

A ...

"Without data you're just another person with an opinion"

W. Edwards Deming

Indice

1	La distribuzione Normale Asimmetrica multidimensionale	1
1.1	I primi quattro momenti della distribuzione Normale Asimmetrica multidimensionale	3
1.2	Le proprietà statistiche della distribuzione Normale Asimmetrica multidimensionale	4
2	Indici di Curtosi per la Normale Asimmetrica multidimensionale	9
2.1	L'indice di Mardia	10
2.2	L'indice di Malkovich-Afifi	11
2.3	Il nuovo indice direzionale	12
2.4	L'indice di Srivastava	12
2.5	L'indice di Mori-Rohatgi-Székeley	13
2.6	L'indice di Kollo	15
3	Confronto tra le misure di Curtosi	17
3.1	Performance delle misure di Curtosi	17
4	Conclusioni	19
A	Operatori Matematici	21
A.1	Operatore <i>vec</i>	21
A.2	Il prodotto di Kronecker	21
A.3	Il prodotto <i>star</i>	22
A.4	Teorema per il calcolo dei momenti misti	23

A.5 La matrice di permutazione	23
B Codice R	25
Bibliography	27

Sommario

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Cras mattis tincidunt ligula. Duis ante neque, convallis vel vulputate vel, dignissim vel enim. Proin et iaculis libero. Aliquam erat volutpat. Cras ac purus non ante ultricies scelerisque. Donec lobortis lorem imperdiet leo consequat nec iaculis velit adipiscing. Curabitur nec gravida neque. Nunc vel dui vitae ante dapibus sagittis ac non libero. Suspendisse gravida commodo arcu bibendum luctus. Nam placerat pharetra massa, aliquam rutrum arcu fermentum nec. In non ultrices ante. Pellentesque pretium, felis ac mattis condimentum, dui massa ultricies nisl, hendrerit malesuada magna risus eget dolor. Pellentesque lobortis eleifend nibh, sed gravida sem fringilla eget. Proin pretium, arcu in ornare pellentesque, elit ante faucibus sem, at convallis eros ante ut velit. Donec ornare erat non diam tristique vitae congue nulla commodo. Proin fermentum fringilla mattis. Pellentesque ut dolor hendrerit tellus tincidunt egestas at sit amet velit.

Capitolo 1

La distribuzione Normale Asimmetrica multidimensionale

Definita da A. Azzalini e A. Dalla Valle nel 1996 [?] come generalizzazione della corrispettiva classe di distribuzioni univariata proposta da Azzalini nel 1985 [1] la famiglia di distribuzioni Normale Asimmetrica multidimensionale presenta proprietà ideali tra cui:

- inclusione della distribuzione Normale;
- tracciabilità matematica;
- ampio numero di indici per il calcolo di asimmetria e curtosi;
- possibilità di passaggio tra normalità e non normalità attraverso un parametro di regolarizzazione.

Grazie a queste proprietà la classe di distribuzioni Normali Asimmetriche permette un ottimo adattamento ai dati con relativa semplicità nel trattamento dal punto di vista matematico vista l'analogia con la distribuzione normale. Attraverso l'utilizzo del parametro di regolarizzazione è inoltre possibile modificare asimmetria e curtosi della distribuzione in quanto l'introduzione di asimmetria modifica anche le code della distribuzione portando ad una modifica della curtosi della stessa. Risulta necessario quindi ottenere

degli indici che permettano di calcolare sia l'asimmetria [?] che della curtosi [?] in modo da permettere una descrizione completa della forma della distribuzione.

La definizione della famiglia di distribuzioni Normale Asimmetrica multivariata nel campo pratico è stata estremamente rilevante in quanto, nel caso multivariato, il numero di distribuzioni capaci di modellare leggere asimmetrie per le distribuzioni marginali è estremamente ridotto; inoltre la famiglia Normale Asimmetrica multivariata presenta una grandissima flessibilità grazie al parametro di regolarizzazione permettendo quindi un'ottima capacità di adattamento a diversi tipi di dati. La generalizzazione multivariata della famiglia Normale Asimmetrica fornita da Azzalini e Dalla Valle permette di ottenere una distribuzione le cui marginali sono a loro volta delle distribuzioni Normali Asimmetriche.

Definizione (Azzalini e Dalla Valle, 1996). Una variabile continua p -dimensionale Z è detta avere distribuzione Normale Asimmetrica multivariata ($Z \sim SN_p(\bar{\Omega}, \alpha)$) se è continua e ha funzione di densità

$$2\phi_p(z; \bar{\Omega})\Phi(\alpha^\top z) \quad (z \in \mathbb{R})$$

Il parametro di regolarizzazione α è detto in questo caso parametro di forma e permette di regolare asimmetria e curtosi. Con $\alpha = 0$ si ottiene la distribuzione Normale Multivariata con matrice di correlazione $\bar{\Omega}$. Questa definizione assume $\mu = 0$, per questo Azzalini nel 2005 propone una generalizzazione con l'introduzione di un parametro di posizione (ξ di dimensione $p \times 1$) e uno di scala (ω matrice diagonale di dimensione $p \times p$). L'introduzione del parametro di posizione ξ permette di centrare la distribuzione in un valore diverso da 0.

