数学分析笔记

SHUXUEFENXIBIJI

rogeryoungh

2021 年 1 月 20 日·LaTeX

目录

第 1 章　实数集与函数

集合论与函数和映射视作熟知的。若无额外说明，皆在 $\mathbb{R}$ 下。

1.1 实数

有理数和无理数统称实数，有理数可用分数形式 $\dfrac{p}{q}$ 表示，也可用有限十进小数或无限十进循环小数表示；而无限十进不循环小数则成为无理数。

为了让任意实数都可用一个确定的无限小数来表示，如下规定：

对于正有限小数 (包括正整数) x，当 $x = a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 时，其中 $0 \geq a_i \geq 9, i = 1, 2, \cdots, n, a_n \neq 0$，$a_0$ 为非负整数，即

$$x = a_0.a_1a_2\cdots(a_n - 1)9999\cdots,$$

而当 $x = a_0$ 为正整数时，则记

$$x = (a_0 - 1).9999\cdots$$

对于负有限小数（包括负整数）y，则先将 $-y$ 表示为无限小数，再在所得无限小数之前加负号。并规定 0 表示为 $0.0000\cdots$。

实数有以下性质：

1. 实数集 $\mathbb{R}$ 对加、减、乘、除（除数不为 0）四则运算是封闭的。
2. 实数集是有序的：任意 a, b 必满足三个关系之一（$a < b, a = b, a > b$）。
3. 实数的大小关系具有传递性：若 $a > b, b > c$，则有 $a > c$。
4. 实数具有阿基米德性：对任何 $a, b \in \mathbb{R}$，若 $b > a > 0$，则存在正整数 n，使得 $na > b$。
5. 实数集具有稠密性：任意 a, b 之间必存在另一个实数，可以是有理数，也可以是无理数。

1.1.1 数集·确界原理

区间分为无限区间和有限区间。

设实数 $a < b$，则称数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 为开区间，记作 (a, b)；数集 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为闭区间，记作 $[a, b]$；数集 $\{x \mid a \leqslant x < b\}$ 和 $\{x \mid a < x \leqslant b\}$ 都称为半开半闭区间，分别记作 $[a, b)$ 和 $(a, b]$。以上几类区间统称为有限区间。

满足关系式 $x \geqslant a$ 的全体实数 x 的集合记作 $[a, +\infty)$，类似地，有 $(-\infty, a], (a, \infty), (-\infty, a)$。特殊地 $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$。这几类区间统称为无限区间。

设 $\delta > 0$，满足 $|x - a| < \delta$ 的 x 的集合称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a; \delta)$，或简单的记作 $U(a)$，即有

$$U(a; \delta) = (a - \delta, a + \delta)$$

点 a 的空心 δ 邻域定义为

$$U^\circ(a; \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$$

也可以简单的记作 $U^\circ(a)$。

此外，常用的邻域还有：

点 a 的 δ 右邻域 $U_+(a;\delta)=[a,a+\delta)$，左邻域 $U_-(a;\delta)$。以及点 a 的空心 δ 左、右邻域 $U_-^\circ(a)$ 与 $U_+^\circ(a)$。

以及 ∞ 邻域 $U(\infty)=\{x \mid |x|>M\}$,其中 M 为充分大的正数。类似的还有 $U(+\infty)=\{x \mid x>M\}$ 和 $U(-\infty)=\{x \mid x<-M\}$。

定义 1.1 (有界集)

设 S 为一个非空数集，若存在数 $M\in$ 使得 $\forall x\in S$

1. 都有 $x\leqslant M$，则称 M 是 S 的一个上界。
2. 都有 $x\geqslant M$，则称 M 是 S 的一个下界。

♣

若数集 S 既有上界又有下界，则称 S 为有界集，反之称为无界集。

定义 1.2 (上确界)

设 S 是一个数集，若数 β 满足：

1. β 是 S 的上界：$\forall x\in S$，有 $x\leqslant\beta$。
2. 任何小于 β 的数不是数集 S 的上界：$\forall\mu<\beta,\exists x_0\in S$ 使得 $x_0>\mu$。

