# 高等代数笔记

Gao Deng Dai Shu

rogeryoungh

2021 年 1 月 8 日 · LaTeX

# 目录

# 第 1 章 线性方程组的解法

## 1.1 矩阵消元法

形如这样左端都是未知量 $x_n$ 的一次齐次式，右端是常数，

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

像这样的方程称为线性方程。每个未知量前面的数称为系数，右端的项称为常数项。

含 $n$ 个未知量的线性方程组称为 $n$ 元线性方程组，它的一般形式是

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

方程的个数 $s$ 与未知量的个数 $n$ 可以相等，也可以不等。

**定义 1.1 (线性方程组的初等变换)**

*线性方程组的初等变换有三种，分别为：*

*1. 把一个方程的倍数加到另一个方程上。*

*2. 互换两个方程的位置。*

*3. 用一个非零数乘某一个方程。*

对于线性方程组，若 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 分别可以用数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 代入后，每个方程都变成恒等式，那么称 $n$ 元有序组 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是线性方程组的一个解。方程组所有解组成的集合称为这个线性方程组的解集，符合实际要求的解称为可行解。

通过初等变换能够使线性方程组变为阶梯形方程组，进一步可以变为简化阶梯形方程组，此种形式可以较方便的看出方程组的解。

**定理 1.1**

*初等变换不改变线性方程组的解。*

可以把原线性方程组的系数和常数项按次序排成一张表，称为方程组的增广矩阵；而只列出系数的方程组称为系数矩阵。

**定义 1.2**

*由 $sn$ 个数排成的 $s$ 行（横的）$n$ 列（纵的）表*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

*称为一个 $s \times n$ 矩阵，记作 $A_{s\times n}$ 或 $A = (a_{ij})$，它的 $(i, j)$ 元也记作 $A(i; j)$。*

特殊的，如果矩阵 $A$ 的行数和列数相等皆为 $n$，则称它为 $n$ 级方阵或方阵。元素全为 0 的矩阵称为零矩阵，记作 $0_{s\times n}$ 或 0。

**定义 1.3 (初等行变换)**

矩阵的初等行变换有三种，分别为：

*1.* 把一行的倍数加到另一行上。

*2.* 互换两行的位置。

*3.* 用一个非零数乘某一行。

♣

矩阵经过初等行变换，可变成阶梯形矩阵，并可进一步化简成简化行阶梯形矩阵。

阶梯形矩阵的特点为（1）元素全为 0 的行（零行）在下方（如果有的话）;（2）元素不全为 0 的行（非零行），左起第一个不为 0 的元素（主元），他们的列指标随着行指标递增而严格增大。

简化行阶梯形矩阵的特点为（1）它是阶梯形矩阵;（2）每个非零行的主元都是 1;（3）每个主元所在的列的其余元素都是 0。

在解线性方程组时，可以通过一系列初等行变换，它的增广矩阵化为阶梯形矩阵，甚至继续化简为简化行阶梯形矩阵，都可简化求解过程。

**定理 1.2**

任意矩阵都可以经过一系列初等行变换化为阶梯形矩阵，也可以变成简化行阶梯形矩阵。

♡

## 1.2 线性方程组的解的情况及其判别准则

由于初等变换不改变线性方程组的解，其总可以化为阶梯形方程组。因此设阶梯形方程组有 $n$ 个未知量，它的增广矩阵 $J$ 有 $r$ 个非零行，$J$ 有 $n+1$ 列。

1. 若阶梯形方程组中出现 $0=d$（其中 $d$ 为非零数）这种方程，即最后一个非零行的主元位于 $n+1$ 列，则阶梯形方程组无解。

2. 最后一个非零行的主元不位于 $n+1$ 列

2(1). $r=n$ 时，阶梯形方程恰有唯一解。

2(2). $r<n$ 时，有无穷多组解。

**定理 1.3**

系数为有理数（实数、复数）的 $n$ 元线性方程组的解的情况只有三种可能：无解，有唯一解，有无穷多组解。

♡

若一个线性方程组有解，则称它是相容的；否则称它是不相容的。

## 1.3 数域

**定义 1.4**

复数集的一个子集 $K$ 是一个数域，那么满足：

1. $0,1 \in K$；
2. $a,b \in K \Rightarrow a \pm b, ab \in K$；
3. $a,b \in K$，且 $b \neq 0 \Rightarrow \dfrac{a}{b} \in K$。

