فصل پنجم

روابط هم ارزی و ترتیبی

ما در فصل سوم رابطه را تعریف کردیم. در این فصل رابطه‌های با خواص ویژه، را بررسی می‌کنیم.

1.5 روابط هم‌ارزی

رابطه R را در $\mathbb{Z}$ به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$(m,n)\in R \Leftrightarrow 5|n-m.$$

در این‌صورت داریم:

(1) به ازای هر عدد صحیح m ، $5|m-m=0$ بنابراین $(m,m)\in R$.

(2) فرض کنید $(m,n)\in R$ بنابراین

$$5|n-m \Rightarrow n-m=5t \Rightarrow m-n=5(-t) \Rightarrow 5|m-n \Rightarrow (n,m)\in R.$$

(3) اگر $(m,n),(n,k)\in R$ آنگاه داریم:

$$(5\,|\,n-m)\wedge(5\,|\,k-n) \Rightarrow 5\,|\,k-n+n-m \Rightarrow 5\,|\,k-m..$$

یعنی $(m,k)\in R$. این رابطه را همنهشتی به هنگ 5 می‌نامیم.

خواص(1) و (2) و (3) در مثال بالا خواص ویژه‌ای هستند که بعضی از روابط دارای این خواص هستند.

1.1.5 تعریف. فرض کنید R یک رابطه روی مجموعه‌ی ناتهی X باشد. در این‌صورت

(الف) رابطه R را **انعکاسی** می‌نامیم، هرگاه $x\in X$ آنگاه $(x,x)\in R$.

(ب) رابطه R را **متقارن** می‌نامیم، اگر $(x,y)\in R$ آنگاه $(y,x)\in R$.

(ج) رابطه R را **متعدی** می‌نامیم، هرگاه $(x,y),(y,z)\in R$ آنگاه $(x,z)\in R$.

(د) رابطه R را **هم‌ارزی** می‌نامیم اگر انعکاسی، متقارن و متعدی باشد.

2.1.5 مثال‌ها:

(1) رابطه همنهشتی به هنگ 5 یک رابطه هم‌ارزی است.

(2) فرض کنید $A=\{1,2,3\}$ قرار دهید $R=\{(1,1),(2,2),(2,3),(3,2)\}$ در این‌صورت R دارای خواص انعکاسی و تعدی نیست ولی متقارن است.

(3) رابطه R روی مجموعه‌ی خطوط یک صفحه را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(L_1, L_2)\in R \Leftrightarrow L_1 \| L_2$$

در این‌صورت R یک رابطه هم‌ارزی است (در اینجا تساوی حالتی از موازی فرض شده است).

(4) فرض کنید $n\geq 2$، عددی طبیعی باشد. رابطه R را روی $\mathbb{Z}$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(m,k)\in R \Leftrightarrow n | k-m.$$

مشابه ابتدای بحث می‌توان نشان داد که R یک رابطه هم‌ارزی روی $\mathbb{Z}$ است. این رابطه را رابطه همنهشتی به هنگ n می‌نامیم و اگر $(m,k)\in R$ می‌نویسیم $m\equiv k \pmod{n}$ یا $m\overset{n}{\equiv}k$.

3 .1 .5 مثال. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع باشد. در این‌صورت رابطه S روی $\mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(x_1,x_2)\in S \Leftrightarrow f(x_1)=f(x_2).$$

نشان دهید که S یک رابطه هم‌ارزی است.

حل. کافیست نشان دهیم S انعکاسی، متقارن و متعدی است.

ابتدا **انعکاسی**، به ازای هر $x_1\in\mathbb{R}$ داریم $f(x_1)=f(x_1)$. در نتیجه $(x_1,x_1)\in S$.

برای **متقارن** بودن، فرض کنید $(x_1,x_2)\in S$ پس $f(x_1)=f(x_2)$. بنابراین $f(x_2)=f(x_1)$ و درنتیجه داریم $(x_2,x_1)\in S$.

سرانجام، فرض کنید $(x_1,x_2),(x_2,x_3)\in S$. بنابراین $f(x_2)=f(x_3)$ ، $f(x_1)=f(x_2)$. در نتیجه $f(x_1)=f(x_3)$ و بنابراین $(x_1,x_3)\in S$.

4 .1 .5 مثال. رابطه R روی $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})$، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\big((a,b),(c,d)\big)\in R \Leftrightarrow ad=bc\,.$$

نشان دهید R یک رابطه هم‌ارزی است.

حل. کافیست نشان دهیم R انعکاسی، تقارنی و متعدی است.

(1) انعکاسی بودن، چون $ab=ba$ بنابراین $\big((a,b),\ (a,b)\big)\in R$.

(2) فرض کنید $\big((a,b),(c,d)\big)\in R$ پس $ad=bc$. بنابراین $cb=da$ در نتیجه

$$\big((c,d),(a,b)\big)\in S.$$

(3) اگر $\big((a,b),(c,d)\big),\big((c,d),(e,f)\big)\in R$ آنگاه داریم:

$$\begin{cases} ad=bc \\ cf=de \end{cases}$$

با ضرب معادله اول در f و ضرب معادله دوم در b بدست می‌آوریم:

$$afd=bcf=bde\,.$$

در نتیجه $afd=bde$. چون $d\neq 0$، داریم $af=be$ یعنی $((a,b),(e,f))\in R$.

تمرین. فرض کنید $X=\{a,b,c,d\}$. رابطه R روی X را مشخص کنید بطوریکه:

(الف) R انعکاسی و تقارنی باشد ولی متعدی نباشد؛

(ب) R انعکاسی و متعدی باشد ولی متقارن نباشد؛

(ج) R متقارن و متعدی باشد ولی انعکاسی نباشد؛

(د) R رابطه هم‌ارزی باشد.

5.1.5 قضیه. فرض کنید R یک رابطه روی مجموعه A باشد. قرار می‌دهیم:

$$I=\{(x,x)\,|\,x\in A\}\,.$$

در این‌صورت

(الف) I یک رابطه هم‌ارزی روی A است؛

(ب) R انعکاسی است اگر و فقط اگر $I \subseteq R$؛

(ج) R متقارن است اگر و فقط اگر $R = R^{-1}$؛

(د) R متعدی است اگر و فقط اگر $RoR \subseteq R$؛

(ه) R متقارن و متعدی است اگر و فقط اگر $R^{-1}oR = R$.

برهان. قسمتهای (الف) و (ب) و (ج) بعنوان تمرین واگذار می‌شود.

برای اثبات (د)، فرض کنید R متعدی باشد، حکم $RoR \subseteq R$. فرض کنید $(x,y) \in RoR$ بنابراین وجود دارد z بقسمی که $(x,z) \in R$ و $(z,y) \in R$. چون R متعدی است، $(x,y) \in R$.

بعکس. ($\Rightarrow$) فرض کنید $(x,y),\ (y,z) \in R$ بنابراین داریم:

$$(x,z) \in RoR \subseteq R \Rightarrow (x,z) \in R.$$

(ه) فرض کنید R متقارن و متعدی باشد. بنا به قسمت‌های سوم و چهارم داریم $R^{-1}oR \subseteq R$. فرض کنید $(x,y) \in R$. از آنجایی‌که R متقارن است، $(y,x) \in R$ و بنا به متعدی بودن R داریم $(x,x) \in R$. درنتیجه $(x,y) \in R$، $(x,x) \in R$ و بنابراین $(x,y) \in RoR = R^{-1}oR$.

بعکس. ($\Rightarrow$) برای متقارن بودن، فرض کنید $(x,y) \in R$. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}(x,y) \in R^{-1}oR &\Rightarrow \exists z\,(x,z) \in R \wedge (z,y) \in R^{-1}\\ &\Rightarrow (z,x) \in R^{-1} \wedge (y,z) \in R\\ &\Rightarrow (y,x) \in R.\end{aligned}$$

خاصیت متعدی بودن، از قسمت‌های (ج) و (د) بدست می‌آید.

6,1,5 تعریف. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. در این‌صورت $\beta \subseteq P(X)$ را یک افراز X می‌نامیم، هرگاه

الف) $\forall B \in \beta;\ B \neq \phi$؛

ب) $\forall B, C \in \beta,\ B \neq C \Rightarrow B \bigcap C = \phi$؛

ج) $\bigcup_{D \in \beta} D = X$.

7,1,5 مثال. فرض کنید $X = \{1, 2, ..., 10\}$ در این‌صورت

(i) $\beta_1 = \{\{1,3,5,...,9\}, \{2,4,...,10\}\}$ یک افراز X است.

(ii) قرار دهید $B_k = \{k\}$. بنابراین $\beta_2 = \{B_k \mid 1 \leq k \leq 10\}$ یک افراز X است.

(iii) $\beta_3 = \{X\}$ یک افراز X است.

(iv) $\beta_4 = \{\{1,3,5\}, \{6,7,8,9\}, \{2,4,10\}\}$ یک افراز سه عضوی X است.

(v) $\beta_5 = \{\varphi,\ \{1,2,...,7\}, \{8,9,10\}\}$ یک افراز X نیست.

(vi) $\beta_6 = \{\{1,2,...8\}, \{7,8,9,10\}\}$ افراز X نیست.

(vii) $\beta_7 = \{\{1,2,3\}, \{4,5,6\}, \{7,\ 8,\ 10\}\}$ افراز X نیست.

5. 1. 8 مثال‌ها:

(1) قرار دهید $A_i = [i, i+1)$ در این‌صورت $A = \{A_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ یک افراز $\mathbb{R}$ است.

(2) قرار دهید $A_n = (\frac{-1}{n},\ 1 - \frac{1}{n})$ در این‌صورت $A = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ یک افراز (1 ,1-) نیست ولی یک پوشش باز آن است.

5 . 2 رده‌های هم‌ارزی و قضیه اساسی توابع

5. 2. 1 تعریف. فرض کنید R یک رابطه هم‌ارزی روی X باشد و $a \in X$. در این‌صورت **رده** هم‌ارزی a که با نماد $[a]$ نشان می‌دهیم، را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[a] = \{x \in X | (x,a) \in R\}.$$

مجموعه‌ی همه رده‌های هم‌ارزی R روی X را **خارج قسمت** X بر R می‌نامیم و با $\frac{X}{R}$ نشان می‌دهیم.

مجموعه‌ی همه رده‌های هم‌ارزی همنهشتیبه پیمانه n روی $\mathbb{Z}$ را با Z_n نشان می‌دهبم و داریم:

$$Z_n = \{[\circ],[1],\cdots,[n-1]\}$$

واضح است که $a \in [a] \subseteq X$ و $\frac{X}{R} = \{ [a] | a \in X \}$.

