27.982$（5 位有效数字），试问计算Y_{100}将有多大误差？

解：$\because Y_n=Y_{n-1}-\frac{1}{100}\sqrt{783}$

$\therefore Y_{100}=Y_{99}-\frac{1}{100}\sqrt{783}$

$Y_{99}=Y_{98}-\frac{1}{100}\sqrt{783}$

$Y_{98}=Y_{97}-\frac{1}{100}\sqrt{783}$

……

$Y_1=Y_0-\frac{1}{100}\sqrt{783}$

依次代入后，有$Y_{100}=Y_0-100\times\frac{1}{100}\sqrt{783}$

即$Y_{100}=Y_0-\sqrt{783}$，

若取$\sqrt{783}\approx 27.982$，$\therefore Y_{100}=Y_0-27.982$

$\therefore \varepsilon(Y_{100}^*)=\varepsilon(Y_0)+\varepsilon(27.982)=\frac{1}{2}\times 10^{-3}$

$\therefore Y_{100}$的误差限为$\frac{1}{2}\times 10^{-3}$。

7．求方程$x^2-56x+1=0$的两个根，使它至少具有 4 位有效数字（$\sqrt{783}=27.982$）。

解：$x^2-56x+1=0$，

故方程的根应为$x_{1,2}=28\pm\sqrt{783}$

故 $x_1=28+\sqrt{783}\approx 28+27.982=55.982$

$\therefore x_1$具有 5 位有效数字

$$x_2=28-\sqrt{783}=\frac{1}{28+\sqrt{783}}\approx\frac{1}{28+27.982}=\frac{1}{55.982}\approx 0.017863$$

x_2具有 5 位有效数字

8．当 N 充分大时，怎样求$\int_N^{N+1}\frac{1}{1+x^2}dx$？

解 $\int_N^{N+1}\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan(N+1)-\arctan N$

设$\alpha=\arctan(N+1),\beta=\arctan N$。

则$\tan\alpha=N+1,\tan\beta=N.$

$$
\begin{aligned}
&\int_N^{N+1}\frac{1}{1+x^2}dx\\
&=\alpha-\beta\\
&=\arctan(\tan(\alpha-\beta))\\
&=\arctan\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}\\
&=\arctan\frac{N+1-N}{1+(N+1)N}\\
&=\arctan\frac{1}{N^2+N+1}
\end{aligned}
$$

9．正方形的边长大约为了 100cm，应怎样测量才能使其面积误差不超过$1cm^2$？

解：正方形的面积函数为$A(x)=x^2$

$\therefore\varepsilon(A^*)=2A^*\cdot\varepsilon(x^*)$.

当$x^*=100$时，若$\varepsilon(A^*)\le 1$,

则$\varepsilon(x^*)\le\frac{1}{2}\times 10^{-2}$

故测量中边长误差限不超过 0.005cm 时，才能使其面积误差不超过$1cm^2$

10．设$S=\frac{1}{2}gt^2$，假定 g 是准确的，而对 t 的测量有± 0.1秒的误差，证明当 t 增加时 S 的绝对误差增加，而相对误差却减少。

解：$\because S=\frac{1}{2}gt^2,t>0$

$\therefore\varepsilon(S^*)=gt^2\cdot\varepsilon(t^*)$

当t^*增加时，S^*的绝对误差增加

$$\varepsilon_r(S^*)=\frac{\varepsilon(S^*)}{|S^*|}$$
$$=\frac{gt^2\square\varepsilon(t^*)}{\frac{1}{2}g(t^*)^2}$$
$$=2\frac{\varepsilon(t^*)}{t^*}$$

当 t^* 增加时，$\varepsilon(t^*)$ 保持不变，则 S^* 的相对误差减少。

11．序列 $\{y_n\}$ 满足递推关系 $y_n=10y_{n-1}-1$ (n=1,2,…),

若 $y_0=\sqrt{2}\approx1.41$（三位有效数字），计算到 y_{10} 时误差有多大？这个计算过程稳定吗？

解：$\because y_0=\sqrt{2}\approx1.41$

$$\therefore \varepsilon(y_0^*)=\frac{1}{2}\times10^{-2}$$

又 $\because y_n=10y_{n-1}-1$

$$\therefore y_1=10y_0-1$$

$$\therefore \varepsilon(y_1^*)=10\varepsilon(y_0^*)$$

又 $\because y_2=10y_1-1$

$$\therefore \varepsilon(y_2^*)=10\varepsilon(y_1^*)$$

$$\therefore \varepsilon(y_2^*)=10^2\varepsilon(y_0^*)$$

……

$$\therefore \varepsilon(y_{10}^*)=10^{10}\varepsilon(y_0^*)$$
$$=10^{10}\times\frac{1}{2}\times10^{-2}$$
$$=\frac{1}{2}\times10^8$$

计算到 y_{10} 时误差为 $\frac{1}{2}\times10^8$，这个计算过程不稳定。

12．计算 $f=(\sqrt{2}-1)^6$，取 $\sqrt{2}\approx1.4$，利用下列等式计算，哪一个得到的结果最好？

$\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}$，　$(3-2\sqrt{2})^3$，　$\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$，　$99-70\sqrt{2}$ 。

解：设 $y=(x-1)^6$，

若 $x=\sqrt{2}$， $x^*=1.4$，则 $\varepsilon(x^*)=\frac{1}{2}\times 10^{-1}$。

若通过 $\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}$ 计算 y 值，则

$$\varepsilon(y^*)=-\left|-6\times\frac{1}{(x^*+1)^7}\right|\varepsilon(x^*)$$
$$=\frac{6}{(x^*+1)^7}y^*\varepsilon(x^*)$$
$$=2.53y^*\varepsilon(x^*)$$

若通过 $(3-2\sqrt{2})^3$ 计算 y 值，则

$$\varepsilon(y^*)=\left|-3\times 2\times(3-2x^*)^2\right|\varepsilon(x^*)$$
$$=\frac{6}{3-2x^*}y^*\varepsilon(x^*)$$
$$=30y^*\varepsilon(x^*)$$

若通过 $\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$ 计算 y 值，则

$$\varepsilon(y^*)=-\left|-3\times\frac{1}{(3+2x^*)^4}\right|\varepsilon(x^*)$$
$$=6\times\frac{1}{(3+2x^*)^7}y^*\varepsilon(x^*)$$
$$=1.0345y^*\varepsilon(x^*)$$

通过 $\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$ 计算后得到的结果最好。

13． $f(x)=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$,求 $f(30)$ 的值。若开平方用 6 位函数表，问求对数时误差有多大？若改用另一等价公式。$\ln(x-\sqrt{x^2-1})=-\ln(x+\sqrt{x^2-1})$
计算，求对数时误差有多大？

解

$\because f(x)=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$，$\therefore f(30)=\ln(30-\sqrt{899})$

设 $u=\sqrt{899}, y=f(30)$

则 $u^*=29.9833$

$\therefore \varepsilon(u^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-4}$

故

$$\begin{aligned}\varepsilon(y^*) &\approx -\frac{1}{\left|30-u^*\right|}\varepsilon(u^*) \\ &= \frac{1}{0.0167}\varepsilon(u^*) \\ &\approx 3\times 10^{-3}\end{aligned}$$

若改用等价公式

$$\ln(x-\sqrt{x^2-1}) = -\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

则 $f(30) = -\ln(30+\sqrt{899})$

此时，

$$\begin{aligned}\varepsilon(y^*) &= \left|-\frac{1}{30+u^*}\right| \varepsilon(u^*) \\ &= \frac{1}{59.9833}\cdot\varepsilon(u^*) \\ &\approx 8\times 10^{-7}\end{aligned}$$

第二章 插值法

1．当 $x=1,-1,2$ 时， $f(x)=0,-3,4$,求 $f(x)$ 的二次插值多项式。

解：

$$x_0=1,x_1=-1,x_2=2,$$
$$f(x_0)=0,f(x_1)=-3,f(x_2)=4;$$
$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=-\frac{1}{2}(x+1)(x-2)$$
$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{1}{6}(x-1)(x-2)$$
$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{1}{3}(x-1)(x+1)$$

则二次拉格朗日插值多项式为

$$L_2(x)=\sum_{k=0}^{2}y_kl_k(x)$$

$$=-3l_0(x)+4l_2(x)$$
$$=-\frac{1}{2}(x-1)(x-2)+\frac{4}{3}(x-1)(x+1)$$
$$=\frac{5}{6}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{7}{3}$$

2．给出 $f(x)=\ln x$ 的数值表

X	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
lnx	-0.916291	-0.693147	-0.510826	-0.356675	-0.223144

用线性插值及二次插值计算 $\ln 0.54$ 的近似值。

解：由表格知，

$$x_0=0.4,x_1=0.5,x_2=0.6,x_3=0.7,x_4=0.8;$$
$$f(x_0)=-0.916291,f(x_1)=-0.693147$$
$$f(x_2)=-0.510826,f(x_3)=-0.356675$$
$$f(x_4)=-0.223144$$

若采用线性插值法计算 $\ln 0.54$ 即 $f(0.54)$，

则 $0.5<0.54<0.6$

$$l_1(x)=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}=-10(x-0.6)$$

$$l_2(x)=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=-10(x-0.5)$$

$$L_1(x)=f(x_1)l_1(x)+f(x_2)l_2(x)$$

$$=6.93147(x-0.6)-5.10826(x-0.5)$$

$$\therefore L_1(0.54)=-0.6202186\approx-0.620219$$

若采用二次插值法计算 $\ln 0.54$ 时，

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=50(x-0.5)(x-0.6)$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=-100(x-0.4)(x-0.6)$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=50(x-0.4)(x-0.5)$$

$$L_2(x)=f(x_0)l_0(x)+f(x_1)l_1(x)+f(x_2)l_2(x)$$

$$=-50\times0.916291(x-0.5)(x-0.6)+69.3147(x-0.4)(x-0.6)-0.510826\times50(x-0.4)(x-0.5)$$

$$\therefore L_2(0.54)=-0.61531984\approx-0.615320$$

3．给全 $\cos x, 0^\circ\le x\le 90^\circ$ 的函数表，步长 $h=1'=(1/60)^\circ$，若函数表具有 5 位有效数字，研究用线性插值求 $\cos x$ 近似值时的总误差界。

解：求解 $\cos x$ 近似值时，误差可以分为两个部分，一方面，x 是近似值，具有 5 位有效数字，在此后的计算过程中产生一定的误差传播；另一方面，利用插值法求函数 $\cos x$ 的近似值时，采用的线性插值法插值余项不为 0，也会有一定的误差。因此，总误差界的计算应综合以上两方面的因素。

当 $0^\circ\le x\le 90^\circ$ 时，

令 $f(x)=\cos x$

取 $x_0=0, h=(\frac{1}{60})^\circ=\frac{1}{60}\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{10800}$

令 $x_i=x_0+ih, i=0,1,...,5400$

则 $x_{5400}=\frac{\pi}{2}=90^\circ$

当 $x\in[x_k,x_{k-1}]$ 时，线性插值多项式为

$$L_1(x)=f(x_k)\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}+f(x_{k+1})\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}$$

插值余项为

$$R(x)=\left|\cos x-L_1(x)\right|=\left|\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_k)(x-x_{k+1})\right|$$

又$\because$在建立函数表时，表中数据具有 5 位有效数字，且$\cos x\in[0,1]$，故计算中有误差传播过程。

$$\therefore \varepsilon(f^*(x_k))=\frac{1}{2}\times 10^{-5}$$

$$R_2(x)=\left|\varepsilon(f^*(x_k))\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right|+\left|\varepsilon(f^*(x_{k+1}))\frac{x-x_{k+1}}{x_{k+1}-x_k}\right|$$

$$\le\varepsilon(f^*(x_k))(\left|\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right|+\left|\frac{x-x_{k+1}}{x_{k+1}-x_k}\right|)$$

$$=\varepsilon(f^*(x_k))\frac{1}{h}(x_{k+1}-x+x-x_k)$$

$$=\varepsilon(f^*(x_k))$$

$\therefore$总误差界为

$$R=R_1(x)+R_2(x)$$

$$=\left|\frac{1}{2}(-\cos\xi)(x-x_k)(x-x_{k+1})\right|+\varepsilon(f^*(x_k))$$

$$\le\frac{1}{2}\times(x-x_k)(x_{k+1}-x)+\varepsilon(f^*(x_k))$$

$$\le\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}h)^2+\varepsilon(f^*(x_k))$$

$$=1.06\times 10^{-8}+\frac{1}{2}\times 10^{-5}$$

$$=0.50106\times 10^{-5}$$

4．设为互异节点，求证：

（1）$\sum_{j=0}^{n}x_j^k l_j(x)\equiv x^k \qquad (k=0,1,\cdots,n);$

（2）$\sum_{j=0}^{n}(x_j-x)^k l_j(x)\equiv 0 \qquad (k=0,1,\cdots,n);$

证明

（1）　令$f(x)=x^k$

若插值节点为$x_j, j=0,1,\cdots,n$，则函数$f(x)$的n次插值多项式为$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n}x_j^k l_j(x)$。

插值余项为$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$

又$\because k\le n,$

$\therefore f^{(n+1)}(\xi)=0$

$\therefore R_n(x)=0$

$$\therefore \sum_{j=0}^{n}x_j^k l_j(x)=x^k \qquad (k=0,1,\cdots,n);$$

$$(2)\sum_{j=0}^{n}(x_j-x)^k l_j(x)$$

$$=\sum_{j=0}^{n}(\sum_{i=0}^{n}C_k^j x_j^i(-x)^{k-i})l_j(x)$$

$$=\sum_{i=0}^{n}C_k^i(-x)^{k-i}(\sum_{j=0}^{n}x_j^i l_j(x))$$

又$\because 0\le i\le n$　由上题结论可知

$$\sum_{j=0}^{n}x_j^k l_j(x)=x^i$$

$$\therefore 原式=\sum_{i=0}^{n}C_k^i(-x)^{k-i}x^i$$

$$=(x-x)^k$$

$$=0$$

$\therefore$得证。

5 设$f(x)\in C^2\left[a,b\right]$且$f(a)=f(b)=0,$求证：

$$\max_{a\le x\le b}\left|f(x)\right|\le\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\le x\le b}\left|f''(x)\right|.$$

解：令$x_0=a,x_1=b$，以此为插值节点，则线性插值多项式为

$$L_1(x)=f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+f(x_1)\frac{x-x_0}{x-x_0}$$

$$==f(a)\frac{x-b}{a-b}+f(b)\frac{x-a}{x-a}$$

又$\because\ f(a)=f(b)=0$

$\therefore L_1(x)=0$

插值余项为$R(x)=f(x)-L_1(x)=\frac{1}{2}f''(x)(x-x_0)(x-x_1)$

$\therefore\ f(x)=\frac{1}{2}f''(x)(x-x_0)(x-x_1)$

又$\because\left|(x-x_0)(x-x_1)\right|$

$\le\left\{\frac{1}{2}\left[(x-x_0)+(x_1-x)\right]\right\}^2$

$=\frac{1}{4}(x_1-x_0)^2$

$=\frac{1}{4}(b-a)^2$

$\therefore\ \max\limits_{a\le x\le b}\left|f(x)\right|\le\frac{1}{8}(b-a)^2\max\limits_{a\le x\le b}\left|f''(x)\right|.$

6．在$-4\le x\le 4$上给出$f(x)=e^x$的等距节点函数表，若用二次插值求e^x的近似值，要使截断误差不超过10^{-6}，问使用函数表的步长 h 应取多少？

解：若插值节点为x_{i-1},x_i和x_{i+1}，则分段二次插值多项式的插值余项为

$R_2(x)=\frac{1}{3!}f'''(\xi)(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})$

$\therefore\left|R_2(x)\right|\le\frac{1}{6}(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})\max\limits_{-4\le x\le 4}\left|f'''(x)\right|$

设步长为 h，即$x_{i-1}=x_i-h,x_{i+1}=x_i+h$

$\therefore\left|R_2(x)\right|\le\frac{1}{6}e^4\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}}h^3=\frac{\sqrt{3}}{27}e^4h^3.$

若截断误差不超过10^{-6}，则

$\left|R_2(x)\right|\le 10^{-6}$

$\therefore\frac{\sqrt{3}}{27}e^4h^3\le 10^{-6}$

$\therefore h\le 0.0065.$

7．若$y_n=2^n$,求$\Delta^4 y_n$及$\delta^4 y_n$.，

解：根据向前差分算子和中心差分算子的定义进行求解。

$y_n=2^n$

$$\Delta^4 y_n = (E-1)^4 y_n$$
$$= \sum_{j=0}^{4} (-1)^j \binom{4}{j} E^{4-j} y_n$$
$$= \sum_{j=0}^{4} (-1)^j \binom{4}{j} y_{4+n-j}$$
$$= \sum_{j=0}^{4} (-1)^j \binom{4}{j} 2^{4-j} \cdot y_n$$
$$= (2-1)^4 y_n$$
$$= y_n$$
$$= 2^n$$

$$\delta^4 y_n = (E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}})^4 y_n$$
$$= (E^{-\frac{1}{2}})^4 (E-1)^4 y_n$$
$$= E^{-2} \Delta^4 y_n$$
$$= y_{n-2}$$
$$= 2^{n-2}$$

8．如果 $f(x)$ 是 m 次多项式，记 $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$，证明 $f(x)$ 的 k 阶差分 $\Delta^k f(x) (0 \le k \le m)$ 是 $m-k$ 次多项式，并且 $\Delta^{m+1} f(x) = 0$（l 为正整数）。

解：函数 $f(x)$ 的 $Taylor$ 展式为

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2} f''(x)h^2 + \cdots + \frac{1}{m!} f^{(m)}(x)h^m + \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi)h^{m+1}$$

其中 $\xi \in (x, x+h)$

又∵ $f(x)$ 是次数为 m 的多项式

$\therefore f^{(m+1)}(\xi) = 0$

$\therefore \Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$

$$= f'(x)h + \frac{1}{2} f''(x)h^2 + \cdots + \frac{1}{m!} f^{(m)}(x)h^m$$

$\therefore \Delta f(x)$ 为 $m-1$ 阶多项式

$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x))$

$\therefore \Delta^2 f(x)$ 为 $m-2$ 阶多项式

依此过程递推，得$\Delta^k f(x)$是$m-k$次多项式

$\therefore \Delta^m f(x)$是常数

$\therefore$当l为正整数时，

$\Delta^{m+1} f(x)=0$

9．证明$\Delta(f_k g_k)=f_k\Delta g_k+g_{k+1}\Delta f_k$

证明

$$\Delta(f_k g_k)=f_{k+1}g_{k+1}-f_k g_k$$

$$\begin{aligned}
&=f_{k+1}g_{k+1}-f_k g_{k+1}+f_k g_{k+1}-f_k g_k\\
&=g_{k+1}(f_{k+1}-f_k)+f_k(g_{k+1}-g_k)\\
&=g_{k+1}\Delta f_k+f_k\Delta g_k\\
&=f_k\Delta g_k+g_{k+1}\Delta f_k
\end{aligned}$$

$\therefore$得证

10．证明$\sum_{k=0}^{n-1} f_k\Delta g_k=f_n g_n-f_0 g_0-\sum_{k=0}^{n-1} g_{k+1}\Delta f_k$

证明：由上题结论可知

$$f_k\Delta g_k=\Delta(f_k g_k)-g_{k+1}\Delta f_k$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{n-1} f_k\Delta g_k$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta(f_k g_k)-g_{k+1}\Delta f_k)$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\Delta(f_k g_k)-\sum_{k=0}^{n-1} g_{k+1}\Delta f_k$$

$$\because \Delta(f_k g_k)=f_{k+1}g_{k+1}-f_k g_k$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{n-1}\Delta(f_k g_k)$$

$$=(f_1 g_1-f_0 g_0)+(f_2 g_2-f_1 g_1)+\cdots+(f_n g_n-f_{n-1}g_{n-1})$$

$$=f_n g_n-f_0 g_0$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{n-1} f_k\Delta g_k=f_n g_n-f_0 g_0-\sum_{k=0}^{n-1} g_{k+1}\Delta f_k$$

得证。

11．证明$\sum_{j=0}^{n-1}\Delta^2 y_j=\Delta y_n-\Delta y_0$

证明$\sum_{j=0}^{n-1}\Delta^2 y_j=\sum_{j=0}^{n-1}(\Delta y_{j+1}-\Delta y_j)$

$$=(\Delta y_1-\Delta y_0)+(\Delta y_2-\Delta y_1)+\cdots+(\Delta y_n-\Delta y_{n-1})$$
$$=\Delta y_n-\Delta y_0$$

得证。

12．若 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$ 有 n 个不同实根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，

证明：$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\begin{cases}0,0\le k\le n-2;\\ n_0^{-1},k=n-1\end{cases}$

证明：$\because$ $f(x)$ 有个不同实根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$

且 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$

$\therefore f(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$

令 $\omega_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$

则 $\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{a_n\omega_n'(x_j)}$

而 $\omega_n'(x)=(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)+(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)$

$$+\cdots+(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})$$

$\therefore \omega_n'(x_j)=(x_j-x_1)(x_j-x_2)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)$

令 $g(x)=x^k$,

$g\left[x_1,x_2,\cdots,x_n\right]=\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{\omega_n'(x_j)}$

则 $g\left[x_1,x_2,\cdots,x_n\right]=\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{\omega_n'(x_j)}$

又$\therefore \sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\frac{1}{a_n}g\left[x_1,x_2,\cdots,x_n\right]$

$\therefore \sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\begin{cases}0,0\le k\le n-2;\\ n_0^{-1},k=n-1\end{cases}$

$\therefore$ 得证。

13．证明n阶均差有下列性质：

（1）若$F(x)=cf(x)$，则$F\left[x_0,x_1,\cdots,x_n\right]=cf\left[x_0,x_1,\cdots,x_n\right]$;

（2）若$F(x)=f(x)+g(x)$，则$F\left[x_0,x_1,\cdots,x_n\right]=f\left[x_0,x_1,\cdots,x_n\right]+g\left[x_0,x_1,\cdots,x_n\right]$.

