Sistemas Lineares

Sônia R. L. Garcia

Refinamento

Sistemas Lineares

Refinamento da solução

- Idéia: $\overline{x} = \widetilde{x} + \overline{c}$

$$\underset{\text{solução exata}}{\overline{x}} = \underset{\text{solução aproximada}}{\widetilde{x}} + \underset{\text{correção exata}}{\overline{c}}.$$

Quer-se: $\begin{cases} \text{obter } \widetilde{c} \sim \overline{c} \\ \text{obter nova aproximação para } \overline{x} \end{cases}$

$$\underset{\text{solução aproximada nova}}{\widehat{x}} = \underset{\text{solução aproximada}}{\widetilde{x}} + \underset{\text{correção aproximada}}{\widetilde{c}}.$$

- Auxílio teórico: $b = A\overline{x} = A(\widetilde{x} + \overline{c}) = A\widetilde{x} + A\overline{c}$, portanto $A\overline{c} = b - A\widetilde{x}$.
- Conclusão: $\overline{c}$ é solução de $Ac = r$ onde $r = b - A\widetilde{x}$.
- Procedimento: $\begin{cases} 1.\ \text{Calcular } r = b - A\widetilde{x}. \\ 2.\ \text{Resolver } Ac = r. \end{cases}$

Sistemas Lineares

Refinamento da solução

- **Idéia:** $\overline{x} = \widetilde{x} + \overline{c}$

  $\overline{x}$: solução exata; $\widetilde{x}$: solução aproximada; $\overline{c}$: correção exata.

  Quer-se: $\begin{cases} \text{obter } \widetilde{c} \sim \overline{c} \\ \text{obter nova aproximação para } \overline{x} \end{cases}$

  $\widehat{x} = \widetilde{x} + \widetilde{c}$

  $\widehat{x}$: solução aproximada nova; $\widetilde{x}$: solução aproximada; $\widetilde{c}$: correção aproximada.

- **Auxílio teórico:** $b = A\overline{x} = A(\widetilde{x} + \overline{c}) = A\widetilde{x} + A\overline{c}$, portanto $A\overline{c} = b - A\widetilde{x}$
- **Conclusão:** $\overline{c}$ é solução de $Ac = r$ onde $r = b - A\widetilde{x}$.
- **Procedimento:** $\begin{cases} 1.\ \text{Calcular } r = b - A\widetilde{x}. \\ 2.\ \text{Resolver } Ac = r. \end{cases}$

NOTA:
tem mesma matriz A do sistema original

- Parte Técnica do Procedimento:
- Parte Técnica de: 1. Calcular $r = b - A\widetilde{x}$
  Problema: Aritmética de ponto flutuante!

NOTA:

Se a aproximação fosse exata, teríamos o resíduo r = 0.

Mesmo não sendo exata, os erros de arredondamento podem levar a obter r = 0

Idéia: calcular r usando dupla precisão

Sistemas Lineares

Refinamento da solução

- Parte Técnica do Procedimento:
- Parte Técnica de: 1. Calcular $r = b - A\widetilde{x}$

Problema: Aritmética de ponto flutuante!

- $\widetilde{x}$ foi obtido resolvendo $Ax = b$ com t algarismos significativos.
- Espera-se: $r = b - A\widetilde{x} \quad \sim \quad 0$

t algarismos significativos

- E chega a ocorrer: " $r = b - A\widetilde{x} \quad = \quad 0$ " mesmo com $\widetilde{x} \neq \bar{x}$

t algarismos significativos

Solução: Usar **dupla precisão** (2t algarismos significativos)!

Importante!

- Parte Técnica de: 2. Resolver $Ac = r$

$$[A \;\; r] \underset{\text{Método de Eliminação de Gauss}}{\longrightarrow \cdots \longrightarrow} [A' \;\; r']$$

<u>Problema</u>: Tem-se A', como processar $[\cdots r] \longrightarrow \cdots \longrightarrow [\cdots r']$?

- Rotina de escalonamento usa **precisão simples** (t alg. significativos).
- Os multiplicadores estão em $[A' \;\; b']$ e as "trocas" estão em p, se trabalharmos com **precisão simples** é fácil obter r' a partir de r.

Sistemas Lineares

Refinamento da solução

- Parte Técnica de: 2. Resolver $Ac = r$

$$[A \;\; r] \xrightarrow[\text{de Gauss}]{\text{Método de Eliminação}} \cdots \longrightarrow [A' \;\; r']$$

Problema: Tem-se A', como processar $[\cdots r] \longrightarrow \cdots \longrightarrow [\cdots r']$?

- Rotina de escalonamento usa **precisão simples** (t alg. significativos).
- Os multiplicadores estão em $[A' \;\; b']$ e as "trocas" estão em p, se trabalharmos com **precisão simples** é fácil obter r' a partir de r.

Solução:

Na verdade, vai-se resolver $Ac = \widetilde{r}$

(i) Mudar r para **precisão simples**: $r \longrightarrow \widetilde{r}$

(ii) Fazer as "trocas" indicadas em $p = (p_1, p_2, \ldots, p_{n-1})$:

$$\widetilde{r} \xrightarrow[\text{Usa } p_1]{} \widetilde{r}^{(1)} \xrightarrow[\text{Usa } p_2]{} \widetilde{r}^{(2)} \longrightarrow \cdots \; \widetilde{r}^{(n-2)} \xrightarrow[\text{Usa } p_{n-1}]{} \widetilde{r}^{(n-1)}$$

resíduo com linhas permutadas

(ii) Usar os sucessivamente os multiplicadores de cada etapa:

$$\widetilde{r}^{n-1} \xrightarrow[\text{Usa } m_{i1}]{} \widetilde{r}^{(1)} \xrightarrow[\text{Usa } m_{i2}]{} \widetilde{r}^{(2)} \longrightarrow \cdots \; \widetilde{r}^{(n-2)} \xrightarrow[\text{Usa } m_{i,n-1}]{} \widetilde{r}^{(n-1)}$$

resíduo ao final da triangularização

Sistemas Lineares

Refinamento da solução

- Como termina o refinamento?
  - Tem-se $r' = \widehat{r}^{(n-1)}$;
  - Tem-se a matriz aumentada $[A' \quad r']$ do sistema $Ac = r$ depois de escalonado;
  - Resolve-se o sistema linear triangular para obter a correção aproximada $\widetilde{c}$;
  - Calcula-se a nova aproximação $\widehat{x} = \widetilde{x} + \widetilde{c}$ para $\overline{x}$.