فصل اول

نظریه مقدماتی مجموعه‌ها

در دروس ریاضی دوره متوسطه دیدیم که بعضی از مفاهیم (مانند نقطه و خط) تعریف نشده هستند و ما براساس شناخت ذهنی که داریم، آنها را توصیف می‌کنیم .تفاوت بین تعریف و توصیف چیست؟ تعریف باید دقیق، جامع و کامل باشد ولی توصیف در حد درک و شناخت ما از یک مفهوم است. به همین دلیل در تعریف یک مفهوم اگر شرطی اضافه یا کم کنیم، تعریف غلط می‌شود. مثلاً انسان را حیوان ناطق توصیف می کنند. اکنون اگر حیوانی صحبت کند، آنگاه انسان است؟

1.1 مجموعه‌ها

یکی دیگر از مفاهیم تعریف نشده، مجموعه است که آنرا به‌صورت « یک دسته از اشیاء مشخّص و متمایز » توصیف می کنیم. صفت مشخّص بودن، اساسی است ولی صفت متمایز بودن قابل اغماض. هرکدام از اشیاء مجموعه را **عضو مجموعه** می‌نامیم. مجموعه‌ای که عضوی نداشته باشد را **مجموعه تهی** نامیده شده و با ϕ یا **{}** نشان داده می‌شود.

نمادگذاری: معمولاً مجموعه‌ها را با حروف بزرگ انگلیسی و عضوها را با حروف کوچک انگلیسی نشان می‌دهیم و اگر a عضو A باشد می‌نویسیم $a \in A$ در غیر این‌صورت می‌نویسیم $a \notin A$. هر کجا مناسب باشد مجموعه را با اعضایش بین دو ابرو نشان می‌دهیم، مثلاً اعداد صحیح فرد و مثبت کمتر از 10 را به‌صورت $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ نشان می‌دهیم.

گاه نوشتن تمام اعضای مجموعه ممکن نیست، معمولاً اعضای مجموعه بر حسب خاصیت مشترک آنها بیان می‌شود. فرض کنید S یک مجموعه باشد و $P(x)$ یک خاصیت مشخص. در این‌صورت مجموعه عناصر S که دارای خاصیت مشترک $P(x)$ هستند، وجود دارد و به‌صورت $\{x \in S; P(x)\}$ نشان می‌دهیم.

مجموعه A را **زیر مجموعه** B نامیم (می نویسیم $A \subseteq B$)، هرگاه هر عضو A عضوی از B باشد. مجموعه‌ی همه زیر مجموعه‌های B را **مجموعه توانی** B می‌نامیم و آن را با نماد $P(B)$ نشان می‌دهیم. یعنی،

$$P(B)=\{ A | A\subseteq B \}.$$

واضح است که $A\subseteq B$ اگر و فقط اگر $A\in P(B)$.

سرانجام اگر $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$ می‌نویسیم $A=B$ (می‌خوانیم A مساوی B است).

1,1,1 مثال‌ها.

(1) مجموعه‌های $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$ و $\mathbb{Z}=\{\dots,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$ و $\mathbb{Q}=\left\{ {a}/{b} \mid a,b\in\mathbb{Z}, b\neq 0\right\}$ را به‌ترتیب مجموعه اعداد طبیعی، اعداد صحیح و اعداد گویا می‌نامیم. همچنین مجموعه اعداد حقیقی را با $\mathbb{R}$ نشان می‌دهیم. می‌دانیم که

$$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$$

(2) $\phi\subseteq\phi$ ولی $\phi\notin\phi$.

(3) فرض کنید $A=\{1,\{1,2\}\}$ در این‌صورت واضح است که $2\in\{1,2\}$ و $\{1,2\}\in A$ ولی $2\notin A$.

(4) اگر $a,b\in\mathbb{R}$ و $a<b$ انواع بازه‌ها را چنین تعریف می‌کنیم.

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\},$$
$$[a,b]=\{x \mid a\le x\le b\},$$
$$[a,b)=\{x \mid a\le x<b\},$$
$$(a,b]=\{x \mid a<x\le b\}.$$

1. 2 اعمال روی مجموعه‌ها

در نظریه مجموعه‌ها با استفاده از اعمال مقدماتی روی مجموعه‌ها (اجتماع، اشتراک و تفاضل) می‌توانیم مجموعه‌های جدیدی به‌دست آوریم. اعمال مقدماتی اجتماع و اشتراک را ابتدا برای دو مجموعه تعریف می‌کنیم و سپس این تعاریف را به هر تعداد از مجموعه‌ها تعمیم می‌دهیم.

1. 2. 1 تعریف. اگر A و B دو مجموعه باشند، آنگاه $A\cup B$ (بخوانید A اجتماع B) مجموعهٔ همه اعضایی است که عضو A یا عضو B (یا هردو) هستند، یعنی

$$A\cup B=\{ x | x\in A \text{ یا } x\in B\}.$$

مثلاً اگر $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{3,4\}$ آنگاه $A\cup B=\{1, 2, 3, 4\}$.

با استفاده از تعریف اجتماع، به‌ازای هر مجموعه D داریم $D\cup D=D$ و $D\cup\phi=D$.

2. 2. 1 تعریف. اگر A و B دو مجموعه باشند. اشتراک مجموعه‌های A و B که آن را با نماد $A\cap B$ نمایش می‌دهیم، عبارتست از مجموعه همه اعضایی که به A و به B تعلق دارند، یعنی

$$A\cap B=\{ x | x\in A, x\in B\}.$$

اگر $A\bigcap B=\phi$ آنگاه A و B را دو مجموعه از هم‌جدا می‌نامیم.

بنابراین، به ازای هر مجموعه D داریم $D\bigcap\phi=\phi$ و $D\bigcap D=D$.

1. 2. 3 تعریف. اگر A و B دو مجموعه باشند آنگاه $A-B$ (بخوانید A منهای B) بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$A-B=\{x \mid x\in A,\ x\notin B\}.$$

مجموعه $A-B$ را گاهی اوقات **متمم** B **نسبت به** A می‌نامیم.

بنا به تعریف داریم $A-A=\phi$ و $A-\phi=A$. مثلاً اگر A و B همان مجموعه‌های 1,2,1 باشند، داریم:

$$A-B=\{1,2\} \quad \text{و} \quad B-A=\{4\}.$$

اعمال اجتماع و اشتراک با جمع و ضرب معمولی اعداد حقیقی (در عین داشتن اختلاف) تشابهات صوری فراوانی دارند .به‌عنوان مثال $A\bigcup B=B\bigcup A$ و $A\bigcap B=B\bigcap A$. یعنی اجتماع و اشتراک تعویض پذیرند. همچنین با استفاده از تعاریف، واضح است که $\bigcup$ و $\bigcap$ شرکت‌پذیرند که اینها و قضایای دیگر مربوط به جبر مجموعه‌ها را به‌عنوان تمرین‌هایی می‌آوریم.

1. 2. 4 قضیه. اگر A , B , C سه مجموعه باشند، آنگاه

$$A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C).$$

برهان. برای اثبات کافی است، نشان دهیم:

$$A\bigcap(B\bigcup C)\subseteq(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C), \qquad (1)$$

$$(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)\subseteq A\bigcap(B\bigcup C). \qquad (2)$$

ابتدا (1) را ثابت می‌کنیم. فرض کنید $x\in A\bigcap(B\bigcup C)$ پس $x\in A$ و $x\in B\bigcup C$. بنا براین $x\in A$ و $x\in B$ یا $x\in C$، یعنی $x\in A$ و $x\in B$ یا $x\in A$ و $x\in C$. در نتیجه $x\in A\bigcap B$ یا $x\in A\bigcap C$ و بنا به تعریف $x\in(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$.

اینک به اثبات (2) می‌پردازیم. فرض کنید $x\in(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$. پس $x\in A\bigcap B$ یا $x\in A\bigcap C$. بنابراین ($x\in A$ و $x\in B$) یا ($x\in C$ و $x\in A$) یعنی $x\in A$ و ($x\in B$ یا $x\in C$) در نتیجه $x\in A\bigcap(B\bigcup C)$ و حکم برقرار است.

1. 2. 5 قضیه. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. در این صورت

الف) $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$..

ب) $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$..

(ج) نشان دهید که در قسمت دوم ممکن است تساوی برقرار نباشد.

برهان. کافی است ثابت کنیم $P(A\cap B)\subseteq P(A)\cap P(B)$ و $P(A)\cap P(B)\subset P(A\cap B)$. ابتدا اثبات اولی، فرض کنید $X\in P(A\cap B)$ پس $X\subseteq A\cap B$ بنابراین $X\subseteq B$ و $X\subseteq A$. در نتیجه $X\in P(A)$ و $X\in P(B)$ یعنی $X\in P(A)\cap P(B)$. اینک فرض کنید $X\in P(A)\cap P(B)$ بنابراین $X\in P(A)$ و $X\in P(B)$، یعنی $X\subseteq A$ و $X\subseteq B$. پس $X\subseteq A\cap B$ در نتیجه

$$X\in P(A\cap B).$$

ب) فرض کنید $X\in P(A)\cup P(B)$ بنابراین $X\in P(A)$ یا $X\in P(B)$، یعنی $X\subseteq A$ یا $X\subseteq B$. پس $X\subseteq A\cup B$ در نتیجه

$$X\in P(A\cup B).$$

ج) با انتخاب $A=\{1\}$، $B=\{2\}$ و محاسبه $P(A\cup B)$، $P(A)\cup P(B)$ حکم ثابت میشود

6.2.1 قضیه. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند در این‌صورت

(الف) $P(A-B)\subseteq (P(A)-P(B))\cup\{\phi\}$.

ب) نشان دهید که در قسمت قبل ممکن است تساوی برقرار نباشد.

برهان. (الف) فرض کنید $X\in P(A-B)$ ناتهی باشد (اگر $X=\phi$ آنگاه حکم برقرار است) پس $X\subseteq A-B$ یعنی $X\subseteq A$ و $X\not\subseteq B$. بنابراین، $X\in P(A)$ و $X\notin P(B)$ در نتیجه $X\in P(A)-P(B)$.

ب) با انتخاب $A=\{1,2\}$، $B=\{2,3\}$ و محاسبه $(P(A)-P(B)$, $P(A-B)$،حکم ثابت میشود.

3.1 آیا مجموعه جامع وجود دارد؟

می‌دانیم که $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+1=0\}=\phi$، یعنی مجموعه تهی وجود دارد. آیا مجموعه‌ای وجود دارد که شامل همه مجموعه‌ها باشد؟ فرض کنید Ω چنین مجموعه‌ای باشد، قرار می‌دهیم $T=\{A\in\Omega\mid A\notin A\}$. آیا $T\in T$؟

اگر $T\in T$ چون عناصر T عضو خود نیستند، پس $T\notin T$ که تناقض است و اگر $T\notin T$ آنگاه $T\in T$ که تناقض می‌باشد. بنابراین وجود **مجموعه جامع**، مجموعه‌ای که شامل همه مجموعه‌ها باشد، ما را به تناقض می‌رساند.

با توجه به مطالب بالا مجموعه مرجع کلی(مجموعه جامع) وجود ندارد. ولی ما می‌توانیم با توجه به عالم سخن ما، مجموعه‌ای انتخاب کنیم که شامل مجموعه‌های مورد نظر ما باشد که آن را **مجموعه مرجع** می‌نامیم و با U نشان می‌دهیم. وقتی روی مجموعه مرجع U توافق کردیم و $B \subseteq U$ در این‌صورت $U - B$ را **متمم** B نامیم و با B' نشان می‌دهیم.

با توجه به تعریف متمم، به‌راحتی می‌توان قضیه زیر را ثابت کرد.

1. 3. 1 قضیه. اگر A و B دو مجموعه باشند و U مجموعه مرجع باشد، آنگاه

(الف) $\phi' = U$ و $U' = \phi$؛

(ب) $(A')' = A$؛

(ج) اگر $A \subseteq B$ آنگاه $B' \subseteq A'$.

قضیه زیر که به قوانین دمورگان مشهور است را بیان و اثبات می‌کنیم.

1. 3. 2 قضیه. اگر A و B دو مجموعه باشند، آنگاه

(الف) $(A \bigcup B)' = A' \bigcap B'$؛

(ب) $(A \bigcap B)' = A' \bigcup B'$.

برهان. فرض کنید $x \in (A \bigcup B)'$. پس $x \notin A \bigcup B$ یعنی $x \notin A$ و $x \notin B$. بنابراین $x \in A'$ و $x \in B'$ درنتیجه $x \in A' \bigcap B'$ که نتیجه می‌دهد:

$$(A \bigcup B)' \subseteq A' \bigcap B'.$$

اینک کافی است، ثابت کنیم $A' \bigcap B' \subseteq (A \cup B)'$. فرض کنید $x \in A' \bigcap B'$ پس $x \in A'$ و $x \in B'$، یعنی $x \notin A$ و $x \notin B$. بنابراین $x \notin (A \bigcup B)$ در نتیجه $x \in (A \bigcup B)'$ و حکم ثابت می‌شود.

برای اثبات (ب) به روش مشابه عمل می‌کنیم.

1. 4 تعمیم اجتماع و اشتراک

اعمال اجتماع و اشتراک را می‌توان به دسته متناهی یا نامتناهی از مجموعه‌ها به صورت زیر تعمیم داد. فرض کنید $F \neq \phi$ دسته‌ای از مجموعه‌ها باشد. اجتماع و اشتراک کلیه مجموعه‌ها در F که با $\bigcup_{A \in F} A$ و $\bigcap_{A \in F} A$ (بترتیب) نشان می‌دهیم، بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\bigcup_{A \in F} A = \{x | \text{ حداقل به یک عضو } F \text{ تعلق دارد } x\},$$

$$\bigcap_{A\in F} A = \{x \mid \text{به هریک از عناصر } F \text{ تعلق دارد } x\}.$$

و اگر $F = \{A_1, A_2, \ldots A_n\}$، آنگاه داریم:

$$\bigcup_{A\in F} A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n ,$$

$$\bigcap_{A\in F} A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n .$$

1. 4. 1 مثال‌ها:

(1) فرض کنید $F = \{\{1,2\}, \{2,4\}, \{2,5\}\}$ در این‌صورت

$$\bigcup_{A\in F} A = \{1, 2, 4, 5\}, \quad \bigcap_{A\in F} A = \{2\}.$$

(2) اگر X یک مجموعه باشد، آنگاه $\bigcup_{A\in P(X)} A = X$ و $\bigcap_{A\in P(X)} A = \phi$.