2,2,5 **مثال.** رابطه همنهشتی به هنگ 5 را در نظر بگیرید. مطلوبست محاسبه:

$$[1],\ [3],\ [1] \cap [3],\ [1] \cup [11],\ \bigcup_{k=0}^{4} [k]\ .$$

حل.

$$[1] = \{ x \in \mathbb{Z} \mid (x,1) \in R \} = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x-1 = 5k \} = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x = 5k+1 \} = \{\dots,-9,\ -4,\ 1,\ 6,\dots\}\ .$$

بطور مشابه $[3] = \{x \in \mathbb{Z} | x = 5k+3\}$ و داریم:

$$[11] = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x = 5k+11 \} = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x = 5k'+1 \} = [1],$$

$$[1] \cap [3] = \phi,\ [1] \cup [11] = [1],\ \bigcup_{k=0}^{4} [k] = \mathbb{Z}.$$

5. 2. 3 **قضیه**. فرض کنید R یک رابطه هم‌ارزی روی X باشد و $a,b \in X$. در این‌صورت

(الف) $[a] \neq \phi$؛

(ب) $[a] = [b]$ اگر و فقط اگر $(a,b) \in R$؛

(ج) $[a]=[b]$ یا $[a]\cap[b]=\phi$ (یعنی هر دو رده هم‌ارزی برابرند یا مجزا).

برهان. (الف) چون R یک رابطه هم‌ارزی روی X است و $a\in X$ پس $(a,a)\in R$ یعنی $a\in[a]$.

(ب) فرض کنید $[a]=[b]$. چون $b\in[b]=[a]$ پس $(a,b)\in R$. **بعکس.** فرض کنید $(a,b)\in R$ نشان می‌دهیم $[a]\subseteq[b]$. اگر $x\in[a]$ پس $(x,a)\in R$. چون $(a,b)\in R$ و R دارای خاصیت تعدی است، $(x,b)\in R$ یعنی $x\in[b]$. بطور مشابه $[b]\subseteq[a]$ و حکم ثابت می‌شود.

برای اثبات (ج) فرض کنید $x\in[a]\cap[b]$ پس داریم:

$$(x\in[a])\wedge(x\in[b])\Rightarrow((a,x)\in R)\wedge((x,b)\in R)\Rightarrow(a,b)\in R$$

و بنا به قسمت دوم $[a]=[b]$.

4,2,5 نتیجه. فرض کنید R یک رابطه هم‌ارزی روی $X\neq\phi$ باشد دراین‌صورت مجموعه‌ی رده‌های هم‌ارزی R (یعنی $\frac{X}{R}$) یک افراز X است.

برهان. بنا به قضیه 3,2,5 کافی است، نشان دهیم $X=\bigcup_{a\in X}[a]$. چون $[a]\subseteq X$، $\bigcup_{a\in X}[a]\subseteq X$.

فرض کنید $x_\circ\in X$ بنابراین $x_\circ\in[x_\circ]\subseteq\bigcup_{a\in X}[a]$ و حکم ثابت می‌شود.

مثلاً رابطه همنهشتی به هنگ 7 را در نظر بگیرید. می‌دانیم که $[0],[1],\ldots,[6]$ رده‌های هم‌ارزی متمایز هستند. فرض کنید $m\in\mathbb{Z}$ پس $m=7k+r,\ r=0,1,\ldots,6$. یعنی $[m]=[r]$. بنابراین $\mathbb{Z}=\bigcup_{r=0}^{6}[k]$ و $\{[0],[1],\ldots,[6]\}$ افراز متناظر این رابطه روی $\mathbb{Z}$ است.

مثال. یک افراز n عضوی برای $\mathbb{Z}$ بدست آورید.

راه حل. طبق اطلاعات بالا رابطه همنهشتی به پیمانه n را در نظرمی‌گیریم پس رده های همنهشتی به پیمانه

n یعنی $Z_n=\{[\circ],[1],\cdots,[n-1]\}$ یک افراز nعضوی مجموعه $\mathbb{Z}$ است.

بنا به نتیجه قبل هر رابطه هم‌ارزی روی X یک افراز روی X القا می‌کند و قضیه زیر نشان می‌دهد که عکس آن نیز برقرار است.

5. 2. 5 قضیه. هر افراز مجموعه X یک رابطه هم‌ارزی روی X مشخص می‌کند.

برهان. فرض کنید β یک افراز X باشد. رابطه R روی X را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\forall x,y\in X;\quad (x,y)\in R \Leftrightarrow \exists A\in\beta\ s.t.\ x,y\in A.$$

کافی است، نشان دهیم که R رابطه هم‌ارزی روی X است.

(الف) **خاصیت انعکاسی.** چون $X=\bigcup_{B\in\beta} B$ پس به ازای هر $x_\circ\in X$ وجود دارد $A\in\beta$ بقسمی که $x_\circ\in A$ بنابراین $x_\circ,x_\circ\in A$ یعنی $(x_\circ,x_\circ)\in R$.

(ب) **خاصیت تقارنی.** فرض کنید $(x,y)\in R$ بنابراین

$$\exists A\in\beta\ s.t.\ x,y\in A\Rightarrow y,x\in A\Rightarrow (y,x)\in R.$$

(ج) **خاصیت تعدی.** فرض کنید $(x,y),(y,z)\in R$ در این‌صورت داریم:

$$\exists A_1,A_2\in\beta\ \ s.t.\ \ x,y\in A_1\wedge\ y,z\in A_2.$$

چون $y\in A_1\cap A_2$ پس $A_1=A_2$ در نتیجه $x,z\in A_1$. بنابراین $(x,z)\in R$ و با توجه به موارد بالا، R یک رابطه هم‌ارزی است.

6. 2. 5 مثالها:

(1) قرار می‌دهیم $X=\{1,2,3,4,5\}$. بوضوح $\beta=\{\{1\},\{2,3\},\{4,5\}\}$ یک افراز X است.

رابطه هم‌ارزی متناظر β را مشخص کنید.

حل. بنا به فرآیند اثبات قضیه داریم:

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(2,3),(3,2),(4,5),(5,4)\}.$$

(2) تابع جزء صحیح x یعنی $y=[x]$ را در نظر بگیرید. بنا به مثال 3,1,5 این تابع، رابطه هم‌ارزی S را به‌صورت $(x,y)\in S \Leftrightarrow [x]=[y]$، مشخص می کند. بطور معادل داریم:

$$\exists n\in\mathbb{Z}\ s.t.\ n\le x,y<n+1 \Leftrightarrow (x,y)\in S.$$

پس رده‌های هم‌ارزی متناظر این رابطه هم‌ارزی به‌صورت $A_n=[n,n+1), \forall n\in\mathbb{Z}$ می‌باشند. در نتیجه $\beta=\{A_n \mid n\in\mathbb{Z}\}$ افراز متناظر این رابطه هم‌ارزی روی $\mathbb{R}$ است.

7,2,5 تعریف. فرض کنیم $A\neq\phi$ و $f:A\to B$ تابع باشد. در این‌صورت، رابطه‌ی

$$\{(x,y)\in A\times A \mid f(x)=f(y)\}$$

را **هسته‌ی** f می‌نامیم وآن را با $Kerf$ نشان می‌دهیم.

بنابراین $(x,y)\in Ker\ f \Leftrightarrow f(x)=f(y)$. مشابه مثال 3,1,5 می‌توان نشان داد که $Ker\ f$ رابطه هم‌ارزی روی A است.

8,2,5 تعریف. فرض کنید R یک رابطه هم‌ارزی روی $X\neq\phi$ باشد. در این‌صورت تابع

$\pi: X\to \dfrac{X}{R}$ با ضابطه $\forall x\in X;\ \pi(x)=[x]$، را تابع **متعارفی** می‌نامیم.

بسهولت دیده می‌شود که تابع متعارفی پوشاست. اکنون بااستفاده از مفاهیم بیان شده، به اثبات قضیه اساسی توابع می‌پردازیم.

9,2,5 قضیه. (قضیه اساسی توابع) فرض کنیم $f:A\to B$ یک تابع باشد. در این‌صورت

$h:\frac{A}{Ker\,f}\to f(A)$ با ضابطه $h([x])=f(x)$ تناظر یکبیک است. بعلاوه اگر $\pi : A\to \frac{A}{Ker\,f}$ تابع متعارفی باشد، آنگاه $f=ho\pi$.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که h تابع است. فرض کنید $[a]=[b]$ پس $(a,b)\in \ker f$. یعنی $f(a)=f(b)$ بنابراین $h([a])=h([b])$. اگر $y\in f(A)$ آنگاه $x\in A$ وجود دارد، بقسمی که $y=f(x)$ و در نتیجه $y=h([x])$. یعنی h پوشاست. برای یک‌به‌یک بودن: فرض کنید $h([a])=h([b])$ پس $f(a)=f(b)$. بنابراین $[a]=[b]$ ودر نتیجه h تناظر یک‌به‌یک است.

اگر $\pi : A\to \frac{A}{Ker\,f}$ تابع متعارفی باشد، نمودار زیر را داریم:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & \frac{A}{Kerf} \arrow[d, "h"] \\ & f(A) \end{tikzcd}$$

واضح است که $dom(ho\pi)=A=dom(f)$. فرض کنید $x\in A$. در این‌صورت داریم:

$$(ho\pi)(x)=h(\pi(x))=h([x])=f(x).$$

بنابراین حکم برقرار است.

10,2,5 **تعریف**. گوییم تابع $f:A\to B$ **تحت ترکیب تجزیه** می‌شود، هرگاه توابع $h:A\to C$ و $g:C\to B$ وجود داشته باشند بقسمی که $f=goh$. در واقع نمودار زیر جابجایی باشد.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & B \\ & C \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

11,2,5 **مثال.** تابع $f:A\to B$ را می‌توان به‌صورت‌های زیر تجزیه کرد (یعنی $f=goh$).

الف) $h= f: A\to f(A)$ که $h(x)=f(x)$ و $g:f(A)\to B$ که $g(x)=x$. یعنی نمودار زیر جابجایی است.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & B \\ & f(A) \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

ب) $h=\pi: A\longrightarrow \dfrac{A}{Kerf}$ که $\pi(x)=[x]$ و $g:\dfrac{A}{Kerf}\longrightarrow B$ که $g([x])=f(x)$. یعنی نمودار زیرجابجایی است.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & B \\ & \dfrac{A}{Kerf} \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

12,2,5 تعریف. گوییم که تابع $f:A\to B$ از طریق تابع $g:A\to C$ (تحت ترکیب) تجزیه می‌شود، اگر تابع $\overline{f}:C\to B$ با خاصیت $f=\overline{f}\circ g$ وجود داشته باشد. یعنی نمودار زیرجابجایی باشد.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & B \\ & C \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

مثال قبل نشان می‌دهد که f از طریق تابع f و تابع متعارفی π تجزیه می‌شود.

3.5 رابطه ترتیبی

رابطه S را روی $\mathbb{R}$ به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\forall x,y\in\mathbb{R};\ (x,y)\in S \Leftrightarrow \exists r\geq \circ \ \ s.t.\ \ y=x+r.$$

در این‌صورت

(1) به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم $x=x+\circ$ پس $(x,x)\in S$.

(2) فرض کنید $(x,y),(y,x)\in S$ بنابراین داریم:

$$\exists r_1, r_2 \geq \circ \; s.t. \quad y = x + r_1, x = y + r_2 \Rightarrow y = y + r_1 + r_2 .$$

بنابراین $r_1 + r_2 = \circ$ که $r_1, r_2 \geq \circ$. پس $r_1 = r_2 = \circ$ یعنی $y = x$.

