Sistemas Lineares

Sônia R. L. Garcia

Decomposição LU

Exercício 1: Considere a matriz $T(\ell, k)$, $n \times n$, obtida a partir da identidade trocando-se sua linha ℓ com sua linha k.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}(\ell, \mathbf{k}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

• O produto $T(\ell, k)A$ é a matriz obtida de A permutando-se (trocando-se de posição) as linhas ℓ e k de A.

$$\text{linha } \ell \longleftrightarrow \text{linha } k$$

• $T(\ell, k)^{-1} = T(k, \ell)$.

Exercício 2: Considere a matriz $\Gamma_{\alpha}(\ell,k)$, $n \times n$, onde $\ell \neq k$, obtida a partir da identidade trocando-se o zero da posição ℓk por $-\alpha$.

$$\underset{\mathbf{I}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}} \quad \underset{\mathbf{\Gamma_{\alpha}(\ell,k)}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\alpha & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}$$

- O produto $\Gamma_{\alpha}(\ell,k)B$ resulta a matriz obtida de B substituindo-se a linha ℓ de B pela sua linha ℓ menos α vezes sua linha k.

$$\text{linha } \ell \longleftarrow \text{linha } \ell - \alpha \text{ linha } k$$

- $\left(\Gamma_{\alpha}(\ell,k)\right)^{-1} = \Gamma_{-\alpha}(\ell,k)$

Sistemas Lineares

Decomposição LU (sem Condensação Pivotal)

Matriz A, $n \times n$, com $\det A \neq 0$ Sem fazer Condensação Pivotal

I. Após a primeira etapa do Método de Eliminação de Gauss:

- temos os multiplicadores da primeira etapa $m_{21}, m_{31}, \dots, m_{n1}$
- a matriz obtida é dada por:
  $M_1 A = \Gamma_{m_{n1}}(n,1) \cdots \Gamma_{m_{31}}(3,1)\Gamma_{m_{21}}(2,1)A$

II. Analogamente, após a 2a. etapa

- temos os multiplicadores $m_{32}, m_{42}, \dots, m_{n2}$
- a matriz obtida é dada por :
  $M_2 M_1 A = \Gamma_{m_{n2}}(n,2) \cdots \Gamma_{m_{42}}(4,2)\Gamma_{m_{32}}(3,2)M_1 A$

III. Fazendo esse procedimento sucessivamente, após a última etapa (se $\det A \neq 0$):

- a matriz final triangularizada é dada por:
  $M_{n-1} \dots M_2 M_1 A$

Retomando:

- a matriz final triangularizada é dada por:
  $M_{n-1} \dots M_2 M_1 A$
- Então, como cada $\Gamma_{m_{\ell,k}}(\ell, k)$ é inversível com inversa $\Gamma_{-m_{\ell,k}}(\ell, k)$ temos M_k inversível, e assim:
  $A = (M_{n-1} \cdots M_2 M_1)^{-1} M_{n-1} \cdots M_2 M_1 A = LU$
  onde
  $U = M_{n-1} \cdots M_2 M_1 A$
  é uma matriz triangular superior
- Temos
  $L = (M_{n-1} \cdots M_2 M_1)^{-1} = M_1^{-1} M_2^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1}$

- **Note que:**

M_1 $\Gamma_{m_{n1}}(n,1)\cdots\Gamma_{m_{31}}(3,1)\Gamma_{m_{21}}(2,1)$	M_1^{-1} $\Gamma_{-m_{21}}(2,1)\Gamma_{-m_{31}}(3,1)\cdots\Gamma_{-m_{n1}}(n,1)$
M_2 $\Gamma_{m_{n2}}(n,2)\ldots\Gamma_{m_{42}}(4,2)\Gamma_{m_{32}}(3,2)$	M_2^{-1} $\Gamma_{-m_{32}}(3,2)\Gamma_{-m_{42}}(4,2)\cdots\Gamma_{-m_{n2}}(n,2)$
$\vdots$	$\vdots$
M_ℓ $\Gamma_{m_{n\ell}}(n,\ell)\ldots\Gamma_{m_{(\ell+1)\ell}}(\ell+1,\ell)$	M_ℓ^{-1} $\Gamma_{-m_{(\ell+1)\ell}}(\ell+1,\ell)\ldots\Gamma_{-m_{n\ell}}(n,\ell)$
$\vdots$	$\vdots$
M_{n-1} $\Gamma_{m_{n(n-1)}}(n,n-1)$	M_{n-1}^{-1} $\Gamma_{-m_{n(n-1)}}(n,n-1)$

