2.5 ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকগুলির মানের সীমা [Limits to the Values of Trigono-metric Functions]

ুচ্ছেদ 2.2-এ প্রদত্ত ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকসমূহের সংজ্ঞা থেকে হজেই বোঝা যায় যে, একটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক পেক্ষকগুলি সর্বদাই ধনাত্মক। অবশ্য যে-কোনো কোণের ত্রিকোণমিতিক পেক্ষকসমূহের মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক দুই-ই হতে পারে [তৃতীয় ধ্যায় দ্রষ্টব্য]।

নুচ্ছেদ 2.2-এ প্রদত্ত ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকসমূহের সংজ্ঞা থেকে পাই,

$$\sin\theta = \frac{\overline{PM}}{\overline{OP}} \text{ এবং } \cos\theta = \frac{\overline{OM}}{\overline{OP}} \quad \cdots(1)$$

খন, $\overline{OP}$ হল সমকোণী ত্রিভুজ OPM-এর অতিভুজ। সুতরাং, $\overline{OP}$-র মান $\overline{PM}$ এবং $\overline{OM}$-এর থেকে ছোটো হতে পারে না।

তরাং, সমীকরণ (1) থেকে সিদ্ধান্ত করা যায় যে, $\sin\theta$ ও $\cos\theta$ পেক্ষক দুটির মান **1-এর চেয়ে বড়ো** হতে পারে না।

বার, $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{\overline{OP}}{\overline{PM}}$ এবং $\sec\theta = \dfrac{\overline{OP}}{\overline{OM}}$ ।

তরাং, $\operatorname{cosec}\theta$ ও $\sec\theta$ অপেক্ষক দুটির মান কখনও **1-এর চেয়ে ছোটো** হতে পারে না।

বশেষে, $\tan\theta = \dfrac{\overline{PM}}{\overline{OM}}$ এবং $\cot\theta = \dfrac{\overline{OM}}{\overline{PM}}$

পষ্টতই, $\overline{PM}$-এর মান $\overline{OM}$-এর চেয়ে বড়ো বা ছোটো দুই-ই হতে পারে। তরাং, $\tan\theta$ ও $\cot\theta$ অপেক্ষক দুটির যে-কোনো ধনাত্মক মান থাকতে রে।

তরাং, **θ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ** হলে ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকগুলি -ঋণাত্মক হবে এবং

(i) $\sin\theta$ ও $\cos\theta$-র মান **1-এর থেকে বড়ো** হতে পারে না,

(ii) $\sec\theta$ ও $\operatorname{cosec}\theta$-র মান **1-এর থেকে ছোটো** হতে পারে না এবং

(iii) $\tan\theta$ ও $\cot\theta$-র **যে-কোনো মান** থাকতে পারে।

2.6 আদর্শ কোণসমূহের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ [Trigonometric Ratios of Standard Angles]

কোণমিতিতে 0°, 30°, 45°, 60° ও 90° কোণগুলিকে আদর্শ কোণ লা হয় এবং তাদের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ বহুল ব্যবহৃত। সেইজন্য ই কোণগুলির ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের মান মনে রাখা প্রয়োজন।

নীচে আদর্শ কোণগুলির sine, cosine ও tangent-এর মানসমূহ তালিকাবদ্ধ করে দেখানো হয়েছে।

কোণানুপাত	0° (বা 0^c)	30° $\left(\text{বা } \frac{\pi}{6}\right)$	45° $\left(\text{বা } \frac{\pi}{4}\right)$	60° $\left(\text{বা } \frac{\pi}{3}\right)$	90° $\left(\text{বা } \frac{\pi}{2}\right)$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	অসংজ্ঞাত

2.7 সংক্ষিপ্তকরণ [Summarisation]

1 $\sin\theta\operatorname{cosec}\theta = 1$ বা, $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$

2 $\cos\theta\cdot\sec\theta = 1$ বা, $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

3 $\tan\theta\cdot\cot\theta = 1$ বা, $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

4 $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ **5** $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

6 $\sin^2\theta$ বলতে $(\sin\theta)^2$ বোঝায়; তেমনই, $\tan^3\theta$ বলতে $(\tan\theta)^3$ বোঝায়

7 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$, $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

8 $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ বা, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

9 $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$ বা, $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

10 θ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হলে, ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকগুলির মান অ-ঋণাত্মক হয় এবং

(i) $\sin\theta$ ও $\cos\theta$-র মান **1-এর থেকে বড়ো** হতে পারে না

(ii) $\operatorname{cosec}\theta$ ও $\sec\theta$-র মান **1-এর থেকে ছোটো** হতে পারে না এবং

(iii) $\tan\theta$ ও $\cot\theta$-র **যে-কোনো মান** হতে পারে।

11
(i) $\sin 30° = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$

(ii) $\sin 45° = \cos 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(iii) $\sin 60° = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(iv) $\sin 90° = \cos 0° = 1$

(v) $\sin 0° = \cos 90° = 0$

(vi) $\tan 0° = \cot 90° = 0$

4 (180° − θ) কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ [Trigonometric ratios of angle $(180° - \theta)$]

(2) ও (3)-এর সাহায্যে খুব সহজেই $(180° - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয় করা যায়।

$$\sin(180° - \theta) = \sin[90° + (90° - \theta)]$$
$$= \cos(90° - \theta) \quad [\text{(3)-এর সাহায্যে}]$$
$$= \sin\theta \quad [\text{(2)-এর সাহায্যে}]$$
$$\cos(180° - \theta) = \cos[90° + (90° - \theta)]$$
$$= -\sin(90° - \theta) = -\cos\theta$$
$$\tan(180° - \theta) = \tan[90° + (90° - \theta)]$$
$$= -\cot(90° - \theta) = -\tan\theta$$

সুতরাং, $\operatorname{cosec}(180° - \theta) = \dfrac{1}{\sin(180° - \theta)} = \dfrac{1}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta$

একইভাবে, $\sec(180° - \theta) = -\sec\theta$

এবং $\cot(180° - \theta) = -\cot\theta$

5 (180° + θ) কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ [Trigonometric ratios of angle $(180° + \theta)$]

মূলত (3)-এর সাহায্যে খুব সহজেই $(180° + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয় করা যায়।

$$\sin(180° + \theta) = \sin[90° + (90° + \theta)]$$
$$= \cos(90° + \theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(180° + \theta) = \cos[90° + (90° + \theta)]$$
$$= -\sin(90° + \theta) = -\cos\theta$$
$$\tan(180° + \theta) = \tan[90° + (90° + \theta)]$$
$$= -\cot(90° + \theta) = \tan\theta$$

সুতরাং, $\operatorname{cosec}(180° + \theta) = \dfrac{1}{\sin(180° + \theta)}$

$$= \frac{1}{-\sin\theta} = -\operatorname{cosec}\theta$$

একইভাবে, $\sec(180° + \theta) = -\sec\theta$

এবং $\cot(180° + \theta) = \cot\theta$

6 (270° − θ) এবং (270° + θ) কোণসমূহের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ [Trigonometric ratios of angles $(270° - \theta)$ and $(270° + \theta)$]

(2) অথবা (3) এবং (5)-এর প্রয়োগে $(270° - \theta)$ ও $(270° + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয় করা যায়।

$$\sin(270° - \theta) = \sin[180° + (90° - \theta)]$$
$$= -\sin(90° - \theta) = -\cos\theta$$
$$\cos(270° - \theta) = \cos[180° + (90° - \theta)]$$
$$= -\cos(90° - \theta) = -\sin\theta$$
$$\tan(270° - \theta) = \tan[180° + (90° - \theta)]$$
$$= \tan(90° - \theta) = \cot\theta$$

এবং
$$\sin(270° + \theta) = \sin[180° + (90° + \theta)]$$
$$= -\sin(90° + \theta) = -\cos\theta$$
$$\cos(270° + \theta) = \cos[180° + (90° + \theta)]$$
$$= -\cos(90° + \theta) = \sin\theta$$
$$\tan(270° + \theta) = \tan[180° + (90° + \theta)]$$
$$= \tan(90° + \theta) = -\cot\theta$$