其中，$\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ 都是数域，但整数集 Z 不是数域。

有理数域是最小的数域。

**定理 1.4**

任意数域都包含有理数域。

# 第 2 章 行列式

## 2.1 排列

**定义 2.1**

由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 $n$ 阶排列。

特殊的，排列 $12\cdots n$ 也是一个 $n$ 阶排列，称为自然排列。

**定义 2.2**

在一个排列中，如果一对数前面的数大于后面的数，那么它们就称为一个逆序，反之称为正序。排列中逆序的对数称为这个排列的逆序数。

逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数的排列称为奇排列。

排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记为

$$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$$

**定义 2.3**

把排列中某两个数位置互换，得到一个新排列。称这样的一个变换称为一个对换。

**定理 2.1**

对换改变排列的奇偶性。

**证明** 设对换为 $(i,j)$，分类讨论：

1. 若所换两数相邻，则不影响后面数字的逆序数。那么若 $ij$ 为一个逆序，则逆序数减 1，否则逆序数加 1，总之逆序数奇偶性改变。

2. 若所换两数不相邻，不妨设 $i$ 在 $j$ 之前，排列为

$$\cdots i \quad k_1\cdots k_s \quad j\cdots$$

那么有

$$(i,j)=(i,k_1)\cdots(i,k_s)(i,j)(k_s,j)\cdots(k_1,j)$$

即任意对换即总可以分解为奇数个相邻对换的积。 □

任何一个 $n$ 阶排列都可以与自然排列由一系列对换互变，即置换。奇置换可以分解为奇数个对换的积，偶置换可以分解为偶数个对换的积。

## 2.2 $n$ 阶行列式

记 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 $n$ 元排列求和。

**定义 2.4**

$n$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

该式称为 $n$ 阶行列式的完全展开式。♣

若对角线下方的元素全为 0，则称为上三角行列式，即对于所有的 $1 \leqslant i < j \leqslant n$，有 $a_{ji} = 0$。

**定理 2.2**

上三角行列式的值为

$$|A| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

♡

**证明** 考虑其完整展开式的任意一项

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

若该项不为 0，则对 $1 \leqslant k \leqslant n$，皆有 $j_k \leqslant k$。

因此只有 $j_k = k$，只有这一项不为 0。 □

**定理 2.3**

给定行指标的一个排列 $i_1i_2\cdots i_n$，则 $n$ 级矩阵的行列式为

$$|A| = \sum_{k_1k_2\cdots k_n} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)} a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}\cdots a_{i_nk_n}$$

♡

**证明** 设 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 经过 $s$ 次互换相邻元素变为 $a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}\cdots a_{i_nk_n}$，则有

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)} = (-1)^s$$

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^s = (-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}$$

从而

$$\begin{aligned} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)} &= (-1)^s(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^s \\ &= (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} \end{aligned}$$

□

同理，给定列指标的一个排列 $k_1k_2\cdots k_n$，则 $n$ 级矩阵的行列式为

$$|A| = \sum_{i_1i_2\cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)} a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}\cdots a_{i_nk_n}$$

## 2.3 行列式的性质

**定理 2.4**

转置后行列式值不变。

**证明** 设行列式 $B = A^T$，即 $a_{ij} = b_{ji}$。由前文知，按列指标展开 $B$ 有（注意第 1 个下标是列指标，第 2 个下标是行指标）

$$|B| = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

按列指标展开 $A$ 有

$$|A| = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

因此 $|A| = |B|$。 □

**定理 2.5**

行列式的一行乘以一个数，等于行列式乘以这个数。

**证明** 即行列式 $B$ 除了第 $i_1$ 行有 $b_{i_1 j} = ka_{i_1 j}$，其他行都有 $b_{ij} = a_{ij}$。

$$\begin{aligned}
|B| &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (ka_{i_1 j}) \cdots a_{nj_n} \\
&= k \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{i_1 j} \cdots a_{nj_n} \\
&= k|A|
\end{aligned}$$

□

**定理 2.6**

除了同一行以外全部相等的两个行列式，与此行替换为这两行的和的行列式相等。

**证明** 即行列式 $A$ 除了第 $i_1$ 行有 $a_{i_1 j} = b_{i_1 j} + c_{i_1 j}$，其他行都有 $a_{ij} = b_{ij} = c_{ij}$。

$$\begin{aligned}
|A| &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (b_{i_1 j} + c_{i_1 j}) \cdots a_{nj_n} \\
&= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots b_{i_1 j} \cdots a_{nj_n} + \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots c_{i_1 j} \cdots a_{nj_n} \\
&= |B| + |C|
\end{aligned}$$