(3) به ازای هر $i \in \mathbb{N}$ قرار دهید $A_i = (\circ, i)$ و $F = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

در این صورت $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ و داریم:

$$\bigcup_{A\in F} A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = (\circ, \infty) ,$$

و

$$\bigcap_{A\in F} A = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = (\circ, 1) .$$

2,4,1 **مثال**. به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ قرار دهید $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ و $F = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ نشان دهید که $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$ و

$$\bigcup_{B\in F} B = (-1,1) , \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{\circ\} .$$

برهان. به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $\frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n}$ و $\frac{-1}{n} \le \frac{-1}{n+1}$ پس $A_n \supseteq A_{n+1}$. اینک نشان می‌دهیم $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{\circ\}$. بازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $-\frac{1}{n} \le 0 \le \frac{1}{n}$ یعنی $0 \in A_n$ بنابراین $0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. فرض کنید $x \neq 0$ بنابراین $|x| = \varepsilon > 0$ (قدر مطلق x) وعدد طبیعی m وجود دارد بقسمی که $\frac{1}{m} < \varepsilon$.

در نتیجه $A_m = (\frac{-1}{m}, \frac{1}{m})$ $x \notin$، یعنی $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}$. برای محاسبه $\bigcup_{B\in F} B$، کافیست توجه شود که به ازای هر $B \in F$ داریم $B \subseteq A_1$.

3,4,1 قضیه. فرض کنید B یک مجموعه و β مجموعه‌ای از مجموعه‌ها باشد. در این صورت

(الف) $B \bigcup (\bigcap_{X\in\beta} X) = \bigcap_{X\in\beta} (B \bigcup X)$ ؛

(ب) $B \bigcap (\bigcup_{X\in\beta} X) = \bigcup_{X\in\beta} (B \bigcap X)$.

برهان (الف) فرض کنید $x \in B \bigcup (\bigcap_{X\in\beta} X)$ در این صورت $x \in B$ یا $x \in \bigcap_{X\in\beta} X$ پس $x \in B$ یا به ازای هر $X \in \beta$ ، $x \in X$. بنابراین به ازای هر $X \in \beta$ داریم $x \in B \bigcup X$، یعنی $x \in \bigcap_{X\in\beta} (B \bigcup X)$.

حال فرض کنید $x \in \bigcap_{X\in\beta} (B \bigcup X)$ و بطور مشابه برهان را به اتمام برسانید.

تمرینات

1) کدام دسته از اشیای زیر، مجموعه هستند:

الف) همه‌ی گل‌های قشنگ
ب) همه‌ی صندلی‌های قهوه‌ایی
ج) همه‌ی دانش‌آموزان با معدل 17
د) همه‌ی عناصر $\mathbb{N}$ با خاصیت $P(x)$
و) چهار عدد زوج متوالی، $\mathbb{N}$
ه) همه‌ی سه عضوهای زوج و متوالی عناصر $\mathbb{N}$

2) فرض کنید A، B و C سه مجموعه دلخواه باشند، ثابت کنید:

$$A \subseteq B \ \Rightarrow \ B' \subseteq A',$$
$$A - B = A - (A \bigcap B) = (A \bigcup B) - B,$$
$$(A - B) - C = A - (B \bigcup C),$$
$$A - (B \bigcup C) = (A - B) \bigcap (A - C),$$
$$(A - B) - C \subseteq A - (B - C).$$

اگر $A - B = B - A$ آنگاه $A = B$.

3) نشان دهید، در بحث عدم وجود مجموعه‌ی جامع (صفحه 4 و5)، با انتخاب U بجای Ω تناقص فوق رفع می‌شود.

4) قرار دهید $A\Delta B=(A-B)\bigcup(B-A)$ که آنرا **تفاضل متقارن** دو مجموعه A و B نامیم، ثابت کنید:

(الف) $A\Delta A'=U\ ,\ A\Delta A=\phi$؛

(ب) $A\Delta B=B\Delta A$؛

(ج) $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$؛

(د) $A\Delta B=A$ اگر و فقط اگر $B=\phi$ ؛

(ه) اگر $A\Delta C=B\Delta C$ آنگاه $A=B$.

5) با نماد تمرین4، ثابت کنید $A\bigcap(B\Delta C)=(A\bigcap B)\Delta(A\bigcap C)$.

6) درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

(الف) $P(A-B)\subseteq P(A)-P(B)$؛

(ب) $P(A)-P(B)\subseteq P(A-B)$؛

(ج) $P(A\bigcap B)\subseteq P(A)\bigcup P(B)$؛

(د) $P(A)\bigcap P(B)\supseteq P(A\bigcap B)$.

7) مجموعه $\beta=\{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\}\}$ را در نظر بگیرید. مطلوبست محاسبه:

$$\bigcup_{A\in\beta}A\ ,\ \bigcap_{A\in\beta}A.$$

8) فرض کنید $|A|=n$ و B زیرمجموعه‌ای از A باشد. قرار دهید:

$$P(A:B)=\{X\in P(A)\,|\,X\supseteq B\}.$$

(الف) مطلوبست $|P(A:\phi)|$ و $|P(A:A)|$؛

(ب) آیا فرمول کلی برای $|P(A:B)|$ وجود دارد؟

(ج) با فرض $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{a\}$ مطلوبست $P(A:B)$.

9) فرض کنید β مجموعه‌ای از مجموعه‌ها باشد. نشان دهید که

(الف) $P(\bigcap_{X\in\beta}X)=\bigcap_{X\in\beta}P(X)$؛

(ب) $\bigcup_{X\in\beta}P(X)\subseteq P(\bigcup_{X\in\beta}X)$.

10) فرض کنید $\{X_i\}_{i\in I}$ خانواده‌هایی از زیرمجموعه‌های X باشد، ثابت کنید:

(الف) $X-\bigcup_{i\in I}X_i=\bigcap_{i\in I}(X-X_i)$ ؛

ب) $X - \bigcap_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I}(X - X_i)$.

11) به‌ازای هر $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ قرار دهید $A_n = (\circ\,, 1-\frac{1}{n})$ و $B_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1})$. مطلوبست محاسبه

$$\bigcap_{n=2}^{\infty} A_n\,,\ \bigcap_{n=2}^{\infty} B_n\,,\ \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n\,,\ \bigcup_{n=2}^{\infty} B_n\ .$$

12) به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ قرار دهید $A_n = (2-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n})$ و $F = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. مطلوبست محاسبه

$$\bigcup_{B\in F} B\,,\quad \bigcap_{B\in F} B.$$

فصل دوم

منطق ریاضی مقدماتی

روزانه جملات خبری زیادی مورد استفاده قرار می‌گیرند که درست یا نادرست بودن آنها اهمیت فراوانی دارد. برای بیان هر مطلب که مورد قبول سایرین باشد، احتیاج به اثبات آن مطلب با استفاده از نتایج مورد قبول می‌باشد. گزاره‌ها و روابط بین آنها الفبای اثبات محسوب می‌شوند که ما آنها را دراین فصل مورد مطالعه قرار می‌دهیم. ادامه این فصل اختصاص به ارایه برخی از روشهای استدلال در ریاضی دارد.

2. 1 گزاره

2. 1. 1 تعریف. گزاره جمله خبری است که درستی یا نادرستی آن را بتوان مشخص نمود.
گزاره‌ها را با p ، q ، r ، ... نشان می‌دهیم.

2. 1. 2 مثال. عبارتهای زیر گزاره‌اند.

(1) عدد 7 زوج است.

(2) هزارمین رقم π مساوی 3 است.

(3) عدد $\sqrt{2}$ گنگ است.

حال عبارت‌های زیر را در نظر می‌گیریم .

(1) به به چه هوای آفتابی!

(2) حسین خوش اخلاق است.

(3) درس‌هایت را خوب بخوان.

ملاحظه می‌شود که جملات اول و سوم خبری نیستند و درستی یا نادرستی جمله دوم نیز سلیقه‌ای است و نمی‌توان در مورد درست بودن یا غلط بودن این نوع جملات مطمئن بود.

2. 2 ترکیبات بین گزاره‌ها

2. 2. 1 تعریف. ترکیب دو گزاره p و q با لفظ "یا" را ترکیب فصلی دو گزاره نامیم و با نماد $p \vee q$ (p یا q) نشان می‌دهیم. گزاره $p \vee q$ فقط وقتی نادرست است که p و q هر دو نادرست باشند.

بنابراین جدول ارزش آن به صورت زیر می‌باشد.

q	p	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

2.2.2 مثال‌ها:

(1) عدد 3 اول است یا **5** عددی زوج است. (د)

(2) 3=3 یا 3<3 (می‌نویسیم $3 \leq 3$). (د)

(3) 3>2 یا 2=3 (می‌نویسیم $2 \leq 3$). (د)

(4) عدد 8 مربع کامل است یا 8 فرد است. (ن)

3.2.2 تعریف. ترکیب عطفی بین دو گزاره p و q (که با نماد $p \wedge q$ نشان می‌دهیم)، ترکیب دو گزاره p و q با لفظ "و" می باشد. گزاره $p \wedge q$ تنها وقتی درست است که p و q هر دو درست باشند و جدول ارزش $p \wedge q$ بصورت زیر می باشد.

p	**q**	$p \wedge q$
د	**د**	**د**
د	**ن**	**ن**
ن	**د**	**ن**
ن	**ن**	**ن**

4.2.2 مثال‌ها:

(1) عدد **4** مربع کامل است و 2 عددی اول است.(د)

(2) عدد 3 فرد است و عدد 1 اول می باشد.(ن)

(3) فرض کنید A یک مجموعه باشد. در این‌صورت $A \cup A' = M$ و $A \cap A' = \phi$.(د)

5,2,2 تعریف. گزاره «اگر p آنگاه q» را گزاره q به‌شرط p می‌نامیم و با نماد $p \Rightarrow q$ نشان می‌دهیم. جدول ارزش $p \Rightarrow q$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

یعنی $p \Rightarrow q$ فقط وقتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد. در گزاره $p \Rightarrow q$ گزاره p را مقدم (یا فرض) و گزاره q را تالی

(یا نتیجه) نامیم. بنابراین گزاره $p \Rightarrow q$ وقتی غلط است که فرض درست و نتیجه غلط باشد.
یعنی درحالتی که فرض غلط باشد گزاره $p \Rightarrow q$ درست است که آنرا قاعده **انتفای مقدم** نامیم.

6.2.2 مثال‌ها:

(1) اگر **4** اول باشد آنگاه **5** عددی زوج است. (د)
(2) اگر 9 مربع کامل باشد آنگاه 2 عددی فرد است. (ن)

7.2.2 تعریف. ترکیب دو شرطی p و q که با نماد $p \Leftrightarrow q$ نشان می‌دهیم (می‌خوانیم p اگر و فقط اگر q) بصورت $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ تعریف می‌شود. بنابراین جدول ارزش آن به‌صورت زیر می‌باشد.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

برای اثبات درستی $p \Leftrightarrow q$ باید درستی گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ را ثابت کنیم.

8.2.2 تعریف. فرض کنید p یک گزاره باشد. در این‌صورت گزاره "چنین نیست p " را **نقیض گزاره** p نامیم و با نماد $\sim p$ نشان می‌دهیم.
بنابر این $\sim p$ گزاره‌ای است که اگر گزاره p درست باشد، آنگاه $\sim p$ نادرست است و در صورت نادرستی p گزاره $\sim p$ درست می‌باشد. پس جدول ارزش زیر را داریم:

p	~p
د	ن
ن	د

دو گزاره r و s را **معادل** نامیم. (می‌نویسیم $r \cong s$) هرگاه r و s دارای ارزش یکسانی باشند. یعنی اگر r درست باشد آنگاه s نیز درست باشد و اگر r نادرست باشد آنگاه s نیز نادرست باشد. به‌عبارت دیگر در جدولهای ارزش r و s سطرهای متناظر باید یکسان باشند. مثلاً واضح است که $\sim(\sim p) \cong p$.

تبصره: حرف "یا" در فارسی و "یا" در ریاضی (ترکیب فصلی) دارای معنی یکسان نیستند. گزاره‌های طرفین "یا" در فارسی دارای ارزش متناقض هستند ولی همان‌طور که قبلاً دیدیم در "یا" ریاضی ممکن است این شرایط برقرار نباشد. مثلاً به استفاده "یا" ی فارسی در جمله "حسن به دانشگاه می‌آید یا به بازار می رود" دقت نمایید، واضح است که اگر حسن به دانشگاه بیاید آنگاه به بازار نمی رود و اگر به بازار برود آنگاه به دانشگاه نمی‌آید.

2. 2. 9 مثال. جدول ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

$$p \vee q,\ \sim (p \vee q),\quad \sim p \wedge \sim q\ .$$

حل. جدول ارزش زیر را داریم:

p	q	~p	~q	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	د	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	د	د

با توجه به جدول بالا واضح است که $\sim (p \vee q) \cong \sim p \wedge \sim q$.

2. 2. 10 مثال. ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

$$p \Rightarrow q\ ,\quad q \vee \sim p,\quad \sim q \Rightarrow \sim p\,.$$

حل. داریم:

p	q	~p	~q	$p \Rightarrow q$	$q \vee \sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	ن	ن	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د	د
ن	ن	د	د	د	د	د

بنا به جدول ارزش قبل، واضح است که

(1) $p \Rightarrow q \cong \sim q \Rightarrow \sim p$,

(2) $p \Rightarrow q \cong q \vee \sim p$.

که رابطه (1) به قانون عکس نقیض، مشهور است و با استفاده از رابطه (2) داریم:

$$\sim (p \Rightarrow q) \cong \sim (q \vee \sim p) \cong p \wedge \sim q.$$

2. 2. 11 قضیه. فرض کنید p، r و q گزارهای مفروض باشند. در این‌صورت داریم :

(الف) قوانین شرکت پذیری
$$\begin{cases} (p \vee q) \vee r \cong p \vee (q \vee r) \\ (p \wedge q) \wedge r \cong p \wedge (q \wedge r) \end{cases}$$

(ب) قوانین توزیع پذیری
$$\begin{cases} p \vee (q \wedge r) \cong (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\ p \wedge (q \vee r) \cong (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \end{cases}$$

برهان. (الف) ابتدا گزاره $(p \vee q) \vee r \cong p \vee (q \vee r)$ را ثابت می‌کنیم. چون در این گزاره سه مولفه p ، q وr وجود دارند و هر مولفه دارای دو حالت (درست یا نادرست) می‌باشد. پس تعداد حالتهای هر سه گزاره با هم، مساوی $2^3 = 8$ است و حکم از جدول ارزش زیر بدست می آید.

P	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	د	د
د	ن	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	د	ن	د
ن	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

بقیه برهان قضیه، به روش مشابه بدست می‌آید.

تبصره: همانطور که در برهان قضیه بالا دیدیم اگر یک گزاره مرکب، شامل سه گزاره باشد جدول ارزش آن دارای 8 سطر است. بطور کلی اگر یک گزاره مرکب شامل n مولفه باشد آنگاه جدول ارزش آن دارای 2^n سطر خواهد بود.

2. 2. 12 تعریف. گزاره‌ای که مستقل از درست بودن یا غلط بودن مولفه‌های آن، همیشه درست باشد را گزاره همیشه درست می‌گوییم. مثلا $p \vee \sim p$ یک گزاره همیشه درست است. برای تعیین اینکه گزاره‌ای همیشه درست است یا نه، می‌توان جدول ارزش آن گزاره را تشکیل داد.

