جواب تمرینات فصل اول

جواب سوال دوم :

(الف)

$$A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A' \rightarrow$$

از آنجا که $A \subseteq B$ هم ارز با $x \in A \Rightarrow x \in B$ در نتیجه داریم :

$$A \subseteq B \rightarrow x \in A \Rightarrow x \in B \rightarrow x \in A \vee x \notin B, B' \subseteq A' \rightarrow$$
$$x \in B' \Rightarrow x \in A' \rightarrow x \in B' \vee x \notin A' \rightarrow$$
$$x \notin B \vee x \in A \rightarrow A \subseteq B \equiv B' \subseteq A' \rightarrow$$
$$A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$$

(ب)

$$A - B = (A \cup B) - B = A - (A \cap B) \rightarrow$$
$$1 : A - B = (A \cup B) - B \rightarrow [A - B \subseteq (A \cup B) - B] \wedge [(A \cup B) - B \subseteq A - B] \rightarrow$$
$$A - B \subseteq [(A \cup B) - B] \rightarrow x \in A - B \rightarrow x \in A \wedge x \notin B \rightarrow$$

با اضافه کردن عضو خنثی $\vee(x \in B \wedge x \notin B)$ داریم :

$$(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin B) \rightarrow x \notin B \wedge (x \in A \vee x \in B) \rightarrow$$
$$(x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin B \rightarrow x \in A \cup B \wedge x \notin B \rightarrow$$
$$x \in (A \cup B) - B$$

اثبات $(A \cup B) - B \subseteq A - B$ و باقی مساوی ها به همین شیوه است.

(پ)

$$(A-B)-C = A-(B\cup C) \rightarrow [(A-B)-C \subseteq A-(B\cup C)]\wedge[A-(B\cup C) \subseteq (A-B)-C] \rightarrow$$
$$(A - B) - C \subseteq A - (B \cup C) \rightarrow x \in (A - B) - C \rightarrow x \in A - B \wedge x \notin C \rightarrow$$
$$x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \rightarrow x \in A \wedge \sim[x \in B \vee x \in C] \rightarrow$$
$$x \in A \wedge \sim(x \in B \cup C) \rightarrow x \in A \wedge x \notin B \cup C \rightarrow x \in A - (B \cup C)$$

اثبات $A - (B \cup C) \subseteq (A - B) - C$ به همین شیوه است.

ج)

$$A-(B\cup C)=(A-B)\cup(A-C)\rightarrow$$
$$[A-(B\cup C)\subseteq(A-B)\cup(A-C)]\wedge[(A-B)\cup(A-C)\subseteq A-(B\cup C)]$$
$$A-(B\cup C)\subseteq(A-B)\cup(A-C)\rightarrow x\in A-(B\cup C)\rightarrow$$
$$x\in A\wedge x\notin B\cup C\rightarrow x\in A\wedge x\notin B\wedge x\notin C\rightarrow$$
$$(x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\in A\wedge x\notin C)\rightarrow x\in A-B\wedge x\in A-C\rightarrow$$
$$x\in(A-B)\cap(A-C)$$

اثبات $(A-B)\cup(A-C)\subseteq A-(B\cup C)$ به همین شیوه است.

چ)

$$(A-B)-C\subseteq A-(B-C)\rightarrow$$
$$x\in(A-B)-C\rightarrow x\in A\wedge x\notin B\wedge x\notin C\rightarrow$$
$$x\in A-(B-C)\rightarrow x\in A\wedge x\notin B-C\rightarrow$$
$$x\in A\wedge(x\notin B\vee x\in C)\rightarrow$$

از آنجا که در $(A-B)-C$، $x\in A, x\notin B, x\notin C$ است.
و در $A-(B-C)$، $x\in A, x\notin B, x\in C$ است.
پس

$$(A-B)-C\subseteq A-(B-C)$$

ح)

اگر $A-B=B-A$ آنگاه $A-B$.
این گزاره مساری است با:

$$A-B=B-A\Rightarrow A=B\rightarrow$$
$$A=B\rightarrow[A\subseteq B]\wedge[B\subseteq A]\rightarrow$$
$$A\subseteq B\rightarrow x\in A\rightarrow x\in A\wedge(x\in B\vee x\notin B)\rightarrow$$
$$(x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\notin B)\rightarrow(x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A-B)\rightarrow$$

از آنجایی که $A-B=B-A$ داریم :

$$(x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A-B)\equiv(x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in B-A)\rightarrow$$
$$(x\in B\wedge x\in A)\vee(x\in B\wedge x\notin A)\rightarrow x\in B\wedge(x\in A\vee x\notin A)\equiv x\in B$$

$B\subseteq A$ هم با همین روش اثبات میشود.