则称数 β 为数集 S 的上确界，记作 $\sup S$。

♣

定义 1.3 (下确界)

设 S 是一个数集，若数 α 满足：

1. α 是 S 的下界：$\forall x\in S$，有 $x\geqslant\alpha$。
2. 任何大于 α 的数不是数集 S 的下界：$\forall\mu>\alpha,\exists x_0\in S$ 使得 $x_0<\mu$。

则称数 α 为数集 S 的下确界，记作 $\inf S$。

♣

上确界与下确界统称为确界。应注意，数集 S 的确界可能属于 S，也可能不属于 S。

定理 1.1 (确界原理)

设 S 为非空数集，若 S 有上界，则 S 必有上确界；若 S 有下界，则 S 必有下确界。♡

若把 $\pm\infty$ 看作非正常上下确界，前文定义视为正常上（下）确界，那么任一非空数集必有上下确界。

1.2 函数的上下界

定义 1.4

设 f 为定义在 D 上的函数。若存在数 $M(L)$，使得对每一个 $x\in D$，有 $f(x)\leqslant M(f(x)\geq L)$，则称 f 为 D 上的有上（下）界函数，$M(L)$ 称为 f 在 D 上的一个上（下）界。

反之，若存在数 $M(L)$，使得对每一个 $x\in D$，有 $f(x)\geqslant M(f(x)\leqslant L)$，则称 f 为 D 上的有无上（下）界函数。

♣

定义 1.5

设 f 为定义在 D 上的函数。若存在正数 M，使得对每一个 $x \in D$，有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 f 为 D 上的有界函数。

反之，若存在正数 M，使得对每一个 $x \in D$，有 $|f(x)| \geq M$，则称 f 为 D 上的无界函数。♣

记函数 f 在 D 上的上确界为 $\sup_{x\in D} f(x)$，类似的有 $\inf_{x\in D} f(x)$。

定义 1.6

设 f 为定义在 D 上的函数，若对任何 $x_1, x_2 \in D$，当 $x_1 < x_2$ 时：

1. 总有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$，则称 f 为 D 上的增函数，若成立严格不等式 $f(x_1) < f(x_2)$ 时，称 f 为 D 上的严格增函数。
2. 总有 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$，则称 f 为 D 上的减函数，若成立严格不等式 $f(x_1) > f(x_2)$ 时，称 f 为 D 上的严格减函数。

♣

增函数和减函数统称为单调函数，严格增函数和严格减函数统称为严格单调函数。

严格单调函数必有反函数，其也为严格单调函数。

定义 1.7

设 D 为对称于原点的数集，函数 f 为定义在 D 上的函数。若对每一个 $x \in D$：

1. 有 $f(-x) = -f(x)$，则称 f 为 D 上的奇函数。
2. 有 $f(-x) = f(x)$，则称 f 为 D 上的偶函数。

♣

1.3 实数系的构造

定义 1.8 (Dedekind 分割)

设 A 为 Q 的子集，若满足以下三个条件

1. $A \neq \varnothing, A \neq \mathbb{Q}$;
2. 当 $p \in A, p \in A^c$ 时，$p < q$;
3. 任给 $p \in A$，存在 $q \in A$，使得 $p < q$;

则称 A 为 $\mathbb{Q}$ 的一个分割，分割的全体组成集合为 $\mathbb{R}$。♣

第 2 章 数列极限

2.1 数列极限的概念

定义 2.1 (数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义)

设 $\{a_n\}$ 为数列，A 为定数。若对任给的正数 ε，总存在正整数 $N = N(\varepsilon)$，使得当 $n > N$ 时有

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A，或称 A 为数列 $\{a_n\}$ 的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A，\text{或 } a_n \to a(n \to \infty)$$

♣

等价定义：任给 $\varepsilon > 0$，若在 $U(A;\varepsilon)$ 之外数列 $\{a_n\}$ 中的项至多只有有限个，则称 $\{a_n\}$ 收敛于极限 A。

