15 장. 알고리즘의 설계

❑ 알고리즘 설계

- 기본 패턴
- 패턴의 한계점

❑ 학습목표

- 일곱 가지 패턴의 알고리즘 설계 기법을 이해한다.
- 각 설계 기법의 장단점을 이해한다.
- 각 설계 기법이 지닌 시간적 복잡도를 이해한다.
- P, NP의 정의를 이해한다.

알고리즘 설계

접근방법

- 분할정복 알고리즘(Divide-and-Conquer Algorithm)
- 탐욕 알고리즘(Greedy Algorithm)
- 동적 프로그래밍 알고리즘(Dynamic-Programming Algorithm)
- 확률적 알고리즘(Probabilistic Algorithm)
- 백 트랙 알고리즘(Backtracking Algorithm)
- 최적 분기 알고리즘(Branch-and-Bound Algorithm)
- 억지 접근 알고리즘(Brute-Force Algorithm)

저명인사의 문제

- 저명인사(Celebrity)
  - “자신은 다른 사람을 모르지만, 다른 모든 사람들은 자신을 아는 그런 사람”
  - “ ‘저 사람 아십니까?’ 라는 예스/노 질문만을 반복하여 그들 중 저명인사가 있는지를 밝히고 있다면 누구인지를 밝히라”는 문제
  - 만의

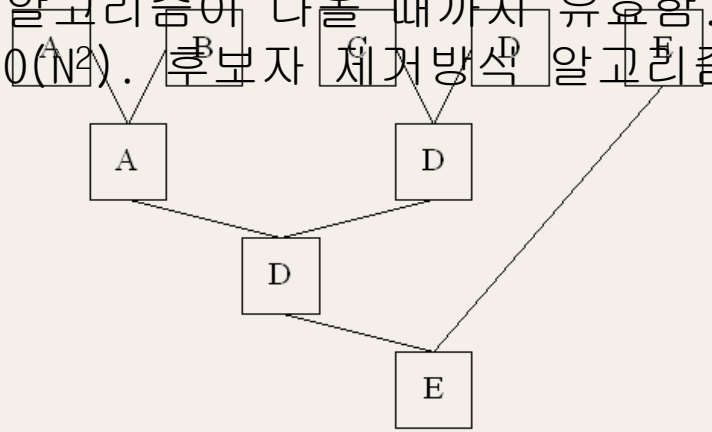
저명인사의 문제

❑ 억지 접근 방식(Brute-force Approach)

- A, B, C 세 사람을 가정하고, 각자에게 가능한 질문을 모두 던짐.
- A에게 B를 아느냐, C를 아느냐 라고 두 번의 질문.
- 질문의 회수는 3인 * (3-1) 질문/인 = 6. N 명의 사람이라면 N(N-1) 번의 질문
- 마구잡이로 접근
- 효율이고 뭐고 일단 돌아가는 것이 중요하니 힘으로 밀어 붙이거나 몸으로 때우자는 식으로 문제 해결에 접근

저명인사의 문제

- **후보자 제거 방식**
  - 누가 저명인사가 아닌지를 추적. A에게 B를 아느냐고 했을 때 답이 “그렇다"이면 A는 저명인사가 아님. 답이 ” 아니다“이면 이번에는 B가 저명인사가 아님. 질문 한번에 한명씩 저명인사 후보에서 탈락. N 명이라면 (N-1)번의 질문
- **저명인사 후보의 검증**
  - E에 대해서 검증이 필요. 나머지 A, B, C, D에게 E를 아느냐는 질문. 반대로 E에게 A, B, C, D를 아느냐고 다시 질문. 2(N-1)에 해당.
- **억지 접근 방식**
  - 그보다 좋은 알고리즘이 나올 때까지 유효함. 억지접근 알고리즘의 효율이 $O(N^2)$. 후보자 제거방식 알고리즘의 효율은 O(N)



거스름 동전 문제

❑ 거스름 동전문제

- “주어진 잔돈을 동전으로 거슬러 줄 때 어떻게 하면 동전의 개수를 최소화 할 수 있는가”

거스름 동전 문제

- 500원, 100원, 50원, 10원짜리 동전 단위
  - 거슬러 줘야할 돈이 270원
  - 100원짜리 2개, 50원짜리 1개, 10원짜리 2개. 총 동전의 개수는 5개
  - 될 수 있는 대로 일단 고액권을 최대한 사용

```
CoinChange
{ while (CurrentSum < DesiredChange) 돌려준 돈이 거스름 돈보다 작을
   동안
  {  Pick the Largest Coin                  가장 단위가 큰 동전을 선택
    if (CurrentSum + Coin > DesiredChange)        돌려준 돈 + 동전 >
    거스름 돈
    {   Reject the Coin;          그 동전은 포기
      Do not Pick the Coin Again;          다시는 그 동전을 선택하지 않
    음
    }
    else
      CurrentSum += Coin;         그 동전을 선택하여 돌려준 돈을 증가시
    킴
   }
}
```

거스름 동전 문제

탐욕 알고리즘(Greedy Algorithm)

- 일단 큰 돈부터 먼저 줘 나가면 나중에 전체 개수가 최소가 될 것 아니냐
- 순간순간 목전에 보이는 이득(Local Optimum)을 취하면 그 결과가 전체적으로 봐서도 최대의 이득(Global Optimum)과 연결되는 것이 아니냐

개구리 도약(Leap Frog)

- 어떤 나라에서 50원, 40원, 30원, 10원 동전을 사용
- 70원을 거슬러 줄 때 탐욕 알고리즘은 50원 1개, 10원 2개 해서 총 3개
- 40원 1개, 30원 1개 해서 총 2개가 최적.
- 작은 단위 동전 두개를 합친 금액이 큰 단위 동전 금액을 초과하는 현상

탐욕 알고리즘과 최적값

- 전지적(全知的) 관점에서 문제 해결 방법을 찾을 수는 없음.
- 어떤 문제에서는 탐욕 알고리즘이 최적의 결과를 초래. 예를 들어 크루스칼 알고리즘
- 최적은 못되고 그냥 괜찮을 정도로 최적에 가까운 결과. 또는 아예 최적 근처에도 못 미치는 결과

파일 압축

파일 압축

- 손실압축(損失, Lossy Compression)과 무손실 압축(無損失, Lossless Compression): 텍스트 압축은 무손실 압축이어야 함.
- 고정길이 압축 (Fixed-Length Compression) 과 가변길이 압축 (Variable-Length Compression)

고정길이 압축

- "ABRACADABRA" . 알파벳 26 문자만으로 구성되어 있다면 5비트만으로 충분. A가 알파벳 첫 글자이므로 00001, B는 00010으로 표현. 고정 비트를 할당하면 이 문장은 11개의 문자이므로 총 55비트로 표현

가변길이 압축

- 글자별 빈도는 A:5, B:2, C:1, D:1, R:2. 가장 많이 나타나는 것을 가장 짧은 비트로 가져가면 전체 길이가 줄어든다. A = 0, B = 1, R = 01, C = 10, D = 11 로 표시하면 ABRAC.... = 0101010... 으로 압축

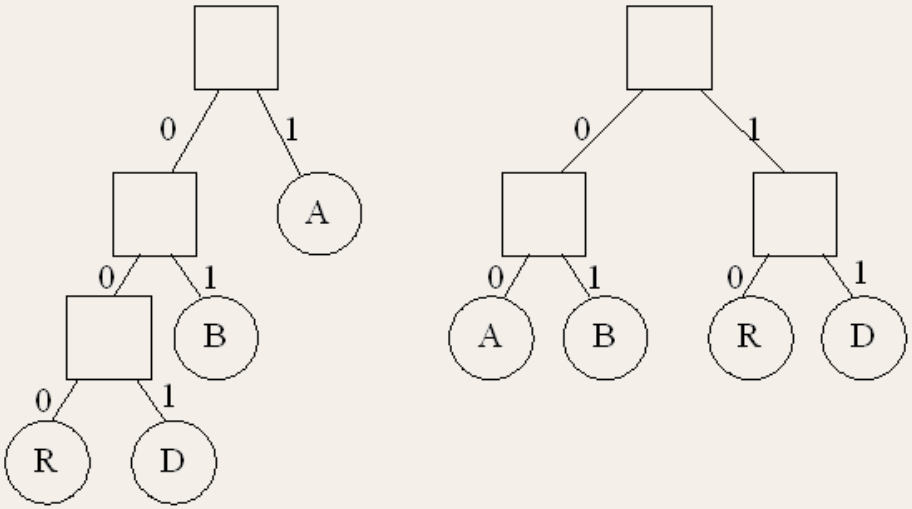
복원의 문제

- 0101010의 첫 비트만 읽으면 0으로써 A를 의미. 2 비트를 한번에 읽으면 R을 의미. 첫 문자가 A인지 R인지 판단불가
- 어떤 문자의 비트열이 다른 문자의 비트열의 앞부분에 해당할 때 그 문자를 다른 문자의 접두사라고 부름. 접두사 관계를 없애는 것이 관건

트라이

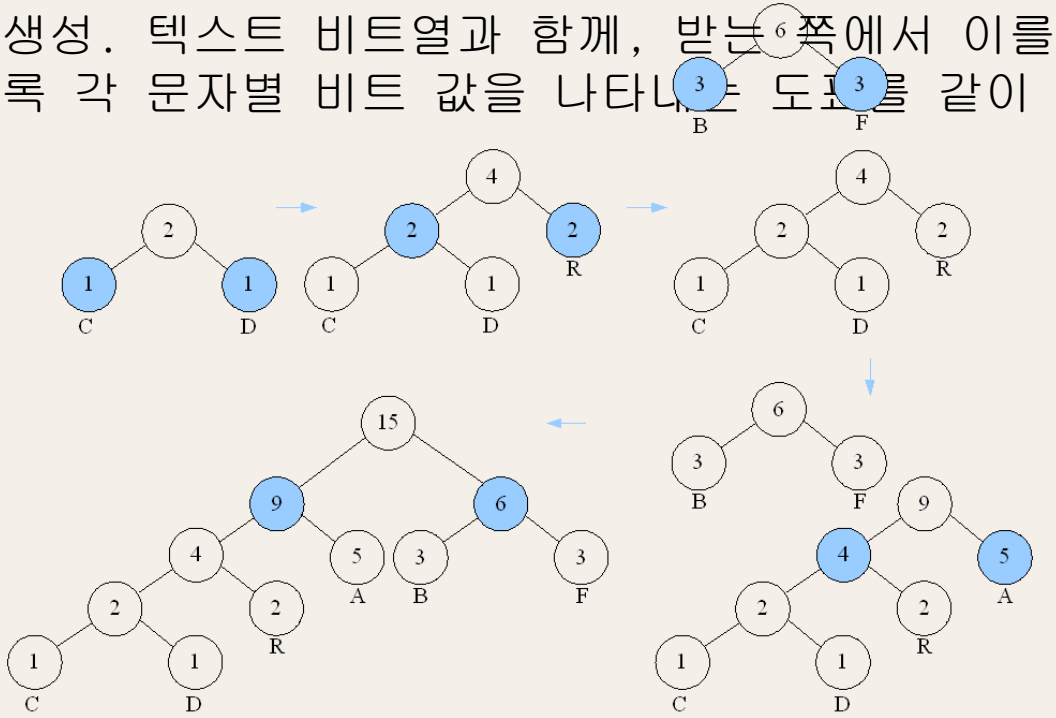
- A = 11, B = 00, C = 010, D = 10, R = 011
  - 아무런 접두사 관계도 존재하지 않음.
  - 복원 결과는 유일.

