高等代数笔记

Gao Deng Dai Shu

rogeryoungh

2021 年 1 月 6 日 · LaTeX

目录

第 1 章 线性方程组的解法

1.1 矩阵消元法

形如这样左端都是未知量 x_n 的一次齐次式，右端是常数，

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

像这样的方程称为线性方程。每个未知量前面的数称为系数，右端的项称为常数项。

含 n 个未知量的线性方程组称为 n 元线性方程组，它的一般形式是

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

方程的个数 s 与未知量的个数 n 可以相等，也可以不等。

定义 1.1 (线性方程组的初等变换)

线性方程组的初等变换有三种，分别为：

1. *把一个方程的倍数加到另一个方程上。*
2. *互换两个方程的位置。*
3. *用一个非零数乘某一个方程。*

♣

对于线性方程组，若 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 分别可以用数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 代入后，每个方程都变成恒等式，那么称 n 元有序组 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是线性方程组的一个解。方程组所有解组成的集合称为这个线性方程组的解集，符合实际要求的解称为可行解。

通过初等变换能够使线性方程组变为阶梯形方程组，进一步可以变为简化阶梯形方程组，此种形式可以较方便的看出方程组的解。

定理 1.1

初等变换不改变线性方程组的解。

♡

可以把原线性方程组的系数和常数项按次序排成一张表，称为方程组的增广矩阵；而只列出系数的方程组称为系数矩阵。

定义 1.2

由 sn 个数排成的 s 行（横的）n 列（纵的）表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

称为一个 $s \times n$ 矩阵，记作 $A_{s\times n}$ 或 $A = (a_{ij})$，它的 (i, j) 元也记作 $A(i; j)$。

♣

特殊的，如果矩阵 A 的行数和列数相等皆为 n，则称它为 n 级方阵或方阵。元素全为 0 的矩阵称为零矩阵，记作 $0_{s\times n}$ 或 0。

定义 1.3 (初等行变换)

矩阵的初等行变换有三种，分别为：

1. 把一行的倍数加到另一行上。

2. 互换两行的位置。

3. 用一个非零数乘某一行。

矩阵经过初等行变换，可变成阶梯形矩阵，并可进一步化简成简化行阶梯形矩阵。

阶梯形矩阵的特点为（1）元素全为 0 的行（零行）在下方（如果有的话）;（2）元素不全为 0 的行（非零行），左起第一个不为 0 的元素（主元），他们的列指标随着行指标递增而严格增大。

简化行阶梯形矩阵的特点为（1）它是阶梯形矩阵;（2）每个非零行的主元都是 1;（3）每个主元所在的列的其余元素都是 0。

在解线性方程组时，可以通过一系列初等行变换，它的增广矩阵化为阶梯形矩阵，甚至继续化简为简化行阶梯形矩阵，都可简化求解过程。

定理 1.2

任意矩阵都可以经过一系列初等行变换化为阶梯形矩阵，也可以变成简化行阶梯形矩阵。

1.2 线性方程组的解的情况及其判别准则

由于初等变换不改变线性方程组的解，其总可以化为阶梯形方程组。因此设阶梯形方程组有 n 个未知量，它的增广矩阵 J 有 r 个非零行，J 有 $n+1$ 列。

1. 若阶梯形方程组中出现 $0=d$（其中 d 为非零数）这种方程，即最后一个非零行的主元位于 $n+1$ 列，则阶梯形方程组无解。

2. 最后一个非零行的主元不位于 $n+1$ 列

2(1). $r=n$ 时，阶梯形方程恰有唯一解。

2(2). $r<n$ 时，有无穷多组解。

定理 1.3

系数为有理数（实数、复数）的 n 元线性方程组的解的情况只有三种可能：无解，有唯一解，有无穷多组解。

若一个线性方程组有解，则称它是相容的；否则称它是不相容的。

1.3 数域

定义 1.4

复数集的一个子集 K 是一个数域，那么满足：

1. $0, 1 \in K$；
2. $a, b \in K \Rightarrow a \pm b, ab \in K$；
3. $a, b \in K$，且 $b \neq 0 \Rightarrow \dfrac{a}{b} \in K$。