若对于数列 $\{a_n\}$，不存在 A 使得 $a_n \to A$，则称数列 $\{a_n\}$ 发散。

特殊地，若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，则称 $\{a_n\}$ 为无穷小数列。

定义 2.2 (无穷大数列)

若数列 $\{a_n\}$ 满足：对任意正数 $M > 0$，存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，

（1） $a_n > M$，则称数列 $\{a_n\}$ 发散于正无穷大，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$，或 $a_n \to +\infty$。

（2）有 $a_n < M$，则称数列 $\{a_n\}$ 发散于负无穷大，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$，或 $a_n \to -\infty$。

♣

2.2 收敛数列的性质

定理 2.1 (唯一性)

若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则它只有一个极限。

♡

证明 如果数列 $\{a_n\}$ 同时以 A, B 为极限，即任给 $\varepsilon > 0$，总存在 N_1, N_2，使得

$$|a_n - A| < \varepsilon, n > N_1; \quad |a_n - B| < \varepsilon, n > N_2$$

那么当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时需要恒成立

$$2\varepsilon > |a_n - A| + |a_n - B| \geqslant |A - B|$$

当 $A \neq B$ 时，对于 $2\varepsilon < |A - B|$ 不恒成立，因此只能 $A = B$。 □

定理 2.2 (有界性)

若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 有界。

♡

证明 不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$。令 $\varepsilon = 1$，那么存在 $n > N$ 使得

$$|a_n - A| \leqslant 1$$

令

$$M=\{|a_1|,\cdots,|a_N|,|A-1|,|A+1|\}$$

那么对任意正整数 n，总有 $|a_n|\leqslant M$。 □

定理 2.3 (保不等式性，保序性)

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$，则有

（1）如果存在 $n>N$ 使得 $a_n\geqslant b_n$ 恒成立，则 $A\geqslant B$。

（2）反之，如果 $A>B$，则存在 $n>N_1$ 使得 $a_n>b_n$ 恒成立。 ♡

证明 （1）如果设 $B-A=2\delta>0$，那么存在 $N_2,N_3>N$

$$|a_n-A|<\delta,n>N_2;\qquad |b_n-B|<\delta,n>N_3$$

于是当 $n>\max\{N_2,N_3\}$ 时有

$$a_n<A+\delta=B-\delta<b_n$$

因此矛盾，故 $A\geqslant B$。

（2）设 $A-B=2\delta>0$，那么存在 N_2,N_3

$$|a_n-A|<\delta,n>N_2;\qquad |b_n-B|<\delta,n>N_3$$

于是存在 $N_1=\max\{N_2,N_3\}$，当 $n>N_1$ 时有

$$a_n>A-\delta=B+\delta>b_n$$

□

若 b_n 是常数列，$A\neq 0$，我们还可得到推论：存在 N，使得当 $n>N$ 时，有

$$\frac{1}{2}|A|<|a_n|<\frac{3}{2}|A|$$

定理 2.4 (迫敛性，夹逼定理)

设数列 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 满足当 $n>N_0$ 有 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$。若

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A=\lim_{n\to\infty}c_n$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$。 ♡

证明 即对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 N_1,N_2，使得当 $n>N_1$ 有

$$A-\varepsilon<a_n<A+\varepsilon$$

当 $n>N_2$ 有

$$A-\varepsilon<c_n<A+\varepsilon$$

因此当 $n>\max\{N_0,N_1,N_2\}$ 时，有

$$A-\varepsilon<a_n\leqslant b_n\leqslant c_n<A+\varepsilon$$

□

定理 2.5 (四则运算)

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$，则有

（1）$\{\alpha a_n + \beta b_n\}$ 收敛到 $\alpha A + \beta B$，其中 α, β 为常数。

（2）$\{a_n b_n\}$ 收敛到 AB。

（3）当 $B \neq 0$ 时，$\{a_n/b_n\}$ 收敛到 A/B。

证明 （1）任给 $\varepsilon > 0$，存在 N_1, N_2 使得

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|+1}, n > N_1; \qquad |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|+1}, n > N_2$$