证明：

（1）$\because f\left[x_1,x_2,\cdots,x_n\right]=\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x^j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$

$$F\left[x_1,x_2,\cdots,x_n\right]=\sum_{j=0}^{n}\frac{F(x^j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{cf(x^j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

$$=c(\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x^j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)})$$

$$=cf\left[x_0,x_1,\cdots,x_n\right]$$

$\therefore$得证。

(2)$\because F(x)=f(x)+g(x)$

$$\therefore F\left[x_0,\cdots,x_n\right]=\sum_{j=0}^{n}\frac{F(x^j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x^j)+g(x^j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x^j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)})$$

$$+\sum_{j=0}^{n}\frac{g(x^j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)})$$

$$=f\left[x_0,\cdots,x_n\right]+g\left[x_0,\cdots,x_n\right]$$

$\therefore$得证。

14．$f(x)=x^7+x^4+3x+1,$求$F\left[2^0,2^1,\cdots,2^7\right]$及$F\left[2^0,2^1,\cdots,2^8\right]$。

解：$\because f(x)=x^7+x^4+3x+1$

若$x_i=2^i,i=0,1,\cdots,8$

则 $f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$

$\therefore f[x_0,x_1,\cdots,x_7]=\dfrac{f^{(7)}(\xi)}{7!}=\dfrac{7!}{7!}=1$

$f[x_0,x_1,\cdots,x_8]=\dfrac{f^{(8)}(\xi)}{8!}=0$

15．证明两点三次埃尔米特插值余项是

$$R_3(x)=f^{(4)}(\xi)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2/4!,\xi\in(x_k,x_{k+1})$$

解：

若 $x\in[x_k,x_{k+1}]$，且插值多项式满足条件

$H_3(x_k)=f(x_k),H_3'(x_k)=f'(x_k)$

$H_3(x_{k+1})=f(x_{k+1}),H_3'(x_{k+1})=f'(x_{k+1})$

插值余项为 $R(x)=f(x)-H_3(x)$

由插值条件可知 $R(x_k)=R(x_{k+1})=0$

且 $R'(x_k)=R'(x_{k+1})=0$

$\therefore R(x)$ 可写成 $R(x)=g(x)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$

其中 $g(x)$ 是关于 x 的待定函数，

现把 x 看成 $[x_k,x_{k+1}]$ 上的一个固定点，作函数

$\varphi(t)=f(t)-H_3(t)-g(x)(t-x_k)^2(t-x_{k+1})^2$

根据余项性质，有

$\varphi(x_k)=0,\varphi(x_{k+1})=0$

$\varphi(x)=f(x)-H_3(x)-g(x)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$
$=f(x)-H_3(x)-R(x)$
$=0$

$\varphi'(t)=f'(t)-H_3'(t)-g(x)[2(t-x_k)(t-x_{k+1})^2+2(t-x_{k+1})(t-x_k)^2]$

$\therefore \varphi'(x_k)=0$

$\varphi'(x_{k+1}) = 0$

由罗尔定理可知，存在$\xi \in (x_k, x)$和$\xi \in (x, x_{k+1})$，使

$\varphi'(\xi_1) = 0, \varphi'(\xi_2) = 0$

即$\varphi'(x)$在$[x_k, x_{k+1}]$上有四个互异零点。

根据罗尔定理，$\varphi''(t)$在$\varphi'(t)$的两个零点间至少有一个零点，

故$\varphi''(t)$在(x_k, x_{k+1})内至少有三个互异零点，

依此类推，$\varphi^{(4)}(t)$在(x_k, x_{k+1})内至少有一个零点。

记为$\xi \in (x_k, x_{k+1})$使

$$\varphi^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(\xi) - H_3^{(4)}(\xi) - 4!g(x) = 0$$

又$\because H_3^{(4)}(t) = 0$

$$\therefore g(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}, \xi \in (x_k, x_{k+1})$$

其中ξ依赖于x

$$\therefore R(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_k)^2 (x - x_{k+1})^2$$

分段三次埃尔米特插值时，若节点为$x_k (k = 0,1,\cdots,n)$，设步长为h，即

$x_k = x_0 + kh, k = 0,1,\cdots,n$在小区间$[x_k, x_{k+1}]$上

$$R(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_k)^2 (x - x_{k+1})^2$$

$$\therefore |R(x)| = \frac{1}{4!}\left| f^{(4)}(\xi) \right| (x - x_k)^2 (x - x_{k+1})^2$$

$$\le \frac{1}{4!}(x-x_k)^2(x_{k+1}-x)^2 \max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|$$
$$\le \frac{1}{4!}[(\frac{x-x_k+x_{k+1}-x}{2})^2]^2 \max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|$$
$$=\frac{1}{4!}\times\frac{1}{2^4}h^4 \max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|$$
$$=\frac{h^4}{384}\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|$$

16．求一个次数不高于 4 次的多项式 P（x），使它满足 $P(0)=P'(0)=0,P(1)=P'(1)=0,P(2)=0$

解：利用埃米尔特插值可得到次数不高于 4 的多项式

$x_0=0,x_1=1$
$y_0=0,y_1=1$
$m_0=0,m_1=1$

$$H_3(x)=\sum_{j=0}^{1}y_j\alpha_j(x)+\sum_{j=0}^{1}m_j\beta_j(x)$$

$$\alpha_0(x)=(1-2\frac{x-x_0}{x_0-x_1})(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2$$
$$=(1+2x)(x-1)^2$$

$$\alpha_1(x)=(1-2\frac{x-x_1}{x_1-x_0})(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2$$
$$=(3-2x)x^2$$

$$\beta_0(x)=x(x-1)^2$$
$$\beta_1(x)=(x-1)x^2$$

$$\therefore H_3(x)=(3-2x)x^2+(x-1)x^2=-x^3+2x^2$$

设 $P(x)=H_3(x)+A(x-x_0)^2(x-x_1)^2$

其中，A 为待定常数

$\because P(2)=1$
$\therefore P(x)=-x^3+2x^2+Ax^2(x-1)^2$

$\therefore A=\frac{1}{4}$

从而 $P(x)=\frac{1}{4}x^2(x-3)^2$

17. 设 $f(x)=1/(1+x^2)$，在 $-5\le x\le 5$ 上取 $n=10$，按等距节点求分段线性插值函数 $I_h(x)$，

计算各节点间中点处的 $I_h(x)$ 与 $f(x)$ 值，并估计误差。

解：

若 $x_0=-5, x_{10}=5$

则步长 $h=1,$

$$x_i=x_0+ih, i=0,1,\cdots,10$$

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

在小区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上，分段线性插值函数为

$$I_h(x)=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}f(x_i)+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}f(x_{i+1})$$

$$=(x_{i+1}-x)\frac{1}{1+x_i^{\ 2}}+(x-x_i)\frac{1}{1+x_{i+1}^{\ 2}}$$

各节点间中点处的 $I_h(x)$ 与 $f(x)$ 的值为

当 $x=\pm 4.5$ 时， $f(x)=0.0471, I_h(x)=0.0486$

当 $x=\pm 3.5$ 时， $f(x)=0.0755, I_h(x)=0.0794$

当 $x=\pm 2.5$ 时， $f(x)=0.1379, I_h(x)=0.1500$

当 $x=\pm 1.5$ 时， $f(x)=0.3077, I_h(x)=0.3500$

当 $x=\pm 0.5$ 时， $f(x)=0.8000, I_h(x)=0.7500$

误差

$$\max_{x_i\le x\le x_{i+1}}\left|f(x)-I_h(x)\right|\le\frac{h^2}{8}\max_{-5\le x\le 5}\left|f''(\xi)\right|$$

又$\because$ $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

$\therefore$ $f'(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2},$

$$f''(x)=\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

$$f'''(x)=\frac{24x-24x^3}{(1+x^2)^4}$$

令 $f'''(x)=0$

得 $f''(x)$ 的驻点为 $x_{1,2}=\pm 1$ 和 $x_3=0$

$$f''(x_{1,2})=\frac{1}{2}, f''(x_3)=-2$$

$$\therefore \max_{-5\le x\le 5}\left|f(x)-I_h(x)\right|\le\frac{1}{4}$$

18．求 $f(x)=x^2$ 在 $[a,b]$ 上分段线性插值函数 $I_h(x)$，并估计误差。

解：

在区间 $[a,b]$ 上，$x_0=a, x_n=b, h_i=x_{i+1}-x_i, i=0,1,\cdots,n-1,$

$$h=\max_{0\le i\le n-1} h_i$$

$\because f(x)=x^2$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在小区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上分段线性插值函数为

$$I_h(x)=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}f(x_i)+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}f(x_{i+1})$$

$$=\frac{1}{h_i}[x_i^{\ 2}(x_{i+1}-x)+x_{i+1}^{\ \ 2}(x-x_i)]$$

误差为

$$\max_{x_i\le x\le x_{i+1}}\left|f(x)-I_h(x)\right|\le\frac{1}{8}\max_{a\le\xi\le b}\left|f''(\xi)\right|\cdot h_i^2$$

$\because f(x)=x^2$

$\therefore f'(x)=2x, f''(x)=2$

$$\therefore \max_{a\le x\le b}\left|f(x)-I_h(x)\right|\le\frac{h^2}{4}$$

19．求 $f(x)=x^4$ 在 $[a,b]$ 上分段埃尔米特插值，并估计误差。

解：

在 $[a,b]$ 区间上，$x_0=a, x_n=b, h_i=x_{i+1}-x_i, i=0,1,\cdots,n-1,$

令 $h=\max\limits_{0\le i\le n-1} h_i$

$\because f(x)=x^4, f'(x)=4x^3$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上的分段埃尔米特插值函数为

$$I_h(x)=(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}})^2(1+2\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i})f(x_i)$$

$$+(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i})^2(1+2\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}})f(x_{i+1})$$

$$+(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}})^2(x-x_i)f'(x_i)$$

$$+(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i})^2(x-x_{i+1})f'(x_{i+1})$$

$$=\frac{x_i^{\ 4}}{h_i^3}(x-x_{i+1})^2(h_i+2x-2x_i)$$

$$+\frac{x_{i+1}^{\ \ 4}}{h_i^3}(x-x_i)^2(h_i-2x+2x_{i+1})$$

$$+\frac{4x_i^{\ 3}}{h_i^2}(x-x_{i+1})^2(x-x_i)$$

$$+\frac{4x_{i+1}^{\ \ 3}}{h_i^2}(x-x_i)^2(x-x_{i+1})$$

误差为

$$\left|f(x)-I_h(x)\right|$$

$$=\frac{1}{4!}\left|f^{(4)}(\xi)\right|(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2$$

$$\leq\frac{1}{24}\max_{a\leq x\leq b}\left|f^{(4)}(\xi)\right|(\frac{h_i}{2})^4$$

又$\because$ $f(x)=x^4$

$\therefore$ $f^{(4)}(x)=4!=24$

$$\therefore \max_{a\leq x\leq b}\left|f(x)-I_h(x)\right|\leq\max_{0\leq i\leq n-1}\frac{h_i^4}{16}\leq\frac{h^4}{16}$$

20．给定数据表如下：

X_j	0.25	0.30	0.39	0.45	0.53
Y_j	0.5000	0.5477	0.6245	0.6708	0.7280

试求三次样条插值，并满足条件：

$(1)S'(0.25)=1.0000, S'(0.53)=0.6868;$

$(2)S''(0.25)=S''(0.53)=0.$

解：

$$h_0 = x_1 - x_0 = 0.05$$
$$h_1 = x_2 - x_1 = 0.09$$
$$h_2 = x_3 - x_2 = 0.06$$
$$h_3 = x_4 - x_3 = 0.08$$

$$\because \mu_j = \frac{h_{j-1}}{h_{j-1} - h_j}, \lambda_j = \frac{h_j}{h_{j-1} - h_j}$$

$$\therefore \mu_1 = \frac{5}{14}, \mu_2 = \frac{3}{5}, \mu_3 = \frac{3}{7}, \mu_4 = 1$$

$$\lambda_1 = \frac{9}{14}, \lambda_2 = \frac{2}{5}, \lambda_3 = \frac{4}{7}, \lambda_0 = 1$$

$$f\left[x_0, x_1\right] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 0.9540$$
$$f\left[x_1, x_2\right] = 0.8533$$
$$f\left[x_2, x_3\right] = 0.7717$$
$$f\left[x_3, x_4\right] = 0.7150$$

$$(1) S'(x_0) = 1.0000, S'(x_4) = 0.6868$$

$$d_0 = \frac{6}{h_0}(f\left[x_1, x_2\right] - f_0') = -5.5200$$

$$d_1 = 6\frac{f\left[x_1, x_2\right] - f\left[x_0, x_1\right]}{h_0 + h_1} = -4.3157$$

$$d_2 = 6\frac{f\left[x_2, x_3\right] - f\left[x_1, x_2\right]}{h_1 + h_2} = -3.2640$$

$$d_3 = 6\frac{f\left[x_3, x_4\right] - f\left[x_2, x_3\right]}{h_2 + h_3} = -2.4300$$

$$d_4 = \frac{6}{h_3}(f_4' - f\left[x_3, x_4\right]) = -2.1150$$

由此得矩阵形式的方程组为

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ \frac{5}{14} & 2 & \frac{9}{14} & & \\ & \frac{3}{5} & 2 & \frac{2}{5} & \\ & & \frac{3}{7} & 2 & \frac{4}{7} \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.5200 \\ -4.3157 \\ -3.2640 \\ -2.4300 \\ -2.1150 \end{pmatrix}$$

求解此方程组得

$M_0=-2.0278, M_1=-1.4643$
$M_2=-1.0313, M_3=-0.8070, M_4=-0.6539$

$\because$ 三次样条表达式为

$$S(x)=M_j\frac{(x_{j+1}-x)^3}{6h_j}+M_{j+1}\frac{(x-x_j)^3}{6h_j}$$
$$+(y_j-\frac{M_jh_j^2}{6})\frac{x_{j+1}-x}{h_j}+(y_{j+1}-\frac{M_{j+1}h_j^2}{6})\frac{x-x_j}{h_j}(j=0,1,\cdots,n-1)$$

$\therefore$ 将 M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 代入得

$$S(x)=\begin{cases}-6.7593(0.30-x)^3-4.8810(x-0.25)^3+10.0169(0.30-x)+10.9662(x-0.25)\\ x\in[0.25,0.30]\\ -2.7117(0.39-x)^3-1.9098(x-0.30)^3+6.1075(0.39-x)+6.9544(x-0.30)\\ x\in[0.30,0.39]\\ -2.8647(0.45-x)^3-2.2422(x-0.39)^3+10.4186(0.45-x)+10.9662(x-0.39)\\ x\in[0.39,0.45]\\ -1.6817(0.53-x)^3-1.3623(x-0.45)^3+8.3958(0.53-x)+9.1087(x-0.45)\\ x\in[0.45,0.53]\end{cases}$$

$(2)S''(x_0)=0, S''(x_4)=0$
$d_0=2f_0''=0, d_1=-4.3157, d_2=-3.2640$
$d_3=-2.4300, d_4=2f_4''=0$
$\lambda_0=\mu_4=0$

由此得矩阵开工的方程组为

$M_0=M_4=0$

$$\begin{pmatrix}2 & \frac{9}{14} & 0\\ \frac{3}{5} & 2 & \frac{2}{5}\\ 0 & \frac{3}{7} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M_1\\ M_2\\ M_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4.3157\\ -3.2640\\ -2.4300\end{pmatrix}$$

求解此方程组，得

$M_0=0, M_1=-1.8809$
$M_2=-0.8616, M_3=-1.0304, M_4=0$

又$\because$ 三次样条表达式为

$$S(x)=M_j\frac{(x_{j+1}-x)^3}{6h_j}+M_{j+1}\frac{(x-x_j)^3}{6h_j}$$
$$+(y_j-\frac{M_jh_j^2}{6})\frac{x_{j+1}-x}{h_j}+(y_{j+1}-\frac{M_{j+1}h_j^2}{6})\frac{x-x_j}{h_j}$$

将 M_0,M_1,M_2,M_3,M_4 代入得

$$\therefore S(x)=\begin{cases}-6.2697(x-0.25)^3+10(0.3-x)+10.9697(x-0.25)\\ x\in[0.25,0.30]\\ -3.4831(0.39-x)^3-1.5956(x-0.3)^3+6.1138(0.39-x)+6.9518(x-0.30)\\ x\in[0.30,0.39]\\ -2.3933(0.45-x)^3-2.8622(x-0.39)^3+10.4186(0.45-x)+11.1903(x-0.39)\\ x\in[0.39,0.45]\\ -2.1467(0.53-x)^3+8.3987(0.53-x)+9.1(x-0.45)\\ x\in[0.45,0.53]\end{cases}$$

21．若 $f(x)\in C^2[a,b],S(x)$ 是三次样条函数，证明：

$$(1)\int_a^b[f''(x)]^2dx-\int_a^b[S''(x)]^2dx$$
$$=\int_a^b[f''(x)-S''(x)]^2dx+2\int_a^b S''(x)[f''(x)-S''(x)]^2dx$$

(2) 若 $f(x_i)=S(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$，式中 x_i 为插值节点，且 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，则

$$\int_a^b S''(x)[f''(x)-S''(x)]dx$$
$$=S''(b)[f'(b)-S'(b)]-S''(a)[f'(a)-S'(a)]$$

证明：

$$(1)\int_a^b[f''(x)-S''(x)]^2dx$$
$$=\int_a^b[f''(x)]^2dx+\int_a^b[S''(x)]^2dx-2\int_a^b f''(x)S''(x)dx$$
$$=\int_a^b[f''(x)]^2dx-\int_a^b[S''(x)]^2dx-2\int_a^b S''(x)[f''(x)-S''(x)]dx$$

从而有

$$\int_a^b[f''(x)]^2dx-\int_a^b[S''(x)]^2dx$$
$$=\int_a^b[f''(x)-S''(x)]^2dx+2\int_a^b S''(x)[f''(x)-S''(x)]dx$$

$$(2)\int_a^b S''(x)\left[f''(x)-S''(x)\right]dx$$

$$=\int_a^b S''(x)d\left[f'(x)-S'(x)\right]$$

$$=S''(x)\left[f'(x)-S'(x)\right]\Big|_a^b-\int_a^b\left[f'(x)-S'(x)\right]d[S''(x)]$$

$$=S''(b)\left[f'(b)-S'(b)\right]-S''(a)\left[f'(a)-S'(a)\right]-\int_a^b S'''(x)\left[f'(x)-S'(x)\right]dx$$

$$=S''(b)\left[f'(b)-S'(b)\right]-S''(a)\left[f'(a)-S'(a)\right]-\sum_{k=0}^{n-1}S'''\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\cdot\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left[f'(x)-S'(x)\right]dx$$

$$=S''(b)\left[f'(b)-S'(b)\right]-S''(a)\left[f'(a)-S'(a)\right]-\sum_{k=0}^{n-1}S'''\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\cdot\left[f'(x)-S'(x)\right]\Big|_{x_k}^{x_{k+1}}$$

$$=S''(b)\left[f'(b)-S'(b)\right]-S''(a)\left[f'(a)-S'(a)\right]$$

第三章 函数逼近与曲线拟合

1. $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$，给出$[0,1]$上的伯恩斯坦多项式$B_1(f,x)$及$B_3(f,x)$。