Teorema 1.1 (Azzalini e Capitanio, 1999). Sia Z una variabile Normale Asimmetrica p -dimensionale, si ottiene che $Y = \xi + \omega Z$ con $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_p)^\top$ e $\omega = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_p)$ ha funzione di densità

$$2\phi_p((y - \xi); \Omega)\Phi(\alpha^\top \omega^{-1}(y - \xi)) \quad (z \in \mathbb{R})$$

1.1. I PRIMI QUATTRO MOMENTI DELLA DISTRIBUZIONE NORMALE ASIMMETRICA MULTIDIMENSIONALE

con $\phi_p((y-\xi); \Omega)$ densità di una normale con media ξ e matrice di varianze e covarianze $\Omega = \omega \bar{\Omega} \omega$, per la variabile Y si indicherà la distribuzione come $Y \sim SN_p(\xi, \Omega, \alpha)$

1.1 I primi quattro momenti della distribuzione Normale Asimmetrica multidimensionale

Azzalini e Dalla Valle (1996) hanno calcolato la funzione generatrice dei momenti nel caso in cui $Y \sim SN_p(\Omega, \alpha)$

Teorema 1.2 (Azzalini e Dalla Valle, 1996). *Sia Z una variabile Normale Asimmetrica p -dimensionale con $Z \sim SN_p(\Omega, \alpha)$, allora la funzione generatrice dei momenti per Z è pari a:*

$$\begin{aligned} M_4 &= 2 \int_{\mathbb{R}^p} \exp(t^\top z) \phi_p(z; \Omega) \Phi(\alpha^\top z) dz \\ &= 2 \exp\left(\frac{1}{2} t^\top \Omega t\right) \Phi(\delta^\top t) \quad (t \in \mathbb{R}^p) \end{aligned}$$

con

$$\delta = \frac{\Omega \alpha}{(1 + \alpha^\top \Omega \alpha)^{\frac{1}{2}}}$$

Grazie a questo teorema Genton nel 2001 calcolata i primi quattro momenti per una distribuzione Normale Asimmetrica p -variata

Teorema 1.3 (Genton et al., 2001). *Sia Z un vettore casuale con distribuzione $Z \sim SN_p(\alpha, \Omega)$, allora:*

$$\begin{aligned} M_1 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta \\ M_2 &= \Omega \\ M_3 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\delta \otimes \Omega + \text{vec}(\Omega) \delta^\top + (I_p \otimes \delta) \Omega - (I_p \otimes \delta) (\delta \otimes \delta^\top) \right] \\ M_4 &= (I_{p^2} + U_{p,p})(\Omega \otimes \Omega) + \text{vec}(\Omega) \text{vec}(\Omega^\top) \end{aligned}$$

Generalizzando i momenti per gli una distribuzione con parametro di posizione $\xi \neq 0$ Genton (2001) calcola i primi quattro momenti non centrati per la distribuzione $Y \sim SN_p(\xi, \Omega, \alpha)$

Teorema 1.4 (Azzalini, 2005). *Sia Y un vettore casuale con distribuzione $Y \sim SN_p(\xi, \Omega, \alpha)$, allora la funzione generatrice dei momenti per Y è:*

$$M(t) = 2 \exp(\xi^\top t + \frac{1}{2} t^\top \Omega t) \Phi(\delta^\top t) \quad (t \in \mathbb{R}^p)$$

Teorema 1.5 (Genton et al., 2001). *Sia Y un vettore casuale con distribuzione $Y \sim SN_p(\xi, \Omega, \alpha)$, allora i primi quattro momenti di Y sono:*