则当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时有

$$\begin{aligned} |(\alpha a_n + \beta b_n) - (\alpha A + \beta B)| &\leqslant |\alpha||a_n - A| + |\beta||b_n - B| \\ &< \frac{\varepsilon|\alpha|}{2|\alpha|+1} + \frac{\varepsilon|\beta|}{2|\beta|+1} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

（2）由收敛数列的有界性，存在 M 使得 $|a_n| \leqslant M$，那么

$$0 \leqslant |a_n b_n - AB| = |(a_n - A)b_n + A(b_n - B)| \leqslant M|a_n - A| + |A||b_n - B|$$

由追敛性知 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n b_n - AB| = 0$。

（3）由保号性的推论，存在 N 使得当 $n > N$ 时有 $|b_n| > \dfrac{|B|}{2}$，那么

$$0 \leqslant \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|b_n - B|}{|b_n||B|} \leqslant \frac{2}{|B|^2}|b_n - B|$$

由追敛性知 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{1}{b_n} - \dfrac{1}{B}\right| = 0$。 □

定义 2.3 (数列的子列)

设 $\{a_n\}$ 为数列，如果 $\{n_k\}$ 是一列严格递增的正整数，则数列 $\{a_{n_k}\}$ 称为数列 $\{a_n\}$ 的一个子列。

特殊的子列 $\{a_{2k}, a_{2k-1}\}$ 分别称为偶子列与奇子列。

定理 2.6

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件：$\{a_n\}$ 的任何子列都收敛。

2.3 数列极限存在的条件

定义 2.4

若数列 $\{a_n\}$ 各项满足关系式 $a_n \leqslant a_{n+1} (a_n \geqslant a_{n+1})$，则称 $\{a_n\}$ 为递增（递减）数列，统称为单调数列。

定理 2.7 (单调有界定理)

单调有界数列必有极限。

定理 2.8 (致密性定理)

任何有界数列必定有收敛的子列。

2.4 柯西（Cauchy）准则

定义 2.5

设 $\{a_n\}$ 为数列，如果任给 $\varepsilon > 0$，均存在 $N(\varepsilon)$ 使当 $m, n > N(\varepsilon)$ 时有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$

则称 $\{a_n\}$ 为 *Cauchy* 数列或基本列。

定理 2.9

Cauchy 数列必定时有界数列。

证明 取 $\varepsilon = 1$，则存在 N 使得当 $m, n > N$ 时有

$$|a_m - a_n| < 1$$

令 $M = \max\{|a_k| + 1 \mid 1 \leqslant k \leqslant N + 1\}$，则当 $n \leqslant N$ 时显然有 $|a_n| \leqslant M$，而当 $n > N$ 时有

$$|a_n| \leqslant |a_n - a_{N+1}| + |a_{N+1} < 1 + |a_{N+1}| \leqslant M$$

这说明 $\{a_n\}$ 是有界数列。 □

定理 2.10 (Cauchy 收敛准则)

$\{a_n\}$ 为 *Cauchy* 数列当且仅当它是收敛的。

证明 （1）充分性：设 $\{a_n\}$ 收敛到 A，则任给 $\varepsilon > 0$ 存在 N，当 $n > N$ 时有

$$|a_n - A| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

因此当 $m, n > N$ 时有

$$|a_m - a_n| \leqslant |a_m - A| + |A - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

这说明 a_n 为 Cauchy 数列。

（2）必要性：Todo …… □

柯西收敛准则的条件称为柯西条件。

2.5 Stolz 公式

定理 2.11

对于任意的 $1 \leqslant k \leqslant n$，设 $b_k > 0$ 且 $m \leqslant \dfrac{a_k}{b_k} \leqslant M$，则有

$$m \leqslant \frac{\sum a_n}{\sum b_n} \leqslant M$$

定理 2.12 (Stolz 公式一)

设数列 $\{x_n\},\{y_n\}$，且 $\{y_n\}$ 严格单调地趋于 $+\infty$，如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A$$

