

数学分析笔记

SHUXUEFENXIBIJI

rogeryoung

目录

1	实数集与函数	2
1.1	实数	2
1.2	函数的上下界	3
1.3	实数系的构造	4
2	数列极限	5
2.1	数列极限的概念	5
2.2	收敛数列的性质	5
2.3	数列极限存在的条件	7
2.4	Stolz 公式	7
2.5	例题	8
3	函数极限	9
3.1	函数极限的概念	9
3.2	函数极限的性质	10
3.3	函数极限存在的条件	10
3.4	两个重要的极限	11
3.5	无穷小量与无穷大量	11
3.6	常见等价无穷小	12
4	函数的连续性	14
4.1	连续性的概念	14
4.2	连续函数的性质	15
4.3	初等函数的连续性	16
5	导数和微分	17
5.1	导数的定义	17
5.2	求导法则	18

第 1 章 实数集与函数

集合论与函数和映射视作熟知的。若无额外说明, 皆在 \mathbb{R} 下。

1.1 实数

有理数和无理数统称实数, 有理数可用分数形式 $\frac{p}{q}$ 表示, 也可用有限十进小数或无限十进循环小数表示; 而无限十进不循环小数则成为无理数。

为了让任意实数都可用一个确定的无限小数来表示, 如下规定:

对于正有限小数 (包括正整数) x , 当 $x = a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 时, 其中 $0 \leq a_i \leq 9, i = 1, 2, \cdots, n, a_n \neq 0$, a_0 为非负整数, 即

$$x = a_0.a_1a_2\cdots(a_n - 1)9999\cdots,$$

而当 $x = a_0$ 为正整数时, 则记

$$x = (a_0 - 1).9999\cdots$$

对于负有限小数 (包括负整数) y , 则先将 $-y$ 表示为无限小数, 再在所得无限小数之前加负号。并规定 0 表示为 $0.0000\cdots$ 。

实数有以下性质:

1. 实数集 \mathbb{R} 对加、减、乘、除 (除数不为 0) 四则运算是封闭的。
2. 实数集是有序的: 任意 a, b 必满足三个关系之一 ($a < b, a = b, a > b$)。
3. 实数的大小关系具有传递性: 若 $a > b, b > c$, 则有 $a > c$ 。
4. 实数具有阿基米德性: 对任何 $a, b \in \mathbb{R}$, 若 $b > a > 0$, 则存在正整数 n , 使得 $na > b$ 。
5. 实数集具有稠密性: 任意 a, b 之间必存在另一个实数, 可以是有理数, 也可以是无理数。

1.1.1 数集·确界原理

区间分为无限区间和有限区间。

设实数 $a < b$, 则称数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 为开区间, 记作 (a, b) ; 数集 $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间, 记作 $[a, b]$; 数集 $\{x \mid a \leq x < b\}$ 和 $\{x \mid a < x \leq b\}$ 都称为半开半闭区间, 分别记作 $[a, b)$ 和 $(a, b]$ 。以上几类区间统称为有限区间。

满足关系式 $x \geq a$ 的全体实数 x 的集合记作 $[a, +\infty)$, 类似地, 有 $(-\infty, a], (a, +\infty), (-\infty, a)$ 。特殊地 $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ 。这几类区间统称为无限区间。

设 $\delta > 0$, 满足 $|x - a| < \delta$ 的 x 的集合称为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a; \delta)$, 或简单的记作 $U(a)$, 即有

$$U(a; \delta) = (a - \delta, a + \delta)$$

点 a 的空心 δ 邻域定义为

$$U^\circ(a; \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$$

也可以简单的记作 $U^\circ(a)$ 。

此外，常用的邻域还有：

点 a 的 δ 右邻域 $U_+(a; \delta) = [a, a + \delta)$ ，左邻域 $U_-(a; \delta)$ 。以及点 a 的空心 δ 左、右邻域 $U_+^\circ(a)$ 与 $U_-^\circ(a)$ 。