একইভাবে অন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের মান নির্ণ

7 (360° ± θ) এবং (n · 360° ± θ) ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ [Trig ratios of angles $(360° \pm$ $(n \cdot 360° \pm \theta)$]

n-এর মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হলে কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ $(\pm\theta)$ কোণের অনুপাতসমূহের সমান হয়। সুতরাং,

$$\sin(n \cdot 360° + \theta) = \sin\theta;$$
$$\sin(n \cdot 360° - \theta) = \sin(-\theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(n \cdot 360° + \theta) = \cos\theta;$$
$$\cos(n \cdot 360° - \theta) = \cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$\tan(n \cdot 360° + \theta) = \tan\theta;$$
$$\tan(n \cdot 360° - \theta) = \tan(-\theta) = -\tan\theta$$

3.6 সংক্ষিপ্তকরণ [Summarisati

1 নির্দিষ্ট কোণ θ-র সঙ্গে সংযুক্ত যে-কোনো কোণ -র ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করতে হলে নিম্নলি অগ্রসর হতে হয়।

(i) প্রথমত, θ সূক্ষ্মকোণ ধরে $(n \cdot 90° \pm \theta)$-র পাদে অবস্থিত তা নির্ণয় করে "all, sin, tan সাহায্যে নির্দিষ্ট ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চি স্থির করতে হয় [চিত্র 2 দ্যাখো]।

অর্থাৎ $(n \cdot 90° \pm \theta)$-র মান **প্রথম** পাদে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ধনাত্মক,

$(n \cdot 90° \pm \theta)$-র মান **দ্বিতীয়** পাদে থাকলে (এবং cosec) ধনাত্মক,

$(n \cdot 90° \pm \theta)$-র মান **তৃতীয়** পাদে থাকলে (এবং cot) ধনাত্মক,

এবং $(n \cdot 90° \pm \theta)$-র মান **চতুর্থ** পাদে থাকলে

4.5 সংক্ষিপ্তকরণ [Summarisation]

1. $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$
2. $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$
3. $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$
4. $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$
5. $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$
$= \cos^2 B - \cos^2 A$
6. $\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B$
$= \cos^2 B - \sin^2 A$
7. $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$
8. $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$
9. $\cot(A+B) = \dfrac{\cot A\cot B - 1}{\cot B + \cot A}$
10. $\cot(A-B) = \dfrac{\cot A\cot B + 1}{\cot B - \cot A}$
11. $\tan(A+B+C)$
$= \dfrac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A\tan B\tan C}{1 - \tan A\tan B - \tan B\tan C - \tan C\tan A}$

4.6 উদাহরণমালা [Examples]

উদাহরণ 1

মান নির্ণয় করো: (i) $\sin 15°$ (ii) $\cos 105°$ (iii) $\tan 75°$

সমাধান

(i) $\sin 15° = \sin(45° - 30°)$
$= \sin 45°\cos 30° - \cos 45°\sin 30°$
$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

(ii) $\cos 105° = \cos(45° + 60°)$
$= \cos 45°\cos 60° - \sin 45°\sin 60°$
$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

(iii) $\tan 75° = \tan(45° + 30°) = \dfrac{\tan 45° + \tan 30°}{1 - \tan 45°\tan 30°}$
$= \dfrac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$
$= \dfrac{3+1+2\sqrt{3}}{3-1} = \dfrac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}$

উদাহরণ 2

প্রমাণ করো যে, $\tan(45° + \theta) = \dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

সমাধান বামপক্ষ $= \tan(45° + \theta) = \dfrac{\tan 45°}{1 - \tan 4}$
$= \dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$ $[\because \tan 45° = 1$

উদাহরণ 3

$\sin(A+B)$-এর সূত্রের সাহায্যে $\cos(A+B)$ ও $\cos(A$ সূত্র নির্ণয় করো।

সমাধান আমরা জানি,
$\sin(A+B) = \sin A\ \cos B + \cos A\ \sin B$
(1)-এর উভয়পক্ষে A-র জায়গায় $(90° + A)$ লিখে পাই,
$\sin(90° + A + B) = \sin(90° + A)\cos B + \cos(90° +$
বা, $\cos(A+B) = \cos A\ \cos B - \sin A\ \sin B$
আবার, (2)-এর উভয়পক্ষে B-এর জায়গায় $(-B)$ লিখে পাই,
$\cos(A-B) = \cos A\ \cos(-B) - \sin A\ \sin(-B)$
$= \cos A\ \cos B + \sin A\ \sin B$

উদাহরণ 4

(i) যদি $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\beta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ এবং α ও β ধ সূক্ষ্মকোণ হয়, তবে $(\alpha+\beta)$-এর মান নির্ণয় করো।

(ii) A, B, C তিনটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $\tan A$ = $\tan B = \frac{1}{5}$, $\tan C = \frac{1}{8}$; দেখাও যে, $A+B+C$ =

সমাধান

(i) $\because$ $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$
$= 1 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{10} = \dfrac{9}{10}$
$\therefore$ $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$ $[\because \alpha$ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ$]$
আবার, $\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta = 1 - \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1 - \dfrac{4}{5}$
$\therefore$ $\sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ $[\because \beta$ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ$]$
এখন, $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta$
$= \dfrac{3}{\sqrt{10}}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}} - \dfrac{1}{\sqrt{10}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{6}{5\sqrt{2}} - \dfrac{1}{5\sqrt{2}}$
$= \dfrac{5}{5\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos\dfrac{\pi}{4}$
$\therefore$ $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{4}$

$$\sin - \sin \;=\; 2\cos\left[\frac{\text{যোগফল}}{2}\right]\sin\left[\frac{\text{বিয়োগফল}}{2}\right]$$

$$\cos + \cos \;=\; 2\cos\left[\frac{\text{যোগফল}}{2}\right]\cos\left[\frac{\text{বিয়োগফল}}{2}\right]$$

$$\cos - \cos \;=\; 2\sin\left[\frac{\text{যোগফল}}{2}\right]\sin\left[\frac{\text{বিপরীত বিয়োগফল}}{2}\right]$$

5.3 গুণফলকে যোগফল বা বিয়োগফলে রূপান্তর [Transformations of Products into Sums or Differences]

অনুচ্ছেদ 5.2-এর (5), (6), (7) ও (8) সূত্র চারটি নিম্নলিখিত আকারে লেখা যায়:

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B)+\sin(A-B) \quad \cdots(13)$$

$$2\cos A\sin B = \sin(A+B)-\sin(A-B) \quad \cdots(14)$$

$$2\cos A\cos B = \cos(A+B)+\cos(A-B) \quad \cdots(15)$$

$$2\sin A\sin B = \cos(A-B)-\cos(A+B) \quad \cdots(16)$$

গুণফল থেকে যোগফল বা বিয়োগফলে রূপান্তর করতে এই সূত্র চারটি প্রয়োগ করতে হয়।

সূত্র চারটি মনে রাখার জন্য নীচে প্রদত্ত বৈশিষ্ট্যগুলি লক্ষণীয়:

(i) যে গুণফলকে যোগফল বা বিয়োগফলে প্রকাশ করতে হবে, তাতে সবসময় 2 উৎপাদক থাকা প্রয়োজন।

(ii) যোগফল বা বিয়োগফলের sine বা cosine কোণের পরিমাণ গুণফলে প্রদত্ত কোণ দুটি (অর্থাৎ A ও B)-র যোগফল বা বিয়োগফল (অর্থাৎ $A+B$ অথবা $A-B$)-এর আকারে থাকে।

(iii) যদি গুণফলে একটি sine ও একটি cosine থাকে, তবে গুণফল দুটি sine-এর যোগফল বা বিয়োগফলে প্রকাশিত হবে; যখন গুণফলের sine-এর অনুরূপ কোণটির পরিমাপ cosine-এর কোণটির চেয়ে বড়ো (অর্থাৎ $A>B$) হবে, তখন গুণফলকে দুটি sine-এর যোগফলের আকারে প্রকাশ করা যাবে; কিন্তু গুণফলের cosine-এর কোণটির পরিমাপ sine-এর কোণটির চেয়ে বড়ো (অর্থাৎ $A>B$) হলে, গুণফলকে দুটি sine-এর বিয়োগফলের আকারে প্রকাশ করা যাবে [(13) ও (14) দ্যাখো]।

