数学分析笔记

SHUXUEFENXIBIJI

rogeryoungh

2021 年 2 月 16 日 · LaTeX

目录

1 积分的方法与技巧 **2**

1.1 分项积分法 2

第 1 章 积分的方法与技巧

这部分我的参考书是《积分的方法与技巧》(金玉明等)。

1.1 分项积分法

若干微分式的和或差的不定积分，等于每个微分式的各自积分的和或差。

$$\int (f(x)+g(x)-h(x))\,\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x-\int h(x)\mathrm{d}x$$

因此多项式的积分可以简单的通过积分各个单项式得到。
如果一个分式的分母为多项式，则可把它化成最简单的分式再积分。如

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$$

这里可以通过通分后待定系数得到。于是其积分为

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$$

对于更复杂的真分式的情况，若要计算的是

$$\int\frac{mx+n}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$$

分母不一定能直接分解，但总能进行配方

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}=t^2\pm a^2$$

再令 $A=m, B=n-\dfrac{1}{2}mp$，可得

$$\int\frac{mx+n}{x^2+px+q}\mathrm{d}x=\int\frac{At+B}{t^2\pm a^2}\mathrm{d}t=A\int\frac{t\mathrm{d}t}{t^2\pm a^2}+B\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2\pm a^2}$$

其中

$$A\int\frac{t\mathrm{d}t}{t^2\pm a^2}=\frac{A}{2}\int\frac{\mathrm{d}(t^2\pm a^2)}{t^2\pm a^2}=\frac{A}{2}\ln|t^2\pm a^2|+C$$
$$B\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2}=\frac{B}{a}\arctan\frac{t}{a}+C$$
$$B\int\frac{t\mathrm{d}t}{t^2-a^2}=\frac{B}{2a}\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right|+C$$

因此当 $p^2<4q$ 时，可以得到

$$\begin{aligned}\int\frac{mx+n}{x^2+px+q}&=\frac{A}{2}\ln|t^2+a^2|+\frac{B}{a}\arctan\frac{t}{a}+C\\&=\frac{m}{2}\ln|x^2+px+q|+\frac{2n-mp}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C\end{aligned}$$

当 $p^2>4q$ 时，可以得到

$$\begin{aligned}\int\frac{mx+n}{x^2+px+q}&=\frac{A}{2}\ln|t^2-a^2|+\frac{B}{2a}\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right|\\&=\frac{m}{2}\ln|x^2+px+q|+\frac{2n-mp}{2\sqrt{4q-p^2}}\ln\left|\frac{2x+p-\sqrt{p^2-4q}}{2x+p+\sqrt{p^2-4q}}\right|+C\end{aligned}$$