$$\begin{aligned} M_1 &= \xi + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta \\ M_2 &= \Omega + \xi \xi^\top + \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\xi \delta^\top + \delta \xi^\top) \\ M_3 &= \Omega \otimes \xi + \xi \otimes \Omega + \text{vec}(\Omega) \otimes \xi^\top + \xi \otimes \xi^\top \otimes \xi + \sqrt{\frac{2}{\pi}} [\delta \otimes \Omega + \text{vec}(\Omega) \delta^\top \\ &\quad + (I_p \otimes \delta) \Omega - \delta \otimes \delta^\top \otimes \delta + \delta \otimes \xi^\top \otimes \xi + \xi \otimes \delta^\top \otimes \xi + \xi \otimes \xi^\top \otimes \delta] \\ M_4 &= \Omega \otimes \xi \otimes \xi^\top + \xi \otimes \Omega \otimes \xi^\top + \text{vec}(\Omega) \otimes \xi^\top \otimes \xi^\top + \xi \otimes \xi^\top \otimes \xi \otimes \xi^\top + \Omega \otimes \Omega \\ &\quad + \text{vec}(\Omega) \text{vec}(\Omega)^\top + U_{p,p}(\Omega \otimes \Omega) + \xi^\top \otimes \Omega \otimes \xi + \xi \otimes \xi \otimes \text{vec}(\Omega)^\top + \xi \otimes \xi^\top \otimes \Omega \\ &\quad + \sqrt{\frac{2}{\pi}} [\delta \otimes \Omega \otimes \xi^\top + \text{vec}(\Omega) \otimes \delta^\top \otimes \xi^\top + ((I_p \otimes \delta) \Omega) \otimes \xi^\top + \delta \otimes \xi^\top \otimes \xi \otimes \xi^\top \\ &\quad + \xi \otimes \delta^\top \otimes \xi \otimes \xi^\top + \xi \otimes \xi^\top \otimes \delta \otimes \xi^\top + \delta^\top \otimes \Omega \otimes \xi + \delta \otimes \text{vec}(\Omega)^\top \otimes \xi \\ &\quad + (\Omega(I_p \otimes \delta^\top)) \otimes \xi + \xi^\top \otimes \delta \otimes \Omega + \xi^\top \otimes (\text{vec}(\Omega) \delta^\top) + \xi^\top \otimes ((I_p \otimes \delta) \Omega) \\ &\quad + \xi \otimes \delta^\top \otimes \Omega + \xi \otimes \delta \otimes \text{vec}(\Omega)^\top + \xi \otimes (\Omega(I_p \otimes \delta^\top)) + \xi \otimes \xi^\top \otimes \delta \otimes \delta^\top \\ &\quad - \delta \otimes \delta^\top \otimes \delta \otimes \xi^\top - \delta^\top \otimes \delta \otimes \delta^\top \otimes \xi - \xi^\top \otimes \delta \otimes \delta^\top \otimes \delta - \xi \otimes \delta^\top \otimes \delta \otimes \delta^\top] \end{aligned}$$

1.2 Le proprietà statistiche della distribuzione Normale Asimmetrica multidimensionale

Per le proprietà di seguito descritte si fa riferimento ad una variabile Normale Asimmetrica p -dimensionale $Y \sim SN_p(\Omega, \alpha)$. Queste proprietà possono

1.2. LE PROPRIETÀ STATISTICHE DELLA DISTRIBUZIONE NORMALE ASIMMETRICA MU

essere divise in quattro categorie: quelle utili per creare campioni casuali (I), quelle relative alle distribuzioni marginali (II), quelle riguardanti le trasformazioni lineari (III e IV) e quelle che riguardano la forma quadratica (V). Tutte le proprietà descritte valgono anche nel caso in cui $Y \sim SN_p(\xi, \Omega, \alpha)$ ma necessitano di una notazione più complicata che viene quindi omessa.

Proposizione I (Azzalini e Capitanio, 1999). sia $\begin{pmatrix} X_0 \\ X \end{pmatrix} \sim N_{p+1}(0, \Omega^*)$

con X_0 scalare e $\Omega = \begin{bmatrix} 1 & \delta^\top \\ \delta & \Omega \end{bmatrix}$ matrice di correlazione, allora:

$$Z = \begin{cases} X & \text{se } X_0 > 0 \\ -X & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è una $SN_p(\Omega, \alpha)$ con:

$$\alpha = \frac{\Omega^{-1}\delta}{(1 - \delta^\top \Omega^{-1}\delta)^{1/2}}$$

Questa proposizione fornisce una rappresentazione stocastica di Z che permette di generare valori pseudocasuali da una distribuzione Normale Asimmetrica p -dimensionale. La proposizione è facilmente estendibile ad una Normale Asimmetrica con vettore delle medie diverso dal vettore nullo applicando il teorema 1.1.

Proposizione II (Azzalini e Capitanio, 1999). sia $Z \sim SN_p(\Omega, \alpha)$ e Z sia divisa in $Z^\top = (Z_1^\top, Z_2^\top)$ di dimensioni rispettivamente h e $p - h$, siano

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{pmatrix}$$

e

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

le corrispondenti partizioni di Ω e α , allora la distribuzione marginale di Z_1 è ancora una $SN_h(\Omega_{11}, \bar{\alpha}_1)$ con $\overline{\alpha}_1 = \frac{\alpha_1 + \Omega_{11}^{-1} \Omega_{12} \alpha_2}{(1 + \alpha_2^\top \Omega_{22.1} \alpha_2)^{1/2}}$ e $\Omega_{22.1} = \Omega_{22} - \Omega_{21} \Omega_{11}^{-1} \Omega_{12}$.

Quello che si ricava da questa proposizione è che sottoinsiemi di componenti di Z hanno distribuzione marginale che è ancora una variabile Normale Asimmetrica, quindi ciascuna componente marginale di Z si distribuisce come una variabile casuale Normale Asimmetrica univariata.