- 트라이
  - 모든 레코드가 외부 노드에 분포
  - 접두사 관계가 존재할 수 없음.
  - 왼쪽 트라이에서 문자 A는 이진 코드 1, 문자 D는 001을 나타냄.



허프만 트라이

- 허프만 트리 또는 트라이가 전체 비트수를 최소화
  - 압축대상 텍스트에 나타나는 문자의 빈도를 조사. "ABBAAAACRDRFFFB"의 빈도는 A:5, B:3, C:1, D:1, R:2, F:3
  - 빈도가 가장 낮은 C와 D를 외부 노드로 만들고 그 둘의 빈도를 합쳐서 새로운 루트로 구성. 다시 빈도가 가장 낮은 한 쌍을 찾음. 현재 C, D가 합쳐진 루트도 대상에 포함. C, D의 루트와 R이 빈도 2로서 가장 작으므로 이 두 개를 합쳐서 빈도 4인 새로운 루트가 생성됨. 단계별로 최소 빈도 쌍을 결합해서 새로운 루트를 생성. 텍스트 비트열과 함께, 받는 쪽에서 이를 복원할 수 있도록 각 문자별 비트 값을 나타내는 도표를 같이 전송



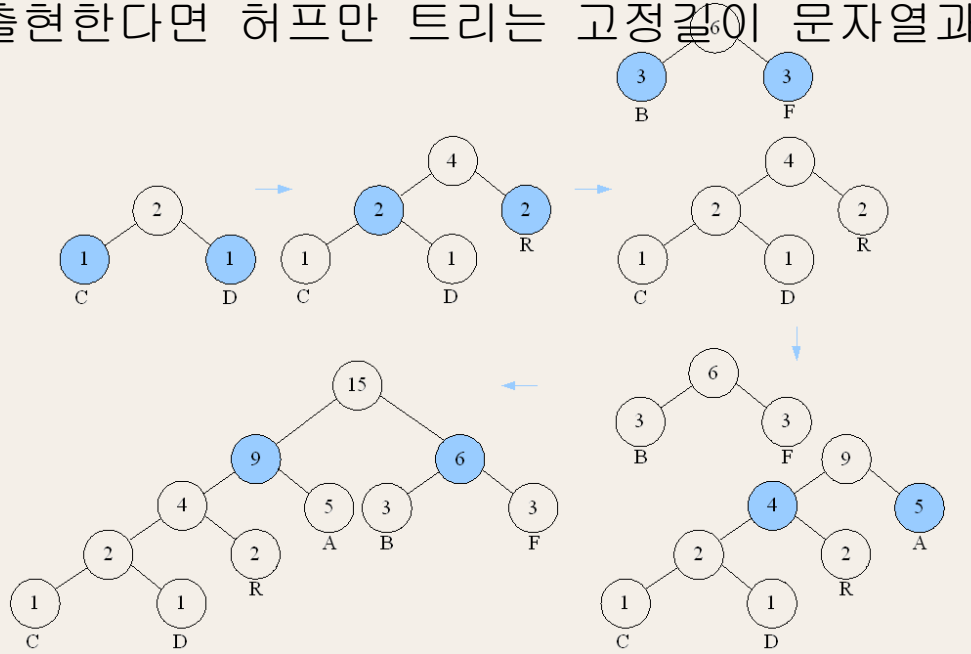
허프만 트라이

접근 방법

- 가장 처음에 가장 낮은 빈도 쌍을 택한 이유는 뒤로 갈수록 새로운 레벨이 추가되기 때문. 처음에 택한 쌍은 루트에서 가장 멀어짐. 코드가 가장 길어짐.
- 일종의 탐욕 알고리즘

압축률

- 입력 데이터의 내용에 따라 달라짐. 모든 글자가 완전히 동일한 빈도로 출현한다면 허프만 트리는 고정길이 문자열과 동일한 결과



배낭 문제

- 금고털이의 고민
  - 금고 안에는 N 개의 서로 다른 크기와 값의 물건
  - 배낭(Knapsack)의 크기는 M으로 제한
  - 배낭 속에 어떤 물건들을 집어넣어야 훔쳐온 물건 값이 최대로 되겠는가
- 전제조건
  - 잘라서)ne Knapsack Problem

배낭 문제

- 일단 A 물건만 가지고 있다고 가정
  - 배낭 크기가 1부터 10까지 증가할 때 배낭 크기를 인덱스로 하는 배열 K
  - Max 필드에는 해당 크기의 배낭에 담아 넣은 물건들의 최대값
  - Last 필드에는 마지막에 집어넣은 물건
  - K[1]의 Max 값은 0. 배낭 크기가 1 이므로 크기 3인 A가 들어갈 수 없음.
  - k[3]에서 1 개가 들어가므로 Max 필드에는 4. Last 필드에는 방금 넣은 물건인 A를 표시.
  - 므로 이제 A가 2개 들어갈 수 있음. 번째로 들어간 물건은 A.

Items	Size	Value/Item
A	3	4
B	4	5

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Max[i]	0	0	4	4	4	8	8	8	12	12
Last[i]			A	A	A	A	A	A	A	A

배낭 문제

B 물건으로 확장

- 마지막에 B를 넣되 이전 구성에 비해 최대가 아니면 그대로 둠.
- B의 크기가 4이니 K[3]까지는 B를 집어넣을 수 없음.
- K[4]에서 이전 Max 값은 4로서 마지막에 집어넣은 것은 A
- 이를 B로 대치하면 Max 값은 Value of B + Max[4 - Size of B] = 5 + Max[0] = 5
- 이는 현재의 Max[4]인 4보다 크므로 Max 값을 5로 변경. Last는 B로 변경
- K[8]에서 Value of B + Max[8 - Size of B] = 5 + Max[4] = 10. 값을 10으로 변경하고 Last는 B로 변경.

Items	Size	Value/Item
A	3	4
B	4	5
C	7	10

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Max[i]	0	0	4	4 →5	4→ 5	8	8→ 9	8→1 0	12	12→1 3
Last[i]			A	B	B	A	B	B	A	B

배낭 문제

C 물건으로 확장

Items	Size	Value/Item
A	3	4
B	4	5
C	7	10

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Max[i]	0	0	4	5	5	8	10	10	12	14
Last[i]			A	B	B	A	C	B	A	C

배낭크기 10

- 최대값 14. 가장 마지막에 들어간 것은 C
- 그 직전에 들어간 것은 배낭크기 (10 - Size of C)에서 마지막에 들어간 것. 즉Last[3]인 A

동적 프로그래밍 알고리즘

❑ 동적 프로그래밍 기법(Dynamic Programming Method)

- 생각하기 복잡할 정도로 문제가 커질 때
- 아주 작은 부분문제(Subproblem)를 풀고 그 상태에서의 최적값을 기록
- 이 최적값을 바탕으로 해서 조금 더 문제 크기를 확장
- 이러한 과정을 반복함으로써 아주 큰 문제의 해결책에 이름.
- 와샬 알고리즘(Warshall Algorithm), 플로이드 알고리즘(Floyd Algorithm)

❑ 배낭 문제

- 도표를 이용하여 최적값을 추적
- 문제 크기가 커질 때마다 최적값을 조금씩 변경
- 문제를 풀 때에는 항상 그 직전 상태에서 알려진 최적값을 이용.

최대 최소의 문제

최대 최소의 문제(Max-Min Problem)

- 배열 내에 정렬 안 된 숫자
- 값이 최대인 것과 최소인 것을 찾아라
- 왼쪽 반에서 최대 최소를 찾는 문제와 오른쪽 반에서 최대 최소를 찾는 문제
- 바로 해결될 정도로 문제가 작아질 때까지 계속 문제를 반으로 분할
- 왼쪽 반에서 최대, 최소가 (20, 5)이고, 오른쪽 반에서 최대, 최소가 (100, 12)라면 당연히 전체의 최대, 최소는 (100, 5). 작은 문제의 해결책을 조합하면 큰 문제의 해결책으로 이어짐.

분할정복 알고리즘(Divide and Conquer Algorithm)

- 주어진 문제를 그보다 크기가 작은 부분문제(Subproblem)로 나누어 해결
- 이진탐색, 쾌속정렬, 합병정렬 등
- 재귀호출과 직결됨. 호출 시마다 문제의 크기가 줄어들음.

분할정복 알고리즘

코드 15-2: 재귀호출에 의한 피보나치

```
int Fibonacci(int n)
{ if (n < 2)                                          베이스 케이스
    return 1;                                         F(0) = F(1) = 1
  else return (Fibonacci(n-1) + Fibonacci(n-2));
}
```

❑ 분할정복의 문제점

- 부분문제의 해결책이 큰 문제의 해결책으로 이어지지 않을 수 있음. K번째 작은 수를 찾는 문제를 왼쪽 반에서 찾는 문제와 오른쪽 반에서 찾는 문제로 분할할 경우.
- 부분문제의 수가 너무 많아짐. 잘못하면 상식적인 시간 안에 알고리즘이 종료될 수 없음. F(4) = F(3) + F(2)에 의해 F(4)의 문제가 F(3)의 문제와 F(2)의 문제로 분할될 때, F(3)과 F(2)는 사실상 서로 의존적인 문제. F(2) 계산결과는 F(3) = F(2) + F(1)의 계산에 재사용 가능. 재사용하지 않으면 계산의 중복에 의해 알고리즘의 효율이 저하됨.

분할정복 알고리즘

코드 15-3: 반복문에 의한 피보나치

```
int Fibonacci(int n)
{ int F[Max];                          n 보다 큰 숫자를 배열 크기로
  F[0] = 1; F[1] = 1;                  수열의 처음 두 숫자
   for (int i = 2; i <= n; i++)        F[2]부터 n까지
     F[i] = F[i-2] + F[i-1];     앞에서 뒤로 채워나감
   return (F[i]);                      배열의 마지막 요소를 돌려줌
}
```

- **동적 프로그래밍**
  - F[0], F[1]을 바탕으로 F[2]를 구함.
  - 다시 F[1], F[2]를 바탕으로 F[3]을 구함.
  - 배낭문제(Knapsack Problem) 해결과 유사
- **동적 프로그래밍과 분할정복**
  - 주어진 문제를 작은 문제로 환원한다는 측면에서 유사
  - 분할정복 기법에서는 재사용이라는 개념이 존재하지 않음.
  - 동적 프로그래밍에서는 부분문제에 대한 해결책은 반드시 기록하고 재사용

동적 프로그래밍

동적 프로그래밍

- 상향식(바텀 업, Bottom Up) 동적 프로그래밍
  - 배낭 문제나 반복문에 의한 피보나치
  - 문제가 들어오기 전에 미리 필요한 계산을 해 놓음
- 하향식(탑 다운, Top Down) 동적 프로그래밍
  - 큰 문제를 해결하는 도중에 작은 문제 해결책을 재사용

