

# 数学分析笔记

---

SHUXUEFENXIBIJI

rogeryoung

# 目录

<b>1</b>	<b>实数集与函数</b>	<b>3</b>
1.1	实数 . . . . .	3
1.2	函数的上下界 . . . . .	4
1.3	实数系的构造 . . . . .	5
<b>2</b>	<b>数列极限</b>	<b>6</b>
2.1	数列极限的概念 . . . . .	6
2.2	收敛数列的性质 . . . . .	6
2.3	数列极限存在的条件 . . . . .	8
2.4	柯西 (Cauchy) 准则 . . . . .	9
2.5	Stolz 公式 . . . . .	10
2.6	例题 . . . . .	10
<b>3</b>	<b>函数极限</b>	<b>11</b>
3.1	函数极限的概念 . . . . .	11
3.2	函数极限的性质 . . . . .	12
3.3	函数极限存在的条件 . . . . .	12
3.4	两个重要的极限 . . . . .	13
3.5	无穷小量与无穷大量 . . . . .	13
3.6	常见等价无穷小 . . . . .	14
<b>4</b>	<b>函数的连续性</b>	<b>15</b>
4.1	连续性的概念 . . . . .	15
4.2	连续函数的性质 . . . . .	16
4.3	初等函数的连续性 . . . . .	17
<b>5</b>	<b>导数和微分</b>	<b>18</b>
5.1	导数的定义 . . . . .	18
5.2	求导法则 . . . . .	19
5.3	单调性与导数 . . . . .	20
<b>6</b>	<b>微分中值定理</b>	<b>21</b>
6.1	拉格朗日定理 . . . . .	21
6.2	柯西中值定理 . . . . .	21
6.3	凹凸性 . . . . .	21

<b>7 积分的方法与技巧</b>	<b>22</b>
7.1 分项积分法 . . . . .	22

# 第 1 章 实数集与函数

集合论与函数和映射视作熟知的。若无额外说明，皆在  $\mathbb{R}$  下。

## 1.1 实数

有理数和无理数统称实数，有理数可用分数形式  $\frac{p}{q}$  表示，也可用有限十进小数或无限十进循环小数表示；而无限十进不循环小数则成为无理数。

为了让任意实数都可用一个确定的无限小数来表示，如下规定：

对于正有限小数（包括正整数） $x$ ，当  $x = a_0.a_1a_2\cdots a_n$  时，其中  $0 \leq a_i \leq 9, i = 1, 2, \cdots, n, a_n \neq 0$ ， $a_0$  为非负整数，即

$$x = a_0.a_1a_2\cdots(a_n - 1)9999\cdots,$$

而当  $x = a_0$  为正整数时，则记

$$x = (a_0 - 1).9999\cdots$$

对于负有限小数（包括负整数） $y$ ，则先将  $-y$  表示为无限小数，再在所得无限小数之前加负号。并规定 0 表示为  $0.0000\cdots$ 。

实数有以下性质：

1. 实数集  $\mathbb{R}$  对加、减、乘、除（除数不为 0）四则运算是封闭的。
2. 实数集是有序的：任意  $a, b$  必满足三个关系之一（ $a < b, a = b, a > b$ ）。
3. 实数的大小关系具有传递性：若  $a > b, b > c$ ，则有  $a > c$ 。
4. 实数具有阿基米德性：对任何  $a, b \in \mathbb{R}$ ，若  $b > a > 0$ ，则存在正整数  $n$ ，使得  $na > b$ 。
5. 实数集具有稠密性：任意  $a, b$  之间必存在另一个实数，可以是有理数，也可以是无理数。

### 1.1.1 数集·确界原理

区间分为无限区间和有限区间。

设实数  $a < b$ ，则称数集  $\{x \mid a < x < b\}$  为开区间，记作  $(a, b)$ ；数集  $\{x \mid a \leq x \leq b\}$  称为闭区间，记作  $[a, b]$ ；数集  $\{x \mid a \leq x < b\}$  和  $\{x \mid a < x \leq b\}$  都称为半开半闭区间，分别记作  $[a, b)$  和  $(a, b]$ 。以上几类区间统称为有限区间。

满足关系式  $x \geq a$  的全体实数  $x$  的集合记作  $[a, +\infty)$ ，类似地，有  $(-\infty, a], (a, +\infty), (-\infty, a)$ 。特殊地  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ 。这几类区间统称为无限区间。

设  $\delta > 0$ ，满足  $|x - a| < \delta$  的  $x$  的集合称为点  $a$  的  $\delta$  邻域，记作  $U(a; \delta)$ ，或简单的记作  $U(a)$ ，即有

$$U(a; \delta) = (a - \delta, a + \delta)$$

点  $a$  的空心  $\delta$  邻域定义为

$$U^\circ(a; \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$$

也可以简单的记作  $U^\circ(a)$ 。

此外，常用的邻域还有：

点  $a$  的  $\delta$  右邻域  $U_+(a; \delta) = [a, a + \delta)$ ，左邻域  $U_-(a; \delta)$ 。以及点  $a$  的空心  $\delta$  左、右邻域  $U_+^\circ(a)$  与  $U_-^\circ(a)$ 。

