Zombies

Claudia Alvarez Martínez
Roger Moreno Gutiérrez
Jan Carlos Pérez González

Cuarto año, Ciencias de la Computación.
Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Cuba

Problema:

En una ciudad infestada de zombis, los pocos supervivientes están intentando escapar. La ciudad está representada por un conjunto de intersecciones conectadas por calles, y cada camino tiene una longitud.

Roger, uno de los supervivientes propone buscar el camino más corto en un mapa que encontró tirado por ahí. Cuando el grupo está a punto de partir, Jan se levanta y dice: "Tengo una idea mejor. En lugar de ir por el camino más corto, busquemos uno de los más largos, de al menos tamaño k. Así sorprenderemos a los zombies, nunca dejes que sepan tu próximo movimiento".

El grupo de brillantes supervivientes comenzó a aplaudir asombrado, mientras que Roger se quedaba frío pensando "¿de cuando acá los zombies pueden razonar?"

Ayude al grupo encontrando, dado un mapa de intersecciones y calles, si existe un camino simple de tamaño al menos k.

(PD: De más está decir que todo el grupo murió entre terribles sufrimientos).

Nuestra redefinición del Problema:

Sea $G = (V, E)$ el grafo que representa con V el conjunto de intersecciones, y con las aristas en E las conexiones entre dichas intersecciones. Se desea saber si para un grafo cualquiera G, existe un camino simple de tamaño al menos k.

NP-Completitud:

Saber si en G existe un camino simple de tamaño al menos k, es fácil de responder si sabemos la respuesta al siguiente problema de decisión.

***K-PATH*:** Determinar si existe en G un camino simple de tamaño k.

Demostremos que *K-PATH* es NP-Completo:

Necesitamos demostrar que ***K-PATH*** $\in$ NP y ***K-PATH*** $\in$ NP-Hard.

- ***K-PATH*** $\in$ NP:
  Supongamos que tenemos un grafo no dirigido $G = (V, E)$ y un entero k; comprobar que una secuencia de vértices $V_k = v_1, v_2, ..., v_k$ es un camino de tamaño k en G, se logra asegurando que $V_k \subseteq V$, que todo vértice $v_i \in V_k$ aparece solo una vez en la secuencia y que, efectivamente, es posible hacer la transición $v_i \to v_{i+1}$ mediante una arista existente en E. Esta comprobación se realiza en tiempo polinomial, por lo que podemos decir que ***K-PATH*** es NP.

- ***K-PATH*** $\in$ NP-Hard:
  Definamos como ***HAM-CYCLE*** al probelma de decisión de determinar si en un grafo existe un ciclo de Hamilton, el cual sabemos que es uno de los 21 problemas NP-Completo de Karp.

  Vamos a demostrar que ***K-PATH*** es NP-Hard a partir de que ***HAM-CYCLE*** es menos o igual de duro (hard) que ***K-PATH***, o sea:

  $$HAM\text{-}CYCLE \leq_p K\text{-}PATH$$

  Para ello hagamos una reducción de ***HAM-CYCLE*** a ***K-PATH***.

  El algoritmo de reducción T toma como entrada una instancia $\langle G \rangle$ del problema ***HAM-CYCLE*** y produce como salida la instancia $\langle G', k \rangle$, donde $G' = G$ y $k = |V|$, o sea:

  $$T : \langle G \rangle \to \langle G, |V| \rangle$$

  Es evidente que esta transformación se computa en tiempo polinomial, por lo que solo restaría demostrar que dicha transformación es de hecho una reducción: el grafo G tiene un ciclo de Hamilton $\iff$ G tiene un camino simple de longitud $|V|$.

  $\Rightarrow$

  > G tiene un ciclo de Hamilton $\Rightarrow$ tiene un camino simple que comienza y termina en el mismo vértice, y los contiene a todos $\Rightarrow$ tiene un camino simple de longitud $|V|$.

$\Leftarrow$

> G tiene un camino simple de longitud $|V|$, y como un camino simple no repite vértices, excepto, quizás el primero y el último, dicho camino tiene que ser un ciclo de longitud $|V| \Rightarrow G$ tiene un ciclo de Hamilton.

De esta forma queda demostrado que T es una reducción válida y que por tanto ***K-PATH*** $\in$ NP-Hard.

Luego, ***K-PATH*** $\in$ NP $\wedge$ ***K-PATH*** $\in$ NP-Hard $\Rightarrow$ ***K-PATH*** $\in$ NP-Completo.