코드 15-2: 재귀호출에 의한 피보나치(하향식 동적 프로그래밍)

```
for (i = 0; i <= n; i++)          값이 이미 알려져 있는지를 불리언 배열
   A에 저장
   A[i] = FALSE:                  모두 안 알려진 걸로 초기화
int Fibonacci(int n)
{ if (A[n] = = TRUE)              이미 계산된 값이 있으면
    return B[n];                  그 값을 재사용
  else
  {  if (n < 2)                   베이스 케이스
      return 1;
     else
     {  in temp = Fibonacci(n-1) + Fibonacci(n-2);  결과 값을 계산하여
       B[n] = temp;               그 값을 배열 B에 저장
       A[n] = TRUE;               알려진 값임을 표시
       return temp;               재귀호출 결과를 리턴
  ]
```

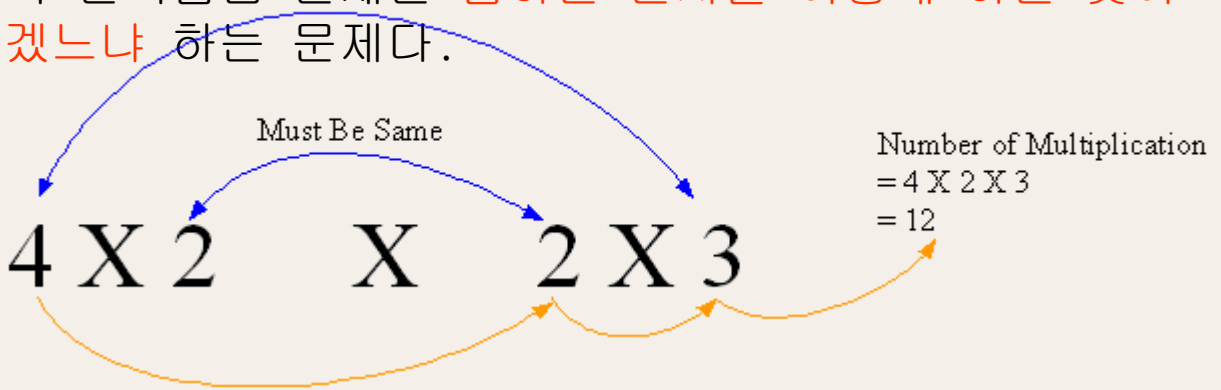
행렬의 연속곱셈

❑ 행렬의 곱셈

- 교환법칙(交換, Associative Law)이 성립
- ABC = (AB)C = A(BC)
- 4×2 행렬(4행 2열)과 2×3 행렬(2행 3열)을 곱하면 결과행렬은 4×3
- 앞 행렬의 열과 뒤 행렬의 행 수가 반드시 일치

❑ 곱셈의 횟수

- 결과행렬을 구하는 데에는 총 4×2×3 = 24번의 곱셈이 필요
- 결과행렬의 엔트리 수가 4×3인데 각각의 엔트리를 구하는 데에는 2번의 곱셈을 실행
- 행렬의 연속곱셈 문제는 곱하는 순서를 어떻게 하는 것이 가장 빠르겠느냐 하는 문제다.



행렬의 연속곱셈

- ABCDEF
  - ((((AB)C)D)E)F 의 순서로 곱했을 때 필요한 곱셈의 횟수
  - AB를 곱하면 결과행렬의 차원은 4×3. 곱셈의 횟수는 24회
  - 이 결과를 C에 곱하면 결과행렬의 차원은 4×1. 곱셈의 횟수는 12회.
  - 앞에서 뒤로 곱하면 곱셈의 수는 총 84번
  - 뒤에서 앞으로 곱하면 곱셈의 수는 총 69회
  - 곱셈 횟수는 계산시간과 정밀도를 좌우함.

	결과행렬의 차원	곱셈 수
A = 4×2		
B = 2×3	AB = 4×3	24
C = 3×1	ABC = 4×1	12
D = 1×2	ABCD = 4×2	8
E = 2×2	ABCDE = 4×2	16
F = 2×3	ABCDEF = 4×3	24

행렬의 연속곱셈

❑ 대각선 방향으로 채워나감

- AB에는 24번의 곱셈, BC의 계산에는 6번의 곱셈
- 현재 채워진 것보다 한 칸 위의 것을 대각선 방향으로 처리.
- * 표시한 엔트리는 ABC를 계산하는데 필요한 곱셈의 횟수
- (AB)C의 비용 = (AB)의 계산비용 + C의 계산비용 + 두개를 곱하는 비용
- = 24 + 0 + 4×3×1 = 36
- A(BC)의 비용 = A의 계산비용 + (BC)의 계산비용 + 두개를 곱하는 비용
- = 0 + 6 + 4×2×1 = 14. 최소비용
- 계산 과정에 이전 지식을 활용: (AB)나 (BC)의 계산비용은 도표에 나와 있음. 괄호 안에 있는 것은 두 번째 곱하는 행렬 그룹의 첫 번째 것이 B라는 의미.

	A	B	C	D	E	F
A		24(B)	* 14(B)			
B			6(C)			
C				6(D)		
D					4(E)	
E						12(F)
F						

행렬의 연속곱셈

❑ 한 칸 위의 대각선

- ** 표시한 엔트리는 ABCD의 최소값
- A(BCD) = 0 + 10 + 4×2×2 = 26
- (AB)(CD) = 24 + 6 + (4×3×2) = 54
- (ABC)D = 14 + 0 + 4×1×2 = 22
- (ABC)D가 최소비용이 된다. 이전의 계산결과를 이용.

	A	B	C	D	E	F
A		24(B)	14(B)	**22(D)		
B			6(C)	10(D)		
C				6(D)	10(D)	
D					4(E)	10(F)
E						12(F)
F						

행렬의 연속곱셈

❑ 한 칸 위의 대각선

- 오른쪽 위의 엔트리인 36이 ABCDEF를 계산하기 위한 최소 곱셈 횟수
- 괄호안의 순서를 역추적 하면 곱셈의 순서는 (A(BC))((DE)F)
-

❑ 대표적인 동적 프로그래밍 기법

- 상향식 동적 프로그래밍

	A	B	C	D	E	F
A		24(B)	14(B)	22(D)	26(D)	36(D)
B			6(C)	10(D)	14(D)	22(D)
C				6(D)	10(D)	19(D)
D					4(E)	10(F)
E						12(F)
F						

중간값보다 큰 숫자 찾기

❑ 중간값보다 큰 숫자 찾기

- 정렬 안 된 숫자에서 중간값보다 큰 숫자를 하나 찾기
- 32, 83, 16, 1, 20 이면 중간값은 20이 된다. 따라서 32나 83 중 아무거나 선택

❑ 해결책 I

- 최대값은 당연히 중간값보다 크다. 최대값을 찾기. 대략 (N-1) 번의 비교
- 배열의 중간을 지나자마자 계산을 멈춤. 왼쪽 반 정도에서 가장 큰 것이면 전체적으로 보아서 중간값보다는 큼. 대략 (N-1)/2의 비교.
- 이러한 알고리즘은 이렇게 이렇게 하면 반드시 해결책이 나온다라는 접근 방법으로서 결정적 알고리즘(Deterministic Algorithm)

중간값보다 큰 숫자 찾기

❑ 해결책 II

- 확률적으로 정답이 나오게 하겠다
- 나열된 숫자 중 아무거나 하나 고르면 그것이 메디안보다 클 확률은 ½
- 아무거나 두 개를 골라서 큰 것을 취함. 메디안 보다 클 확률은 ¾.
- k 개의 숫자 중 가장 큰 것을 선택한다면 그것이 메디안보다 클 확률은 $1-(1/2^k)$. k가 10이라면 확률은 .999로 거의 1에 가까움.

❑ 확률적 알고리즘(Probabilistic Algorithm)

- 몬테카를로 알고리즘(Monte Carlo Algorithm)
- 작은 확률을 가지고 틀릴 수 있지만 실행시간은 결정적 알고리즘보다 작다.

색칠 문제

- 흰 공이 J개 들은 주머니가 K 개 있다. 공 하나하나를 모두 꺼내서 색칠을 한 후에 다시 넣되, 빨강이나 파랑 중의 한 가지 색만을 칠하도록 되어있다. 모든 주머니가 최소한 1개 이상의 빨간 공과 1개 이상의 파란 공을 가지도록 색칠하려면 어떻게 해야 하는가. 단, J와 K 사이에는 $K \times (1/2^J) \leq 1/4$ 이라는 관계를 전제로 한다.

- 방법
  - 아무 주머니에 있는 공이나 꺼내서 하나는 빨강, 하나는 파랑으로 칠함. 공이 빨강일 확률이나 파랑일 확률이나 모두 ½
  - 어떤 주머니의 공 J 개가 모두 빨강일 확률은 $(1/2^J)$. K 개 주머니 중 한 주머니라도 모두 빨간 공만 있을 확률은 여기에 $K \times (1/2^J)$
  - 문제의 조건에 의해서 이 값은 1/4 이하. 파란 공에 대해서도 동일한 논리가 성립하니 결과적으로 어떤 주머니 안에 모두 빨간 공만 있거나 아니면 모두 파란 공만 있을 확률은 1/2 이하.

- 확률적 알고리즘
  - 라스베가스 알고리즘(Las Vegas Algorithm)
  - 만약 원하는 결과가 나오지 않으면 제대로된 결과가 나올 때까지 이러한 방법을 반복. 몬테카를로 알고리즘이 정답을 보장 못하는데 비해 이 방법은 정답을 보장. 알고리즘의 실행시간은 운에 달려 있음

과반수 찾기 문제

과반수 찾기 문제(Majority Finding Problem)

- N개의 요소로 구성된 리스트에서 어떤 아이템이 N/2번 이상 나오면 그 아이템을 과반수 아이템이라 함.
- 과반수 아이템을 찾되 만약 그러한 것이 없으면 없다 라고 말하라는 문제

방법 I

- 주어진 숫자를 인덱스로 하는 배열을 사용
- 리스트를 스캔 해 나가면서 해당 숫자를 인덱스로 하는 배열 요소 값을 증가
- 숫자 5가 나오면 A[5]에 카운트 값을 1을 추가. 이 방법의 효율은 O(N). 어떤 큰 숫자가 튀어나올지 예상하기 어렵기 때문에 배열의 최대 인덱스를 잡기가 어려움.