以及 ∞ 邻域 $U(\infty) = \{x \mid |x| > M\}$ ，其中 M 为充分大的正数。类似的还有 $U(+\infty) = \{x \mid x > M\}$ 和 $U(-\infty) = \{x \mid x < -M\}$ 。

定义 1.1 (有界集)

设 S 为一个非空数集，若存在数 $M \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall x \in S$

1. 都有 $x \leq M$ ，则称 M 是 S 的一个上界。
2. 都有 $x \geq M$ ，则称 M 是 S 的一个下界。



若数集 S 既有上界又有下界，则称 S 为有界集，反之称为无界集。

定义 1.2 (上确界)

设 S 是一个数集，若数 β 满足：

1. β 是 S 的上界： $\forall x \in S$ ，有 $x \leq \beta$ 。
2. 任何小于 β 的数不是数集 S 的上界： $\forall \mu < \beta, \exists x_0 \in S$ 使得 $x_0 > \mu$ 。

则称数 β 为数集 S 的上确界，记作 $\sup S$ 。



定义 1.3 (下确界)

设 S 是一个数集，若数 α 满足：

1. α 是 S 的下界： $\forall x \in S$ ，有 $x \geq \alpha$ 。
2. 任何大于 α 的数不是数集 S 的下界： $\forall \mu > \alpha, \exists x_0 \in S$ 使得 $x_0 < \mu$ 。

则称数 α 为数集 S 的下确界，记作 $\inf S$ 。



上确界与下确界统称为确界。应注意，数集 S 的确界可能属于 S ，也可能不属于 S 。

定理 1.1 (确界原理)

设 S 为非空数集，若 S 有上界，则 S 必有上确界；若 S 有下界，则 S 必有下确界。



若把 $\pm\infty$ 看作非正常上下确界，前文定义视为正常上（下）确界，那么任一非空数集必有上下确界。

1.2 函数的上下界

定义 1.4

设 f 为定义在 D 上的函数。若存在数 $M(L)$ ，使得对每一个 $x \in D$ ，有 $f(x) \leq M(f(x) \geq L)$ ，则称 f 为 D 上的有上（下）界函数， $M(L)$ 称为 f 在 D 上的一个上（下）界。

反之，若存在数 $M(L)$ ，使得对每一个 $x \in D$ ，有 $f(x) \geq M(f(x) \leq L)$ ，则称 f 为 D 上的有下（上）界函数。



定义 1.5

设 f 为定义在 D 上的函数。若存在正数 M ，使得对每一个 $x \in D$ ，有 $|f(x)| \leq M$ ，则称 f 为 D 上的有界函数。

反之，若存在正数 M ，使得对每一个 $x \in D$ ，有 $|f(x)| \geq M$ ，则称 f 为 D 上的无界函数。



记函数 f 在 D 上的上确界为 $\sup_{x \in D} f(x)$ ，类似的有 $\inf_{x \in D} f(x)$ 。

定义 1.6

设 f 为定义在 D 上的函数，若对任何 $x_1, x_2 \in D$ ，当 $x_1 < x_2$ 时：

1. 总有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ ，则称 f 为 D 上的增函数，若成立严格不等式 $f(x_1) < f(x_2)$ 时，称 f 为 D 上的严格增函数。
2. 总有 $f(x_1) \geq f(x_2)$ ，则称 f 为 D 上的减函数，若成立严格不等式 $f(x_1) > f(x_2)$ 时，称 f 为 D 上的严格减函数。



增函数和减函数统称为单调函数，严格增函数和严格减函数统称为严格单调函数。

严格单调函数必有反函数，其也为严格单调函数。

定义 1.7

设 D 为对称于原点的数集，函数 f 为定义在 D 上的函数。若对每一个 $x \in D$ ：

1. 有 $f(-x) = -f(x)$ ，则称 f 为 D 上的奇函数。
2. 有 $f(-x) = f(x)$ ，则称 f 为 D 上的偶函数。



1.3 实数系的构造

定义 1.8 (Dedekind 分割)