(iv) গুণফলে দুটি cosine থাকলে তাকে দুটি cosine-এর যোগফলের আকারে প্রকাশ করা যাবে [(15) দ্যাখো]।

(v) গুণফলে দুটি sine থাকলে তাকে দুটি cosine-এর বিয়োগফলরূপে প্রকাশ করা যাবে [(16) দ্যাখো]।

(vi) (13), (14) ও (15) সূত্রের ক্ষেত্রে (অর্থাৎ গুণফলে sine, একটি cosine অথবা দুটি cosine থাকলে) প্রথমে কোণ দুটির সমষ্টি ও পরে অন্তর লিখতে হয়; কিন্তু (16) (অর্থাৎ যখন গুণফলে দুটি sine থাকে) ক্ষেত্রে প্রথমে কোণ দুটির অন্তর এবং পরে সমষ্টি নিতে হয়।

এই বৈশিষ্ট্যগুলির সাহায্যে নীচে প্রদত্ত সহজ প্রক্রিয়ায় (13), (14) ও (16) সূত্র চারটি মনে রাখা যায়:

$$2\sin A\cos B = \sin(\text{সমষ্টি})+\sin(\text{অন্তর}) \quad [A>B]$$

$$2\cos A\sin B = \sin(\text{সমষ্টি})-\sin(\text{অন্তর}) \quad [A>B]$$

$$2\cos A\cos B = \cos(\text{সমষ্টি})+\cos(\text{অন্তর})$$

$$2\sin A\sin B = \cos(\text{অন্তর})-\cos(\text{সমষ্টি})$$

5.4 সংক্ষিপ্তকরণ [Summarisation]

1. $\sin C+\sin D = 2\sin\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}$
2. $\sin C-\sin D = 2\cos\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{C-D}{2}$
3. $\cos C+\cos D = 2\cos\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}$
4. $\cos C-\cos D = 2\sin\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{D-C}{2}$
5. $2\sin A\cos B = \sin(A+B)+\sin(A-B)$
6. $2\cos A\sin B = \sin(A+B)-\sin(A-B)$
7. $2\cos A\cos B = \cos(A+B)+\cos(A-B)$
8. $2\sin A\sin B = \cos(A-B)-\cos(A+B)$

5.5 উদাহরণমালা [Examples]

উদাহরণ 1

গুণফলে প্রকাশ করো:

(i) $\sin 5\alpha+\sin 3\alpha$ **(ii)** $\cos\theta-\cos 3\theta$

সমাধান

i $\sin 5\alpha+\sin 3\alpha = 2\sin\dfrac{5\alpha+3\alpha}{2}\cos\dfrac{5\alpha-3\alpha}{2}$

$= 2\sin 4\alpha\cos\alpha$

ii $\cos\theta-\cos 3\theta = 2\sin\dfrac{\theta+3\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta-\theta}{2}$

$= 2\sin 2\theta\sin\theta$

$= 2\sin A(1-\sin^2 A) + \sin A - 2\sin^3 A$

$= 2\sin A - 2\sin^3 A + \sin A - 2\sin^3 A$

$= 3\sin A - 4\sin^3 A$

$\therefore$ $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$ ...(12)

(ii) $\cos 3A = \cos(2A + A) = \cos 2A \cos A - \sin 2A \sin A$

$= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\sin A \cos A \cdot \sin A$

$= 2\cos^3 A - \cos A - 2\cos A(1-\cos^2 A)$

$= 2\cos^3 A - \cos A - 2\cos A + 2\cos^3 A$

$= 4\cos^3 A - 3\cos A$

$\therefore$ $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$ ...(13)

দ্রষ্টব্য

লক্ষ করো, $\sin 3A$ এবং $\cos 3A$ উভয়ের মান নির্ণয়ের সময় $\cos 2A$-র মান বসাতে হয়। $\sin 3A$-র মান $\sin A$-র আকারে প্রকাশ করার জন্য $\cos 2A$-র মান $\sin A$-র আকারে (অর্থাৎ $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$) লেখা হয়েছে, কিন্তু $\cos 3A$-র মান $\cos A$-র আকারে প্রকাশ করার জন্য $\cos 2A$-র মান $\cos A$-র আকারে (অর্থাৎ $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$) লেখা হয়েছে।

(iii) $\tan 3A = \tan(2A + A)$

$$= \frac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A \tan A} = \frac{\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} + \tan A}{1 - \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}.\tan A}$$

$$= \frac{2\tan A + \tan A - \tan^3 A}{1 - \tan^2 A - 2\tan^2 A} = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$

$$\therefore \tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$

দ্রষ্টব্য

1. $\tan(A+B+C) = \dfrac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan A \tan B - \tan B \tan C - \tan C \tan A}$ সূত্রে $A = B = C$ বসিয়ে $\tan 3A$-র মান নির্ণয় করা যায়।
2. ওপরের পদ্ধতিতে $4A$, $5A$ বা আরও উচ্চতর গুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের মান নির্ণয় করা যায়।

6.5 সংক্ষিপ্তকরণ [Summarisation]

1. $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
2. $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
3. $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$
4. $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$
5. $1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$
6. $1 - \cos 2\theta = 2\sin^2\theta$
7. $\tan^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$
8. $\sin 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$
9. $\cos 2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$
10. $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$
11. $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$
12. $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$
13. $\tan 3\theta = \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$

6.6 উদাহরণমালা [Examples]

উদাহরণ 1

$\cos 4\theta$-কে $\cos\theta$-র আকারে প্রকাশ করো।

সমাধান $\cos 4\theta = \cos(2\cdot 2\theta) = 2\cos^2 2\theta - 1$

বা, $\cos 4\theta = 2(2\cos^2\theta - 1)^2 - 1$

$= 2(4\cos^4\theta - 4\cos^2\theta + 1) - 1$

বা, $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

উদাহরণ 2

প্রমাণ করো যে, $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$।

সমাধান বামপক্ষ

$= \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$= 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\cdot 4\sin^2 x\cos^2 x$

$= 1 - \frac{3}{4}\cdot(2\sin x\cos x)^2 = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$ (প্রমাণিত)।

উদাহরণ 3

(i) $\sin A = \frac{3}{5}$ হলে $\sin 2A$ ও $\cos 2A$-র মান নির্ণয় করো।

(ii) $\cos A = \frac{12}{13}$ হলে $\sin 3A$-র মান নির্ণয় করো $\left(0 < A < \frac{\pi}{2}\right)$।

(iii) $\sin 2A = \frac{4}{5}$ হলে $\tan A$-র মান নির্ণয় করো $\left(0 \leqslant A \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$।

সমাধান

i $\sin 2A = 2\sin A\cos A = 2\sin A\cdot\sqrt{1-\sin^2 A}$

$\left[0 \leqslant A \leqslant \frac{\pi}{2}\text{ ধরে}\right]$

বা, $\sin 2A = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\sqrt{1-\frac{9}{25}} = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{25}$

এবং $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$

$= 1 - 2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - 2\cdot\frac{9}{25} = \frac{7}{25}$

$$\sin 3^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \times \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{16}[(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2}) - \sqrt{10+2\sqrt{5}}(\sqrt{6}-\sqrt{2})]$$

$$\cos 3^\circ = \cos(18^\circ - 15^\circ)$$

$$= \cos 18^\circ \cos 15^\circ + \sin 18^\circ \sin 15^\circ$$

$$\cos 3^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}-1}{4} \times \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{16}[\sqrt{10+2\sqrt{5}}(\sqrt{6}+\sqrt{2}) + (\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}-\sqrt{2})]$$

স্পষ্টতই, $6^\circ = (36^\circ - 30^\circ)$; $9^\circ = (45^\circ - 36^\circ)$; $12^\circ = (30^\circ - 18^\circ)$; $21^\circ = (36^\circ - 15^\circ)$; $24^\circ = (30^\circ - 6^\circ)$ ইত্যাদি।

সুতরাং, 6°, 9°, 12° ইত্যাদি কোণের sine ও cosine-এর মান একই পদ্ধতিতে নির্ণয় করা যায়।

7.9 সংক্ষিপ্তকরণ [Summarisation]

