1 Expert

1.1 Следует ли асимптотическая устойчивость x из условия:

$\exists \delta_0 > 0 : \; |x_0 - x^*| < \delta_0 \;\Rightarrow\; x_n \to x^*$ при $n \to \infty$?

Допустим точка не устойчивая. Это значит, что

$$\exists \varepsilon > 0 : \; \forall \delta > 0 \; \exists n : |x_0 - x^*| < \delta \;\Rightarrow\; |x_n - x^*| \geq \varepsilon.$$

То есть $x_n \not\to x^*$ при $n \to \infty$ - противоречие. Значит данного условия не достаточно.

1.2 Докажите или опровергните утверждение:

В логистическом отображении при $r \in (0;1)$ неподвижная точка $x^* = 0$ является устойчивой. Является ли она асимптотически устойчивой?

Рассмотрим отображение:

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n), \quad r \in (0,1), \quad x_0 \in [0,1].$$

Последовательность $\{x_n\}$ неотрицательна и убывает, значит он имеет предел

$$\lim_{n \to \infty} x_n = L \geq 0.$$

Переходя к пределу в рекуррентном соотношении, получаем

$$L = rL(1 - L).$$

Переносим всё в одну сторону:

$$rL(1 - L) - L = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad L\big(r(1 - L) - 1\big) = 0.$$

Следовательно,

$L = 0$ или $r(1 - L) - 1 = 0$ Из $r(1 - L) - 1 = 0$ имеем

$$r(1 - L) = 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 - L = \frac{1}{r} \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad L \leq 0.$$

Но $L \geq 0$, поэтому возможно только $L = 0$.

Таким образом,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0$$

для любого $x_0 \in [0,1]$ и любого $r \in (0;1)$

1.3 Докажите, что точка $x^* = 0$ при $r \in (2;3)$ является неустойчивой

Проверим условие неустойчивости:

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall \delta > 0 \ \exists n : |x_0 - x^*| < \delta \ \Rightarrow \ |x_n - x^*| \geq \varepsilon.$$

И правда, для достаточно большого n найдётся бесконечно малая ε, удовлетворяющая условию, так как при $r \in (2;3)$ x_n будут расти

1.4 С помощью внешних источников исследуйте: как связано наличие цикла с периодом 3 с хаотичностью системы?

Наличие цикла периода 3 — это «маркер» хаоса: если непрерывное отображение на отрезке имеет цикл порядка 3, то его динамика уже содержит в себе хаотическое поведение в строгом математическом смысле.

Для непрерывного отображения f:[a,b]→[a,b] (сюда попадает и логистическое отображение) верна теорема Ли–Йорка: если у f есть периодическая орбита периода 3, то:
1) Существуют периодические орбиты всех целых периодов n = 1, 2, 3,...
2) существует неконтинуум точек, траектории которых не являются периодическими и не стремятся к периодическим орбитам (такие орбиты называют хаотическими)