解：

$$\because f(x)=\sin\frac{\pi}{2},\ x\in[0,1]$$

伯恩斯坦多项式为

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}f(\frac{k}{n})P_k(x)$$

其中$P_k(x)=\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}x^k(1-x)^{n-k}$

当$n=1$时，

$$P_0(x)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1-x)$$

$$P_1(x)=x$$

$$\therefore B_1(f,x)=f(0)P_0(x)+f(1)P_1(x)$$

$$=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1-x)\sin(\frac{\pi}{2}\times 0)+x\sin\frac{\pi}{2}$$

$$=x$$

当$n=3$时，

$$P_0(x)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1-x)^3$$

$$P_1(x)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}x(1-x)^2=3x(1-x)^2$$

$$P_2(x)=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}x^2(1-x)=3x^2(1-x)$$

$$P_3(x)=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}x^3=x^3$$

$$\therefore B_3(f,x)=\sum_{k=0}^{3}f(\frac{k}{n})P_k(x)$$

$$=0+3x(1-x)^2\cdot\sin\frac{\pi}{6}+3x^2(1-x)\cdot\sin\frac{\pi}{3}+x^3\sin\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{3}{2}x(1-x)^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2(1-x)+x^3$$

$$=\frac{5-3\sqrt{3}}{2}x^3+\frac{3\sqrt{3}-6}{2}x^2+\frac{3}{2}x$$

$$\approx 1.5x-0.402x^2-0.098x^3$$

2． 当 $f(x)=x$ 时，求证 $B_n(f,x)=x$

证明：

若 $f(x)=x$，则

$$
\begin{aligned}
B_n(f,x) &= \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})P_k(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)\cdots[(n-1)-(k-1)+1]}{(k-1)!} x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k(1-x)^{n-k} \\
&= x\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{(n-1)-(k-1)} \\
&= x[x+(1-x)]^{n-1} \\
&= x
\end{aligned}
$$

3．证明函数 $1,x,\cdots,x^n$ 线性无关

证明：

若 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0,\forall x\in R$

分别取 $x^k(k=0,1,2,\cdots,n)$，对上式两端在 $[0,1]$ 上作带权 $\rho(x)\equiv 1$ 的内积，得

$$
\begin{pmatrix}
1 & \cdots & \frac{1}{n+1} \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n+1}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$\because$ 此方程组的系数矩阵为希尔伯特矩阵，对称正定非奇异，

$\therefore$ 只有零解 a=0。

$\therefore$ 函数 $1,x,\cdots,x^n$ 线性无关。

4。计算下列函数 $f(x)$ 关于 $C[0,1]$ 的 $\|f\|_\infty,\|f\|_1$ 与 $\|f\|_2$：

(1) $f(x)=(x-1)^3,x\in[0,1]$

(2) $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|,$

(3) $f(x)=x^m(1-x)^n$, m 与 n 为正整数，

(4) $f(x)=(x+1)^{10}e^{-x}$

解：

(1) 若 $f(x)=(x-1)^3, x\in[0,1]$，则

$$f'(x)=3(x-1)^2\geq 0$$

$\therefore$ $f(x)=(x-1)^3$ 在 $(0,1)$ 内单调递增

$$\|f\|_\infty=\max_{0\leq x\leq 1}|f(x)|$$
$$=\max\{|f(0)|,|f(1)|\}$$
$$=\max\{0,1\}=1$$

$$\|f\|_\infty=\max_{0\leq x\leq 1}|f(x)|$$
$$=\max\{|f(0)|,|f(1)|\}$$
$$=\max\{0,1\}=1$$

$$\|f\|_2=(\int_0^1(1-x)^6dx)^{\frac{1}{2}}$$
$$=[\frac{1}{7}(1-x)^7\Big|_0^1]^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{7}}{7}$$

(2) 若 $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|, x\in\left[0,1\right]$，则

$$\|f\|_\infty=\max_{0\leq x\leq 1}|f(x)|=\frac{1}{2}$$
$$\|f\|_1=\int_0^1|f(x)|dx$$
$$=2\int_{\frac{1}{2}}^1(x-\frac{1}{2})dx$$
$$=\frac{1}{4}$$

$$\|f\|_2=(\int_0^1 f^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}$$
$$=[\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2 dx]^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

(3) 若 $f(x)=x^m(1-x)^n$, m 与 n 为正整数

当 $x\in[0,1]$ 时, $f(x)\geq 0$

$$f'(x)=mx^{m-1}(1-x)^n+x^m n(1-x)^{n-1}(-1)$$
$$=x^{m-1}(1-x)^{n-1}m(1-\frac{n+m}{m}x)$$

当 $x\in(0,\frac{m}{n+m})$ 时, $f'(x)>0$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $(0,\frac{m}{n+m})$ 内单调递减

当 $x\in(\frac{m}{n+m},1)$ 时, $f'(x)<0$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $(\frac{m}{n+m},1)$ 内单调递减。

$$x\in(\frac{m}{n+m},1)\ f'(x)<0$$
$$\|f\|_\infty=\max_{0\leq x\leq 1}|f(x)|=$$
$$=\max\left\{|f(0)|,\left|f(\frac{m}{n+m})\right|\right\}$$
$$=\frac{m^m\cdot n^n}{(m+n)^{m+n}}$$

$$\|f\|_1=\int_0^1|f(x)|dx$$
$$=\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 t)^m(1-\sin^2 t)^n d\sin^2 t$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}t\cos^{2n}t\cos t\cdot 2\cdot\sin t dt$$
$$=\frac{n!m!}{(n+m+1)!}$$

$$\|f\|_2=[\int_0^1 x^{2m}(1-x)^{2n}dx]^{\frac{1}{2}}$$
$$=[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{4m}t\cos^{4n}td(\sin^2 t)]^{\frac{1}{2}}$$
$$=[\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^{4m+1}t\cos^{4n+1}tdt]^{\frac{1}{2}}$$
$$=\sqrt{\frac{(2n)!(2m)!}{[2(n+m)+1]!}}$$

(4) 若 $f(x)=(x+1)^{10}e^{-x}$

当 $x\in\left[0,1\right]$ 时， $f(x)>0$

$$f'(x)=10(x+1)^9e^{-x}+(x+1)^{10}(-e^{-x})$$
$$=(x+1)^9e^{-x}(9-x)$$
$$>0$$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $[0,1]$ 内单调递减。

$$\|f\|_\infty=\max_{0\le x\le 1}\left|f(x)\right|=$$
$$=\max\left\{\left|f(0)\right|,\left|f(1)\right|\right\}$$
$$=\frac{2^{10}}{e}$$
$$\|f\|_1=\int_0^1\left|f(x)\right|dx$$
$$=\int_0^1(x+1)^{10}e^{-x}dx$$
$$=-(x+1)^{10}e^{-x}\Big|_0^1+\int_0^1 10(x+1)^9e^{-x}dx$$
$$=5-\frac{10}{e}$$
$$\|f\|_2=[\int_0^1(x+1)^{20}e^{-2x}dx]^{\frac{1}{2}}$$
$$=7(\frac{3}{4}-\frac{4}{e^2})$$

5。证明 $\|f-g\|\ge\|f\|-\|g\|$

证明：

$$\|f\|$$
$$=\|(f-g)+g\|$$
$$\le\|f-g\|+\|g\|$$
$$\therefore\|f-g\|\ge\|f\|-\|g\|$$

6。对 $f(x),g(x)\in C^1[a,b]$，定义

$$(1)(f,g)=\int_a^b f'(x)g'(x)dx$$
$$(2)(f,g)=\int_a^b f'(x)g'(x)dx+f(a)g(a)$$

问它们是否构成内积。

解：

(1) 令 $f(x)\equiv C$（C 为常数，且 $C\ne 0$）

则 $f'(x)=0$

而 $(f,f)=\int_a^b f'(x)f'(x)dx$

这与当且仅当 $f\equiv 0$ 时，$(f,f)=0$ 矛盾

$\therefore$ 不能构成 $C^1[a,b]$ 上的内积。

(2) 若 $(f,g)=\int_a^b f'(x)g'(x)dx+f(a)g(a)$，则

$$(g,f)=\int_a^b g'(x)f'(x)dx+g(a)f(a)=(f,g),\forall\alpha\in K$$
$$(\alpha f,g)=\int_a^b[\alpha f(x)]'g'(x)dx+af(a)g(a)$$
$$=\alpha[\int_a^b f'(x)g'(x)dx+f(a)g(a)]$$
$$=\alpha(f,g)$$

$\forall h\in C^1[a,b]$,则

$$(f+g,h)=\int_a^b[f(x)+g(x)]'h'(x)dx+[f(a)g(a)]h(a)$$
$$=\int_a^b f'(x)h'(x)dx+f(a)h(a)+\int_a^b f'(x)h'(x)dx+g(a)h(a)$$
$$=(f,h)+(h,g)$$

$$(f,f)=\int_a^b[f'(x)]^2dx+f^2(a)\ge 0$$

若 $(f,f)=0$，则

$\int_a^b [f'(x)]^2 dx = 0$,且 $f^2(a) = 0$

$\therefore f'(x) \equiv 0, f(a) = 0$

$\therefore f(x) \equiv 0$

即当且仅当 $f = 0$ 时，$(f, f) = 0$.

故可以构成 $C^1[a,b]$ 上的内积。

7。令 $T_n^*(x) = T_n(2x-1), x \in [0,1]$，试证 $\left\{T_n^*(x)\right\}$ 是在 $[0,1]$ 上带权 $\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ 的正交多项式，并求 $T_0^*(x), T_1^*(x), T_2^*(x), T_3^*(x)$。

解：

若 $T_n^*(x) = T_n(2x-1), x \in [0,1]$，则

$$\int_0^1 T_n^*(x) T_m^*(x) P(x) dx$$
$$= \int_0^1 T_n(2x-1) T_m(2x-1) \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} dx$$

令 $t = (2x-1)$，则 $t \in [-1,1]$，且 $x = \dfrac{t+1}{2}$，故

$$\int_0^1 T_n^*(x) T_m^*(x) \rho(x) dx$$
$$= \int_{-1}^1 T_n(t) T_m(t) \frac{1}{\sqrt{\frac{t+1}{2} - (\frac{t+1}{2})^2}} d(\frac{t+1}{2})$$
$$= \int_{-1}^1 T_n(t) T_m(t) \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

又$\because$ 切比雪夫多项式 $\left\{T_k^*(x)\right\}$ 在区间 $[0,1]$ 上带权 $\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 正交，且

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) d \frac{x}{\sqrt{1-t^2}} = \begin{cases} 0, n \neq m \\ \frac{\pi}{2}, n = m \neq 0 \\ \pi, n = m = 0 \end{cases}$$

$\therefore \left\{T_n^*(x)\right\}$ 是在 $[0,1]$ 上带权 $\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ 的正交多项式。

又$\because T_0(x) = 1, x \in [-1,1]$

$\therefore T_0^*(x) = T_0(2x-1) = 1, x \in [0,1]$

$\because T_1(x) = x, x \in [-1,1]$

$\therefore T_1^*(x) = T_1(2x-1) = 2x-1, x \in [0,1]$

$\because T_2(x) = 2x^2 - 1, x \in [-1,1]$

$\therefore T_2^*(x) = T_2(2x-1)$

$= 2(2x-1)^2 - 1$

$= 8x^2 - 8x - 1, x \in [0,1]$

$\because T_3(x) = 4x^3 - 3x, x \in [-1,1]$

$\therefore T_3^*(x) = T_3(2x-1)$

$= 4(2x-1)^3 - 3(2x-1)$

$= 32x^3 - 48x^2 + 18x - 1, x \in [0,1]$

8。对权函数 $\rho(x) = 1 - x^2$，区间 $[-1,1]$，试求首项系数为 1 的正交多项式 $\varphi_n(x), n = 0,1,2,3.$

解：

若 $\rho(x) = 1 - x^2$，则区间 $[-1,1]$ 上内积为

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\rho(x)dx$$

定义 $\varphi_0(x) = 1$，则

$$\varphi_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)\varphi_n(x) - \beta_n \varphi_{n-1}(x)$$

其中

$$\alpha_n = (x\varphi_n(x), \varphi_n(x)) / (\varphi_n(x), \varphi_n(x))$$

$$\beta_n = (\varphi_n(x), \varphi_n(x)) / (\varphi_{n-1}(x), \varphi_{n-1}(x))$$

$$\therefore \alpha_0 = (x,1)/(1,1)$$

$$= \frac{\int_{-1}^{1} x(1+x^2)dx}{\int_{-1}^{1} (1+x^2)dx}$$

$$= 0$$

$$\therefore \varphi_1(x) = x$$

$$\alpha_1 = (x^2, x)/(x, x)$$

$$= \frac{\int_{-1}^{1} x^3(1+x^2)dx}{\int_{-1}^{1} x^2(1+x^2)dx}$$

$$= 0$$

$$\beta_1 = (x, x)/(1,1)$$

$$= \frac{\int_{-1}^{1} x^2(1+x^2)dx}{\int_{-1}^{1} (1+x^2)dx}$$

$$= \frac{\frac{16}{15}}{\frac{8}{3}} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore \varphi_2(x) = x^2 - \frac{2}{5}$$

$$\alpha_2=(x^3-\frac{2}{5}x,x^2-\frac{2}{5})/(x^2-\frac{2}{5},x^2-\frac{2}{5})$$

$$=\frac{\int_{-1}^{1}(x^3-\frac{2}{5}x)(x^2-\frac{2}{5})(1+x^2)dx}{\int_{-1}^{1}(x^2-\frac{2}{5})(x^2-\frac{2}{5})(1+x^2)dx}$$

$$=0$$

$$\beta_2=(x^2-\frac{2}{5},x^2-\frac{2}{5})/(x,x)$$

$$=\frac{\int_{-1}^{1}(x^2-\frac{2}{5})(x^2-\frac{2}{5})(1+x^2)dx}{\int_{-1}^{1}x^2(1+x^2)dx}$$

$$=\frac{\frac{136}{525}}{\frac{16}{15}}=\frac{17}{70}$$

$$\therefore \varphi_3(x)=x^3-\frac{2}{5}x^2-\frac{17}{70}x=x^3-\frac{9}{14}x$$

9。试证明由教材式 (2.14) 给出的第二类切比雪夫多项式族 $\{u_n(x)\}$ 是 [0,1] 上带权

$\rho(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的正交多项式。

证明:

若 $U_n(x)=\dfrac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}$

令 $x=\cos\theta$，可得

$$\int_{-1}^{1}U_m(x)U_n(x)\sqrt{1-x^2}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{\sin[(m+1)\arccos x]\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\int_{\pi}^{0}\frac{\sin[(m+1)\theta\sin[(n+1)\theta]}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}d\theta$$

$$=\int_{0}^{\pi}\sin[(m+1)\theta\sin[(n+1)\theta]d\theta$$

当 $m=n$ 时,

$$\int_{0}^{\pi}\sin^2[(m+1)\theta d\theta$$

$$=\int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos[2(m+1)\theta]}{2}d\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

当 $m\neq n$ 时,

$$\int_0^{\pi}\sin[(m+1)\theta\sin[(n+1)\theta]d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\sin[(m+1)\theta d\{\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\theta\}$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\theta d\{\sin[(m+1)\theta]\}$$

$$=\int_0^{\pi}-\frac{m+1}{n+1}\cos(n+1)\theta\cos(m+1)\theta d\theta$$

$$=-\int_0^{\pi}\frac{m+1}{n+1}\cos[(m+1)\theta]d\{\frac{1}{n+1}\sin[(n+1)\theta]\}$$

$$=-\int_0^{\pi}\frac{m+1}{(n+1)^2}\sin[(n+1)]\theta d\{\cos[(m+1)\theta]\}$$

$$=\int_0^{\pi}(\frac{m+1}{n+1})^2\sin[(n+1)\theta]\sin[(m+1)\theta]d\theta$$

$$=0$$

$$\therefore[1-(\frac{m+1}{n+1})^2]\int_0^{\pi}\sin[(n+1)\theta]\sin[(m+1)\theta]d\theta=0$$

又$\because m\neq n$，故$(\frac{m+1}{n+1})^2\neq 1$

$$\therefore\int_0^{\pi}\sin[(n+1)\theta]\sin[(m+1)\theta]d\theta=0$$

得证。

10。证明切比雪夫多项式$T_n(x)$满足微分方程

$$(1-x^2)T_n''(x)-xT_n'(x)+n^2T_n(x)=0$$

证明：

切比雪夫多项式为

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x),|x|\leq 1$$

从而有

$$T_n'(x) = -\sin(n\arccos x)\cdot n\cdot(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}})$$

$$= \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\arccos x)$$

$$T_n''(x) = \frac{n}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\sin(n\arccos x) - \frac{n^2}{1-x^2}\cos(n\arccos x)$$

$$\therefore (1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x)$$

$$= \frac{nx}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\arccos x) - n^2\cos(n\arccos x)$$

$$- \frac{nx}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\arccos x) + n^2\cos(n\arccos x)$$

$$= 0$$

得证。

11。假设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，求 $f(x)$ 的零次最佳一致逼近多项式？

解：

$\because$ $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续

$\therefore$ 存在 $x_1, x_2 \in [a,b]$，使

$$f(x_1) = \min_{a\le x\le b} f(x),$$
$$f(x_2) = \max_{a\le x\le b} f(x),$$

取 $P = \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]$

则 x_1 和 x_2 是$[a,b]$上的 2 个轮流为“正”、“负”的偏差点。

由切比雪夫定理知

P 为 $f(x)$ 的零次最佳一致逼近多项式。

12。选取常数 a，使 $\max\limits_{0\le x\le 1}\left|x^3 - ax\right|$ 达到极小，又问这个解是否唯一？

解：

令 $f(x) = x^3 - ax$

则 $f(x)$ 在$[-1,1]$上为奇函数

$$\therefore \max_{0\le x\le 1}\left|x^3 - ax\right|$$
$$= \max_{-1\le x\le 1}\left|x^3 - ax\right|$$
$$= \|f\|_\infty$$

又$\because$ $f(x)$的最高次项系数为1，且为3次多项式。

$\therefore$ $\omega_3(x)=\frac{1}{2^3}T_3(x)$与0的偏差最小。

$$\omega_3(x)=\frac{1}{4}T_3(x)=x^3-\frac{3}{4}x$$

从而有 $a=\frac{3}{4}$

13。求 $f(x)=\sin x$ 在$[0,\frac{\pi}{2}]$上的最佳一次逼近多项式，并估计误差。

解：

$$\because f(x)=\sin x, x\in[0,\frac{\pi}{2}]$$

$$f'(x)=\cos x, f''(x)=-\sin x\le 0$$

$$a_1=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{2}{\pi},$$

$$\cos x_2=\frac{2}{\pi},$$

$$\therefore x_2=\arccos\frac{2}{\pi}\approx 0.88069$$

$$f(x_2)=0.77118$$

$$a_0=\frac{f(a)+f(x_2)}{2}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\frac{a+x_2}{2}$$

$$=0.10526$$

于是得 $f(x)$ 的最佳一次逼近多项式为

$$P_1(x)=0.10526+\frac{2}{\pi}x$$

即

$$\sin x\approx 0.10526+\frac{2}{\pi}x, 0\le x\le\frac{\pi}{2}$$

误差限为

$$\|\sin x-P_1(x)\|_\infty$$

$$=|\sin 0-P_1(0)|$$

$$=0.10526$$

14。求 $f(x)=e^x\left[0,1\right]$ 在$\left[0,1\right]$上的最佳一次逼近多项式。

解：

$$\because f(x)=e^x, x\in\left[0,1\right]$$

$$\therefore f'(x)=e^x,$$

$$f''(x)=e^x>0$$

$$a_1=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=e-1$$
$$e^{x_2}=e-1$$
$$x_2=\ln(e-1)$$
$$f(x_2)=e^{x_2}=e-1$$
$$a_0=\frac{f(a)+f(x_2)}{2}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\frac{a+x_2}{2}$$
$$=\frac{1+(e-1)}{2}-(e-1)\frac{\ln(e-1)}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\ln(e-1)$$

于是得 $f(x)$ 的最佳一次逼近多项式为

$$P_1(x)=\frac{e}{2}+(e-1)[x-\frac{1}{2}\ln(e-1)]$$
$$=(e-1)x+\frac{1}{2}[e-(e-1)\ln(e-1)]$$

15。求 $f(x)=x^4+3x^3-1$ 在区间 $[0,1]$ 上的三次最佳一致逼近多项式。

解：

$\because\ f(x)=x^4+3x^3-1, x\in[0,1]$

令 $t=2(x-\frac{1}{2})$，则 $t\in[-1,1]$

且 $x=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$

$$\therefore\ f(t)=(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2})^4+3(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2})^3-1$$
$$=\frac{1}{16}(t^4+10t^3+24t^2 22t-9)$$

令 $g(t)=16f(t)$，则 $g(t)=t^4+10t^3+24t^2+22t-9$

若 $g(t)$ 为区间 $[-1,1]$ 上的最佳三次逼近多项式 $P_3^*(t)$ 应满足

$$\max_{-1\le t\le 1}\left|g(t)-P_3^*(t)\right|=\min$$

当 $g(t)-P_3^*(t)=\frac{1}{2^3}T_4(t)=\frac{1}{8}(8t^4-8t^2+1)$

时，多项式 $g(t)-P_3^*(t)$ 与零偏差最小，故

$$_3^*(t)=g(t)-\frac{1}{2^3}T_4(t)$$
$$=10t^3+25t^2+22t-\frac{73}{8}$$

进而，$f(x)$ 的三次最佳一致逼近多项式为 $\frac{1}{16}P_3^*(t)$，则 $f(x)$ 的三次最佳一致逼近多项式为

$$P_3^*(t)=\frac{1}{16}[10(2x-1)^3+25(2x-1)^2+22(2x-1)-\frac{73}{8}]$$
$$=5x^3-\frac{5}{4}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{129}{128}$$