(3) فرض کنید $(x,y),(y,z)\in S$ پس

$$\exists r_1, r_2 \geq \circ \quad s.t. \quad y = x + r_1 \quad , \quad z = y + r_2 \Rightarrow z = x + r_1 + r_2 .$$

چون $r_1, r_2 \geq \circ$ پس $r_1 + r_2 \geq \circ$ در نتیجه $(x,z)\in S$.

رابطه S در $\mathbb{R}$ همان رابطه $\leq$ در $\mathbb{R}$ می‌باشد که بجای $(x,y)\in\leq$ می‌نویسیم $x\leq y$. خواص (1) و (3) بترتیب خواص آشنای انعکاسی و متعدی می‌باشند و خاصیت (2) را خاصیت پادمتقارنی نامیم. در این بخش ما به بررسی رابطه‌هایی که دارای خواص فوق هستند، می‌پردازیم. این رابطه‌ها از رابطه $\leq$ در اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ الگوبرداری شده‌اند.

5 .3 .1 تعریف. رابطه R روی X را در نظر می‌گیریم. در این‌صورت گوییم R **پاد متقارن** است اگر $(x,y),\ (y,x)\in R$ آنگاه $x = y$. همچنین رابطه R روی X را **رابطه ترتیبی** نامیم هرگاه R دارای خواص انعکاسی، پادمتقارنی و متعدی باشد. اگر R روی X یک رابطه ترتیبی باشد، گوییم (X,R) یک مجموعه‌ی مرتب جزیی است.

رابطه زیر مثالی از یک رابطه است که نه متقارن است و نه پادمتقارن.

$$S = \{(1, 2),\ (1, 3), (3, 1)\}.$$

5 .3 .2 مثال. فرض کنید X یک مجموعه باشد. رابطه شمول (که با $\subseteq$ نشان می‌دهیم) را روی $P(X)$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall A,B \in P(X),\ (A,B) \in \subseteq \Leftrightarrow \exists C \in P(X);\quad B = A \cup C.$$

آیا $\subseteq$ یک رابطه ترتیبی است؟

حل. به‌ازای هر $A \in P(X)$ داریم $A = A \cup \phi$. بنابراین $(A,A) \in \subseteq$.

اکنون فرض کنید $(B,A),(A,B) \in \subseteq$ بنابراین

$$\exists C_1, C_2;\ A = B \cup C_1\ , B = A \cup C_2 \Rightarrow B = B \cup (C_1 \cup C_2).$$

در نتیجه $C_1 \subseteq C_1 \cup C_2 \subseteq B$ پس $A = B \cup C_1 = B$. سرانجام نشان می‌دهیم که $\subseteq$ خاصیت تعدی دارد. فرض کنید $(A,B),(B,C) \in \subseteq$ پس

$$\exists D_1, D_2\ ,\ s.t.\ B = A \cup D_1,\quad C = B \cup D_2 \Rightarrow C = A \cup (D_1 \cup D_2).$$

یعنی $(A,C) \in \subseteq$.

معمولاً اگر $(A,B) \in \subseteq$ می‌نویسیم $A \subseteq B$.

3.3.5 مثال. رابطه عاد کردن روی $\mathbb{N}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\forall m,n \in \mathbb{N};\quad m \mid n \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{N}, n = mt.$$

خواص انعکاسی، پادتقارنی و متعدی را بررسی کنید.

حل. ابتدا خاصیت انعکاسی: به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $n = n \times 1$، پس $n \mid n$.

خاصیت پادتقارنی: فرض کنید $n \mid m$ و $m \mid n$ بنابراین

$$\exists t_1, t_2 \in \mathbb{N}\quad s.t.\quad n = mt_1,\ m = nt_2 \Rightarrow m = mt_1t_2$$

پس $t_1t_2 = 1$. در نتیجه $t_1 = t_2 = 1$ و $n = m$. برای خاصیت تعدی، فرض کنید $n \mid m$ و $m \mid k$ پس

$$\exists t_1, t_2 \in \mathbb{N}\quad s.t.\quad m = nt_1,\quad k = mt_2 \Rightarrow k = nt_1t_2\,.$$

بنابراین $n|k$ و حکم برقرار است.

تمرین. رابطه عاد کردن روی $\mathbb{Z}$ را در نظر بگیرید. آیا رابطه فوق رابطه ترتیبی است؟.

راهنمایی. خواص انعکاسی و تعدی مشابه مثال قبل برقرار است ولی خاصیت پادتقارنی برقرارنیست.

4,3,5 نمادگذاری. بعد از این یک رابطه ترتیبی (بجز احتمالاً در موارد خاص) را با نماد $\preceq$ نمایش می‌دهیم و اگر $\preceq$ یک رابطه ترتیبی روی X باشد، $(X,\preceq)$ را یک مجموعه‌ی مرتب (جزیی) می‌نامیم.

5 .3 .5 تعریف. فرض کنید $(X,\preceq)$ یک مجموعه مرتب جزیی باشد. در این‌صورت گوییم a و b قابل مقایسه‌اند هرگاه $a\preceq b$ یا $b\preceq a$. در غیر این‌صورت a و b را غیرقابل مقایسه می‌نامیم. همچنین گوییم b عضو a را می‌پوشاند. هرگاه شرایط زیر برقرار باشند.

(الف) $a\preceq b$ و

(ب) اگر $c\in X$ و $a\preceq c\preceq b$ آنگاه $c=a$ یا $c=b$.

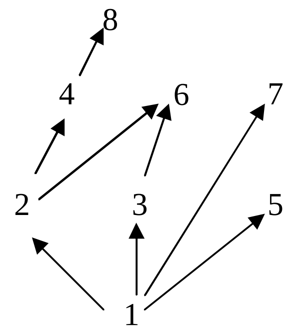
برای رسم نمودار یک رابطه ترتیبی، نماد «$\uparrow$» (فلش رو به بالا) را برای پوشانیدن استفاده می‌کنیم.

یعنی اگر b عضو a را بپوشاند، می‌نویسیم $\overset{b}{\underset{a}{\nearrow}}$. بطور کلی اگر X متناهی باشد، نمودار $(X,\preceq)$ قابل رسم می‌باشد.

6 .3 .5 مثال. فرض کنید $X=\{1,2\}$ پس $P(X)=\{\phi,\{1\},\{2\},X\}$. می‌دانیم که $(P(X),\subseteq)$ یک مجموعه مرتب است که $\{1\}$ و $\{2\}$ قابل مقایسه نیستند ولی $\{2\}$ و $\{1,2\}$ قابل مقایسه هستند. همچنین عناصر $\{1\},\{2\}$ عضو تهی را می‌پوشانند. نمودار $(P(X),\subseteq)$ بصورت زیر است.

$$\begin{tikzcd}
 & \{1,2\} & \\
\{1\} \arrow[ur] & & \{2\} \arrow[ul] \\
 & \phi \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

5. 3. 7 مثال. فرض کنید $X=\{1,2,3,...,8\}$ و مجموعه مرتب $(X,|)$ را در نظر می‌گیریم. نمودار آن به‌صورت زیر است:

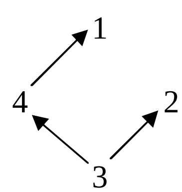


در این‌صورت عضو 6 عضوهای 3 و 2 را می‌پوشاند ولی عضو 1 را نمی‌پوشاند. واضح است که $1|6$ یعنی 1 و 6 قابل مقایسه هستند. ولی 4 و 6 قابل مقایسه نیستند.

توجه شود که نمودار $(\mathbb{Q},\leq)$ قابل رسم نیست. زیرا مثلا عضو بلافاصله بعد از 1 (عضوی که 1 را می-پوشاند) قابل تشخبص نیست (بین هر دو عدد گویا بینهایت عدد گویا است).

مثال زیر نشان می‌دهد که برای بعضی از نمودارها نیز می‌توان رابطه ترتیبی مشخص نمود. البته در این‌حالت فرض می‌کنیم که خاصیت انعکاسی برقرار است.

5. 3. 8 مثال. رابطه ترتیبی متناظر نمودار زیر را مشخص کنید.



حل. رابطه ترتیبی فوق به‌صورت زیر است.

$$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(3,2),(3,4),(4,1),(3,1)\}.$$

در واقع داریم $2\preceq 3$ و $1\preceq 4\preceq 3$.

در مثال5. 3. 6 واضح است که به ازای هر $A\in P(X)$ داریم $\phi\subseteq A\subseteq X$ یعنی $\phi\preceq A\preceq X$. همچنین در مثال5. 3. 7 به ازای هر $k\in X$ داریم $1|k$ یعنی $1\preceq k$. آیا عضوی مانند m در X وجود دارد که به ازای هر $k\in X$ داشته باشیم $k|m$ ؟

5. 3. 9 تعریف. فرض کنید $(X,\preceq)$ یک مجموعه مرتب باشد. در این‌صورت

(الف) $a \in X$ را عضو **ماکزیمم** $(X,\preceq)$ می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $x \preceq a$.

می‌نویسیم $a = \max(X)$.

(ب) $b \in X$ را عضو **مینیمم** $(X,\preceq)$ می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $b \preceq x$.

می‌نویسیم $b = \min(X)$.

5. 3. 10 مثال‌ها:

(1) مجموعه مرتب $(\mathbb{N},|)$ را در نظر بگیرید. واضح است که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $1|n$

بنابراین $\min(\mathbb{N}) = 1$ ولی ماکزیمم ندارد.

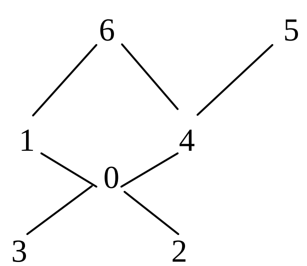
(2) قرار می‌دهیم $X = [1,3]$ در این‌صورت در $(X,\leq)$ داریم:

$$\max(X) = 3, \quad \min(X) = 1.$$

(3) مجموعه $(\mathbb{N},\geq)$ دارای ماکزیمم 1 می‌باشد ولی مینیمم ندارد (رابطه «$\geq$» معکوس رابطه «$\leq$»

می‌باشد).

(4) نمودار زیر را در نظر بگیرید.



مجموعه مرتب متناظر نمودار فوق، ماکزیمم و مینیمم

ندارد.

5. 3. 11 قضیه. فرض کنید $(X,\preceq)$ یک مجموعه مرتب باشد. در این‌صورت ماکزیمم و مینیمم در

صورت وجود منحصربفردند.

برهان. فرض کنید a و b ماکزیمم $(X,\preceq)$ باشند. چون $a=\max(X)$ و $b\in X$ پس $b\preceq a$. بطور مشابه $a\preceq b$ و بنا به خاصیت پادتقارنی $a=b$. به روش مشابه می‌توان نشان داد که مینیمم نیز منحصربفرد است.

5. 3. 12 تعریف. فرض کنید $(X,\preceq)$ یک مجموعه مرتب باشد. در این‌صورت

(الف) $a\in X$ را عضو **ماکزیمال** $(X,\preceq)$ می‌نامیم، هرگاه به‌ازای هر $x\in X$ که با a قابل مقایسه باشد $x\preceq a$. به‌عبارت دیگر به‌ازای هر $x\in X$، $a\preceq x\Rightarrow x=a$.