以及  $\infty$  邻域  $U(\infty) = \{x \mid |x| > M\}$ ，其中  $M$  为充分大的正数。类似的还有  $U(+\infty) = \{x \mid x > M\}$  和  $U(-\infty) = \{x \mid x < -M\}$ 。

### 定义 1.1 【有界集】

设  $S$  为一个非空数集，若存在数  $M \in \mathbb{R}$  使得  $\forall x \in S$

1. 都有  $x \leq M$ ，则称  $M$  是  $S$  的一个上界。
2. 都有  $x \geq M$ ，则称  $M$  是  $S$  的一个下界。



若数集  $S$  既有上界又有下界，则称  $S$  为有界集，反之称为无界集。

### 定义 1.2 【上确界】

设  $S$  是一个数集，若数  $\beta$  满足：

1.  $\beta$  是  $S$  的上界： $\forall x \in S$ ，有  $x \leq \beta$ 。
2. 任何小于  $\beta$  的数不是数集  $S$  的上界： $\forall \mu < \beta, \exists x_0 \in S$  使得  $x_0 > \mu$ 。

则称数  $\beta$  为数集  $S$  的上确界，记作  $\sup S$ 。



### 定义 1.3 【下确界】

设  $S$  是一个数集，若数  $\alpha$  满足：

1.  $\alpha$  是  $S$  的下界： $\forall x \in S$ ，有  $x \geq \alpha$ 。
2. 任何大于  $\alpha$  的数不是数集  $S$  的下界： $\forall \mu > \alpha, \exists x_0 \in S$  使得  $x_0 < \mu$ 。

则称数  $\alpha$  为数集  $S$  的下确界，记作  $\inf S$ 。



上确界与下确界统称为确界。应注意，数集  $S$  的确界可能属于  $S$ ，也可能不属于  $S$ 。

### 定理 1.1 【确界原理】

设  $S$  为非空数集，若  $S$  有上界，则  $S$  必有上确界；若  $S$  有下界，则  $S$  必有下确界。



若把  $\pm\infty$  看作非正常上下确界，前文定义视为正常上（下）确界，那么任一非空数集必有上下确界。

## 1.2 函数的上下界

### 定义 1.4

设  $f$  为定义在  $D$  上的函数。若存在数  $M(L)$ ，使得对每一个  $x \in D$ ，有  $f(x) \leq M(f(x) \geq L)$ ，则称  $f$  为  $D$  上的有上（下）界函数， $M(L)$  称为  $f$  在  $D$  上的一个上（下）界。

反之，若存在数  $M(L)$ ，使得对每一个  $x \in D$ ，有  $f(x) \geq M(f(x) \leq L)$ ，则称  $f$  为  $D$  上的有下（上）界函数。



**定义 1.5**

设  $f$  为定义在  $D$  上的函数。若存在正数  $M$ ，使得对每一个  $x \in D$ ，有  $|f(x)| \leq M$ ，则称  $f$  为  $D$  上的有界函数。

反之，若存在正数  $M$ ，使得对每一个  $x \in D$ ，有  $|f(x)| \geq M$ ，则称  $f$  为  $D$  上的无界函数。



记函数  $f$  在  $D$  上的上确界为  $\sup_{x \in D} f(x)$ ，类似的有  $\inf_{x \in D} f(x)$ 。

**定义 1.6**

设  $f$  为定义在  $D$  上的函数，若对任何  $x_1, x_2 \in D$ ，当  $x_1 < x_2$  时：

1. 总有  $f(x_1) \leq f(x_2)$ ，则称  $f$  为  $D$  上的增函数，若成立严格不等式  $f(x_1) < f(x_2)$  时，称  $f$  为  $D$  上的严格增函数。
2. 总有  $f(x_1) \geq f(x_2)$ ，则称  $f$  为  $D$  上的减函数，若成立严格不等式  $f(x_1) > f(x_2)$  时，称  $f$  为  $D$  上的严格减函数。



增函数和减函数统称为单调函数，严格增函数和严格减函数统称为严格单调函数。

严格单调函数必有反函数，其也为严格单调函数。

**定义 1.7**

设  $D$  为对称于原点的数集，函数  $f$  为定义在  $D$  上的函数。若对每一个  $x \in D$ ：

1. 有  $f(-x) = -f(x)$ ，则称  $f$  为  $D$  上的奇函数。
2. 有  $f(-x) = f(x)$ ，则称  $f$  为  $D$  上的偶函数。



## 1.3 实数系的构造

**定义 1.8 【Dedekind 分割】**

设  $A$  为  $\mathbb{Q}$  的子集，若满足以下三个条件

1.  $A \neq \emptyset, A \neq \mathbb{Q}$ ;
2. 当  $p \in A, p \in A^c$  时， $p < q$ ;
3. 任给  $p \in A$ ，存在  $q \in A$ ，使得  $p < q$ ;

