جواب تمرینات فصل دوم

جواب سوال اول :

(i)

حل با جدول ارزش ها

(ii)

برای اثبات $p \wedge (q \vee p) \equiv p$، یک $\wedge(q \vee \sim q)$ اضافه میکنیم. این کار مشکلی ندارد چون ارزش این گزاره به خودی خود نادرست است که اضافه کردن آن در گزاره $p \wedge (q \vee p)$ تاثیری ندارد.
برهان :

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p \wedge (p \vee q) \wedge (q \vee \sim q) \equiv p \wedge [q \vee (p \wedge \sim q) \rightarrow]$$
$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \equiv p \wedge (q \vee \sim q) \equiv p$$

اثبات دیگری به همین روش

جواب سوال دوم :

(i)

$$[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q \rightarrow \sim [p \wedge (\sim p \vee q)] \vee q \rightarrow \sim [(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q)] \vee q \equiv \sim p \vee \sim q \vee q \equiv T$$

(ii)

$$(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \rightarrow [(\sim p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)] \wedge [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim p \vee q)] \rightarrow$$
$$[\sim (\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee q)] \wedge [\sim (\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee q)] \rightarrow (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee q) \rightarrow q \vee [\sim p \vee (p \wedge \sim q)]$$
$$\rightarrow q \vee (\sim q \vee \sim p) \equiv T$$

(iii)

$$(p \vee q) \vee (\sim p) \Rightarrow (q \wedge \sim p) \rightarrow [\sim p \vee p \vee q] \vee (q \wedge \sim p) \rightarrow F \vee (q \wedge \sim p) \equiv q \wedge \sim p$$

در نتیجه این گزاره همیشه درست نیست و ارزش آن مساوی $\sim p \wedge q$ است.

جواب سوال سوم:

(i)

اثبات با جدول ارزش ها

(ii)

$$p * p \equiv (\sim p) \to p * p \equiv (\sim p) \vee (\sim p) \equiv \sim p$$

(iii)

$$(p \wedge q) \equiv (p * q) * (q * p) \to (p * q) * (q * p) \equiv (\sim p \vee \sim q) * (\sim q \vee \sim p) \to$$
$$[\sim(\sim p \vee \sim q)] \vee [\sim(\sim q \vee \sim p)] \equiv (p \wedge q) \vee (q \wedge p) \equiv p \wedge q$$

(iv)

$$p * (q * q) \equiv (p \Rightarrow q) \to q * q \equiv \sim q \vee \sim q \equiv \sim q \to p * (q * q) \equiv p * \sim q$$
$$\to p * \sim q \equiv \sim p \vee \sim(\sim q) \equiv \sim p \vee q \equiv p \Rightarrow q$$

(v)

$$(p * p) * (q * q) \equiv p \vee q \to p * p \equiv \sim p, q * q \equiv \sim q \to$$
$$(p * p) * (q * q) \equiv \sim(\sim p) \vee \sim(\sim q) \equiv p \vee q$$

جواب سوال چهارم :

(i)

$$p \wedge q, p \Rightarrow \sim q \mapsto \sim q$$

برای معتبر بودن این گزاره، فرض میگیریم $p \wedge q$ درست است پس، ارزش p و q درست است.
وقتی که p و q درست باشند آنگاه، $\sim q$ ، $p \Rightarrow \sim q$ همگی نادرست هستند پس بحث بالا معتبر است.

(ii)

فرض میکنیم ارزش$p \wedge \sim q$ درست است. پس ارزش p، q به ترتیب درست و نادرست است.
از آنجا که p درست و q نادرست است پس $q \Rightarrow p$، $\sim p$ به ترتیب درست و نادرستند پس بحث بالا نامعتبر است.

(iii)

$$\sim p_a \mapsto \sim \forall x : p_x$$

با برهان خلف فرض میکنیم $\sim \forall x : p_x$ نادرست است پس به ازای همه x ها، p_x درست است پس p_a درست و نقیض آن نادرست خواهد بود پس بحث معبتر است.