تذکر: در مقابل گزاره همیشه درست، گزاره همیشه نادرست نیز تعریف می‌شود که گزاره‌ای است که ارزش آن همیشه نادرست باشد. مثلاً $p \wedge \sim p$ یک گزاره همیشه نادرست است.

2. 3 گزاره‌نما

عبارت "x عدد زوج است" را در نظر بگیرید که x یک متغیر در $\mathbb{N}$ می باشد. اگر $x = 4$ پس گزاره فوق درست است ولی اگر $x = 3$ گزاره فوق نادرست می باشد، یعنی نمی توان درست بودن یا غلط بودن عبارت فوق را تعیین نمود.

2. 3. 1 تعریف. گزاره‌نما، عبارتی است که شامل یک یا چند متغیر است و این متغیرها در مجموعه مشخصی (که آنرا **دامنه** گزاره نما نامیم) تغییر می‌کنند و با قرار دادن اعضای این مجموعه بجای متغیرها، یک گزاره بدست می‌آید.

یک گزاره نما با متغیر x و دامنه U را با نماد $P(x)$ نشان می‌دهیم و اگر $a \in U$ را در گزاره‌نما قرار دهیم، آنگاه گزاره حاصل را با $P(a)$ نشان می‌دهیم. گزاره‌نماهای با چند متغیر بروش مشابه نامگذاری می‌شوند.

2. 3. 2 مثال‌ها:

(1) $P(x)$: x عددی اول است و $U = \mathbb{N}$ در این‌صورت

$P(7)$: 7 عددی اول است (د)

ولی $P(6)$: 6 عددی اول است (ن)

(2) فرض کنید $P(x,y): x^2 + y^2 = 1$ $U = \mathbb{R},$ در این‌صورت

$P(1,\circ): 1^2 + \circ^2 = 1$ (د)؛

$P(1,1): 1^2 + 1^2 = 1$ (ن).

1. **3 .3 تعریف.** فرض کنید $P(x)$ یک گزاره نما با دامنه U باشد. در این‌صورت مجموعه $\{a \in U |$ گزاره $P(a)$ درست است $\}$ را مجموعه جواب گزاره‌نما می‌نامیم.

4.2 سورها

در این درس فقط سورهای عمومی و سورهای وجودی را بررسی می‌کنیم.

به عبارت‌های "برای هر" و "وجود دارد" (به ترتیب) سور عمومی و سور وجودی گوییم. سور عمومی را بانماد $\forall$ و سور وجودی را با $\exists$ نشان می‌دهیم. اگر $P(x)$ یک گزاره‌نما باشد، آنگاه $\forall x\, P(x)$ را جمله عمومی و $\exists x\, P(x)$ را جمله وجودی می‌نامیم.

2. 4. 1 مثال‌ها:

(1) هر عدد اول فرد است. (ن)

(2) وجود دارد عددی اول که زوج است.(د)

(3) x زوج است آنگاه $P(x): x>1$ و $U=\mathbb{N}$ پس $\forall x\, P(x)$ درست است.

(4) x زوج است و $P(x): x<6$ و $U=\mathbb{N}$. بنابراین گزاره $\exists x\, P(x)$ درست ولی $\forall x\, P(x)$ گزاره نادرست می‌باشد.

2. 4. 2 مثال. اگر $P(x)$ به معنی "x فرد است" باشد هریک از عبارت‌های زیر را با علائم سورها بنویسید.

(1) به‌ازای هر x، x فرد است.

(2) چنین نیست که به‌ازای هر x، x فرد است.

(3) xای وجود دارد که فرد است.

جواب مورد (1) عبارتست از $\forall x\, P(x)$ و جواب مورد (2) به‌صورت $\sim(\forall x\, P(x))$. معادل فارسی (2) یعنی x ای وجود دارد که فرد نیست، یعنی $\exists x \sim P(x)$. سرانجام جواب (3) بصورت $\exists x\; P(x)$ می‌باشد.

2. 4. 3 نکته. با توجه به مثال قبل داریم:

(الف) $\exists x(\sim P(x))$ به معنی $\sim(\forall x\, P(x))$ می‌باشد.

(ب) $\forall x(\sim P(x))$ به معنی $\sim(\exists x\, P(x))$ می‌باشد.

(ج) اگر $P(x,y)$ یک گزاره‌نمای دو متغیره باشد آنگاه صورهای دو متغیره $\forall x\, \forall y\, P(x,y)$، $\exists x\, \exists y\, P(x,y)$، $\forall x\, \exists y\, P(x,y)$ و $\exists x\, \forall y\, P(x,y)$ به زبان عادی قابل بیان هستند.

2. 4. 4 مثال. اگر $P(x,y)$ به معنی "x دو برابر y است" باشد، هر یک از عبارت‌های زیر را به زبان معمولی بیان کنید.

(1) $\sim P(x,y)$؛
(2) $\exists x\,(\sim P(x,y))$؛
(3) $\forall y\,\exists x\,(\sim P(x,y))$؛
(4) $\exists x\,\exists y\,P(x,y)$؛
(5) $\forall y\,\exists x(\sim P(x,y))$.

جواب‌ها به‌ترتیب عبارتند از:

x دو برابر y نیست. وجود دارد x که دو برابر y نیست. به ازای هر y وجود دارد x که x دو برابر y نیست. وجود دارد x وجود دارد y که x دو برابر y است. به ازای هر y وجود دارد x که x دو برابر y نیست.

2. 4. 5 نکته:

(1) $\sim(\forall x\forall y\,P(x,y))\cong\exists x\,\exists y\sim P(x,y)$؛
(2) $\sim(\forall x\ \ \exists y\,P(x,y)\cong\exists x\,\forall y\sim P(x,y)$؛
(3) $\sim(\exists x\,\forall y\,P(x,y)\cong\forall x\,\exists y\sim P(x,y)$؛
(4) $\sim(\exists x\,\exists y\,P(x,y)\cong\forall x\,\forall y\sim P(x,y)$.

2. 4. 6 مثال. درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بیان کنید و نقیض آنها را بنویسید $(U=\mathbb{R})$.

(1) $\forall x\,\exists y\,;\,x+y=2$؛
(2) $\exists y\,\forall x\,;\,x+y=2$؛
(3) $\exists x\,\forall y\,;\,xy=x$؛
(4) $\forall y\,\exists x\,;\,xy=x$.

حل. گزاره (1) درست است. زیرا به ازای هر x قرار می‌دهیم $y=2-x$ سپس $x+y=2$ و نقیض آن به‌صورت $\exists x\,\forall y\,;\,x+y\neq 2$ می‌باشد.

(2) با انتخاب y قرار می‌دهیم $x=-y$ سپس $x+y=\circ\neq 2$ پس نادرست است و نقیض آن به‌صورت $\forall y\,\exists x\,;\,x+y\neq 2$ می باشد.

(3) درست است. زیرا قرار می‌دهیم $x=\circ$ پس به ازای هر y داریم $xy=\circ\times y=\circ=x$.

(4) درست است. زیرا به ازای هر y عضو x را صفر معرفی می‌کنیم یعنی $x=\circ$ پس $xy=x$.

2. 4. 7 نکته. با توجه به قسمتهای اول و دوم مثال بالا ممکن است دو گزاره $\forall x\,\exists y\,P\,(x,y)$ و $\exists y\,\forall x\,P\,(x,y)$ معادل نباشند. یعنی جای $\exists$ و $\forall$ را نمی‌توان عوض کرد به عبارت دیگر گزاره $\forall x\,\exists y\,P\,(x,y)\Rightarrow\exists y\,\forall x\,P\,(x,y)$ ممکن است درست نباشد.

تمرین: نشان دهید که گزاره $\exists x \,\forall y\, P(x,y) \Rightarrow \forall y\, \exists x\, P(x,y)$ درست است.

5.2 استنتاج

1.5.2 تعریف. گزاره Q را **نتیجه منطقی** گزاره‌های $P_n,\ldots,P_2,P_1$ نامیم، هرگاه گزاره‌های $P_n,\ldots,P_2,P_1$ درست باشند آنگاه Q نیز درست باشد. اگر Q نتیجه منطقی گزاره‌های $P_n,\ldots,P_2,P_1$ باشد آنگاه $P_n,\ldots,P_2,P_1$ و Q را یک **بحث معتبر (استنتاج)** نامیم. می‌نویسیم $P_1,P_2,\ldots,P_n \mapsto Q$.

واضح است که بحث $P_1,P_2,\ldots,P_n \mapsto Q$ معتبر است، اگر و فقط اگر $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow Q$ درست باشد. همچنین اگر $P_1,\ldots,P_{n-1},P_n \to Q$ آنگاه $P_1,\ldots,P_{n-1} \mapsto (P_n \Rightarrow Q)$.

2.5.2 مثال. کدامیک از بحث‌های زیر معتبر است.

(1) $p \vee q,\ p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow r \mapsto r$ ؛

(2) $p \vee q,\ p \Rightarrow \sim q \mapsto q$.

حل. (1) فرض کنید r نادرست باشد. چون $q \Rightarrow r$ درست است، q نادرست است و از درستی گزاره دوم نادرستی p نتیجه میشود. بنابراین $p \vee q$ نادرست است که تناقض است.

برای اثبات (2)، فرض کنید q نادرست باشد. چون $\sim q$ و $p \Rightarrow \sim q$ درست است، پس p می تواند درست یا نادرست باشد. در حالتی که p درست است، گزاره‌های $p \vee q$ و $p \Rightarrow \sim q$ هر دو درست هستند ولی ممکن است q نادرست باشد یعنی (2) استنتاج نیست.

برای تحقیق معتبر بودن بحث‌ها می‌توان از جدول ارزش گزاره‌ها نیز استفاده نمود.

6.2 بعضی از انواع استدلال‌ها

برای اثبات یک حکم در ریاضی، با توجه به اطلاعات در فرض و حکم مساله، ما روشی را انتخاب می‌کنیم که سریعتر به هدف برسیم. در اینجا به بیان بعضی از روشهای اثباتی می‌پردازیم:

اثبات بوسیله مثال نقض. برای اینکه نشان دهیم گزاره $\forall x\, P(x)$ که $x \in U$، نادرست است، کافی است $a \in U$ را پیدا کنیم که $P(a)$ نادرست باشد. مثلاً گزاره " هر عدد اول فرد است " نادرست است. زیرا 2 عددی اول است ولی فرد نیست.

اثبات به برهان خلف. برای اثبات درستی گزاره $p \Rightarrow q$ ، فرض می‌کنیم q نادرست باشد باید بتوانیم نادرستی p یا نادرستی گزاره‌ای که قبلاً درستی آن ثابت شده است، را نتیجه بگیریم. در واقع ما

از معادل بودن $p \Rightarrow q$ با $\sim p \vee q$ استفاده می‌کنیم.

2. 6. 1 مثال. نشان دهید به ازای هر عدد طبیعی x، عدد x^2 زوج است اگر و فقط اگر x زوج باشد.

حل. کافی است، نشان دهیم:

(1) اگر x^2 زوج باشد، آنگاه x زوج است؛

(2) اگر x زوج باشد، آنگاه x^2 زوج است.

ابتدا (1) را ثابت می کنیم. به برهان خلف فرض کنید x فرد باشد پس $x = 2k+1$. بنابراین

$$x^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2t + 1,$$

عددی فرد است که تناقض می‌باشد.

برای اثبات (2) فرض کنید $x = 2k$، پس $x^2 = 4k^2 = 2s$ زوج است.

اثبات با استفاده از استقرای ریاضی: برای اثبات درستی گزاره‌هایی مانند $P(n)$ که شامل عدد طبیعی n هستند از استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم. اصل استقرا از اصول پئانو برای اعداد طبیعی (**1,3,8 را ببینید**) نتیجه می‌شود که بعداً آنرا بیان می‌کنیم.

2. 6. 2 استقرای ریاضی. گزاره $P(n)$ که $n \in \mathbb{N}$ را در نظر بگیرید بطوریکه

(1) $P(1)$ درست است و

(2) به ازای هر عدد طبیعی k، اگر $P(k)$ درست باشد آنگاه $p(k+1)$ نیز درست باشد.

در این‌صورت $P(n)$ به ازای هر عدد طبیعی n درست است.

گزاره $P(1)$ را پایه استقرا و گزاره $\forall k\,(P(k) \Rightarrow P(k+1))$ را گام استقرا می‌نامیم. همچنین گزاره $P(k)$ را فرض استقرا و $P(k+1)$ را حکم استقرا گوییم.

2. 6. 3 مثال. با استفاده از روش استقرا ثابت کنید که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

حل. داریم $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ پس $P(1)$ درست است.

فرض کنید $P(k): 1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ برقرار باشد، کافیست $P(k+1)$ را ثابت کنیم. داریم:

$$1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

پس $P(k+1)$ برقرار است و حکم با استفاده از استقرا ثابت می‌شود .

به ازای عدد طبیعی n و r که $\circ \le r \le n$ قرار می‌دهیم:

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

که $\circ!=1$ و $n!=1\times 2\times \ldots \times n$. به عنوان تمرین نشان دهید که

$$C(n,r)=C(n-1,r)+C(n-1,r-1).$$

4.6.2 مثال. اگر $x,\ y$ دو متغیر و n عددی طبیعی باشد آنگاه $(x+y)^n=\sum_{r=\circ}^{n}C(n,r)x^{n-r}y^r$.

حل. به ازای $n=1$ به وضوح برقرار است. فرض کنید حکم به ازای k برقرار باشد، یعنی $(x+y)^k=\sum_{r=\circ}^{k}C(k,r)x^{k-r}y^r$. پس داریم:

$$(x+y)^{k+1}=(x+y)(x+y)^k=(x+y)\sum_{r=\circ}^{k}C(k,r)x^{k-r}y^r=x^{k+1}+(C(k,\circ)+C(k,1))x^k y+$$

$$\ldots+(C(k,r-1)+C(k,r))x^{(k+1)-r}y^r+\ldots+y^{k+1}=\sum_{r=\circ}^{k+1}C(k+1,r)x^{k+1-r}y^r$$

و حکم به استقرا برقرار است.

تبصره. گاهی در استقرا، ابتدای استقرا را از صفر شروع می‌کنند که به آن استقرا با **پایه صفر** گویند.

استقرای ریاضی با پایه m

ممکن است گزاره‌نمای $P(n)$ به‌ازای چند عدد طبیعی نادرست باشد ولی عدد طبیعی m وجود داشته باشد بقسمی‌که به ازای هر $n\ge m$ گزاره $P(n)$ درست است. در این حالت از استقرای ریاضی با پایه m استفاده می‌کنیم. این بحث را به‌صورت زیر می‌نویسیم.

$$P(m),\ \forall k\ge m;\ P(k)\Rightarrow P(k+1)\mapsto \forall n\ge m,\ P(n).$$

5.6.2 مثال. نشان دهید که به ازای هر $n\ge 5$ داریم $2^n>n^2$.