则称  $A$  为  $\mathbb{Q}$  的一个分割，分割的全体组成集合为  $\mathbb{R}$ 。



## 第 2 章 数列极限

### 2.1 数列极限的概念

#### 定义 2.1 【数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义】

设  $\{a_n\}$  为数列,  $A$  为定数。若对任给的正数  $\varepsilon$ , 总存在正整数  $N = N(\varepsilon)$ , 使得当  $n > N$  时有

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

则称数列  $\{a_n\}$  收敛于  $A$ , 或称  $A$  为数列  $\{a_n\}$  的极限, 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \text{ 或 } a_n \rightarrow A (n \rightarrow \infty)$$



等价定义: 任给  $\varepsilon > 0$ , 若在  $U(A; \varepsilon)$  之外数列  $\{a_n\}$  中的项至多只有有限个, 则称  $\{a_n\}$  收敛于极限  $A$ 。

若对于数列  $\{a_n\}$ , 不存在  $A$  使得  $a_n \rightarrow A$ , 则称数列  $\{a_n\}$  发散。

特殊地, 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 则称  $\{a_n\}$  为无穷小数列。

#### 定义 2.2 【无穷大数列】

若数列  $\{a_n\}$  满足: 对任意正数  $M > 0$ , 存在正整数  $N$ , 使得当  $n > N$  时,

(1)  $a_n > M$ , 则称数列  $\{a_n\}$  发散于正无穷大, 记作  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ , 或  $a_n \rightarrow +\infty$ 。

(2) 有  $a_n < -M$ , 则称数列  $\{a_n\}$  发散于负无穷大, 记作  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ , 或  $a_n \rightarrow -\infty$ 。



### 2.2 收敛数列的性质

#### 定理 2.1 【唯一性】

若数列  $\{a_n\}$  收敛, 则它只有一个极限。



**证明** 如果数列  $\{a_n\}$  同时以  $A, B$  为极限, 即任给  $\varepsilon > 0$ , 总存在  $N_1, N_2$ , 使得

$$|a_n - A| < \varepsilon, n > N_1; \quad |a_n - B| < \varepsilon, n > N_2$$

那么当  $n > \max\{N_1, N_2\}$  时需要恒成立

$$2\varepsilon > |a_n - A| + |a_n - B| \geq |A - B|$$

当  $A \neq B$  时, 对于  $2\varepsilon < |A - B|$  不恒成立, 因此只能  $A = B$ 。



#### 定理 2.2 【有界性】

若数列  $\{a_n\}$  收敛, 则  $\{a_n\}$  有界。



**证明** 不妨设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ 。令  $\varepsilon = 1$ , 那么存在  $n > N$  使得

$$|a_n - A| \leq 1$$

令

$$M = \{|a_1|, \dots, |a_N|, |A-1|, |A+1|\}$$

那么对任意正整数  $n$ , 总有  $|a_n| \leq M$ 。

□

### 定理 2.3 【保不等式性, 保序性】

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ , 则有

(1) 如果存在  $n > N$  使得  $a_n \geq b_n$  恒成立, 则  $A \geq B$ 。

(2) 反之, 如果  $A > B$ , 则存在  $n > N_1$  使得  $a_n > b_n$  恒成立。



**证明** (1) 如果设  $B - A = 2\delta > 0$ , 那么存在  $N_2, N_3 > N$

$$|a_n - A| < \delta, n > N_2; \quad |b_n - B| < \delta, n > N_3$$

于是当  $n > \max\{N_2, N_3\}$  时有

$$a_n < A + \delta = B - \delta < b_n$$

因此矛盾, 故  $A \geq B$ 。

(2) 设  $A - B = 2\delta > 0$ , 那么存在  $N_2, N_3$

$$|a_n - A| < \delta, n > N_2; \quad |b_n - B| < \delta, n > N_3$$

于是存在  $N_1 = \max\{N_2, N_3\}$ , 当  $n > N_1$  时有

$$a_n > A - \delta = B + \delta > b_n$$

□

若  $b_n$  是常数列,  $A \neq 0$ , 我们还可得到推论: 存在  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 有

$$\frac{1}{2}|A| < |a_n| < \frac{3}{2}|A|$$

### 定理 2.4 【迫敛性, 夹逼定理】

设数列  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$  满足当  $n > N_0$  有  $a_n \leq c_n \leq b_n$ 。若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

则  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$ 。



**证明** 即对于任给的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N_1, N_2$ , 使得当  $n > N_1$  有

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

当  $n > N_2$  有

$$A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon$$

因此当  $n > \max\{N_0, N_1, N_2\}$  时, 有

$$A - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \varepsilon$$

□



**定理 2.5 【四则运算】**

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ , 则有

(1)  $\{\alpha a_n + \beta b_n\}$  收敛到  $\alpha A + \beta B$ , 其中  $\alpha, \beta$  为常数。