16。 $f(x)=|x|$，在 $[-1,1]$ 上求关于 $\Phi=span\{1,x^2,x^4\}$ 的最佳平方逼近多项式。

解：

$\because\ f(x)=|x|,x\in[-1,1]$

若 $(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$

且 $\varphi_0=1,\varphi_1=x^2,\varphi_2=x^4$，则

$$\|\varphi_0\|_2^2=2,\|\varphi_1\|_2^2=\frac{2}{5},\|\varphi_2\|_2^2=\frac{2}{9},$$
$$(f,\varphi_0)=1,(f,\varphi_1)=\frac{1}{2},(f,\varphi_2)=\frac{1}{3},$$
$$(\varphi_0,\varphi_1)=1,(\varphi_0,\varphi_2)=\frac{2}{5},(\varphi_1,\varphi_2)=\frac{2}{7},$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix}2 & \frac{2}{3} & \frac{2}{5}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{5} & \frac{2}{7}\\ \frac{2}{5} & \frac{2}{7} & \frac{2}{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

解得

$$\begin{cases}a_0=0.1171875\\ a_1=1.640625\\ a_2=-0.8203125\end{cases}$$

故 $f(x)$ 关于 $\Phi=span\{1,x^2,x^4\}$ 的最佳平方逼近多项式为

$$S^*(x)=a_0+a_1x^2+a_2x^4$$
$$=0.1171875+1.640625x^2-0.8203125x^4$$

17。求函数 $f(x)$ 在指定区间上对于 $\Phi=span\{1,x\}$ 的最佳逼近多项式：

$$(1)\,f(x)=\frac{1}{x},[1,3];(2)\,f(x)=e^x,[0,1];$$
$$(3)\,f(x)=\cos\pi x,[0,1];(4)\,f(x)=\ln x,[1,2];$$

解：

$$(1)\because\ f(x)=\frac{1}{x},[1,3];$$

若 $(f,g)=\int_1^3 f(x)g(x)dx$

且 $\varphi_0=1,\varphi_1=x,$，则有

$$\|\varphi_0\|_2^2=2,\|\varphi_1\|_2^2=\frac{26}{3},$$
$$(\varphi_0,\varphi_1)=4,$$
$$(f,\varphi_0)=\ln 3,(f,\varphi_1)=2,$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix}2 & 4\\ 4 & \frac{26}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ln 3\\ 2\end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases}a_0=1.1410\\ a_1=-0.2958\end{cases}$$

故 $f(x)$ 关于 $\Phi=span\{1,x\}$ 的最佳平方逼近多项式为

$$S^*(x)=a_0+a_1x$$
$$=1.1410-0.2958x$$

$$(2)\because\ f(x)=e^x,[0,1]$$

若 $(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx$

且 $\varphi_0=1,\varphi_1=x,$，则有

$$\|\varphi_0\|_2^2 = 1, \|\varphi_1\|_2^2 = \frac{1}{3},$$

$$(\varphi_0, \varphi_1) = \frac{1}{2},$$

$$(f, \varphi_0) = e - 1, (f, \varphi_1) = 1,$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} a_0 = 0.1878 \\ a_1 = 1.6244 \end{cases}$$

故 $f(x)$ 关于 $\Phi = span\{1, x\}$ 的最佳平方逼近多项式为

$$S^*(x) = a_0 + a_1 x$$
$$= 0.1878 + 1.6244x$$

$(3) \because f(x) = \cos \pi x, x \in [0,1]$

若 $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$

且 $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x,$ ，则有

$$\|\varphi_0\|_2^2 = 1, \|\varphi_1\|_2^2 = \frac{1}{3},$$

$$(\varphi_0, \varphi_1) = \frac{1}{2},$$

$$(f, \varphi_0) = 0, (f, \varphi_1) = -\frac{2}{\pi^2},$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{\pi^2} \end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} a_0 = 1.2159 \\ a_1 = -0.24317 \end{cases}$$

故 $f(x)$ 关于 $\Phi=span\{1,x\}$ 的最佳平方逼近多项式为

$$S^*(x)=a_0+a_1x$$
$$=1.2159-0.24317x$$

$(4)\because f(x)=\ln x, x\in[1,2]$

若 $(f,g)=\int_1^2 f(x)g(x)dx$

且 $\varphi_0=1,\varphi_1=x,$ 则有

$$\|\varphi_0\|_2^2=1,\|\varphi_1\|_2^2=\frac{7}{3},$$
$$(\varphi_0,\varphi_1)=\frac{3}{2},$$
$$(f,\varphi_0)=2\ln 2-1,(f,\varphi_1)=2\ln 2-\frac{3}{4},$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\ln 2-1 \\ 2\ln 2-\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} a_0=-0.6371 \\ a_1=0.6822 \end{cases}$$

故 $f(x)$ 关于 $\Phi=span\{1,x\}$ 最佳平方逼近多项式为

$$S^*(x)=a_0+a_1x$$
$$=-0.6371+0.6822x$$

18。 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$，在 $[-1,1]$ 上按勒让德多项式展开求三次最佳平方逼近多项式。

解：

$\because f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x, x\in[-1,1]$

按勒让德多项式 $\{P_0(x),P_1(x),P_2(x),P_3(x)\}$ 展开

$$(f(x),P_0(x))=\int_{-1}^{1}\sin\frac{\pi}{2}xdx=\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\Big|_{1}^{-1}=0$$

$$(f(x),P_1(x))=\int_{-1}^{1}x\sin\frac{\pi}{2}xdx=\frac{8}{\pi^2}$$

$$(f(x),P_2(x))=\int_{-1}^{1}(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2})\sin\frac{\pi}{2}xdx=0$$

$$(f(x),P_3(x))=\int_{-1}^{1}(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x)\sin\frac{\pi}{2}xdx=\frac{48(\pi^2-10)}{\pi^4}$$

则

$$a_0^*=(f(x),P_0(x))/2=0$$

$$a_1^*=3(f(x),P_1(x))/2=\frac{12}{\pi^2}$$

$$a_2^*=5(f(x),P_2(x))/2=0$$

$$a_3^*=7(f(x),P_3(x))/2=\frac{168(\pi^2-10)}{\pi^4}$$

从而 $f(x)$ 的三次最佳平方逼近多项式为

$$S_3^*(x)=a_0^*P_0(x)+a_1^*P_1(x)+a_2^*P_2(x)+a_3^*P_3(x)$$
$$=\frac{12}{\pi^2}x+\frac{168(\pi^2-10)}{\pi^4}(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x)$$
$$=\frac{420(\pi^2-10)}{\pi^4}x^3+\frac{120(21-2\pi^2)}{\pi^4}$$
$$\approx 1.5531913x-0.5622285x^3$$

19。观测物体的直线运动，得出以下数据：

时间 t(s)	0	0.9	1.9	3.0	3.9	5.0
距离 s(m)	0	10	30	50	80	110

求运动方程。

解：

被观测物体的运动距离与运动时间大体为线性函数关系，从而选择线性方程

$$s=a+bt$$

令 $\Phi=span\{1,t\}$

则

$$\|\varphi_0\|_2^2=6,\|\varphi_1\|_2^2=53.63,$$
$$(\varphi_0,\varphi_1)=14.7,$$
$$(\varphi_0,s)=280,(\varphi_1,s)=1078,$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix}6 & 14.7\\14.7 & 53.63\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}280\\1078\end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} a = -7.855048 \\ b = 22.25376 \end{cases}$$

故物体运动方程为

$$S = 22.25376t - 7.855048$$

20。已知实验数据如下：

x_i	19	25	31	38	44
y_j	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

用最小二乘法求形如 $s = a + bx^2$ 的经验公式，并计算均方误差。

解：

若 $s = a + bx^2$，则

$$\Phi = span\left\{1, x^2\right\}$$

则

$$\|\varphi_0\|_2^2 = 5, \|\varphi_1\|_2^2 = 7277699,$$
$$(\varphi_0, \varphi_1) = 5327,$$
$$(f, \varphi_0) = 271.4, (f, \varphi_1) = 369321.5,$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix} 5 & 5327 \\ 5327 & 7277699 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 271.4 \\ 369321.5 \end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} a = 0.9726046 \\ b = 0.0500351 \end{cases}$$

故 $y = 0.9726046 + 0.0500351x^2$

均方误差为 $\delta = [\sum_{j=0}^{4} (y(x_j) - y_j)^2]^{\frac{1}{2}} = 0.1226$

21。在某佛堂反应中，由实验得分解物浓度与时间关系如下：

时间 t	0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55
浓 度 $y(\times 10^{-4})$	0 1.27 2.16 2.86 3.44 3.87 4.15 4.37 4.51 4.58 4.62 4.64

用最小二乘法求 $y = f(t)$。

解：

观察所给数据的特点，采用方程

$$y = ae^{\frac{-b}{t}},(a,b>0)$$

两边同时取对数，则

$$\ln y = \ln a - \frac{b}{t}$$

取 $\Phi = span\left\{1,-\frac{1}{t}\right\}, S = \ln y, x = -\frac{1}{t}$

则 $S = a^* + b^* x$

$$\|\varphi_0\|_2^2 = 11, \|\varphi_1\|_2^2 = 0.062321,$$
$$(\varphi_0,\varphi_1) = -0.603975,$$
$$(\varphi_0, f) = -87.674095, (\varphi_1, f) = 5.032489,$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix} 11 & -0.603975 \\ -0.603975 & 0.062321 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^* \\ b^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -87.674095 \\ 5.032489 \end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} a^* = -7.5587812 \\ b^* = 7.4961692 \end{cases}$$

因此

$$a = e^{a^*} = 5.2151048$$
$$b = b^* = 7.4961692$$

$$\therefore y = 5.2151048e^{-\frac{7.4961692}{t}}$$

22。给出一张记录 $\{f_k\} = (4,3,2,1,0,1,2,3)$, 用 FFT 算法求 $\{c_k\}$ 的离散谱。

解：

$$\{f_k\} = (4,3,2,1,0,1,2,3),$$

则 $k = 0,1,\cdots,7, N = 8$

$$\omega^0 = \omega^4 = 1,$$

$$\omega^1 = \omega^5 = e^{-\frac{\pi}{4}i},$$

$$\omega^2 = \omega^6 = e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i,$$

$$\omega^3 = \omega^7 = e^{-\frac{3\pi}{4}i},$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7
x_k	4	3	2	1	0	1	2	3
A_1	4	4	4	2ω	4	0	4	$-2\omega^3$
A_2	8	4	0	4	8	$2\sqrt{2}$	0	$-2\sqrt{2}$
C_j	16	$4+2\sqrt{2}$	0	$4-2\sqrt{2}$	0	$4-2\sqrt{2}$	0	$4+2\sqrt{2}$

23，用辗转相除法将 $R_{22}(x)=\dfrac{3x^2+6x}{x^2+6x+6}$ 化为连分式。

解

$$R_{22}(x)=\frac{3x^2+6x}{x^2+6x+6}$$
$$=3-\frac{12x+18}{x^2+6x+6}$$
$$=3-\cfrac{12}{x+\frac{9}{2}-\cfrac{\frac{3}{4}}{x+\frac{3}{2}}}$$
$$=3-\frac{12}{x+4.5}-\frac{0.75}{x+1.5}$$

24。求 $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 处的 $(3,3)$ 阶帕德逼近 $R_{33}(x)$。

解：

由 $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开为

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

得 $C_0=0,$

$C_1=1,$
$C_2=0,$
$C_3=-\dfrac{1}{3!}=-\dfrac{1}{6},$
$C_4=0,$

$$C_5 = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120},$$

$$C_6 = 0,$$

从而

$$-C_1 b_3 - C_2 b_2 - C_3 b_1 = C_4$$
$$-C_2 b_3 - C_3 b_2 - C_4 b_1 = C_5$$
$$-C_3 b_3 - C_4 b_2 - C_5 b_1 = C_6$$

即

$$-\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{120} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{120} \\ 0 \end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} b_3 = 0 \\ b_2 = \frac{1}{20} \\ b_1 = 0 \end{cases}$$

又$\because a_k = \sum_{j=0}^{k-1} C_j b_{k-j} + C_k (k = 0,1,2,3)$

则

$$a_0 = C_0 = 0$$
$$a_1 = C_0 b_1 + C_1 = 0$$
$$a_2 = C_0 b_2 + C_1 b_1 = 0$$
$$a_3 = C_0 b_3 + C_1 b_2 + C_2 b_1 + C_3 = -\frac{7}{60}$$

故

$$R_{33}(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3}{1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3}$$

$$=\frac{x-\frac{7}{60}x^3}{1+\frac{1}{20}x^2}$$

$$=\frac{60x-7x^3}{60+3x^3}$$

25。求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的 $(2,1)$ 阶帕德逼近 $R_{21}(x)$。

解：

由 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开为

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

得

$$C_0=1,$$
$$C_1=1,$$
$$C_2=\frac{1}{2!}=\frac{1}{2},$$
$$C_3=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6},$$

从而

$$-C_2b_1=C_3$$

即

$$-\frac{1}{2}b_1=\frac{1}{6}$$

解得

$$b_1=-\frac{1}{3}$$

又$\because a_k=\sum_{j=0}^{k-1}C_jb_{k-j}+C_k(k=0,1,2)$

则

$$a_0=C_0=1$$

$$a_1=C_0b_1+C_1=\frac{2}{3}$$

$$a_2=C_1b_1+C_2=\frac{1}{6}$$

故

$$R_{21}(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2}{1+b_1x}$$

$$=\frac{1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}x^2}{1-\frac{1}{3}x}$$

$$=\frac{6+4x+x^2}{6-2x}$$

第四章　　数值积分与数值微分

1.确定下列求积公式中的特定参数，使其代数精度尽量高，并指明所构造出的求积公式所具有的代数精度：

$$(1)\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h)+A_0 f(0)+A_1 f(h);$$

$$(2)\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h)+A_0 f(0)+A_1 f(h);$$

$$(3)\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx [f(-1)+2f(x_1)+3f(x_2)]/3;$$

$$(4)\int_{0}^{h} f(x)dx \approx h[f(0)+f(h)]/2+ah^2[f'(0)-f'(h)];$$

解：

求解求积公式的代数精度时，应根据代数精度的定义，即求积公式对于次数不超过 m 的多项式均能准确地成立，但对于 m+1 次多项式就不准确成立，进行验证性求解。

（1）若 $(1)\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h)+A_0 f(0)+A_1 f(h)$

令 $f(x)=1$，则

$$2h=A_{-1}+A_0+A_1$$

令 $f(x)=x$，则

$$0=-A_{-1}h+A_1 h$$

令 $f(x)=x^2$，则

$$\frac{2}{3}h^3=h^2A_{-1}+h^2A_1$$

从而解得

$$\begin{cases} A_0=\frac{4}{3}h \\ A_1=\frac{1}{3}h \\ A_{-1}=\frac{1}{3}h \end{cases}$$

令 $f(x)=x^3$，则

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx=\int_{-h}^{h} x^3dx=0$$

$$A_{-1}f(-h)+A_0 f(0)+A_1 f(h)=0$$

故 $\int_{-h}^{h} f(x)dx=A_{-1}f(-h)+A_0 f(0)+A_1 f(h)$ 成立。

令 $f(x)=x^4$，则

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx = \int_{-h}^{h} x^4 dx = \frac{2}{5}h^5$$

$$A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h) = \frac{2}{3}h^5$$

故此时，

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \neq A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$$

故 $\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$

具有 3 次代数精度。

（2）若 $\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$

令 $f(x)=1$，则

$$4h = A_{-1} + A_0 + A_1$$

令 $f(x)=x$，则

$$0 = -A_{-1}h + A_1 h$$

令 $f(x)=x^2$，则

$$\frac{16}{3}h^3 = h^2 A_{-1} + h^2 A_1$$

从而解得

$$\begin{cases} A_0 = -\frac{4}{3}h \\ A_1 = \frac{8}{3}h \\ A_{-1} = \frac{8}{3}h \end{cases}$$

令 $f(x)=x^3$，则

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)dx = \int_{-2h}^{2h} x^3 dx = 0$$

$$A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h) = 0$$

故 $\int_{-2h}^{2h} f(x)dx = A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$ 成立。

令 $f(x)=x^4$，则

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)dx = \int_{-2h}^{2h} x^4 dx = \frac{64}{5}h^5$$

$$A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h) = \frac{16}{3}h^5$$

故此时，

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \neq A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$$

因此，

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$$

具有 3 次代数精度。

（3）若 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx [f(-1) + 2f(x_1) + 3f(x_2)]/3$

令 $f(x)=1$，则

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2 = [f(-1) + 2f(x_1) + 3f(x_2)]/3$$

令 $f(x)=x$，则

$$0 = -1 + 2x_1 + 3x_2$$

令 $f(x)=x^2$，则

$$2 = 1 + 2x_1^2 + 3x_2^2$$

从而解得

$$\begin{cases} x_1 = -0.2899 \\ x_2 = 0.5266 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x_1 = 0.6899 \\ x_2 = 0.1266 \end{cases}$$

令 $f(x)=x^3$，则

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$$

$$[f(-1) + 2f(x_1) + 3f(x_2)]/3 \neq 0$$

故 $\int_{-1}^{1} f(x)dx = [f(-1) + 2f(x_1) + 3f(x_2)]/3$ 不成立。

因此，原求积公式具有 2 次代数精度。

（4）若 $\int_{0}^{h} f(x)dx \approx h[f(0) + f(h)]/2 + ah^2[f'(0) - f'(h)]$

令 $f(x)=1$，则

$$\int_{0}^{h} f(x)dx = h,$$

$$h[f(0)+f(h)]/2+ah^2[f'(0)-f'(h)]=h$$

令 $f(x)=x$，则

$$\int_0^h f(x)dx=\int_0^h xdx=\frac{1}{2}h^2$$

$$h[f(0)+f(h)]/2+ah^2[f'(0)-f'(h)]=\frac{1}{2}h^2$$

令 $f(x)=x^2$，则

$$\int_0^h f(x)dx=\int_0^h x^2dx=\frac{1}{3}h^3$$

$$h[f(0)+f(h)]/2+ah^2[f'(0)-f'(h)]=\frac{1}{2}h^3-2ah^2$$

故有

$$\frac{1}{3}h^3=\frac{1}{2}h^3-2ah^2$$

$$a=\frac{1}{12}$$

令 $f(x)=x^3$，则

$$\int_0^h f(x)dx=\int_0^h x^3dx=\frac{1}{4}h^4$$

$$h[f(0)+f(h)]/2+\frac{1}{12}h^2[f'(0)-f'(h)]=\frac{1}{2}h^4-\frac{1}{4}h^4=\frac{1}{4}h^4$$

令 $f(x)=x^4$，则

$$\int_0^h f(x)dx=\int_0^h x^4dx=\frac{1}{5}h^5$$

$$h[f(0)+f(h)]/2+\frac{1}{12}h^2[f'(0)-f'(h)]=\frac{1}{2}h^5-\frac{1}{3}h^5=\frac{1}{6}h^5$$

故此时，

$$\int_0^h f(x)dx\neq h[f(0)+f(h)]/2+\frac{1}{12}h^2[f'(0)-f'(h)],$$

因此，$\int_0^h f(x)dx\approx h[f(0)+f(h)]/2+\frac{1}{12}h^2[f'(0)-f'(h)]$

具有 3 次代数精度。

2.分别用梯形公式和辛普森公式计算下列积分：

$(1)\int_0^1 \frac{x}{4+x^2}dx, n=8;$

$(2)\int_0^1 \frac{(1-e^{-x})^{\frac{1}{2}}}{x}dx, n=10;$

$(3)\int_1^9 \sqrt{x}dx, n=4;$

$(4)\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4-\sin^2\varphi}d\varphi, n=6;$

解：

$(1)n=8, a=0, b=1, h=\frac{1}{8}, f(x)=\frac{x}{4+x^2}$

复化梯形公式为

$$T_8=\frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=1}^{7} f(x_k)+f(b)]=0.11140$$

复化辛普森公式为

$$S_8=\frac{h}{6}[f(a)+4\sum_{k=0}^{7} f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{7} f(x_k)+f(b)]=0.11157$$

$(2)n=10, a=0, b=1, h=\frac{1}{10}, f(x)=\frac{(1-e^{-x})^{\frac{1}{2}}}{x}$

复化梯形公式为

$$T_{10}=\frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=1}^{9} f(x_k)+f(b)]=1.39148$$

复化辛普森公式为

$$S_{10}=\frac{h}{6}[f(a)+4\sum_{k=0}^{9} f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{9} f(x_k)+f(b)]=1.45471$$

$(3)n=4, a=1, b=9, h=2, f(x)=\sqrt{x},$

复化梯形公式为

$$T_4=\frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=1}^{3} f(x_k)+f(b)]=17.22774$$

复化辛普森公式为

$$S_4=\frac{h}{6}[f(a)+4\sum_{k=0}^{3} f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{3} f(x_k)+f(b)]=17.32222$$

$(4)n=6, a=0, b=\frac{\pi}{6}, h=\frac{\pi}{36}, f(x)=\sqrt{4-\sin^2\varphi}$

复化梯形公式为

$$T_6=\frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=1}^{5}f(x_k)+f(b)]=1.03562$$