حل. وقتی که $m=5$ داریم $2^5>5^2$ پس حکم برقرار است.

حال فرض کنید به ازای هر $k\ge 5$؛ $2^k>k^2$، آنرا برای $k+1$ ثابت می‌کنیم. با توجه به اینکه $k\ge 5$، داریم $2^k>2k+1$ (تحقیق کنید). بنابراین

$$2^{k+1}=2^k+2^k>k^2+2k+1=(k+1)^2$$

و حکم ثابت می‌شود.

6.6.2 مثال. اگر A یک مجموعه باشد و $|A|=n$ آنگاه $|P(A)|=2^n$.

حل. اگر $|A|=\circ$ پس $A=\phi$ و $P(A)=\{\phi\}$. بنابراین $|P(A)|=1=2^\circ$. حال فرض کنید حکم به ازای هر مجموعه k عضوی برقرار باشد، آنرا برای مجموعه‌های $k+1$ عضوی ثابت می کنیم. فرض کنید $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_k,a_{k+1}\}$ قرار می‌دهیم.

$$A=B\cup\{a_{k+1}\}.$$

اگر $D\subseteq A$ در این‌صورت فقط یکی از دوحالت زیر برقرار است:

(1) $D\subseteq B$؛

(2) $D=M\bigcup\{a_{k+1}\}$ که $M\subseteq B$.

چون $|B|=k$، در هر یک از حالتهای فوق تعداد D ها مساوی 2^k می‌باشد. بنابراین

$$|P(A)|=2^k+2^k=2^{k+1}$$

وحکم برقرار است.

تمرینات

1) فرض کنید p ، q و r گزاره‌هایی باشند، در این‌صورت

(i) اثبات قضیه 11,2,2 را تکمیل کنید.

(ii) $\begin{cases} p\wedge(q\vee p)\cong p \\ p\vee(p\wedge q)\cong p \end{cases}$ (قوانین جذب)

2) کدامیک از گزاره‌های زیر همیشه درست هستند.

(i) $(p\wedge(p\Rightarrow q))\Rightarrow q$؛

(ii) $(\sim p\vee q)\Leftrightarrow(p\Rightarrow q)$؛

(iii) $(p\vee q)\vee(\sim p)\Rightarrow q\wedge\sim p$.

3) فرض کنید p و q دو گزاره باشند. گزاره $p*q$ را در نظر می‌گیریم که جدول ارزش آن به‌صورت زیر است.

p	q	p * q
د	د	ن
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	د

نشان دهید که

(i) $(p_* q) \cong (\sim p) \vee (\sim q)$؛

(ii) $(\sim p) \cong p_* p$؛

(iii) $(p \wedge q) \cong (p_* q)_* (q_* p)$؛

(iv) $p \Rightarrow q \cong p_* (q_* q)$؛

(v) $p \vee q \cong (p_* p)_* (q_* q)$.

4) کدامیک از بحث‌های زیر معتبر است:

(i) $p \wedge q \,,\, p \Rightarrow \sim q \mapsto \sim q$؛

(ii) $p \wedge \sim q \,,\, q \Rightarrow p \mapsto \sim p$؛

(iii) $\sim p_a \mapsto \sim \forall x\, p_x$

(iv) $\forall x (p_x \Rightarrow q_x),\ \sim q_a \mapsto \sim \forall x\, p_x$

(v) $\forall x\ (p_x \vee q_x), \forall x (p_x \Rightarrow r_x), \forall x (q_x \Rightarrow r_x) \mapsto \forall x\, r_x$.

که p_x و q_x دو گزاره‌نما هستند و $a \in U$.

5) گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

(i) هر عدد طبیعی را می‌توان بصورت مجموع دو عدد اول نوشت؛

(ii) اگر A ، B و C مجموعه‌هایی باشند آنگاه $A-(B-C)=(A-B)-C$؛

(iii) کوچکترین عدد گویایی که از $\sqrt{3}$ بزرگتر باشد، وجود ندارد؛

(iv) اگر $x,y\in\mathbb{R}$ و به ازای هر $\varepsilon>0$ داشته باشیم $y\le x+\varepsilon$ آنگاه $y\le x$.

6) درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. نقیض این گزاره‌ها را بنویسید.

(i) $\forall x\in\mathbb{R}\ \ \exists y\in\mathbb{R};\ x\ge y$؛

(ii) $\exists x\in\mathbb{R}\ \ \forall y\in\mathbb{R};\ y=x+3$؛

(iii) $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ s.t.\ \forall x\in\mathbb{R};\ \ |x-1|<\delta\Rightarrow\left|\sqrt[4]{x}-1\right|<\varepsilon$؛

(iv) اگر X یک مجموعه باشد.

الف) $\forall A\in P(X)\ \exists B\in P(X);\ A\bigcup B=A$؛

ب) $\exists A\in P(X)\ s.t.\ \forall B\in P(X);\ A\bigcup B=B$؛

7) آیا بحث زیر معتبر است؟

اگر او در رشته پزشکی تحصیل کرده بود، درآمد خوبی داشت. اگر او در رشته ریاضی تحصیل کرده بود، برداشت منطقی از زندگی داشت. اگر او درآمدی مکفی و یا برداشتی منطقی از زندگی داشت، احساس بطالت نمی‌کرد. او احساس بطالت می‌کرد. بنابراین او در رشته پزشکی یا رشته ریاضی تحصیل نکرده بود.

8) به ازای هر عدد طبیعی n، ثابت کنید:

(i) $C(n,\circ)+C(n,1)+....+C(n,n)=2^n$؛

(ii) $1^3+2^3+3^3+....+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$؛

(iii) $\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{3\times4}+.....+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$.

9) فرض کنید $A=\{1,2,\cdots,9\}$ در اینصورت مطلوبست محاسبه

الف) تعداد زیرمجموعه های A که شامل 2 نباشد.

ب) تعداد زیرمجموعه های A که شامل 2 باشد.

ج) تعداد زیرمجموعه های A که شامل 5 نباشد ولی شامل 7 باشد.

د) تعداد زیرمجموعه های A که شامل 5 نباشد ولی شامل 7,8 باشد.

فصل سوم
ضرب دکارتی و رابطه

مفهوم رابطه در اکثر شاخه‌های ریاضی استفاده می‌شود. در این فصل ابتدا زوج مرتب را به عنوان نوعی مجموعه تعریف می‌کنیم و سپس رابطه را در مجموعه زوج‌های مرتب تعریف نموده و بعضی از خواص آنرا بررسی می‌کنیم.

1.3 ضرب دکارتی مجموعه‌ها

1,1,3 تعریف. فرض کنید x و y دو شی مفروض باشند. دراین‌صورت **زوج مرتب** x **و** y که با نماد (x,y) نشان می‌دهیم، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\},$$

که x را **مولفه اول** و y را **مولفه دوم** نامیم.

قضیه زیر به اثبات خاصیت اساسی زوج‌های مرتب می‌پردازد.

2.1.3 قضیه. $(x,y)=(u,v)$ اگر و فقط اگر $x=u$ و $y=v$.

برهان. ($\Rightarrow$**)** فرض کنید $x=u$, $y=v$ پس $\{x\}=\{u\}$, $\{x,y\}=\{u,v\}$ بنابراین

$$(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}=\{\{u\},\{u,v\}\}=(u,v)\ .$$

بعکس($\Leftarrow$**)** فرض کنید $(x,y)=(u,v)$. بنا به تعریف داریم:

$$\{\{x\},\{x,y\}\}=\{\{u\},\{u,v\}\}$$

و با در نظر گرفتن حالت‌های مختلف (مثلاً $\{x\}=\{u\}$, $\{x,y\}=\{u,v\}$)، حکم بدست می‌آید.

3.1.3 تعریف. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند در این‌صورت **ضرب دکارتی** A در B که با نماد $A\times B$ نشان می‌دهیم، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A\times B=\{(x,y)\,|\, x\in A,\ y\in B\}\ .$$

به عبارت دیگر $(x,y)\in A\times B$ اگر و فقط $x\in A$ و $y\in B$.

همچنین $A\times A$ را با نماد A^2 نشان می‌دهیم و به استقرا $A^n=A\times A^{n-1}$ تعریف می‌شود. مثلاً $\mathbb{R}^2$ متناظر صفحه در مختصات دکارتی می‌باشد.

4.1.3 مثال. فرض کنید $A=\{1,2\}$ و $B=\{a,b\}$ مطلوبست محاسبه
$A\times B,\ \ B\times A,\ \ A^2,\ B^2.$

حل. داریم

$$A\times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\},$$
$$B\times A=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2)\}$$

و بقیه به عنوان تمرین واگذار می‌شود.

5.1.3 مثال. مجموعه های A، B و C را در نظر بگیرید و نشان دهید:

(الف) $\phi\times A=A\times\phi=\phi$؛

(ب) اگر $A\neq\phi$ و $A\times B=A\times C$ آنگاه $B=C$؛

(ج) اگر $A,B\neq\phi$ و $A\times B=B\times A$ آنگاه $A=B$؛

(د) $A\times(B\bigcap C)=(A\times B)\bigcap(A\times C)$ ؛

(ه) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\bigcup(A\times C)$؛

(و) $A\times(B-C)=A\times B-A\times C$.

(ر) ممکن است گزاره های زیر برقرار نباشند

(1) $A\bigcup(B\times C)=(A\bigcup B)\times(A\bigcup C)$؛

(2) $A-(B\times C)=(A-B)\times(A-C)$.

(3) $A\bigcap(B\times C)=(A\bigcap B)\times(A\bigcap C)$

حل. (الف) به برهان خلف، فرض کنید $(x,y)\in\phi\times A$ پس $x\in\phi$ و $y\in A$ که تناقض است. پس $\phi\times A$ عضوی ندارد، یعنی $\phi\times A=\phi$ و اثبات $A\times\phi=\phi$ بطور مشابه است.

(ب) کافی است نشان دهیم $B\subseteq C$ و $C\subseteq B$.

ابتدا $B\subseteq C$. فرض کنید $x\in B$، چون $A\neq\phi$ پس a را عضوی از A انتخاب می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$(a,x)\in A\times B=A\times C\Rightarrow x\in C.$$

یعنی $B\subseteq C$. بطور مشابه $C\subseteq B$ و حکم ثابت می‌شود.

قسمت (د) را حل می‌کنیم

کافی است، ثابت کنیم:

$$A\times(B\bigcap C)\subseteq(A\times B)\bigcap(A\times C) \qquad (1)$$

و

$$(A\times B)\bigcap(A\times C)\subseteq A\times(B\bigcap C). \qquad (2)$$

برای اثبات (1)

$$(x,y)\in A\times(B\bigcap C)\Rightarrow x\in A\wedge(y\in B\bigcap C)\Rightarrow x\in A\wedge(y\in B\wedge y\in C).$$

بنا براین داریم:

$$(x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\in A\wedge y\in C)\Rightarrow(x,y)\in(A\times B)\cap(A\times C)$$

و قسمت (2) نیز بطور مشابه ثابت می‌شود.

برای اثبات قسمت اول از (ر)؛ قرار دهید $A=\{1\}, B=\{2\}, C=\{1\}$ و $A\bigcup(B\times C)$ ، $(A\bigcup B)\times(A\bigcup C)$ را محاسبه کنید.

برای اثبات قسمت دوم از (ر)؛ قرار دهید $A=\{1\}, B=C=\phi$ و $A-(B\times C)$ ، $(A-B)\times(A-C)$ را محاسبه کنید.

و بقیه را به عنوان تمرین به دانشجویان واگذار می‌کنیم.

تا کنون 2- تایی‌های مرتب (زوج مرتب) را تعریف نموده‌ایم. حال در موقعیتی هستیم که آنرا تعمیم دهیم. اگر x_1, x_2, x_3 اشیایی باشند، آنگاه 3- تایی مرتب (x_1,x_2,x_3) را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(x_1,x_2,x_3)=((x_1,x_2),x_3)$$

و به استقرا اگر x_1، x_2، ... و x_n اشیایی باشند $(n\geq 3)$ آنگاه $n-$ تایی $(x_1,x_2,...,x_n)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$(x_1,x_2,...,x_n)=((x_1,x_2,...,x_{n-1}),x_n).$$

قضیه زیر را می‌توان به استقرا ثابت نمود.

6.1.3 قضیه. برای هر عدد طبیعی $n\geq 2$ داریم:

$$(x_1,x_2,...,x_n)=(y_1,y_2,...,y_n)\Leftrightarrow x_i=y_i,\quad i=1,...,n.$$

7.1.3 نکته. مجموعه‌های $A_1, A_2, ...$ و A_n را در نظر بگیرید. دراین‌صورت

$$A_1\times A_2\times...\times A_n=\{(x_1,x_2,...,x_n)\mid x_i\in A_i\},$$

را ضرب دکارتی $A_1, A_2, ...$ و A_n نامیم. با استفاده تعریف 3- تایی مرتب، براحتی می‌توان دید که $A_1\times A_2\times A_3=(A_1\times A_2)\times A_3$. حال قرار می‌دهیم $A_1=\{1\},\ A_2=\{2\},\ A_3=\{3\}$. داریم $A_1\times A_2\times A_3=\{(1,2,3)\}$ ولی $A_1\times(A_2\times A_3)=\{(1,(2,3))\}$. واضح است:

$$(1,2,3)=((1,2),3)\neq(1,(2,3)).$$

یعنی

$$A_1\times A_2\times A_3\neq A_1\times(A_2\times A_3).$$

2.3 رابطه‌ها

1.2.3 تعریف. مجموعه های A و B را در نظر بگیرید. هر زیر مجموعه از $A\times B$ را یک **رابطه** از A به B نامیم. اگر $R\subseteq A\times B$ یک رابطه از A به B باشد و $(a,b)\in R$ می‌نویسیم aRb. بخصوص اگر $A = B$ گوییم R یک رابطه روی A است.

رابطه $R\subseteq A\times B$ را در نظر می‌گیریم. معکوس رابطه R که با نماد R^{-1} نشان می‌دهیم، بصورت زیر تعریف می‌شود:

$R^{-1}=\{(b,a)\mid (a,b)\in R\}.$

همچنین $domR=\{x\mid \exists y_\circ ; (x,y_\circ)\in R\}$ و $ranR=\{y\mid \exists x_\circ ; (x_\circ,y)\in R\}$ را بترتیب **دامنه** و **برد** R نامیم.

2.2.3 مثال‌ها:

(الف) مجموعه های A و B را در نظر بگیرید، ϕ یک رابطه از A به B است. همچنین $A\times B$ نیز یک رابطه از A به B می‌باشد.

(ب) فرض کنید $A=\{1,a,b\}$ و $B=\{2,1,3\}$. در این‌صورت $R=\{(1,1),\ (1,2)\}$ یک رابطه از A به B است ولی $S=\{(1,2,),\ (2,a)\}$ یک رابطه از A به B نیست.

3.2.3 مثال. دامنه، برد و معکوس هر یک از رابطه‌های زیر را بدست آورید.