证明 分类讨论 Todo⋯⋯ □

定理 2.13 (Stolz 公式二)

设数列 $\{y_n\}$ 严格单调地趋于 0，且数列 $\{x_n\}$ 也收敛到 0，那么如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A$$

证明 分类讨论 Todo⋯⋯ □

2.6 例题

问题 2.1 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum a_n}{n} = A$。

解 即对于任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $n > N_1$ 使得

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

那么变形有

$$\left|\frac{\sum a_n}{n} - A\right| \leqslant \frac{\sum |a_n - A|}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{N_1} |a_k - A|}{n} + \frac{\sum_{k=N_1+1}^{n} |a_k - A|}{n}$$

注意到 $\sum_{k=1}^{N_1} |a_k - A|$ 已经为定值，从而存在 $n > N_2$ 使得

$$\frac{\sum_{k=1}^{N_1} |x_k - A|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

因此当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时有

$$LHS < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - N_1}{n} \times \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

第 3 章 函数极限

3.1 函数极限的概念

定义 3.1

设 f 为定义在 $[a,+\infty)$ 上的函数，A 为定数。若对任给的 $\varepsilon>0$，存在正数 $M=M(\varepsilon)\geqslant a$，使得当 $x>M$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称函数 f 当 x 趋于 $+\infty$ 时以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to+\infty)$$

♣

类似的有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$。

不难证明

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$$

定义 3.2

设函数 f 在 $U^\circ(x_0;\delta')$ 内有定义，A 为定数。若对任给的 $\varepsilon>0$，存在正数 $\delta<\delta'$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称函数 f 当 x 趋于 x_0 时以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0)$$

♣

定义 3.3

设函数 f 在 $U_+^\circ(x_0;\delta')$ 内有定义，A 为定数。若对任给的 $\varepsilon>0$，存在正数 $\delta<\delta'$，使得当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称函数 f 当 x 趋于 x_0^+ 时以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0^+)$$

♣

类似的还有左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，统称为单侧极限。又可记为

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0^+}f(x) \text{ 与 } f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)$$

同理还有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A$$

3.2 函数极限的性质

定理 3.1 (唯一性)

若极限 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则此极限是唯一的。

定理 3.2 (局部有界性)

若极限 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则 f 在 x_0 的某空心邻域 $U^\circ(x_0)$ 上有界。

定理 3.3 (保不等式性)

设 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim_{x\to x_0} g(x)$ 均存在。若存在正数 N_0，使得当 $n > N_0$ 时，有 $a_n \leqslant b_n$，则 $\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n$。

定理 3.4 (迫敛性)

设 $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = A$，且在某 $U^\circ(x_0;\delta')$ 上有

$$f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$$

则 $\lim_{x\to x_0} h(x) = A$。

定理 3.5 (四则运算法则)

若 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim_{x\to x_0} g(x)$ 均存在，则

$$\lim_{x\to x_0}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

若 $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$，则

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$$

3.3 函数极限存在的条件

定理 3.6 (海涅（Heine）定理，归结原则)

若 $f(x)$ 在 $U^\circ(x_0;\delta')$ 上有定义。$\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是：任何含于 $U^\circ(x_0;\delta')$ 且以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$，极限 $\lim_{x\to x_0} f(x_n)$ 都存在且相等。

即若对任何 $x_n \to x_0 (n\to\infty)$ 有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$，则 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$。

定理 3.7

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某空心右邻域 $U_+^\circ(x_0)$ 有定义，则 $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A$ 的充要条件是：对任何以

x_0 为极限的递减数列 $\{x_n\} \subset U_+^\circ(x_0)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$。

定理 3.8

设 $f(x)$ 为定义在 $U_+^\circ(x_0)$ 上的单调有界函数，则右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$ 存在。

定理 3.9 (柯西准则)

设 $f(x)$ 在 $U^\circ(x_0;\delta')$ 上有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是：任给 $\varepsilon > 0$，存在正数 $\delta(< \delta')$，使得对任何 $x', x'' \in U^\circ(x_0,\delta)$，有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$。

