初等数论笔记

CHUDENGSHULUNBIJI

rogeryoungh

1 整数的整除性 2

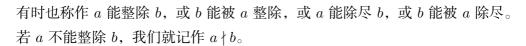
第1章 整数的整除性

定义 1.1

对于整数 a,b, 其中 $a \neq 0$, 若存在整数 c, 它使得

$$b = ac$$

则 b 叫做 a 的倍数, a 叫做 b 的因数, 记作 $a \mid b$ 。



引理 1.1

如果对于整数 a,b 满足 $a \mid b$,则有

$$(-a)\mid b,\quad a\mid (-b),\quad (-a)\mid (-b),\quad |a|\mid |b|$$

这个比较显然,由定义知存在 c 使得 b = ac,再构造验证即可。

引理 1.2

对于整数 a,b,c 有 $a \mid b,b \mid c$, 则有 $a \mid c$ 。

证明 因为 $a \mid b, b \mid c$,故存在整数 d, e 使得 b = ad, c = be。 因此存在整数 f = de 使得 c = af = ade,故 $a \mid c$ 。

引理 1.3

对于整数 a, b 有 |a| | |b|, 若 |a| < |b| 则有 a = 0。

证明 因为 |a| | |b|,则存在整数 c 使得 |a| = |b|c。那么有

$$0 \leqslant |a| = |b|c < |b|$$

即 $0 \le c < 1$,又 c 为整数,故 c = a = 0。

定理 1.1

对于整数 a,b, 若 $b \neq 0$ 则一定存在唯一一对 q,r 使得

$$a = bq + r$$
, $0 \le r < |b|$

证明 先证明存在性。

- (1) 若恰 $b \mid a$, 则必存在 c 使得 a = bc, 此时有 q = c, r = 0。
- (2) 否则一定存在 n 使得 n|b| < a < (n+1)|b|, 即存在 0 < r < |b| 使得 a = |b|n + r。
- 当 b>0 时, 令 q=n; 当 b<0 时, 令 q=-n 则有

$$a = bq + r$$
, $0 \leqslant r < |b|$

再证明唯一性。设

$$a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2, \quad 0 \leqslant r_1, r_2 < |b|$$

相减有

$$a - a = b(q_1 - q_2) + r_1 - r_2 = 0$$

即
$$r_1 - r_2 = -b(q_1 - q_2)$$
, 因此有 $b \mid (r_1 - r_2)$