Университет ИТМО, кафедра ВТ

Лабораторная работа №2 по “Вычислительной математике”

"Интегрирование методом трапеций"

Работу выполнил

студент группы P3200

Рогов Я. С.

Преподаватель:

Исаев И.В.

Санкт-Петербург, 2016

Описание метода

Метод трапеций.
Пусть есть какая-то функция f(x), для которой нам нужно посчитать определённый интеграл от a до b. Разобьём отрезок [a;b] на n равных промежутков шириной $h=\frac{b-a}{n}$ каждый. Тогда можно считать, что для какого-нибудь $i\in[0;n-1]$ будет выполняться $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx h\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$, т.е. интеграл будет примерно равен площади трапеции, вписанной в площадь от оси до кривой функции. Тогда просуммировав для всех i получаем:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

Код реализации метода на языке C#

```
public static double TrapezeMethod(Function f, double a, double b, double e,
      out int N, out double E){
                  double h;
                  if(a==b){
                        if(Double.NaN.Equals(f(a)))
                              throw new WrongBoundsException();
                        else
                              return 0.0
                  }
                  bool swaped = a>b;
                  if (swaped){
                        h=a;
                        a=b;
                        b=h;
                  }
                  double result=(f.Calc(b) + f.Calc(a))/2;
                  if (Double.NaN.Equals(result))
                        throw new WrongBoundsException();
                  double result2n=0;
                  h = e * e;
                  int n = (int) ((b-a)/h);

                  if (n!=0){
                        h = (b-a)/n;
                        result2n=f.Calc(a+h/2);
                  }
                  else
                        h = b-a;
                  double x=b-h;
                  for (n=n-1; n>1; n--, x-=h){
                        result += f.Calc(x);
                        result2n += f.Calc(x+h/2);
                        if (result == Double.NaN || result2n == Double.NaN)
                              throw new WrongBoundsException();
                  }

                  result2n = h/2 * (result2n + result);
                  result *= h;

                  N = n;
                  E = 1.0/3 * Math.Abs(result2n - result);
```

```
		if (swaped)
			result = - result;
		return result;
	}

	public delegate double FuncDel(double x);

	public class Function{
		private String repr;
		private FuncDel func;
		public Function(String repr, FuncDel func){
			this.repr = repr;
			this.func = func;
		}
		public double Calc(double x){ return func(x); }
		public override String ToString(){
			return repr!=null ? repr :
				"Function representation undefined";
		}
	}
```

Оценка погрешности вычисления значения определённого интеграла

Для оценки погрешности используется оценка Рунге, которую можно записать как:

$\Delta_{2n} \approx \Theta \left| I_{2n} - I_n \right|$, где Θ = 1/3 для методов трапеций и средних прямоугольников, а I_k – вычисленное значение интеграла при разбиении интеграла на k шагов.