جواب سوال چهارم :

(الف)

۱ :

$$A\Delta A = \emptyset \to [A\Delta A \subseteq \emptyset] \wedge [\emptyset \subseteq A\Delta A]$$

از آنجا که تهی زیر مجموعه هر مجموعه ای است به بررسی $A\Delta A \subseteq \emptyset$ میپردازیم :

$$A\Delta A \subseteq \emptyset \to x \in A\Delta A \to x \in (A-A) \vee (A-A) \to$$
$$x \in \emptyset \vee \emptyset \to \emptyset$$

۲ :

$$A\Delta A' = U \to [A\Delta A' \subseteq U] \wedge [U \subseteq A\Delta A'] \to$$

از آنجا که هر مجموعه ای زیر مجموعه، مجموعه مرجع است، به بررسی $U \subseteq (A\Delta A')$ میپردازیم :

$$U \subseteq A\Delta A' \to x \in U \to x \in A \vee x \in A' \to$$
$$A \cap A' = \emptyset \to A - A' = A, A' - A = A' \to$$
$$x \in A \vee x \in A' \to x \in A - A' \vee x \in A' - A \to$$
$$x \in (A - A') \cup (A' - A) \to x \in A\Delta A'$$

(ب)

$$A\Delta B = B\Delta A \to (A\Delta B \subseteq B\Delta A) \wedge (B\Delta A \subseteq A\Delta B) \to$$
$$A\Delta B \subseteq B\Delta A \to x \in A\Delta B \to$$
$$x \in (A-B) \cup (B-A) \to x \in A - B \vee x \in B - A \equiv$$
$$x \in B - A \vee x \in A - B \equiv x \in B\Delta A$$

اثبات $B\Delta A \subseteq A\Delta B$ به همین شیوه است.

(ج)

$$A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C \to$$
$$[A\Delta(B\Delta C) \subseteq (A\Delta B)\Delta C] \wedge [(A\Delta B)\Delta C \subseteq A\Delta(B\Delta C)]$$
$$A\Delta(B\Delta C) \subseteq (A\Delta B)\Delta C \to x \in A\Delta(B\Delta C) \to$$
$$x \in (A - (B\Delta C)) \cup ((B\Delta C) - A) \to x \in A - (B\Delta C) \vee x \in (B\Delta C) - A \to$$
$$(x \in A \wedge x \notin B\Delta C) \vee (x \in B\Delta C \wedge x \notin A) \to$$
$$[x \in A \wedge (x \notin (B - C) \wedge x \notin (C - B))] \vee [(x \in (B - C) \vee x \in (C - B)) \wedge x \notin A] \to$$
$$[x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C) \wedge (x \notin C \vee x \in B)] \vee [x \notin A \wedge ((x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \in C \wedge x \notin B))] \to$$

$$x \in A((x \notin C \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \in C)) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \in C \wedge x \notin B) \rightarrow$$
$$(x \in A \wedge x \notin C \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \in C \wedge x \notin B) \rightarrow$$
$$(x \in A \wedge x \notin C \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C) \vee (x \notin A \wedge x \in C \wedge x \notin B) \rightarrow$$
$$(x \notin C \wedge [(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)]) \vee (x \in C \wedge [(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \notin A \wedge x \notin B)]) \rightarrow$$
$$(x \notin C \wedge [x \in A - B \vee x \in B - A]) \vee (x \in C \wedge \sim [(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)]) \rightarrow$$
$$([x \in A - B \vee x \in B - A] \wedge x \notin C) \vee (x \in C \wedge \sim [x \in A - B \vee x \in B - A]) \rightarrow$$
$$(x \in A \Delta B \wedge x \notin C) \vee (x \in C \wedge x \notin A \Delta B) \rightarrow$$
$$x \in (A \Delta B) \Delta C$$

اثابت $(A\Delta B)\Delta C$ به همین روش است.

(د)

$$A\Delta B = A \Leftrightarrow B = \emptyset \rightarrow (A\Delta B = A \Rightarrow B = \emptyset) \wedge (B = \emptyset \Rightarrow A\Delta B = A) \rightarrow$$
$$A\Delta B = A \Rightarrow B = \emptyset \rightarrow$$
$$A\Delta B = A \rightarrow A\Delta B \subseteq A \rightarrow x \in (A\Delta B) => x \in A,$$
$$x \in B => x \in (A\Delta B) \rightarrow x \in B => x \in A \rightarrow$$
$$A\Delta B = A \rightarrow (A\Delta B) \cap B = A \cap B \rightarrow$$
$$x \in (A\Delta B) \cap B \rightarrow x \in (A\Delta B) \wedge x \in B \rightarrow$$
$$[x \in (A - B) \vee x \in (B - A)] \wedge x \in B \rightarrow$$
$$[x \in (A - B) \wedge B] \vee [x \in (B - A) \wedge B] \rightarrow$$
$$(x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in B) \vee (x \in B \wedge x \notin A \wedge x \in B) \rightarrow$$
$$x \in B - A, B \subseteq A \rightarrow A \cap B = \emptyset \rightarrow$$
$$B \subseteq \emptyset \rightarrow x \in B \rightarrow x \in B \wedge (x \in A \vee x \notin A) \rightarrow$$
$$(x \in B \wedge x \in A) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \equiv \emptyset$$