设 A 为 \mathbb{Q} 的子集，若满足以下三个条件

1. $A \neq \emptyset, A \neq \mathbb{Q}$;
2. 当 $p \in A, p \in A^c$ 时， $p < q$;
3. 任给 $p \in A$ ，存在 $q \in A$ ，使得 $p < q$;

则称 A 为 \mathbb{Q} 的一个分割，分割的全体组成集合为 \mathbb{R} 。



第 2 章 数列极限

2.1 数列极限的概念

定义 2.1 (数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义)

设 $\{a_n\}$ 为数列, A 为定数。若对任给的正数 ε , 总存在正整数 $N = N(\varepsilon)$, 使得当 $n > N$ 时有

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A , 或称 A 为数列 $\{a_n\}$ 的极限, 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \text{ 或 } a_n \rightarrow A (n \rightarrow \infty)$$



等价定义: 任给 $\varepsilon > 0$, 若在 $U(A; \varepsilon)$ 之外数列 $\{a_n\}$ 中的项至多只有有限个, 则称 $\{a_n\}$ 收敛于极限 A 。

若对于数列 $\{a_n\}$, 不存在 A 使得 $a_n \rightarrow A$, 则称数列 $\{a_n\}$ 发散。

特殊地, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则称 $\{a_n\}$ 为无穷小数列。

定义 2.2 (无穷大数列)

若数列 $\{a_n\}$ 满足: 对任意正数 $M > 0$, 存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时,

1. $a_n > M$, 则称数列 $\{a_n\}$ 发散于正无穷大, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, 或 $a_n \rightarrow +\infty$ 。
2. 有 $a_n < -M$, 则称数列 $\{a_n\}$ 发散于负无穷大, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, 或 $a_n \rightarrow -\infty$ 。



2.2 收敛数列的性质

定理 2.1 (唯一性)

若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则它只有一个极限。



证明 如果数列 $\{a_n\}$ 同时以 A, B 为极限, 即任给 $\varepsilon > 0$, 总存在 N_1, N_2 , 使得

$$|a_n - A| < \varepsilon, n > N_1; \quad |a_n - B| < \varepsilon, n > N_2$$

那么当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时需要恒成立

$$2\varepsilon > |a_n - A| + |a_n - B| \geq |A - B|$$

当 $A \neq B$ 时, 对于 $2\varepsilon < |A - B|$ 不恒成立, 因此只能 $A = B$ 。



定理 2.2 (有界性)

若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界。



证明 不妨设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ 。令 $\varepsilon = 1$, 那么存在 $N > 0$ 使得

$$|a_n - A| \leq 1$$

令

$$M = \{|a_1|, \dots, |a_N|, |A-1|, |A+1|\}$$

那么对任意正整数 n , 总有 $|a_n| \leq M$ 。 □

定理 2.3 (保号性)

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$, 则对任何 $a' \in (0, a)$ 存在正数 N , 使得当 $n > N$ 时, 有 $a_n > a'$ 。 ♥

定理 2.4 (保不等式性, 保序性)

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$, 则有

(1) 如果存在 $n > N$ 使得 $a_n \geq b_n$ 恒成立, 则 $A \geq B$ 。

(2) 反之, 如果 $A > B$, 则存在 $n > N_1$ 使得 $a_n > b_n$ 恒成立。 ♥

定理 2.5 (迫敛性, 夹逼定理)

设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 满足当 $n > N_0$ 有 $a_n \leq c_n \leq b_n$ 。若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$ 。 ♥

证明 即对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 N_1, N_2 , 使得当 $n > N_1$ 有

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

当 $n > N_2$ 有

$$A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon$$

因此当 $n > \max\{N_0, N_1, N_2\}$ 时, 有

$$A - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \varepsilon$$

□

定理 2.6 (四则运算法则)

若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为收敛数列。则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