复化辛普森公式为

$$S_6=\frac{h}{6}[f(a)+4\sum_{k=0}^{5}f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{5}f(x_k)+f(b)]=1.03577$$

3。直接验证柯特斯教材公式（2。4）具有 5 交代数精度。

证明：

柯特斯公式为

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]$$

令 $f(x)=1$，则

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{90}$$

$$\frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]=b-a$$

令 $f(x)=x$，则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b xdx=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

$$\frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

令 $f(x)=x^2$，则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b x^2dx=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$$

$$\frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$$

令 $f(x)=x^3$，则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b x^3dx=\frac{1}{4}(b^4-a^4)$$

$$\frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]=\frac{1}{4}(b^4-a^4)$$

令 $f(x)=x^4$，则

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b x^4 dx = \frac{1}{5}(b^5 - a^5)$$

$$\frac{b-a}{90}[7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)] = \frac{1}{5}(b^5 - a^5)$$

令 $f(x) = x^5$，则

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b x^5 dx = \frac{1}{6}(b^6 - a^6)$$

$$\frac{b-a}{90}[7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)] = \frac{1}{6}(b^6 - a^6)$$

令 $f(x) = x^6$，则

$$\int_0^h f(x)dx \neq \frac{b-a}{90}[7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)]$$

因此，该柯特斯公式具有 5 次代数精度。

4。用辛普森公式求积分 $\int_0^1 e^{-x}dx$ 并估计误差。

解：

辛普森公式为

$$S = \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$$

此时，

$$a = 0, b = 1, f(x) = e^{-x},$$

从而有

$$S = \frac{1}{6}(1 + 4e^{-\frac{1}{2}} + e^{-1}) = 0.63233$$

误差为

$$|R(f)| = \left| -\frac{b-a}{180}(\frac{b-a}{2})^4 f^{(4)}(\eta) \right|$$

$$\leq \frac{1}{180} \times \frac{1}{2^4} \times e^0 = 0.00035, \eta \in (0,1)$$

5。推导下列三种矩形求积公式：

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(a) + \frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2;$$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(b) - \frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2;$$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) + \frac{f''(\eta)}{24}(b-a)^3;$$

证明：

$(1)\because f(x)=f(a)+f'(\eta)(x-a),\eta\in(a,b)$

两边同时在$[a,b]$上积分，得

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(a)+f'(\eta)\int_a^b(x-a)dx$$

即

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(a)+\frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$$

$(2)\because f(x)=f(b)-f'(\eta)(b-x),\eta\in(a,b)$

两边同时在$[a,b]$上积分，得

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(a)-f'(\eta)\int_a^b(b-x)dx$$

即

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(b)-\frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$$

$(3)\because f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\eta)}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2,\eta\in(a,b)$

两连边同时在$[a,b]$上积分，得

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})dx+\frac{f''(\eta)}{2}\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})^2dx$$

即

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\eta)}{24}(b-a)^3;$$

6。若用复化梯形公式计算积分$I=\int_0^1 e^x dx$，问区间$[0,1]$应人多少等分才能使截断误差不超过$\frac{1}{2}\times10^{-5}$？若改用复化辛普森公式，要达到同样精度区间$[0,1]$应分多少等分？

解：

采用复化梯形公式时，余项为

$$R_n(f)=-\frac{b-a}{12}h^2f''(\eta),\eta\in(a,b)$$

又$\because I=\int_0^1 e^x dx$

故$f(x)=e^x,f''(x)=e^x,a=0,b=1.$

$$\therefore|R_n(f)|=\frac{1}{12}h^2|f''(\eta)|\le\frac{e}{12}h^2$$

若$\left|R_n(f)\right| \le \frac{1}{2}\times 10^{-5}$，则

$$h^2 \le \frac{6}{e}\times 10^{-5}$$

当对区间$[0,1]$进行等分时，

$$h=\frac{1}{n},$$

故有

$$n \ge \sqrt{\frac{e}{6}\times 10^{-5}} = 212.85$$

因此，将区间 213 等分时可以满足误差要求

采用复化辛普森公式时，余项为

$$R_n(f) = -\frac{b-a}{180}(\frac{h}{2})^4 f^{(4)}(\eta), \eta \in (a,b)$$

又$\because f(x)=e^x,$

$$\therefore f^{(4)}(x)=e^x,$$

$$\therefore \left|R_n(f)\right| = -\frac{1}{2880}h^4 \mid f^{(4)}(\eta) \mid \le \frac{e}{2880}h^4$$

若$\left|R_n(f)\right| \le \frac{1}{2}\times 10^{-5}$，则

$$h^4 \le \frac{1440}{e}\times 10^{-5}$$

当对区间$[0,1]$进行等分时

$$n=\frac{1}{h}$$

故有

$$n \ge (\frac{1440}{e}\times 10^5)^{\frac{1}{4}} = 3.71$$

因此，将区间 8 等分时可以满足误差要求。

7。如果 $f''(x)>0$，证明用梯形公式计算积分 $I=\int_a^b f(x)dx$ 所得结果比准确值 I 大，并说明其几何意义。

解：采用梯形公式计算积分时，余项为

$$R_T = -\frac{f''(\eta)}{12}(b-a)^3, \eta \in [a,b]$$

又$\because f''(x)>0$ 且 $b>a$

$$\therefore R_T < 0$$

又$\because R_T = 1 - T$

$\therefore I < T$

即计算值比准确值大。

其几何意义为， $f''(x) > 0$ 为下凸函数，梯形面积大于曲边梯形面积。

8。用龙贝格求积方法计算下列积分，使误差不超过10^{-5}.

$$(1)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-x}dx$$

$$(2)\int_0^{2\pi} x\sin x dx$$

$$(3)\int_0^3 x\sqrt{1+x^2}dx.$$

解：

$$(1) I = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-x}dx$$

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$
0	0.7717433			
1	0.7280699	0.7135121		
2	0.7169828	0.7132870	0.7132720	
3	0.7142002	0.7132726	0.7132717	0.7132717

因此$I = 0.713727$

$$(2) I = \int_0^{2\pi} x\sin x dx$$

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$
0	3.451313×10^{-6}	
1	8.628283×10^{-7}	$-4.446923 \times 10^{-21}$

因此$I \approx 0$

$$(3) I = \int_0^3 x\sqrt{1+x^2}dx$$

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$	$T_4^{(k)}$	$T_5^{(k)}$
0	14.2302495					
1	11.1713699	10.1517434				
2	10.4437969	10.2012725	10.2045744			
3	10.2663672	10.2072240	10.2076207	10.2076691		
4	10.2222702	10.2075712	10.2075943	10.2075939	10.2075936	
5	10.2112607	10.2075909	10.2075922	10.2075922	10.2075922	10.2075922

因此$I \approx 10.2075922$

9。用$n=2,3$的高斯-勒让德公式计算积分

$$\int_1^3 e^x \sin x dx.$$

解：

$$I=\int_1^3 e^x \sin x dx.$$

$\because x \in [1,3]$, 令$t=x-2$，则$t \in [-1,1]$

用$n=2$的高斯—勒让德公式计算积分

$$I \approx 0.5555556 \times [f(-0.7745967)+f(0.7745967)]+0.8888889 \times f(0)$$
$$\approx 10.9484$$

用$n=3$的高斯—勒让德公式计算积分

$$I \approx 0.3478548 \times [f(-0.8611363)+f(0.8611363)]$$
$$+0.6521452 \times [f(-0.3399810)+f(0.3399810)]$$
$$\approx 10.95014$$

10 地球卫星轨道是一个椭圆，椭圆周长的计算公式是

$$S=a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-(\frac{c}{a})^2 \sin^2 \theta} d\theta,$$

这是a是椭圆的半径轴，c 是地球中心与轨道中心（椭圆中心）的距离，记 h 为近地点距离，H 为远地点距离，R=6371（km）为地球半径，则

$$a=(2R+H+h)/2, c=(H-h)/2.$$

我国第一颗地球卫星近地点距离 h=439(km)，远地点距离 H=2384(km)。试求卫星轨道的周长。

解：

$$\because R=6371, h=439, H=2384$$

从而有。

$$a=(2R+H+h)/2=7782.5$$
$$c=(H-h)/2=972.5$$
$$S=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-(\frac{c}{a})^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$
0	1.564640		
1	1.564646	1.564648	
2	1.564646	1.564646	1.564646

$I \approx 1.564646$

$S \approx 48708(km)$

即人造卫星轨道的周长为48708km

11。证明等式

$$n\sin\frac{\pi}{n} = \pi - \frac{\pi^3}{3!n^2} + \frac{\pi^5}{5!n^4} - \cdots$$

试依据 $n\sin(\frac{\pi}{n})(n = 3,6,12)$ 的值，用外推算法求 π 的近似值。

解

若 $f(n) = n\sin\frac{\pi}{n}$,

又 $\because \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots$

$\therefore$ 此函数的泰勒展式为

$f(n) = n\sin\frac{\pi}{n}$

$= n[\frac{\pi}{n} - \frac{1}{3!}(\frac{\pi}{n})^3 + \frac{1}{5!}(\frac{\pi}{n})^5 - \cdots]$

$= \pi - \frac{\pi^3}{3!n^2} + \frac{\pi^5}{5!n^4} - \cdots$

$T_n^{(k)} \approx \pi$

当 $n = 3$ 时，$n\sin\frac{\pi}{n} = 2.598076$

当 $n = 6$ 时，$n\sin\frac{\pi}{n} = 3$

当 $n = 12$ 时，$n\sin\frac{\pi}{n} = 3.105829$

由外推法可得

n	$T_0^{(n)}$	$T_1^{(n)}$	$T_2^{(n)}$
3	2.598076		
6	3.000000	3.133975	
9	3.105829	3.141105	3.141580

故 $\pi \approx 3.14158$

12。用下列方法计算积分 $\int_1^3 \frac{dy}{y}$，并比较结果。

(1)龙贝格方法；

(2)三点及五点高斯公式；

(3)将积分区间分为四等分，用复化两点高斯公式。
解

$$I=\int_1^3\frac{dy}{y}$$

(1)采用龙贝格方法可得

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$	$T_4^{(k)}$
0	1.333333				
1	1.166667	1.099259			
2	1.116667	1.100000	1.099259		
3	1.103211	1.098726	1.098641	1.098613	
4	1.099768	1.098620	1.098613	1.098613	1.098613

故有 $I\approx 1.098613$
(2)采用高斯公式时

$$I=\int_1^3\frac{dy}{y}$$

此时 $y\in[1,3]$,

令 $x=y-z$, 则 $x\in[-1,1]$,

$$I=\int_{-1}^1\frac{1}{x+2}dx,$$
$$f(x)=\frac{1}{x+2},$$

利用三点高斯公式，则

$$I=0.5555556\times[f(-0.7745967)+f(0.7745967)]+0.8888889\times f(0)$$
$$\approx 1.098039$$

利用五点高斯公式，则

$$I\approx 0.2369239\times[f(-0.9061798)+f(0.9061798)]$$
$$+0.4786287\times[f(-0.5384693)+f(0.5384693)]+0.5688889\times f(0)$$
$$\approx 1.098609$$

(3)采用复化两点高斯公式

将区间 $[1,3]$ 四等分，得

$$I=I_1+I_2+I_3+I_4$$
$$=\int_1^{1.5}\frac{dy}{y}+\int_{1.5}^2\frac{dy}{y}+\int_2^{2.5}\frac{dy}{y}+\int_{2.5}^3\frac{dy}{y}$$

作变换 $y=\frac{x+5}{4}$，则

$$I_1=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x+5}dx,$$
$$f(x)=\frac{1}{x+5},$$
$$I_1\approx f(-0.5773503)+f(0.5773503)\approx 0.4054054$$

作变换 $y=\frac{x+7}{4}$，则

$$I_2=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x+7}dx,$$
$$f(x)=\frac{1}{x+7},$$
$$I_2\approx f(-0.5773503)+f(0.5773503)\approx 0.2876712$$

作变换 $y=\frac{x+9}{4}$，则

$$I_3=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x+9}dx,$$
$$f(x)=\frac{1}{x+9},$$
$$I_3\approx f(-0.5773503)+f(0.5773503)\approx 0.2231405$$

作变换 $y=\frac{x+11}{4}$，则

$$I_4=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x+11}dx,$$
$$f(x)=\frac{1}{x+11},$$
$$I_4\approx f(-0.5773503)+f(0.5773503)\approx 0.1823204$$

因此，有

$$I\approx 1.098538$$

13.用三点公式和积分公式求 $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$ 在 $x=1.0,1.1$，和 1.2 处的导数值，并估计误差。$f(x)$ 的值由下表给出：

x	1.0	1.1	1.2
F(x)	0.2500	0.2268	0.2066

解：

$$f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$$

由带余项的三点求导公式可知

$$f'(x_0)=\frac{1}{2h}[-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)]+\frac{h^2}{3}f'''(\xi)$$

$$f'(x_1)=\frac{1}{2h}[-f(x_0)+f(x_2)]-\frac{h^2}{6}f'''(\xi)$$

$$f'(x_2)=\frac{1}{2h}[f(x_0)-4f(x_1)+3f(x_2)]+\frac{h^2}{3}f'''(\xi)$$

又$\because$ $f(x_0)=0.2500, f(x_1)=0.2268, f(x_2)=0.2066,$

$$\therefore f'(x_0)\approx\frac{1}{2h}[-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)]=0.247$$

$$f'(x_1)\approx\frac{1}{2h}[-f(x_0)+f(x_2)]=-0.217$$

$$f'(x_2)=\frac{1}{2h}[f(x_0)-4f(x_1)+3f(x_2)]=-0.187$$

又$\because$ $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$

$$\therefore f'''(x)=\frac{-24}{(1+x)^5}$$

又$\because$ $x\in[1.0,1.2]$

$$\therefore \left|f'''(\xi)\right|\le 0.75$$

故误差分别为

$$\left|R(x_0)\right|=\left|\frac{h^2}{3}f'''(\xi)\right|\le 2.5\times10^{-3}$$

$$\left|R(x_1)\right|=\left|\frac{h^2}{6}f'''(\xi)\right|\le 1.25\times10^{-3}$$

$$\left|R(x_2)\right|=\left|\frac{h^2}{3}f'''(\xi)\right|\le 2.5\times10^{-3}$$

利用数值积分求导，

设$\varphi(x)=f'(x)$

$$f(x_{k+1})=f(x_k)+\int_{x_k}^{x_{k+1}}\varphi(x)dx$$

由梯形求积公式得

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}}\varphi(x)dx=\frac{h}{2}[\varphi(x_k)+\varphi(x_{k+1})]$$

从而有

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + \frac{h}{2}[\varphi(x_k) + \varphi(x_{k+1})]$$

故

$$\varphi(x_0) + \varphi(x_1) = \frac{2}{h}[f(x_1) - f(x_0)]$$

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) = \frac{2}{h}[f(x_2) - f(x_1)]$$

又$\because f(x_{k+1}) = f(x_{k-1}) + \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \varphi(x)dx$

且$\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \varphi(x)dx = h[\varphi(x_{k-1}) + \varphi(x_{k+1})]$

从而有

$$f(x_{k+1}) = f(x_{k-1}) + h[\varphi(x_{k-1}) + \varphi(x_{k+1})]$$

故$\varphi(x_0) + \varphi(x_2) = \frac{1}{h}[f(x_2) - f(x_0)]$

即

$$\begin{cases} \varphi(x_0) + \varphi(x_1) = -0.464 \\ \varphi(x_1) + \varphi(x_2) = -0.404 \\ \varphi(x_0) + \varphi(x_2) = -0.434 \end{cases}$$

解方程组可得

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = -0.247 \\ \varphi(x_1) = -0.217 \\ \varphi(x_2) = -0.187 \end{cases}$$

第 5 章　数值分析课后习题全解

第 5 章：解线性方程组的直接方法

1．证明：由消元公式及 A 的对称性得

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} a_{j1} = -\frac{a_{j1}}{a_{11}} a_{1i} = a_{ji}^{2}, i, j = 2, 3, \ldots\ldots\ldots, n$$

故 A_2 对称

2．证明：（1）因 A 对称正定，故

$$a_{ii} = (Ae_i, e_i) > 0, i = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

其中 $e_i =$（0,…,0,1,0,...,0）^{T} 为第 i 个单位向量.

(2)由 A 的对称性及消元公式得

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} =$$

$$a_{ji} - \frac{a_{j1}}{a_{11}} a_{1i} = a_{ji}^{(2)}, \text{ I,j=2,…,n}$$

故 A_2 也对称.

又 $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} = L_1 A \ A L_1^T$$

其中 $$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & & \\ . & & . & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & \ldots & & 1 \end{bmatrix}$$

显然 L_1 非其异,从而对任意的 $x \neq 0$,有

$L_1^T X \neq 0$,(x, L_1 A L_1^T X)=(L_1^T x, A L_1^T X)>0　(由 A 的正定性)

故 $L_1 A L_1^T$ 正定.

又 $L_1 A L_1^T = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$,而 a_{11}>0,故 A_2 正定.

3.证明　由矩阵乘法简单运算即得证.

4.解　设有分解

$$\begin{bmatrix}4&2&&\\3&-2&1&\\&2&5&3\\&&-1&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1&&&\\3&\alpha_2&1&\\&2&\alpha_3&3\\&&-1&\alpha_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\beta_1&&\\&1&\beta_2&\\&&1&\beta_3\\&&&1\end{bmatrix}$$

由公式

$$\begin{cases}b_1=a_{1,}c_1=\alpha_1\beta_1\\ b_i=\alpha_i\beta_{i-1}+\alpha_i,i=2,3,\cdots,n\\ c_i=\alpha_i\beta_i,i=2,3,\cdots.n-1\end{cases}$$

其中 b_i,a_i,c_i 分别是系数矩阵的主对角线元素及下边和上边的次对角线元素.故有

$$\begin{cases}\alpha_1=4,\beta_1=\frac{1}{2}\\ \alpha_2=-\frac{7}{2},\beta_2=-\frac{2}{7}\\ \alpha_3=\frac{39}{7},\beta_3=\frac{7}{13}\\ \alpha_4=\frac{85}{13}\end{cases}$$

从而有

$$\begin{bmatrix}4&2&&\\3&-2&1&\\&2&5&3\\&&-1&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&&&\\3&-\frac{7}{2}&&\\&2&\frac{39}{7}&\\&&-1&\frac{85}{13}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&&\\&1&-\frac{2}{7}&\\&&1&\frac{7}{13}\\&&&1\end{bmatrix}$$

故　$y_1=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$，　$y_2=\dfrac{2-3y_1}{-\frac{7}{2}}=\dfrac{5}{7}$

$y_3=\dfrac{10-2y_2}{\frac{39}{7}}=\dfrac{20}{13}$，　$y_4=\dfrac{5+y_3}{\frac{85}{13}}=1$

故 $x_4=1,x_3=\dfrac{20}{13}-\dfrac{7}{13}x_4=1,x_2=\dfrac{5}{7}+\dfrac{2}{7}x_3=1,x_1=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}x_2=1$

5.　解　(1)设 U 为上三角阵

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

因 $u_{nn}x_n=d_n$，故 $x_n=\dfrac{d_n}{u_{nn}}$.

因 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & \vdots & 0 & 1 & 0 & -3 \\ & & & & 0 & -2 & 1 & 7 \\ & & & & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} u_{ii}x_i+\sum_{j=i+1}^{n}u_{ij}x_j=d_i$,故

$$x_i=\frac{d_i-\sum_{j=i+1}^{n}u_{ij}x_i}{u_{ii}}\text{ ,i=n-1,n-2,}\cdots\text{,1}$$

当 U 为下三角阵时

$$\begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ u_{21} & u_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

得, $x_1=\dfrac{d_1}{u_{11}}$, $\quad x_1=\dfrac{d_i-\sum_{j=1}^{i-1}u_{ij}x_j}{u_{ii}}$,i=2,3,…,n.

(2)除法次数为 n,乘法次数为

1+2+…+(n-1)=n(n-1)/2

故总的乘法次数为 n+n(n-1)/2=n(n+1)/2.

(3)设 U 为上三角阵,U^{-1}=S,侧 S 也是上三角阵.由

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & s_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & s_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

得 $\qquad s_{ii}=\dfrac{1}{u_{ii}}$, $\qquad$ i=1,2,…,n

$$s_{ij}=-\frac{\sum_{k=i+1}^{j}u_{ik}s_{kj}}{u_{ii}}\text{ ,j=i+1,i+2,…,n; i=n-1,n-2,…,1}$$

当 U 为下三角阵时,由

$$\begin{bmatrix} d_{11} & & & \\ d_{21} & d_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{11} & & & \\ s_{21} & s_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

得 $$s_{ii}=\frac{1}{u_{ii}},i=1,2,\ldots,n$$

$$s_{ij}=-\frac{\sum_{k=1}^{i-1}u_{ik}s_{kj}}{u_{ii}},i=2,3,\ldots,n;j=1,2,\ldots,i-1$$

6. 证明 (1)因 A 是对称正定阵,故存在唯一的分解 A=LL^T,其中 L 是具有正对角元素的下三角阵.从而

$$A^{-1}=(LL^T)^{-1}=(L^T)^{-1}L^{-1}=(L^{-1})^T L^{-1}$$

$$(A^{-1})^T=\left[(L^{-1})^T L^{-1}\right]^T=(L^{-1})^T L^{-1}=A^{-1}$$

故 A^{-1} 是对称矩阵.