□

**定理 2.7**

行列式中有两行互换，行列式反号。

**证明** 即设行列式 $B$ 为行列式第 $k_1, k_2$ 两行交换的结果，又

$$(-1)^{\tau(j_1 \cdots j_{k_2} \cdots j_{k_1} \cdots j_n)} = -(-1)^{\tau(j_1 \cdots j_{k_1} \cdots j_{k_2} \cdots j_n)}$$

那么有

$$\begin{aligned}|B| &= \sum_{j_1\cdots j_{k_2}\cdots j_{k_1}\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_{k_2}\cdots j_{k_1}\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{k_1 j_{k_2}}\cdots a_{k_2 j_{k_1}}\cdots a_{nj_n}\\ &= -\sum_{j_1\cdots j_{k_1}\cdots j_{k_2}\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_{k_1}\cdots j_{k_2}\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{k_1 j_{k_1}}\cdots a_{k_2 j_{k_2}}\cdots a_{nj_n}\\ &= -|A|\end{aligned}$$

□

**定理 2.8**

行列式中有两行相等，行列式为零。

**证明** 交换这相同的两行，行列式变号，其仍与原来相等，只能为 0。 □

**定理 2.9**

行列式中两行成比例，行列式为零。

**证明** 提出公因子使两行相等，即为 0。 □

**定理 2.10**

把一行的倍数加到另一行，行列式不变。

**证明** 一行是另一行的倍数的行列式为 0，合并后自然不变。 □

## 2.4 行列式按一行展开

**定义 2.5 (代数余子式)**

$n$ 阶行列式 $|A|$ 中，划去第 $i$ 行和第 $j$ 列，剩下的元素按原来次序组成的 $n-1$ 阶行列式称为矩阵 $A$ 的 $(i,j)$ 元的余子式。记作

$$M_{ij} = \sum_{k_1\cdots k_{i-1}k_{i+1}\cdots k_n} (-1)^{\tau(k_1\cdots k_{i-1}k_{i+1}\cdots k_n)} a_{1k_1}\cdots a_{i-1,k_{i-1}} a_{i+1,k_{i+1}}\cdots a_{nk_n}$$

其中 $j=k_i$，令 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称 $A_{ij}$ 是 $A$ 的 $(i,j)$ 元的代数余子式。

**定理 2.11**

对于 $n$ 阶行列式 $|A|$ 有

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij}$$

前者称为 $n$ 阶行列式按第 $i$ 行的展开式，后者称为按第 $j$ 列的展开式。

**证明** 首先列出 $|A|$ 的行完全展开式，其中 $j=k_i$

$$|A| = \sum_{k_1\cdots k_{i-1}jk_{i+1}\cdots k_n} (-1)^{\tau(k_1\cdots k_{i-1}jk_{i+1}\cdots k_n)} a_{1k_1}\cdots a_{i-1,k_{i-1}} a_{ij} a_{i+1,k_{i+1}}\cdots a_{nk_n}$$

把第 $i$ 行换到第 1 行，第 $j$ 列换到第 1 列，由对换的性质有

$$(-1)^{\tau(i1\cdots(i-1)(i+1)\cdots n)+\tau(jk_1\cdots k_{i-1}k_{i+1}\cdots k_n)} = (-1)^{i-1}(-1)^{j-1}(-1)^{\tau(k_1\cdots k_{i-1}k_{i+1}\cdots k_n)}$$

因此

$$\begin{aligned}|A| &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \sum_{k_1\cdots k_{i-1}k_{i+1}\cdots k_n} (-1)^{\tau(k_1\cdots k_{i-1}k_{i+1}\cdots k_n)} a_{1k_1}\cdots a_{i-1,k_{i-1}}a_{i+1,k_{i+1}}\cdots a_{nk_n} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}\end{aligned}$$

对于列展开式，转置即可。 □

**定理 2.12**

对于 $n$ 阶行列式 $|A|$ 有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0(k \neq i)$$

♡

**证明** 设矩阵 $B$ 第 $k$ 行与第 $i$ 行相等，因此按第 $k$ 行展开有

$$|B| = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0$$

□

**定义 2.6 (范德蒙 Vandermonde 行列式)**

若行列式满足 $a_{ij} = a_j^i$，则称为范德蒙特行列式。其值为（证略）

$$\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} (a_i - a_j)$$

♣

## 2.5 克莱姆（Cramer）法则

对于数域 $K$ 上 $n$ 个方程的 $n$ 元线性方程组，

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\cdots \quad\quad \cdots \quad\quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdot + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