(1) $R=\{(a,b),(2,1),(1,1)\}$؛

(2) $R=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}, x^2+y^2=1\}$؛

(3) $R=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}; y=2x+1\}$؛

(4) $R=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\ x=|y|\}$.

حل. (1) $ranR=\{b,1\}$، $domR=\{a,2,1\}$ و $R^{-1}=\{(b,a),(1,2),(1,1)\}$.

(2) $domR=ranR=[-1,1]$ و $R^{-1}=\{(y,x)\mid x,y\in\mathbb{R},\ x^2+y^2=1\}$.

(3) $domR=ranR=\mathbb{R}$ و $R^{-1}=\{(y,x)\mid x,y\in\mathbb{R},\ y=2x+1\}$.

همچنین $R^{-1}=\left\{(x,y)\,\middle|\, x,y\in\mathbb{R};\ y=\dfrac{x-1}{2}\right\}$ نمایش دیگری از R^{-1} می‌باشد.

(4) $domR=\mathbb{N}\cup\{\circ\}$، $ranR=\mathbb{Z}$ و داریم:

$$R^{-1}=\{(y,x)\mid x,y\in\mathbb{Z},\ x=|y|\}.$$

4.2.3 تعریف. فرض کنید R یک رابطه از A به B باشد و $D\subseteq A$. در این‌صورت **تحدید رابطه** R روی D که با نماد $R_{|D}$ نشان می‌دهیم، بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$R_{|D}=\{(x,y)\in R \mid x\in D\}.$$

مثلاً تحدید $R=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R},\ x^2+y^2=1\}$ روی $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ بصورت زیر است:

$$R_{|\mathbb{N}}=\{(1,\circ)\},\ R_{|\mathbb{Z}}=\{(\circ,1),(\circ,-1),(-1,\circ),(1,\circ)\}$$

5.2.3 قضیه. فرض کنید R و S دو رابطه باشند. در این‌صورت

(الف) $domS=ran(S^{-1})$ و $ran(S)=dom(S^{-1})$.

(ب) $(R\bigcap S)^{-1}=R^{-1}\bigcap S^{-1}$ و $(R\bigcup S)^{-1}=R^{-1}\bigcup S^{-1}$.

(ج) اگر A و B دو مجموعه باشند، آنگاه $R_{|A\cap B}=R_{|A}\bigcap R_{|B}$ و $R_{|A\cup B}=R_{|A}\bigcup R_{|B}$.

برهان (الف) کافی است، نشان دهیم $domS\subseteq ran(S^{-1})$ و $ran(S^{-1})\subseteq domS$.

فرض کنید $x_\circ\in ran(S^{-1})$. پس وجود دارد $y_\circ$ بقسمی که $(y_\circ,x_\circ)\in S^{-1}$ بنابراین $(x_\circ,y_\circ)\in S$ یعنی $x_\circ\in domS$. حال فرض کنید $x_1\in domS$ پس y_1 وجود دارد بقسمی که $(x_1,y_1)\in S$. بنابراین $(y_1,x_1)\in S^{-1}$ یعنی $x_1\in ran(S^{-1})$ و قسمت دوم بطور مشابه ثابت می‌شود.

(ب) برای اثبات قسمت اول کافی است، نشان دهیم:

$$\left((R\bigcap S)^{-1}\subseteq R^{-1}\bigcap S^{-1}\right)\wedge\left(R^{-1}\bigcap S^{-1}\subseteq (R\bigcap S)^{-1}\right).$$

فرض کنید $(y_\circ,x_\circ)\in(R\bigcap S)^{-1}$. پس داریم:

$$(x_\circ,y_\circ)\in R\bigcap S\Rightarrow (x_\circ,y_\circ)\in R\wedge(x_\circ,y_\circ)\in S$$
$$\Rightarrow (y_\circ,x_\circ)\in R^{-1}\wedge(y_\circ,x_\circ)\in S^{-1}\Rightarrow (y_\circ,x_\circ)\in R^{-1}\bigcap S^{-1}.$$

حال فرض کنید $(y_0,x_0)\in R^{-1}\bigcap S^{-1}$. داریم

$$(y_0,x_0)\in R^{-1}\wedge(y_0,x_0)\in S^{-1}\Rightarrow (x_0,y_0)\in R\bigcap S\Rightarrow (y_0,x_0)\in (R\bigcap S)^{-1}.$$

قسمت دوم (ب) بعنوان تمرین ثابت گردد.

اثبات قسمت اول (ج) بعنوان تمرین واگذار می‌شود. برای اثبات قسمت دوم کافی است، ثابت کنیم.

$$R_{|A\cup B}\subseteq R_{|A}\bigcup R_{|B},\ \ R_{|A}\bigcup R_{|B}\subseteq R_{|A\cup B}.$$

برای اثبات $R_{|A\cup B}\subseteq R_{|A}\bigcup R_{|B}$ داریم:

$$(x_\circ,y_\circ)\in R_{|A\cup B}\Rightarrow x_\circ\in A\bigcup B,\ (x_\circ,y_\circ)\in R$$
$$\Rightarrow (x_\circ\in A\wedge(x_\circ,y_\circ)\in R)\vee(x_\circ\in B\wedge(x_\circ,y_\circ)\in R$$
$$\Rightarrow (x_\circ,y_\circ)\in R_{|A}\vee(x_\circ,y_\circ)\in R_{|B}\Rightarrow (x_\circ,y_\circ)\in R_{|A}\bigcup R_{|B}.$$

ادامه اثبات، بعنوان تمرین واگذار می‌گردد.

3. 2. 6 تعریف. فرض کنید R و S دو رابطه باشند. **ترکیب رابطه** R با S که با نماد RoS نشان می‌دهیم، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Ro\,S = \left\{ \left(x,y\right) \,\middle|\, \exists z,(x,z)\in S \wedge (z,y)\in R \right\}.$$

بنابه تعریف واضح است که RoS نیز یک رابطه است.

3. 2. 7 مثال. فرض کنید $R=\{(1,2),(3,4)\}$ و $S=\{\,(2,5),(5,1),(2,3)\,\}$. مطلوبست محاسبه
$So\,S,\ RoR,\ Ro\,S,\ SoR$.

حل. داریم:

$$So\,S=\left\{\left(2,1\right)\right\},\ Ro\,R=\phi,\ R\,o\,S=\left\{\left(5,2\right),\left(2,4\right)\right\},\ S\,o\,R=\left\{\left(1,5\right),\left(1,3\right)\right\}.$$

با توجه به مثال قبل، ترکیب توابع خاصیت جابجایی ندارد ولی قضیه زیر نشان می‌دهد که ترکیب توابع دارای خاصیت شرکتپذیری است.

3. 2. 8 قضیه. برای روابط مفروض R، S و T داریم:

$$\mathrm{Ro(SoT)} = \mathrm{(RoS)oT}.$$

برهان. کافی است، ثابت کنیم:

$$(1)\quad Ro(SoT)\subseteq (RoS)oT \qquad\qquad (2)\quad (RoS)oT\subseteq Ro(SoT).$$

برای اثبات (1)، فرض کنید $(x,y)\in Ro(SoT)$. با استفاده از تعریف ترکیب رابطه‌ها و شرکتپذیری ترکیب $\wedge$ داریم:

بنابراین

$$\begin{aligned}
&\exists z\ s.t.\ (x,z)\in SoT\wedge (z,y)\in R\\
&\Rightarrow \exists u\ s.t.\big((x,u)\in T\wedge (u,z)\in S\big)\wedge (z,y)\in R\\
&\Rightarrow (x,u)\in T\wedge ((u,z)\in S\wedge \left(z,y\right)\in R)\Rightarrow \left(x,u\right)\in T\wedge \left(u,y\right)\in RoS\\
&\Rightarrow \left(x,y\right)\in \left(RoS\right)oT.
\end{aligned}$$

رابطه (2)، بطور مشابه ثابت می‌شود.

3. 2. 9 قضیه. اگر R و S دو رابطه باشند، آنگاه $(RoS)^{-1}=S^{-1}oR^{-1}$.

برهان. کافی است، ثابت کنیم:

$$(1)\qquad (RoS)^{-1}\subseteq S^{-1}oR^{-1};$$

$$(2)\qquad S^{-1}oR^{-1}\subseteq (RoS)^{-1}.$$

برای اثبات (1)، فرض کنید $(x,y)\in (RoS)^{-1}$. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
&(y,x)\in RoS\Rightarrow \exists z\ s.t.\ (y,z)\in S\wedge (z,x)\in R\\
&\qquad\Rightarrow (z,y)\in S^{-1}\wedge (x,z)\in R^{-1}\Rightarrow (x,y)\in S^{-1}oR^{-1}
\end{aligned}$$

و برای اثبات رابطه (2)، فرض کنید $(x,y)\in S^{-1}oR^{-1}$. با استفاده از تعریف داریم:

$$\exists z \; s.t.\, (x,z)\in R^{-1}\wedge (z,y)\in S^{-1} \Rightarrow (z,x)\in R \wedge (y,z)\in S$$
$$\Rightarrow (y,x)\in RoS \Rightarrow (x,y)\in (Ro\,S)^{-1}$$

و حکم برقرار است.

نماد گذاری. وقتی R یک رابطه باشد، گاهی بجای $(x,y)\in R$ می‌نویسیم xRy.

فرض کنید $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ یک مجموعه و R یک رابطه روی A باشد. **جدول متناظر رابطه** R را بصورت زیر می‌توانیم تشکیل دهیم.

ابتدا عناصر $a_n,...,a_2,a_1$ را در سطر و ستون اول قرار می‌دهیم و به ازای هر $i,j\in\{1,2,...,n\}$ درایه متناظر a_{ij} را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & (a_i,a_j)\in R \quad \text{اگر} \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت}\end{cases}$$

10,2,3مثال. $R=\{(a,b),(c,d),(d,d),(d,c)\}$ را در نظر بگیرید. جدول رابطه فوق بصورت زیر است.

	a	**b**	**c**	**d**
a	۰	1	۰	۰
b	۰	۰	۰	۰
c	۰	۰	۰	1
d	۰	۰	1	1

تمرینات

در تمرینات زیر فرض کنید $A,\ B,\ C,\ D$ مجموعه‌های دلخواه باشند.

1) شرایطی را تعیین کنید که $A\times B=B\times A$.
2) اگر $A\times C=B\times C$ و $C\neq\phi$، آنگاه $A=B$.
3) اگر $A\subseteq B$ ثابت کنید $A\times C\subseteq B\times C$.
4) اگر $|A| = m$ و $|B|=n$، آنگاه $|A\times B|=?$.

5) مجموعه‌های زیر را توصیف کنید.

الف) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x=0\}$.

ب) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ \ |x|+|y|\le 1\}$.

ج) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid\ x=y=z\}$.

6) فرض کنید که $|A|=2$ و $|B|=3$. چند رابطه متمایز از A به B وجود دارد؟

7) حاصل ضرب دکارتی $A\times A$ دارای 9 عضو است و $(\circ,-1),(1,\circ)\in A\times A$. مطلوبست تعیین عضوهای مجموعه A.

8) اگر $D\bigcap C=\phi$، آنگاه $(A\times C)\bigcap(B\times D)=\phi$.

9) نشان دهید که حاصل‌ضرب دکارتی خاصیت شرکت‌پذیری ندارد.

10) اثبات مثال 3. 1. 5، را کامل کنید

11) قضیه 6,1,3، را ثابت کنید.

12) فرض کنید A و B دو مجموعه باشند که $A^3=B^3$ نشان دهید $A=B$.

13) اگر R یک رابطه باشد، ثابت کنید:

الف) $R_{|A\cap B}=(R_{|A})\bigcap(R_{|B})$, $R_{|A\cup B}=(R_{|A})\bigcup(R_{|B})$.

ب) $R_{|A-B}=(R_{|A})-(R_{|B})$، $R_{|A\Delta B}=(R_{|A})\Delta(R_{|B})$.

14) رابطه‌های R، S و T مفروضند. ثابت کنید که

الف) $Ro(S\bigcup T)=(RoS)\bigcup(RoT)$.

ب) $(S\bigcup T)oR=(SoR)\bigcup(ToR)$.

15) فرض کنید R، S و T رابطه‌های مفروض باشند. ثابت کنید که

الف) $Ro(S\bigcap T)\subseteq(RoS)\bigcap(RoT)$.

ب) $(R\bigcap S)oT\subseteq(RoT)\bigcap(SoT)$.

ج) نشان دهید که در قسمت‌های اول و دوم، ممکن است تساوی برقرار نباشد.

فصل چهارم
توابع و مفاهیم وابسته به آن

یکی از مفاهیم اساسی در هر شاخه از ریاضی، تابع است. تابع در واقع رابطه‌ای است بـا شـرایط خـاص. دراین فصل ابتدا تعریف تابع و بعضی از خصوصیات آن را بیان می‌کنیم وسپس به بررسی توابع یکبیـک، پوشا، تصویر وتصویر معکوس تابع می‌پردازیم. بخش آخراین فصل به ویژگی جهانی ضـرب و هـم‌ضـرب اختصاص دارد.

1,4 توابع

1,1,4 تعریف. مجموعه‌های A و B مفروضند و $f \subseteq A \times B$. در این‌صورت f را یـک **تـابع** از A به B نامیم هرگاه:

(الف) $A = dom(f)$ ؛

(ب) اگر $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f$ و $x_1 = x_2$ ، آنگاه $y_1 = y_2$.

می نویسیم $f : A \to B$ یک تابع است. و اگر $(x, y) \in f$ می‌نویسـیم $y = f(x)$. شـرط دوم را **خوش تعریفی** رابطه f نیز گوییم. گاهی اوقات از نمادهای D_f و R_f برای نمایش دامنـه و بـرد تابع f (بترتیب) استفاده می‌کنیم.

2,1,4 مثال‌ها:

(1) رابطه R $\{(1,2), (1,3), (2,5)\}$= تابع نیست زیرا $(1,2), (1,3) \in f$ ولی $2 \neq 3$

(2) رابطه R $\{(2,3),(4,3),(1,5)\}$= یک تابع است.

(3) رابطه $\phi \subseteq \phi \times B$ به انتفای مقدم تابع است.

3,1,4 قضیه. فرض کنید f و g دو تابع باشند. نشان دهید که fog نیز تابع است.

برهان. فرض کنید $(x, y_1), (x, y_2) \in fog$. بنابراین وجود دارد z_1, z_2 بقسمی‌که

$$\begin{cases} (x, z_1) \in g \wedge (z_1, y_1) \in f; \\ (x, z_2) \in g \wedge (z_2, y_2) \in f. \end{cases}$$

چون g تابع است پس $z_1 = z_2$ بنابراین $(z_1, y_1), (z_1, y_2) \in f$. همچنین f تابع است، بنابراین $y_1 = y_2$ و حکم ثابت می‌شود.

4,1,4 قضیه. فرض کنید f و g دو تابع باشند. در این‌صورت $f = g$ اگر و فقط اگر

(الف) $D_f = D_g$ و

(ب) به ازای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $f(x) = g(x)$.