Proposizione III (Azzalini e Capitanio, 1999). sia $Z \sim SN_p(\Omega, \alpha)$ e A una matrice non singolare $p \times p$ tale che $A^\top \Omega A$ sia una matrice di correlazione, allora

$$A^\top Z \sim SN_p(A^\top \Omega A, A^{-1} \alpha)$$

Proposizione IV (Azzalini e Capitanio, 1999). sia $Z \sim SN_p(\Omega, \alpha)$, esiste una trasformazione lineare $Z^* = A^* Z$ tale che $Z^* \sim SN_p(I_p, \alpha^*)$, dove al più una sola componente di α è diversa da 0.

Questo risultato permette di definire una "forma canonica" per la distribuzione Normale Asimmetrica multivariata, le cui componenti sono mutualmente indipendenti con una sola componente a rappresentare tutta l'asimmetria della distribuzione multivariata. Se solo una delle componenti del vettore α è diversa da 0, questo implica che non solo tutta l'asimmetria della distribuzione venga "assorbita" da una componente, ma anche la curtosi. Esisterà, perciò, al più una sola componente con curtosi diversa da quella di una Normale multivariata. La densità di Z^* è data da (Azzalini e Capitanio, 1999):

$$2 \prod_{i=1}^p \phi(u_i) \Phi(\alpha_m^* u_m)$$

con $\alpha_m^* = (\alpha^\top \Omega \alpha)^{1/2}$ unica componente (se esiste) di α^* diversa da 0.

Proposizione V (Azzalini e Capitanio, 1999). Sia $Z \sim SN_p(\Omega, \alpha)$ e B matrice $p \times p$ simmetrica semi-definita positiva di rango k tale che $B \Omega B = B$, allora $Z^\top B Z \sim \chi_k^2$

Generalizzando questa proposizione si ottiene

Proposizione V.1 (Azzalini e Capitanio, 1999). Sia $Z \sim SN_p(\Omega, \alpha)$ e C matrice a rango pieno $p \times k$ ($p \leq k$), allora $Z^\top C(C^\top \Omega C)^{-1} C^\top Z \sim \chi_p^2$

Da queste due proprietà si ricava che $Z^\top \Omega Z \sim \chi_p^2$.

Come si può notare questa proprietà non coinvolge il parametro α

Capitolo 2

Indici di Curtosi per la Normale Asimmetrica multidimensionale

Nella descrizione delle caratteristiche di una distribuzione, oltre agli indici di posizione, variabilità globale e asimmetria è utile definire anche un indice di curtosi. Etimologicamente la parola deriva dal greco *κυρτός* che significa "curvo, arcuato". In generale la curtosi è un indice di forma della curva definito usualmente come rapporto tra la lontananza delle osservazioni dall'indice di posizione rispetto alla sua distanza media, permettendo di definire la pesantezza delle code di una distribuzione. L'indice di curtosi calcola quindi l'allontanamento dalla normalità distributiva a parità di media e varianza, verificando un maggior appiattimento (distribuzione platicurtica) o un maggior appuntimento (distribuzione leptocurtica) della distribuzione. È importante tenere conto però del fatto che oltre a dipendere dall'andamento delle code della distribuzione l'indice di curtosi dipende anche dal comportamento della stessa nella sua parte centrale, un ispessimento delle code della distribuzione porterà ad un minor numero di osservazioni nella parte centrale della distribuzione e viceversa code meno spesse portano ad un maggior numero di osservazioni nella parte centrale in quanto l'integrale della densità deve valere sempre 1. La complessità di questo fenomeno ha portato negli anni alla definizione di vari indici per il calcolo della curtosi.

Nel caso multidimensionale si ha un aumento della complessità di questo

indice poiché è intrinsecamente connesso con le altre caratteristiche della distribuzione come la pesantezza delle code, la variabilità e l'asimmetria, inoltre la presenza di più dimensioni connesse tra loro ne complica l'interpretazione. Risulta però più utile il calcolo della curtosi nel caso multidimensionale perché permette una descrizione più accurata della distribuzione insieme agli altri indici in quanto la visualizzazione grafica risulta complicata quando il numero di dimensioni è maggiore di 3. Vista l'importanza di questo fenomeno e la sua natura estremamente articolata sono stati proposti in letteratura vari indici, ognuno dei quali analizza aspetti diversi della curtosi visto che la risulta difficile cogliere il fenomeno nella sua interezza.

Gli indici in questione possono essere suddivisi in due categorie principali:

- indici riassuntivi che calcolano un unico valore complessivo per la curtosi;
- indici direzionali che permettono di identificare la curtosi per le varie direzioni della distribuzione.

I primi cercano di identificare un allontanamento generale dalla normalità distributiva mentre i secondi mirano ad individuare la direzione su cui avviene questo allontanamento. Di seguito sono riportati gli indici identificati per una distribuzione Normale Asimmetrica multidimensionale (Zanotto, 2012). Tutti gli indici si riferiscono ad una variabile casuale $Y \sim SN_p(\xi, \Omega, \alpha)$ con media

$$E(Y) = \xi + \mu$$

e varianza

$$Var(Y) = \Omega - \mu\mu^\top$$

con $\mu = \omega\sqrt{\frac{2}{\pi}}\delta$

2.1 L'indice di Mardia

L'indice di Mardia (1970) è uno degli indici più conosciuti per il calcolo della curtosi. Si tratta di un indice scalare che può essere considerato come la

generalizzazione multivariata dell'indice di Pearson.

