

Clase Completa - Semana 5: Tecnicas de Integracion - Calculo II

Facultad de Ciencias - Matematica e Informatica

Curso: Calculo II

Fecha: 07/06/2025

Descripcion de la clase:

Este documento corresponde a la clase completa de la Semana 5 del curso de Calculo II.

Se abordan tres tecnicas fundamentales de integracion: por partes, por fracciones parciales y sustitucion trigonometrica.

Cada tecnica se explica paso a paso con ejemplos desarrollados, observaciones clave y ejercicios propuestos.

Integracion por Partes

La formula de integracion por partes es:

$$\text{Integrar}(u * dv) = u * v - \text{Integrar}(v * du)$$

Pasos:

1. Identificar u y dv dentro de la integral.
2. Derivar u para obtener du y encontrar v integrando dv.
3. Sustituir en la formula y simplificar.

Ejemplo:

$$\text{Integrar}(x * e^x dx)$$

Solucion:

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

Aplicando la formula:

$$\text{Integrar}(x * e^x dx) = x * e^x - \text{Integrar}(e^x dx) = x * e^x - e^x + C$$

Integracion por Fracciones Parciales

Esta tecnica se aplica a integrales de funciones racionales (cociente de polinomios).

Pasos:

1. Verificar que el grado del numerador sea menor al del denominador. Si no, hacer division larga.
2. Descomponer en fracciones parciales segun el tipo de factores del denominador.
3. Integrar cada termino por separado.

Ejemplo:

$$\text{Integrar}((2x + 3)/(x^2 - x - 2) dx)$$

$$\text{Factorizando el denominador: } x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$$

Se escribe como:

$$(2x + 3)/(x - 2)(x + 1) = A/(x - 2) + B/(x + 1)$$

Resolviendo sistema para A y B:

$$2x + 3 = A(x + 1) + B(x - 2)$$

$$A = 1, B = 1$$

Entonces:

$$\text{Integrar}((2x + 3)/(x^2 - x - 2) dx) = \ln|x - 2| + \ln|x + 1| + C$$

Sustitucion Trigonometrica

Util para integrales que involucran raices cuadradas de expresiones cuadraticas.

Casos comunes:

- $\sqrt{a^2 - x^2}$: usar $x = a \cdot \sin(\theta)$
- $\sqrt{a^2 + x^2}$: usar $x = a \cdot \tan(\theta)$
- $\sqrt{x^2 - a^2}$: usar $x = a \cdot \sec(\theta)$

Ejemplo:

$$\text{Integrar}(dx/\sqrt{4 - x^2})$$

Usamos $x = 2 \cdot \sin(\theta)$, $dx = 2 \cdot \cos(\theta) d\theta$

Entonces:

$$\begin{aligned}\text{Integrar}(dx/\sqrt{4 - x^2}) &= \text{Integrar}(2 \cdot \cos(\theta) / \sqrt{4 - 4 \cdot \sin^2(\theta)}) = \text{Integrar}(2 \cdot \\ \cos(\theta)/2 \cdot \cos(\theta)) &= \text{Integrar}(d\theta) = \theta + C\end{aligned}$$

Volviendo a x:

$$\theta = \arcsin(x/2) \Rightarrow \text{Resultado: } \arcsin(x/2) + C$$

Documento elaborado para uso educativo en la plataforma CRUNEVO.