(2)  $\{a_n b_n\}$  收敛到  $AB$ 。

(3) 当  $B \neq 0$  时,  $\{a_n/b_n\}$  收敛到  $A/B$ 。



**证明** (1) 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N_1, N_2$  使得

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha| + 1}, n > N_1; \quad |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2|\beta| + 1}, n > N_2$$

则当  $n > \max\{N_1, N_2\}$  时有

$$\begin{aligned} |(\alpha a_n + \beta b_n) - (\alpha A + \beta B)| &\leq |\alpha||a_n - A| + |\beta||b_n - B| \\ &< \frac{\varepsilon|\alpha|}{2|\alpha| + 1} + \frac{\varepsilon|\beta|}{2|\beta| + 1} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

(2) 由收敛数列的有界性, 存在  $M$  使得  $|a_n| \leq M$ , 那么

$$0 \leq |a_n b_n - AB| = |(a_n - A)b_n + A(b_n - B)| \leq M|a_n - A| + |A||b_n - B|$$

由迫敛性知  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n b_n - AB| = 0$ 。

(3) 由保号性的推论, 存在  $N$  使得当  $n > N$  时有  $|b_n| > \frac{|B|}{2}$ , 那么

$$0 \leq \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} \right| = \frac{|b_n - B|}{|b_n||B|} \leq \frac{2}{|B|^2} |b_n - B|$$

由迫敛性知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} \right| = 0$ 。

□

**定义 2.3 【数列的子列】**

设  $\{a_n\}$  为数列, 如果  $\{n_k\}$  是一列严格递增的正整数, 则数列  $\{a_{n_k}\}$  称为数列  $\{a_n\}$  的一个子列。



特殊的子列  $\{a_{2k}, a_{2k-1}\}$  分别称为偶子列与奇子列。

**定理 2.6**

数列  $\{a_n\}$  收敛的充要条件:  $\{a_n\}$  的任何子列都收敛。

**2.3 数列极限存在的条件****定义 2.4**

若数列  $\{a_n\}$  各项满足关系式  $a_n \leq a_{n+1} (a_n \geq a_{n+1})$ , 则称  $\{a_n\}$  为递增 (递减) 数列, 统称为单调数列。



**定理 2.7 【单调有界定理】**

单调有界数列必有极限。

**定理 2.8 【致密性定理】**

任何有界数列必定有收敛的子列。



## 2.4 柯西 (Cauchy) 准则

**定义 2.5**

设  $\{a_n\}$  为数列, 如果任给  $\varepsilon > 0$ , 均存在  $N(\varepsilon)$  使当  $m, n > N(\varepsilon)$  时有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$

则称  $\{a_n\}$  为 *Cauchy* 数列或基本列。

**定理 2.9**

*Cauchy* 数列必定时有界数列。



**证明** 取  $\varepsilon = 1$ , 则存在  $N$  使得当  $m, n > N$  时有

$$|a_m - a_n| < 1$$

令  $M = \max\{|a_k| + 1 \mid 1 \leq k \leq N+1\}$ , 则当  $n \leq N$  时显然有  $|a_n| \leq M$ , 而当  $n > N$  时有

$$|a_n| \leq |a_n - a_{N+1}| + |a_{N+1}| < 1 + |a_{N+1}| \leq M$$

这说明  $\{a_n\}$  是有界数列。

**定理 2.10 【Cauchy 收敛准则】**

$\{a_n\}$  为 *Cauchy* 数列当且仅当它是收敛的。



**证明** (1) 充分性: 设  $\{a_n\}$  收敛到  $A$ , 则任给  $\varepsilon > 0$  存在  $N$ , 当  $n > N$  时有

$$|a_n - A| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

因此当  $m, n > N$  时有

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - A| + |A - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

这说明  $a_n$  为 *Cauchy* 数列。

(2) 必要性: Todo ……



柯西收敛准则的条件称为柯西条件。

## 2.5 Stolz 公式

### 定理 2.11

对于任意的  $1 \leq k \leq n$ , 设  $b_k > 0$  且  $m \leq \frac{a_k}{b_k} \leq M$ , 则有

$$m \leq \frac{\sum a_n}{\sum b_n} \leq M$$



### 定理 2.12 【Stolz 公式一】

设数列  $\{x_n\}, \{y_n\}$ , 且  $\{y_n\}$  严格单调地趋于  $+\infty$ , 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = A$$



证明 分类讨论 Todo……



### 定理 2.13 【Stolz 公式二】

设数列  $\{y_n\}$  严格单调地趋于 0, 且数列  $\{x_n\}$  也收敛到 0, 那么如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = A$$