e assim por diante.

- Então:

  $M_1^{-1}C$ modifica C de forma que

  linha 2 $\longleftarrow$ linha 2 $-(-m_{21})$ linha 1 $=$ linha 2 $+m_{21}$ linha 1

  linha 3 $\longleftarrow$ linha 3 $-(-m_{31})$ linha 1 $=$ linha 3 $+m_{31}$ linha 1

  $\vdots$

  linha n $\longleftarrow$ linha n $-(-m_{n1})$ linha 1 $=$ linha n $+m_{n1}$ linha 1

- Analogamente, $M_2^{-1}D$ modifica D de forma que

  linha 3 $\longleftarrow$ linha 3 $-(-m_{32})$ linha 2 $=$ linha 3 $+m_{32}$ linha 2

  linha 4 $\longleftarrow$ linha 4 $-(-m_{42})$ linha 2 $=$ linha 4 $+m_{42}$ linha 2

  $\vdots$

  linha n $\longleftarrow$ linha n $-(-m_{n2})$ linha 2 $=$ linha n $+m_{n2}$ linha 2

Retomando: $A = (M_{n-1}\cdots M_2M_1)^{-1}M_{n-1}\cdots M_2M_1A = LU$ onde

$$U = M_{n-1}\cdots M_2M_1A = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} \\ 0 & 0' & a'_{33} & \dots & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a'_{nn} \end{bmatrix}$$

$$L = (M_{n-1}\cdots M_2M_1)^{-1} = M_1^{-1}M_2^{-1}\cdots M_{n-1}^{-1} = M_1^{-1}M_2^{-1}\cdots M_{n-1}^{-1}I =$$

$$(\Gamma_{-m_{21}}(2,1)\Gamma_{-m_{31}}(3,1)\cdots\Gamma_{-m_{n1}}(n,1))(\Gamma_{-m_{32}}(3,2)\Gamma_{-m_{42}}(4,2)\cdots\Gamma_{-m_{n2}}(n,2))\cdots$$
$$\cdots(\Gamma_{-m_{n(n-1)}}(n,n-1))I =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{(n-2)1} & m_{(n-2)2} & m_{(n-2)3} & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ m_{(n-1)1} & m_{(n-1)2} & m_{(n-1)3} & \cdots & m_{(n-1)(n-2)} & 1 & 0 \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & m_{n(n-2)} & m_{n(n-1)} & 1 \end{bmatrix}$$

Detalhes da última conclusão:

$$L = (\Gamma_{-m_{21}}(2,1)\Gamma_{-m_{31}}(3,1)\cdots\Gamma_{-m_{n1}}(n,1))(\Gamma_{-m_{32}}(3,2)\Gamma_{-m_{42}}(4,2)\cdots\Gamma_{-m_{n2}}(n,2))\cdots$$
$$\cdots(\Gamma_{-m_{(n-1)(n-2)}}(n-1,n-2)\Gamma_{-m_{n(n-2)}}(n,n-2))(\Gamma_{-m_{n(n-1)}}(n,n-1))I$$

Devido à última etapa:

$$(\Gamma_{-m_{n(n-1)}}(n,n-1))I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & m_{n(n-1)} & 1 \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineares

Decomposição LU (sem Condensação Pivotal)

$$L = (\Gamma_{-m_{21}}(2,1)\Gamma_{-m_{31}}(3,1)\cdots\Gamma_{-m_{n1}}(n,1))(\Gamma_{-m_{32}}(3,2)\Gamma_{-m_{42}}(4,2)\cdots\Gamma_{-m_{n2}}(n,2))\cdots$$
$$\cdots(\Gamma_{-m_{(n-1)(n-2)}}(n-1,n-2)\Gamma_{-m_{n(n-2)}}(n,n-2))(\Gamma_{-m_{n(n-1)}}(n,n-1))I$$

Devido à penúltima etapa:

$$(\Gamma_{-m_{(n-1)(n-2)}}(n-1,n-2)\Gamma_{-m_{n(n-2)}}(n,n-2))(\Gamma_{-m_{n(n-1)}}(n,n-1))I =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & m_{(n-1)(n-2)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & m_{n(n-2)} & m_{n(n-1)} & 1 \end{bmatrix}$$

Indutivamente chegamos ao resultado do cálculo de L.

Sistemas Lineares

Decomposição LU - Com Condensação Pivotal$^{(*)}$

Sejam

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1n} \\ m'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} \\ m'_{31} & m'_{32} & a'_{33} & \dots & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m'_{n1} & m'_{n2} & m'_{n3} & \dots & a'_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz triangularizada pelo Método de Eliminação de Gauss com Condensação Pivotal (também chamada Pivotamento Parcial), com os multiplicadores armazenados conforme convencionado

$p = (p_1, p_2, \dots, p_{n-1})$ Vetor das trocas utilizadas.

- Se fizermos em A primeiro todas as trocas informadas em $p = (p_1, p_2, \dots, p_{n-1})$, obtemos uma matriz (Ver exercício I):

  $TA = T(p_{n-1}, n-1)T(p_{n-2}, n-2)\dots T(p_2, 2)T(p_1, 1)A,$
- Aplicando-se a TA o Método de Eliminação de Gauss com Condensação Pivotal, **não aparecerão novas trocas de linhas**, e a matriz obtida será a mesma dada acima.

$(*)$ Também chamada "Pivotamento Parcial".

Sistemas Lineares

Decomposição LU - Com Condensação Pivotal$^{(*)}$

Sejam

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1n} \\ m'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} \\ m'_{31} & m'_{32} & a'_{33} & \dots & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m'_{n1} & m'_{n2} & m'_{n3} & \dots & a'_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz triangularizada pelo Método de Eliminação de Gauss com Condensação Pivotal (também chamada Pivotamento Parcial), com os multiplicadores armazenados conforme convencionado

$p = p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ Vetor das trocas utilizadas.

- $TA = T(p_{n-1}, n-1)\,T(p_{n-2}, n-2) \dots T(p_2, 2)\,T(p_1, 1)A$
- Se $\det A \neq 0$ então $\det(TA) \neq 0$ e portanto $TA = LU$ onde

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ m'_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ m'_{31} & m'_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m'_{n1} & m'_{n2} & m'_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} \\ 0 & 0' & a'_{33} & \dots & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a'_{nn} \end{bmatrix}$$

$(*)$ Também chamada "Pivotamento Parcial".

Sem troca de linhas

- Sistema: $Ax = b$
- Decomposição: $A = LU$
- Então: $LUx = b$
- Chamamos: $y = Ux$
- (i) Resolve-se o sistema triangular inferior: $Ly = b$
  (ii) Resolve-se o sistema triangular superior: $Ux = y$

Com Condensação pivotal

- Sistema: $Ax = b$
- Decomposição: $PA = LU$
- Sistema com equações permutadas: $PAx = Pb$
- Então: $LUx = Pb$
- Chamamos: $y = Ux$
- (i) Resolve-se o sistema triangular inferior: $Ly = Pb$
  (ii) Resolve-se o sistema triangular superior: $Ux = y$