若再假设 $b_n \neq 0$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

♥

定义 2.3 (数列的子列)

设 $\{a_n\}$ 为数列, $\{n_k\}$ 为正整数集 \mathbb{N}^+ 的无限子集, 且 $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$, 则数列 $\{a_{n_k}\}$ 称为数列 $\{a_n\}$ 的一个子列。 ♣

定理 2.7

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件： $\{a_n\}$ 的任何子列都收敛。



2.3 数列极限存在的条件

定义 2.4

若数列 $\{a_n\}$ 各项满足关系式 $a_n \leq a_{n+1}$ ($a_n \geq a_{n+1}$)，则称 $\{a_n\}$ 为递增（递减）数列，统称为单调数列。

**定理 2.8 (单调有界定理)**

有界的单调数列必有极限。

**定理 2.9 (致密性定理)**

任何有界数列必定有收敛的子列。

**定理 2.10 (柯西 (Cauchy) 收敛准则)**

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是：对任给的 $\varepsilon > 0$ ，存在正整数 N ，使得当 $n, m > N$ 时，有

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$



柯西收敛准则的条件称为柯西条件。

2.4 Stolz 公式

定理 2.11

对于任意的 $1 \leq k \leq n$ ，设 $b_k > 0$ 且 $m \leq \frac{a_k}{b_k} \leq M$ ，则有

$$m \leq \frac{\sum a_n}{\sum b_n} \leq M$$

**定理 2.12 (Stolz 公式一)**

设数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ ，且 $\{y_n\}$ 严格单调地趋于 $+\infty$ ，如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = A$$



证明 分类讨论 Todo……



定理 2.13 (Stolz 公式二)

设数列 $\{y_n\}$ 严格单调地趋于 0, 且数列 $\{x_n\}$ 也收敛到 0, 那么如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = A$$



证明 分类讨论 Todo……



2.5 例题

问题 2.1 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum a_n}{n} = A$ 。

解 即对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $n > N_1$ 使得

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

那么变形有

$$\left| \frac{\sum a_n}{n} - A \right| \leq \frac{\sum |a_n - A|}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{N_1} |a_k - A|}{n} + \frac{\sum_{k=N_1+1}^n |a_k - A|}{n}$$

注意到 $\sum_{k=1}^{N_1} |a_k - A|$ 已经为定值, 从而存在 $n > N_2$ 使得

$$\frac{\sum_{k=1}^{N_1} |a_k - A|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

因此当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时有

$$LHS < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - N_1}{n} \times \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

第 3 章 函数极限

3.1 函数极限的概念

定义 3.1

设 f 为定义在 $[a, +\infty)$ 上的函数, A 为定数。若对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在正数 $M = M(\varepsilon) \geq a$, 使得当 $x > M$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

则称函数 f 当 x 趋于 $+\infty$ 时以 A 为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow +\infty)$$



类似的有 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 。

不难证明

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$$

定义 3.2

设函数 f 在 $U^\circ(x_0; \delta')$ 内有定义, A 为定数。若对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在正数 $\delta < \delta'$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称函数 f 当 x 趋于 x_0 时以 A 为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$$



定义 3.3

设函数 f 在 $U_+^\circ(x_0; \delta')$ 内有定义, A 为定数。若对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在正数 $\delta < \delta'$, 使得当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称函数 f 当 x 趋于 x_0^+ 时以 A 为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0^+)$$



类似的还有左极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, 统称为单侧极限。又可记为

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \text{ 与 } f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

同理还有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$$

3.2 函数极限的性质

定理 3.1 (唯一性)

若极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则此极限是唯一的。



定理 3.2 (局部有界性)

若极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则 f 在 x_0 的某空心邻域 $U^\circ(x_0)$ 上有界。



定理 3.3 (保号性)

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$, 则对任何实数 $r < A$ 存在正数 $U^\circ(x_0)$, 使得对一切 $x \in U^\circ(x_0)$ 时, 有 $f(x) > r > 0$ 。