Definizione (Mardia, 1970). Sia $X = (X_1, \dots, X_p)^\top$ un vettore casuale p -dimensionale con media $\mu = E(X)$ e matrice di varianze e covarianze non singolare $\Sigma = E((X - \mu)(X - \mu)^\top)$, allora l'indice di curtosi è definito come:

$$\beta_{2,p} = E \left[(X - \mu)^\top \Sigma^{-1} (X - \mu) \right]^2$$

Come per l'indice di Pearson si ottiene un valore di riferimento di $p(p+1)$ con p numero di dimensioni ottenuto come valore di $\beta_{2,p}$ per una distribuzione Normale multidimensionale. Si ottiene quindi per $\beta_{2,p} > p(p+1)$ una distribuzione leptocurtica e per $\beta_{2,p} < p(p+1)$ una distribuzione platicurtica. L'indice può essere centrato come per l'indice di Pearson come

$$\gamma_{2,p} = \beta_{2,p} - p(p+1)$$

Per la distribuzione Normale Asimmetrica multidimensionale si ottiene:

$$\gamma_{2,p} = \beta_{2,p} - p(p+1) = 2(\pi - 3) \left(\frac{\mu_Z^\top \bar{\Omega}^{-1} \mu_Z}{1 - \mu_Z^\top \bar{\Omega}^{-1} \mu_Z} \right)$$

con $\mu_Z = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\delta$ il valore atteso variabile casuale $Z = \omega(Y - \xi) \sim SN_p(0, \bar{\Omega}, \alpha)$. L'indice viene calcolato per una variabile casuale Normale Asimmetrica standardizzata, questo perchè risulta invariante rispetto a trasformazioni non singolari, di conseguenza ξ e ω non influenzano il risultato.

2.2 L'indice di Malkovich-Afifi

Malkovich e Afifi (1973) hanno introdotto un modo diverso di misurare la curtosi nell'ambito multidimensionale calcolando la curtosi in ogni direzione della curva e considerando il massimo di questi valori.

Definizione (Malkovich e Afifi, 1973). Sia \varnothing_p una sfera unitaria p -dimensionale definita come $\varnothing_p = \{x \in \mathbb{R}^p : |x| = 1\}$, allora la variabile casuale p -dimensionale Y ha curtosi nella direzione $u \in \varnothing_p$ definita come:

$$[\beta_2(u)]^2 = \left[\frac{E[(u^\top Y - u^\top E(Y))^4]}{\text{Var}(u^\top Y)^2} \right]^2 > 9$$

allora l'indice di curtosi è definito come:

$$(\beta_2^*)^2 = \sup_{u \in \mathcal{J}_p} [\beta_2(u) - 3]^2$$

Come si può notare dalla definizione questo indice fa riferimento all'indice di Mardia unidimensionale ($p = 1$) calcolato per ogni direzione ed elevato al quadrato. Anche questo indice è di tipo scalare in quanto restituisce un solo valore riassuntivo di curtosi.

Per la distribuzione Normale Asimmetrica multidimensionale questo indice risulterà uguale a 0 per tutte le direzioni tranne quella che presenta non normalità. Risulterà quindi che l'indice di Malkovich-Afifi, scegliendo il massimo valore tra quelli calcolati elevato al quadrato, esso sarà pari al quadrato dell'indice di Mardia:

$$\gamma_2 = [\beta_{2,p} - p(p+2)]^2 = \left[2(\pi - 3) \left(\frac{\mu_Z^\top \Omega^{-1} \mu_Z}{1 - \mu_Z^\top \Omega^{-1} \mu_Z} \right) \right]^2$$

2.3 Il nuovo indice direzionale

2.4 L'indice di Srivastava

L'indice di Srivastava è basato sul metodo delle componenti principali.

Definizione (Srivastava, 1984). sia Y una variabile casuale multidimensionale con media μ con matrice di varianze e covarianze Σ ; sia $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_p)$ una matrice ortogonale tale che $\Gamma^\top \Sigma \Gamma = I_p(\lambda)$, con $I_p(\lambda) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ gli autovalori della matrice Σ . Definiamo $F = \Gamma Y$ e $\theta = \Gamma \mu$, allora l'indice di curtosi è pari a:

$$\beta_{2,p \times p} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \left\{ \frac{E(F_i - \theta)^4}{\lambda_i^2} \right\} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \left\{ \frac{E[\gamma_i^\top (Y - \mu)]^4}{\lambda_i^2} \right\}$$

Questo indice è basato sul momento centrato di quarto ordine $E [\gamma_i^\top (Y - \mu)]^4$. Per calcolare questo è invece possibile centrare la variabile ricordificando $X = Y - \mu$ e calcolare il momento quarto non centrato per X . Utilizzando trasformazioni affini dei momenti si ottiene:

$$E [\gamma_i^\top X]^4 = (\gamma_i^\top \otimes \gamma_i^\top) M_4(\gamma_i \otimes \gamma_i)$$