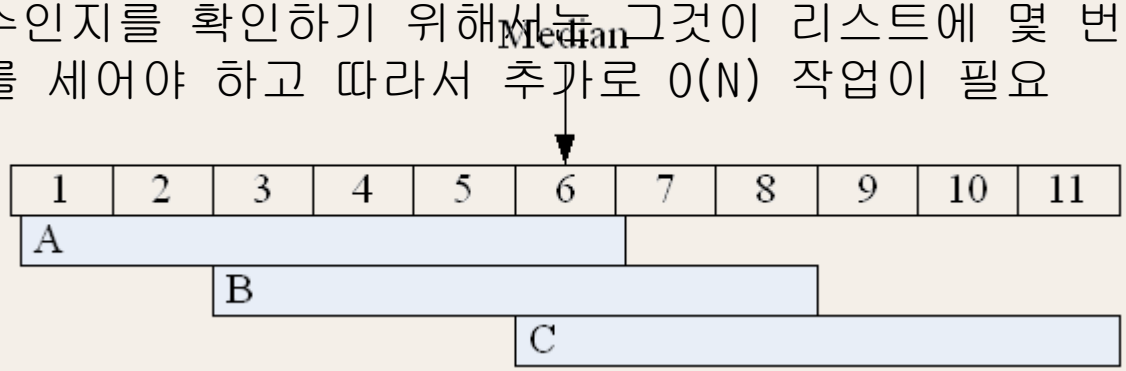
방법 II

- 정렬한 후에 같은 숫자가 계속해서 몇 번 나오는지 확인
- N/2 번 이상이면 과반수 아이템이 되고, 그렇지 않으면 과반수 아이템이 없음. 효율은 O(NlogN)

과반수 찾기 문제

방법 III

- 메디안을 찾는 문제
- 정렬했을 때 과반수 아이템은 A, B, C의 모습. 만약 과반수 아이템이 존재한다면 그 아이템은 정렬된 배열의 메디안 위치에 있음.
- 메디안(k = N/2 번째로 작은 숫자)을 찾는 문제
  - k가 작다면 스캔 할 때마다 가장 작은 수를 골라내되 이를 k번 반복. O(kN)
  - 정렬한 다음에 k 번째 작은 수를 골라냄. O(NlogN)
  - 4 장에서 설명한 파티션을 사용. O(N)
- 메디안 위치에 존재하더라도 과반수 아이템이 아닐 수 있음. 과반수인지를 확인하기 위해서는 그것이 리스트에 몇 번 나타나는지를 세어야 하고 따라서 추가로 O(N) 작업이 필요



과반수 찾기 문제

- **방법 IV**
  - 확률적으로 접근
  - 아무거나 골라서 그것이 N/2번 이상 나타나면 됨. 그러나 이 경우에는 과반수 아이템을 선택할 확률이 높아진다는 아무런 보장이 없음.

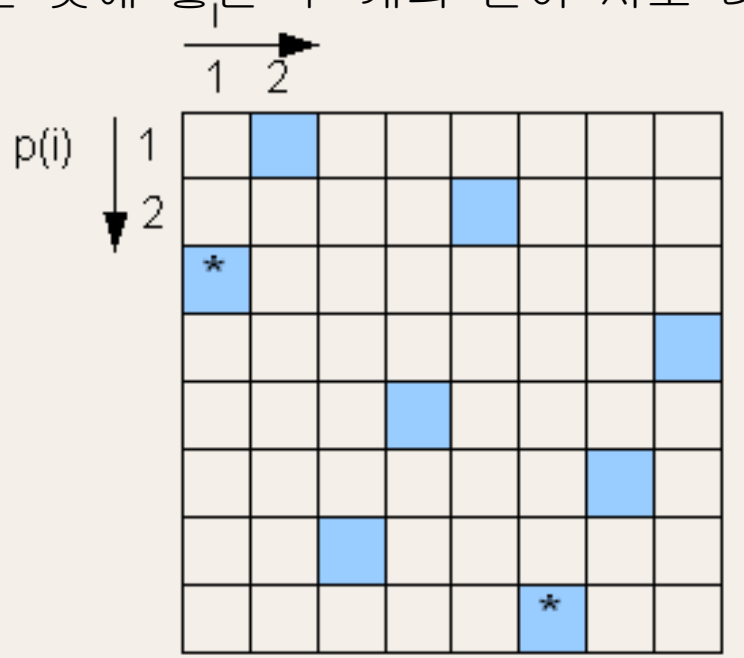
- **방법 V**
  - 저명인사의 문제처럼 후보자를 제거
  - 두 개의 서로 다른 숫자가 나타나면 그 숫자를 상쇄시켜 없앰.
  - 과반수 아이템이라면 그것과 다른 것을 일대일로 상쇄해도 살아남아야 함.
  - 살아남았다고 모두 과반수 아이템은 아니므로 살아남은 숫자를 대상으로 전체에서 몇 번 나타나는지를 다시 확인.
  - 제거하는데 O(N), 확인하는데 O(N)

- **여러가지 알고리즘**
  - 어떤 알고리즘이 절대적으로 최선이라고 주장할 수는 없다.
  - 우리가 아직 모르고 있는, 더 나은 해결방식이 있을 수 있기 때문이다.

8-퀸 문제

❑ 퀸(Queen)

- 동양 장기의 차(車)에 해당. 대각선상에 놓은 것도 공격
- “8×8 체스 판에서 8 개의 퀸을 놓되 서로 공격할 수 없는 위치에 놓아보라”
- * 표시된 곳에 놓인 두 개의 퀸이 서로 대각선 상에 놓여있음.



8-퀸 문제

퀸

- 서로 다른 행과 서로 다른 열에 놓여야 함.
- 열(Column) 번호를 1, 2, 3, ... 으로 할 때, 각 열의 몇 번째 행에 놓아야 하는지를 p(i)로 표시
- 이 문제는 1부터 8까지의 수를 어떤 순서로 도표의 p(i)에 채워 넣는가의 문제

i	1	2	3	4	5	6	7	8
p(i)	3	1	7	5	2	8	6	4

8-퀸 문제

- 복잡도
  - p(1)에 들어갈 수 있는 숫자는 8가지 중의 하나. 각각에 대해, p(2)에 들어갈 수 있는 숫자는 7개 중의 하나. 경우의 수는 8! = 40320
  - N×N 크기의 체스 판에 N개의 퀸을 배치하는 문제라면 경우의 수는 N!
  - 컴퓨터로 풀기에는 비 상식적 시간(Unreasonable Time)이 소요
  - N = 25라면 25! 개의 경우. 25!은 대략 26자리 숫자로서 1 MIPS(Millions of Instruction per Second) 컴퓨터 성능을 가정했을 때 실행시간이 대략 5×10^{11} 년 정도가 된다.

- 초 다항식 알고리즘(Super-Polynomial Time Algorithm)
  - 시간적 복잡도가 N의 로그함수, 1차함수, 2차함수, ..., k차함수 등으로 표시될 때 그 알고리즘을 다항식 알고리즘(Polynomial Time Algorithm)
  - 다항식 알고리즘으로 해결할 수 있는 문제를 처리가능 문제(Tractable Problem). 이에 걸리는 시간을 상식적인 시간(Reasonable Time)
  - 시간적 복잡도가 5^N, N!, N^N 등의 시간을 요할 때 그 알고리즘을 초 다항식 알고리즘이라 함
  - 초다항식 알고리즘으로 해결할 수 있는 문제를 처리 불가능 문제(Intractable Problem). 이에 걸리는 시간을 비상식적인 시간(Unreasonable Time)
  - $O(2^N)$ 알고리즘이라면 N이 100일때 실행 시간은 4×10^{16} 년 정도.
  - 문제를 풀 수 있다는 사실과 컴퓨터로 처리할 수 있다는 사실은 별 개의 것

8-퀸 문제

8-퀸 문제

- 모든 경우를 모두 시도(소모적 탐색, Exhaustive Search) 하려면 일반적으로 처리 불가능 문제
- 탐색 방법을 조직화하여 시도의 횟수를 조금 더 줄임.
- 퀸이 서로 대각선에 놓이지 않게 하려면 두 개의 퀸이 놓인 행의 차이값과 열이 차이값이 서로 달라야 함. 즉, $|p(i) - p(j)| \neq (i - j)$

방법

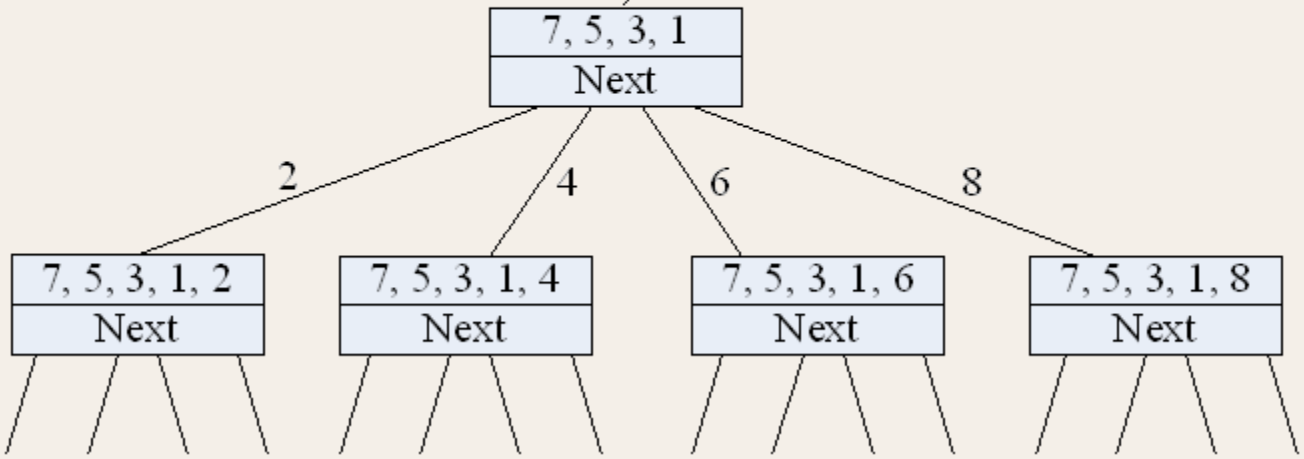
- 1 단계: 임의의 자리에 새로운 퀸을 놓는다.
- 2 단계: 이 위치가 기존의 퀸들과 서로 공격하지 못하는 위치이면
  - 가. 이 퀸이 마지막 퀸이면 실행을 종료한다.
  - 나. 그렇지 않으면 1단계로 간다.
- 3 단계: 이 위치가 기존의 퀸들과 서로 공격하는 위치이면
  - 이전에 가장 최근에 놓은 퀸으로 백 트랙 한다.
  - 1 단계를 반복한다.

8-퀸 문제

p(4)	p(5)	p(6)	p(7)	p(8)	비고
1					
1	*2				|p(5)-p(4)| = 5 - 4
1	**4				
1	4	2			|p(6)-p(1)| = 6 - 1
1	4	6			|p(6)-p(3)| = 6 - 3
1	4	8			
1	4	8	2		|p(7)-p(5)| = 7 - 5
1	4	8	6		|p(7)-p(5)| = 7 - 5
1	4	***8			백 트랙
1	4				백 트랙
1	6				
1	6	2			|p(6)-p(1)| = 6 - 1
1	6	4			
1	6	4	2		
1	6	4	2	8	|p(8)-p(3)| = 8 - 3
1	6	4	2		백 트랙
1	6	4			백 트랙
1	6	8			
1	6	8	2		
1	6	8	2	4	처리 완료

결정 트리

- 결정트리(Decision Tree) 또는 상태공간 트리(State Space Tree)
  - 트리의 노드는 부분해(部分解, Partial Solution)를 의미. 간선(Edge)은 선택사항을 의미
  - 표의 첫 줄의 상태는 p(1), p(2), p(3), p(4)가 각각 7, 5, 3, 1인 경로를 따라옴. p(5)로서 2, 4, 6, 8 중 어느 것을 선택 하느냐에 따라서 트리의 간선은 네 개로 갈라짐. 가장 왼쪽 간선인 2를 선택하여 따라 갔으나 해당 위치는 다른 퀸과 대각선 위치가 되므로 문제의 답이 될 수 없음. 표의 **에서 의 두 번째 간선인 4를 선택.