3.4 两个重要的极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$$

3.5 无穷小量与无穷大量

定义 3.4 (无穷小量)

设函数 f 在某 $U^\circ(x_0)$ 上有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$，则称 f 为当 $x \to x_0$ 时的无穷小量。

定义 3.5 (有界量)

设函数 f 在某 $U^\circ(x_0)$ 上有界，则称 f 为当 $x \to x_0$ 时的有界量。

无穷小量收敛于 0 的速度有快有慢。设当 $x \to x_0$ 时，f 与 g 均为无穷小量。
若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$，则称当 $x \to x_0$ 时 f 为 g 的高阶无穷小量，或称 g 为 f 的低阶无穷小量。
记作

$$f(x) = o(g(x))(x \to x_0)$$

特别地，f 为当 $x \to x_0$ 时的无穷小量记作

$$f(x) = o(1)(x \to x_0)$$

若存在正数 K 和 L，使得在某 $U^\circ(x_0)$ 上有

$$K \leqslant \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant L$$

则称 f 与 g 为当 $x \to x_0$ 时的同阶无穷小量。特别当

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$$

时，f 与 g 必为同阶无穷小量。

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ 则称 f 与 g 是当 $x\to x_0$ 时的等价无穷小量。记作

$$f(x)\sim g(x)(x\to x_0)$$

注意并不是任何两个无穷小量都可以进行这种阶的比较。例如 $x\to 0$ 时，$x\sin\dfrac{1}{x}$ 和 x^2 都是无穷小量，但它们的比都不是有界量。

定理 3.10

设函数 f,g,h 在 $U^\circ(x_0)$ 上有定义，且有 $f(x)\sim g(x)(x\to x_0)$，则

1. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)h(x)=A$。
2. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)}{f(x)}=B$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)}{g(x)}=B$

♡

定义 3.6 (无穷大量)

设函数 f 在某 $U^\circ(x_0)$ 上有定义，若对任给的 $G>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $x\in U^\circ(x_0;\delta)\subset U^\circ(x_0)$ 时，有 $|f(x)|>G$，则称函数 f 当 $x\to x_0$ 时有非正常极限 ∞，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$。

♣

3.6 常见等价无穷小

实际上这些等价无穷小就是泰勒展开。

$$\begin{aligned}
\frac{x}{1-x}&=x+x^2+x^3+x^4+x^5 &&+O(x^6)\\
\ln(1+x)&=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5} &&+O(x^6)\\
\sin x&=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120} &&+O(x^7)\\
1-\cos x&=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24} &&+O(x^6)\\
\mathrm{e}^x-1&=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120} &&+O(x^6)\\
\tan x&=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15} &&+O(x^7)\\
\sqrt{x+1}-1&=\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+\frac{7x^5}{256} &&+O(x^6)\\
\arcsin x&=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40} &&+O(x^7)\\
\arctan x&=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5} &&+O(x^7)
\end{aligned}$$

第 4 章　函数的连续性

4.1　连续性的概念

定义 4.1 (连续性)

设函数 f 在某 $U(x_0)$ 上有定义。若

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称 f 在点 x_0 连续。

♣

记 $\Delta x = x - x_0$，称为自变量 x 在点 x_0 的增量或改变量。设 $y_0 = f(x_0)$，相应的函数 y 在点 x_0 的增量记为

$$\Delta y = f(x) - f(x) = f(x + \Delta) - f(x_0) = y - y_0$$

连续性的 $\varepsilon - \delta$ 形式定义:若对任给的 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时,有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$,则称函数 f 在点 x_0 连续。

或者进一步表示为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right)$$

定义 4.2

设函数 f 在某 $U_+(x_0)$ 上有定义。若

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

则称 f 在点 x_0 右连续。同理左连续。

♣

因此函数 f 在点 x_0 连续的充要条件是：f 在点 x_0 既是左连续，又是右连续。

定义 4.3 (间断点)

设函数 f 在某 $U^\circ(x_0)$ 上有定义。若 f 在点 x_0 无定义，或 f 在点 x_0 有定义而不连续，则称点 x_0 为函数 f 的间断点或不连续点。

