4 декабря 2025 г.

1 Easy

1.1

Рассмотрим рекуррентное соотношение

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \qquad r \in (0, 1], \qquad 0 < x_0 < 1.$$

Докажем по индукции по n, что

$$\forall n \in N \quad 0 < x_n < 1.$$

База: при $n = 1$: т.к. $0 < x_0 < 1$, $0 < r \leq 1$, то $rx_n(1-x_n)$ - произведение трёх положительных чисел < 1. Значит оно $\in (0, 1]$

Индукционный переход: пусть для некоторого $n \in N$ выполнено

$$0 < x_n < 1.$$

Покажем, что тогда $0 < x_{n+1} < 1$.

Из неравенства $0 < x_n < 1$ следует $0 < 1 - x_n < 1$. Тогда произведение трёх положительных чисел < 1. Значит оно $\in (0, 1]$:

$$0 < x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) < 1.$$

Таким образом, из выполнения $0 < x_n < 1$ следует выполнение $0 < x_{n+1} < 1$. По принципу математической индукции

$$\forall n \in N \quad 0 < x_n < 1.$$

2 Normal

2.1

Фиксированная точка x^* удовлетворяет уравнению

$$x^* = f_r(x^*) = rx^*(1 - x^*).$$

Перенесём всё в одну сторону:

$$rx^*(1 - x^*) - x^* = 0 \;\Rightarrow\; x^*\big(r(1 - x^*) - 1\big) = 0.$$

Отсюда два варианта:

$$x^* = 0$$

(это фиксированная точка при любом r) или

$$r(1-x^*) - 1 = 0 \ \Rightarrow\ 1 - x^* = \frac{1}{r} \ \Rightarrow\ x^* = 1 - \frac{1}{r}.$$

То есть множество неподвижных точек:

$$\left\{ 0,\ 1 - \frac{1}{r} \right\}.$$

Так для любого $r \in (0,1]$ существуют ровно две неподвижные точки

2.2

Рассмотрим отношение соседних членов логистического отображения:

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{x_n}{r x_n (1-x_n)} = \frac{1}{r(1-x_n)}.$$

Так как $r \in (0,1]$ и $(1-x_n) \in (0,1)$, то

$$\frac{1}{r(1-x_n)} > 1,$$

следовательно,

$$x_n > x_{n+1}\ \forall n,$$

то есть последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывает, чтд.

2.3

Пусть $r \in (2,3)$, $x_{2n} > x^*$, $x_{2n+1} < x^*$. Тогда обе подпоследовательности $\{x_{2n}\}$ и $\{x_{2n+1}\}$ сходятся к x^*, причём чем больше r, тем более плавным становится их сближение с x^*.

Док-во:

Рассмотрим вторую итерацию функции: $f^2(x) = f(f(x)) = r^2 x(x-1)(rx(x-1)+1)$. Производная $(f^2)'(x^*) = (f'(f(x^*)))f'(x^*) = (f'(x^*))^2 = (2-r)^2$ Т.к. $r \in (2,3)$, то $(2-r) \in (-1,0)$, а $(2-r)^2 \in (0,1)$ следовательно, f^2 сжимает окрестность x^*. То есть чётная подпоследовательность $\{x_{2n}\}$ монотонно убывает к x^* (поскольку $x_{2n} > x^*$ и $f^2(x_{2n}) < x_{2n}$ для $x_{2n} > x^*$), а нечетная $\{x_{2n+1}\}$ монотонно возрастает к x^* (аналогично).

чтд.

2.4

Рассматривается отображение

$$x_{n+1} = g(x_n) = rx_n(1-x_n)(2+x_n), \qquad r \in \left[0;\ \frac{27}{2(7\sqrt{7}-10)}\right].$$

1. Неподвижные точки

Неподвижная точка x^* удовлетворяет уравнению

$$x^* = rx^*(1-x^*)(2+x^*).$$

Перенесём всё в одну сторону:

$$rx^*(1-x^*)(2+x^*) - x^* = 0 \ \Rightarrow\ x^*\big(r(1-x^*)(2+x^*)-1\big) = 0.$$

Отсюда получаем

$$x_1^* = 0,$$

а остальные неподвижные точки являются корнями квадратного уравнения

$$r(1-x^*)(2+x^*) - 1 = 0 \ \Leftrightarrow\ r(2+x^*-2(x^*)^2) = 1.$$

То есть всего может быть 1-3 неподвижных точек.

2. Диапазон параметра r, при котором x_n монотонно сходится к нулю

Для монотонного убывания к 0 нужно, чтобы $x_{n+1} < x_n\ \forall n$

Это соблюдается при всех r $\in (0,1)$

3 Hard

3.1

При $r=3$ получается цикл длины 2. При увеличении r количество точек в цикле увеличивается в 2 раза (на графике мы можем явно это видеть)

Таким образом m может принимать только значения степеней двойки, а при $r = r_\infty$ достигается своего рода хаотичность, нельзя выделить конкретный цикл