♣

其中，$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 都是数域，但整数集 Z 不是数域。

有理数域是最小的数域。

定理 1.4

任意数域都包含有理数域。

♡

第 2 章 行列式

2.1 排列

定义 2.1

由 $1, 2, \cdots, n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 阶排列。

特殊的，排列 $12\cdots n$ 也是一个 n 阶排列，称为自然排列。

定义 2.2

在一个排列中，如果一对数前面的数大于后面的数，那么它们就称为一个逆序，反之称为正序。排列中逆序的对数称为这个排列的逆序数。

逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数的排列称为奇排列。

排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记为

$$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$$

定义 2.3

把排列中某两个数位置互换，得到一个新排列。称这样的一个变换称为一个对换。

定理 2.1

对换改变排列的奇偶性。

证明 设对换为 (i,j)，分类讨论：

1. 若所换两数相邻，则不影响后面数字的逆序数。那么若 ij 为一个逆序，则逆序数减 1，否则逆序数加 1，总之逆序数奇偶性改变。

2. 若所换两数不相邻，不妨设 i 在 j 之前，排列为

$$\cdots i \quad k_1\cdots k_s \quad j\cdots$$

那么有

$$(i,j) = (i,k_1)\cdots(i,k_s)(i,j)(k_s,j)\cdots(k_1,j)$$

即任意对换即总可以分解为奇数个相邻对换的积。 □

任何一个 n 阶排列都可以与自然排列由一系列对换互变，即置换。奇置换可以分解为奇数个对换的积，偶置换可以分解为偶数个对换的积。

2.2 n 阶行列式

记 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 元排列求和。

定义 2.4

n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

该式称为 n 阶行列式的完全展开式。♣

若对角线下方的元素全为 0，则称为上三角行列式，即对于所有的 $1 \leqslant i < j \leqslant n$，有 $a_{ji} = 0$。

定理 2.2

上三角行列式的值为

$$|A| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

♡

证明 考虑其完整展开式的任意一项

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

若该项不为 0，则对 $1 \leqslant k \leqslant n$，皆有 $j_k \leqslant k$。

因此只有 $j_k = k$，只有这一项不为 0。 □

定理 2.3

给定行指标的一个排列 $i_1i_2\cdots i_n$，则 n 级矩阵的行列式为

$$|A| = \sum_{k_1k_2\cdots k_n} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)} a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}\cdots a_{i_nk_n}$$

♡

证明 设 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 经过 s 次互换相邻元素变为 $a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}\cdots a_{i_nk_n}$，则有

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)} = (-1)^s$$

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^s = (-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}$$

从而

$$\begin{aligned} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)} &= (-1)^s(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^s \\ &= (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} \end{aligned}$$

□

同理，给定列指标的一个排列 $k_1k_2\cdots k_n$，则 n 级矩阵的行列式为

$$|A| = \sum_{i_1i_2\cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)} a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}\cdots a_{i_nk_n}$$

2.3 行列式的性质

定理 2.4

转置后行列式值不变。

证明 设行列式 $B=A^T$，即 $a_{ij}=b_{ji}$。由前文知，按列指标展开 B 有（注意第 1 个下标是列指标，第 2 个下标是行指标）

$$|B|=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

按列指标展开 A 有

$$|A|=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

因此 $|A|=|B|$。 □

定理 2.5

行列式的一行乘以一个数，等于行列式乘以这个数。

证明 即行列式 B 除了第 i_1 行有 $b_{i_1j}=ka_{i_1j}$，其他行都有 $b_{ij}=a_{ij}$。

$$\begin{aligned}|B|&=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(ka_{i_1j})\cdots a_{nj_n}\\&=k\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{i_1j}\cdots a_{nj_n}\\&=k|A|\end{aligned}$$

□

定理 2.6

除了同一行以外全部相等的两个行列式，与此行替换为这两行的和的行列式相等。

证明 即行列式 A 除了第 i_1 行有 $a_{i_1j}=b_{i_1j}+c_{i_1j}$，其他行都有 $a_{ij}=b_{ij}=c_{ij}$。

$$\begin{aligned}|A|&=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(b_{i_1j}+c_{i_1j})\cdots a_{nj_n}\\&=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots b_{i_1j}\cdots a_{nj_n}+\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots c_{i_1j}\cdots a_{nj_n}\\&=|B|+|C|\end{aligned}$$