백 트래킹 알고리즘

백 트래킹 알고리즘

- 조직적으로 가능한 모든 경로를 시도하되 더 이상 갈 수 있는 곳이 없으면 이전 상태로 백 트랙(Backtrack, 되돌리기)

백트래킹과 깊이우선 탐색과의 차이

- 어떤 노드에서 출발하는 경로가 해결책으로 이어질 것 같지 않으면 더 이상 그 경로를 따라가지 않음으로서 시도의 횟수를 줄임. (Prunning)
- 깊이우선 탐색이 모든 경로를 추적하는데 비해 백 트래킹은 불필요한 경로를 조기에 차단.
- 깊이우선 탐색을 가하기에는 경우의 수가 너무나 많음. 즉, N! 가지의 경우의 수를 가진 문제에 대해 깊이우선 탐색을 가하면 당연히 처리 불가능한 문제.
- 백 트래킹 알고리즘을 적용하면 일반적으로 경우의 수가 줄어들지만 이 역시 최악의 경우에는 여전히 지수함수 시간(Exponential Time)을 요하므로 처리 불가능

백 트래킹 알고리즘의 효율

- 문제가 처리 가능한 것으로 돌아서는가 아닌가는 운에 따름.
- 컴퓨터 처리능력의 한계로 인해 모든 경우를 다 해 볼 수는 없음.
- 단계 별로 많은 가능성이 제거된다면 당연히 경우의 수가 줄게 되고 따라서 상식적인 시간에 정답을 발견
- 몇 번 시도해서 우연히 따라가 본 길이 제대로 놓은 것이 되면 최선.

할당 문제

- A, B, C, D 네 사람이 1, 2, 3, 4 네 가지 일
  - 일 종류마다 사람마다 인건비가 다름.
  - “사람마다 일 하나씩 할당하되 총 비용이 최소가 되도록 하라”
  - 8-퀸 문제처럼 N!의 문제다. N 개의 일 중 하나를 A가 맡으면 B는 나머지 (N-1)개 중의 하나, C는 그 나머지 (N-2) 개 중의 하나...

	1	2	3	4
A	11	12	18	40
B	14	15	13	22
C	11	17	19	23
D	17	14	20	28

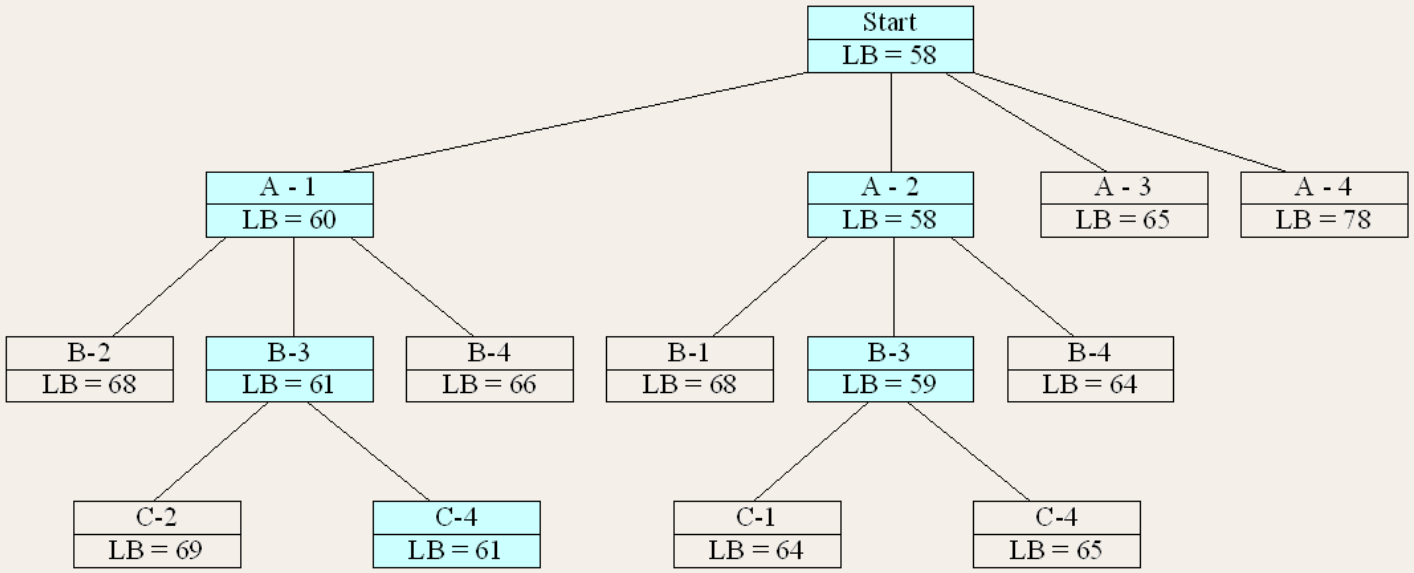
- 최소 비용
  - 무조건 최소 인건비만을 선택하면 최소값은 11 + 12 + 13 + 22 = 58
  - A-1, B-2, C-3, D-4 식으로 아무렇게나 배정하면 비용은 11 + 15 + 19 + 28 = 73
  - 최소비용은 반드시 아무렇게나 선택한 비용보다는 작아야 한다
  - 최소비용은 [58 - 73]의 범위에 있다

할당 문제

- 8-퀸 문제와 마찬가지로 경우별로 추적
  - 부분 해를 쌓아나가되 필요하다면 백 트랙
  - A에게 1, 2, 3, 4 번 일을 할당할 때 각각의 최소비용
    - A-1: 최소비용 = 11(고정) + 14 + 13 + 22 = 60
    - A-2: 최소비용 = 11 + 12(고정) + 13 + 22 = 58
    - A-3: 최소비용 = 11 + 14 + 18(고정) + 22 = 65
    - A-4: 최소비용 = 11 + 14 + 13 + 40(고정) = 78
  - 2, 3, 4번 일에 대해 맡을 사람이 중복되는지 무관하게 무조건 최소 비용
  - A-4 노드는 제거. 왜냐하면 [58 - 73]이라는 범위를 벗어남
  - 최소비용이 가장 적을 것 같은 할당은 A-2. 일단 A-2로 진행.
  - A-2 상태에서 가능한 할당은 B-1, B-3, B-4.
    - A-2, B-1: 최소비용 = 12(고정) + 14(고정) + 19 + 23 = 68
    - A-2, B-3: 최소비용 = 12(고정) + 13(고정) + 11 + 23 = 59
    - A-2, B-4: 최소비용 = 12(고정) + 22(고정) + 11 + 19 = 64
  - 다시 가장 작은 비용인 A-2, B-3을 따라감.
    - A-2, B-3, C-1: 최소비용 = 12(고정) + 13(고정) + 11(고정) + 28(고정) = 64
    - A-2, B-3, C-4: 최소비용 = 12(고정) + 13(고정) + 23(고정) + 17(고정) = 65

할당 문제

- 이 비용들은 A-1을 선택했을 때의 최소비용인 60보다 큼.
- 이번에는 A-1을 따라감. 같은 방법을 반복하면 최종비용은 A-1, B-3, C-4, D-2 로서 61



최적분기 알고리즘

알고리즘에서 거론되는 문제

- 결정문제(Decision Problem)
  - 답이 “그렇다” 또는 “아니다”가 되게 물어보는 문제
- 최적화 문제(Optimization Problem)
  - 목적으로 하는 값(목적함수, Objective Function)을 최소화 또는 최대화하는 방법을 묻는 문제
  - 최적화 문제를 결정문제로 바꿀 수 있음. “비용을 59 이하로 할 수 있느냐 없느냐”라고 바꾸면 결정문제

할당 알고리즘

- 기본적으로는 백 트랙 알고리즘. 백 트랙 알고리즘은 가능성이 있느냐 없느냐만을 따짐.
- 최적 분기(Branch-and-Bound) 알고리즘
  - 최적화 문제를 해결. 목적함수 값이 타당성이 있느냐 없느냐를 사용하여 불필요한 경로를 더 많이 제거
  - 최적값을 향해서 분기가 일어나는 알고리즘
  - 백 트랙 알고리즘과 마찬가지로 많은 경우에 좋은 해결방법이 되지만 최악의 경우 실행시간은 비상식적 시간.

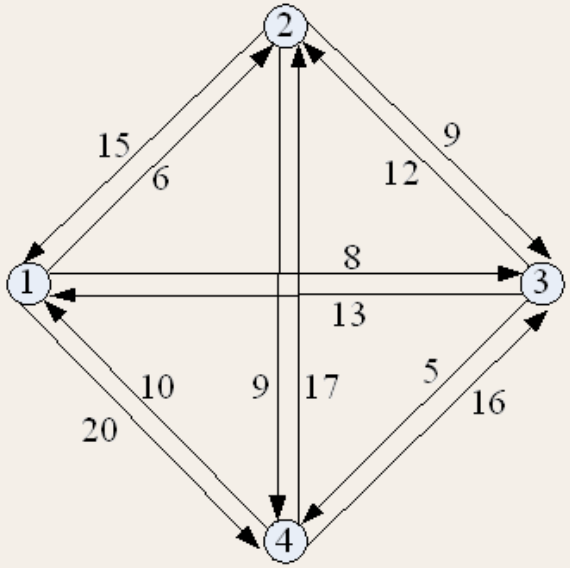
세일즈맨 여행의 문제

- 세일즈맨 여행의 문제(Traveling Salesman Problem)
  - N 개의 도시와, 각각의 도시 사이를 여행하기 위한 비용이 주어졌다고 가정
  - 어떤 도시에서 출발해서 다시 그 자리로 되돌아오되, 모든 도시를 정확히 [illegible] 하에서 여행비용이 최소

세일즈맨 여행의 문제

복잡도

- O(N!). N 개의 도시 중 하나를 선택해서 출발해야 하므로 일단 N개의 경우
- 선택된 도시에서 출발하여 나머지 (N-1)개의 도시 중 하나를 선택
- 기본적으로 처리 불가능 문제

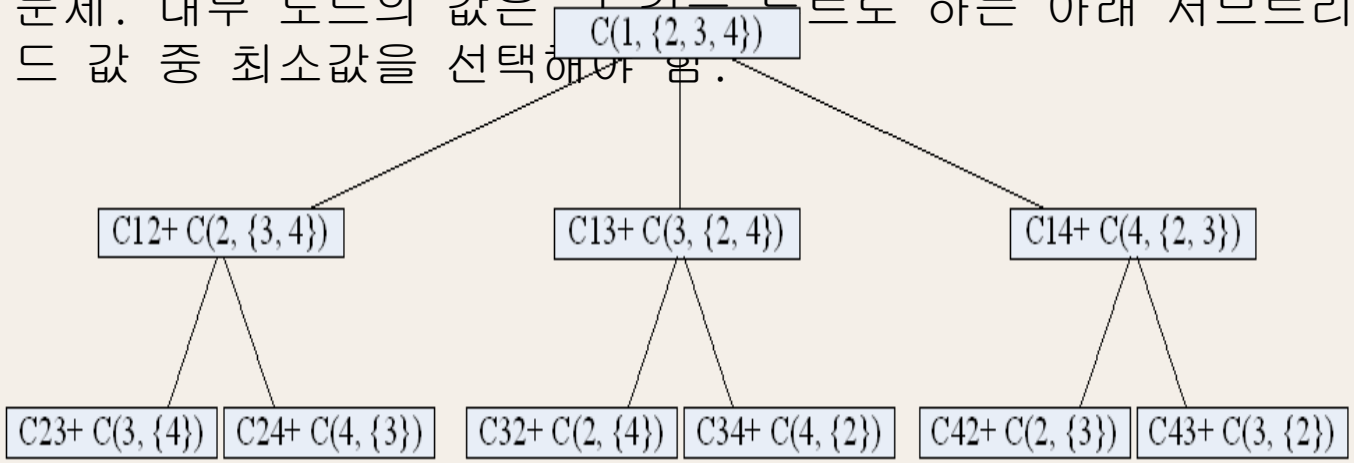


	1	2	3	4
1	0	15	8	20
2	15	0	12	9
3	13	12	0	5
4	10	17	16	0

세일즈맨 여행의 문제

❑ 상태공간 트리

- 4개의 도시를 가정할 때 상태공간 트리
- 1에서 출발하여 나머지 도시를 모두 돌고 다시 1로 돌아올 때 가능한 경우
- C(1, {2, 3, 4})는 1에서 출발하여 2, 3, 4 도시를 도는 비용
- C12 + C(2, {3, 4})는 1에서 2를 일단 먼저 가는 비용에 2에서 출발하여 3, 4 도시를 도는 비용을 합한 것
- 문제는 레벨 2의 세 개의 노드 중 어떤 것이 최소 비용인가의 문제. 내부 노드의 값은 그 것을 루트로 하는 아래 서브트리 노드 값 중 최소값을 선택해야 함.