اثبات $B = \emptyset \Rightarrow (A\Delta B = A)$ نیز به همین شیوه است.

(ه)

جواب سوال پنجم :

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C) \rightarrow$$
$$[A \cap (B \Delta C) \subseteq (A \cap B) \Delta (A \cap C)] \wedge [(A \cap B) \Delta (A \cap C) \subseteq A \cap (B \Delta C)] \rightarrow$$
$$x \in A \cap (B \Delta C) \rightarrow x \in A \wedge x \in B \Delta C \rightarrow$$
$$x \in A \wedge [(x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \in C \wedge x \notin B)] \rightarrow$$
$$(x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in C)$$

همچنین داریم :

$$x \in (A \cap B) \Delta (A \cap C) \rightarrow [x \in (A \cap B - A \cap C)] \vee [x \in (A \cap C - A \cap B)] \rightarrow$$
$$(x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in C) \rightarrow$$
$$[A \cap (B \Delta C) \subseteq (A \cap B) \Delta (A \cap C)] \wedge [(A \cap B) \Delta (A \cap C) \subseteq A \cap (B \Delta C)]$$

جواب سوال ششم :

(الف)

$$P(A - B) \subseteq P(A) - P(B) \rightarrow$$
$$X \subseteq P(A - B), x \in X \rightarrow x \in A - B \rightarrow$$
$$x \in A \wedge x \notin B \rightarrow X \subseteq P(A) \wedge x \nsubseteq P(B) \rightarrow$$
$$X \subseteq P(A) - P(B)$$

پس این گزاره درست است.

(ب)

$$P(A) - P(B) \subseteq P(A - B) \rightarrow$$
$$X \subseteq P(A) - P(B) \rightarrow X \subseteq P(A) \wedge X \nsubseteq P(B), x \in X \rightarrow$$
$$x \in A \wedge x \notin B \rightarrow x \in A - B \rightarrow X \subseteq P(A - B)$$

پس این گزاره درست است.

(ج)

مثال نقض :

$$A = \emptyset, B = \{1\} \rightarrow P(A \cap B) = \emptyset, P(A) \cup P(B) = \{1\}$$

پس این گزاره نادرست است.

(د)

به شیوه سوال های بالا حل میشود.

جواب سوال هفتم :

$$\bigcup_{A\in\beta} A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\},$$
$$\bigcap_{A\in\beta} A = \emptyset$$

جواب سوال هشتم :

(الف)

$$|P(A:\emptyset)| \to P(A:\emptyset) = \{X \in P(A) | \emptyset \subseteq X\} = \{\forall X \in P(A) | X\} = P(A) \to$$
$$|P(A)| = 2^n$$
$$|P(A:A)| \to P(A:A) = \{X \in P(A) | A \subseteq X\} = \{A\} \to$$
$$|P(A:A)| = 1$$

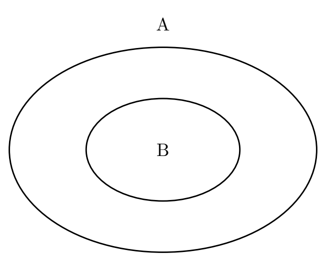
(ب)

اگر $P(A:B) = \{X \in P(A) | B \subseteq X\}$ باشد و $|A| = n$ و $|B| = m$و $n >= m$ آنگاه داریم :

$$|P(A)| = 2^n, |P(B)| = 2^m$$

مجموعه $P(A:B)$ مجموعه ای از زیر مجموعه های A است که شامل B باشند (مانند شکل ۱.۱) پس با کم کردن تعداد زیر مجموعه های A از زیر مجموعه های B تعداد زیر مجموعه های $P(A:B)$ بدست می آید.

$$|P(A:B)| = |P(A)| - |P(B)| = 2^n - 2^m$$



شکل ۱.۱: مجموعه B زیر مجموعه مجموعه A باشد.