证明 分类讨论 Todo……



## 2.6 例题

**问题 2.1** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum a_n}{n} = A$ 。

**解** 即对于任给的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $n > N_1$  使得

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

那么变形有

$$\left| \frac{\sum a_n}{n} - A \right| \leq \frac{\sum |a_n - A|}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{N_1} |a_k - A|}{n} + \frac{\sum_{k=N_1+1}^n |a_k - A|}{n}$$

注意到  $\sum_{k=1}^{N_1} |a_k - A|$  已经为定值, 从而存在  $n > N_2$  使得

$$\frac{\sum_{k=1}^{N_1} |a_k - A|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

因此当  $n > \max\{N_1, N_2\}$  时有

$$LHS < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - N_1}{n} \times \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

## 第3章 函数极限

### 3.1 函数极限的概念

#### 定义 3.1

设  $f$  为定义在  $[a, +\infty)$  上的函数,  $A$  为定数。若对任给的  $\varepsilon > 0$ , 存在正数  $M = M(\varepsilon) \geq a$ , 使得当  $x > M$  时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

则称函数  $f$  当  $x$  趋于  $+\infty$  时以  $A$  为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow +\infty)$$



类似的有  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 。

不难证明

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$$

#### 定义 3.2

设函数  $f$  在  $U^\circ(x_0; \delta')$  内有定义,  $A$  为定数。若对任给的  $\varepsilon > 0$ , 存在正数  $\delta < \delta'$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , 则称函数  $f$  当  $x$  趋于  $x_0$  时以  $A$  为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$$



#### 定义 3.3

设函数  $f$  在  $U_+^\circ(x_0; \delta')$  内有定义,  $A$  为定数。若对任给的  $\varepsilon > 0$ , 存在正数  $\delta < \delta'$ , 使得当  $x_0 < x < x_0 + \delta$  时, 有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , 则称函数  $f$  当  $x$  趋于  $x_0^+$  时以  $A$  为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0^+)$$



类似的还有左极限  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ , 统称为单侧极限。又可记为

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \text{ 与 } f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

同理还有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$$

## 3.2 函数极限的性质

### 定理 3.1 【唯一性】

若极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 则此极限是唯一的。



### 定理 3.2 【局部有界性】

若极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 则  $f$  在  $x_0$  的某空心邻域  $U^\circ(x_0)$  上有界。



### 定理 3.3 【保不等式性】

设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  均存在。若存在正数  $N_0$ , 使得当  $n > N_0$  时, 有  $a_n \leq b_n$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 。



### 定理 3.4 【迫敛性】

设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$ , 且在某  $U^\circ(x_0; \delta')$  上有

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

则  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$ 。



### 定理 3.5 【四则运算法则】

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  均存在, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$



## 3.3 函数极限存在的条件

### 定理 3.6 【海涅 (Heine) 定理, 归结原则】

若  $f(x)$  在  $U^\circ(x_0; \delta')$  上有定义。  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在的充要条件是: 任何含于  $U^\circ(x_0; \delta')$  且以  $x_0$  为极限的数列  $\{x_n\}$ , 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  都存在且相等。



即若对任何  $x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$  有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。

### 定理 3.7

设  $f(x)$  在点  $x_0$  的某空心右邻域  $U_+^\circ(x_0)$  有定义, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$  的充要条件是: 对任何以  $x_0$  为极限的递减数列  $\{x_n\} \subset U_+^\circ(x_0)$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ 。



**定理 3.8**

设  $f(x)$  为定义在  $U_+^\circ(x_0)$  上的单调有界函数, 则右极限  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$  存在。

**定理 3.9 【柯西准则】**

设  $f(x)$  在  $U^\circ(x_0; \delta')$  上有定义, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在的充要条件是: 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在正数  $\delta (< \delta')$ , 使得对任何  $x', x'' \in U^\circ(x_0, \delta)$ , 有  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ 。



## 3.4 两个重要的极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

## 3.5 无穷小量与无穷大量

**定义 3.4 【无穷小量】**

设函数  $f$  在某  $U^\circ(x_0)$  上有定义, 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ , 则称  $f$  为当  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小量。

**定义 3.5 【有界量】**

设函数  $f$  在某  $U^\circ(x_0)$  上有界, 则称  $f$  为当  $x \rightarrow x_0$  时的有界量。



无穷小量收敛于 0 的速度有快有慢。设当  $x \rightarrow x_0$  时,  $f$  与  $g$  均为无穷小量。

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ , 则称当  $x \rightarrow x_0$  时  $f$  为  $g$  的高阶无穷小量, 或称  $g$  为  $f$  的低阶无穷小量。  
记作

$$f(x) = o(g(x)) (x \rightarrow x_0)$$

特别地,  $f$  为当  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小量记作

$$f(x) = o(1) (x \rightarrow x_0)$$

若存在正数  $K$  和  $L$ , 使得在某  $U^\circ(x_0)$  上有

$$K \leq \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq L$$

则称  $f$  与  $g$  为当  $x \rightarrow x_0$  时的同阶无穷小量。特别当

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$$

时,  $f$  与  $g$  必为同阶无穷小量。

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$  则称  $f$  与  $g$  是当  $x \rightarrow x_0$  时的等价无穷小量。记作

$$f(x) \sim g(x) (x \rightarrow x_0)$$

注意并不是任何两个无穷小量都可以进行这种阶的比较。例如  $x \rightarrow 0$  时,  $x \sin \frac{1}{x}$  和  $x^2$  都是无穷小量, 但它们的比都不是有界量。