می‌نویسیم $\max mal(X)=a$.

(ب) $b\in X$ را عضو **مینیمال** $(X,\preceq)$ می‌نامیم، هرگاه به‌ازای هر $x\in X$ که با b قابل مقایسه باشد $b\preceq x$. به‌عبارت دیگر به‌ازای هر $x\in X$، $x\preceq b\Rightarrow x=b$.

می‌نویسیم $\min mal(X)=b$. واضح است که عضو منیمال(ماکزیمال) لزوما با همه عناصر X قابل مقایسه نیست.

5. 3. 13 مثال‌ها:

(1) در مثال5. 3. 7 عناصر ماکزیمال عبارتند از **5**، 6، 7، 8 و عضو مینیمال فقط 1 می‌باشد.

(2) در مثال5. 3. 10 (4) عناصر ماکزیمال عبارتند از 6 , **5** و عناصر مینیمال 2 و 3 هستند.

(3) در مثال5. 3. 6 عنصر ماکزیمال (در واقع ماکزیمم) X و عنصر مینیمال (در واقع مینیمم) ϕ می‌باشد.

(4) مجموعه مرتب جزیی $(\mathbb{Z},\leq)$ دارای عنصر ماکزیمال و مینیمال نیست.

5. 3. 14. نکته. (1) عضو ماکزیمال (مینیمال) ممکن است، منحصربفرد نباشد.

(2) اگرعضو ماکزیمال (مینیمال) با هر عضو X قابل مقایسه باشد، همان ماکزیمم (مینیمم) است.

5. 3. 15 تعریف. فرض کنید $(X,\preceq)$ یک مجموعه مرتب باشد و $A\subseteq X$. در این‌صورت

(الف) $x_1\in X$ را یک **کران بالای** A نامیم، هرگاه به ازای هر $a\in A$ داشته باشیم $a\preceq x_1$.

(ب) $x_2\in X$ را یک **کران پایین** A می‌نامیم، هرگاه به‌ازای هر $a\in A$ داشته باشیم $x_2\preceq a$.

(ج) کوچکترین کران بالای A (درصورت وجود) را **سوپریمم** A می‌نامیم و با نماد $\sup(A)$ نشان می‌دهیم.

(د) بزرگترین کران پایین A (درصورت وجود) را **انفیمم** A می‌نامیم و با $\inf(A)$ نشان می‌دهیم.

5. 3. 16 مثال‌ها.

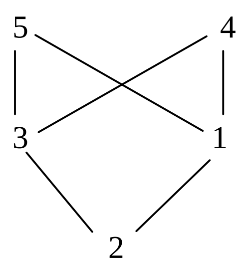
(1) مجموعه مرتب $(\mathbb{R},\le)$ را در نظر بگیرید. قرار دهید $A=(2,5)$ در این‌صورت مجموعه کران‌های بالا و پایین A بترتیب عبارتند از $(-\infty,2],[5,\infty)$. بنابراین $\sup(A)=5$, $\inf(A)=2$.

اگر $B=[-1,2)$ آنگاه داریم:

مجموعه کران‌های بالای $B = \{x\in\mathbb{R};\ x\ge 2\},\ \sup(B)=2$;

مجموعه کران‌های پایین $B = \{x\in\mathbb{R};\ x\le -1\},\ \inf(B)=-1$.

(2) نمودار زیر را در نظر بگیرید:



قرار دهید $A=\{1,3,5\}$ و $B=\{1,3\}$ در این‌صورت

5 = کران بالای A، $\sup(A)=5$

2 = کران پایین A و $\inf(A)=2$ و همچنین برای B داریم؛ 4 و 5 = کران‌های بالای B، $\sup(B)$ وجود ندارد، 2 = کران پایین B و $\inf(B)=2$.

5. 3. 17 قضیه. فرض کنید $(X,\preceq)$ یک مجموعه مرتب $A\subseteq X$ در این‌صورت

(الف) $\inf(A)$ و $\sup(A)$ در صورت وجود منحصربفردند.

(ب) اگر $A\ne\phi$ آنگاه $\inf(A)\preceq\sup(A)$.

برهان. (الف) فرض کنید a,b سوپریمم‌های A باشند. چون $b=\sup(A)$ و همچنین a یک کران بالای A است، پس $b\preceq a$. به دلیل مشابه $a\preceq b$ بنابراین $a=b$. منحصربفرد بودن $\inf(A)$ به روش مشابه اثبات می‌شود.

برای اثبات (ب) چون $A \neq \phi$، فرض کنید $x_1 \in A$. بنا به تعریف $\sup(A)$ و $\inf(A)$، داریم که $\inf(A) \preceq x_1 \preceq \sup(A)$ و حکم برقرار است.

حال به بیان اصول خوش ترتیبی و کمال می‌پردازیم که شرایط وجود منیمم در $\mathbb{Z}$ و وجود انفیمم در $\mathbb{R}$ (بترتیب) را بیان می‌کنند. البته با تبدیل رابطه $\leq$ به $\geq$ میتوان، شرایط وجود ماکزیمم در $\mathbb{Z}$ وسوپریمم در $\mathbb{R}$ را بیان نمود.

اصل خوش ترتیبی: هر زیر مجموعه‌ی ناتهی واز پایین کراندار $\mathbb{Z}$، دارای عضو منیمم است.

اصل کمال: هر زیر مجموعه‌ی ناتهی واز پایین کراندار $\mathbb{R}$، دارای عضو انفیمم در $\mathbb{R}$ است.

توجه شود که $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \geq 3\}$ در $\mathbb{Q}$ انفیمم ندارد. یعنی اینکه اصل کمال در $\mathbb{Q}$ برقرارنیست.

18,3,5 نکته‌ها:

(الف) هرکران بالای A، با هر عضو A قابل مقایسه و از هر عضو A بزرگتر است و $\sup(A)$ نیز یک کران بالای A است.

(ب) اگر $\sup(A) \in A$ آنگاه $\max(A) = \max mal(A) = \sup(A)$.

(ج) اگر $\max(A)$ وجود داشته باشد، آنگاه $\max mal(A) = \sup(A) = \max(A)$.

5. 3. 19 تعریف. مجموعه مرتب $(X, \preceq)$ را یک **شبکه (یا مشبکه)** می‌نامیم، هرگاه به‌ازای هر $a,b \in X$؛ $\inf\left(\{a,b\}\right)$ و $\sup\left(\{a,b\}\right)$ موجود باشند.

5. 3. 20. مثال‌ها.

(1) مجموعه مرتب $(\mathbb{R}, \leq)$ یک شبکه است. زیرا برای هر $a,b \in X$ داریم $a \leq b$ یا $b \leq a$. بنابراین $\inf\left(\{a,b\}\right) = \min\{a,b\}$ و $\sup\left(\{a,b\}\right) = \max\{a,b\}$ وجود دارند.

(2) نشان دهید که $(P(X), \subseteq)$ یک شبکه است.

راه‌حل. فرض کنید $A,B\in P(X)$ داریم $A,B\subseteq A\cup B\in P(X)$ پس $A\cup B$ یک کران بالای $\{A,B\}$ می‌باشد. فرض کنید C یک کران بالای $\{A,B\}$ باشد. بنابراین $A,B\subseteq C$ و در نتیجه $A\cup B\subseteq C$ یعنی $\sup(\{A,B\})=A\cup B$. بطورمشابه، ثابت کنید $\inf(\{A,B\})=A\cap B$.

(3) نشان دهید که $(\mathbb{N},|)$ یک شبکه است.

حل. فرض کنید $m,n\in\mathbb{N}$ و $d=(m,n)$. بنابراین $d\,|\,m,n$ یعنی d یک کران پایین $\{m,n\}$ است. فرض کنید k یک کران پایین $\{m,n\}$باشد. بنابراین $k\,|\,m,n$ و درنتیجه $k\,|\,d=(m,n)$ پس $\inf(\{m,n\})=(m,n)$. بطور مشابه ثابت کنید $\sup(\{m,n\})=[m,n]$.

5. 3. 21 تعریف. مجموعه مرتب $(X,\preceq)$ را مجموعه **مرتب کلی** (زنجیر) می‌نامیم، هرگاه به‌ازای هر $x,y\in X$ داشته باشیم $x\preceq y$ یا $y\preceq x$.

22,3,5 مثال‌ها:

(1) $(\mathbb{N},\leq)$، $(\mathbb{Q},\geq)$ و $(\mathbb{R},\leq)$ مجموعه مرتب کلی هستند.

(2) $(P(X),\subseteq)$ که $|X|\geq 2$ و $(\mathbb{N},|)$ مجموعه مرتب کلی نیستند.

تمرینات

1) رابطه R در $\mathbb{N}$ را بصورت $(m,n)\in R\Leftrightarrow 7\,|\,m^2-n^2$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید که R یک رابطه هم ارزی است و رده های هم ارزی متمایز آنرا بدست آورید.

2) فرض کنید X متشکل از همه توابع $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ باشد رابطه R روی X را به‌صورت $(f,g)\in R\Leftrightarrow f(\frac{1}{2})=g(\frac{1}{2})$ تعریف می‌کنیم. آیا R رابطه هم ارزی است؟

3) گزاره " هر رابطه R روی X که دارای خواص تقارنی وتعدی باشد، انعکاسی است" را درنظر بگیرید.

درستی یا نادرستی برهان زیر را مشخص کنید:

برهان. چون R متقارن است، به ازای هر $(x,y)\in R$ داریم $(y,x)\in R$ و بدلیل متعدی بودن R از $(x,y),(y,x)\in R$ نتیجه میشود $(x,x)\in R$. یعنی R انعکاسی است.

4) رابطه R را در $\mathbb{R}$ چنین تعریف می‌کنیم.

$$((a,b),(c,d))\in R \Leftrightarrow a(c^2+d^2+3)=c(a^2+b^2+3)$$

ثابت کنید R یک رابطه هم ارزی است و رده های هم ارزی $(0,b)$ و $(1,2)$ را بدست آورید.

5) فرض کنید $\mathrm{M}=\{$ماتریسهای 2×2 با درایه های حقیقی$\}$ در این‌صورت رابطه R را روی M بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$(A,B)\in R \Leftrightarrow B=P^{-1}AP$ که ماتریس معکوسپذیر P موجود باشد

نشان دهید که R یک رابطه هم ارزی است.

6) فرض کنید R یک رابطه روی A باشد. ثابت کنید

الف) $R\cap R^{-1}$ بزرگترین رابطه متقارن مشمول R است.

ب) $R\cup R^{-1}$ کوچکترین رابطه متقارن شامل R است.

ج) $R\cup I$ کوچکترین رابطه انعکاسی شامل R است.

7) ماتریس روابط R و S بصورت زیر است. خواص انعکاسی و تقارنی این روابط را بررسی کنید.

$$M_R=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix};\quad M_S=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

8) فرض کنید A یک مجموعه n عضوی باشد.