♣

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，而 f 在点 x_0 无定义，或有定义但 $f(x_0) \neq A$，则称点 x_0 为 f 的可去间断点。

若函数 f 在点 x_0 的左、右极限都存在，但 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$，则称点 x_0 为函数 f 的跳跃间断点。

可去间断点与跳跃间断点统称为第一类间断点，所有其他形式的间断点统称为第二类间断点。

若函数 f 在区间 I 上的每一点都连续，则称 f 为 I 上的连续函数。对于闭区间或半开区间的端点，函数在这些点上连续是指左连续或右连续。

4.2 连续函数的性质

定理 4.1 (局部有界性)

若函数 f 在点 x_0 连续，则 f 在某 $U(x_0)$ 上有界。

定理 4.2 (局部保号性)

若函数 f 在点 x_0 连续，且 $f(x_0) > 0$，则对任何正数 $r < f(x_0)$，存在某 $U(x_0)$，使得对一切 $x \in U(x_0)$，有 $f(x) > r$。

定理 4.3 (四则运算)

若函数 f, g 在点 x_0 连续，则 $f \pm g, f \cdot g, f/g$ 也都在点 x_0 连续。

定理 4.4

若函数 f 在点 x_0 连续，g 在点 u_0 连续，$u_0 = f(x_0)$，则复合函数 $g \circ f$ 在 x_0 连续。

定义 4.4

设 f 为定义在数集 D 上的函数。若存在 $x_0 \in D$，使得对一切 $x \in D$，有 $f(x_0) \geq f(x)$，则称 f 在 D 上有最大值，并称 $f(x_0)$ 为 f 在 D 上的最大值。

定理 4.5 (最大、最小值定理)

若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 f 在闭区间 $[a,b]$ 上有最大值与最小值。

定理 4.6 (介值定理)

若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a) \neq f(b)$。若 μ 为介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任何实数。则至少存在一点 $x_0 \in (a,b)$ 使得 $f(x_0) = \mu$。

定理 4.7

若函数 f 在 $[a,b]$ 上严格单调并连续，则反函数 f^{-1} 在其定义域 $[\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}]$ 上连续。

定义 4.5

设 f 是定义在区间 I 上的函数。若对任给的 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ 使得对任何 $x', x'' \in I$，只要 $|x' - x''| < \delta$ 就有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

就称函数 f 在区间 I 上一致连续。

定理 4.8 (一致连续性)

若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上一致连续。

4.3 初等函数的连续性

定理 4.9

设 $p>0$，a,b 为任意两个实数，则有

$$p^a \cdot p^b = p^{a+b}, (p^a)^b = p^{ab}$$

♡

定理 4.10

指数函数 $a^x(a>0)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是连续的。

♡

第 5 章 导数和微分

5.1 导数的定义

定义 5.1

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域有定义，若极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则称函数 f 在点 x_0 可导，并称该极限为函数 f 在点 x_0 的导数，记作 $f'(x_0)$。

定理 5.1

若函数 f 在点 x_0 可导，则 f 在点 x_0 连续。

定义 5.2

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某右邻域 $[x_0,x_0+\delta)$ 上有定义，若右极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},(0<\Delta x<\delta)$$

存在，则称该极限值为 f 在点 x_0 的右导数，记作 $f'_+(x)$。同理有左导数。

左导数和右导数统称为单侧导数。

定理 5.2

若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域上有定义，则 $f'(x_0)$ 存在的充要条件是 $f'_-(x)$ 与 $f'_+(x)$ 都存在且相等。

若函数 f 在区间 I 上每一点都可导（对区间端点，仅考虑相应的单侧导数），则称 f 为 I 上的可导函数。此时对每一个 $x\in I$，都有 f 的一个导数 $f'(x)$ （或单侧导数）与之对应。

这样就定义了一个在 I 上的函数，称为导函数，简称为导数。记作 $f',y',\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\Delta},x\in I$$