□

定理 2.7

行列式中有两行互换，行列式反号。

证明 即设行列式 B 为行列式第 k_1,k_2 两行交换的结果，又

$$(-1)^{\tau(j_1\cdots j_{k_2}\cdots j_{k_1}\cdots j_n)}=-(-1)^{\tau(j_1\cdots j_{k_1}\cdots j_{k_2}\cdots j_n)}$$

那么有

$$
\begin{aligned}
|B| &= \sum_{j_1\cdots j_{k_2}\cdots j_{k_1}\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_{k_2}\cdots j_{k_1}\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{k_1 j_{k_2}}\cdots a_{k_2 j_{k_1}}\cdots a_{nj_n} \\
&= -\sum_{j_1\cdots j_{k_1}\cdots j_{k_2}\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_{k_1}\cdots j_{k_2}\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{k_1 j_{k_1}}\cdots a_{k_2 j_{k_2}}\cdots a_{nj_n} \\
&= -|A|
\end{aligned}
$$

□

定理 2.8

行列式中有两行相等，行列式为零。

证明 交换这相同的两行，行列式变号，其仍与原来相等，只能为 0。□

定理 2.9

行列式中两行成比例，行列式为零。

证明 提出公因子使两行相等，即为 0。□

定理 2.10

把一行的倍数加到另一行，行列式不变。

证明 一行是另一行的倍数的行列式为 0，合并后自然不变。□

2.4 行列式按一行展开

定义 2.5 (代数余子式)

n 阶行列式 $|A|$ 中，划去第 i 行和第 j 列，剩下的元素按原来次序组成的 $n-1$ 阶行列式称为矩阵 A 的 (i,j) 元的余子式。记作

$$
M_{ij} = \sum_{k_1\cdots k_{i-1}k_{i+1}\cdots k_n} (-1)^{\tau(k_1\cdots k_{i-1}k_{i+1}\cdots k_n)} a_{1k_1}\cdots a_{i-1,k_{i-1}} a_{i+1,k_{i+1}}\cdots a_{nk_n}
$$

其中 $j=k_i$，令 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称 A_{ij} 是 A 的 (i,j) 元的代数余子式。

定理 2.11

对于 n 阶行列式 $|A|$ 有

$$
|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}
$$

前者称为 n 阶行列式按第 i 行的展开式，后者称为按第 j 列的展开式。

证明 首先列出 $|A|$ 的行完全展开式，其中 $j=k_i$

$$
|A| = \sum_{k_1\cdots k_{i-1}jk_{i+1}\cdots k_n} (-1)^{\tau(k_1\cdots k_{i-1}jk_{i+1}\cdots k_n)} a_{1k_1}\cdots a_{i-1,k_{i-1}} a_{ij} a_{i+1,k_{i+1}}\cdots a_{nk_n}
$$

把第 i 行换到第 1 行，第 j 列换到第 1 列，由对换的性质有

$$(-1)^{\tau(i1\cdots(i-1)(i+1)\cdots n)+\tau(jk_1\cdots k_{i-1}k_{i+1}\cdots k_n)}=(-1)^{i-1}(-1)^{j-1}(-1)^{\tau(k_1\cdots k_{i-1}k_{i+1}\cdots k_n)}$$

因此

$$\begin{aligned}|A|&=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-1)^{i+j}\sum_{k_1\cdots k_{i-1}k_{i+1}\cdots k_n}(-1)^{\tau(k_1\cdots k_{i-1}k_{i+1}\cdots k_n)}a_{1k_1}\cdots a_{i-1,k_{i-1}}a_{i+1,k_{i+1}}\cdots a_{nk_n}\\&=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\end{aligned}$$

对于列展开式，转置即可。 □

定理 2.12

对于 n 阶行列式 $|A|$ 有

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=0(k\neq i)$$

♡

证明 设矩阵 B 第 k 行与第 i 行相等，因此按第 k 行展开有

$$|B|=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}A_{kj}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=0$$

□

定义 2.6 (范德蒙 Vandermonde 行列式)