**定理 3.10**

设函数  $f, g, h$  在  $U^\circ(x_0)$  上有定义, 且有  $f(x) \sim g(x) (x \rightarrow x_0)$ , 则

1. 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)h(x) = A$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)h(x) = A$ 。

2. 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{f(x)} = B$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{g(x)} = B$

**定义 3.6 【无穷大量】**

设函数  $f$  在某  $U^\circ(x_0)$  上有定义, 若对任给的  $G > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得当  $x \in U^\circ(x_0; \delta) \subset U^\circ(x_0)$  时, 有  $|f(x)| > G$ , 则称函数  $f$  当  $x \rightarrow x_0$  时有非正常极限  $\infty$ , 记作  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 。

**3.6 常见等价无穷小**

实际上这些等价无穷小就是泰勒展开。

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{1-x} &= x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + O(x^6) \\
 \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + O(x^6) \\
 \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7) \\
 1 - \cos x &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + O(x^6) \\
 e^x - 1 &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + O(x^6) \\
 \tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + O(x^7) \\
 \sqrt{x+1} - 1 &= \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \frac{7x^5}{256} + O(x^6) \\
 \arcsin x &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + O(x^7) \\
 \arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + O(x^7)
 \end{aligned}$$

## 第 4 章 函数的连续性

### 4.1 连续性的概念

#### 定义 4.1 【连续性】

设函数  $f$  在某  $U(x_0)$  上有定义。若

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称  $f$  在点  $x_0$  连续。



记  $\Delta x = x - x_0$ , 称为自变量  $x$  在点  $x_0$  的增量或改变量。设  $y_0 = f(x_0)$ , 相应的函数  $y$  在点  $x_0$  的增量记为

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = y - y_0$$

连续性的  $\varepsilon$ - $\delta$  形式定义: 若对任给的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得当  $|x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ , 则称函数  $f$  在点  $x_0$  连续。

或者进一步表示为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right)$$

#### 定义 4.2

设函数  $f$  在某  $U_+(x_0)$  上有定义。若

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

则称  $f$  在点  $x_0$  右连续。同理左连续。



因此函数  $f$  在点  $x_0$  连续的充要条件是:  $f$  在点  $x_0$  既是左连续, 又是右连续。

#### 定义 4.3 【间断点】

设函数  $f$  在某  $U^\circ(x_0)$  上有定义。若  $f$  在点  $x_0$  无定义, 或  $f$  在点  $x_0$  有定义而不连续, 则称点  $x_0$  为函数  $f$  的间断点或不连续点。



若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 而  $f$  在点  $x_0$  无定义, 或有定义但  $f(x_0) \neq A$ , 则称点  $x_0$  为  $f$  的可去间断点。

若函数  $f$  在点  $x_0$  的左、右极限都存在, 但  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ , 则称点  $x_0$  为函数  $f$  的跳跃间断点。

可去间断点与跳跃间断点统称为第一类间断点, 所有其他形式的间断点统称为第二类间断点。

若函数  $f$  在区间  $I$  上的每一点都连续, 则称  $f$  为  $I$  上的连续函数。对于闭区间或半开区间的端点, 函数在这些点上连续是指左连续或右连续。



## 4.2 连续函数的性质

### 定理 4.1 【局部有界性】

若函数  $f$  在点  $x_0$  连续, 则  $f$  在某  $U(x_0)$  上有界。



### 定理 4.2 【局部保号性】

若函数  $f$  在点  $x_0$  连续, 且  $f(x_0) > 0$ , 则对任何正数  $r < f(x_0)$ , 存在某  $U(x_0)$ , 使得对一切  $x \in U(x_0)$ , 有  $f(x) > r$ 。



### 定理 4.3 【四则运算】

若函数  $f, g$  在点  $x_0$  连续, 则  $f \pm g, f \cdot g, f/g$  也都在点  $x_0$  连续。



### 定理 4.4

若函数  $f$  在点  $x_0$  连续,  $g$  在点  $u_0$  连续,  $u_0 = f(x_0)$ , 则复合函数  $g \circ f$  在  $x_0$  连续。



### 定义 4.4

设  $f$  为定义在数集  $D$  上的函数。若存在  $x_0 \in D$ , 使得对一切  $x \in D$ , 有  $f(x_0) \geq f(x)$ , 则称  $f$  在  $D$  上有最大值, 并称  $f(x_0)$  为  $f$  在  $D$  上的最大值。