Per calcolare questo indice per una variabile casuale Normale Asimmetrica multidimensionale è sufficiente sostituire il momento non centrato di quarto ordine con quello della Normale Asimmetrica multidimensionale (paragrafo 1.1) dopo aver centrato la variabile Y . Si ottiene quindi:

$$\begin{aligned} E[\gamma_i^\top(X)]^4 &= (\gamma_i^\top \otimes \gamma_i^\top) M_4(\gamma_i \otimes \gamma_i) \\ &= (\gamma_i^\top \otimes \gamma_i^\top) (\Omega \otimes \xi \otimes \xi^\top + \xi \otimes \Omega \otimes \xi^\top + \text{vec}(\Omega) \otimes \xi^\top \otimes \xi^\top \\ &\quad + \xi \otimes \xi^\top \otimes \xi \otimes \xi^\top + \Omega \otimes \Omega + \text{vec}(\Omega) \text{vec}(\Omega)^\top + U_{p,p}(\Omega \otimes \Omega) \\ &\quad + \xi^\top \otimes \Omega \otimes \xi + \xi \otimes \xi \otimes \text{vec}(\Omega)^\top + \xi \otimes \xi^\top \otimes \Omega + \sqrt{\frac{2}{\pi}} [\delta \otimes \Omega \otimes \xi^\top \\ &\quad + \text{vec}(\Omega) \otimes \delta^\top \otimes \xi^\top + ((I_p \otimes \delta) \Omega) \otimes \xi^\top + \delta \otimes \xi^\top \otimes \xi \otimes \xi^\top \\ &\quad + \xi \otimes \delta^\top \otimes \xi \otimes \xi^\top + \xi \otimes \xi^\top \otimes \delta \otimes \xi^\top + \delta^\top \otimes \Omega \otimes \xi + \delta \otimes \text{vec}(\Omega)^\top \otimes \xi \\ &\quad + (\Omega(I_p \otimes \delta^\top)) \otimes \xi + \xi^\top \otimes \delta \otimes \Omega + \xi^\top \otimes (\text{vec}(\Omega) \delta^\top) + \xi^\top \otimes ((I_p \otimes \delta) \Omega) \\ &\quad + \xi \otimes \delta^\top \otimes \Omega + \xi \otimes \delta \otimes \text{vec}(\Omega)^\top + \xi \otimes (\Omega(I_p \otimes \delta^\top)) + \xi \otimes \xi^\top \otimes \delta \otimes \delta^\top \\ &\quad - \delta \otimes \delta^\top \otimes \delta \otimes \xi^\top - \delta^\top \otimes \delta \otimes \delta^\top \otimes \xi - \xi^\top \otimes \delta \otimes \delta^\top \otimes \delta \\ &\quad - \xi \otimes \delta^\top \otimes \delta \otimes \delta^\top]) (\gamma_i \otimes \gamma_i) \end{aligned}$$

2.5 L'indice di Mori-Rohatgi-Székeley

Mori e coautori (1993) introducono un ulteriore indice di curtosi multivariato in forma matriciale. L'indice utilizza una variabile Z standardizzata

Definizione (Mori, Rohatgi e Székeley, 1993). sia X una variabile casuale p -dimensionale con matrice di varianze e covarianze Σ non singolare. Definiamo

$Y = \Sigma^{-1}(X - E(X))$, allora l'indice di curtosi è pari a:

$$K(X) = E(YY^\top YY^\top) - (p+2)I_p$$

L'indice può essere riscritto utilizzando il prodotto *star* come definito da Kollo (2008)

$$K(X) = I_p \star M_4(Y) - (p+2)I_p$$

Utilizzando il momento quarto calcolato da Genton e coautori (2001) descritto nel paragrafo 1.1 è possibile ottenere l'indice per la distribuzione Normale Asimmetrica multidimensionale come:

$$\begin{aligned} K(X) = & I_p \star (\Omega \otimes \xi \otimes \xi^\top + \xi \otimes \Omega \otimes \xi^\top + \text{vec}(\Omega) \otimes \xi^\top \otimes \xi^\top \\ & + \xi \otimes \xi^\top \otimes \xi \otimes \xi^\top + \Omega \otimes \Omega + \text{vec}(\Omega)\text{vec}(\Omega)^\top + U_{p,p}(\Omega \otimes \Omega) \\ & + \xi^\top \otimes \Omega \otimes \xi + \xi \otimes \xi \otimes \text{vec}(\Omega)^\top + \xi \otimes \xi^\top \otimes \Omega + \sqrt{\frac{2}{\pi}}[\delta \otimes \Omega \otimes \xi^\top \\ & + \text{vec}(\Omega) \otimes \delta^\top \otimes \xi^\top + ((I_p \otimes \delta)\Omega) \otimes \xi^\top + \delta \otimes \xi^\top \otimes \xi \otimes \xi^\top \\ & + \xi \otimes \delta^\top \otimes \xi \otimes \xi^\top + \xi \otimes \xi^\top \otimes \delta \otimes \xi^\top + \delta^\top \otimes \Omega \otimes \xi + \delta \otimes \text{vec}(\Omega)^\top \otimes \xi \\ & + (\Omega(I_p \otimes \delta^\top)) \otimes \xi + \xi^\top \otimes \delta \otimes \Omega + \xi^\top \otimes (\text{vec}(\Omega)\delta^\top) + \xi^\top \otimes ((I_p \otimes \delta)\Omega) \\ & + \xi \otimes \delta^\top \otimes \Omega + \xi \otimes \delta \otimes \text{vec}(\Omega)^\top + \xi \otimes (\Omega(I_p \otimes \delta^\top)) + \xi \otimes \xi^\top \otimes \delta \otimes \delta^\top \\ & - \delta \otimes \delta^\top \otimes \delta \otimes \xi^\top - \delta^\top \otimes \delta \otimes \delta^\top \otimes \xi - \xi^\top \otimes \delta \otimes \delta^\top \otimes \delta \\ & - \xi \otimes \delta^\top \otimes \delta \otimes \delta^\top]) - (p+2)I_p \end{aligned}$$

Come si può notare questo indice è calcolato utilizzando solo gli elementi diagonali della matrice dei momenti quarti non centrati M_4 . Questo perchè l'utilizzo della matrice identità I_p porta all'annullamento di tutti gli elementi non si trovano sulla diagonale di M_4 e ad un "collasso" degli altri elementi in una matrice di dimensione $p \times p$.

2.6 L'indice di Kollo

Kollo (2008) parte dalla considerazione che l'indice di Mardia non tiene conto dei momenti misti di quarto ordine nel calcolo della curtosi. Secondo questo autore, infatti, per avere un indice che descriva completamente la curtosi della variabile casuale bisogna considerare anche i momenti misti. Per questo Kollo descrive un nuovo indice

Definizione (Kollo, 2008). sia X una variabile casuale p -dimensionale e $Y = \Sigma^{-1/2}(X - E(X))$ con Σ matrice di varianze e covarianze per la variabile casuale X , allora l'indice di curtosi può essere calcolato come:

$$B(X) = \sum_{i,j=1}^p E(Y_i Y_j) E(Y Y^\top)$$

Kollo dimostra inoltre che utilizzando il prodotto *star* questo prodotto può essere riscritto come

$$B(X) = \mathbf{1}_{p \times p} \star M_4(Y)$$

Come nei casi precedenti per la distribuzione Normale Asimmetrica multidimensionale è sufficiente sostituire la matrice M_4 presentata nel paragrafo

1.1 calcolata da Genton e coautori ottenendo quindi:

$$\begin{aligned}
K(X) = & \mathbf{1}_{p \times p} \star (\Omega \otimes \xi \otimes \xi^\top + \xi \otimes \Omega \otimes \xi^\top + \text{vec}(\Omega) \otimes \xi^\top \otimes \xi^\top \\
& + \xi \otimes \xi^\top \otimes \xi \otimes \xi^\top + \Omega \otimes \Omega + \text{vec}(\Omega) \text{vec}(\Omega)^\top + U_{p,p}(\Omega \otimes \Omega) \\
& + \xi^\top \otimes \Omega \otimes \xi + \xi \otimes \xi \otimes \text{vec}(\Omega)^\top + \xi \otimes \xi^\top \otimes \Omega + \sqrt{\frac{2}{\pi}} [\delta \otimes \Omega \otimes \xi^\top \\
& + \text{vec}(\Omega) \otimes \delta^\top \otimes \xi^\top + ((I_p \otimes \delta) \Omega) \otimes \xi^\top + \delta \otimes \xi^\top \otimes \xi \otimes \xi^\top \\
& + \xi \otimes \delta^\top \otimes \xi \otimes \xi^\top + \xi \otimes \xi^\top \otimes \delta \otimes \xi^\top + \delta^\top \otimes \Omega \otimes \xi + \delta \otimes \text{vec}(\Omega)^\top \otimes \xi \\
& + (\Omega(I_p \otimes \delta^\top)) \otimes \xi + \xi^\top \otimes \delta \otimes \Omega + \xi^\top \otimes (\text{vec}(\Omega) \delta^\top) + \xi^\top \otimes ((I_p \otimes \delta) \Omega) \\
& + \xi \otimes \delta^\top \otimes \Omega + \xi \otimes \delta \otimes \text{vec}(\Omega)^\top + \xi \otimes (\Omega(I_p \otimes \delta^\top)) + \xi \otimes \xi^\top \otimes \delta \otimes \delta^\top \\
& - \delta \otimes \delta^\top \otimes \delta \otimes \xi^\top - \delta^\top \otimes \delta \otimes \delta^\top \otimes \xi - \xi^\top \otimes \delta \otimes \delta^\top \otimes \delta \\
& - \xi \otimes \delta^\top \otimes \delta \otimes \delta^\top])
\end{aligned}$$

Come per l'indice di Mori anche in questo caso avviene un "collasso" di alcuni elementi della matrice dei momenti quarti ma questi non vengono più annullati ma sommati tra di loro. In questo modo quindi manteniamo nell'indice di curtosi anche l'informazione relativa ai momenti misti della variabile ottenendo comunque una matrice di dimensioni $p \times p$.