其系数矩阵记作 $A$，增广矩阵记作 $\widetilde{A}$

# 第 3 章 线性方程组的解系

## 3.1 $n$ 维向量空间 $K^n$

取定一个数域 $K$，设 $n$ 是任意给定的一个正整数。令

$$K^n = \{(a_1, \cdots, a_n) \mid a_i \in K, i = 1, \cdots, n\}$$

如果 $a_1 = b_1, \cdots, a_n = b_n$，则称 $K^n$ 中的两个元素：$(a_1, \cdots, a_n), (b_1, \cdots, b_n)$ 相等。

在 $K^n$ 中规定加法运算：

$$(a_1, \cdots, a_n) + (b_1, \cdots, b_n) := (a_1 + b_1, \cdots, a_n + b_n)$$

在 $K$ 的元素与 $K^n$ 的元素之间规定数量乘法运算：

$$k(a_1, \cdots, a_n) := (ka_1, \cdots, ka_n)$$

容易验证加法和数量乘法运算满足下述八条运算法则：对于 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in K^n, k, l \in K$ 有

1. $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}$
2. $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma})$
3. 把元素 $(0, \cdots, 0)$ 记作零元素 $\mathbf{0}$，使得

$$\mathbf{0} + \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{0} = \boldsymbol{\alpha}$$

4. 对于 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, \cdots, a_n) \in K^n$，定义其负元素

$$-\boldsymbol{\alpha} := (-a_1, \cdots, -a_n)$$

于是有

$$\boldsymbol{\alpha} + (-\boldsymbol{\alpha}) = (-\boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\alpha} = 0$$

5. $1\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$
6. $(kl)\boldsymbol{\alpha} = k(l\boldsymbol{\alpha})$
7. $(k + l)\boldsymbol{\alpha} = k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\alpha}$
8. $k(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = k\boldsymbol{\alpha} + k\boldsymbol{\beta}$

**定义 3.1 ($n$ 维向量空间)**

数域 $K$ 上所有 $n$ 元有序数组组成的集合 $K^n$，连同定义在它上面的加法运算和数量乘法运算，及其满足的 8 条运算法则一起，称为数域 $K$ 上的一个 $n$ 维向量空间。$K^n$ 的元素称为 $n$ 维向量；设向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, \cdots, a_n)$，称 $a_i$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 $i$ 个分量。♣

在 $n$ 维向量空间 $K^n$ 中，可以定义减法运算

$$\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} := \boldsymbol{\alpha} + (-\boldsymbol{\beta})$$

$n$ 元有序数组写成一行，称为行向量；写成一列，称为列向量，也可以看作行向量的转置。
$K^n$ 可以看成是 $n$ 维行向量组成的向量空间，也可以看作是列向量组成的向量空间。

**定义 3.2 (线性组合)**

给定向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$，再任给 $K$ 中的一组数 $k_1, \cdots, k_s$，那么向量

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s$$

称为向量组 $k_1, \cdots, k_s$ 的一个线性组合，其中 $k_1, \cdots, k_s$ 称为系数。♣

**定义 3.3 (线性表出)**

给定向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$，对于 $\boldsymbol{\beta} \in K^n$，若存在 $K$ 中的一组数 $k_1, \cdots, k_s$ 满足

$$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s$$

那么称 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出。♣

于是可以把数域 $K$ 上的 $n$ 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdot + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

写成

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\beta}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性方程组的列向量组，$\boldsymbol{\beta}$ 是由常数项组成的列向量。

**定义 3.4 (线性子空间)**

$K^n$ 的一个非空子集 $U$ 是 $K^n$ 的一个线性子空间，那么满足

*1. $U$ 对于 $K^n$ 的加法封闭：$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma} \in U \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\gamma} \in U$*

*2. $U$ 对于 $K^n$ 的乘法封闭：$\boldsymbol{\alpha} \in U, k \in K \Rightarrow k\boldsymbol{\alpha} \in U$* ♣

特殊的，0 也是 $K^n$ 的一个，称为零子空间。$K^n$ 本身也是 $K^n$ 的一个子空间。

$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的所有线性组合也是 $K^n$ 的一个子空间，称为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 生成（张成）的子空间，记作

$$\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n \rangle := \{k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s \mid k_i \in K, i = 1, \cdots, s\}$$