الف) چند رابطه انعکاسی روی A وجود دارد؟

ب) چند رابطه متقارن روی A وجود دارد؟

ج) چند رابطه انعکاسی و متقارن روی A وجود دارد؟

د) چند رابطه انعکاسی و پاد متقارن روی A وجود دارد؟

9) تابع $f: X \to Y$ مفروض است. ثابت کنید که مجموعه زیر، افرازی از X است.

$.S = \left\{ f^{-1}(\{y\}) \middle| f^{-1}(y) \neq \phi \text{ و } y \in Y \right\}$

10) ضابطه $*: \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \longrightarrow \mathbb{Z}_3$ که بصورت زیر تعریف می شود، را در نظربگیرید:

$$[a]*[b]=[a^b]$$

مطلوب است محاسبه $[2]*[2]$ و $[5]*[2]$. آیا * عمل دوتایی است؟

11) هسته توابع $f(x)=|x|$ (تابع قدر مطلق) و $g(x)=[x]$ (تابع جزء صحیح x) را بدست آورید.

12) مجموعه‌های X و Y مفروضند

(الف) نشان دهید که تابع $f: X \to Y$ یکبیک است اگر وفقط اگر $.Ker\ f = \{ (x,x) | x \in X \}$

(ب) هر رابطه‌ی هم‌ارزی R روی X، هسته‌ی یک تابع روی X است

13) به دو روش تابع $f: A \longrightarrow B$ را به صورت $f = goh$ تجزیه کنید به طوری که h پوشا و g یک به یک باشد.

14) (تعمیم قضیه‌ی اساسی توابع) گزاره‌های زیر را ثابت کنید:

(الف) تابع f از طریق g تجزیه می‌شود اگر و تنها اگر $.Ker\ g \subseteq Ker\ f$

(ب) تابع $\bar{f}$، در صورت وجود، منحصر به فرد است.

(ج) تابع $\bar{f}$ یک به یک است اگر و تنها اگر $.Ker\ g = Ker\ f$

(د) تابع $\bar{f}$ پوشا است اگر و تنها اگر f پوشا باشد.

(ه) قضیه‌ی اساسی توابع حالت خاص این قضیه است.

15) نشان دهید، اگر رابطه R روی X رابطه هم‌ارزی و رابطه ترتیبی باشد آنگاه

$R = I = \{ (x,x) \mid x \in X \}$.

16) هرگاه (X,R) یک مجموعه مرتب جزیی باشد و $B \subseteq X$، آنگاه

$R_B = \{(x,y) \mid x, y \in B, (x,y) \in R\}$

یک رابطه ترتیبی در B است.

17) قرار دهید $X = \{1,2,3\}$ و $Y = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$. ابتدا نمودارهای $(P(X), \subseteq)$ و $(Y, |)$ را رسم کنید و سپس ماکزیمم و منیمم آنها را بدست آورید. آیا رابطه‌های فوق ترتیبی خطی(زنجیر) هستند؟

18) اگر A بازه‌ایی ناتهی از اعداد حقیقی باشد و $B = \{ |x| ; x \in A \}$، آنگاه $\sup(B)$ و $\inf(B)$ را بر حسب $\sup(A)$ و $\inf(A)$ بدست آورید.

19) فرض کنید X مجموعه‌ی متناهی باشد. در این‌صورت مجموعه‌ی مرتب جزیی $(X, \preceq)$ دارای عضو ماکزیمال و عضو منیمال است. آیا شرط متناهی بودن قابل حذف است؟

20) فرض کنید $(X, \preceq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزیی باشد. رابطه R روی $X \times X$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in R$ هر گاه $x_1 \preceq x_2$ و اگر $x_1 = x_2$ آنگاه $y_1 \preceq y_2$

نشان دهید که رابطه R یک رابطه ترتیبی است و اگر $(X, \preceq)$دارای عضو ماکزیمم باشد، آنگاه $(X \times X, R)$ دارای عضو ماکزیمم است.

21) فرض کنید $(X, \preceq)$ یک مجموعه مرتب جزیی باشد که R معکوس $\preceq$ است.

(الف) نشان دهید که (X, R) نیز یک مجموعه مرتب جزیی است.

(ب) وجود مفاهیم ماکزیمم، منیمم، کران بالا،... را در (X, R) برحسب وجود این مفاهیم در $(X, \preceq)$ بحث کنید.

22) فرض کنید f تابع حقیقی باشد. قرار می دهیم:

$$f^{-}(x)=\max(-f(x),0), \quad f^{+}(x)=\max(f(x),0)$$

نشان دهید که

(الف) f^{+} و f^{-} نامنفی هستند.

(ب) $f(x)=f^{+}(x)-f^{-}(x)$ و $|f(x)|=f^{+}(x)+f^{-}(x)$.

فصل ششم

رده‌بندی مجموعه‌ها

در این فصل ابتدا یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه‌ها تعریف می‌کنیم سپس با استفاده از رده‌های هم‌ارزی این رابطه، مجموعه‌ها را رده‌بندی نموده و سرانجام به بررسی خاصیت شمارش‌پذیری در مجموعه‌ها می‌پردازیم.

6 . 1 همعددی مجموعه‌ها

فرض کنید F دسته‌ای از مجموعه‌ها باشد. رابطه R روی F را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$(A,B)\in R \Leftrightarrow$ تناظر یک‌به‌یکی مانند $f:A\to B$ موجود باشد.

6. 1. 1 قضیه. با نمادهای بالا، R یک رابطه هم‌ارزی روی F است.

برهان. ابتدا **خاصیت انعکاسی**، به ازای هر $A\in F$ داریم $i_A : A \xrightarrow[\text{پوشا}]{1-1} A$ پس $(A,A)\in R$.

حال فرض کنید $(A,B)\in R$ بنابراین تابع $f:A\to B$ وجود دارد که f یک‌به‌یک و پوشاست. چون f معکوس‌پذیر است، $f^{-1}: B \xrightarrow[\text{پوشا}]{1-1} A$ یعنی $(B,A)\in R$. یعنی R دارای خاصیت **تقارنی** است. سرانجام، اگر $(A,B),(B,C)\in R$ آنگاه توابع f و g وجود دارند، بقسمی که

$$f : A \xrightarrow[\text{پوشا}]{1-1} B,\ g : B \xrightarrow[\text{پوشا}]{1-1} C$$

اکنون بنا به نتیجه 7,2,4، $gof : A\to C$ معکوس‌پذیر است. پس gof تناظر یک‌به‌یک است و حکم ثابت شد.

با استفاده از قضیه فوق، تعریف زیر را بیان می‌کنیم.

2,1,6 تعریف. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند در این‌صورت گوییم A **همعدد** Bاست. (می‌نویسیم $A \simeq B$) هرگاه تابع یک‌به‌یک و پوشایی مانند $f : A \to B$ موجود باشد.

قضیه بالا نشان می‌دهد که رابطه همعدد بودن در بین مجموعه‌ها، رابطه هم‌ارزی است. یعنی اگر A، B و C سه مجموعه باشند، داریم:

(الف) $A \simeq A$؛

(ب) اگر $A \simeq B$ آنگاه $B \simeq A$؛

(ج) اگر $A \simeq B$ و $B \simeq C$ آنگاه $A \simeq C$.

3 .1 .6. مثال‌ها:

(1) فرض کنید $2\mathbb{Z} = \{2k | k \in \mathbb{Z}\}$ در این‌صورت $\mathbb{Z} \simeq 2\mathbb{Z}$.

حل. تابع $f : \underset{n}{\mathbb{Z}} \underset{\to}{\to} \underset{2n}{2\mathbb{Z}}$ را در نظر می گیریم. کافی است، نشان دهیم که f یکبیک و پوشاست.

برای یک‌به‌یک بودن:

$$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow 2n_1 = 2n_2 \Rightarrow n_1 = n_2.$$

فرض کنید $2t \in 2\mathbb{Z}$ پس $f(t) = 2t$ یعنی f پوشاست.

(2) فرض کنید $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $Y = \{1, 7, 9, 15, 21\}$. نشان دهید که $X \simeq Y$.

حل. تابع $f : X \to Y$ را در نظر بگیرید که

$$f(1) = 1, \ f(2) = 7, \ f(3) = 9, \ f(4) = 15, \ f(5) = 21.$$

واضح است f یک‌به‌یک و پوشاست.

4 .1 .6 مثال. نشان دهید $(0,1) \simeq (2,3)$, $(0, 1) \simeq (0,5)$ و $(0,1) \simeq (2,5)$.

حل. تابع $f:\underset{x}{(0,1)}\underset{\rightarrow}{\rightarrow}\underset{x+2}{(2,3)}$ را در نظر می‌گیریم. کافی است، نشان دهیم که f یک‌به‌یک و پوشاست.

برای یک‌به‌یک بودن

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1+2=x_2+2\Rightarrow x_1=x_2.$$

برای پوشا بودن، فرض کنید $y\in(2,3)$ و $f(x)=y$. پس $x+2=y$ یعنی $x=y-2$. چون $2<y<3$ پس $0<x=y-2<1$ و داریم $f(y-2)=y$.

برای اثبات $(0,1)\simeq(0,5)$، تابع $f:\underset{x}{(0,1)}\underset{\rightarrow}{\rightarrow}\underset{5x}{(0,5)}$ را در نظر می‌گیریم. یک‌به‌یک بودن:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 5x_1=5x_2\Rightarrow x_1=x_2.$$

فرض کنید $y\in(0,5)$ و $f(x)=y$ بنابراین $x=\frac{y}{5}$. به دلیل اینکه $0<y<5$ داریم

$0<x=\frac{y}{5}<1$ و $f(\frac{y}{5})=y$ یعنی f پوشاست.

سرانجام برای اثبات $(0,1)\simeq(2,5)$، تابع $f:\underset{x}{(0,1)}\underset{\rightarrow}{\rightarrow}\underset{3x+2}{(2,5)}$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید $f(x_1)=f(x_2)$ پس $3x_1+2=3x_2+2$ بنابراین $x_1=x_2$. فرض کنید $f(x)=y$ بنابراین

$$3x+2=y\Rightarrow x=\frac{y-2}{3}$$

چون $0<x=\frac{y-2}{3}<1$ و $f(x)=y$ پس f پوشاست.

6. 1. 5 قضیه. فرض کنید $a,b\in R$ که $a<b$. در این‌صورت $(0,1)\simeq(a,b)$.

برهان. بعنوان تمرین نشان دهید که $f:\underset{x}{(0,1)}\underset{\rightarrow}{\rightarrow}\underset{(b-a)x+a}{(a,b)}$ تابع یک‌به‌یک و پوشاست.

6. 1. 6 نتیجه. (الف) هر دو بازه باز همعددند.

(ب) هر بازه باز همعدد $\mathbb{R}$ می‌باشد.

برهان. (الف) فرض کنید $(c,d),(a,b)$ دو بازه باز باشند. بنا به قضیه 5,1,6 داریم $(0,1)\simeq(a,b)$ و $(c,d)\simeq(0,1)$. بنابراین $(c,d)\simeq(a,b)$ و حکم برقرار است.