### 定理 4.5 【最大、最小值定理】

若函数  $f$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 则  $f$  在闭区间  $[a, b]$  上有最大值与最小值。



### 定理 4.6 【介值定理】

若函数  $f$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a) \neq f(b)$ 。若  $\mu$  为介于  $f(a)$  和  $f(b)$  之间的任何实数。则至少存在一点  $x_0 \in (a, b)$  使得  $f(x_0) = \mu$ 。



### 定理 4.7

若函数  $f$  在  $[a, b]$  上严格单调并连续, 则反函数  $f^{-1}$  在其定义域  $[\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}]$  上连续。



### 定义 4.5

设  $f$  是定义在区间  $I$  上的函数。若对任给的  $\varepsilon > 0$  存在  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  使得对任何  $x', x'' \in I$ , 只要  $|x' - x''| < \delta$  就有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

就称函数  $f$  在区间  $I$  上一致连续。



### 定理 4.8 【一致连续性】

若函数  $f$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 则  $f$  在  $[a, b]$  上一致连续。



## 4.3 初等函数的连续性

### 定理 4.9

设  $p > 0$ ,  $a, b$  为任意两个实数, 则有

$$p^a \cdot p^b = p^{a+b}, (p^a)^b = p^{ab}$$



### 定理 4.10

指数函数  $a^x (a > 0)$  在  $\mathbb{R}$  上是连续的。



## 第 5 章 导数和微分

### 5.1 导数的定义

#### 定义 5.1

设函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的某邻域有定义, 若极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在, 则称函数  $f$  在点  $x_0$  可导, 并称该极限为函数  $f$  在点  $x_0$  的导数, 记作  $f'(x_0)$ 。

#### 定理 5.1

若函数  $f$  在点  $x_0$  可导, 则  $f$  在点  $x_0$  连续。

#### 定义 5.2

设函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的某右邻域  $[x_0, x_0 + \delta)$  上有定义, 若右极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, (0 < \Delta x < \delta)$$

存在, 则称该极限值为  $f$  在点  $x_0$  的右导数, 记作  $f'_+(x)$ 。同理有左导数。

左导数和右导数统称为单侧导数。

#### 定理 5.2

若函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的某邻域上有定义, 则  $f'(x_0)$  存在的充要条件是  $f'_-(x)$  与  $f'_+(x)$  都存在且相等。

若函数  $f$  在区间  $I$  上每一点都可导 (对区间端点, 仅考虑相应的单侧导数), 则称  $f$  为  $I$  上的可导函数。此时对每一个  $x \in I$ , 都有  $f$  的一个导数  $f'(x)$  (或单侧导数) 与之对应。

这样就定义了一个在  $I$  上的函数, 称为导函数, 简称为导数。记作  $f', y', \frac{dy}{dx}$ , 即

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta}, x \in I$$

有时  $f'(x_0)$  也可写作  $y'|_{x=x_0}$  或  $\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$ 。

曲线  $y = f(x)$  在点  $(x_0, y_0)$  的切线方程是

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

#### 定义 5.3

若函数  $f$  在点  $x_0$  的某邻域  $U(x_0)$  上对一切  $x \in U(x_0)$  有

$$f(x_0) \geq f(x)$$

则称  $f$  在点  $x_0$  取得极大值, 称点  $x_0$  为极大值点。同理有极小值点。

极大值、极小值统称为极值，极大值点、极小值点统称为极值点。

### 定理 5.3 【费马定理】

设函数  $f$  在点  $x_0$  的某邻域上有定义，且在点  $x_0$  可导。若点  $x_0$  为极值点，则必有  $f'(x_0) = 0$ 。

## 5.2 求导法则

### 定理 5.4

若函数  $u(x)$  和  $v(x)$  在点  $x_0$  可导，则函数  $f(x) = u(x) \pm v(x)$  在点  $x_0$  也可导，且

$$f'(x_0) = u'(x_0) \pm v'(x_0)$$

函数  $f(x) = u(x)v(x)$  在点  $x_0$  也可导，且

$$f'(x_0) = u'(x_0)v'(x_0)$$

若  $v(x) \neq 0$ ，则函数  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$  在点  $x_0$  也可导，且

$$f'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v(x_0)^2}$$

### 定理 5.5

设  $y = f(x)$  为  $x = \phi(y)$  的反函数，若  $\phi(y)$  在点  $y_0$  的某邻域上连续、严格单调且  $\phi'(y_0) \neq 0$ ，则  $f(x)$  在点  $x_0 = \phi(y_0)$  可导，且

$$f'(x_0) = \frac{1}{\phi'(y_0)}$$

### 定理 5.6

设  $u = \phi(x)$  在点  $x_0$  可导， $y = f(u)$  在点  $u_0 = \phi(x_0)$  可导，则复合函数  $f \circ \phi$  在点  $x_0$  可导，且

$$(f \circ \phi)'(x_0) = f'(u_0)\phi'(x_0) = f'(\phi(x_0))\phi'(x_0)$$

### 5.2.1 基本求导法则

1.  $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2.  $(uv)' = u'v + uv'$
3.  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
4.  $(u \pm v)' = u' \pm v'$

