**整式**

**知识梳理：**

**1、余式定理：**多项式除以所得的商式为，余式为，即。

**2、因式定理：**如果多项式含有因式，那么，反之亦然。我们称为多项式的零点。

**3、乘法公式：**

**（1）立方和公式：**

**（2）立方差公式：**

**（3）三数和平方公式：**

**（4）两数和立方公式：**

**（5）两数差立方公式：**

**4、拆添项法：**把多项式中的某一项拆成两项或多项，或者在多项式中添上两个仅符号相反的项，前者称为拆项，后者称为添项。拆项、添项的目的是使多项式能用[分组分解法](http://baike.so.com/doc/6792942.html)进行因式分解。

**5、试根法：**整系数多项式，若是它的有理根（互素），那么整除，整除。

一些比较复杂的因式分解也可以利用试根法来解决（试根法使用于整系数多项式的因式分解）

**6、常见数学思想与方法：**整体思想、降次法、消元法、待定系数法、赋值法等。除了常规的因式分解法，还有拆添项法、双十字相乘法、待定系数法、试根法等。

**例题精讲：**

**例1：**已知，求的值。

**例2：**已知,求除以的商式和余式。

**例3：**若除以的余数为4，试求多项式除以的余数。

**例4：**若整除多项式****，则**=**

**例5：**求一个二次多项式，使它满足：且。

**例6：**已知含有因式，试求、的值及的另一个因式。

**例7：**分解因式：

**例8：**分解因式：

**例9：若**满足，那么代数式的最大值是多少？

**例10：**分解因式：

**例11：**分解因式：

**例12：**已知是的一个因式，求的值。

**同步练习：**

**练习1：**已知，那么代数式的值是\_\_\_\_\_

**练习2：**若对于多项式有，，试求除以所得的余式。

**练习3：**若被整除，试求常数的值。

**练习4：**已知，，，试求三次多项式的表达式。

**练习5：**已知含有因式，且，试求的值及的另一个因式。

**练习6：**已知****，求代数式****的值。

**练习7：**分解因式

**练习8：**分解因式

**练习9：**分解因式：

**练习10：**分解因式：

**参考答案**

**例1：**答案：2015

解析：解法一（整体代入）：由得

所以

解法二（降次）：方程作为刻画现实世界相等关系的数学模型，还具有降次的功能。

由得，

所以

揭发三（降次、消元）：（消元、减项）

说明：本题常用的方法是降次法，通过降次最后使化为一个常数，但是用降次法，变形过程较为复杂且容易出错，而用零代换只要掌握变形的技巧，计算比较简便。

**例2：**答案：，

解析：（长除法）：









所以除以的商式为，余式为。

**例3：**答案：20

解析：由余式定理可知，设，则除以的余数为



**例4：**答案：8

解析：设****，由题意得****，所以****

**例5：**答案：

解析：设，由于，则所以

**例6：**答案：

解析：解法一：设，于是，

整理得：

由待定系数法可求得：，，，

所以的另一个因式为。

解法二：设，由因式定理得，解得。因为当时，，所以。

当时，，所以。

说明：根据因式定理可求出原多项式，再代入不同的数值，可求得剩下的未知数。

**例7：**答案：

解析：因为，所以

于是原式=

=

说明：该因式分解应用很广泛，用它可以推出很多有用的公式和结论。例如：

；

当时，。

例，分解因式：。由于，所以由上结论得



**例8：**答案：

解析：原式=



说明：三个形式比较像，且之间有和为0的关系，所以经常用两个替代另一个的做法。比如，这种变形比较常见。

**例9：**答案：27

解析：



所以当时，原式取得最大值为27.

**例10：**答案：

解析：解法一（拆项）：解法二（添项）：

说明：此题无法用常规方法分解，需拆添项。观察多项式发现当时，它的值为0，这就意味着是的一个因式，因此变形的目的是凑这个因式。至于如何拆项、添项并无一定规律可行。拆添项法也是分解因式的一种常见方法，这道题拆一次项和常数项也是比较容易。

**例11：**答案：

解析：设，最高次系数的因数为±1，±2；常数项的因数为±1，±2，则可能的根有±1，±2，±，代入得，所以是的一个因式，根据长除法可得，

说明：此题不能用常规方法，也很难看出它的一个因式，这时需用试根法。试出一个根，从而得到原式的一个因式，再用长除法降次得到原式的另一个因式，再分解彻底。若原式很长，可能要试好几次。

**例12：**答案：31

解析：解法一（待定系数法）：设，去括号整理得



比较对应各项系数可知，解得

所以

解法二（双十字相乘、赋值法）：设



可得，，根据系数为零可得

所以，当时，，所以

**同步练习：**

**练习1：**答案：2016

解析：用降次、消元法：由得

所以



**练习2：**答案：

解析：设，由于，，所以，解得

所以除以所得的余式为

**练习3：**答案：

解析：由因式定理得，所以，解得

**练习4：**答案：

解析：设，由题设条件得

即，解得

所以

**练习5：**答案：

解析：由因式定理得，又，所以

即，解得

利用长除法可求出除以的商式是，所以

，另一个因式为。

**练习6：**答案：0

解析：通过观察发现，若把方程****变形为****，不妨设****，则****，则原代数式可变形为****

由例7结论可知

**练习7：**答案：

解析：

说明：直接分组分解不好做，所以用拆添法做。观察多项式发现当时，它的值为0，这就意味着是的一个因式，因此变形的目的是凑这个因式。这是四次三项式，不缺某一项，不适合用添项，至于拆项，试试拆其他项应该也是可以的，方法不唯一。

**练习8：**答案：

解析：设，最高次系数的因数为±1，±2，±4；常数项的因数为±1，±3，±9，则可能的根有±1，±3，±，±，±，±，±，±，代入得，所以是的一个因式，根据长除法可得，

说明：此题不能用常规方法，也很难看出它的一个因式，这时需用试根法。

**练习9：**答案：

解析：由例8方法可得，

原式=





**练习10：**答案：

解析：设，去括号整理得：

，若用待定系数法去解只能顺利得到，然后解不下去了，有时要用双十字相乘的精髓：试一试。

观察发现9999这个数字比较特殊，它等于99×101，且101+99=200，101-99=2，而2和200分别跟二次项系数和一次项系数有关。



左边得到，但是

右边得到，且，所以

所以

说明：此题若用试根法也可以，但是计算量太大，跟待定系数法一样，不太适合求解，反而可以用双十字相乘凑出来。在凑的时候注意把每个系数及符号都要检验一边，以免计算错。