(iv)

$$\forall x : (p_x \Rightarrow q_x), \sim q_a \mapsto \sim\forall x : p_x$$

فرض میکنیم $\sim q_a$ درست است پس q_a نادرست خواهد بود. پس برای درست بودن ارزش $\forall x : (p_x \Rightarrow q_x)$،
$\forall x : p_x$ نادرست خواهد بود. آنگاه نقیض آن درست خواهد بود که معلوم میشود بحث معتبر است.

(v)

با برهان خلف فرض میکنیم $\forall x : r_x$ نادرست است پس برای درست بودن $\forall x : (q_x \Rightarrow r_x)$ و $\forall x : (p_x \Rightarrow r_x)$، هر دو $\forall x : p_x$ و $\forall x : q_x$ نادرست خواهند بود پس $\forall x : q_x \vee p_x$ نادرست خواهند بود. پس بحث معتبر است.

جواب سوال پنجم :

(i)

مثال نقض : .اگر عدد ۲ را در نظر بگیریم نمیشود به صورت مجموع دو عدد اول طبیعی نوشت

(ii)

مثال نقض : اگر $A = \{2,3\}$ و $B = \{2\}$ و $C = \{3\}$ آنگاه : $A - (B - C) = \{3\}$ و $(A - B) - C = \emptyset$

$$A - (B - C) \neq (A - B) - C$$

(iii)

ابتدا مسئله را به نماد های ریاضی تعمیم میدهیم :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : (\frac{x}{y} > \sqrt{3}) \rightarrow$$

$$\frac{x^2}{y^2} > 3 \rightarrow x^2 > 3y^2 \rightarrow x^2 - 3y^2 > 0$$

اگر $u = 2x + 3y$، $v = x + 2y$ باشد آنگاه داریم :

$$u^2 - 3v^2 = x^2 - 3y^2 > 0 \rightarrow \frac{2x + 3y}{x + 2y} > \sqrt{3} \rightarrow$$

$$x^2 - 3y^2 > 0 \rightarrow x^2 > 3y^2 \rightarrow x^2 + 2xy > 3y^2 + 2xy \rightarrow$$

$$x(x + 2y) > y(2x + 3y) \rightarrow \frac{x}{y} > \frac{2x + 3y}{x + 2y} \rightarrow$$

$$\frac{x}{y} > \frac{2x + 3y}{x + 2y} > \sqrt{3}$$

در نتیجه همیشه یک عدد گویای کوچک تری وجود دارد که از $\sqrt{3}$ بزرگتر باشد.

(iv)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \epsilon > 0 : (y \le x + \epsilon \Rightarrow y \le x) \to$$
$$\epsilon = \frac{1}{n} \to y \le x + \frac{1}{n} \to \lim_{n\to\infty} y = y, \lim_{n\to\infty} x + \frac{1}{n} = x \Rightarrow$$
$$y \le x$$

جواب سوال ششم :

(i)

درست است چون به ازای هر x یک $x - 1$ وجود دارد و چون $x - 1 < x$ این گزاره درست است.

(ii)

مثال نقض : اگر $x = 0$ پس باید $y = 3$ به ازای همه مقادیر y که ممکن نیست.

(iv)

(الف) :
از آنجا که $\emptyset \in P(X)$ هست پس B میتواند مساوی $\emptyset$ باشد.
اگر $B = \emptyset$ باشد، گزاره $\forall A \in P(X) \exists B \in P(X) : (A \cup B = A \equiv A = A)$ پس این گزاره درست است.

(ب) :
از آنجا که $\emptyset \in P(X)$ هست پس A میتواند مساوی $\emptyset$ باشد.
اگر $A = \emptyset$ باشد به ازای همه مقادیر B داریم :
$\exists A \in \emptyset \forall B \in P(X) : (A \cup B = B \equiv B = B)$ پس این گزاره درست است.