又 L^{-1} 非奇异,故对任意的 $x\neq 0$,有 $L^{-1}x\neq 0$,故

$$x^T A^{-1}X=x^T(L^{-1})^T L^{-1}x=(L^{-1}x)^T(L^{-1}x)>0$$

故 A^{-1} 是对称正定矩阵,即 A^{-1} 也对称正定.

(2)由 A 对称正盯,故 A 的所有顺序主子式均不为零,从而 A 有唯一的 Doolittle 分解 A=$\overline{L}$U.又

$$U=\begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ & u_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{u_{12}}{u_{11}} & \cdots & \frac{u_{1n}}{u_{11}} \\ & 1 & \cdots & \frac{u_{2n}}{u_{22}} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}=DU_0$$

其中 D 为对三角阵, U_0 为单位上三角阵,于是

$$A=U\overline{L}=D\overline{L}U_0$$

又 $$A=A^T=U_O^T D\overline{L}^T$$

由分解的唯一性即得

$$U_O^T=\overline{L}$$

从而有 $A=D\bar{L}\bar{L}^T$

又由 A 的对称正定性知

$$d_1=D_1>0,\quad d_i=\frac{D_i}{D_{i-1}}>0 \quad (i=2,3,\ldots,n)$$

故 $D=\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}=$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{d_1} & & & \\ & \sqrt{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{d_n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{d_1} & & & \\ & \sqrt{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{d_n} \end{bmatrix}=D^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}$$

故 $A=\bar{L}D\bar{L}^T=\bar{L}D^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}\bar{L}^T=(\bar{L}D^{\frac{1}{2}})(\bar{L}D^{\frac{1}{2}})^T=LL^T$

其中 $L=\bar{L}D^{\frac{1}{2}}$ 为三角元为正的下三角矩阵.

7. 解 $[A|I]=\left[\begin{array}{cccc:cccc} 2 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ ->

$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -8 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -11 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$ ->

$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -8 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 19 & 0 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$ ->

$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 11 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{85}{3} & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{25}{3} \end{array}\right]$ ->

$$
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{85} & \frac{10}{17} & -\frac{23}{85} & -\frac{16}{17} \\
0 & 1 & 0 & 0 & \frac{33}{85} & -\frac{6}{17} & \frac{41}{85} & \frac{13}{17} \\
0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{19}{85} & \frac{15}{17} & -\frac{3}{85} & -\frac{8}{17} \\
0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{85} & -\frac{1}{17} & \frac{4}{85} & \frac{5}{17}
\end{array}\right] ->
$$

$$
A^{-1}=\begin{bmatrix}
\frac{4}{85} & \frac{10}{17} & -\frac{23}{85} & -\frac{16}{17} \\
\frac{33}{85} & -\frac{6}{17} & \frac{41}{85} & \frac{13}{17} \\
-\frac{19}{85} & \frac{5}{17} & -\frac{3}{85} & -\frac{8}{17} \\
-\frac{3}{85} & -\frac{1}{17} & \frac{4}{85} & \frac{5}{17}
\end{bmatrix}=
$$

$$
\begin{bmatrix}
0.0470589 & 0.5882353 & -0.2705882 & -0.9411765 \\
0.3882353 & -0.3529412 & 0.4823529 & 0.7647059 \\
-0.2235294 & 0.2941176 & -0.0352941 & -0.4705882 \\
-0.0352941 & -0.0588235 & 0.0470589 & 0.2941176
\end{bmatrix}
$$

8. 解　设有分解

$$
\begin{bmatrix}
2 & -1 & & & \\
-1 & 2 & -1 & & \\
 & -1 & 2 & -1 & \\
 & & -1 & 2 & -1 \\
 & & & -1 & 2
\end{bmatrix}=
$$

$$
\begin{bmatrix}
\alpha_1 & & & & \\
-1 & \alpha_2 & & & \\
 & -1 & \alpha_3 & & \\
 & & -1 & \alpha_4 & \\
 & & & -1 & \alpha_5
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\beta_1 & & & & \\
1 & \beta_2 & & & \\
 & 1 & \beta_3 & & \\
 & & 1 & \beta_4 & \\
 & & & 1 & \beta_5
\end{bmatrix}
$$

由公式

$$
\begin{cases}
b_1=\alpha_{1,}c_1=\alpha_1\beta_1 \\
b_i=\alpha_i\beta_{i-1}+\alpha_i,(i=2,3,4,5) \\
c_i=\alpha_i\beta_i,(i=2,3,4)
\end{cases}
$$

其中b_i， a_i， c_i分别是系数矩阵的主角线元素及其下边和上边的次对角线元

素，则有

$$\alpha_1=2,\quad \alpha_2=\frac{3}{2},\quad \alpha_3=\frac{4}{3},\quad \alpha_4=\frac{5}{4},\quad \alpha_5=\frac{6}{5}$$

$$\beta_1=-\frac{1}{2},\quad \beta_2=-\frac{2}{3},\quad \beta_3=-\frac{3}{4},\quad \beta_4=-\frac{4}{5}$$

由

$$\begin{bmatrix} 2 & & & & \\ -1 & \frac{3}{2} & & & \\ & -1 & \frac{4}{3} & & \\ & & -1 & \frac{5}{4} & \\ & & & -1 & \frac{6}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

得 $y_1=\frac{1}{2}$， $y_2=\frac{1}{3}$， $y_3=\frac{1}{4}$， $y_4=\frac{1}{5}$， $y_5=\frac{1}{6}$

由

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & & \\ & 1 & -\frac{2}{3} & & \\ & & 1 & -\frac{3}{4} & \\ & & & 1 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

得 $x_5=\frac{1}{6}$， $x_4=\frac{1}{3}$， $x_3=\frac{1}{2}$， $x_2=\frac{2}{3}$， $x_1=\frac{5}{6}$

9．解　设

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & d_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} \\ & 1 & l_{32} \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

由矩阵乘法得

$$d_1=2,\quad l_{21}=-\frac{1}{2},\quad l_{31}=\frac{1}{2}$$

$$d_2=-\frac{5}{2},\quad l_{32}=-\frac{7}{5}$$

$$d_3=\frac{27}{5}$$

由

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ \frac{1}{2} & -\frac{7}{5} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

得 $y_1=4$， $y_2=7$， $y_3=\frac{69}{5}$

由

$$\begin{bmatrix} 2 & & \\ & -\frac{5}{2} & \\ & & \frac{27}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & 1 & -\frac{7}{5} \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ \frac{69}{5} \end{bmatrix}$$

得 $$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & 1 & -\frac{7}{5} \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & & \\ & -\frac{5}{2} & \\ & & \frac{27}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ \frac{69}{5} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{14}{5} \\ \frac{23}{9} \end{bmatrix}$$

故 $x_3=\frac{23}{9}$=2.555 555 6， $x_2=\frac{7}{9}$=0.777 777 8， $x_1=\frac{10}{9}$=1.111 111 1

10． 解 A 中 Δ_2=0，故不能分解。但 det(A)=-10 $\neq$ 0,故若将 A 中第一行与第三行交换，则可以分解，且分解唯一。

B 中， $\Delta_2=\Delta_3$=0，但它仍可以分解为

$$B=\begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & l_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ 0 & 0 & & -1 \\ 0 & 0 & l_{32} & -2 \end{bmatrix}$$

其中 l_{32} 为一任意常数，且 U 奇异，故分解且分解不唯一，

对 C， $\Delta_i \neq 0$，i=1,2,3,故 C 可分解且分解唯一。

$$C=\begin{bmatrix}1 & & \\ 2 & 1 & \\ 6 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 6 \\ & 1 & 3 \\ & & 1\end{bmatrix}$$

11． 解

$$\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|=1.1$$

$$\|A\|_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|=0.8$$

$$\|A\|_F=(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{0.71}=0.842\ 615\ 0$$

$$A^TA=\begin{bmatrix}0.6 & 0.1\\ 0.5 & 0.3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.6 & 0.5\\ 0.1 & 0.3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.37 & 0.33\\ 0.33 & 0.34\end{bmatrix}$$

$$\lambda_{\max}(A^TA)=0.685\ 340\ 7$$

故 $$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}=0.827\ 853\ 1$$

12．证明 （1）有定义知

$$\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|\le\sum_{i=1}^{n}|x_i|=$$

$$\|x\|_1\le\sum_{i=1}^{n}\max_{1\le i\le n}|x_i|=\sum_{i=1}^{\infty}\|x\|_\infty=n\|x\|_\infty$$

故 $$\|x\|_\infty\le\|x\|_1\le n\|x\|_\infty$$

（2）由范数定义，有

$$\|A\|_2^2=\lambda_{\max}(A^TA)\le$$

$$\lambda_1(A^TA)+\lambda_2(A^TA)+\cdots+\lambda_n(A^TA)=tr(A^TA)=$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_{i1}^2+\sum_{i=1}^{n}a_{i2}^2+\cdots+\sum_{i=1}^{n}a_{in}^2=$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2=\|A\|_F^2$$

$$\|A\|_2^2=\lambda_{\max}(A^TA)\ge$$

$$\frac{1}{n}\left[\lambda_1(A^TA)+\lambda_2(A^TA)+\cdots+\lambda_n(A^TA)\right]=$$

$$\frac{1}{n}\|A\|_F^2$$

故 $$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_F \le \|A\|_2 \le \|A\|_F$$

13．　证明　（1）因 P 非奇异，故对任意的 x$\neq$0，有 $P_X \neq 0$，故 $\|X\|_p=\|P_x\|\ge 0$，当且仅当 x=0 时，有 $\|x\|_p=\|P_x\|=0$ 成立。

（2 对任意　$\alpha\in R^1$，有

$$\|\alpha x\|_p=\|P_{ax}\|=|\alpha|\|P_x\|=|\alpha|\|X\|_p$$

（3）$\|x+y\|_p=\|P_{(x+y)}\|=\|P_x+P_y\|\le$

$$\|P_x\|+\|P_y\|=\|x\|_p+\|y\|_p$$

故 $\|x\|_p$ 是 R^n 上的一种向量范数。

14．证明（1）因 A 正定对称，故当 x=0 时，$\|x\|_A$=0，而当 x$\neq$0 时，$\|x\|_A$ $=(x^TAx)^{\frac{1}{2}}>0$。

（2）对任意实数 c，有

$$\|cx\|_A=\sqrt{(cx)^TA(cx)}=|c|\sqrt{x^AAx}=|c|\|x\|_A$$

（3）因 A 正定，故有分解 A=L L^T，则

$$\|x\|_A=(x^TAx)^{\frac{1}{2}}=(x^TLL^Tx)^{\frac{1}{2}}=((L^Tx)^T(L^Tx))^{\frac{1}{2}}=\|L^Tx\|_2$$

故对任意向量 x 和 y，总有

$$\|x+y\|_A=\|L^T(x+y)\|_2=\|L^Tx+L^Ty\|_2\le$$

$$\|L^Tx\|_2+\|L^Ty\|_2=\|x\|_A+\|y\|_A$$

综上所知，$\|x\|_A=(x^TAx)^{\frac{1}{2}}$ 是一种向量范数。

15．证明　因为

$$\|A\|_s=\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_s}{\|x\|_s}$$

由向量范数的等价性知，存在常数 $C_1^{'},C_2^{'}$>0,使对任意 x,有

$$C_1^{'}\|Ax\|_s \le \|Ax\|_t \le C_2^{'}\|Ax\|_s$$

$$C_1^{'}\|x\|_s \le \|x\|_t \le C_2^{'}\|x\|_s$$

故
$$\frac{C_1^{'}\|x\|_s}{C_2^{'}\|x\|_s} \le \frac{\|Ax\|_t}{\|x\|_t} \le \frac{C_2^{'}\|Ax\|_s}{C_1^{'}\|x\|_s}$$

令 $\frac{C_1^{'}}{C_2^{'}} = C_1, \frac{C_2^{'}}{C_1^{'}} = C_2$,则有

$$C_1\frac{\|Ax\|_s}{\|x\|_s} \le \frac{\|Ax\|_t}{\|x\|_t} \le C_2\frac{\|Ax\|_s}{\|x\|_s}$$

$$C_1\max_{x\ne0}\frac{\|Ax\|_s}{\|x\|_s} \le \max_{x\ne0}\frac{\|Ax\|_t}{\|x\|_t} \le C_2\max_{x\ne0}\frac{\|Ax\|_s}{\|x\|_s}$$

即
$$C_1\|A\|_s \le \|A\|_t \le C_2\|A\|_s$$

16. 证明 $\|A^{-1}\|_2^2\|A\|_2^2 = Cond[(A)_2]^2$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max_{x\ne0}\frac{\|A^{-1}x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \xlongequal{A^{-1}x=y} \max_{x\ne0}\frac{\|y\|_\infty}{\|Ay\|_\infty} = \max_{y\ne0}\frac{1}{\frac{\|Ay\|_\infty}{\|y\|_\infty}}$$

故
$$\frac{1}{\|A^{-1}\|_\infty} = \min_{y\ne0}\frac{\|Ay\|_\infty}{\|y\|_\infty}$$

17. 证明 设 $\lambda \ne 0$，则

$$\|A\|_\infty = \begin{cases} 3|\lambda|, |\lambda| \ge \frac{2}{3} \\ 2, |\lambda| \le \frac{2}{3} \end{cases}$$

又
$$A^{-1} = \frac{1}{\lambda}\begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ -1 & 2\lambda \end{bmatrix}$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \frac{2|\lambda|+1}{|\lambda|}$$

故

$$\mathrm{Cond(A)}_\infty=\|\mathrm{A}^{-1}\|_\infty\|A\|_\infty=\begin{cases}6|\lambda|+3, |\lambda|\ge\frac{2}{3}\\ 2(2+\frac{1}{|\lambda|}), |\lambda|\le\frac{2}{3}\end{cases}$$

从而当$|\lambda|=\frac{2}{3}$时，即$|\lambda|=\pm\frac{2}{3}$时，$\mathrm{Cond(A)}_\infty$有最小值，且

$$\min\mathrm{Cond(A)}_\infty=7$$

18. 解 $\mathrm{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-98 & 99\\ 99 & 98\end{bmatrix}, \|A\|_\infty=199, \|A^{-1}\|_\infty=199$

$$Cond(A)_2=\|A^{-1}\|_\infty\|A\|_\infty=39601$$

$$A^TA=\begin{bmatrix}19801 & 19602\\ 19602 & 19405\end{bmatrix}$$

故 $Cond(A)_2=\|A^{-1}\|_2\|A\|_2=$

$$\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^TA)}{\lambda_{\min}(A^TA)}}=39\ 205.9745$$

19．证明 因 A 正交，故$A^TA=AA^T=I, A^{-1}=A^T$，从而有

$$\|A\|_2=\sqrt{\rho(A^TA)}=\sqrt{\rho(I)}=1$$

$$\|A^{-1}\|_2=\|A^T\|_2=\sqrt{\rho(AA^T)}=\sqrt{\rho(I)}=1$$

故 $$Cond(A)_2=\|A^{-1}\|_2\|A\|_2=1$$

20．证明 $Cond(AB)=\|(AB)^{-1}\|\|AB\|\le\|A^{-1}\|\|B^{-1}\|\|A\|\|B\|=$

$$\|A^{-1}\|\|A\|\|B^{-1}\|\|B\|=Cond(A)Cond(B)$$

21．证明（1）$(A^TA)^T=A^T(A^T)^T=A^TA$

故A^TA为对称矩阵。

又 A 非奇异，故对任意向量$x\ne0$，有$Ax\ne0$，从而有

$$x^TA^TAx=(Ax)^T(Ax)>0$$

即A^TA为对称正定矩阵。

（2） $Cond(A^T A)_2 = \left\|(A^T A)^{-1}\right\|_2 \left\|A^T A\right\|_2 =$

$$\sqrt{\lambda_{\max}[((A^T A)^{-1})^T (A^T A)^{-1}}\sqrt{\lambda_{\max}[(A^T A)^T (A^T A)]} =$$

$$\sqrt{\lambda_{\max}[((A^T A)^{-1})^2]}\sqrt{\lambda_{\max}[(A^T A)^2]} =$$

$$\sqrt{\lambda_{\max}^2 (A^T A)^{-1}}\sqrt{\lambda_{\max}^2 (A^T A)} =$$

$$[\sqrt{\lambda_{\max} (A^T A)^{-1}}]^2[\sqrt{\lambda_{\max} (A^T A)}]^2 =$$

$$\left\|A^{-1}\right\|_2^2 \left\|A\right\|_2^2 = [Cond(A)_2]^2$$

第六章课后习题解答

1.解：(a)因系数矩阵按行严格对角占优，故雅可比法与高斯-塞德尔均收敛。

(b)雅可比法的迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\dfrac{2}{5}x_2^{(k)} - \dfrac{1}{5}x_3^{(k)} - \dfrac{12}{5} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}x_1^{k} - \dfrac{1}{2}x_3^{(k)} + 5 \\ x_3^{(k+1)} = -\dfrac{1}{5}x_1^{(k)} + \dfrac{3}{10}x_2^{(k)} + \dfrac{3}{10} \end{cases}$$

取$x^{(0} = (1,1,1)^T$, 迭代到17次达到精度要求

$$x^{(17)} = (-4.0000186, 2.9999915, 2.0000012)^T$$

高斯-塞德尔法的迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\dfrac{2}{5}x_2^{(k)} - \dfrac{1}{5}x_3^{(k)} - \dfrac{12}{5} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}x_1^{(k+1)} - \dfrac{1}{2}x_3^{(k)} + 5 \\ x_3^{(k+1)} = -\dfrac{1}{5}x_1^{(k+1)} + \dfrac{3}{10}x_2^{(k+1)} + \dfrac{3}{10} \end{cases}$$

取$x^{(0)} = (1,1,1)^T$, 迭代到8次达到精度要求

$$x^{(8)} = (-4.0000186, 2.9999915, 2.0000012)^T$$

2：解(a)雅可比法的迭代矩阵

$$B_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -0.4 & -0.4 \\ -0.4 & 0 & -0.8 \\ -0.4 & -0.8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - B_J| = (\lambda - 0.8)(\lambda^2 + 0.8\lambda - 0.32)$$

$\rho(B_J) = 1.0928203 > 1$, 故雅可比迭代法不收敛

高斯-塞德尔法迭代矩阵

$$B_S = (D-L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & -0.4 & -0.4 \\ 0 & 0.16 & -0.64 \\ 0 & 0.032 & 0.672 \end{pmatrix}$$

$\rho(B_S) \le \|B_S\|_\infty = 0.8 < 1$

故高斯-塞德尔迭代法收敛。

(b)雅可比法的迭代矩阵

$$B_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$|\lambda I - B_J| = \lambda^3$, $\rho(B_J) = 0 < 1$

故雅可比迭代法收敛。

高斯-塞德尔法的迭代矩阵

$$B_S = (D-L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$|\lambda I - B_S| = \lambda(\lambda - 2)^2$, $\rho(B_S) = 2 > 1$

故高斯-塞德尔法不收敛。

3：证明

必要条件：由$\lim\limits_{k\to\infty} A_k=A$，知$\lim\limits_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)}=a_{ij}$，从而有$||A_K-A||\to 0$（K ？）.

故对任意的x，有$||A_k x-Ax||.\ ||A_k-A||\ \ ||x||\ \ 0$（k ）

即 $A_K x \to Ax$， $\lim\limits_{k\to\infty} A_K x=Ax$.

充分条件： 对任意的x $\in R^n$，有$A_K x\ \ Ax$（k ），取$x_i=(0,\ldots 0,\underset{i}{1},0,\ldots 0)^T$

$(i=1,2,\ldots,n)$

$A_k x_i=(a_{1i}^{(k)},a_{2i}^{(k)},\ldots,a_{ni}^{(k)})^T \to Ax_i(k\ \ ?)$

$Ax_i=(a_{1i},a_{2i},\ldots,a_{ni})^T$

故$a_{ji}^{(k)}$ ？ $a_{ji}(j\ \ 1,2,\ldots,n;i=1,2,\ldots n)$

即A_k ？ $A,\lim\limits_{k\to\infty} A_k\ \ A.$

4.解：不一定，因其谱半径$\rho(B_J)$不一定小于1。

对习题2(a)，A对称，又$V_1=1〉0,V_2=0.84〉0,V_3=|A|=0.296〉0$，故A正定，但其雅可比迭代法不收敛

5.解答见例6-4

6.解：

SOR迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=x_1^{(k)}+w(-\frac{12}{5}-x_1^{(k)}-\frac{2}{5}x_2^{(k)}-\frac{1}{5}x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)}=x_2^{(k)}+w(5+\frac{1}{4}x_1^{(k+1)}-x_2^{(k)}-\frac{1}{2}x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)}=x_3^{(k)}+w(\frac{3}{10}-\frac{1}{5}x_1^{(k+1)}+\frac{3}{10}x_2^{(k+1)}-x_{3(k)}) \end{cases}$$

取初始值$x^0=(1,1,1)^T$，计算如表.