1. $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$
2. $\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}$
3. $\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$
4. $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$
5. $1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$
6. $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$
7. $\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$
8. $\sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$
9. $\cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$
10. $\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$
11. $\sin\theta = 3\sin\frac{\theta}{3} - 4\sin^3\frac{\theta}{3}$
12. $\cos\theta = 4\cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3}$
13. $\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$
14. $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$
15. $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
16. $\sin 72^\circ = \cos 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
17. $\tan\theta = \frac{3\tan\frac{\theta}{3} - \tan^3\frac{\theta}{3}}{1-3\tan^2\frac{\theta}{3}}$

7.10 উদাহরণমালা [Examples]

উদাহরণ 1

$\left[\tan\left(22\frac{1}{2}\right)^\circ + \cot\left(22\frac{1}{2}\right)^\circ\right]$-এর মান নির্ণয় করো।

সমাধান মনে করো, $\theta = \left(22\frac{1}{2}\right)^\circ$; তাহলে, $2\theta = 45^\circ$

$$\therefore \tan\left(22\frac{1}{2}\right)^\circ + \cot\left(22\frac{1}{2}\right)^\circ = \tan\theta + \cot\theta$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{2}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{2}{\sin 2\theta} = \frac{2}{\sin 45^\circ} \quad [\because 2\theta = 45^\circ] = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2}$$

উদাহরণ 2

$\cos 45^\circ$-এর মানের সাহায্যে $\sin\left(22\frac{1}{2}\right)^\circ$, $\cos\left(22\frac{1}{2}\right)^\circ$ এবং $\tan\left(22\frac{1}{2}\right)^\circ$-এর মান নির্ণয় করো।

সমাধান মনে করো, $\theta = 45^\circ$

স্পষ্টতই, $\frac{\theta}{2} = \left(22\frac{1}{2}\right)^\circ$-এর মান প্রথম পাদে থাকে।

সুতরাং, $\sin\frac{\theta}{2}$ ও $\cos\frac{\theta}{2}$-এর মান ধনাত্মক হবে।

এখন, $2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - \cos\theta$

$$\therefore 2\sin^2\left(22\frac{1}{2}\right)^\circ = 1 - \cos 45^\circ \quad [\because \theta = 45^\circ]$$

বা, $\sin\left(22\frac{1}{2}\right)^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \quad \left[\because \sin\left(22\frac{1}{2}\right)^\circ > 0\right]$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

আবার, $2\cos^2\frac{\theta}{2} = 1 + \cos\theta$

$$\therefore 2\cos^2\left(22\frac{1}{2}\right)^\circ = 1 + \cos 45^\circ \quad [\because \theta = 45^\circ]$$

বা, $\cos\left(22\frac{1}{2}\right)^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \quad \left[\because \cos\left(22\frac{1}{2}\right)^\circ > 0\right]$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

দ্রষ্টব্য

- $\because$ $\cot\theta = \cot\alpha$ $(\alpha \neq 0)$ হলে $\tan\theta = \tan\alpha$ হয়; সুতরাং, $\cot\theta = \cot\alpha$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান হয়, $\theta = n\pi + \alpha$, যেখানে $n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$ ।
- $\tan\theta = k(-\infty < k < \infty)$ আকারের সমীকরণের সাধারণ সমাধান নির্ণয়ে এমন একটি নির্দিষ্ট কোণ α নেওয়া হয় যাতে $k = \tan\alpha$ । এক্ষেত্রে, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ নেওয়া সুবিধাজনক।

8.4 $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ (a, b, c ধ্রুবক এবং $|c| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$) আকারের সমীকরণের সাধারণ সমাধান [General Solution of an Equation of the Form $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ (a, b, c are constants and $|c| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$]

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \quad \cdots(1)$$

নে করো, $a = r\cos\alpha$ এবং $b = r\sin\alpha$; তাহলে,

$$a^2 + b^2 = r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha = r^2 \quad \text{বা,} \quad r = \sqrt{a^2+b^2}$$

াবার, $\tan\alpha = \frac{r\sin\alpha}{r\cos\alpha} = \frac{b}{a}$ $\therefore$ $\alpha = \tan^{-1}\frac{b}{a}$

খন, (1) সমীকরণে a ও b-এর মান বসিয়ে পাই,

$$r\cos\alpha\cos\theta + r\sin\alpha\sin\theta = c$$

া, $r\cos(\theta - \alpha) = c$

া, $\cos(\theta - \alpha) = \frac{c}{r} = \cos\beta$ (মনে করো)

. $\theta - \alpha = 2n\pi \pm \beta$

া, $\theta = 2n\pi \pm \beta + \alpha$, যেখানে $n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$

বং $\cos\beta = \frac{c}{r} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

পষ্টতই, (1) সমীকরণ সমাধান করা সম্ভব হবে যদি সাংখ্যমানে $\cos\beta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqslant 1$ হয়, অর্থাৎ $c \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$ হয়। যদি, সাংখ্যমানে $c > \sqrt{a^2+b^2}$ হয়, তবে $\cos\beta > 1$ হবে এবং সেই কারণে (1) সমীকরণের কোনো সমাধান থাকবে না।

8.5 সংক্ষিপ্তকরণ [Summarisation]

1 (i) $\sin\theta = 0$ হলে $\theta = n\pi$

(ii) $\sin\theta = 1$ হলে $\theta = (4n+1)\frac{\pi}{2}$

(iii) $\sin\theta = -1$ হলে $\theta = (4n-1)\frac{\pi}{2}$

(iv) $\sin\theta = \sin\alpha \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ হলে $\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$

2 (i) $\cos\theta = 0$ হলে $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

(ii) $\cos\theta = 1$ হলে $\theta = 2n\pi$

(iii) $\cos\theta = -1$ হলে $\theta = (2n+1)\pi$

(iv) $\cos\theta = \cos\alpha$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant \pi)$ হলে $\theta = 2n\pi \pm \alpha$

3 (i) $\tan\theta = 0$ হলে $\theta = n\pi$

(ii) $\tan\theta = \tan\alpha \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ হলে $\theta = n\pi + \alpha$,

যেখানে n = যে-কোনো পূর্ণসংখ্যা।

8.6 উদাহরণমালা [Examples]

উদাহরণ 1

θ-এর সাধারণ মান নির্ণয় করো, যেগুলি $\sin^2\theta = \frac{3}{4}$ এই সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

সমাধান $\because$ $\sin^2\theta = \frac{3}{4}$

$\therefore$ $\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore$ $\theta = n\pi + (-1)^n \cdot \left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$

$= n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, যেখানে $n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$

উদাহরণ 2

$\tan^2\theta = \frac{1}{3}$, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$ সিদ্ধ হয়, θ-এর এমন মানসমূহ নির্ণয় করো।

সমাধান $\tan^2\theta = \frac{1}{3}$ $\therefore$ $\tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore$ $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$, যেখানে $n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$

এখন, $n = 0$ হলে, $\theta = \pm\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ অথবা $-\frac{\pi}{6}$

$n = 1$ হলে, $\theta = \pi \pm \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ বা, $\frac{7\pi}{6}$

$n = -1$ হলে, $\theta = -\pi \pm \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$

সুতরাং, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$-এর অন্তর্গত প্রদত্ত সমীকরণের সমাধানসমূহ হয়, $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$

(ii) আমরা জানি, $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

এবং $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

$\therefore\ \Delta = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}bc\cdot 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

$= bc\cdot\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ **(প্রমাণিত)।**

(iii) যেহেতু, $\frac{a}{\sin A} = 2R \quad \therefore\ \sin A = \frac{a}{2R}$

এখন, $\Delta = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}bc\cdot\frac{a}{2R}$

বা, $4R\Delta = abc$ বা, $R = \frac{abc}{4\Delta}$ **(প্রমাণিত)।**

দ্রষ্টব্য

1. *সূত্র (i) নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায়:*
ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \Delta$
$= \frac{1}{2}\times$ *যে-কোনো দুটি বাহুর গুণফল* $\times$ *তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণের সাইন।*

2. $\because\ \Delta = \frac{1}{2}bc\sin A \quad \therefore\ \sin A = \frac{2\Delta}{bc}$
একইভাবে, $\sin B = \frac{2\Delta}{ca}$ ও $\sin C = \frac{2\Delta}{ab}$