جواب سوال هفتم :

اگر، تحصیل در رشته پزشکی $\equiv p$، تحصیل در رشته ریاضی $\equiv q$، داشتن درآمد خوب $\equiv r$،
برداشت منطقی از زندگی $\equiv t$، احساس بطالت کردن $\equiv z$
باشد آنگاه :

$$p \Rightarrow r, q \Rightarrow t, (r \vee t) \Rightarrow \sim z, z \mapsto \sim(p \vee q)$$

با توجه به این تحلیل فرض میکنیم که $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ درست باشد پس ارزش pو q هر دو نادرست هستند.
پس $p \Rightarrow r$ و $q \Rightarrow t$ هر دو درست هستند پس r و t میتوانند هر مقداری باشند اما؛ باید گزاره های دیگر هم بررسی شوند.
حال اگر ارزش گزاره z درست باشد و r ، t هر دو نادرست باشند ارزش گزاره های $r \vee t \Rightarrow \sim z$ و z همگی درست است.
پس بحث زیر معتبر است.

جواب سوال هشتم:

(i)

از آنجا که $(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)x^{n-r}y^r$ داریم :

$$x,y=q \to (1+1)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)1^{n-r}1^r \to 2^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)$$

(ii)

اگر $P(n) = 1^3 + 2^3 + ... + n^3$:

۱) اگر $n=1$: $P(1)=1$ و $1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$ پس شرط اول برقرار است.

۲) با فرض برقرار بودن $P(k) = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$ به بررسی برابری $P(k+1)$ میپردازیم :

$$P(k+1) = 1^3 + 2^3 + ...k^3 + (k+1)^3 \to$$
$$P(k+1) = P(k) + (k+1)^3, P(k) = \frac{k^2(k+1)^2}{4} \to$$
$$P(k+1) = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

(iii)

اگر $P(n) = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + ... + \frac{1}{n\times(n+1)}$:

۱) اگر $n=1$: $P(1)=\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ پس شرط اول برقرار است.

۲)با فرض برقرار بودن $P(k) = \frac{k}{k+1}$ به بررسی برابری $P(k+1)$ میپردازیم :

$$P(k+1) = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{1\times 2} + ... + \frac{k}{k\times(k+1)} + \frac{k+1}{(k+1)\times(k+2)} \to$$
$$P(k+1) = P(k) + \frac{k+1}{(k+1)\times(k+2)}, P(k) = \frac{k}{k+1} \to$$
$$P(k+1) = \frac{k}{k+1} + \frac{k+1}{(k+1)\times(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

جواب سوال نهم:

(الف)

مجموعه A که شامل ۲ نباشد مساوی $\{1,3,4,5,...,9\}$ پس تعداد زیر مجموعه های آن : $2^8 = 256$ است.

(ب)

با استفاده از قانون دمورگان برای محاسبه تعداد زیر مجموعه های A که شامل ۲ باشد، مقدار کل زیر مجموعه های A را از تعداد زیر مجموعه های A .که شامل ۲ نیستند کم میکنیم پس داریم :

$$2^9 - 2^8 = 256$$

(ج)

برای محاسبه تعداد زیر مجموعه هایی که شامل ۵ نباشد ولی شامل ۷ باشد، ابتدا فرم سوال را به فرم مجموعه تبدیل میکنیم :

$$|5 \notin A \wedge 7 \in A| \equiv |5 \notin A - 7 \notin A|$$

این یعنی که از مجموعه که حاوی ۵ نیست، ۷ را هم کم کن پس داریم :

$$B = 5 \notin A \rightarrow |5 \notin A - 7 \notin A| \equiv |B| - |7 \notin B| \rightarrow$$
$$2^8 - 2^7 = 2^7 = 128$$

(د)

به فرم سوال بالا حل میشود.