于是线性方程组有解，等价与 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出，即 $\boldsymbol{\beta} \in \langle \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n \rangle$。

## 3.2 线性相关与无关

**定义 3.5**

$K^n$ 中向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 称为是线性相关的，如果有 $K$ 中不全为 0 的数 $k_1,\cdots,k_s$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$$

否则称为线性无关。♣

即线性无关意味着所有的系数只能都为 0。

## 3.3 向量组的秩

**定义 3.6 (极大线性无关组)**

向量组的一个部分组称为一个极大线性无关组，如果这个部分组本身是线性无关的，但是从这个向量组的其余向量（如果还有的话）中任取一个添进去，得到的新的部分组都线性相关。♣

如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的每一个向量都可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性表出，那么称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可以由向量组线性表出。

**定义 3.7**

如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 可以互相线性表出，那么称两个向量组等价，记作

$$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}\cong\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r\}$$

♣

可以证明，这种关系具有下述三条性质（反身性，对称性，传递性），即是等价关系。

那么向量组与它的极大线性无关组等价。

**定义 3.8**

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的极大线性无关组所含向量的个数称为这个向量组的秩，记作

$$\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$$

♣

## 3.4 子空间的基与维数

**定义 3.9**

设 $U$ 是 $K^n$ 的一个子空间，如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\in U$ 是 $U$ 的一个基，那么

*1.* $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关。

*2.* $U$ 中每一个向量都可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出。♣

显然，单位向量组 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是 $K^n$ 的一个基，称作标准基。

**定理 3.1**

$K^n$ 的任一非零子空间 $U$ 都有一个基。♡

**定理 3.2**

$K^n$ 的任一非零子空间 $U$ 的任一两个基所含向量的个数相等，称为 $U$ 的维数，记作 $\dim_K U$ 或 $\dim U$。

**定理 3.3**

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个极大线性无关组是这个向量组生成的子空间的 $\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s \rangle$，从而

$$\dim\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s \rangle = \operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\}$$

## 3.5 矩阵的秩

**定理 3.4**

阶梯形矩阵 $J$ 的行秩与列秩相等，它们都等于 $J$ 的非零行的个数；并且 $J$ 的主元所在的列构成列向量的一个极大线性无关组。

**定理 3.5**

矩阵的初等行变换不改变矩阵的行秩和列秩。

**定理 3.6**

矩阵的行秩和列秩相等，统称为矩阵的秩。矩阵 $A$ 的秩记作 $\operatorname{rank}(A)$。

**定理 3.7**

非零矩阵的秩等于它的不为零的子式的阶数。

若一个 $n$ 级矩阵的秩如果等于它的级数，那么称为满秩矩阵。

## 3.6 线性方程组有解的充分必要条件

**定理 3.8**

数域 $K$ 上有线性方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \beta$$

有解的充分必要条件是：它的系数矩阵与增广矩阵的秩相等。

**定理 3.9**

数域 $K$ 上 $n$ 元线性方程组有解时，如果它的系数矩阵满秩，那么方程组有唯一解；否则方程组有无穷多个解。

## 3.7 齐次线性方程组解集的结构

数域 $K$ 上 $n$ 元齐次线性方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=0$$

的一个解是 $K^n$ 中的一个向量，称它为齐次线性方程组的一个解向量。

可知齐次线性方程组的解集 $W$ 是 $K^n$ 的一个子空间，称为方程组的一个解空间。

**定义 3.10**

齐次线性方程组有非零解时，如果它的有限多个解 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 是其基础解系

1. $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 线性无关。
2. 齐次线性方程组的每一个解都可以由 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 线性表出。

于是解空间为

$$W=\langle\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t\rangle$$

**定理 3.10**

数域 $K$ 上 $n$ 元齐次线性方程组的解空间 $W$ 的维数为

$$\dim W=n-\operatorname{rank}(A)$$

## 3.8 非齐次线性方程组的结构

称数域 $K$ 上 $n$ 元齐次线性方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}$$

的导出组为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=0$$

其的解空间用 $W$ 表示。

**定理 3.11**

如果数域 $K$ 上 $n$ 元齐次线性方程组有解，那么它的解集 $U$ 为

$$U=\{\gamma_0+\boldsymbol{\eta}\mid\boldsymbol{\eta}\in W\}$$

其中 $\gamma_0$ 是非其次线性方程组的一个特解，$W$ 是导出组的解空间用。