定理 3.4 (保不等式性)

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 均存在。若存在正数 N_0 , 使得当 $n > N_0$ 时, 有 $a_n \leq b_n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 。



定理 3.5 (迫敛性)

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$, 且在某 $U^\circ(x_0; \delta')$ 上有

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$ 。



定理 3.6 (四则运算法则)

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 均存在, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$



3.3 函数极限存在的条件

定理 3.7 (海涅 (Heine) 定理, 归结原则)

若 $f(x)$ 在 $U^\circ(x_0; \delta')$ 上有定义。 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的充要条件是: 任何含于 $U^\circ(x_0; \delta')$ 且以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ 都存在且相等。



即若对任何 $x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。

定理 3.8

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某空心右邻域 $U_+^\circ(x_0)$ 有定义, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ 的充要条件是: 对任何以 x_0 为极限的递减数列 $\{x_n\} \subset U_+^\circ(x_0)$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ 。

**定理 3.9**

设 $f(x)$ 为定义在 $U_+^\circ(x_0)$ 上的单调有界函数, 则右极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ 存在。

**定理 3.10 (柯西准则)**

设 $f(x)$ 在 $U^\circ(x_0; \delta')$ 上有定义, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的充要条件是: 任给 $\varepsilon > 0$, 存在正数 $\delta(< \delta')$, 使得对任何 $x', x'' \in U^\circ(x_0, \delta)$, 有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ 。



3.4 两个重要的极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

3.5 无穷小量与无穷大量

定义 3.4 (无穷小量)

设函数 f 在某 $U^\circ(x_0)$ 上有定义, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 则称 f 为当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小量。

**定义 3.5 (有界量)**

设函数 f 在某 $U^\circ(x_0)$ 上有界, 则称 f 为当 $x \rightarrow x_0$ 时的有界量。



无穷小量收敛于 0 的速度有快有慢。设当 $x \rightarrow x_0$ 时, f 与 g 均为无穷小量。

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时 f 为 g 的高阶无穷小量, 或称 g 为 f 的低阶无穷小量。

记作

$$f(x) = o(g(x)) (x \rightarrow x_0)$$

特别地, f 为当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小量记作

$$f(x) = o(1) (x \rightarrow x_0)$$

若存在正数 K 和 L , 使得在某 $U^\circ(x_0)$ 上有

$$K \leq \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq L$$

则称 f 与 g 为当 $x \rightarrow x_0$ 时的同阶无穷小量。特别当

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$$

时, f 与 g 必为同阶无穷小量。

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ 则称 f 与 g 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的等价无穷小量。记作

$$f(x) \sim g(x) (x \rightarrow x_0)$$

注意并不是任何两个无穷小量都可以进行这种阶的比较。例如 $x \rightarrow 0$ 时, $x \sin \frac{1}{x}$ 和 x^2 都是无穷小量, 但它们的比都不是有界量。

定理 3.11

设函数 f, g, h 在 $U^\circ(x_0)$ 上有定义, 且有 $f(x) \sim g(x) (x \rightarrow x_0)$, 则

1. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)h(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)h(x) = A$ 。
2. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{f(x)} = B$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{g(x)} = B$



定义 3.6 (无穷大量)

设函数 f 在某 $U^\circ(x_0)$ 上有定义, 若对任给的 $G > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in U^\circ(x_0; \delta) \subset U^\circ(x_0)$ 时, 有 $|f(x)| > G$, 则称函数 f 当 $x \rightarrow x_0$ 时有非正常极限 ∞ , 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 。



3.6 常见等价无穷小

实际上这些等价无穷小, 就是泰勒展开。

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, (-1, 1)$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + O(x^7)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}, (-1, 1]$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + O(x^8)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \mathbb{R}$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} + O(x^{11})$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \mathbb{R}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} - \frac{x^{10}}{362880} + O(x^{12})$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \mathbb{R}$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^8}{40320} + O(x^{10})$$

$$\tan x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-4)^{k-1}(1-4^k)B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1}, \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{67x^9}{2835} + O(x^{11})$$