برهان. فرض کنید $f = g$. برای اثبات (الف) کافی است، نشان دهیم $D_f \subseteq D_g$ و $D_g \subseteq D_f$.

فرض کنید $x \in D_f$ بنابراین:

$$\exists y \, s.t. \, (x,y) \in f \wedge f = g \Rightarrow (x,y) \in g \Rightarrow x \in D_g .$$

بطورمشابه $D_g \subseteq D_f$. حال فرض کنید $x \in D_f$ و $y = f(x)$.بنابراین داریم:

$$(x,y) \in f \wedge (f = g) \Rightarrow (x,y) \in g \Rightarrow y = g(x).$$

بعکس $(\Rightarrow)$ کافی است، ثابت کنیم $f \subseteq g$, $g \subseteq f$.

فرض کنید $(x,y) \in f$ بنابراین $y = f(x)$ و $x \in D_f$. چون $D_f = D_g$ و شرط (ب) برقرار است، داریم $x \in D_g$ و $y = g(x)$. در نتیجه $(x,y) \in g$ یعنی $f \subseteq g$. بطور مشابه میتوان نشان داد که $g \subseteq f$ و حکم نتیجه می‌شود.

5,1,4 قضیه. فرض کنید f و g دو تابع باشند داریم:

(الف) $(fog)(x) = f(g(x))$؛

(ب) $\mathrm{ran}(fog) \subseteq \mathrm{ran}(f)$ و $\mathrm{dom}(fog) \subseteq \mathrm{dom}(g)$.

برهان. (الف) فرض کنید $y = (fog)(x)$ بنابراین داریم:

$$(x,y) \in fog \Rightarrow \exists z \;\; s.t. \; (x,z) \in g \wedge (z,y) \in f \Rightarrow z = g(x) \wedge y = f(z).$$

با جایگذاری مقدار z در $y = f(z)$ داریم $y = f(g(x))$ وحکم ثابت می‌شود.

برای اثبات (ب) فرض کنید $x \in dom(fog)$. بنابراین

$$\exists y \;\; s.t. \;\; (x,y) \in fog \Rightarrow y = (fog)(x) = f(g(x)) \Rightarrow x \in dom(g).$$

قسمت دوم را بعنوان تمرین نشان دهید .

نماد گذاری. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. در این‌صورت مجموعه همه توابع از A به B را با نماد B^A نشان می‌دهیم.

6,1,4 مثال‌ها:

(1) اگر $A = \phi$ به ازای هر B (چون $\phi \subseteq A \times B = \phi$) آنگاه $\phi : A \to B$ یک تابع است. پس $\left|B^{\phi}\right| = 1$.

(2) اگر $A \neq \phi$ و $B = \phi$ آنگاه $\left|\phi^{A}\right| = 0$. زیرا هیچ تابعی از A به B وجود ندارد.

(3) اگر $A = \{1\}$ و $B = \{1,2,\ldots,n\}$ آنگاه $\left|B^{A}\right| = n$ و $\left|A^{B}\right| = 1$.

7,1,4 نکته. فرض کنید f تابع باشد. دیدیم که fof نیز یک تابع است. قرار می‌دهیم $f^1 = f$ و $f^2 = fof$ و به استقرا فرض کنید f^{n-1} تعریف شده باشد. دراین‌صورت $f^n = fof^{n-1}$ را تعریف می‌کنیم.

8,1,4 تعریف. فرض کنید A_1، A_2، ...، A_n و B مجموعه‌هایی باشند. در این‌صورت هر تابع $f : A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \longrightarrow B$ را یک تابع n **متغیره** نامیم.

مثلا $\underset{(x,y)}{f : \mathbb{R}^2} \underset{\to}{\longrightarrow} \underset{x^2+y+1}{\mathbb{R}}$ و $\underset{(x,\,y)}{g : \mathbb{R}^2} \underset{\to}{\longrightarrow} \underset{[x]+[y]+3}{\mathbb{Z}}$ (که $[x]$ جزء صحیح x است) توابع دو متغیره هستند.

9,1,4 تعریف. فرض کنید $A \neq \phi$ یک مجموعه باشد. در این‌صورت هر تابع $* : A \times A \to A$ را یک **عمل دوتایی روی** A نامیم. بعد از این بجای $*(x,y)$ می‌نویسیم $x*y$.

10,1,4 مثال : (1) $\underset{(m,n)}{+ : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \underset{\to}{\to} \underset{m+n}{\mathbb{Z}}$ یک عمل دوتایی روی $\mathbb{Z}$ است.

(2) $\underset{(m,n)}{\times : \mathbb{N}\times\mathbb{N}} \underset{\to}{\to} \underset{mn}{\mathbb{N}}$ (ضرب) یک عمل دوتایی روی $\mathbb{N}$ است.

(3) $\underset{(r,s)}{- : \mathbb{R}\times\mathbb{R}} \underset{\to}{\to} \underset{r-s}{\mathbb{R}}$ (تفریق) یک عمل دوتایی روی $\mathbb{R}$ می‌باشد.

(4) $\underset{(A,B)}{\times : M_{2\times2}\times M_{2\times2}} \underset{\to}{\to} \underset{AB}{M_{2\times2}}$ (ضرب بین ماتریس‌های 2×2) یک عمل دوتایی است.

(5) $\underset{(r,s)}{- : \mathbb{N}\times\mathbb{N}} \underset{\to}{\to} \underset{r-s}{\mathbb{N}}$ (تفاضل) در $\mathbb{N}$ عمل دوتایی نیست. زیرا مثلا $2-3 \notin \mathbb{N}$ پس "ـ" از $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ تابع نیست.

(6) $\underset{(r,s)}{\div : \mathbb{R}\times\mathbb{R}} \underset{\to}{\to} \underset{\frac{r}{s}}{\mathbb{R}}$ (تقسیم روی $\mathbb{R}$)عمل دوتایی نیست. زیرا $\div(2,0) = \frac{2}{0} \notin \mathbb{R}$.

11,1,4 تعریف. فرض کنید $*$ یک عمل دوتایی روی A باشد.

(1) عمل $*$ را **جابجایی** نامیم، هرگاه به ازای $\forall x,y \in A$ داشته باشیم $x*y = y*x$.

(2) عمل $*$ را **شرکتپذیر** نامیم، هرگاه $\forall x,y,t \in A$ داشته باشیم $x*(y*t) = (x*y)*t$.

12,1,4 مثال.(1) عمل + روی $\mathbb{Z}$ جابجایی و شرکتپذیر است.

(2) عمل × روی $\mathbb{R}$ جابجایی و شرکتپذیر است.

(3) عمل ـ روی $\mathbb{Z}$ جابجایی و شرکتپذیر نیست. زیرا $2-3 \neq 3-2$ و $(4-3)-2 \neq 4-(3-2)$.

(4) عمل × روی ماتریس‌های 2×2 ، ($M_{2\times2}$) جابجایی نیست ولی شرکتپذیر است.

(5) عمل ترکیب روی توابع حقیقی جابجایی نیست ولی شرکتپذیر است.

13,1,4 تعریف. فرض کنید اعمال $*_1$، $*_2$،... و $*_n$ روی A تعریف شده باشند، در این‌صورت گوئیم $(\mathrm{A}, *_1, ..., *_n)$ **یک دستگاه جبری است. عمل** $*_1$ **را نسبت به** $*_2$ **توزیعپذیر** گوئیم هرگاه:

$$\forall x, y, t \in \mathrm{A}; \quad \begin{cases} x *_1 (y *_2 t) = (x *_1 y) *_2 (x *_1 t), \\ (x *_2 y) *_1 t = (x *_1 t) *_2 (y *_1 t). \end{cases}$$

14,1,4 مثال.(1) عمل $\times$ نسبت به $+$ در $\mathbb{Z}$ توزیعپذیر است.

(2) عمل $\cap$ نسبت به $\cup$ در $P(X)$ توزیعپذیر است.

(3) عمل $+$ نسبت به $\times$ در $\mathbb{Z}$ توزیعپذیر نیست. زیرا $(2+4) \times (2+3) \neq 2+3\times 4$.

2,4 توابع معکوسپذیر، یک به یک و پوشا

در این قسمت ابتدا به تعاریف توابع معکوس‌پذیر، یک‌به‌یک و پوشا می‌پردازیم و قضایایی را بیان می‌کنیم که ارتباط این مفاهیم با یکدیگر را مشخص می‌کنند.

1,2,4 **تعریف.** فرض کنید A و B دو مجموعه و $f: A \to B$ یک تابع باشد. در این‌صورت

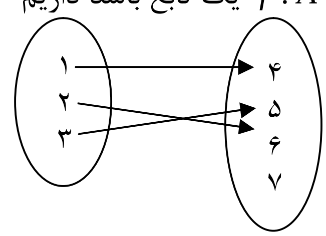
(الف) تابع $\underset{x \to x}{i: A \to A}$ را تابع همانی روی A نامیم و با i_A نشان می‌دهیم .

(ب) تابع $g: B \to A$ را معکوس چپ f نامیم، هرگاه $gof = i_A$.

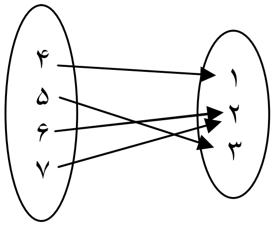
(ج) تابع $h: B \to A$ را معکوس راست f نامیم، هرگاه $foh = i_B$.

۱,۲,۴ **مثال‌ها:**

(1) اگر $f: A \to B$ یک تابع باشد داریم $i_B o f = f$ و $foi_A = f$.

(2) تابع $f:$ 

را در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم:

$g:$ 

اکنون داریم:

$$(gof)(1) = g(f(1)) = g(4) = 1,$$
$$(gof)(2) = g(f(2)) = g(6) = 2,$$
$$(gof)(3) = g(f(3)) = 3.$$

بنابراین به ازای هر $x \in A = \{1, 2, 3\}$ داریم $(gof)(x) = x$، یعنی $gof = i_A$. پس g معکوس چپ f است

(3) تابع g که در قسمت دوم معرفی شده، دارای معکوس راست است (ثابت کنید). چندتا معکوس راست دارد؟

3,2,4 **قضیه**. فرض کنید $f : A \to B$ یک تابع باشد که دارای معکوس چپ g و معکوس راست h است. در این‌صورت $g = h$.

برهان. بنا به تعریف داریم $foh = i_B$ و $gof = i_A$. بنابراین

$$g = goi_B = go(foh) = (gof)oh = i_A oh = h.$$

قضیه قبل زمینه تعریف معکوس تابع را فراهم می‌کند. همچنین نتایج مهم دیگری نیز دارد.

4,2,4 تعریف. فرض کنید $f : A \to B$ یک تابع باشد**،** گوییم f **معکوس‌پذیر** است، هرگاه تابعی مانند $g : B \to A$ وجود داشته باشد که $fog = i_B$ و $gof = i_A$.

بطور معادل می‌توان گفت: تابع $f : A \to B$ معکوسپذیر است اگر و فقط اگر f دارای معکوس چپ و معکوس راست باشد (بنا به قضیه قبل).

5,2,4 نتیجه. فرض کنید $f : A \to B$ یک تابع باشد. در این‌صورت معکوس f (در صورت وجود) منحصربه‌فرد است.

برهان. فرض کنید h و g معکوس‌های f باشند. پس f دارای معکوس چپ g و معکوس راست h است و بنا به قضیه قبل $g = h$.

گاهی اوقات که ابهامی نباشد، بجای نماد تابع i_A از i استفاده می‌کنیم.

6,2,4 نکته. اگر f تابعی معکوس‌پذیر باشد آنگاه معکوس f را با f^{-1} نشان می‌دهیم. بنابراین داریم $fof^{-1} = f^{-1}of = i$ واگر $f : A \to B$ یک تابع معکوسپذیر باشد، گوییم f یک **تناظر یک‌به‌یک** است.

7,2,4 نتیجه. فرض کنید f و g توابع معکوسپذیر باشند**،** در این‌صورت

(الف) f^{-1} معکوس پذیر است و $(f^{-1})^{-1} = f$؛

(ب) fog نیز معکوس پذیر است و $(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$.

برهان (الف) به‌سادگی از تعریف معکوس f و نتیجه 5,2,4 بدست می‌آید.

برای اثبات (ب) داریم :

$$(fog)o(g^{-1}of^{-1}) = fo(go(g^{-1}of^{-1})) = fo(gog^{-1})of^{-1} = foiof^{-1} = i$$

و بطور مشابه $(g^{-1}of^{-1})o(fog) = i$ و حکم از نتیجه 5,2,4 بدست می‌آید.

8,2,4 تعریف. فرض کنید $f : A \to B$ یک تابع باشد. در این‌صورت

(الف) f را پوشا می‌نامیم هرگاه

$$\forall y \in B \ \exists x \in A \ s.t. \ y = f(x).$$

(ب) f را یک‌به‌یک می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر $x_1, x_2 \in A$، اگر $f(x_1) = f(x_2)$ آنگاه $x_1 = x_2$.

9,2,4 مثال. (1) $\underset{x \to x}{i : A \to A}$ یک‌به‌یک و پوشا است.

(2) $\underset{x \to x^2}{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ (یعنی $f(x) = x^2$) نه یک‌به‌یک و نه پوشا است

(3) تابع $y = f(x) = x^3 + x^2 - x$ از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ پوشاست، ولی یک‌به‌یک نیست.

(4) فرض کنید $A \neq \phi$ یک مجموعه باشد. در این‌صورت تابع $f : A \to P(A)$ با ضابطه $f(x) = \{x\}$ یک‌به‌یک است ولی پوشا نیست.

(5) فرض کنید A و B دو مجموعه ناتهی باشند و $a \in A$، $b \in B$. در این‌صورت توابع $\underset{(x,y) \to x}{p : A \times B \to A}$، $\underset{(x,y) \to y}{q : A \times B \to B}$ پوشا هستند و توابع $\underset{x \to (x,b)}{f : A \to A \times B}$، $\underset{y \to (a,y)}{g : B \to A \times B}$ یک‌به‌یک.

همچنین داریم:

$$qoq = q, \quad pop = p, \quad qog = id_B, \quad pof = id_A.$$

توابع p و q را بترتیب **توابع تصویر روی** A و B نامیم.

قضایای زیر روابط بین توابع یک به یک و پوشا و توابع معکوس‌پذیر را مشخص می‌کنند.

10,2,4 قضیه. فرض کنید $f : A \to B$ یک تابع باشد.

(الف) اگر f معکوس چپ داشته باشد، آنگاه f یک‌به‌یک است.

(ب) اگر f دارای معکوس راست h باشد، آنگاه f پوشا است.