(ج)

$$A = a, b, c, d, B = a,$$

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\},$$
$$\{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$$

$$P(B) = \{\emptyset, \{a\}\}$$
$$\rightarrow P(A:B) = \{X \in P(A) | B \subseteq X\} \Rightarrow$$
$$P(A:B) = \{\{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$$

جواب سوال نهم :

(الف)

$$P(\bigcap_{X\in\beta} X) = \bigcap_{X\in\beta} P(X) \rightarrow$$
$$(P(\bigcap_{X\in\beta} X) \subseteq \bigcap_{X\in\beta} P(X)) \wedge (\bigcap_{X\in\beta} P(X) \subseteq \bigcap_{X\in\beta} X))$$

حال به اثبات $P(\bigcap_{X\in\beta} X) \subseteq \bigcap_{X\in\beta} P(X)$ میپردازیم :

$$Y \in P(\bigcap_{X\in\beta} X) \Rightarrow Y \subseteq \bigcap_{X\in\beta} X$$

از آنجایی $\forall X \in \beta : \bigcap X \subseteq X$ پس داریم :

$$Y \subseteq X \rightarrow Y \in P(X)$$

از آنجایی که $\forall X \in \beta : \bigcap P(X) \subseteq P(X)$ پس داریم :

$$Y \in \bigcap_{X\in\beta} P(X)$$

(ب)

$$\bigcup_{X\in\beta} P(X) \subseteq P(\bigcup_{X\in\beta} X) \rightarrow$$
$$Y \in \bigcup_{X\in\beta} P(X) \Rightarrow Y \subseteq \bigcup_{X\in\beta} X \Rightarrow Y \in P(\bigcup_{X\in\beta} X) \rightarrow$$
$$\bigcup_{X\in\beta} P(X) \subseteq P(\bigcup_{X\in\beta} X)$$

جواب سوال دهم :

(الف)

$$\bigcap_{i\in I}(X-X_i)=X-\bigcap_{i\in I}X_i \to$$
$$(\bigcap_{i\in I}(X-X_i)\subseteq X-\bigcap_{i\in I}X_i)\wedge(X-\bigcap_{i\in I}X_i\subseteq\bigcap_{i\in I}(X-X_i))$$

حال به اثبات $\bigcap_{i\in I}(X-X_i)\subseteq X-\bigcap_{i\in I}X_i$ میپردازیم :

$$Y\in\bigcap_{i\in I}(X-X_i)\to\forall i\in I:(Y\in X-X_i)\to$$
$$\forall i\in I:(Y\in X\wedge Y\notin X_i)\to Y\in X\wedge\forall i\in I:(Y\notin X_i)\to$$
$$Y\in X\wedge Y\in\bigcup_{i\in I}X_i\to Y\in X-\bigcup_{i\in I}X_i$$

(ب)

$$X-\bigcap_{i\in I}X_i=\bigcup_{i\in I}(X-X_i)\to$$
$$(X-\bigcap_{i\in I}X_i\subseteq\bigcup_{i\in I}(X-X_i))\wedge(\bigcup_{i\in I}(X-X_i)\subseteq X-\bigcap_{i\in I}X_i)$$

حال به اثبات $X-\bigcap_{i\in I}X_i\subseteq\bigcup_{i\in I}(X-X_i)$ میپردازیم :

$$Y\in X-\bigcap_{i\in I}X_i\to Y\in X\wedge Y\notin\bigcap_{i\in I}X_i\to$$
$$Y\in X\wedge\forall i\in I:(Y\notin X_i)\to\forall i\in I:(Y\in X\wedge Y\notin X_i)\to$$
$$\forall i\in I:(Y\in X-X_i)\to Y\in\bigcup_{i\in I}(X-X_i)$$

جواب سوال یازدهم :

$$\bigcap_{n=2}^{\infty}A_n$$

چون با میل کردن n به بینهایت بازه A_n بزرگتر میشود، پس اشتراک همه این بازه های A_2 تا A_n، A_2 میشود :

$$\bigcap_{n=2}^{\infty}A_n=A_2=(0,\frac{1}{2})$$

$$\bigcap_{n=2}^{\infty} B_n$$

از آنجا که با میل کردن n به بینهایت، بازه B_n، کوچکتر میشود داریم :

$$\bigcap_{n=2}^{\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} B_n = \emptyset$$

$$\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n$$

$$\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n = (0,1)$$

$$\bigcup_{n=2}^{\infty} B_n$$

$$\bigcup_{n=2}^{\infty} B_n = B_2 = (\frac{1}{2},1)$$

جواب سوال دوازدهم :

$$A_n = (2-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}), F = n \in \mathbb{N} | A_n = \{(1,3),(1.5,2.5),...,\emptyset\} \rightarrow$$

$$\bigcup_{B\in F} B = A_1 = (1,3)$$

$$\bigcap_{B\in F} B = \lim_{n\to\infty} A_n = \emptyset$$