(ب) تابع $tg:\underset{x}{(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\underset{\to}{\to}\underset{tgx}{\mathbb{R}}$ **را در نظر می‌گیریم. چون این تابع** معکوسپذیر **است** (معکوس **آن** $Arctg$ **می‌باشد**)، تابع tg یک‌به‌یک و پوشا است یعنی $(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})\simeq\mathbb{R}$ حکم از قسمت اول بدست می‌آید.

6. 1. 7 قضیه. فرض کنید A D , C , B , مجموعه‌هایی باشند که $A\simeq C$, $B\simeq D$ در این‌صورت

(الف) $A\times B\simeq B\times A$

(ب) $A\times B\simeq C\times D$

برهان. (الف) تابع $h:\underset{(a,b)}{A\times B}\underset{\to}{\to}\underset{(b,a)}{B\times A}$ را در نظر می‌گیریم. کافی است، نشان دهیم که f یک‌به‌یک و پوشاست. برای یک‌به‌یک بودن:

$$h(a_1,b_1)=h(a_2,b_2)\Rightarrow(b_1,a_1)=(b_2,a_2)\Rightarrow b_1=b_2\ ,\ a_1=a_2\Rightarrow(a_1,b_1)=(a_2,b_2).$$

برای پوشا بودن

$$\forall(b,a)\in B\times A\Rightarrow h(a,b)=(b,a).$$

برای اثبات (ب)، فرض کنید $f:A\to C$ و $g:B\to D$ توابع یک‌به‌یک و پوشا باشند. ضابطه $h:\underset{(a,b)}{A\times B}\underset{\to}{\to}\underset{(f(a),g(b))}{C\times D}$ یک تابع است (بعنوان تمرین نشان دهید). کافی است نشان دهیم که h تناظر یک‌به‌یک است. ابتدا یک‌به‌یک بودن:

$$h(a_1\ ,b_1)=h(a_2,b_2)\Rightarrow(f(a_1),g(b_1))=(f(a_2),g(b_2)).$$

بنابراین $f(a_1)=f(a_2)$ و $g(b_1)=g(b_2)$. چون g و f یک‌به‌یک هستند پس $b_1=b_2$ و $a_1=a_2$. در نتیجه $(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$.

برای پوشا بودن، فرض کنید $(y_1,y_2)\in C\times D$ بنابراین

$$\exists x_1\in A,\ \exists x_2\in B\ \ s.t.\ \ f(x_1)=y_1\wedge g(x_2)=y_2.$$

در نتیجه $h(x_1,x_2)=(y_1,y_2)$ و حکم برقرار است.

8.1.6 قضیه. فرض کنید $f:A\to C$ و $g:B\to D$ توابع یک‌به‌یک و پوشا باشند و $A\cap B=D\cap C=\phi$، آنگاه $f\cup g:A\cup B\to C\cup D$ نیز یک‌به‌یک و پوشا است.

برهان. ضابطه $h=f\cup g$ بصورت زیر است:

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & x\in A\\ g(x) & x\in B.\end{cases}$$

کافی است، ثابت کنیم h یک‌به‌یک و پوشا است. برای یک‌به‌یک بودن، فرض کنید $h(x_1)=h(x_2)$ حالت‌های زیر را داریم:

(الف) اگر $x_1,\ x_2\in A$ آنگاه $f(x_1)=f(x_2)$. پس $x_1=x_2$.

(ب) اگر $x_1,x_2\in B$ آنگاه $g(x_1)=g(x_2)$. بنابراین $x_1=x_2$.

(ج) اگر $x_1\in A$ و$x_2\in B$ آنگاه $f(x_1)=g(x_2)$. چون $f(x_1)\in C$ و $g(x_2)\in D$ و $f(x_1)=g(x_2)$ پس داریم $d=f(x_1)=g(x_2)\in D\cap C$، که تناقض است.

(د) اگر $x_1\in B$ و $x_2\in A$ مشابه حالت (ج) تناقض است.

برای پوشا بودن، فرض کنید $y\in C\cup D$ در این‌صورت:

(i) اگر $y\in C$ به دلیل پوشا بودن f ، داریم:

$\exists x_1 \in A \;\; s.t. \;\; y = f(x_1) = h(x_1)$.

(ii) اگر $y \in D$ به دلیل پوشا بودن g، داریم:

$\exists x_2 \in B \;\; s.t. \;\; y = g(x_2) = h(x_2)$

و قضیه ثابت شد.

با استفاده از قضیه قبل داریم:

9,1,6 **نتیجه.** اگر $A \simeq C$ و $B \simeq D$ بطوریکه $A \cap B = D \cap C = \phi$، آنگاه $A \cup B \simeq C \cup D$.

مثلا $\{4,\ 9\} \simeq \{1,\ 3\}$ و $(1,3) \simeq (4,9)$ بنابراین $[1,3] = (1,3) \cup \{1,3\} \simeq (4,9) \cup \{4,9\} = [4,9]$.

2,6 مجموعه‌های متناهی

قرار می‌دهیم $\bar{o} = \phi$ و به ازای $n \in \mathbb{N}$، $\bar{n} = \{1, 2 \ldots, n\}$. با استفاده از این نمادها، تعریف مجموعه‌های متناهی را می‌آوریم.

6. 2. 1 تعریف. مجموعه A را **متناهی** می‌نامیم، هرگاه $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ وجود داشته باشد بقسمی‌که $A \simeq \bar{n}$. در غیر این‌صورت A را **نامتناهی** گوییم. اگر $A \simeq \bar{n}$ گوییم $|A| = n$.

مثلاً $\bar{n}$ متناهی و با مرتبه n است و اگر $A = \{5, 7, 8, 9, 11\}$، آنگاه $|A| = 5$. زیرا $A \simeq \bar{5}$.

6. 2. 2 **قضیه**. فرض کنید $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. در این‌صورت $\bar{m} \simeq \bar{n}$ اگر و فقط اگر $m = n$.

برهان. اگر $m = n$ آنگاه $\bar{m} = \bar{n}$. در نتیجه $\bar{m} \simeq \bar{n}$.

بعکس.($\Leftarrow$) به استقرا روی m ، حکم را ثابت می‌کنیم. اگر $m=0$ پس $\overline{m}=\overline{o}=\phi\simeq\overline{n}$ بنابراین $n=0$ یعنی $m=n$. فرض کنید حکم به ازای m برقرار باشد. آنرا برای $m+1$ ثابت می‌کنیم.

فرض کنید $\overline{m+1}\simeq\overline{n}$ بنابراین $\overline{m}\simeq\overline{n-1}$ (بعنوان تمرین نشان دهید) و بنا به فرض استقرا $m=n-1$ در نتیجه $m+1=n$ و حکم برقرار است.

6 .2 .3 **نتیجه**. فرض کنید A و B دو مجموعه متناهی باشند. در این‌صورت $A\simeq B$ اگر و فقط اگر $|A|=|B|$.

برهان. فرض کنید $|A|=m$ و $|B|=n$. اگر $A\simeq B$ پس داریم $\overline{m}\simeq A\simeq B\simeq\overline{n}$. بنابراین $m=n$.

بعکس اگر $|A|=|B|$ در این‌صورت داریم، $A\simeq\overline{m}\simeq\overline{n}\simeq B$.

6 .2 .4 **قضیه**. فرض کنید A و B دو مجموعه متناهی باشند که $A\cap B=\phi$. در این‌صورت

$$|A\cup B|=|A|+|B|.$$

برهان. فرض کنید $|A|=n$ و $|B|=m$ در این‌صورت

$$A\simeq\overline{n}\,,\, B\simeq\{\, n+1, n+2, ..., n+m\,\}.$$

بنابراین داریم $A\cup B\simeq\overline{n+m}$ یعنی $|A\cup B|=n+m$.

6 .2 .5 **قضیه**. فرض کنید A و B مجموعه‌های متناهی باشند. در این‌صورت

(الف) $A\cup B$ متناهی است و $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$؛

(ب) $A\times B$ متناهی است و $|A\times B|=|A|\times|B|$؛

(ج) B^A متناهی است و $|B^A|=|B|^{|A|}$؛

(د) $P(A)$ متناهی است و $|P(A)|=2^{|A|}$.

برهان. بعنوان تمرین واگذار می‌شود.

فرض کنید A یک مجموعه متناهی و $B \subsetneq A$ در این‌صورت داریم:

$$A=(A-B)\cup B \Rightarrow |A|=|A-B|+|B|.$$

چون $|A-B|>0$ پس $|B|<|A|$.

بنابراین با استفاده از قضیه 6. 2. 2 نتیجه مهم زیر را داریم:

6. 2. 6 **نتیجه**. هر مجموعه متناهی با هیچ زیرمجموعه اکید خود همعدد نیست. یعنی اگریک مجموعه با زیرمجموعه‌ی اکید خود همعدد باشد، نامتناهی است.

مثلاً $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{R}$ نامتناهی هستند زیرا $\mathbb{N}\simeq 2\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}\simeq 3\mathbb{Z}$ و $\mathbb{R}\simeq (0,1)$.

مشابه قسمت اول قضیه 5,2,6، می‌توان نشان داد که اگر A، B و C سه مجموعه باشند، داریم:

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|.$$

7. 2. 6 **مثال**. فرض کنید A، B و C بترتیب مجموعه اعداد طبیعی زوج نابیشتر از 100، مجموعه اعداد طبیعی مضرب 3 نابیشتر از 100 و مجموعه اعداد طبیعی مضرب 5 نابیشتر از 100 باشد. می‌خواهیم $|A\cup B\cup C|$ را بدست آوریم.

حل. با استفاده از نتایج مقدماتی در اعداد طبیعی داریم:

$$|A|=\left[\frac{100}{2}\right]=50,\ |B|=\left[\frac{100}{3}\right]=33,\ |C|=20,\ |A\cap B|=\left[\frac{100}{6}\right]=16,$$
$$|A\cap C|=10,\ |B\cap C|=6,\ |A\cap B\cap C|=\left[\frac{100}{30}\right]=3.$$

لهذا، $|A\cup B\cup C|=50+20+33-16-10-6+3=74$.

3.6 مجموعه‌های شمارا و ناشمارا

همان طور که دیدیم مجموعه $\bar{n}$، نمونه اولیه مجموعه‌های متناهی بود. بطور مشابه $\mathbb{N}$ نمونه اولیه مجموعه‌هایی است که آنرا شمارا گوییم.

6. 3. 1 **تعریف**. مجموعه A را **شمارا** می‌نامیم، هرگاه $A \simeq \mathbb{N}$. همچنین A را **شمارش‌پذیر** گوییم، هرگاه A متناهی یا شمارا باشد.

مثلاً $\mathbb{N}$ و $3\mathbb{N}$ شمارا هستند. همچنین $\bar{n}$ ، $\mathbb{N}$ و $2\mathbb{N}$ شمارش‌پذیر هستند.

6. 3. 2 **مثال**. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ شمارا است.