Capitolo 3

Confronto tra le misure di Curtosi

Definite le varie misure di curtosi è ora possibile procedere ad un confronto tra queste al variare di Ω ed α . Saranno considerate qui di seguito sempre distribuzioni Normali Asimmetriche centrate ($\xi = \underline{0}$). Le tabelle di seguito riportare mostrano il valore degli indici di Mardia e Malkovich-Affi al variare sia di Ω che di α , mentre per gli altri indici il calcolo viene effettuato solo al variare della matrice di varianze e covarianze Ω , questo perchè sono basati sul momento quarto non centrato di variabili casuali Normali Asimmetriche multidimensionali standardizzate che risulta indipendente dal valore di α come definito nel teorema 1.3.

3.1 Performance delle misure di Curtosi

Capitolo 4

Conclusioni

Appendice A

Operatori Matematici

Di seguito vengono descritte alcune funzioni matematiche ed algebriche utilizzate per il calcolo degli indici.

A.1 Operatore *vec*

Questo operatore viene definito da Neudecker (1969) ed è sempre associato ad una matrice A .

Definizione (Graham, 1981). se A è una matrice di ordine $m \times n$, allora

$$vec(A) = \begin{bmatrix} A_{.1} \\ \vdots \\ A_{.n} \end{bmatrix}$$

Si ottiene quindi a partire da una matrice A un vettore $mn \times 1$ che contiene tutti gli elementi delle colonne di A .

A.2 Il prodotto di Kronecker

Il prodotto di Kronecker, conosciuto anche come "prodotto diretto" o "prodotto tensoriale", è un concetto nato nell'ambito della fisica applicata ma ha

avuto un forte successo in molti ambiti della teoria delle matrici ed è ad oggi largamente utilizzato.

Definizione (Graham, 1981). sia $A = [a_{ij}]$ una matrice di ordine $m \times n$ e $B = [b_{ij}]$ una matrice di ordine $r \times s$. Si dice prodotto di Kronecker di A e B e si scrive $A \otimes B$ la matrice:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

La matrice risultante sarà una matrice di dimensione $mr \times ns$ a blocchi e ogni blocco (i, j) è composto dalla matrice $a_{ij}B$ di ordine $r \times s$. Il prodotto di Kronecker è definito a prescindere dalla dimensione delle matrici coinvolte.

A.3 Il prodotto *star*

Introdotta da MacRae nel 1974 il prodotto *star* nasce nell'ambito della differenziazione di matrici per facilitare tale procedimento.

Definizione (MacRae, 1974). sia A una matrice $m \times n$ e B una matrice $mr \times ns$ suddivisa in sottomatrici B_{ij} con $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$ di dimensioni $r \times s$, allora il prodotto *star* $A \star B$ applicato alle matrici A e B è pari alla matrice $r \times s$:

$$A \star B = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} B_{ij}$$

con a_{ij} elemento generico della matrice A .

A.4 Teorema per il calcolo dei momenti misti

Questo teorema è utile per il calcolo dei momenti misti per distribuzioni inserite in uno spazio sferico.

Definizione (Fang, Kolz e Ng, 1990). sia $u^{(n)}$ distribuita uniformemente su una sfera con superficie in \mathbb{R}^n per qualsiasi intero m_1, \dots, m_n con

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

i momenti misti di $u_{(n)}$ possono essere espressi come

$$E \left(\prod_{i=1}^n u_i^{m_i} \right) = \begin{cases} \frac{1}{(n/2)^{[l]}} \prod_{i=1}^n \frac{(2l_i)!}{4^{l-i} (l_i)!} & \text{se } m_i = 2l_i \text{ è pari} \\ 0 & \text{se anche uno degli } m_i \text{ è dispari} \end{cases}$$

con $x^{[l]} = x(x+1) \dots (x+l-1)$.

A.5 La matrice di permutazione

Per poter definire le matrici di permutazione è necessario introdurre il concetto di matrice elementare.

Definizione. si definisce matrice elementare E_{ij} una matrice di ordine $m \times n$ che ha valore 1 in posizione (i, j) e 0 in tutte le altre posizioni.

Adesso è possibile definire la matrice di permutazione $U_{n,n}$ come

Definizione. data una matrice elementare E_{ij} di ordine $m \times n$ si dice matrice di permutazione la matrice U di ordine $mn \times nm$ definita come:

$$U_{mn,nm} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n E_{ij} \otimes E_{ij}^\top$$

Appendice B

Codice R

The contents...

Bibliografia

- [1] A. Azzalini, “A class of distributions which includes the normal ones,”
Scandinavian Journal of Statistics 12, 1985.