第 4 章 函数的连续性

4.1 连续性的概念

定义 4.1 (连续性)

设函数 f 在某 $U(x_0)$ 上有定义。若

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称 f 在点 x_0 连续。



记 $\Delta x = x - x_0$, 称为自变量 x 在点 x_0 的增量或改变量。设 $y_0 = f(x_0)$, 相应的函数 y 在点 x_0 的增量记为

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = y - y_0$$

连续性的 ε - δ 形式定义: 若对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 则称函数 f 在点 x_0 连续。

或者进一步表示为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right)$$

定义 4.2

设函数 f 在某 $U_+(x_0)$ 上有定义。若

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

则称 f 在点 x_0 右连续。同理左连续。



因此函数 f 在点 x_0 连续的充要条件是: f 在点 x_0 既是左连续, 又是右连续。

定义 4.3 (间断点)

设函数 f 在某 $U^\circ(x_0)$ 上有定义。若 f 在点 x_0 无定义, 或 f 在点 x_0 有定义而不连续, 则称点 x_0 为函数 f 的间断点或不连续点。



若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 而 f 在点 x_0 无定义, 或有定义但 $f(x_0) \neq A$, 则称点 x_0 为 f 的可去间断点。

若函数 f 在点 x_0 的左、右极限都存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, 则称点 x_0 为函数 f 的跳跃间断点。

可去间断点与跳跃间断点统称为第一类间断点, 所有其他形式的间断点统称为第二类间断点。

若函数 f 在区间 I 上的每一点都连续, 则称 f 为 I 上的连续函数。对于闭区间或半开区间的端点, 函数在这些点上连续是指左连续或右连续。

4.2 连续函数的性质

定理 4.1 (局部有界性)

若函数 f 在点 x_0 连续, 则 f 在某 $U(x_0)$ 上有界。



定理 4.2 (局部保号性)

若函数 f 在点 x_0 连续, 且 $f(x_0) > 0$, 则对任何正数 $r < f(x_0)$, 存在某 $U(x_0)$, 使得对一切 $x \in U(x_0)$, 有 $f(x) > r$ 。



定理 4.3 (四则运算)

若函数 f, g 在点 x_0 连续, 则 $f \pm g, f \cdot g, f/g$ 也都在点 x_0 连续。



定理 4.4

若函数 f 在点 x_0 连续, g 在点 u_0 连续, $u_0 = f(x_0)$, 则复合函数 $g \circ f$ 在 x_0 连续。



定义 4.4

设 f 为定义在数集 D 上的函数。若存在 $x_0 \in D$, 使得对一切 $x \in D$, 有 $f(x_0) \geq f(x)$, 则称 f 在 D 上有最大值, 并称 $f(x_0)$ 为 f 在 D 上的最大值。



定理 4.5 (最大、最小值定理)

若函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 f 在闭区间 $[a, b]$ 上有最大值与最小值。



定理 4.6 (介值定理)

若函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \neq f(b)$ 。若 μ 为介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任何实数。则至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$ 使得 $f(x_0) = \mu$ 。



定理 4.7

若函数 f 在 $[a, b]$ 上严格单调并连续, 则反函数 f^{-1} 在其定义域 $[\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}]$ 上连续。



定义 4.5

设 f 是定义在区间 I 上的函数。若对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得对任何 $x', x'' \in I$, 只要 $|x' - x''| < \delta$, 就有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, 就称函数 f 在区间 I 上一致连续。



定理 4.8 (一致连续性)

若函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 f 在 $[a, b]$ 上一致连续。



4.3 初等函数的连续性

定理 4.9

设 $p > 0$, a, b 为任意两个实数, 则有

$$p^a \cdot p^b = p^{a+b}, (p^a)^b = p^{ab}$$



定理 4.10

指数函数 $a^x (a > 0)$ 在 \mathbb{R} 上是连续的。



第 5 章 导数和微分

5.1 导数的定义

定义 5.1

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域有定义, 若极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在, 则称函数 f 在点 x_0 可导, 并称该极限为函数 f 在点 x_0 的导数, 记作 $f'(x_0)$ 。