حل. نشان می‌دهیم $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \simeq \mathbb{N}$. عناصر $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{array}{l}
(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),\ldots \\
(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),\ldots \\
(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),\ldots \\
(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),\ldots \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
\end{array}$$

اکنون تابع $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{array}{l}
f(1,1)=1,\ f(1,2)=2,\ f(2,1)=3,\ f(1,3)=4 \\
f(2,2)=5,\ f(3,1)=6,\ldots
\end{array}$$

در واقع عناصر $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ را می‌شماریم. واضح است که f یک‌به‌یک و پوشاست.

6. 3. 3 **قضیه**. هر زیر مجموعه $\mathbb{N}$ شمارش‌پذیر است.

برهان. فرض کنید $A \subseteq \mathbb{N}$. اگر A متناهی باشد، آنگاه حکم برقرار است. فرض کنید A نامتناهی باشد. کافی است، تابع یک‌به‌یک و پوشا مانند $f: \mathbb{N} \to A$ بدست آوریم.

چون $\phi \neq A \subseteq \mathbb{N}$، بنا به اصل خوش ترتیبی $\min(A)$ وجود دارد. قرار می‌دهیم $x_1 = \min(A)$ پس $A - \{x_1\} \neq \phi$ (زیرا A متناهی نیست). بنابراین عضوی مانند $x_2 = \min\,(A - \{x_1\})$ قابل انتخاب است. به استقرا x_n را انتخاب می‌کنیم. فرض کنید $x_k = \min\,(A - \{x_1, ..., x_{k-1}\})$ انتخاب شده باشد. پس $A - \{x_1, ..., x_k\} \neq \phi$ (زیرا $A \neq \{x_1, ..., x_k\}$) بنابراین $x_{k+1} = \min\,(A - \{x_1, ..., x_k\})$ قابل انتخاب است.

ضابطه $f: \underset{n \to x_n}{\mathbb{N} \to A}$ را در نظر می‌گیریم. بدلیل منحصربفرد بودن مینیمم، f تابع است. همچنین $x_n \in A - \{x_1, ..., x_{n-1}\}$ پس f یک‌به‌یک است. برای پوشا بودن، به ازای هر $m \in A$ عدد $k \leq m$ وجود دارد بقسمی که $m = \min\,(A - \{x_1, ..., x_k\})$ و در نتیجه $f(k) = m$.

6 .3 .4 **قضیه**. هر زیر مجموعه یک مجموعه شمارشپذیر، شمارشپذیراست.

برهان. فرض کنید B یک مجموعه شمارشپذیرباشد و $A \subseteq B$. اگر B متناهی باشد (چون A نیز متناهی است) پس A شمارشپذیر است. فرض کنید $B \simeq \mathbb{N}$ یعنی تابعی یک‌به‌یک و پوشا مانند $f: B \to \mathbb{N}$ وجود دارد. پس $f_{|A}: A \to f(A)$ یک‌به‌یک و پوشا است. یعنی $A \simeq f(A) \subseteq \mathbb{N}$. بنا به قضیه 3,3,6 مجموعه $f(A)$ شمارش‌پذیر است و $A \simeq f(A)$ بنابراین A شمارش‌پذیر است.

6 .3 .5 **نتیجه**. فرض کنید $f: A \to B$ یک تابع باشد. دراین‌صورت

(الف) اگر f یک‌به‌یک و B شمارش‌پذیر باشد، آنگاه A شمارش‌پذیر است.

(ب) اگر f پوشا و A شمارش‌پذیر باشد، آنگاه B شمارش‌پذیر است.

برهان. (الف) تابع $f: A \to f(A)$ یک‌به‌یک و پوشا است، پس $A \simeq f(A) \subseteq B$ و حکم بنا به قضیه 6 .3 .4 برقرار است.

(ب) چون f پوشا است، تابع $g: B \to A$ وجود دارد بقسمی‌که $fog = i_B$. اما g یک‌به‌یک است و A شمارش‌پذیر، حکم از قسمت اول بدست می‌آید.

6 .3 .6 **مثال**. (1) $f:\underset{(m,n)}{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\underset{\to}{\to}\underset{2^m3^n}{\mathbb{N}}$ را در نظر بگیرید. به راحتی می‌توان نشان داد که f یک‌به‌یک است (تمرین) بنابراین $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ شمارشپذیر است (روشی دیگر برای شمارش‌پذیری $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$).

(2) $f:\underset{(m,n)}{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\underset{\to}{\to}\underset{\frac{m}{n}}{\mathbb{Q}^+}$ پوشا است پس $\mathbb{Q}^+$ نیز شمارش‌پذیر است.

7 .3 .6 لم. فرض کنید $A\neq\phi$ یک مجموعه شمارش‌پذیر باشد. در این‌صورت تابع $f:\mathbb{N}\to A$ وجود دارد که پوشاست.

برهان. اگر A نامتناهی باشد، پس $\mathbb{N}\simeq A$ وحکم برقرار است. فرض کنید $A=\{a_1,a_2,...,a_m\}$

$f:\mathbb{N}\to A$ را با ضابطه زیر در نظر می گیریم

$$f(k)=\begin{cases} a_k & 1\leq k\leq m \quad \text{اگر} \\ a_1 & \text{درغیر اینصورت} \end{cases}$$

که تابعی پوشاست.

قضیه زیر نقش اساسی، در تبیین مجموعه‌های شمارش‌پذیر ایفا می کند.

8 .3 .6 **قضیه**. اجتماع هر دسته شمارش‌پذیر از مجموعه‌های شمارش‌پذیر، شمارش‌پذیر است.

یعنی اگر I شمارش‌پذیر و به ازای هر $i\in I$، F_i نیز شمارش‌پذیر باشد، آنگاه $F=\bigcup_{i\in I}F_i$ شمارش‌پذیراست.

برهان. فرض کنید به‌ازای هر $i\in I$، $F_i\neq\phi$. به‌دلیل شمارش‌پذیر بودن F_i، به ازای هر $j\in I$ ؛ تابعی مانند $f_j:\mathbb{N}\to F_j$ وجود دارد که پوشاست. از طرفی I نیز شمارش‌پذیر است، تابعی پوشا مانند $g:\mathbb{N}\to I$ وجود دارد. فرض کنید $x\in F=\bigcup_{i\in I}F_i$ بنابراین $j\in I$ وجود دارد که $x\in F_j$ در نتیجه $m,n\in\mathbb{N}$ وجود دارند بقسمی‌که $x=f_j(m)$ و $j=g(n)$. یعنی $x=f_{g(n)}(m)$. با توجه به فرآیند بالا، تابع $h:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to F=\bigcup_{i\in I}F_i$ با ضابطه $h(m,n)=f_{g(n)}(m)$ پوشاست و حکم از قسمت دوم نتیجه 6 .3. 5 بدست می‌آید .

6.3.9 **مثال**. $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ شمارش‌پذیرند.

حل: داریم $\mathbb{Z}=\mathbb{Z}^+\bigcup\mathbb{Z}^-\bigcup\{0\}$ که $\mathbb{Z}^+=\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}^-=\{-k\,|\,k\in\mathbb{N}\}$. بنابراین $\mathbb{Z}^+$، $\mathbb{Z}^-$ و $\{0\}$ شمارشپذیر هستند و بنا به قضیه 6.3.8، $\mathbb{Z}$ نیز شمارشپذیر است.

شمارشپذیر بودن $\mathbb{Q}$: داریم $\mathbb{Q}=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{Q}_k$ که $\mathbb{Q}_k=\{\frac{r}{k}|r\in\mathbb{Z}\}$. چون $\mathbb{Q}_k\simeq\mathbb{Z}$، حکم از شمارشپذیر بودن $\mathbb{Z}$ و قضیه قبل بدست می‌آید.

6.3.10 **نتیجه**. (الف) فرض کنید A شمارا و B شمارش‌پذیر باشد. در این‌صورت $A\bigcup B\simeq A$.

(ب) اگر A و B شمارش‌پذیر باشند، آنگاه $A\times B$ شمارش‌پذیر است. بخصوص اگر $B\neq\phi$ و A شمارا باشد، آنگاه $A\times B\simeq A$.

برهان (الف) به دلیل این‌که A و B شمارشپذیرند، $A\bigcup B$ شمارش‌پذیر است. از طرفی $A\bigcup B$ متناهی نیست (زیرا $A\subseteq A\bigcup B$ نامتناهی است)، بنابراین $A\bigcup B\simeq\mathbb{N}\simeq A$.

برای اثبات (ب) اگر $B=\phi$، بوضوح حکم برقرار است. فرض کنید $B\neq\phi$، داریم:

$$A\times B=\bigcup_{b\in B}A\times\{b\}.$$

از آن‌جایی‌که B و $A\times\{b\}$ شمارشپذیرند $(A\times\{b\}\simeq A)$، حکم از قضیه 6.3.8 بدست می‌آید.

برای اثبات $A\times B\simeq A$، کافیست توجه کنیم که $A\times B$ شمارش‌پذیر است. از طرفی $A\times B$ نامتناهی است (زیرا اگر $b\in B$ آنگاه $A\simeq A\times\{b\}\subseteq A\times B$)، بنابراین $A\times B\simeq N\simeq A$.

6.3.11 **مثال**. نشان دهید که $P_1(x)=\{a_0+a_1x|a_0,a_1\in\mathbb{Z}\}$ شمارش‌پذیر است.

حل: تابع $f:\underset{(a_0,a_1)}{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\underset{\to}{\to}\underset{a_0+a_1x}{P_1(x)}$ پوشاست. حکم بدلیل شمارش‌پذیر بودن $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$، ازقسمت دوم نتیجه 6,3,5 بدست می‌آید.

6. 3. 12 **مثال**. فرض کنید $E=\{C_r(a,b) | a,b,r\in\mathbb{Q}\}$ که $C_r(a,b)$ نماد دایره به مرکز (a,b) و شعاع r می‌باشد. نشان دهید که E شمارش‌پذیر است.

حل. تابع $f:\underset{(a,b,r)}{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}}\to \underset{\to\ C_r(a,b)}{E}$ پوشاست. چون $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ شمارش‌پذیر است، E نیز شمارشپذیر است.

6. 4 مجموعه‌های شمارش‌ناپذیر

می‌دانیم که در مبنای 2 هر عدد x متعلق به $(0,1)$ را می‌توان، بطور یکتا به‌صورت $0/a_1a_2a_3...$ نمایش داد که 1 یا $a_i=0$ و چنین نیست که از مرحله‌ای به بعد $a_n=1$.

هر تابع $b:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ را یک **دنباله** نامیم. در دنباله ها بجای $b(n)$ از نماد b_n استفاده می‌کنیم. بعد از این، نماد $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ را برای نمایش دنباله b بکار می‌بریم. اکنون فرض کنید $A\simeq\mathbb{N}$ پس تابع یک‌به‌یک و پوشای $b:\mathbb{N}\to A$ وجود دارد. به عبارت دیگر به‌ازای هر $x\in A$ وجود دارد n بقسمی‌که $b(n)=x$. با توضیحات بالا، اگر $A\simeq\mathbb{N}$ آنگاه $A=\{b_1,b_2,b_3,...\}$ که $b_i=b(i)$.

قضیه بعدی نشان می‌دهد که مجموعه‌های شمارش‌ناپذیر وجود دارند.