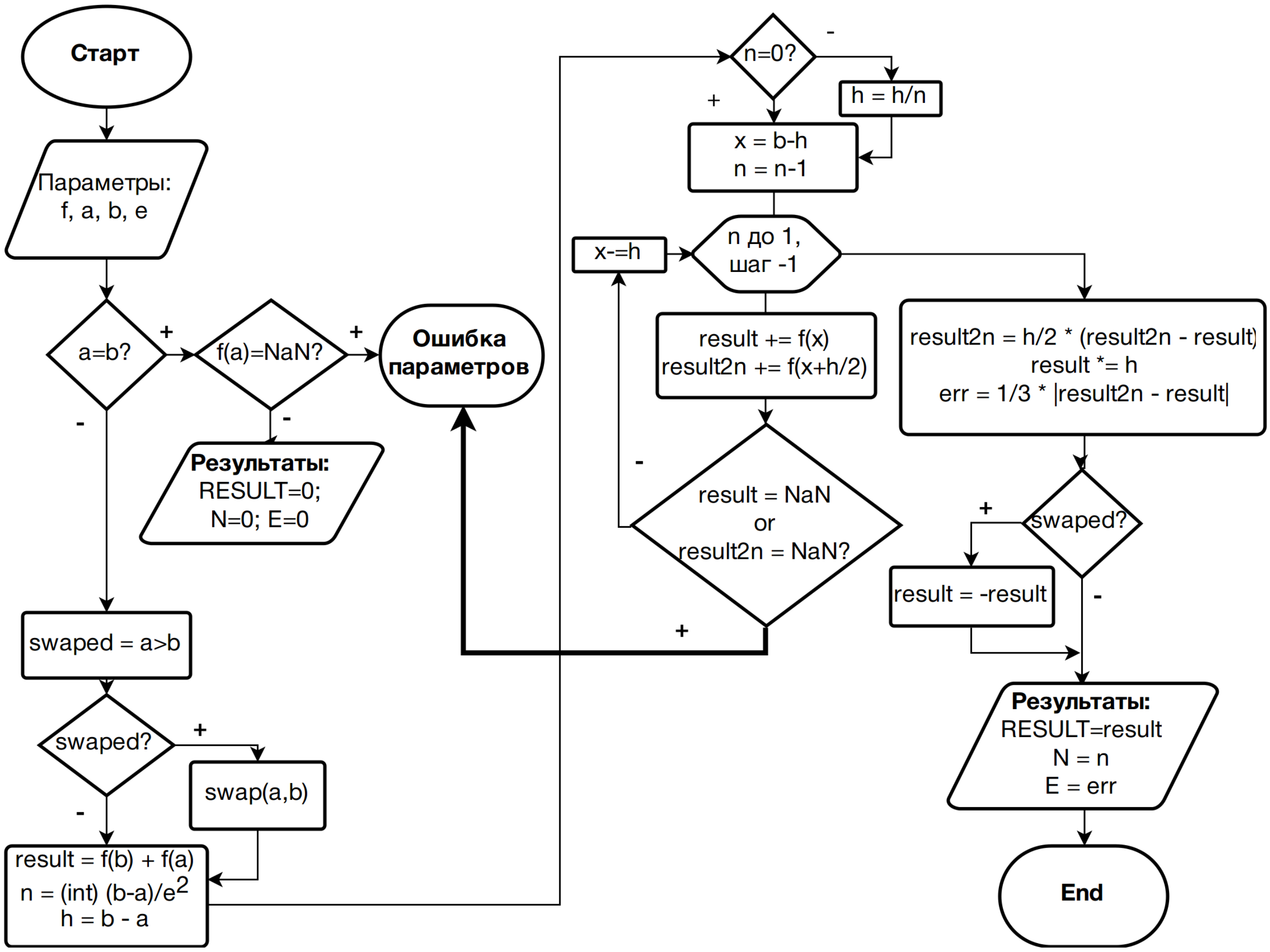
Пример работы программы и результаты выполнения:

```
./Program2.exe

Здравствуй, Дэйв

Выбери одну из функций для интегрирования:
0. f(x) = 3x^5 - 10x^4 + x^3 + 25x - 1
1. f(x) = cos(x) + sin(x)
2. f(x) = cos(ln(x))
3. f(x) = e^sqrt(x)
4. f(x) = x^2 * arccos(x)
3
Введи нижний предел интегрирования:
2.7
Введи верхний предел интегрирования:
3.14
Введи точность вычислений:
0.00001
Интеграл от функции
f(x) = e^sqrt(x)
от 2.7 до 3.14 (с погрешностью 1E-05) равен
2.43000599150664
Количество итераций: 1
Полученная погрешность: 1.32996191837265E-09
```

Блок-схема метода



Примеры:

Рассмотрим одну из предлагаемых функций: $f(x) = e^{\sqrt{(x)}}$ Найдём значение определённого интеграла этой функции от 2.7 до 3.14.

$$\int_{2.7}^{3.14} e^{\sqrt{x}} = \int_{2.7}^{3.14} e^{\sqrt{x}} * 2\sqrt{x}\, d\sqrt{x} = 2\int_{2.7}^{3.14} \underbrace{\sqrt{x}}_{u}\, \underbrace{e^{\sqrt{x}}\, d\sqrt{x}}_{dv} = <du = d\sqrt{x}\,; v = e^{\sqrt{x}}> = 2\left(e^{\sqrt{x}}\sqrt{x} - \int_{2.7}^{3.14} e^{\sqrt{x}}\, d\sqrt{x}\right) =$$

$$= 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)\Big|_{2.7}^{3.14} \approx 2.43$$

Т.о. можно убедиться, что программа верно посчитала значение (2.43000599150664) определённого интеграла относительно заданной точности.

Вывод: В ходе выполнения данной лабораторной работы я изучил метод нахождения значений определённых интегралов - метод трапеций – а также закрепил навыки реализации функций приближённого расчёта реальных математических функций.