세일즈맨 여행의 문제

❑ 동적 프로그래밍 기법으로 접근

- 2에서 출발하는 C(2, {1, 3, 4})의 비용을 계산하는 과정에서는 C{4, {3})의 계산을 요함.
- 이 계산은 위 그림의 C24 + C(4, {3})에서도 행해짐.
- 동적 프로그램 기법을 사용하면 이러한 중복된 계산을 배제
- 효율은 $O(N^2 2^N)$으로 O(N!)보다는 좋아지지만 여전히 처리 불가능 문제

❑ 동적 프로그래밍, 백 트랙, 최적 분기

- 정확한 최적 해(Exact Optimum Solution)를 구하는 알고리즘
- 방법을 사용하여 풀리기만 하면 정확히 가장 최적인 답을 구할 수 있음.
- 처리 불가능 문제에 대해 이러한 알고리즘을 가하면 그 효율이 보장 안됨.
- 운이 따르면 상식적인 시간이지만 그렇지 않으면 수백 년.

세일즈맨 여행의 문제

- 조건의 완화
  - 먼저 1에서 출발하여 갈 수 있는 곳을 가되 가장 싼 곳으로. 다시 거기서 가장 싼 곳으로 가기를 반복. 그 결과는 1-3-4-2-1로서 비용은 8 + 5 + 17 + 15 = 45
  - 다른 도시에서 출발하여 같은 방법 적용. 2-4-1-3-2가 비용 39로서 최소경로.

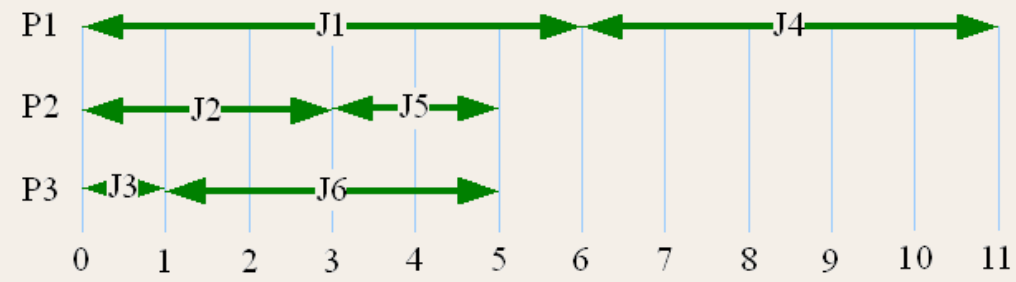
- 학습 (휴리스틱, Heuristic) 알고리즘
  - 가능한 몇 가지를 학습해 보고 그 중 제일 좋은 것을 선택
  - 예에서는 탐욕 알고리즘(Greedy Algorithm)을 적용하여 학습
  - 절대적인 최적값이 아니라 상대적인 최적값을 구한다는 점에서 학습 알고리즘은 근사적 알고리즘(Approximation Algorithm)
  - 반드시 상식적인 시간(Reasonable Time) 안에 해결하는 것이 보장
  - 결과에 대해서는 최적임을 보장하기 어려움.

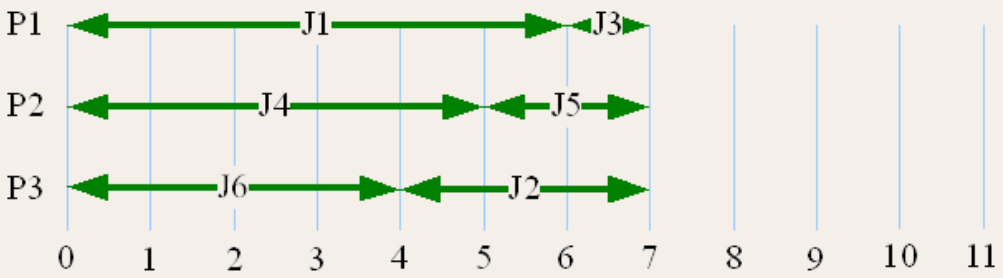
- 두 가지 접근방식
  - 동적 프로그래밍이나 백 트랙 또는 최적 분기를 사용하여 실행시간은 운에 맡기되 최적의 답안을 얻어냄.
  - 학습 알고리즘을 사용하여 정해진 시간 내에 결과를 얻되 최적은 아닐지 몰라도 그냥 만족스러운 답안을 얻어냄.

스케쥴링 문제

- 스케줄링 문제(Scheduling Problem)
  - 일마다 처리하는데 걸리는 시간이 서로 다름.
  - 프로세서는 어느 순간에 한가지 일밖에 할 수 없음.
  - 최소 시간 안에 모든 일을 처리할 수 있도록 프로세서 별로 일을 할당하라

i	1	2	3	4	5	6
Ji	6	3	1	5	2	4

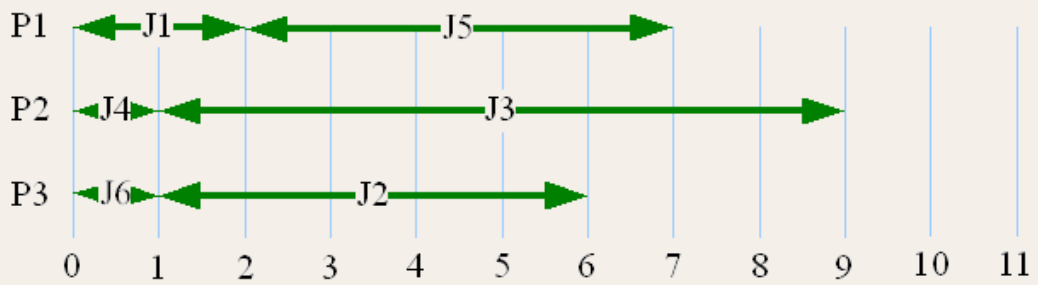


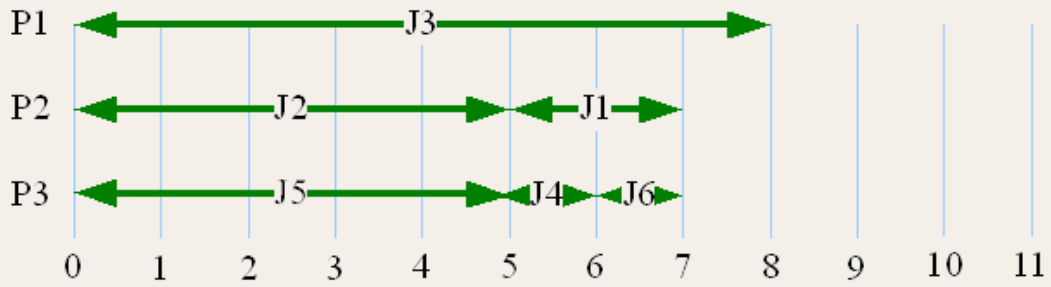


스케쥴링 문제

- 임의로 일 순서를 1, 4, 6, 5, 3, 2로 나열: 총 9시간
- 처리시간이 긴 것부터 나열하면 3, 2, 5, 1, 4, 6: 총 8시간
- 가장 오래 걸리는 일이 8 시간이므로 최소 시간이 이보다 작을 수는 없다.

i	1	2	3	4	5	6
Ji	2	5	8	1	5	1

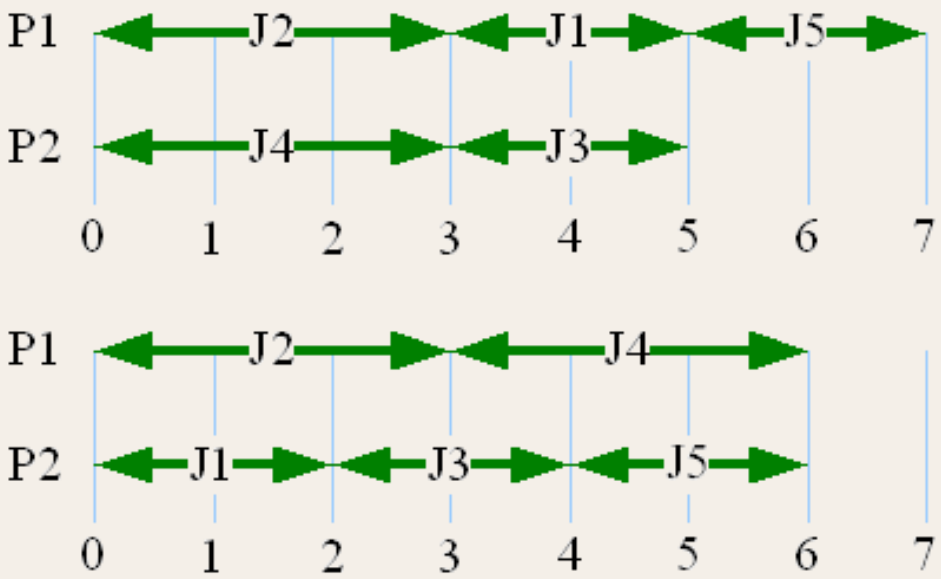




스케쥴링 문제

- 학습 알고리즘
  - 처리시간이 긴 것부터 나열하는 것이 항상 최적으로 이어지지는 않음.
  - 처리시간이 긴 것부터 나열하면 총 7 시간이지만, 실제의 최적 스케줄은 총 6 시간

i	1	2	3	4	5
Ji	2	3	2	3	2



표현식의 만족 문제

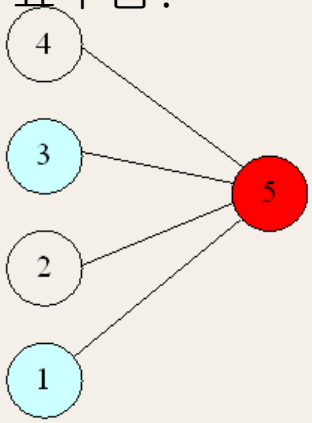
❑ 부울 변수의 조합으로 표현된 조건문

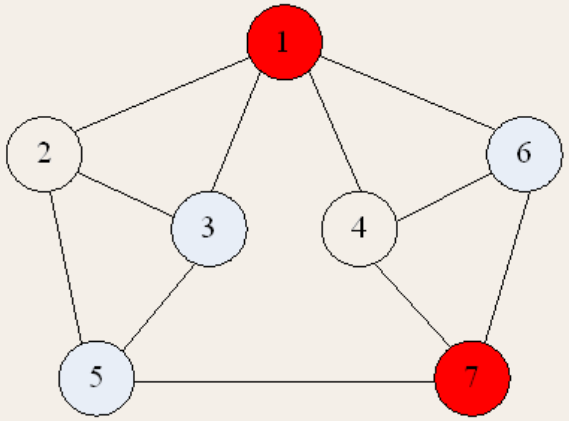
- 조건문이 논리적으로 만족되는 경우가 있느냐 없느냐는 결정 문제
- (A or (Not B) or (Not C)) 라는 표현 전체가 참(TRUE)이 되는 A, B, C 값이 하나라도 있느냐
- A = FALSE, B = TRUE, C = FALSE 라면 이 표현의 값은 (FALSE or (Not TRUE) or (Not FALSE)) = TRUE
- 변수 값이 TRUE 일 때와 FALSE 일 때를 모두 감안하여야 하므로 변수가 N개라면 경우의 수는 2^N
- 재수가 좋아서 몇 번 시도 만에 결과 값이 TRUE가 나오면 그만
- 그러나, 노(No)라고 단언하기 전까지는 2^N 가지의 모든 경우를 검증
- 현재까지 알려진 가장 빠른 알고리즘이 지수함수 알고리즘
- 학습 알고리즘 또는 백 트랙이나 동적 프로그래밍 등의 알고리즘을 가할 여지가 없음.