若行列式满足 $a_{ij}=a_j^i$，则称为范德蒙特行列式。其值为（证略）

$$\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$$

♣

2.5 克莱姆（Cramer）法则

对于数域 K 上 n 个方程的 n 元线性方程组，

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\quad\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdot+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

其系数矩阵记作 A，增广矩阵记作 $\widetilde{A}$

第 3 章 线性方程组的解系

3.1 n 维向量空间 K^n

取定一个数域 K，设 n 是任意给定的一个正整数。令

$$K^n = \{(a_1, \cdots, a_n) \mid a_i \in K, i = 1, \cdots, n\}$$

如果 $a_1 = b_1, \cdots, a_n = b_n$，则称 K^n 中的两个元素：$(a_1, \cdots, a_n), (b_1, \cdots, b_n)$ 相等。

在 K^n 中规定加法运算：

$$(a_1, \cdots, a_n) + (b_1, \cdots, b_n) := (a_1 + b_1, \cdots, a_n + b_n)$$

在 K 的元素与 K^n 的元素之间规定数量乘法运算：

$$k(a_1, \cdots, a_n) := (ka_1, \cdots, ka_n)$$

容易验证加法和数量乘法运算满足下述八条运算法则：对于 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in K^n, k, l \in K$ 有

1. $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}$
2. $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma})$
3. 把元素 $(0, \cdots, 0)$ 记作零元素 $\mathbf{0}$，使得

$$\mathbf{0} + \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{0} = \boldsymbol{\alpha}$$

4. 对于 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, \cdots, a_n) \in K^n$，定义其负元素

$$-\boldsymbol{\alpha} := (-a_1, \cdots, -a_n)$$

于是有

$$\boldsymbol{\alpha} + (-\boldsymbol{\alpha}) = (-\boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\alpha} = 0$$

5. $1\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$
6. $(kl)\boldsymbol{\alpha} = k(l\boldsymbol{\alpha})$
7. $(k + l)\boldsymbol{\alpha} = k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\alpha}$
8. $k(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = k\boldsymbol{\alpha} + k\boldsymbol{\beta}$

定义 3.1 (n 维向量空间)

数域 K 上所有 n 元有序数组组成的集合 K^n，连同定义在它上面的加法运算和数量乘法运算，及其满足的 8 条运算法则一起，称为数域 K 上的一个 n 维向量空间。K^n 的元素称为 n 维向量；设向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, \cdots, a_n)$，称 a_i 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 i 个分量。♣

在 n 维向量空间 K^n 中，可以定义减法运算

$$\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} := \boldsymbol{\alpha} + (-\boldsymbol{\beta})$$

n 元有序数组写成一行，称为行向量；写成一列，称为列向量，也可以看作行向量的转置。

K^n 可以看成是 n 维行向量组成的向量空间，也可以看作是列向量组成的向量空间。

定义 3.2 (线性组合)

给定向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，再任给 K 中的一组数 $k_1,\cdots,k_s$，那么向量

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$$

称为向量组 $k_1,\cdots,k_s$ 的一个线性组合，其中 $k_1,\cdots,k_s$ 称为系数。♣

定义 3.3 (线性表出)

给定向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，对于 $\boldsymbol{\beta}\in K^n$，若存在 K 中的一组数 $k_1,\cdots,k_s$ 满足

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$$

那么称 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出。♣

于是可以把数域 K 上的 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \qquad\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdot+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

写成

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性方程组的列向量组，$\boldsymbol{\beta}$ 是由常数项组成的列向量。

定义 3.4 (线性子空间)

K^n 的一个非空子集 U 是 K^n 的一个线性子空间，那么满足

1. U 对于 K^n 的加法封闭：$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}\in U\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}\in U$

2. U 对于 K^n 的乘法封闭：$\boldsymbol{\alpha}\in U,k\in K\Rightarrow k\boldsymbol{\alpha}\in U$ ♣

特殊的，0 也是 K^n 的一个，称为零子空间。K^n 本身也是 K^n 的一个子空间。

$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的所有线性组合也是 K^n 的一个子空间，称为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 生成（张成）的子空间，记作

$$\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\rangle:=\{k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\mid k_i\in K,i=1,\cdots,s\}$$

于是线性方程组有解，等价与 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出，即 $\boldsymbol{\beta}\in\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\rangle$。