برهان (الف) فرض کنید g معکوس چپ f باشد و $f(x_1)=f(x_2)$ بنابراین داریم:

$$g(f(x_1))=g(f(x_2))\Rightarrow (gof)(x_1)=(gof)(x_2)$$
$$\Rightarrow i_A(x_1)=i_A(x_2)\Rightarrow x_1=x_2.$$

(ب) به‌ازای هر $y\in B$ داریم:

$$y=i_B(y)=(foh)(y)=f(h(y)).$$

قرار می‌دهیم $x=h(y)$. بنابراین $y=f(x)$ یعنی f پوشاست.

11,2,4 قضیه. فرض کنید $f:A\to B$ یک تابع باشد.

(الف) اگر $A\neq\phi$ و f یک‌به‌یک باشد، آنگاه f معکوس چپ دارد.

(ب) اگر f پوشا باشد، آنگاه f معکوس راست دارد.

(ج) تابع f پوشا و یک به یک است اگر و فقط اگر f معکوس‌پذیر باشد.

برهان (الف). فرض کنید $a_\circ\in A$. ضابطه $g:B\to A$ را با ضابطه زیر در نظر می‌گیریم:

$$\forall y\in B;\quad g(y)=\begin{cases} x & y=f(x) \text{ و } y\in \operatorname{Im}g(f) \quad \text{اگر} \\ a_\circ & y\notin \operatorname{Im}g(f) \quad \text{واگر}\end{cases}$$

کافی است، نشان دهیم که g تابع است و $gof=i_A$. فرض کنید $y_1=y_2$. اگر $y_1\in \operatorname{Im}g(f)$ آنگاه وجود دارند $x_1,x_2\in A$ بقسمی‌که $y_1=f(x_1)$ و $y_2=f(x_2)$. همچنین f یک به یک است پس $x_1=x_2$. بنابراین $g(y_1)=x_1=x_2=g(y_2)$. اگر $y_1\notin \operatorname{Im}g(f)$ پس $g(y_1)=a_\circ=g(y_2)$ یعنی g تابع است. حال $\forall x\in A; (gof)(x)=g(f(x))=x$ در نتیجه $gof=i_A$ پس g معکوس چپ f است.

برای اثبات (ب)؛ چون f پوشا است، به ازای هر $y\in B$ حداقل یک x در A وجود دارد که $y=f(x)$. اکنون ضابطه $g:B\to A$ را بصورت $g(y_\circ)=x_\circ$ در نظر می‌گیریم (که $x_\circ$ فقط یک عضوی است‌که $y_\circ=f(x_\circ)$). بنابراین g تابع می‌باشد و داریم:

$$\forall y_\circ\in B; (fog)(y_\circ)=f(g(y_\circ))=f(x_\circ)=y_\circ.$$

در نتیجه g معکوس راست f است و حکم برقرار است. (توضیح اینکه اثبات این قسمت از قضیه، با کمی مسامحه بیان شده است. اثبات دقیق آن را بعد از بیان اصل انتخاب ملاحظه خواهید نمود).

(ج) از قسمتهای (الف) و (ب) و قضیه 10,2,4 بدست می‌آید.

12,2,4 مثال‌ها:

(1) فرض کنید f و g دو تابع باشند که fog معکوس‌پذیر است، آنگاه g یک‌به‌یک و f پوشاست.

حل. چون fog معکوس پذیر است، وجود دارد h بقسمی که

$(fog)oh = ho(fog) = i \Rightarrow fo(goh) = (hof)og = i.$

واضح است که g معکوس چپ دارد و f معکوس راست. و با استفاده از قضیه 10,2,4، حکم برقرار است.

(2) فرض کنید f و g دو تابع باشند که fog معکوس پذیر باشد آیا g یا f معکوس پذیرند؟

حل. قرار دهید $f:\{1,2\} \longrightarrow \{3,4,5\}$ با $1 \longrightarrow 3$، $2 \longrightarrow 4$ و $g:\{3,4,5\} \longrightarrow \{1,2\}$ با $3 \longrightarrow 1$، $4 \longrightarrow 2$، $5 \longrightarrow 2$. واضح است که $gof = i$ معکوسپذیر است ولی f و g معکوسپذیر نیستند.

13,2,4 تعریف. فرض کنید X مجموعه‌ی غیر تهی باشد، هر تناظر یک‌به‌یک مانند $f : X \to X$ را یک **جایگشت** X گوییم. مجموعه همه جایگشت‌های X را با S_X نشان می‌دهیم.

بااستفاده از نتیجه 7,2,4، واضح است که اگر $\alpha, \beta \in S_X$ آنگاه $\alpha^{-1}, \alpha o\beta \in S_X$. همچنین هرگاه $X = \{1,2,...,n\}$ از S_n بجای نماد S_X استفاده می‌کنیم و نمایش $\alpha \in S_n$ را به‌صورت زیر بکار می‌بریم:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \dots & \alpha(n) \end{pmatrix}.$$

داریم $|S_n| = n!$. مثلا $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ و $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ عناصر S_3 هستند. بقیه عناصر S_3 را مشخص نمایید.

3,4 تصویر و تصویر معکوس تابع

تصویر و تصویر معکوس تابع کاربردهای زیادی در جبر، جبر خطی و آنالیز دارد.

1,3,4 تعریف. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع باشد و $A \subseteq X$، $D \subseteq Y$. در این‌صورت

(الف) تصویر f روی A ، که با نماد $f(A)$ نشان می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(A) = \{ f(x) | x \in A\}.$$

ب) تصویر معکوس f روی D (می‌نویسیم $f^{-1}(D)$) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

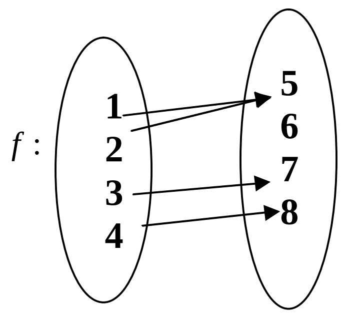
$$f^{-1}(D)=\{x\in A | f(x)\in D\}.$$

2,3,4 نکته. با استفاده از تعریف‌های بالا واضح است که

(1) $\exists x\in A; y=f(x)\Leftrightarrow y\in f(A)$؛

(2) $f(x)\in D\Leftrightarrow x\in f^{-1}(D)$.

3,3,4 مثال. تابع زیر را در نظر بگیرید.



قرار دهید $X_1=\{1,3\}$ ، $X_2=\{2,4\}$ ، $Y_1=\{7, 8\}$ **و** $Y_2=\{5,8\}$.

مطلوبست محاسبه :

(1) $f(\phi)$ ، $f(X_1)$ ، $f(X_2)$ ، $f(X_1\cap X_2)$ ، $f(X_1)\cap f(X_2)$.

(2) $f^{-1}(\phi)$ ، $f^{-1}(Y_1)$ ، $f^{-1}(Y_2)$ ، $f^{-1}(Y_1\cap Y_2)$ ، $f^{-1}(Y_1)\cap f^{-1}(Y_2)$.

حل. (1) داریم:

$$f(\phi)=\phi,\ f(X_1)=\{f(1),\ f(3)\}=\{5,7\},\ f(X_2)=\{5,8\},\ f(X_1)\cap f(X_2)=\{5\},$$

و $f(X_1\cap X_2)=f(\phi)=\phi$.

(2) $f^{-1}(Y_1)=\{x\in A | f(x)\in Y_1\}=\{3,4\}$ ، $f^{-1}(Y_2)=\{1,2,4\}$ ، $f^{-1}(Y_1)\cap f^{-1}(Y_2)=\{4\}$

و $f^{-1}(Y_1\cap Y_2)=\{4\}$.

با استفاده از تعریف 10304 داریم:

4,3,4 **نتیجه**. فرض کنید $f:X\to Y$ یک تابع باشد. همچنین $A_1, A_2\subseteq X$ و $B_1, B_2\subseteq Y$ در اين‌صورت

(الف) $f(\phi)=\phi,\ f^{-1}(\phi)\subseteq\phi$ ؛

(ب) $f(X)=ran(f),\ f^{-1}(Y)=X$ ؛

(ج) اگر $A_1\subseteq A_2\subseteq X$، آنگاه $f(A_1)\subseteq f(A_2)$ ؛

(د) اگر $B_1\subseteq B_2\subseteq Y$، آنگاه $f^{-1}(B_1)\subseteq f^{-1}(B_2)$.

برهان. به عنوان تمرین واگذار می‌شود .

5,3,4 قضیه. فرض کنید $f:X\to Y$ یک تابع و $A,B\subseteq X$. در این‌صورت

(الف) $f(A\bigcup B)=f(A)\bigcup f(B)$ ؛

(ب) $f(A\bigcap B)\subseteq f(A)\bigcap f(B)$ ؛

(ج) $f(A)-f(B)\subseteq f(A-B)$.

برهان. (الف) کافی است، نشان دهیم:

(1) $$f(A\bigcup B)\subseteq f(A)\bigcup f(B);$$

(2) $$f(A)\bigcup f(B)\subseteq f(A\bigcup B).$$

برای اثبات (1) فرض کنید $y\in f(A\bigcup B)$ بنابراین

$$\exists x\in A\bigcup B\wedge y=f(x)\Rightarrow(\exists x\in A\vee\exists x\in B)\wedge y=f(x).$$

بطورمعادل

$$(\exists x\in A\wedge y=f(x))\vee(\exists x\in B\wedge y=f(x))\Rightarrow y\in f(A)\vee y\in f(B).$$

پس $y\in f(A)\bigcup f(B)$.

حال فرض کنید $y\in f(A)\bigcup f(B)$ پس $y\in f(A)$ یا $y\in f(B)$ بنابراین داریم:

$$\exists x_1\in A\wedge y=f(x_1)\Rightarrow x_1\in A\bigcup B\wedge y=f(x_1)$$

یا

$$\exists x_2\in B\wedge y=f(x_2)\Rightarrow x_2\in A\bigcup B\wedge y=f(x_2)$$

در نتیجه $y\in f(A\bigcup B)$.

برای اثبات (ب)، فرض کنید $y\in f(A\bigcap B)$. بنابراین

$$\exists x\in A\cap B\wedge y=f(x)\Rightarrow(x\in A\wedge x\in B)\wedge y=f(x).$$

بطور معادل

$$(x\in A\wedge y=f(x))\wedge(x\in B\wedge y=f(x))\Rightarrow y\in f(A)\wedge y\in f(B).$$

پس $y \in f(A)\bigcap f(B)$.

برای اثبات (ج) ، فرض کنید $y \in f(A)-f(B)$. یعنی $y \in f(A) \wedge y \notin f(B)$ و بنابراین

$$(\exists x_\circ \in A-B) \wedge y = f(x_\circ) \Rightarrow y \in f(A-B).$$

با توجه به مثال **3,3,4** معلوم می‌شود که در قسمتهای دوم و سوم قضیه 5,3,4 ممکن است تساوی برقرار نباشد. قضیه زیر شرایطی را فراهم می‌کند که در قسمت دوم تساوی برقرار باشد .

6,3,4 قضیه. فرض کنید $f: X \to Y$ یک تابع باشد در این‌صورت f یک‌به‌یک است اگر و فقط اگر $\forall A, B \subseteq X;\ f(A\bigcap B) = f(A)\bigcap f(B)$.

برهان. ($\Leftarrow$) فرض کنید f یک‌به‌یک باشد. بنا به قسمت دوم قضیه 5,3,4 کافیست، نشان دهیم که $f(A)\bigcap f(B) \subseteq f(A\bigcap B)$ داریم:

$$y \in f(A)\cap f(B) \Rightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B)$$
$$\Rightarrow (\exists x_1 \in A \wedge y = f(x_1)) \wedge (\exists x_2 \in B \wedge y = f(x_2)).$$

چون $y = f(x_1) = f(x_2)$ و f یک‌به‌یک است ، $x_1 = x_2$. قرار می‌دهیم $x_\circ = x_1 = x_2$ پس $x_\circ \in A\cap B$ و $y = f(x_\circ)$ یعنی $y \in f(A\cap B)$.

بعکس. ($\Rightarrow$) فرض کنید $f(x_1) = f(x_2)$. قرار می‌دهیم $B=\{x_2\}, A=\{x_1\}$. چون $f(A)=\{f(x_1)\}$ ، $f(B)=\{f(x_2)\}$ و $f(A\bigcap B) = f(A)\bigcap f(B)$ بنابراین داریم:

$$f(A\bigcap B) = \{f(x_1)\}\bigcap\{f(x_2)\} = \{f(x_1)\} \neq \phi.$$

پس $A\bigcap B \neq \phi$ یعنی $x_1 = x_2$ و قضیه ثابت شد.

به عنوان تمرین، نشان دهید که قسمت سوم قضیه 5,3,4 نیز معادل یک‌به‌یک بودن f است.

بنا به تعریف تصویر معکوس تابع داشتیم که $x \in f^{-1}(A)$ اگر و فقط اگر $f(x) \in A$. با استفاده از این گزاره، در اینجا به بررسی خواص تصویر معکوس می‌پردازیم.

7,3,4 قضیه. فرض کنید $f: X \to Y$ یک تابع باشد و $A, B \subseteq Y$ ، در این‌صورت

(الف) $f^{-1}(A\bigcup B) = f^{-1}(A)\bigcup f^{-1}(B)$ ؛

(ب) $f^{-1}(A\bigcap B) = f^{-1}(A)\bigcap f^{-1}(B)$ ؛

(ج) $f^{-1}(A-B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$.

برهان. (الف) کافیست، نشان دهیم که:

(1) $f^{-1}(A\cup B)\subseteq f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$;

(2) $f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)\subseteq f^{-1}(A\cup B)$.

برای اثبات (1)، فرض کنید $x\in f^{-1}(A\cup B)$ بنابراین

$$f(x)\in A\cup B\Rightarrow (f(x)\in A)\vee(f(x)\in B)\Rightarrow (x\in f^{-1}(A))\vee(x\in f^{-1}(B)).$$

پس $x\in f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$.

اکنون فرض کنید $x\in f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$. بنابراین داریم:

$$(x\in f^{-1}(A))\vee(x\in f^{-1}(B))\Rightarrow (f(x)\in A)\vee(f(x)\in B).$$

پس $f(x)\in A\cup B$ در نتیجه $x\in f^{-1}(A\cup B)$.

اثبات قسمت دوم بعنوان تمرین واگذار می‌شود. برای اثبات (ج) داریم :

$$\begin{aligned} x\in f^{-1}(A-B)&\Leftrightarrow f(x)\in A-B\Leftrightarrow f(x)\in A\wedge f(x)\notin B\\ &\Leftrightarrow x\in f^{-1}(A)\wedge x\notin f^{-1}(B)\Leftrightarrow x\in f^{-1}(A)-f(B). \end{aligned}$$

و حکم نتیجه می‌شود.

8,3,4 قضیه. فرض کنید $f:X\to Y$ یک تابع باشد و $A\subseteq X,\ B\subseteq Y$. در این‌صورت

(الف) $A\subseteq f^{-1}(f(A))$؛

(ب) $f(f^{-1}(B))\subseteq B$.