3. $\because\ \tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$
$= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)(s-b)(s-c)}{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$
$\therefore\ \tan\frac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{\Delta}$
একইভাবে, $\tan\frac{B}{2} = \frac{(s-c)(s-a)}{\Delta}$ ও $\tan\frac{C}{2} = \frac{(s-a)(s-b)}{\Delta}$

4. *আবার,* $\cot\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}} = \sqrt{\frac{s(s-a)s\cdot(s-a)}{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$
বা, $\cot\frac{A}{2} = \frac{s(s-a)}{\Delta}$
একইভাবে, $\cot\frac{B}{2} = \frac{s(s-b)}{\Delta}$ ও $\cot\frac{C}{2} = \frac{s(s-c)}{\Delta}$

9.4 সংক্ষিপ্তকরণ [Summarisation]

1. ABC ত্রিভুজের A, B ও C শীর্ষবিন্দুস্থ কোণ তিনটি যথাক্রমে A, B ও C দ্বারা প্রকাশ করা হয়। A, B ও C কোণের বিপরীত বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b ও c দ্বারা সূচিত হয়।

2. ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ R দ্বারা, এর ক্ষেত্রফল Δ (বা S) দ্বারা এবং অর্ধ-পরিসীমা s দ্বারা সূচিত হয়।

3. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

4. $a = b\cos C + c\cos B$; $b = c\cos A + a\cos C$ এবং
$c = a\cos B + b\cos A$

5. $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A$ বা, $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$
$b^2 = c^2+a^2-2ca\cos B$ বা, $\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ এবং
$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C$ বা, $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

6. $\tan A = \frac{abc}{R}\cdot\frac{1}{b^2+c^2-a^2}$; $\tan B = \frac{abc}{R}\cdot\frac{1}{c^2+a^2-b^2}$
$\tan C = \frac{abc}{R}\cdot\frac{1}{a^2+b^2-c^2}$

*7. $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$; $\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$;
$\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$; $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$;
$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$; $\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$;
$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$; $\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$ এবং
$\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

*8. $\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$; $\tan\frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}$ এবং
$\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$

*9. $\Delta = \frac{1}{2}\times$ যে-কোনো দুটি বাহুর গুণফল
$\times$ ওই বাহু দুটির অন্তর্গত কোণের সাইন
বা, $\Delta = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$

*10. $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

*11. $R = \frac{abc}{4\Delta}$

*12. $\tan\frac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{\Delta}$; $\tan\frac{B}{2} = \frac{(s-c)(s-a)}{\Delta}$ এবং
$\tan\frac{C}{2} = \frac{(s-a)(s-b)}{\Delta}$

*13. $\cot\frac{A}{2} = \frac{s(s-a)}{\Delta}$; $\cot\frac{B}{2} = \frac{s(s-b)}{\Delta}$ এবং
$\cot\frac{C}{2} = \frac{s(s-c)}{\Delta}$

---
* *(7) থেকে (13) পর্যন্ত প্রদত্ত সূত্রগুলি পাঠক্রমের অন্তর্গত নয়।*

(v) n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে একযোগে r-সংখ্যক বস্তুর বিন্যাস সংখ্যা হবে $(r-m+1)\cdot {}^{n-m}P_{r-m}$, যখন m-সংখ্যক বিশেষ বস্তু একটি নির্দিষ্ট ক্রমে একত্রে থাকবে।

7.4 সংক্ষিপ্তকরণ [Summarisation]

1. $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$

2. $0! = 1$

3. ${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$

   $=$ n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে একযোগে r-সংখ্যক বস্তুর বিন্যাস সংখ্যা।

4. ${}^nP_n = n! =$ n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর সবগুলি একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা।

5. n-সংখ্যক অক্ষরের মধ্যে p-সংখ্যক a, q-সংখ্যক b, r-সংখ্যক c এবং অন্য অক্ষরগুলি বিভিন্ন হলে সবগুলি একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{n!}{p!q!r!}$

6. n-সংখ্যক বস্তুর মধ্যে প্রত্যেকটি বস্তু যদি r বার পর্যন্ত বারবার আসে, তবে n-সংখ্যক বস্তু থেকে একযোগে r-সংখ্যক বস্তুর বিন্যাস সংখ্যা $= n^r$

7. $n! = n\cdot(n-1)! = n(n-1)\cdot(n-2)!$

8. ${}^nP_1 = n$; ${}^nP_2 = n(n-1)$; ${}^nP_3 = n(n-1)(n-2)$ ইত্যাদি।

   যেমন— ${}^{10}P_4 = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7$; ${}^{14}P_3 = 14\cdot 13\cdot 12$ ইত্যাদি।

7.5 উদাহরণমালা [Examples]

উদাহরণ 1

সংজ্ঞা থেকে প্রমাণ করো যে, ${}^nP_r = {}^{n-1}P_r + r\cdot {}^{n-1}P_{r-1}$

সমাধান ${}^nP_r$ বলতে n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে একযোগে r-সংখ্যক বস্তুর বিন্যাস সংখ্যা বোঝায়। এই বিন্যাস সংখ্যাকে দুটি ভাগে ভাগ করা যায়:

(i) n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে r-সংখ্যক বস্তুর বিন্যাস সংখ্যা, যাতে একটি বিশেষ বস্তু কখনোই থাকবে না;

(ii) n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে r-সংখ্যক বস্তুর বিন্যাস সংখ্যা, যাতে একটি বিশেষ বস্তু সর্বদাই থাকবে।

স্পষ্টতই, (i)-এর ক্ষেত্রে একটি বিশেষ বস্তুকে বাদ দিলে অবশিষ্ট $(n-1)$-সংখ্যক বস্তু থেকে r-সংখ্যক বস্তুর বিন্যাস সংখ্যা হবে ${}^{n-1}P_r$।

(ii)-এর ক্ষেত্রে একটি বিশেষ বস্তু সর্বদাই থাকবে। মনে করো, ওই বস্তুটিকে প্রথম স্থানে রাখা হল; তাহলে, অবশিষ্ট $(n-1)$ বস্তুকে অবশিষ্ট $(r-1)$ স্থানে রাখা যাবে ${}^{n-1}P_{r-1}$ উপায়ে। এখন, বিশেষ বস্তুটিকে r-টি স্থানে r উপায়ে রাখা যায় এবং প্রত্যেক উপায়ের জন্য অবশিষ্ট $(n-1)$ বস্তুকে অবশিষ্ট $(r-1)$ স্থানে ${}^{n-1}P_{r-1}$ উপায়ে রাখা যায়। সুতরাং, (ii)-এর ক্ষেত্রে বিন্যাস সংখ্যা $= r\cdot {}^{n-1}P_{r-1}$

$\therefore$ ${}^nP_r = {}^{n-1}P_r + r\cdot {}^{n-1}P_{r-1}$ (প্রমাণিত)।

দ্রষ্টব্য

সূত্রের সাহায্যেও অভেদটি প্রমাণ করা যায়।

প্রমাণ: ডানপক্ষ $= {}^{n-1}P_r + r\cdot {}^{n-1}P_{r-1}$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-1-r)!} + r\cdot \frac{(n-1)!}{\{n-1-(r-1)\}!}$$

$$= \frac{(n-r)\times(n-1)!}{(n-r)\times(n-r-1)!} + \frac{r\times(n-1)!}{(n-r)!}$$

[প্রথম পদটির লব ও হরকে $n-r$ দিয়ে গুণ করে]

$$= \frac{(n-r)\times(n-1)!}{(n-r)!} + \frac{r\times(n-1)!}{(n-r)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-r)!}(n-r+r)$$

$$= \frac{n\times(n-1)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!} = {}^nP_r$$ (প্রমাণিত)।

উদাহরণ 2

(i) ${}^{4-x}P_2 = 6$ **হলে x-এর মান নির্ণয় করো।**

(ii) দেখাও যে,

$${}^nP_r = n\cdot {}^{n-1}P_{r-1} = (n-r+1)\cdot {}^nP_{r-1}$$

(iii) ${}^{n+r+1}P_2 = 72$ **এবং** ${}^{n-r}P_2 = 12$ **হলে n ও r-এর মান নির্ণয় করো।**