유효 컬러링 문제

유효 컬러링(Valid Coloring)

- 그래프 정점에 색깔을 칠하되 서로 인접한 두 정점의 색깔이 서로 다르도록 칠한 것
- “주어진 그래프를 유효하게 칠하기 위해서는 몇 개의 색깔이 필요한가” 라고 물어보면 최적화 문제
- “주어진 그래프를 3개 이하의 색깔로 유효하게 칠할 수 있겠는가” 라고 물어보면 결정문제. 3-컬러링 문제(Three Coloring Problem)
- 왼쪽 그래프는 Yes, 오른쪽 그래프는 No.
- 상태공간 트리에 의한 백 트래킹 적용가능. 일반적으로 지수함수 시간이 요구됨.





P의 문제, NP의 문제

- **전제조건**
  - P의 문제, NP의 문제를 논할 때에는 모든 문제를 결정문제로 바꾼 상태에서 판단. 명확하기 때문.
- **P의 문제**
  - 다항식 시간(Polynomial Time) 안에 풀 수 있는 문제
  - 처리 가능한 문제 즉, $O(N^K)$ 시간 안에 풀 수 있는 문제
- **NP의 문제**
  - 초 다항식 시간(Super-Polynomial Time)을 요하는 문제
  - 처리 불가능한 문제, 즉 지수함수 시간이나 팩토리알 시간을 요하는 문제
  - NP는 비 결정적 다항식(非 決定的, Nondeterministic Polynomial)의 약자
  - 항상 다항식이 아니고 운이 좋으면 다항식 시간에 풀 수 있다는 의미
  - 할당 문제를 푸는데 있어서 처음에 깊이우선 탐색한 경로가 우연히 최적의 답으로 이어지는 경로였다면 다항식 시간 내에 답을 얻을 수 있음.
  - NP의 문제에서 어떤 답이 나오면 그것이 정답인지에 대한 증명도 다항식 시간. CNF-만족의 문제 같으면 우연히 처음 추측한 변수별 트루, 폴스 값이 전체 표현을 트루로 만들 경우가 존재. 이것이 정답인지는 당연히 그 값을 전체 표현에 넣어서 그 결과가 트루라는 것만 보이면 되고, 이 과정은 다항식 시간이면 됨.

P의 문제, NP의 문제

❑ P의 문제, NP의 문제

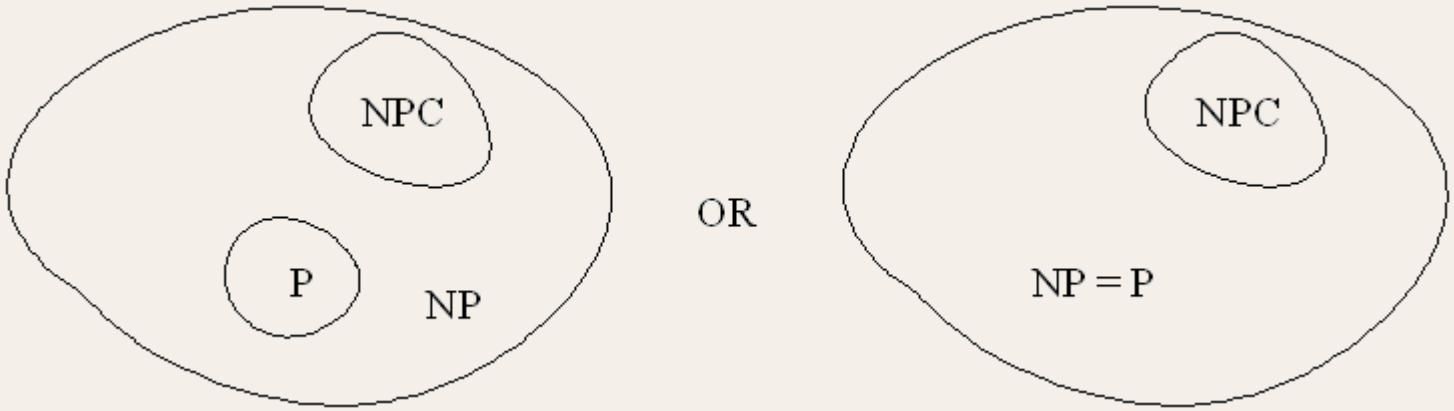
- 문제에 대한 해법을 전제
- 최단경로를 찾는 것은 P의 문제이지만 최장경로를 찾는 문제는 NP의 문제
- 최단경로의 문제는 다항식 시간 알고리즘을 이미 갖고 있기 때문
- NP의 문제라고 했을지라도 다항식 시간 안에 풀 수 있는 알고리즘이 개발되면 그 문제는 P의 문제로 바뀜.

P의 문제, NP의 문제

P의 문제, NP의 문제

- 문제의 성격이 실제로는 P인데 우리가 아직 답을 몰라서 NP의 문제라고 부르고 있을 수도 있음. P의 문제와 NP의 문제가 본질적으로 완전히 동일한 종류가 아닌가 하는 질문. P = NP?

- NP의 문제 중에서도 일련의 문제들은 본질적으로 다른 문제의 해결책과 연관되어 있음. 모든 NP 문제를 합친 것만큼 어려운 (NP Hard) 문제들을 NPC(NP-Complete) 문제라고 함. 세일즈맨 여행의 문제, CNF-만족의 문제. 3-컬러링 문제 등 지수함수적인 시간을 요하는 약 1,000 개 정도의 NPC 문제들이 존재



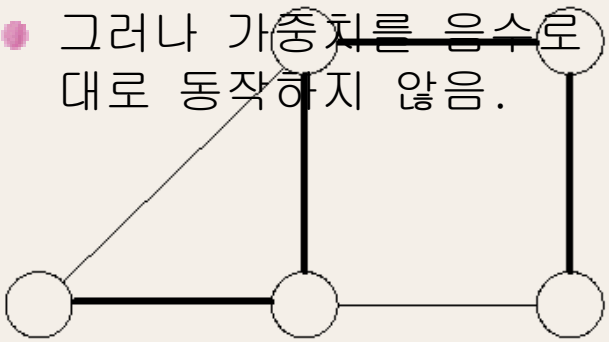
P의 문제, NP의 문제

❑ P의 문제, NP의 문제

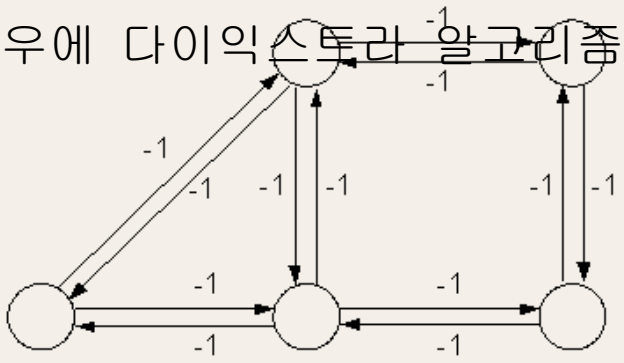
- NPC 문제 중 하나의 문제만 다항식 시간 안에 풀 수 있는 방법이 고안되면 나머지 모든 NP의 문제도 다항식 시간 안에 풀 수 있음.
- 사상(Mapping)에 의함.
- 문제 A를 푸는 방법에 문제 B를 푸는 방법을 사상시킬 수 있기 때문
- 사상에 걸리는 시간은 다항식 시간(Polynomial Time Reduction). 하나의 문제를 다항식 시간에 풀 수 있으면 이를 다항식 시간 안에 다른 문제를 푸는 방법으로 변형시킨 다음에 변형된 방법을 써서 다른 문제도 다항식 시간에 풀 수 있음.

P의 문제, NP의 문제

- 해밀턴 경로 (Hamiltonian Path)
  - (a)에서 굵은 선으로 표시된 경로. 무방향 그래프에서 모든 정점을 단 한번씩만 방문하는 경로. 그래프에서 해밀턴 경로가 존재하는지 그렇지 않는지 판정하는 문제는 NP의 문제
- 다이익스트라 알고리즘: $O(N^2)$ 알고리즘
  - (b)는 (a)의 모든 간선에 가중치 -1을 할당. 모든 노드 사이에 최단경로 알고리즘을 적용하여 그 결과경로의 길이가 -(N-1)이면 그것이 해밀턴 경로에 해당.
  - 따라서 (b)의 문제가 해결되면 이는 (a)의 문제가 해결됨을 의미. (b)의 문제에 대한 해결책을 (a)의 문제에 대한 해결책으로 사상할 수 있음. (b)의 문제가 다이익스트라 알고리즘으로 해결된다면 NP 문제인 (a)의 문제가 해결됨.
  - 그러나 가중치를 음수로 할 경우에 다이익스트라 알고리즘은 제대로 동작하지 않음.



(a)



(b)

소수 검증문제

소수 검증문제(Primality Test Problem)

- 1과 자신 이외에는 아무런 약수가 없는 자연수.
- 숫자 K가 소수인지 판단하라
- 1부터 K까지 모든 숫자로 K를 나눠봄. 억지접근(Brute Force) 방법
- 주어진 숫자의 자리수를 데이터 크기 N이라고 정의하면 자릿수 N이 하나 증가할 때마다 나누어 봐야할 숫자가 10배씩 증가
- 지수함수적인 알고리즘으로서 문제는 처리 불가능한 NP의 문제

150자리 수를 지닌 소수 K를 만들어보라

- 150 자리 숫자 중 임의로 하나를 선택. 소수인지를 검증해야 함. 수억년. K/2에서 중단해도 수억년의 반.