K	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	-2.6000000	3.5650000	1.8005500
2	-4.0274990	3.1400652	2.0228224
3	-4.0572814	2.9908481	2.0101219
4	-4.0042554	2.9935725	2.0000427
5	-3.9981193	2.9997612	1.9996013
6	--3.9996542	3.0002334	1.9999609
7	-4.0000424	3.0000314	2.0000122
8	-4.0000177	2.9999937	2.0000027

因$||x^{(8)}-x^{(7)}||_\infty=0.000377<10^{-4}$，故取$x^{(8)}=(-4.0000177,2.9999937,2.0000027)^T$.

由$|m|<1, |1-wl(A)|<1$得

$0<w<\frac{2}{l(A)}$

故当$0<w<\frac{2}{b}$时，更有$0<w<\frac{2}{l(A)}$，从而有$|m|<1$，$1(B)<1$，迭代格式收敛.

8.证明：当$-\frac{1}{2}<a<1$时，由

$\det\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 1\end{pmatrix}=1-a^2>0, \det(A)=(1-a)^2(1+2a)>0$

故A是正定的.又雅可比法迭代矩阵

$$B_J=\begin{pmatrix}0 & -a & -a\\ -a & 0 & -a\\ -a & -a & 0\end{pmatrix}$$

$$\det(lI-B_J)=\begin{vmatrix}l & a & a\\ a & l & a\\ a & a & l\end{vmatrix}=l^3-3la^2+2a^3=(l-a)^2(l+2a)$$

故$l(B_J)=|2a|$，故当$-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$时，雅可比迭代法收敛.

9.证明：G相似与它的若当标准行J，即存在可逆阵P，使 $G=P^{-1}JP$

由于G的特征值全为零，故J一定有如下形式

$$J=\begin{pmatrix}J_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & J_r\end{pmatrix}, J_i=\begin{pmatrix}0 & 1 & \\ & \ddots & 1\\ & & a_n\end{pmatrix}_{n_i\times n_i}, \sum_{i=1}^{r}n_i=n$$

方程组$x=Gx+g$等价于$(I-G)x=g$，由于$l(G)=0$，故$l(I-G)=1-l(G)=1?0$，

从而I-G非奇异，即$(I-G)x=g$有唯一解x^*.于是

$x^*=Gx^*+g$

与所述迭代格式相减，有$x^{(k+1)}-x^*=G(x^{(k)}-x^*)$

故$x^{(n)}-x^*=G^n(x^{(0)}-x^*)$

又$G^n=P^{-1}J^nP=0$

故$x^{(n)}-x^*=o$，即$x^{(n)}=x^*$

因此，至多迭代n次即可收敛到方程组的解.

10. 证明：因A严格对角占优，故$a_{ii}?0(i \quad 1,2,\ldots,n)$，且$A$非奇异.

SOR法的迭代矩阵$L_w=(D-wL)^{-1}((1-w)D+wU)$

其中$A=D-L-U$，而$D,-L,-U$分别为A的对角，严格下三角与严格上三角. 只需证明$0<w?1$时，

$l(L_w)<1$即可.

用反证法：设L_w有一个特征值l满足$|l|^3 \ 1$，则有

$\det(lI-L_w)=0$

从而有$\det\{(D-wL)^{-1}[(D-wL)-\frac{1}{l}((1-w)D+wU)]\}=0$

$\det\{(D-wL)^{-1}?\det[(1 \quad \frac{1}{l}(1-w))D-wL-\frac{w}{l}U]=0$

因对A严格对角占优，哥$\det(D-wL)^{-1}?0$

另$C=(1-\frac{1}{l}(1-w))D-wL-\frac{w}{l}U$，则

$|C_{ii}|=|1-\frac{1}{l}(1-w)| \ |a_{ii}|? [1 \quad \frac{1}{|l|}(1-w)] \ |a_{ii}|? w|a_{ii}| \quad w\sum_{j=1, j\neq i}^{n}|a_{ij}|? w\sum_{j=1}^{i-1}|a_{ij}| \quad \frac{w}{|l|}\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|$

这表明C在$0<w \ 9 \ 1$时也严格对角占优，故$\det C \quad 0$. 这与$\det(lI-L_w)=0$矛盾，故假设不成立，从而$|l|<1$，

即$l(L_w)<1$，SOR迭代法收敛

第七章

1、用二分法求方程 $x^2-x-1=0$ 的正根,要求误差小于 0.05.

解　设 $f(x)=x^2-x-1, f(1)=-1<0, f(2)=1>0$,故[1,2]为 $f(x)$ 的有根区间.又

$f'(x)=2x-1$,故当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 单增,当 $x>\frac{1}{2}$ 时 $f(x)$ 单增.而

$f(\frac{1}{2})=-\frac{5}{4}, f(0)=-1$,由单调性知 $f(x)=0$ 的惟一正根 $x^*\in(1,2)$.根据二分法的误差估计式(7.2)知要求误差小于 0.05,只需 $\frac{1}{2^{k+1}}<0.05$,解得 $k+1>5.322$,故至少应二分 6 次.具体计算结果见表 7-7.

表 7-7

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$的符号
0	1	2	1.5	-
1	1.5	2	1.75	+
2	1.5	1.75	1.625	+
3	1.5	1.625	1.5625	-
4	1.5625	1.625	1.59375	-
5	1.59375	1.625	1.609375	-

-

即 $x^*\approx x_5=1.609375$.

2、为求 $x^3-x^2-1=0$ 在 $x_0=1.5$ 附近的一个根,设将方程改写成下列等价形式,并建立相应的迭代公式:

(1) $x=1+\frac{1}{x^2}$,迭代公式 $x_{k+1}=1+\frac{1}{{x_k}^2}$;

(2) $x^3=1+x^2$,迭代公式 $x_{k+1}=(1+{x_k}^2)^{\frac{1}{3}}$;

(3) $x^2=\frac{1}{x-1}$,迭代公式 $x_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{x_k-1}}$.

试分析每种迭代公式的收敛性,并选取一种公式求出具有四位有效数字的近似根.

解　取 $x_0=1.5$ 的邻域[1.3,1.6]来考察.

(1)当 $x\in[1.3,1.6]$ 时, $\varphi(x)=1+\frac{1}{x^2}\in[1.3,1.6], |\varphi'(x)|=|-\frac{2}{x^3}|\le\frac{2}{1.3^3}=L<1$,故迭代公式

$x_{k+1}=1+\frac{1}{x_k^{\ 2}}$ 在 $[1.3,1.6]$ 上整体收敛.

(2)当 $x\in[1.3,1.6]$ 时

$$\varphi(x)=(1+x^2)^{1/3}\in[1.3,1.6]$$

$$|\varphi'(x)|=\frac{2}{3}\left|\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{2}{3}}}\right|<\frac{2}{3}\frac{1.6}{(1+1.3^2)^{\frac{2}{3}}}\le L=0.522<1$$

故 $x_{k+1}=(1+x_k^{\ 2})^{\frac{1}{3}}$ 在[1.3,1.6]上整体收敛.

(3) $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}},|\varphi'(x)|=\left|\frac{-1}{2(x-1)^{3/2}}\right|>\frac{1}{2(1.6-1)}>1$ 故 $x_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{x_k-1}}$ 发散.

由于(2)的 L 叫小,故取(2)中迭代式计算.要求结果具有四位有效数字,只需

$$|x_k-x^*|\le\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|<\frac{1}{2}\times10^{-3}$$

即

$$|x_k-x_{k-1}|<\frac{1-L}{L}\times\frac{1}{2}\times10^{-3}<0.5\times10^{-3}$$

取 $x_0=1.5$ 计算结果见表 7-8.

表 7-8

k		k	
1	1.481248034	4	1.467047973
2	1.472705730	5	1.466243010
3	1.468817314	6	1.465876820

由于 $|x_6-x_5|<\frac{1}{2}\times10^{-3}$,故可取 $x^*\approx x_6=1.466$.

3、比较求 $e^x+10x-2=0$ 的根到三位小数所需的计算量:

(1)在区间[0,1]内用二分法;

(2)用迭代法 $x_{k+1}=\frac{2-e^{x_k}}{10}$,取初值 $x_0=0$.

解 (1)因 $x^*\in[0,1],f(0)<0,f(1)>0$,故 $0<x^*<1$,用二分法计算结果见表 7-9.

表 7-9 x_k x_k

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$的符号	$\frac{1}{2^{k+1}}$

0	0	1	0.5	+	0.5
1	0	0.5	0.25	+	0.25
2	0	0.25	0.125	+	0.125
3	0	0.125	0.0625	-	0.0625
4	0.0625	0.125	0.09375	+	0.03125
5	0.0625	0.09375	0.078125	-	0.015625
6	0.0778125	0.09375	0.0859375	-	0.0078125
7	0.0859375	0.09375	0.08984375	-	0.00390625
8	0.08984375	0.09375	0.091796875	+	0.001953125
9	0.08984375	0.091796875	0.090820312	+	0.000976562
10	0.08984375	0.090820312	0.090332031	-	0.000488281
11	0.090332031	0.090820312	0.090576171	+	0.00024414
12	0.090332031	0.090576171	0.090454101	-	0.00012207
13	0.090454101	0.090576171	0.090515136	-	0.000061035
14	0.090515136	0.090576171	0.090545653	+	0.000030517

此时 $|x_{14}-x^*| \le \frac{1}{2^{15}} = 0.000030517 < \frac{1}{2}\times 10^{-4}, x^* \approx x_{14}$ 具有三位有效数字.

(2)当 $x \in [0, 0.5]$ 时, $\varphi(x) \in [0, 0.5], |\varphi'(x)| = \frac{1}{10}|-e^x| \le L = 0.825$,故迭代试

$x_{k+1} = \frac{1}{10}(2-e^{x_k})$ 在[0,0.5]上整体收敛.取 $x_0 = 0$,迭代计算结果如表 7-10 所示.

表 7-10

k	x_k	k	x_k
1	0.1	4	0.090512616
2	0.089482908	5	0.090526468
3	0.090639135	6	0.090524951

此时 $|x_6 - x^*| \le \frac{L}{1-L}|x_6 - x_5| \le 0.00000720 < \frac{1}{2}\times 10^{-4}$,故 $x^* \approx x_6$ 精确到三位小数.

4、给定函数 $f(x)$,设对一切 x , $f'(x)$ 存在且 $0 < m \le f'(x) \le M$,证明对于范围

$0<\lambda<\dfrac{2}{M}$ 内的任意定数 λ,迭代过程 $x_{k+1}=x_k-\lambda f(x_k)$ 均收敛于 $f(x)=0$ 的根 x^*.

证明　由于 $f'(x)>0$, $f(x)$ 为单增函数,故方程 $f(x)=0$ 的根 x^* 是惟一的(假定方程有根 x^*).迭代函数 $\varphi(x)=x-\lambda f(x), |\varphi'(x)|=|1-\lambda f'(x)|$,.由 $0<m\le f'(x)\le M$ 及

$0<\lambda<\dfrac{2}{M}$ 得, $0<\lambda m\le\lambda f'(x)\le\lambda M<2, -1<1-\lambda M\le 1-\lambda f'(x)\le 1-\lambda m<1$,故

$|\varphi'(x)|\le L=\max\{|1-\lambda m|,|1-\lambda M|\}<1$,由此可得

$$|x_k-x^*|\le L|x_{k-1}-x^*|\le\ldots\le L^k|x_0-x^*|\to 0(k\to\infty)$$

即 $\lim\limits_{k\to\infty}k=x^*$.

5、用斯蒂芬森迭代法计算第 2 题中(2)的近似根,精确到 10^{-5} .

解　记第 2 题中(2)的迭代函数 $\varphi_2(x)=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$,(3)的迭代函数为 $\varphi_3(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$,利用迭代式(7.11),计算结果见表 7-11.

表 7-11

k	加速 φ_2（x）的结果 x_k	k	加速 φ_3（x）的结果 x_k
0	1.5	0	1.5
1	1.465558485	1	1.467342286
2	1.465571233	2	1.465576085
3	1.465571232	3	1.465571232
		4	1.465571232

6、设 $\varphi(x)=x-p(x)f(x)-q(x)f^2(x)$,试确定函数 $p(x)$ 和 $q(x)$,使求解 $f(x)=0$ 且以 $\varphi(x)$ 为迭代函数的迭代法至少三阶收敛.

解　要求 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 三阶收敛到 $f(x)=0$ 的根 x^*,根据定理 7.4,应有 $\varphi(x^*)=x^*, \varphi'(x^*)=0, \varphi''(x^*)=0$.于是由

$$x^*=x^*-p(x^*)f(x^*)-q(x^*)f^2(x^*)=x^*$$
$$\varphi'(x^*)=1-p(x^*)f'(x^*)=0$$
$$\varphi''(x^*)=-2p'(x^*)f'(x^*)-p(x^*)f''(x^*)-2q(x^*)[f'(x^*)]^2=0$$

得

$$p(x^*)=\frac{1}{f'(x^*)}, q(x^*)=\frac{1}{2}\frac{f''(x^*)}{[f'(x^*)]^3}$$

故取

$$p(x)=\frac{1}{f'(x)}, q(x)=\frac{1}{2}\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$$

即迭代至少三阶收敛.

7、用下列方法求 $f(x)=x^3-3x-1=0$ 在 $x_0=2$ 附近的根.根的准确值 $x^*=1.87938524\ldots$,要求计算结果准确到四位有效数字.

(1)用牛顿法;

(2)用弦截法,取 $x_0=2, x_1=1.9$;

(3)用抛物线法,取 $x_0=1, x_1=3, x_2=2$.

解 $f(1)<0, f(2)>0, f(x)=3x^2-3=3(x^2-1)\geq 0, f''(x)=6x>0$,对 $\forall x\in[1,2].$

(1)取 $x_0=2$,用牛顿迭代法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^{\ 3}-3x_k-1}{3x_k^{\ 2}-3}=\frac{2x_k^{\ 3}+1}{3(x_k^{\ 2}-1)}$$

计算得 $x_1=1.888888889, x_2=1.879451567, |x_2-x^*|<\frac{1}{2}\times 10^{-3}$,故 $x^*\approx x_2=1.879451567$.

(2)取 $x_2=2, x_1=1.9$,利用弦截法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{(x_k-x_{k-1})f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}$$

得, $x_2=1.981093936, x_3=1.880840630, x_4=1.879489903, |x_4-x^*|<\frac{1}{2}\times 10^{-3}$,故取 $x^*\approx x_4=1.879489903$.

(3) $x_0=1, x_1=3, x_2=2$.抛物线法的迭代式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{2f(x_k)}{w+sign(w)\sqrt{w^2-4f(x_k)f[x_k,x_{k-1},x_{k-2}]}}$$
$$w=f[x_k,x_{k-1}]+f[x_k,x_{k-1},x_{k-2}](x_k-x_{k-1})$$

迭代结果为: $x_3=1.953967549, x_4=1.87801539, x_5=1.879386866$ 已达四位有效数字.

8、分别用二分法和牛顿迭代法求 $x-\tan x=0$ 的最小正根.

解　显然 $x^*=0$ 满足 $x-\tan x=0$.另外当 $|x|$ 较小时, $\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+...+\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+...$,故

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时, $\tan x>x$,因此,方程 $x-\tan x=0$ 的最小正根应在 $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ 内.

记 $f(x)=x-\tan x, x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$,容易算得 $f(4)=2.842...>0, f(4.6)=-4.26...<0$,因此

[4,4.6]是 $f(x)=0$ 的有限区间.

对于二分法,计算结果见表 7-12.

表 7-12

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$的符号
0	4.0	4.6	4.3	+
1	4.3	4.6	4.45	+
2	4.45	4.6	4.525	-
3	4.45	4.525	4.4875	+
4	4.4875	4.525	4.50625	-
5	4.4875	4.50625	4.496875	-
6	4.4875	4.496875	4.4921875	+
7	4.4921875	4.496875	4.49453125	-
8	4.4921875	4.49453125	4.493359375	+
9	4.493359375	4.49453125	4.493445313	-

此时 $|x_9-x^*|<\frac{1}{2^{10}}=\frac{1}{1024}<10^{-3}$.

若用牛顿迭代法求解,由于 $f'(x)=-(\tan x)^2<0, f''(x)=-2\tan x\frac{1}{\cos^2 x}<0$,故取

$x_0=4.6$,迭代计算结果如表 7-13 所示.

表 7-13

k	x_k	k	x_k
1 2 3	4.545732122 4.506145588 4.49417163	4 5 6	4.493412197 4.493409458 4.493409458

所以 $x-\tan x=0$ 的最小正根为 $x^*\approx 4.493409458$.

9、研究求 $\sqrt{a}$ 的牛顿公式

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{a}{x_k}), x_0>0$$

证明对一切且序列是递减的.

证法一　用数列的办法,因 $x_0>0$ 由 $x_k=\frac{1}{2}(x_{k-1}+\frac{a}{x_{k-1}})$ 知 $x_k>0$,且

$$x_k=\frac{1}{2}(\sqrt{x_{k-1}}+\sqrt{\frac{a}{x_{k-1}}})^2+\sqrt{a}, k=1,2,3,\dots$$

.又由

$$\frac{x_{k+1}}{x_k}=\frac{1}{2}+\frac{a}{2a}=1, \forall k\ge 1$$

故 $x_{k+1}\le x_k$,即 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 单减有下界 $\sqrt{a}$.根据单调原理知, $\{x_k\}$ 有极限.易证起极限为 $\sqrt{a}$.

证法二　设 $f(x)=x^2-a(a>0)$.易知 $f(x)=0$ 在 $[0,+\infty)$ 内有惟一实根 $x^*=\sqrt{a}$.对 $f(x)$ 应用牛顿迭代法,得

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{a}{x_k}), k=0,1,2,\dots$$

利用例 7-9 的结论知,当 $x_0>\sqrt{a}$ 时, $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 单减有下界 $\sqrt{a}$,且 $\lim_{k\to\infty}x_k=\sqrt{a}$.当 $x_0\in(0,\sqrt{a})$ 时,

$$x_1=\frac{1}{2}(x_0+\frac{a}{x_0})=\frac{1}{2}[\sqrt{x_0}-\frac{a}{\sqrt{x_0}}]^2+\sqrt{a}>\sqrt{a}$$

此时,从 x_1 起, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 单减有下界 $\sqrt{a}$,且极限为 $\sqrt{a}$.

10、对于 $f(x)=0$ 的牛顿公式 $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$,证明

$$R_k=\frac{x_k-x_{k-1}}{(x_{k-1}-x_{k-2})^2}$$

收敛到 $-\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$,这里 x^* 为 $f(x)=0$ 的根.

证明见例 7-10.

11、用牛顿迭代法和求重根的牛顿迭代法(7.15)和(7.16)(书中式(4.13),(4.14))计算方程 $f(x)=(\sin x-\frac{x}{2})^2=0$ 的一个近似根,准确到 10^{-5},初始值 $x_0=\frac{\pi}{2}$.

解 $f(x)=(\sin x-\frac{x}{2})^2$ 的根 x^* 为 2 重根,即

$$f'(x)=2(\sin x-\frac{x}{2})(\cos x-\frac{1}{2})$$

用牛顿法迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{(\sin x_k-\frac{x_k}{2})^2}{2(\sin x-\frac{x}{2})(\cos x-\frac{1}{2})}=$$

$$x_k-\frac{\sin x_k-\frac{x_k}{2}}{2\cos x_k-1},k=0,1,3,\ldots$$

令 $x_0=\frac{\pi}{2}$,则 $x_1=1.785398,x_2=1.844562,\ldots$,迭代到

$x_{20}=1.895494,|x^*-1.89549|<10^{-5}$.

用求重根的迭代公式(7.15),迭代迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{\sin x_k-\frac{x_k}{2}}{\cos x_k-\frac{1}{2}},k=0,1,2,\ldots$$

取 $x_0=\frac{\pi}{2}$,则 $x_1=2.000000,x_2=1.900996,x_3=1.895512,x_4=1.895494,x_5=1.895494$.

四次迭代达到上面 x_{20} 的结果.

若用公式(7.16),则有

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2-f(x_k)f''(x_k)}$$

将 $f(x), f'(x)$ 及 $f''(x)=2(\cos x-\frac{1}{2})^2-2\sin x(\sin x-\frac{1}{2}x)$ 代入上述迭代公式,得

$$x_{k+1}=x_k-\frac{(\sin x_k-\frac{x_k}{2})(\cos x_k-\frac{1}{2})}{(\cos x_k-\frac{1}{2})^2+\sin x_k(\sin x_k-\frac{x_k}{2})}$$

取 $x_0=\frac{\pi}{2}$,得 $x_1=1.801749, x_2=1.889630, x_3=1.895474, x_4=1.895494, x_5=1.895494$.

结果与公式(7.15)的相同.

12、应用牛顿迭代法于方程 $x^3-a=0$,导出求立方根 $\sqrt[3]{a}$ 的迭代公式,并讨论其收敛性.