সমাধান

i $\because$ ${}^nP_2 = n(n-1)$

$\therefore$ ${}^{4-x}P_2 = 6$ থেকে পাই, $(4-x)(4-x-1) = 6$

বা, $y(y-1)-6 = 0$ [$4-x = y$ ধরে]

বা, $y^2-y-6 = 0$ বা, $(y-3)(y+2) = 0$

$\therefore$ হয়, $y-3 = 0$ অর্থাৎ, $y = 3$;

নতুবা, $y+2 = 0$ অর্থাৎ, $y = -2$

এখন, $y = 3$ হলে, $4-x = 3$ বা, $x = 1$

যেহেতু $y = (4-x)$-এর মান ধনাত্মক, সুতরাং $y = -2$ গ্রাহ্য হবে না।

অর্থাৎ, $r = (m+1), (m+2), \cdots, (2m-1), 2m$ হলে,

$^nC_r < {}^nC_{r-1}$ হবে।

সুতরাং, $^nC_{m+1} < {}^nC_m, {}^nC_{m+2} < {}^nC_{m+1},$

$\cdots, {}^nC_{2m} < {}^nC_{2m-1}$

অর্থাৎ, $^nC_m > {}^nC_{m+1} > {}^nC_{m+2} > \cdots > {}^nC_{2m-1} > {}^nC_{2m}$ $\cdots(5)$

এখন, (4) ও (5) থেকে স্পষ্টই বোঝা যায় যে,

$^nC_0 < {}^nC_1 < {}^nC_2 < \cdots < {}^nC_m > {}^nC_{m+1} > {}^nC_{m+2} > \cdots > {}^nC_{2m}$ হয়।

$\therefore$ $n = 2m$ হলে ^nC_r-এর বৃহত্তম মান হয় ^nC_m

অর্থাৎ, ^nC_r-এর মান বৃহত্তম হয়, যখন $r = m = \frac{n}{2}$।

$\therefore$ n-এর মান যুগ্ম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে ^nC_r-এর বৃহত্তম মান

$$= {}^nC_{\frac{n}{2}} = \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(n-\frac{n}{2}\right)!} = \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}!\right)^2}$$

দ্বিতীয়ত, মনে করো, n = একটি অযুগ্ম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা $= 2m+1$, যেখানে, m = একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

তাহলে, $\frac{n+1}{2} = \frac{2m+1+1}{2} = m+1$

সুতরাং, (1) থেকে পাই,

$^nC_r > {}^nC_{r-1}$ হবে, যখন $r < m+1$

অর্থাৎ, $r = 1, 2, 3, \cdots, m$ হলে, $^nC_r > {}^nC_{r-1}$ হবে।

সুতরাং, $^nC_1 > {}^nC_0, {}^nC_2 > {}^nC_1, \cdots, {}^nC_m > {}^nC_{m-1}$

অর্থাৎ, $^nC_0 < {}^nC_1 < {}^nC_2 < {}^nC_3 < \cdots < {}^nC_{m-1} < {}^nC_m$ $\cdots(6)$

আবার, (2) থেকে পাই,

$^nC_r = {}^nC_{r-1}$ হবে, যখন $r = m+1$

অর্থাৎ, $^nC_{m+1} = {}^nC_m$ হয় যখন $r = m+1$ $\cdots(7)$

এবং (3) থেকে পাই,

$^nC_r < {}^nC_{r-1}$ হবে, যখন $r > m+1$

অর্থাৎ, $r = (m+2), (m+3), \cdots, (2m+1)$ হলে, $^nC_r < {}^nC_{r-1}$ হবে।

সুতরাং, $^nC_{m+1} > {}^nC_{m+2} > \cdots > {}^nC_{2m+1}$ $\cdots(8)$

এখন, (6), (7) ও (8) থেকে পাই,

$^nC_0 < {}^nC_1 < {}^nC_2 < \cdots < {}^nC_m$

$= {}^nC_{m+1} > {}^nC_{m+2} > \cdots > {}^nC_{2m+1}$

$\therefore$ $n = 2m+1$ হলে ^nC_r-এর বৃহত্তম মান হয় ^nC_m অথবা $^nC_{m+1}$

অর্থাৎ, ^nC_r-এর মান বৃহত্তম হয়, যখন $r = m$ (অথবা $r = m+1$)

এখন, $n = 2m+1$, সুতরাং $m = \frac{n-1}{2}$

$\therefore$ n-এর মান অযুগ্ম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে ^nC_r-এর বৃহত্তর মান

$$= {}^nC_m = {}^nC_{\frac{n-1}{2}} = \frac{n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n+1}{2}\right)!}$$ ।

7.9 সংক্ষিপ্তকরণ [Summarisation]

1 n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে একযোগে r-সংখ্যক বস্তুর সমবায় সংখ্যা $= {}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

2 $^nP_r = r! \times {}^nC_r$

3 $^nC_0 = 1, \quad {}^nC_1 = n, \quad {}^nC_n = 1, \quad {}^nC_2 = \frac{n(n-1)}{2!},$

$^nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$ ইত্যাদি

4 $^nC_r = {}^nC_{n-r}$

5 যদি $^nC_p = {}^nC_q$ হয়, তবে $p+q = n$ হবে [যখন $p \neq q$]

6 $^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$ **7** $\frac{^nC_r}{^nC_{r-1}} = \frac{n-r+1}{r}$

8 n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে যতগুলি ইচ্ছা একযোগে নিয়ে সমবায় সংখ্যা $= {}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \cdots + {}^nC_n = 2^n - 1$

9 p-সংখ্যক প্রথম ধরনের, q-সংখ্যক দ্বিতীয় ধরনের, r-সংখ্যক তৃতীয় ধরনের ইত্যাদি অভিন্ন বস্তু থাকলে যতগুলি ইচ্ছা একযোগে নিয়ে সমবায় সংখ্যা $= \{(p+1)(q+1)(r+1)\cdots\} - 1$

10 n = যুগ্ম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে ^nC_r বৃহত্তম হয় যখন $r = \frac{n}{2}$; আবার, n = অযুগ্ম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে ^nC_r বৃহত্তম হয়, যখন $r = \frac{n-1}{2}$ অথবা $r = \frac{n+1}{2}$

7.10 উদাহরণমালা [Examples]

উদাহরণ 1

মান নির্ণয় করো:

(i) $^{10}C_4$ (ii) $^9C_7$ (iii) $^{11}C_9 + {}^{11}C_8$

সমাধান

i $^{10}C_4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$

8.10 সংক্ষিপ্তকরণ [Summarisation]

1. n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হলে,

$$(a+x)^n = a^n + {}^nC_1 \cdot a^{n-1}x^1 + {}^nC_2 \cdot a^{n-2}x^2 + \cdots + {}^nC_r \cdot a^{n-r}x^r + \cdots + x^n \quad \cdots(1)$$

2. (i) n যুগ্ম হলে, (1) বিস্তৃতির একটি মধ্যম পদ থাকবে এবং মধ্যম পদটি হবে $\left(\frac{n}{2}+1\right)$-তম পদ;

(ii) n অযুগ্ম হলে (1) বিস্তৃতির দুটি মধ্যম পদ থাকবে এবং পদ দুটি যথাক্রমে $\left(\frac{n-1}{2}+1\right)$-তম এবং $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$-তম পদ হবে।

3. $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতিতে m-তম অথবা, $(m+1)$-তম পদ বৃহত্তম হবে যদি, $\frac{(n+1)x}{a+x}$ = একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা m হয়; পক্ষান্তরে, $\frac{(n+1)x}{a+x}$ [(একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা (m) + একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ হলে], $(m+1)$-তম পদটি বৃহত্তম পদ হবে।

4. (1) বিস্তৃতির সাধারণ পদ

$$= (r+1)\text{তম পদ} = t_{r+1} = {}^nC_r \cdot a^{n-r}x^r \text{ ।}$$

8.11 উদাহরণমালা [Examples]

উদাহরণ 1

নিম্নলিখিত দ্বিপদ রাশিসমূহের বিস্তৃতি নির্ণয় করো:

(i) $(2+5x)^7$ **(ii)** $\left(x-\frac{1}{2x}\right)^8$ **(iii)** $(x^2+x-1)^4$

সমাধান

i. $$(2+5x)^7 = 2^7 + {}^7C_1 \cdot 2^6 \cdot (5x) + {}^7C_2 \cdot 2^5 \cdot (5x)^2 + {}^7C_3 \cdot 2^4 \cdot (5x)^3 + {}^7C_4 \cdot 2^3 \cdot (5x)^4 + {}^7C_5 \cdot 2^2 \cdot (5x)^5 + {}^7C_6 \cdot 2 \cdot (5x)^6 + (5x)^7$$

$$= 128 + 2240x + 16800x^2 + 70000x^3 + 175000x^4 + 262500x^5 + 218750x^6 + 78125x^7$$

ii. $$\left(x-\frac{1}{2x}\right)^8 = x^8 + {}^8C_1 \cdot x^7 \cdot \left(-\frac{1}{2x}\right) + {}^8C_2 \cdot x^6 \cdot \left(-\frac{1}{2x}\right)^2 + {}^8C_3 \cdot x^5 \cdot \left(-\frac{1}{2x}\right)^3 + {}^8C_4 \cdot x^4 \cdot \left(-\frac{1}{2x}\right)^4 + {}^8C_5 \cdot x^3 \cdot \left(-\frac{1}{2x}\right)^5 + {}^8C_6 \cdot x^2 \cdot \left(-\frac{1}{2x}\right)^6 + {}^8C_7 \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{2x}\right)^7 + \left(-\frac{1}{2x}\right)^8$$

$$= x^8 - 4x^6 + 7x^4 - 7x^2 + \frac{35}{8} - \frac{7}{4x^2} + \frac{7}{16x^4} - \frac{1}{16x^6} + \frac{1}{256x^8}$$

iii. $$(x^2+x-1)^4 = (x^2)^4 + {}^4C_1(x^2)^3(x-1) + {}^4C_2(x^2)^2(x-1)^2 + {}^4C_3(x^2)(x-1)^3 + (x-1)^4$$

[একটি রাশি x^2 এবং অপরটি $x-1$ ধরে]

$$= x^8 + 4x^6(x-1) + 6x^4(x^2-2x+1) + 4x^2(x^3-3x^2+3x-1) + x^4 + {}^4C_1x^3(-1) + {}^4C_2x^2(-1)^2 + {}^4C_3x(-1)^3 + (-1)^4$$

$$= x^8 + 4x^7 - 4x^6 + 6x^6 - 12x^5 + 6x^4 + 4x^5 - 12x^4 + 12x^3 - 4x^2 + x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$$

$$= x^8 + 4x^7 + 2x^6 - 8x^5 - 5x^4 + 8x^3 + 2x^2 - 4x + 1$$

উদাহরণ 2

সরল করো:

(i) $(a+\sqrt{a^2-1})^8 - (a-\sqrt{a^2-1})^8$

(ii) $(2x+y)^5 - (2x+y)^4\, 5y + (2x+y)^3\, 10y^2 - (2x+y)^2\, 10y^3 + (2x+y)\, 5y^4 - y^5$

সমাধান

i. মনে করা যাক, $x = \sqrt{a^2-1}$;

তাহলে প্রদত্ত রাশি

$$= (a+x)^8 - (a-x)^8$$

$$= a^8 + {}^8C_1 \cdot a^7x + {}^8C_2 \cdot a^6x^2 + {}^8C_3 \cdot a^5x^3 + {}^8C_4 \cdot a^4x^4 + {}^8C_5 \cdot a^3x^5 + {}^8C_6 \cdot a^2x^6 + {}^8C_7 \cdot ax^7 + x^8$$
$$- (a^8 - {}^8C_1 \cdot a^7x + {}^8C_2 \cdot a^6x^2 - {}^8C_3 \cdot a^5x^3 + {}^8C_4 \cdot a^4x^4 - {}^8C_5 \cdot a^3x^5 + {}^8C_6 \cdot a^2x^6 - {}^8C_7 \cdot ax^7 + x^8)$$

$$= 2[{}^8C_1 \cdot a^7x + {}^8C_3 \cdot a^5x^3 + {}^8C_5 \cdot a^3x^5 + {}^8C_7 \cdot ax^7]$$

$$= 2[8a^7\sqrt{a^2-1} + 56a^5(a^2-1)\sqrt{a^2-1} + 56a^3(a^2-1)^2\sqrt{a^2-1} + 8a(a^2-1)^3\sqrt{a^2-1}]$$

$$= 16a\sqrt{a^2-1}[a^6 + 7a^4(a^2-1) + 7a^2(a^4-2a^2+1) + (a^6-3a^4+3a^2-1)]$$

$$= 16a\sqrt{a^2-1}[16a^6 - 24a^4 + 10a^2 - 1]$$

ii. স্পষ্টতই, ${}^5C_1 = {}^5C_4 = 5$ এবং ${}^5C_2 = {}^5C_3 = 10$

এখন, $2x+y = a$ ধরলে,

প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি [The sum of the squares of first n natural numbers]

$$S_n = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি [The sum of the cubes of first n natural numbers]

$$S_n = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

দ্রষ্টব্য

(2) ও (3) -এর প্রমাণের জন্য বীজগণিতের অন্তর্গত গাণিতিক আরোহণ পদ্ধতির [তৃতীয় অধ্যায়] উদাহরণমালা দ্যাখো।

9.8 সমান্তরীয় মধ্যক [Arithmetic Mean]

যখন তিনটি রাশি সমান্তর প্রগতিতে থাকে তখন মধ্যবর্তী রাশিটিকে অন্য দুটি রাশির **সমান্তরীয় মধ্যক** (arithmetic mean বা A.M.) বলে। যেমন, $\{9, 14, 19\}$ এই সমান্তর প্রগতিতে 14 হল 9 এবং 19-এর সমান্তরীয় মধ্যক।

যদি a এবং b দুটি রাশি এবং x তাদের সমান্তরীয় মধ্যক হয়, তবে a, x, b সমান্তর প্রগতিতে থাকবে।

$\therefore$ $x-a = b-x =$ সাধারণ অন্তর

বা, $2x = a+b$ বা, $x = \dfrac{a+b}{2}$

সুতরাং, দুটি রাশির সমান্তরীয় মধ্যক হল রাশি দুটির সমষ্টির অর্ধেক।

সাধারণভাবে, যখন কতকগুলি রাশি সমান্তর প্রগতিতে থাকে তখন দুই প্রান্তের পদ দুটির মধ্যবর্তী রাশিগুলিকে প্রান্তীয় পদ দুটির সমান্তরীয় মধ্যকসমূহ বলে। সুতরাং, $\{4, 7, 10, 13, 16, 19\}$ সমান্তর প্রগতিতে 7, 10, 13, 16 হল 4 এবং 19-এর সমান্তরীয় মধ্যকসমূহ।

9.9 সংক্ষিপ্তকরণ [Summarisation]

1 কোনো সমান্তর প্রগতির প্রথম পদ $= a$ এবং সাধারণ অন্তর $= d$ হলে,

(i) প্রগতির n-তম পদ $= t_n = a+(n-1)d$ ...(1)

(ii) প্রগতির প্রথম n-সংখ্যক পদের যোগফল S_n হলে

$$S_n = \frac{n}{2}(a+l) = \frac{\text{পদসংখ্যা}}{2}(\text{প্রথম পদ} + \text{শেষ পদ}) \quad \cdots(2a)$$

বা, $$S_n = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\} \quad \cdots(2b)$$

যেখানে, $l =$ শেষ পদ $= n$-তম পদ $= a+(n-1)d$

2 প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি $= \dfrac{n(n+1)}{2}$

3 প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি

$= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4 প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি $= \left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

5 দুটি প্রদত্ত রাশি a এবং b-এর সমান্তরীয় মধ্যক x হলে,

$$x = \frac{a+b}{2} = \frac{\text{রাশি দুটির যোগফল}}{2}$$

6 (i) সমান্তর প্রগতিভুক্ত তিনটি সংখ্যার সমষ্টির মান দেওয়া থাকলে সংখ্যা তিনটিকে $(a-d)$, a, $(a+d)$ আকারে ধরা সুবিধাজনক।