확률적 알고리즘

- 0과 K 사이의 숫자 중 임의의 숫자 P를 선택해서 K를 P로 나누었을 때 나누어 떨어지지 않는다면 K가 소수일 확률은 1/2이하
- 임의의 숫자 200개를 선택해서 나누었을 때 모두 나누어 떨어지지 않는다면 숫자 K가 소수일 확률은 $(1/2)^{200}$이하
- 다항식 시간에 실행 가능. 결과가 정답임을 보장하지는 못하는 몬테카를로 알고리즘

인수찾기 문제

- 인수찾기 문제(Factor Finding Problem)
  - 더욱 어려움.
  - 어떤 숫자가 주어졌을 때 그 숫자를 두 개의 인수의 곱으로 나타내라.
  - 숫자 K가 주어졌을 때 K = A × B가 되도록 A, B를 구하는 문제
  - 자리 수를 N으로 볼 때 실행시간은 지수 함수적으로 증가
  - 때에 따라서는 이 조건을 만족하는 A, B가 단 한 쌍만 존재
  - 소수의 검증문제와는 달리 확률적 알고리즘마저 존재하지 않음.

암호화 알고리즘

❑ 암호화(Cryptography)

- 비즈니스, 군사적, 개인적인 목적
- 평문(Plain Text) 대신에 암호문(Cypher Text)을 주고받음
- 도청(Eavesdropping)된 메시지의 해독(Deciphering)을 어렵게 함.

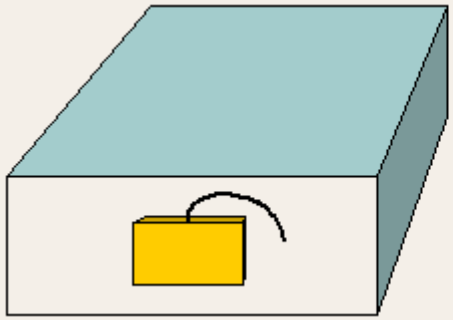
❑ 서명(Signature, Digital Signature)의 문제

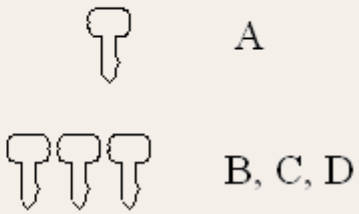
- 수신자로서는 그 메시지가 반드시 발신자가 보냈음을 확신한다.
- 발신자로서 그런 메시지를 보낸 적이 없다고 부인할 수 없어야 한다.
- 수신자가 받은 메시지를 조작한 후, 마치 발신자가 보낸 것처럼 하여 타인에게 보낼 수 없어야 한다.

암호화 알고리즘

A, B, C, D 사이의 암호화 교신

- 서류함에 자물쇠가 채워져 있는 상태에서 그 열쇠를 A, B, C, D 네 사람이 모두 갖고 있으면 이들 외에 타인들은 서류함에 들은 내용을 볼 수가 없다.
- A가 C에게 보낼 서류가 있으면 자신의 키를 사용하여 자물쇠를 열고 서류를 집어넣고 잠금.
- B가 서류를 꺼내고 내용을 바꾸어 마치 A가 보내는 것처럼 하여 다시 넣으면 C는 바뀐 서류를 보게 됨. 서명의 문제
- A-B, A-C, A-D 등 모든 쌍(Pair) 간에 서로 다른 자물쇠와 키 세트를 가져야 함. 신입사원 하나가 들어오면 나머지 모든 사원과 서로 교신하기 위한 자물쇠와 키가 필요. 현실적으로 어려운 일.

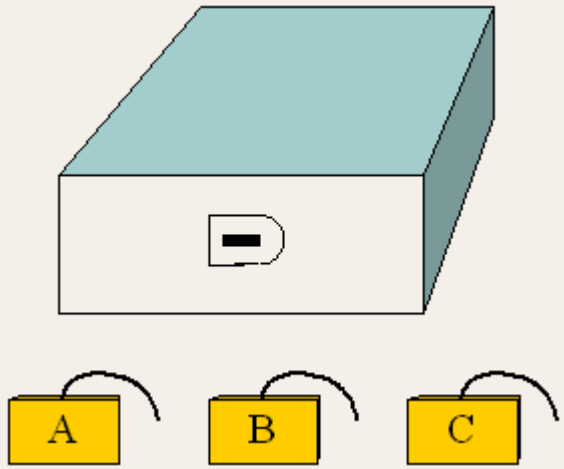




암호화 알고리즘

❑ 공개 키 암호화(Public Key Cryptography)

- A, B, C, D 각각이 자신만의 자물쇠와 키를 구입하되, 자물쇠에 자신의 이름을 써서 서류함 앞에 놓아두고 공개
- B가 A에게 서류를 전하는 경우. B는 서류를 함 속에 넣은 다음에 A의 자물쇠로 잠금.
- 자물쇠를 열 수 있는 것은 A 뿐. 공개되는 것은 자물쇠이며, 키는 여전히 개인만 간직함.



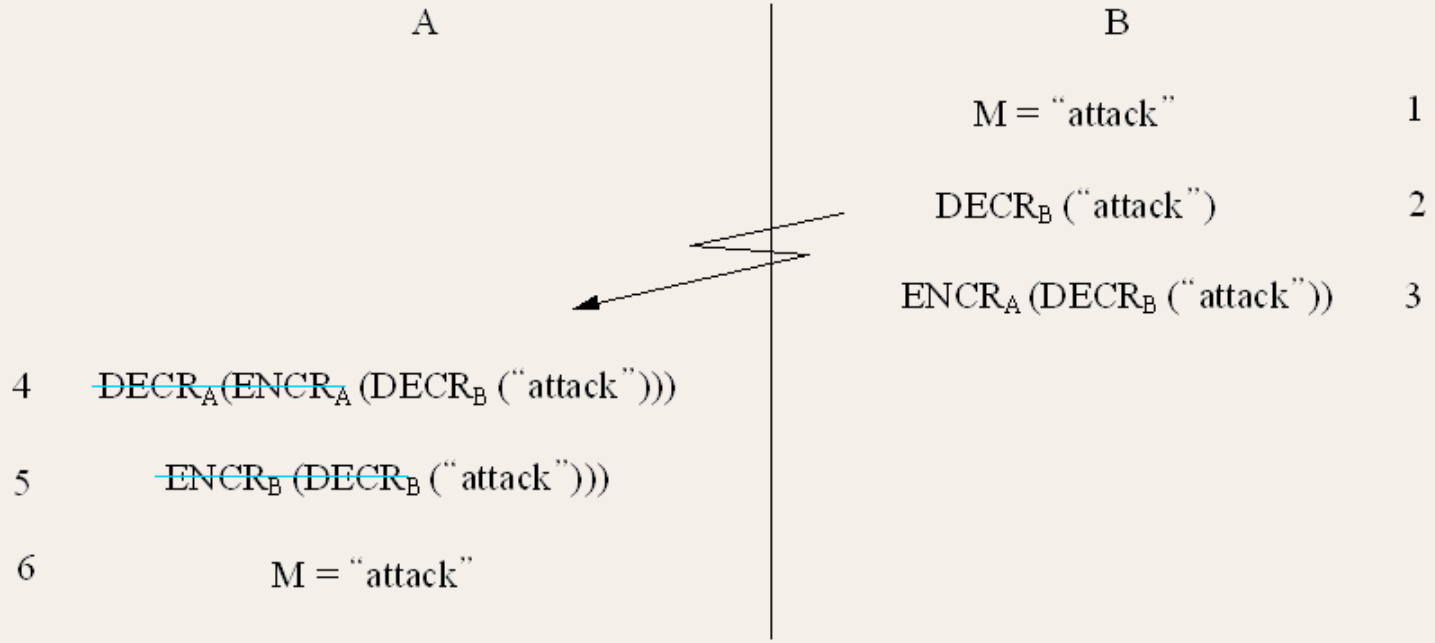
암호화 알고리즘

❑ 공개 키 암호화(Public Key Cryptography)

- 자물쇠로 잠그는 작업은 암호화(Encryption)
- 열쇠로 여는 작업은 해독(Decryption)
- 조건
  - $DECR_A(ENCR_A(M)) = M$은 반드시 만족. 메시지 M에 대해서 A의 자물쇠로 암호화한 것을 A의 열쇠로 해독하면 반드시 원래의 메시지 M이 복원되어야 함.
  - $ENCR_A$를 가지고 $DECR_A$를 추정하기 어려워야 함. 자물쇠인 $ENCR_A$ 는 공개된 함수이므로 비교적 쉽게 계산되도록 하지만, $DECR_A$ 는 A의 키가 없으면 거의 계산이 불가능하도록 함.
  - $ENCR_A(DECR_A(M)) = M$ 이 만족되어야 함.

암호화 알고리즘

- B가 A에게 메시지를 보낼 때 B는 일단 자신의 키를 가한 다음에 A의 자물쇠로 잠금.
- $ENCR_B$는 B의 자물쇠에 해당하는 것으로서 공개된 함수. 그런데 만약 $DECR_B$("attack")가 B가 보낸 것이 아니라면 B의 자물쇠인 $ENCR_B$로 풀리지 않음.
- B가 보낼 메시지에 일단 $DECR_B$를 가한 이유는 나중에 받는 사람이 $ENCR_B$ 를 가해 봄으로써 보낸 사람이 B가 맞는지를 확인하기 위한 것



암호화 알고리즘

❑ RSA(Rivest, Shamir, Adleman) 알고리즘

- 조건을 만족하는 ENCR, DECR 함수는 어떻게 만들 것인가.
- 소수 검증의 문제와 인수 찾기 문제 사이에 존재하는 복잡도 차이를 이용

- 150자리 정도 되는 두 개의 매우 큰 소수 P, Q를 몬테카를로 알고리즘에 의해 구한 뒤, N = P×Q 가 되도록 한다.
- 300자리 정도 되는 K를 선택하되 그 K가 (P-1)(Q-1)과 서로 소(Mutually Prime)가 되도록 한다. 다음, K×G % (P-1)(Q-1) = 1이 되는 G를 계산한다.

- 자물쇠를 나타내는 <G, N>은 공개
- <K>는 공개되지 않는 개인별 비밀 키
- 공개 자물쇠인 N을 계산하는 과정 즉, P와 Q를 계산하는 과정은 몬테카를로 알고리즘에 의해 다항식 시간에 계산가능. 만약 공개된 N으로부터 그 인수인 P, Q를 추측할 수 있다면, 역시 공개된 G를 사용하여 비밀 키인 K를 추정할 수 있다. 그러나 N으로부터 P, Q를 추정하는 문제 즉, 공개된 자물쇠로부터 비밀 키를 찾는 것은 인수 찾기 문제로서 처리 불가능 문제. 이점이 바로 RSG 암호화의 요체임.

암호화 알고리즘

- RSA(Rivest, Shamir, Adleman) 알고리즘
  - 암호화
    - 암호화 과정은 매우 단순
    - 암호화에 걸리는 시간을 다항식 시간으로
    - 메시지 M의 비트 값을 잘라서 블록으로 만들되 각 블록 내부의 값이 0..(N-1) 사이가 되게 함.
    - 공개된 자물쇠인 <G, N>을 사용하여 블록별로 암호문을 만들되

      암호문 H = ENCR(M) = M^G % N으로 함.
    - H는 M^G을 N으로 나눈 나머지이므로 그 몫을 m이라 하면 H = M^G - mN
  - 해독과정
    - 비밀키인 K를 사용하여 이 암호문을 해독하는 과정
    - DECR(H) = H^K % N

      = $(M^G - mN)^K$ % N (암호문 작성방법에 의해)

      = M^{GK} % N (이항정리에 의해)

      = M (조건 '나'에 의해)