برهان. (الف) فرض کنید $x\in A$ داریم:

$$f(x)\in f(A)\Rightarrow x\in f^{-1}\big(f(A)\big).$$

برای اثبات (ب) ، فرض کنید $y\in f(f^{-1}(B))$ و بنابراین داریم:

$$\exists x\in f^{-1}(B)\wedge y=f(x)\Rightarrow \big(f(x)\in B\big)\wedge\big(y=f(x)\big)\Rightarrow y\in B.$$

قضایای بعدی شرایطی را برای تساوی در قضیه 8,3,4 مشخص می‌کنند.

9,3,4 **قضیه.** فرض کنید $f:X\to Y$ یک تابع باشد. در اینصورت f یک‌به‌یک است اگر و فقط اگر $\forall A\subseteq X;\ f^{-1}\big(f(A)\big)=A$ **.**

برهان. ($\Leftarrow$**)** فرض کنید f یک‌به‌یک باشد. بنا به قسمت اول قضیه 8,3,4 ، $A\subseteq f^{-1}\big(f(A)\big)$. کافی است، ثابت کنیم $f^{-1}\big(f(A)\big)\subseteq A$. فرض کنید $x_\circ\in f^{-1}\big(f(A)\big)$ و بنابراین داریم:

$$f(x_\circ) \in f(A) \Rightarrow \exists x_1 \in A \ s.t.\ f(x_\circ) = f(x_1).$$

بدلیل یک‌به‌یک بودن f، نتیجه می‌شود $x_\circ = x_1 \in A$ و حکم ثابت شد.

بعکس ($\Leftarrow$) فرض کنید $f(x_1) = f(x_2)$. قرار می‌دهیم $A = \{x_1\}$. بنابراین

$$f(A) = \{f(x_1)\} = \{f(x_2)\}$$

و داریم:

$$\{x_1\} = A = f^{-1}\left(f(A)\right) = f^{-1}\left(\{f(x_2)\}\right) = f^{-1}\left(f(\{x_2\})\right) = \{x_2\}.$$

در نتیجه $x_1 = x_2$ و قضیه ثابت شد.

10,3,4 قضیه. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع باشد. در اینصورت f پوشاست اگر و فقط اگر $\forall B \subseteq Y,\ f(f^{-1}(B)) = B$.

برهان. ($\Leftarrow$) فرض کنید f پوشا باشد بنا به قسمت دوم قضیه 8,3,4 کافی است، نشان دهیم $B \subseteq f(f^{-1}(B))$. فرض کنید $y_\circ \in B$. چون f پوشاست، داریم:

$$\exists x_\circ \in X \ s.t.\ y_\circ = f(x_\circ) \Rightarrow x_\circ \in f^{-1}(B) \Rightarrow f(x_\circ) \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow y_\circ \in f(f^{-1}(B)).$$

در نتیجه $B \subseteq f(f^{-1}(B))$.

بعکس. ($\Rightarrow$) فرض کنید $y \in Y$، قرار می‌دهیم $B = \{y\}$. پس داریم:

$$\{y\} = B = f(f^{-1}(B)) \Rightarrow \exists x \in f^{-1}(B) \wedge y = f(x) \Rightarrow \exists x \in X \wedge y = f(x),$$

و حکم برقرار است.

مثال زیر نشان می‌دهد که ممکن است $f(x) \in f(A)$ ولی $x \notin A$. اما گزاره «اگر $f(x) \in f(A)$ آنگاه وجود دارد $x_\circ \in A$ و $f(x) = f(x_\circ)$» درست است.

11,3,4 مثال. تابع
$$f : \{1,2,3\} \longrightarrow \{4,5\}, \quad \begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 4 \\ 2 & \longrightarrow & 5 \\ 3 & \longrightarrow & 5 \end{array}$$
را در نظر بگیرید. قرار دهید $A = \{1,2\}$. پس داریم $f(3) \in f(A)$ ولی $3 \notin A$.

4,4 ویژگی جهانی ضرب و هم‌ضرب

1,4,4 تعریف. توابع $f:A\to B$ و $h:A\to C$ و $g:C\to B$ را در نظر بگیرید. در این‌صورت نمودار زیر را جابجایی گوییم هرگاه $f=goh$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & B \\ & C \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

فرض کنید A و B دو مجموعه ناتهی باشند. در این صورت ضرب دکارتی

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$$

و **توابع تصویر** $\underset{(x,y)\ \to\ x}{p:A\times B\to A}$ ، $\underset{(x,y)\ \to\ y}{q:A\times B\to B}$ را در نظر بگیرید. قضیه‌ی جالب زیر را داریم:

2,4,4 قضیه (ویژگی جهانی ضرب)**.** برای هر مجموعه X و هر دو تابع $f_1:X\to A$ و $f_2:X\to B$ ، تابع منحصر بفرد $\phi:X\to A\times B$ وجود دارد بقسمی که $po\phi=f_1$ و $qo\phi=f_2$. یعنی، مولفه‌ی اول ϕ برابر با f_1 و مولفه‌ی دوم آن f_2 است.

برهان. به ازای هر $x\in X$ تابع $\phi:X\to A\times B$ با ضابطه $\phi(x)=(f_1(x),f_2(x))$ در شرایط قضیه صدق می کند. زیرا $po\phi(x)=po(f_1(x),f_2(x))=f_1(x)$ و $qo\phi(x)=qo(f_1(x),f_2(x))=f_2(x)$.

بنا براین نمودار زیر جابحایی است.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, "\phi"] \arrow[dr, "f_2"] & \\ A & A\times B \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "q"] & B \end{tikzcd}$$

چون در قضیه 2,4,4 فقط با مجموعه‌ها و توابع سروکار داریم، این قضیه حکمی دوگان دارد که از تغییر جهت پیکانها بدست می آید وآن را هم‌ضرب نامیم. حال فرض کنید A و B دو مجموعه باشند که $A\cap B=\phi$. می‌خواهیم مجموعه C را چنان بدست آوریم که توابعی از A و B به C وجود داشته باشند بطوری که برای هر مجموعه‌ی X و هر دو تابع $A\xrightarrow{f}X$ و $B\xrightarrow{g}X$، یک تابع منحصر بفرد چون $\phi:C\longrightarrow X$ وجود دارد که مثلث‌های زیر جابحایی باشند.

$$
\begin{tikzcd}
 & X & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i"'] & C \arrow[u, "\phi"] & B \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "j"]
\end{tikzcd}
$$

3,4,4 قضیه. با نمادهای بالا $A\cup B$ به همراه توابع $i:\underset{x}{A}\underset{\longmapsto}{\longrightarrow}\underset{x}{A\bigcup B}$ و $j:\underset{x}{B}\underset{\longmapsto}{\longrightarrow}\underset{x}{A\bigcup B}$ در شرایط خواسته شده، صدق می‌کند.

برهان. تابع $\phi: A\bigcup B \longrightarrow X$ با ضابطه زیر را در نظر می گیریم:

$$\phi(x)=\begin{cases} f(x) & x\in A \\ g(x) & x\in B \end{cases}$$

پس $\phi oi(x)=\phi(x)=f(x)$ ، $\phi oj(x)=\phi(x)=g(x)$ و حکم برقرار است.

لازم به‌ذکر است که اگر $A\cap B\neq\phi$ آنگاه از اینکه A تناظر یک‌به‌یک با $A\times\{1\}$ و B تناظر یک‌به‌یک با $B\times\{2\}$ است، شرایط قضیه 3,4,4 فراهم می‌شود.

4,4,4 تعریف. فرض کنید $\beta=\{A_i | i\in I\}$ یک خانواده‌ی ناتهی(یعنی $I\neq\phi$) از مجموعه‌ها باشد. **ضرب** (دکارتی) عناصر β، که با نماد $\prod_{i\in I} A_i$ نشان می‌دهیم، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\prod_{i\in I} A_i=\left\{ f \mid f: I\to\bigcup_{i\in I} A_i ;\, \forall i\in I,\, f(i)\in A_i \right\}.$$

مثلا اگر $A_i=(i,i+1]$ که $i\in\mathbb{N}$ آنگاه $f:\mathbb{N}\to\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i$ با ضابطه $f(k)=k+1$ ، یک عضو $\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i$ است. حال فرض کنید $f\in\prod_{i\in I} A_i$ در این‌صورت $f(i)$ را **مولفه i-ام** f نامیم. واضح است که اگر $f,g\in\prod_{i\in I} A_i$ آنگاه $f=g \Leftrightarrow \forall i\in I,\, f(i)=g(i)$. همچنین $\forall t\in I$ ، $p_t:\prod_{i\in I} A_i\longrightarrow A_t$ با ضابطه $p_t(f)=f(t)$ تابعی پوشا است که آن را **تصویر روی** A_t می‌نامیم وداریم $p_t^2=p_t$.

5,4,4 قضیه. فرض کنید $I=\{1,2,\ldots,n\}$ و $\beta=\{A_i | i\in I\}$. در این‌صورت $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ و $\prod_{i=1}^{n} A_i$ یکسانند.

برهان. فرض کنید $(a_1, a_2, ..., a_n) \in A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$. تابع $f : I \to \underset{i \in I}{\cup} A_i$ با ضابطه زیر را درنظر می‌گیریم

$$f(1) = a_1, f(2) = a_2, ..., f(n) = a_n.$$

واضح است‌که به‌ازای هر i داریم $f(i) \in A_i$ و در نتیجه $f \in \prod_{i=1}^{n} A_i$. برعکس، فرض کنید $f \in \prod_{i=1}^{n} A_i$ دراین‌صورت $\forall i \in I, f(i) \in A_i$ پس تابع f رامی‌توان بصورت $n-$تایی $(a_1, a_2, ..., a_n)$ در نظر گرفت که $a_i = f(i)$.

تمرینات

1) فرض کنید f و g دو تابع باشند. چه حکمی می‌توان درباره تابع بودن رابطه‌های زیر بیان کرد؟

$$f \cap g \ , \ f \cup g \ , \ f - g \ , \ f \Delta g \ .$$

ادعای خود را ثابت کنید.

2) فرض کنید $B \cap C = \phi$ و $g : B \to A$ و $f : C \to A$ دو تابع باشند. نشان دهید که $h = f \cup g : B \cup C \to A$ یک تابع است و $h_{|B} = g$ ، $h_{|C} = f$. بیشتر به‌ازای هر $x \in B$ داریم $h(x) = g(x)$.

2) اگر f و g توابع زیر باشد. نمودار fog و gof را رسم کنید.

$$g(x) = \begin{cases} x-1 & x < \circ \\ x & x \geq \circ \end{cases} \quad , \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & x < \circ \\ 1-x & x \geq \circ \end{cases}$$

۱

3) قرار دهید $X = \mathbb{N} \cup \{\circ\}$ نشان دهید که تابع زیرپوشاست ولی یک‌به‌یک نیست.

$$\forall x \in X; \quad f(x)=\begin{cases} \frac{x}{2} & x=2k \\ \frac{x-1}{2} & x=2k+1 \end{cases}$$

همچنین نشان دهید که f دارای بی‌شمار معکوس‌های راست است.

5) نشان دهید که $f(x)=\begin{cases} \frac{x+1}{x+2} & x\neq -2 \\ 1 & x=2 \end{cases}$ یک تناظر یک‌به‌یک است.

6) در حالت‌های زیر تابع $f: X \to Y$ را چنان تعریف کنید که f تناظر یک‌به‌یک باشد.

(الف) $X=(0\ ,\ 1)$ ، $Y=(2\ ,\ 3)$؛

(ب) $X=(0\ ,\ 1)$ ، $Y=(0\ ,\ 4)$؛

(ج) $X=\mathbb{R}$ ، $Y=(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

7) فرض کنید $f: A\to B$ و $g: B\to C$ توابع مفروض باشند، نشان دهید

(الف) اگر gof یک‌به‌یک باشند، آنگاه f یک‌به‌یک است.

(ب) اگر gof پوشا باشد، آنگاه g پوشا است.

(ج) اگر gof تناظر یک‌به‌یک باشد، آنگاه g پوشا و f یک‌به‌یک است.

(د) با مثالی نشان دهید که عکس حکم قسمت سوم برقرار نیست.

8) فرض کنید $f: A\to B$ یک تابع باشد. ثابت کنید:

(الف) هرگاه $A\neq\phi$ آنگاه $B\neq\phi$.

(ب) هرگاه $A=\phi$ آنگاه $f=\phi$.

9) قضیه 4,3,4 را ثابت کنید.

10) ثابت کنید هر یک از گزاره های زیر شرط لازم و کافی برای یک‌به‌یک بودن تابع $f: A\to B$ می‌باشد.

(الف) به‌ازای هر $X \subseteq A$؛ $f^{-1}\left(f(X)\right) = X$.

(ب) به‌ازای هر $X \subseteq A$ و به ازای هر $x \in X$؛ $f(x) \in f\left(X\right) \Leftrightarrow x \in X$.

(ج) به‌ازای هر $X \subseteq A$ و به ازای هر $x \in X$؛ $f\left(X \Delta Y\right) = f(X) \Delta f(Y)$.

11) فرض کنید $f : A \to B$ یک تابع باشد. ثابت کنید f پوشاست اگر و فقط اگر به ازای هـر $X \subseteq A$ داشته باشیم $B - f(X) \subseteq f(A - X)$.

12) فرض کنید $f : A \to B$ یک تابع باشد. در این‌صورت f تناظر یک‌بـه‌یـک اسـت اگـر و فقـط اگـر $\forall X \subseteq A; B - f(X) = f(A - X)$.

13) فـرض کنیـد $f : A \to B$ تـابعی یـک‌بـه‌یـک باشـد. ثابـت کنیـد هرگـاه $D \subseteq A$ آنگـاه تـابع $f_{|D} : D \to f(D)$ تناظر یک‌به‌یک است.

14) نشان دهید:

(الف) $f : \underset{(m,n)}{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \underset{\to}{\to} \underset{2^m 3^n}{\mathbb{N}}$ یک‌به‌یک است.

(ب) $f : \underset{(m,n)}{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \underset{\to}{\to} \underset{\frac{m}{n}}{\mathbb{Q}^+}$ پوشاست.

15) تابع حقیقی f را **زوج** گوییم هرگاه $\forall x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $f(-x) = f(x)$. همچنین تابع f کـه در آن $\forall x \in \mathbb{R}$، داشته باشیم $f(-x) = -f(x)$ را تابع **فرد** نامیم. نشان دهید:

(الف) اگر تابع f هم زوج وهم فرد باشد، آنگاه $f = 0$.

(ب) هر تابع حقیقی را می‌توان بطور منحصربفردی به‌صورت مجموع توابع زوج و فرد، نوشت.

16) فرض کنید $\beta = \{A_i | i \in I\}$ یک خانواده ناتهی‌از مجموعه‌ها باشد. در این‌صورت نشان دهید که

(الف) اگر $A_i = \phi$ ایی ، آنگاه $\prod_{i \in I} A_i = \phi$.

(ب) اگر B یک مجموعه باشد که $\forall t \in I;\ A_i = B$، آنگاه $\prod_{i \in I} A_i = B^I$.