有时 $f'(x_0)$ 也可写作 $y'\mid_{x=x_0}$ 或 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mid_{x=x_0}$。

曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_0,y_0) 的切线方程是

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

定义 5.3

若函数 f 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 上对一切 $x\in U(x_0)$ 有

$$f(x_0)\geqslant f(x)$$

则称 f 在点 x_0 取得极大值，称点 x_0 为极大值点。同理有极小值点。

极大值、极小值统称为极值，极大值点、极小值点统称为极值点。

定理 5.3 (费马定理)

设函数 f 在点 x_0 的某邻域上有定义，且在点 x_0 可导。若点 x_0 为极值点，则必有 $f'(x_0)=0$。

5.2 求导法则

定理 5.4

若函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在点 x_0 可导，则函数 $f(x)=u(x)\pm v(x)$ 在点 x_0 也可导，且

$$f'(x_0)=u'(x_0)\pm v'(x_0)$$

函数 $f(x)=u(x)v(x)$ 在点 x_0 也可导，且

$$f'(x_0)=u'(x_0)v'(x_0)$$

若 $v(x)\neq 0$，则函数 $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ 在点 x_0 也可导，且

$$f'(x_0)=\frac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{v(x_0)^2}$$

定理 5.5

设 $y=f(x)$ 为 $x=\phi(x)$ 的反函数，若 $\phi(y)$ 在点 y_0 的某邻域上连续、严格单调且 $\phi'(y_0)\neq 0$，则 $f(x)$ 在点 $x_0=\phi(y_0)$ 可导，且

$$f'(x_0)=\frac{1}{\phi'(y_0)}$$

定理 5.6

设 $u=\phi(x)$ 在点 x_0 可导，$y=f(u)$ 在点 $u_0=\phi(x_0)$ 可导，则复合函数 $f\circ\phi$ 在点 x_0 可导，且

$$(f\circ\phi)'(x_0)=f'(u_0)\phi'(x_0)=f'(\phi(x_0))\phi'(x_0)$$

5.2.1 基本求导法则

1. $(u\pm v)'=u'\pm v'$
2. $(uv)'=u'v+uv'$
3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
4. $(u\pm v)'=u'\pm v'$

5.2.2 基本初等函数导数公式

1. $(c)'=0$（c 为常数）
2. $(x^a)'=ax^{a-1}$（a 为任意实数）
3. $(\sin x)'=\cos x,(\cos x)'=-\sin x,(\tan x)'=\sec^2 x$
4. $(\cot x)'=-\csc^2 x,(\sec x)'=\sec x\tan x,(\csc x)'=-\csc x\cot x$

5. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
6. $(a^x)' = a^x \ln a (a > 0 \text{且} a \neq 1)$
7. $(\log_a |x|)' = \dfrac{1}{x \ln a} (a > 0 \text{且} a \neq 1)$

5.3 单调性与导数

定理 5.7

设 f 在区间 I 上可导，则 $f(x)$ 在 I 上递增（减）的充要条件时

$$f'(x) \geqslant 0 (\leqslant 0)$$

♡

定理 5.8 (介值定理)

设 f 为 $[a,b]$ 上的连续函数，μ 时严格介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的数，则存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi) = \mu$。

♡

第 6 章 微分中值定理

6.1 拉格朗日定理

定理 6.1 (罗尔（Rolle）中值定理)

若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 中可微，且 $f(a)=f(b)$。则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$。♡

定理 6.2

若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 中可微，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

♡

拉格朗日公式还有下面几种等价形式

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a), a<\xi<b$$

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a), 0<\theta<1$$

$$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h, 0<\theta<1$$

6.2 柯西中值定理

定理 6.3

设 f,g 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 中可微，且 $g'(x)\neq 0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

♡

6.3 凹凸性

定义 6.1

设 f 为定义在区间 I 上的函数，若对 I 上当任意两点 x_1,x_2 和任意实数 $\lambda\in(0,1)$ 总有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

则称 f 为 I 上的凸函数。反之，如果总有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

则称 f 为 I 上的凹函数。♣