6. 4. 1 قضیه. بازه $[0,1)$ شمارش‌پذیر نیست.

برهان. واضح است که $[0,1)$ متناهی نیست (چرا؟). کافی است، ثابت کنیم که این مجموعه شمارا نیست. فرض کنید $[0,1)$ شمارا باشد (فرض خلف). بنابراین $[0,1)=\{x_1,x_2,x_3,...\}$. چون $x_i\in[0,1)$ داریم:

$$\begin{array}{l} x_1=0/a_{11}a_{12}a_{13}\dots \\ x_2=0/a_{21}a_{22}a_{23}\dots \\ x_3=0/a_{31}a_{32}a_{33}\dots \\ \vdots \qquad \vdots \end{array} \qquad \text{که } 1 \text{ یا } a_{ij}=0$$

عدد $c = 0/c_1c_2c_3 \ldots$ که در آن

$$c_i = \begin{cases} 0 & a_{ii}=1 \quad \text{اگر} \\ 1 & a_{ii}=0 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

را در نظر می گیریم. بدیهی است که $c\in[0,1)$ ولی به‌ازای هر i، $c \neq x_i$؛ زیرا به‌ازای هر i، رقم اعشاری i-ام x_i و c متفاوتند و این یک تناقض است. پس فرض خلف باطل و $[0,1)$ شمارشپذیر نیست.

در ادامه نظر به اهمیت مجموعه‌های شمارش‌ناپذیر و مجموعه‌هایی که با $\mathbb{R}$ همعددند، بحث زیر را می‌آوریم.

6. 4. 2 تعریف. فرض کنید X یک مجموعه باشد. در این‌صورت به‌ازای هر $A\subseteq X$ تابع **مشخصه** A (که با نماد f_A نشان می‌دهیم) به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_A : X \to \{0, 1\} \ ; \quad f_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \quad \text{اگر} \\ 0 & x \notin A \quad \text{اگر} \end{cases}$$

مثلا، فرض کنید $X = \mathbb{N}$ و $A=\{2, 3, 4\}$. در این‌صورت $f_A(2) = f_A(3) = f_A(4) = 1$ و به ازای هر $f_A(k) = 0; \ \ k \in \{1, 5, 6, 7, \ldots\}$.

3,4,6 **لم**. فرض کنید X یک مجموعه و $A, B \subseteq X$. در این‌صورت $A = B$ اگر و فقط اگر $f_A = f_B$.

برهان. واضح است که اگر $A = B$ آنگاه $f_A = f_B$.

بعکس.$(\Rightarrow)$ فرض کنید $f_A = f_B$. کافی است، ثابت کنیم $A\subseteq B$ و $B \subseteq A$. فرض کنید $x_0 \in A$ بنابراین داریم:

$$1 = f_A(x_0) = f_B(x_0) \Rightarrow x_0 \in B \Rightarrow A \subseteq B$$

و $B \subseteq A$ بطور مشابه بدست می‌آید.

4,4,6 قضیه. اگر X یک مجموعه باشد آنگاه $P(X)\simeq\{0,1\}^X$.

برهان. تابع $\begin{array}{c} h:P(X)\to\{0,1\}^X \\ A \quad \to \quad f_A \end{array}$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به لم 3,4,6 تابع h یک‌به‌یک است.

برای پوشا بودن، فرض کنید $g:X\to\{0,1\}$ یک تابع باشد. قرار می‌دهیم $B=g^{-1}(\{1\})$، بنابراین

$g(x)=1$ اگر و فقط اگر $x\in B$. در نتیجه $h(B)=f_B=g$، پس h تناظر یک‌به‌یک است.

6. 4. 5 قضیه. $(0,1)\simeq P(\mathbb{N})$.

برهان. با توجه به قضیه قبل $P(\mathbb{N})\simeq\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. همچنین به‌ازای هر $x\in(0,1)$ داریم $x=0/x_1x_2x_3\,...$ که

$x_i=0$ یا 1 . اکنون ضابطه $\begin{array}{c} \psi:(0,1)\to\{0,1\}^N \\ x \quad \to \quad \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \end{array}$ را در نظر می‌گیریم.

با توجه به منحصربه‌فردبودن نمایش x، ضابطه ψ تابع است. فرض کنید $y=0/y_1\,y_2\,y_3\,...$ و $\psi(x)=\psi(y)$. بنابراین داریم :

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\Rightarrow x_n=y_n\,,\ \forall n=1,2,...$$

پس $x=y$. برای **پوشا بودن،** فرض کنید $\beta:\mathbb{N}\to\{0,1\}$. پس β یک دنباله است یعنی $\beta=\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$

که $\beta_i=0$ یا 1. قرار می‌دهیم $b=0/\beta_1\beta_2\beta_3\,...$ وداریم $\psi(b)=\beta$.

6. 4. 6 نتیجه. $P(\mathbb{N})\simeq\mathbb{R}$.

برهان. حکم از $P(\mathbb{N})\simeq(0,1)\simeq\mathbb{R}$ بدست می‌آید.

6. 4. 7 مثال‌ها:

(1) مجموعه‌های $(0,1)$، $\mathbb{R}$ و $P(\mathbb{N})$ شمارش‌ناپذیرند.

زیرا $[0,1]$ شمارش‌پذیر نیست و $[0,1]=(0,1)\cup\{0\}$ پس $(0,1)$ شمارش‌پذیر نیست. از طرفی

$P(\mathbb{N})\simeq\mathbb{R}\simeq(0,1)$ پس $\mathbb{R}$ و $P(\mathbb{N})$ شمارش‌پذیر نیستند.

(2) اگر A شمارش‌ناپذیر و $B\neq\phi$، آنگاه $A\times B$ و $A\cup B$ شمارش‌ناپذیر است.

زیرا فرض کنید $b\in B$ پس $A\times\{b\}\subseteq A\times B$. چون $A\simeq A\times\{b\}$ و A شمارش‌ناپذیر است.

بنابراین $A\times B$ شمارش‌ناپذیر است. بطور مشابه $A\cup B$ نیز شمارش‌ناپذیر است.

6. 4. 8 قضیه. فرض کنید $A\simeq B$ و $D\simeq C$. در این‌صورت $A^D\simeq B^C$ **.**

برهان. فرض کنید $f:A\to B$ و $g:D\to C$ تناظر یک‌به‌یک باشند**.** نمودار زیر را در نظر بگیرید.

کافی است، نشان دهیم $\psi : \underset{s}{A^D} \xrightarrow[\longrightarrow]{} \underset{f\,o\,s\,o\,g^{-1}}{B^C}$ یک‌به‌یک و پوشاست.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \\
D \arrow[u, "s"] \arrow[r, "g"'] & C \arrow[u, dashed, "f\ o\ s\ o\ g^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

فرض کنید $\psi(s_1)=\psi(s_2)$. بنابراین داریم:

$$f\ o\ s_1\ o\ g^{-1}=f\ o\ s_2\ o\ g^{-1}\Rightarrow f^{-1}o\,(f\ o\ s_1 o\ g^{-1})\ o\ g=f^{-1}o\,(f\ o\ s_2 o\ g^{-1})\ og$$

پس $s_1=s_2$. برای پوشا بودن:

$$\forall t\in B^C;\ \psi(f^{-1}o\ t\ o\ g)=t\,.$$

6. 4. 9 نتیجه. فرض کنید $A\simeq B$ آنگاه $P(A)\simeq P(B)$.

برهان. چون $\{0,1\}\simeq\{0,1\}$ پس $\{0,1\}^A\simeq\{0,1\}^B$ و حکم از 6. 4. 4 بدست می‌آید.

تمرینات

1) نشان دهید که دایره‌ای که یک نقطه آن حذف شده باشد، همعدد با خط راست است.

2) کلاسی 100 دانشجو دارد که 47 نفر درس ریاضیI و 29 نفر درس فیزیکI و 18 نفر هم درس ریاضی I و هم درس فیزیک I انتخاب کرده‌اند مطلوب است محاسبه تعداد کسانی که هیچکدام از این دو درس را انتخاب نکرده‌اند.

3) فرض کنید $X = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$. مطلوبست تعداد عناصر X که بر 3 یا 5 یا 7 بخشپذیر نیستند.

4) به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $n = 2^{l-1}(2s-1)$ که $s, l \in \mathbb{N}$. نشان دهید که $\begin{array}{l} f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ \quad\;\; n \;\rightarrow\; (s,l) \end{array}$ یک تناظر یکبیک است.

5) فرض کنید A شمارشپذیر و B شمارا باشد. نشان دهید که $A \cup B \simeq B$.

6) ثابت کنید، هرگاه $B - A \simeq A - B$ آنگاه $A \simeq B$.

7) ثابت کنید به ازاء هر سه مجموعه A ، B و C داریم $A \times (B \times C) \simeq (A \times B) \times C$.

8) فرض کنید $A \simeq B$ و $a \in A,\ b \in B$. ثابت کنید $A - \{a\} \simeq B - \{b\}$.

9) ثابت کنید:

(الف) مجموعه $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ متناهی نیست.

(ب) هرگاه B نامتناهی و $B \subseteq A$ آنگاه A نیز نامتناهی است.

(ج) هرگاه A نامتناهی و $B \simeq A$ آنگاه B نیز نامتناهی است.

(د) هر بازه $[a,b]$ که $a < b$، مجموعه‌ی نامتناهی است.

10) نشان دهید که مجموعه‌ی اعداد اول شمارا است.

11) نشان دهید که اگر A مجموعه‌ایی شمارا و $E \subseteq A$ متناهی باشد، آنگاه $A - E$ شمارا است.

12) ثابت کنید مجموعه‌ِی همه خطوطی که بر دو نقطه با مختصات گویای متمایز می‌گذرند، شمارا است.

13) ثابت کنید مجموعه‌ی همه‌ی نقاط گویای بازه $(0,1)$ همعدد $\mathbb{Q}$ است.

14) نشان دهید که مجموعه‌ی همه زیر مجموعه‌های متناهی $\mathbb{N}$، همعدد $\mathbb{N}$ است.

15) نشان دهید که مجموعه‌ی همه دنباله‌های متناهی از $\mathbb{N}$، همعدد $\mathbb{N}$ است.

16) نشان دهید که مجموعه‌ی همه چندجمله‌ایهای با ضرایب گویا، شمارش‌پذیر است.

17) عدد $\alpha \in \mathbb{R}$ را عدد **جبری** نامیم هرگاه ریشه یک چندجمله‌ایی با ضرایب گویا باشد. درغیر این صورت آن را متعالی نامیم. نشان دهید که مجموعه اعداد جبری شماراست و شامل $\mathbb{Q}$. آیا مجموعه اعداد متعالی شمارش‌پذیر است؟

18) فرض کنید A ، B و C سه مجموعه باشند. ثابت کنید:

الف) $B^A \bigcup C^A \subseteq (B \bigcup C)^A$؛ ب) $(B \bigcap C)^A = B^A \bigcap C^A$؛

ج) $(B - C)^A = B^A - C^A$؛ د) $(B^C)^A \simeq B^{C \times A}$.