定理 5.1

若函数 f 在点 x_0 可导, 则 f 在点 x_0 连续。



定义 5.2

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某右邻域 $[x_0, x_0 + \delta)$ 上有定义, 若右极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, (0 < \Delta x < \delta)$$

存在, 则称该极限值为 f 在点 x_0 的右导数, 记作 $f'_+(x)$ 。同理有左导数。



左导数和右导数统称为单侧导数。

定理 5.2

若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域上有定义, 则 $f'(x_0)$ 存在的充要条件是 $f'_-(x)$ 与 $f'_+(x)$ 都存在且相等。



若函数 f 在区间 I 上每一点都可导 (对区间端点, 仅考虑相应的单侧导数), 则称 f 为 I 上的可导函数。此时对每一个 $x \in I$, 都有 f 的一个导数 $f'(x)$ (或单侧导数) 与之对应。

这样就定义了一个在 I 上的函数, 称为导函数, 简称为导数。记作 $f', y', \frac{dy}{dx}$, 即

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta}, x \in I$$

有时 $f'(x_0)$ 也可写作 $y'|_{x=x_0}$ 或 $\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$ 。

曲线 $y = f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 的切线方程是

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

定义 5.3

若函数 f 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 上对一切 $x \in U(x_0)$ 有

$$f(x_0) \geq f(x)$$

则称 f 在点 x_0 取得极大值, 称点 x_0 为极大值点。同理有极小值点。



极大值、极小值统称为极值，极大值点、极小值点统称为极值点。

定理 5.3 (费马定理)

设函数 f 在点 x_0 的某邻域上有定义，且在点 x_0 可导。若点 x_0 为极值点，则必有 $f'(x_0) = 0$ 。

5.2 求导法则

定理 5.4

若函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在点 x_0 可导，则函数 $f(x) = u(x) \pm v(x)$ 在点 x_0 也可导，且

$$f'(x_0) = u'(x_0) \pm v'(x_0)$$

函数 $f(x) = u(x)v(x)$ 在点 x_0 也可导，且

$$f'(x_0) = u'(x_0)v'(x_0)$$

若 $v(x) \neq 0$ ，则函数 $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ 在点 x_0 也可导，且

$$f'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v(x_0)^2}$$

定理 5.5

设 $y = f(x)$ 为 $x = \phi(y)$ 的反函数，若 $\phi(y)$ 在点 y_0 的某邻域上连续、严格单调且 $\phi'(y_0) \neq 0$ ，则 $f(x)$ 在点 $x_0 = \phi(y_0)$ 可导，且

$$f'(x_0) = \frac{1}{\phi'(y_0)}$$

定理 5.6

设 $u = \phi(x)$ 在点 x_0 可导， $y = f(u)$ 在点 $u_0 = \phi(x_0)$ 可导，则复合函数 $f \circ \phi$ 在点 x_0 可导，且

$$(f \circ \phi)'(x_0) = f'(u_0)\phi'(x_0) = f'(\phi(x_0))\phi'(x_0)$$

5.2.1 基本求导法则

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. $(uv)' = u'v + uv'$
3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
4. $(u \pm v)' = u' \pm v'$

5.2.2 基本初等函数导数公式

1. $(c)' = 0$ (c 为常数)
2. $(x^a)' = ax^{a-1}$ (a 为任意实数)
3. $(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x, (\tan x)' = \sec^2 x$
4. $(\cot x)' = -\csc^2 x, (\sec x)' = \sec x \tan x, (\csc x)' = -\csc x \cot x$

$$5. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$6. (a^x)' = a^x \ln a (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$$

$$7. (\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a} (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$$