### 5.2.2 基本初等函数导数公式

1.  $(c)' = 0$  ( $c$  为常数)
2.  $(x^a)' = ax^{a-1}$  ( $a$  为任意实数)
3.  $(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x, (\tan x)' = \sec^2 x$
4.  $(\cot x)' = -\csc^2 x, (\sec x)' = \sec x \tan x, (\csc x)' = -\csc x \cot x$

5.  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$   
 6.  $(a^x)' = a^x \ln a (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$   
 7.  $(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a} (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$

## 5.3 单调性与导数

### 定理 5.7

设  $f$  在区间  $I$  上可导, 则  $f(x)$  在  $I$  上递增 (减) 的充要条件时

$$f'(x) \geq 0 (\leq 0)$$



### 定理 5.8 【介值定理】

设  $f$  为  $[a, b]$  上的连续函数,  $\mu$  时严格介于  $f(a)$  和  $f(b)$  之间的数, 则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(\xi) = \mu$ 。



## 第 6 章 微分中值定理

### 6.1 拉格朗日定理

#### 定理 6.1 【罗尔 (Rolle) 中值定理】

若函数  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  中可微, 且  $f(a) = f(b)$ 。则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ 。♡

#### 定理 6.2

若函数  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  中可微, 则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



拉格朗日公式还有下面几种等价形式

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), a < \xi < b$$

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a))(b - a), 0 < \theta < 1$$

$$f(a + h) - f(a) = f'(a + \theta h)h, 0 < \theta < 1$$

### 6.2 柯西中值定理

#### 定理 6.3

设  $f, g$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  中可微, 且  $g'(x) \neq 0$ , 则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$



### 6.3 凹凸性

#### 定义 6.1

设  $f$  为定义在区间  $I$  上的函数, 若对  $I$  上当任意两点  $x_1, x_2$  和任意实数  $\lambda \in (0, 1)$  总有

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

则称  $f$  为  $I$  上的凸函数。反之, 如果总有

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

则称  $f$  为  $I$  上的凹函数。



## 第 7 章 积分的方法与技巧

这部分我的参考书是《积分的方法与技巧》(金玉明等)。

### 7.1 分项积分法

若干微分式的和或差的不定积分,等于每个微分式的各自积分的和或差。

$$\int (f(x) + g(x) - h(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx - \int h(x) dx$$

因此多项式的积分可以简单的通过积分各个单项式得到。

如果一个分式的分母为多项式,则可把它化成最简单的分式再积分。如

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left( \frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} \right)$$

这里可以通过通分后待定系数得到。于是其积分为

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C$$

对于更复杂的真分式的情况,若要计算的是

$$\int \frac{mx + n}{x^2 + px + q} dx$$

分母不一定能直接分解,但总能进行配方

$$x^2 + px + q = \left( x + \frac{p}{2} \right)^2 + q - \frac{p^2}{4} = t^2 \pm a^2$$

再令  $A = m, B = n - \frac{1}{2}mp$ , 可得

$$\int \frac{mx + n}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{At + B}{t^2 \pm a^2} dt = A \int \frac{tdt}{t^2 \pm a^2} + B \int \frac{dt}{t^2 \pm a^2}$$

其中

$$\begin{aligned} A \int \frac{tdt}{t^2 \pm a^2} &= \frac{A}{2} \int \frac{d(t^2 \pm a^2)}{t^2 \pm a^2} = \frac{A}{2} \ln |t^2 \pm a^2| + C \\ B \int \frac{dt}{t^2 + a^2} &= \frac{B}{a} \arctan \frac{t}{a} + C \\ B \int \frac{tdt}{t^2 - a^2} &= \frac{B}{2a} \ln \left| \frac{t - a}{t + a} \right| + C \end{aligned}$$

因此当  $p^2 < 4q$  时,可以得到

$$\begin{aligned}\int \frac{mx+n}{x^2+px+q} &= \frac{A}{2} \ln |t^2+a^2| + \frac{B}{a} \arctan \frac{t}{a} + C \\ &= \frac{m}{2} \ln |x^2+px+q| + \frac{2n-mp}{\sqrt{4q-p^2}} \arctan \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C\end{aligned}$$

当  $p^2 > 4q$  时, 可以得到

$$\begin{aligned}\int \frac{mx+n}{x^2+px+q} &= \frac{A}{2} \ln |t^2-a^2| + \frac{B}{2a} \ln \left| \frac{t-a}{t+a} \right| \\ &= \frac{m}{2} \ln |x^2+px+q| + \frac{2n-mp}{2\sqrt{4q-p^2}} \ln \left| \frac{2x+p-\sqrt{p^2-4q}}{2x+p+\sqrt{p^2-4q}} \right| + C\end{aligned}$$