解　设 $f(x)=x^3-a, f'(x)=3x^2, f''(x)=6x$,牛顿迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^{\ 3}-a}{3x_k^{\ 2}}=\frac{2x_k^{\ 3}+a}{3x_k^{\ 2}}, k=0,1,2,...$$

当 $x>0, f'(x)>0, f''(x)>0$;当 $x<0$ 时, $f'(x)>0, f''(x)<0$,,因此,对于 $a>0$,当

$x_0>\sqrt[3]{a}$ 时 $f(x_0)f''(x_0)>0$,根据例 7-9 的结论知,牛顿序列 $\{x_k\}$ 收敛到 $\sqrt[3]{a}$.当

$x_0\in(0,\sqrt[3]{a})$ 时,

$$x_1-\sqrt[3]{a}=\frac{2x_0^{\ 3}+a}{3x_0^{\ 2}}-\sqrt[3]{a}=\frac{(\sqrt[3]{a}-x_0)^2}{3x_0^{\ 2}}(\sqrt[3]{a}+2x_0)>0, x_1>\sqrt[3]{a}$$

从 x_1 起,牛顿序列 $\{x_k\}$ 收敛到 $\sqrt[3]{a}$.

对于 $a<0$,当 $x_0<\sqrt[3]{a}<0$ 时 $f(x_0)f''(x_0)>0$,.由牛顿法产生的序列 $\{x_k\}$ 单增趋于 $\sqrt[3]{a}$.当

$x_0\in(\sqrt[3]{a},0)$ 时,

$$x_1-\sqrt[3]{a}=\frac{(\sqrt[3]{a}-x_0)^2}{3x_0^{\ 2}}(\sqrt[3]{a}+2x_0)<0, x_1<\sqrt[3]{a}$$

之后迭代也收敛.

当 $a=0$ 时,迭代式变为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^{\ 3}}{3x_k^{\ 2}}=\frac{2}{3}x_k$$

该迭代对任何 $x_0\in R$ 均收敛,但收敛速度是线性的.

13、应用牛顿法于方程 $f(x)=1-\frac{a}{x^2}=0$,导出求 $\sqrt{a}$ 的迭代公式,并用此公式求 $\sqrt{115}$ 的值.

解 $f(x)=1-\frac{a}{x^2}, f'(x)=\frac{2a}{x^3}, x\neq 0$,所以牛顿迭代公式有

$$x_{k+1}=x_k-\frac{1-\frac{a}{x_k^{\ 2}}}{\frac{2a}{x_k^{\ 3}}}=\frac{1}{2}x_k(3-\frac{x_k^{\ 2}}{a}), k=0,1,2,\ldots$$

易知 $f''(x)=\frac{6a}{x^4}<0$.故取 $x_0\in(0,\sqrt{a})$ 时,迭代收敛.

对于 $\sqrt{115}$,取 $x_0=9$,迭代计算,得

$$\begin{aligned}&x_1=10.33043478, x_2=10.70242553, x_3=10.7237414,\\&x_4=10.72380529, x_5=10.72380529\end{aligned}$$

故 $\sqrt{115}\approx 10.72380529$.

14、应用牛顿法于方程 $f(x)=x^n-a=0$ 和 $f(x)=1-\frac{a}{x^n}=0$,分别导出求 $\sqrt[n]{a}$ 的迭代公式,并求

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-x_{k+1}}{(\sqrt[n]{a}-x^k)^2}$$

解 对于 $f(x)=x^n-a, f'(x)=nx^{n-1}$,因此牛顿迭代法为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^{\ n}-a}{nx_k^{\ n-1}}=\frac{1}{n}[(n-1)x_k+\frac{a}{x_k^{\ n-1}}], k=0,1,2,\ldots$$

根据定理 7.4 知

$$(\varphi^n(\sqrt[n]{a})=\frac{n-1}{\sqrt[n]{a}})$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(\sqrt[n]{a}-x_{k+1})}{(\sqrt[n]{a}-x_k)^2}=-\frac{1}{2}\frac{n-1}{\sqrt[n]{a}}$$

对于 $f(x)=1-\frac{a}{x^n}, f'(x)=\frac{na}{x^{n+1}}$,牛顿法公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=\frac{x_k}{n}[(n+1)-\frac{x_k^{\ n}}{a}], k=0,1,2,\ldots$$

根据定理 7.4 知

$$(\varphi^n(\sqrt[n]{a})=-\frac{n+1}{\sqrt[n]{a}})$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-x_{k+1}}{(\sqrt[n]{a}-x_k)^2}=\frac{1}{2}\frac{n+1}{\sqrt[n]{a}}$$

15、证明迭代公式

$$x_{k+1}=\frac{x_k(x_k{}^2+3a)}{3x_k{}^2+a}$$

是计算 $\sqrt{a}$ 的三阶方法.假定初值 x_0 充分靠近根 $x*=\sqrt{a}$,求

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{a}-x_{k+1}}{(\sqrt{a}-x_k)^2}$$

证明　记 $\varphi(x)=\dfrac{x(x^2+3a)}{3x^2+a}$,则迭代式为 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 且 $\varphi(\sqrt{a})=\sqrt{a}$.

由 $\varphi(x)$ 的定义,有

$$(3x^2+a)\varphi(x)=x(x^2+3a)$$

对上式两端连续求导三次,得

$$6x\varphi(x)+(3x^2+a)\varphi'(x)=3x^2+3a$$
$$6\varphi(x)+12x\varphi'(x)+(3x^2+a)\varphi''(x)=6x$$
$$18\varphi'(x)+18x\varphi''(x)+(3x^2+a)\varphi'''(x)=6$$

代 $x=\sqrt{a}$ 依次入上三式,并利用 $\varphi(\sqrt{a})=\sqrt{a}$,得

$$\varphi'(\sqrt{a})=0,\varphi''(\sqrt{a})=0,\varphi'''(\sqrt{a})=\frac{3}{2a}\neq 0$$

所以由定理 7.4 知,迭代公式是求 $\sqrt{a}$ 的三阶方法且

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{a}-x_{k+1}}{(\sqrt{a}-x_k)^2}=\frac{1}{3!}\cdot\frac{3}{2a}=\frac{1}{4a}$$

16、用牛顿法解方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2=4\\x^2-y^2=1\end{cases}$$

取 $(x^{(0)},y^{(0)})^T=(1.6,1.2)^T$.

解　记 $f_1(x,y)=x^2+y^2-4,f_2(x,y)=x^2-y^2-1$,则

$$F'(x,y)=\begin{bmatrix}2x & 2y\\ 2x & -2y\end{bmatrix},[F'(x,y)]^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4x} & \frac{1}{4x}\\ \frac{1}{4y} & -\frac{1}{4y}\end{bmatrix}$$

牛顿迭代法为

$$\begin{pmatrix}x^{(k+1)}\\ y^{(k+1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^{(k)}\\ y^{(k)}\end{pmatrix}-[F'(x^{(k)},y^{(k)})]^{-1}\begin{pmatrix}f_1(x^{(k)},y^{(k)})\\ f_2(x^{(k)},y^{(k)})\end{pmatrix}$$

代入初值 $(x^{(0)},y^{(0)})^T=(1.6,1.2)^T$,迭代计算,得

$$\begin{pmatrix}x^{(1)}\\ y^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.581250000\\ 1.225000000\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x^{(2)}\\ y^{(2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.58113834\\ 1.224744898\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}x^{(3)}\\ y^{(3)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.581138830\\ 1.224744871\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x^{(4)}\\ y^{(4)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.58138830\\ 1.224744871\end{pmatrix}$$

第八章　常微分方程初值问题数值解法

1、**解**：欧拉法公式为

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)=y_n+h(x_n{}^2+100y_n{}^2),n=0,1,2$$

代 $y_0=0$ 入上式，计算结果为

$$y(0.1)\approx y_1=0.0,y(0.2)\approx y_2=0.0010,y(0.3)\approx y_3=0.00501$$

2、**解**：改进的欧拉法为

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{2}h[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_n+hf(x_n,y_n))]$$

将 $f(x,y)=x^2+x-y$ 代入上式，得

$$y_{n+1}=(1-h+\frac{h^2}{2})y_n+\frac{h}{2}[(1-h)x_n(1+x_n)+(1+x_{n+1})x_{n+1}]$$

同理，梯形法公式为

$$y_{n+1}=\frac{2-h}{2+h}y_n+\frac{h}{2+h}[x_n(1+x_n)+x_{n+1}(1+x_{n+1})]$$

将 $y_0 = 0, h = 0.1$ 代入上二式,，计算结果见表 9—5

表　9—5

x_n	改进欧拉 y_n	$\lvert y(x_n) - y_n \rvert$	梯形法 y_n	$\lvert y(x_n) - y_n \rvert$
0．1	0．005500	$0.337418036 \times 10^{-3}$	0．005238095	$0.755132781 \times 10^{-4}$
0．2	0．021927500	$0.658253078 \times 10^{-3}$	0．021405896	$0.136648778 \times 10^{-3}$
0．3	0．050144388	$0.962608182 \times 10^{-3}$	0．049367239	$0.185459653 \times 10^{-3}$
0．4	0．090930671	$0.125071672 \times 10^{-2}$	0．089903692	$0.223738443 \times 10^{-3}$
0．5	0．144992257	$0.152291668 \times 10^{-2}$	0．143722388	$0.253048087 \times 10^{-3}$

可见梯形方法比改进的欧拉法精确。

3、证明：梯形公式为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

代 $f(x, y) = -y$ 入上式，得

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[-y_n - y_{n+1}]$$

解得

$$y_{n+1} = (\frac{2-h}{2+h})y_n = (\frac{2-h}{2+h})^2 y_{n-1} = \ldots = (\frac{2-h}{2+h})^{n+1} y_0$$

因为 $y_0 = 1$，故

$$y_n = (\frac{2-h}{2+h})^n$$

对 $\forall x > 0$，以 h 为步长经 n 步运算可求得 $y(x)$ 的近似值 y_n，故 $x = nh, n = \frac{x}{h}$,代入上式有

$$y_n = (\frac{2-h}{2+h})^{\frac{x}{h}}$$

$$\lim_{h\to 0} y_n = \lim_{h\to 0}(\frac{2-h}{2+h})^{\frac{x}{h}} = \lim_{h\to 0}(1-\frac{2h}{2+h})^{\frac{x}{h}} = \lim_{h\to 0}[(1-\frac{2h}{2+h})^{\frac{2+h}{2h}}]^{\frac{2h}{2+h}\frac{x}{h}} = e^{-x}$$

4、解： 令 $y(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$，则有初值问题

$$y^{'} = e^{x^2}, y(0)=0$$

对上述问题应用欧拉法，取 h=0.5, 计算公式为

$$y_{n+1} = y_n + 0.5e^{x_n^{\ 2}}, n=0,1,2,3$$

由 $y(0)=y_0=0,$ 得

$$y(0.5)\approx y_1 = 0.5, y(1.0)\approx y_2 = 1.142012708$$
$$y(1.5)\approx y_3 = 2.501153623, y(2.0)\approx y_4 = 7.245021541$$

5、解： 四阶经典龙格-库塔方法计算公式见式（9.7）。对于问题（1），

$f(x,y)=x+y$；对于问题（2），$f(x,y)=\frac{3y}{1+x}$。取 h=0.2, $y_0=y(0)=1$，

分别计算两问题的近似解见表 9-6。

表 9-6

x_n	（1）的解 y_n	（2）的解 y_n
0.2	1.242800000	1.727548209
0.4	1.583635920	2.742951299
0.6	2.044212913	4.094181355
0.8	2.651041652	5.829210728
1.0	3.436502273	7.996012143

6、证明： 根据定义 9.2，只要证明 $T_{n+1}=o(h^3)$ 即可。而

$$T_{n+1} = y(x+h) - y(x) - h\varphi(x,y,h)$$

$$\varphi(x,y,h)=\frac{1}{2}[f(x+th,y+thy'(x))+$$
$$f(x+(1-t)h,y+(1-t)hy'(x))]$$

因此只须将 $y(x+h)$ 和 $\varphi(x,y,h)$ 都在 x 处展开即可得到余项表达式：

$$f(x+th,y+thy'(x))=f(x,y)+th\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+thy'(x)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\mathrm{o}(h^2)$$

$$f(x+(1-t)h,y+(1-t)hy'(x))=f(x,y)+(1-t)h\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$
$$+(1-t)hy'(x)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\mathrm{o}(h^2)$$

所以

$$T_{n+1}=y(x)+hy'(x)+\frac{1}{2}h^2y''(x)+\frac{1}{3!}h^3y'''(\xi)-y(x)-$$
$$\frac{1}{2}h[2f(x,y)+h\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+hy'(x)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\mathrm{o}(h^2)]=\mathrm{o}(h^3)$$

故对任意参数 t，题中方法是二阶的。

7、解：

$$T_{n+1}=y(x_{n+1})-y(x_n)-hf(x_n+\frac{h}{2},y(x_n)+\frac{h}{2}y'(x_n))=$$

$$y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+\frac{1}{3!}h^3y'''(x_n)+\mathrm{o}(h^4)-$$

$$y(x_n)-h\{f(x_n,y_n)+\frac{h}{2}\frac{\partial f(x_n,y(x_n))}{\partial x}+$$

$$\frac{1}{2!}[(\frac{h}{2})^2\frac{\partial^2 f(x_n,y(x_n))}{\partial x^2}+\frac{h}{2}\frac{h}{2}y'(x_n)\frac{\partial^2 f(x_n,y(x_n))}{\partial x\partial y}+$$

$$(\frac{h}{2}y'(x_n))^2\frac{\partial^2 f(x_n,y(x_n))}{\partial y^2}]+\mathrm{o}(h^3)\}=\frac{h^3}{3!}y'''(x_n)-$$

$$\frac{h}{8}[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+(y'(x))^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}]_{(x_n,y(x_n))}+\mathrm{o}(h^4)=\mathrm{o}(h^3)$$

因此，中点公式是二阶的。

对模型方程 $y' = \lambda y(\mathrm{Re}(\lambda) < 0)$ 使用中点公式求解，得

$$y_{n+1} = [1 + \lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2]y_n$$

易知，当 $\left|1 + \lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2\right| \le 1$ 时，中点公式绝对稳定。特别当 λ 为实数且 $\lambda < 0$ 时，上不等式的解为

$$-2 \le \lambda \mathrm{h} \le 0$$

8．**解：**（1）用欧拉法求解题中初值问题，当 $\lambda\mathrm{h} = -100\mathrm{h}$ 满足

$$\left|1 + (-100\mathrm{h})\right| \le 1$$

时绝对稳定，即当 $0 < \mathrm{h} \le 0.2$ 时欧拉法绝对稳定。

（2）当 $\lambda\mathrm{h} = -100\mathrm{h}$ 满足不等

$$\left|1+\lambda\mathrm{h}+\frac{1}{2}(\lambda\mathrm{h})^2+\frac{1}{3!}(\lambda\mathrm{h})^3+\frac{1}{4!}(\lambda\mathrm{h})^4\right| \le 1$$

时，四阶龙格-库塔法绝对稳定，也即当 $\lambda\mathrm{h}$ 满足

$-2.785 \le \lambda h < 0, 0 < h \le \dfrac{-2.785}{\lambda} = 0.02785$ 时绝对稳定。

（3）对于梯形公式，当 $\lambda h = -100h \in (-\infty, 0)$ 时，绝对稳定，此条件对 $\forall h \in (0, +\infty)$ 都成立，即梯形法对 h 无限制。

9、解： 二阶阿达姆斯显式和隐式方法分别为

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n)$$

将 $f = 1 - y$ 代入上二式，化简得

显式方法 $$y_{n+2} = (1 - \frac{3}{2}h)y_{n+1} + \frac{h}{2}y_n + h$$

隐式方法 $$y_{n+1} = \frac{2-h}{2+h}y_n + \frac{2h}{2+h}$$

取 $h = 0.2, y_0 = 0, y_1 = 0.181$，计算结果如表 9-7 所示

表 9-7

x_n	显式 y_n	$\lvert y(x_n) - y_n \rvert$	隐式 y_n	$\lvert y(x_n) - y_n \rvert$
0．4	0．3267	0.2979953×10^{-2}	0．32990909	0.229136×10^{-3}
0．6	0．44679	0.4398363×10^{-2}	0．451743801	0.555437×10^{-3}
0．8	0．545423	0.5248035×10^{-2}	0．551426746	0.755710×10^{-3}
1．0	0．6264751	0.5645458×10^{-2}	0．63298552	0.864961×10^{-3}

可见，隐式方法比显式方法精确。

10．证明：根据局部截断误差的定义知

$$T_{n+1} = y(x_n + h) - \frac{1}{2}(y(x_n) + y(x_n - h)) -$$

$$\frac{1}{4}h[4y'(x_n + h) - y'(x_n) + 3y'(x_n - h)] =$$

$$y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{1}{2}h^2y''(x_n) + \frac{1}{3!}h^3y'''(x_n) + \mathrm{o}(h^4) - \frac{1}{2}y(x_n) -$$

$$\frac{1}{2}[y(x_n) - hy'(x_n) + \frac{1}{2}h^2y''(x_n) - \frac{1}{3!}h^3y'''(x_n) + \mathrm{o}(h^4)] -$$

$$\frac{h}{4}[4(y'(x_n) + hy''(x_n) + \frac{1}{2}h^2y'''(x_n) + \mathrm{o}(h^3)) - y'(x_n) +$$

$$3(y'(x_n) - hy''(x_n) + \frac{1}{2}h^2y'''(x_n) + \mathrm{o}(h^3))] = (1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2})y(x_n) +$$

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 1 + \frac{3}{4})h^2y''(x_n) + (\frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{2} - \frac{3}{8})h^3y'''(x_n) + \mathrm{o}(h^4) =$$

$$-\frac{5}{8}h^3y'''(x_n) + \mathrm{o}(h^4)$$

故方法是二阶的，局部截断误差的主项为$-\frac{5}{8}h^3y'''(x_n)$。

11、解　由局部截断误差的定义知

$$T_{n+2} = y(x_n + 2h) + (b-1)y(x_n + h) - by(x_n) -$$

$$\frac{h}{4}[(b+3)y'(x_n + 2h) + (3b+1)y'(x_n)] =$$

$$y(x_n) + 2hy'(x_n) + \frac{1}{2}(2h)^2 y''(x_n) + \frac{1}{3!}(2h)^3 y'''(x_n) +$$

$$\frac{1}{4!}(2h)^4 y^{(4)}(x_n) + \mathrm{o}(h^5) + (b-1)[y(x_n) + hy'(x_n) +$$

$$\frac{1}{2}h^2 y''(x_n) + \frac{1}{3!}h^3 y'''(x_n) + \frac{1}{4!}h^4 y^{(4)}(x_n) + \mathrm{o}(h^5)] -$$

$$by(x_n) - \frac{h}{4}(b+3)[y'(x_n) + 2hy''(x_n) + \frac{1}{2!}(2h)^2 y'''(x_n) +$$

$$\frac{1}{3!}(2h)^3 y^{(4)}(x_n) + \mathrm{o}(h^5)] - \frac{h}{4}(3b+1)y'(x_n) =$$

$$(1 + b - 1 - b)y(x_n) +$$

$$[2 + b - 1 - \frac{1}{4}(b+3) - \frac{1}{4}(3b+1)]hy'(x_n) +$$

$$[2 + \frac{1}{2}(b-1) - \frac{1}{2}(b+3)]h^2 y''(x_n) +$$

$$[\frac{4}{3} + \frac{1}{6}(b-1) - \frac{1}{2}(b+3)]h^3 y'''(x_n) +$$

$$[\frac{2}{3} + \frac{1}{24}(b-1) - \frac{1}{3}(b+3)]h^4 y^{(4)}(x_n) + \mathrm{o}(h^5) =$$

$$-\frac{1}{3}(b+1)h^3 y'''(x_n) - (\frac{3}{8} - \frac{7}{24}b)h^4 y^{(4)}(x_n) + \mathrm{o}(h^5)$$

所以当 $b \neq -1$ 时

$$T_{n+2} = -\frac{1}{3}(b+1)h^3 y'''(x_n) + \mathrm{o}(h^4)$$

方法为二阶；当 $b = -1$ 时

$$T_{n+1} = -(\frac{3}{8} - \frac{7}{24}b)h^4 y^{(4)}(x_n) + \mathrm{o}(h^5)$$

方法为三阶。

12、解： 根据刚性比的定义，若方程组的矩阵$A = \begin{bmatrix} -10 & 9 \\ 10 & -11 \end{bmatrix}$的特征值$\lambda_j$满足条件$\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0 (j = 1,2)$，则

$$s = \frac{\max\limits_{1 \le j \le 2} \left| \mathrm{Re}(\lambda_j) \right|}{\min\limits_{1 \le j \le 2} \left| \mathrm{Re}(\lambda_j) \right|}$$

称为刚性比，易知 A 的两个特征值为

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -20$$

所以刚性比 s=20。

当$\lambda h \in [-2.78, 0)$时，数值稳定。因此当$0 < h \le \frac{-2.78}{-20} = 0.139$时才能保证数值稳定。