(ii) সমান্তর প্রগতিভুক্ত চারটি সংখ্যার সমষ্টির মান দেওয়া থাকলে সংখ্যা চারটিকে $(a-3d)$, $(a-d)$, $(a+d)$, $(a+3d)$ আকারে ধরা সুবিধাজনক।

9.10 উদাহরণমালা [Examples]

উদাহরণ 1

কোনো সমান্তর প্রগতির r-তম পদ n এবং n-তম পদ r হলে দেখাও যে, তার m-তম পদের মান $r+n-m$।

সমাধান মনে করো, a এবং d যথাক্রমে ওই সমান্তর প্রগতির প্রথম পদ এবং সাধারণ অন্তর।

প্রশ্নানুযায়ী, r-তম পদ $= a+(r-1)d = n$ ...(1)

এবং n-তম পদ $= a+(n-1)d = r$ ...(2)

(1) থেকে (2) বিয়োগ করে পাই, $(r-n)d = n-r$

$\therefore$ $d = \dfrac{n-r}{r-n} = -1$ $[\because r \neq n]$

$\therefore$ প্রগতিটির m-তম পদ

$= a+(m-1)d = a+(r-1+m-r)d$

$= a+(r-1)d+(m-r)d$

$= n+(m-r)(-1)$ $[\because a+(r-1)d = n]$

$= n-m+r = n+r-m$ (প্রমাণিত)।

উদাহরণ 2

প্রমাণ করো যে, সসীম পদসংখ্যাবিশিষ্ট কোনো সমান্তর প্রগতির প্রথম ও শেষ পদ থেকে সমদূরবর্তী পদ দুটির সমষ্টি তার প্রথম এবং শেষ পদের সমষ্টির সমান।

সমাধান মনে করো, কোনো সমান্তর প্রগতির প্রথম পদ $= a$, সাধারণ অন্তর $= d$ এবং শেষ পদ $= n$-তম পদ $= l$

স্পষ্টতই, শেষ দিক থেকে দ্বিতীয় পদ $= l-d$, শেষ দিক থেকে তৃতীয় পদ $= l-2d$ ইত্যাদি।

সুতরাং, সাধারণভাবে শেষ দিক থেকে r-তম পদ $= l-(r-1)d$।

পরপরবর্তীক্রমে, $\dfrac{\text{দ্বিতীয় পদ }(12)}{\text{প্রথম পদ }(3)} = \dfrac{\text{তৃতীয় পদ }(48)}{\text{দ্বিতীয় পদ }(12)}$

$= \dfrac{\text{চতুর্থ পদ }(192)}{\text{তৃতীয় পদ }(48)} = 4$

উদাহরণ 2 সংখ্যাসমূহের অনুক্রম $\left\{1, \frac{2}{5}, \frac{4}{25}, \frac{8}{125}, \cdots\right\}$ একটি গুণোত্তর প্রগতি যার সাধারণ অনুপাত $\frac{2}{5}$, কারণ—

$$\frac{\text{দ্বিতীয় পদ }\left(\frac{2}{5}\right)}{\text{প্রথম পদ }(1)} = \frac{\text{তৃতীয় পদ }\left(\frac{4}{25}\right)}{\text{দ্বিতীয় পদ }\left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{\text{চতুর্থ পদ }\left(\frac{8}{125}\right)}{\text{তৃতীয় পদ }\left(\frac{4}{25}\right)} = \frac{2}{5}$$

9.12 গুণোত্তর প্রগতির সাধারণ আকার এবং সংশ্লিষ্ট সূত্রাবলি [General Form of a G. P. and Related Formulae]

1 গুণোত্তর প্রগতির সাধারণ আকার [General form of a G.P.]

গুণোত্তর প্রগতির সাধারণ আকার হল $\{a, ar, ar^2, ar^3, \cdots\}$ ...(I)

যেখানে, 'a' হল প্রগতির **প্রথম পদ** এবং 'r' হল তার **সাধারণ অনুপাত**।

স্পষ্টতই, দ্বিতীয় পদ $= ar = a \cdot r^{2-1}$

$=$ প্রথম পদ $\times$ (সাধারণ অনুপাত)$^{2-1}$

তৃতীয় পদ $= a \cdot r^2 = a \cdot r^{3-1}$

$=$ প্রথম পদ $\times$ (সাধারণ অনুপাত)$^{3-1}$

চতুর্থ পদ $= a \cdot r^3 = a \cdot r^{4-1}$

$=$ প্রথম পদ $\times$ (সাধারণ অনুপাত)$^{4-1}$

সাধারণভাবে, n-তম পদ

$=$ প্রথম পদ $\times$ (সাধারণ অনুপাত)$^{n-1}$

$= a \cdot r^{n-1}$

সুতরাং, 't_n' যদি কোনো গুণোত্তর প্রগতির n-তম পদ হয়, যার প্রথম পদ 'a' এবং সাধারণ অনুপাত 'r', তবে $t_n = ar^{n-1}$ হবে।

দ্রষ্টব্য

কোনো গুণোত্তর প্রগতির প্রথম পদ এবং সাধারণ অনুপাত জানা থাকলে, তার যে-কোনো পদ নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 1

$\{2, 6, 18, 54, \cdots\}$ এই গুণোত্তর প্রগতির 10-তম পদ নির্ণয় করো।

সমাধান প্রদত্ত গুণোত্তর প্রগতির প্রথম পদ $= a = 2$ এবং সাধারণ অনুপাত $= r = \dfrac{6}{2} = 3$

$\therefore$ প্রগতিটির দশম পদ $= t_{10} = 2 \cdot 3^{10-1} = 2 \cdot 3^9 = 39366$

দ্রষ্টব্য

যদি কোনো গুণোত্তর প্রগতির দুটি পদ জানা থাকে, তবে প্রগতিটি সম্পূর্ণভাবে নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 2

কোনো গুণোত্তর প্রগতির তৃতীয় ও সপ্তম পদ যথাক্রমে 4 এবং 64; প্রগতিটি নির্ণয় করো।

সমাধান মনে করো, নির্ণেয় গুণোত্তর প্রগতির প্রথম পদ $= a$ এবং তার সাধারণ অনুপাত $= r$

$\therefore$ তৃতীয় পদ $= a \cdot r^{3-1} = ar^2 = 4$ ...(1)

এবং সপ্তম পদ $= a \cdot r^{7-1} = ar^6 = 64$ ...(2)

এখন, (2)-কে (1) দিয়ে ভাগ করে পাই, $r^4 = 16 = 2^4$

$\therefore \quad r = 2$ বা, -2 [$\because r$ বাস্তব]

(1)-এ $r = 2$ অথবা, $r = -2$ বসিয়ে পাই, $a \cdot 2^2 = 4$ বা, $a = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় গুণোত্তর প্রগতি হয় $\{1, 2, 4, 8, \cdots\}$

অথবা, $\{1, -2, 4, -8, \cdots\}$

2 গুণোত্তর প্রগতি (I)-এর প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় [To find the sum of first n-terms of the G. P. (I)]

মনে করো, নির্ণেয় যোগফল $= S_n$। এখন, প্রদত্ত গুণোত্তর শ্রেণিটির n-তম পদ $= ar^{n-1}$

$\therefore \quad S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$ ...(1)

উভয়পক্ষকে r দিয়ে গুণ করে পাই,

$S_n \cdot r = \quad ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$ ...(2)

(1) থেকে (2) বিয়োগ করে পাই,

$S_n - S_n \cdot r = a - ar^n$ বা, $S_n(1-r) = a(1-r^n)$

$\therefore \quad r \neq 1$ ধরে পাই,

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad \cdots(3)$$

অথবা, $$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1} \quad \cdots(4)$$

স্পষ্টতই, (3) ও (4) সূত্র দুটি অভিন্ন; প্রশ্ন সমাধানের ক্ষেত্রে গণনাকার্যের সুবিধার কথা মনে রেখে যে-কোনো একটি আকার প্রয়োগ করবে।

দ্রষ্টব্য

$r = 1$ হলে শ্রেণিটির যোগফল $= a + a + a + \cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত $= na$।

প্রশ্নানুযায়ী,

$$p(a_1x+b_1y+c_1)+q(a_2x+b_2y+c_2)+r(a_3x+b_3y+c_3) = 0$$

এই অভেদে $x=\alpha$ ও $y=\beta$ লিখে পাই,

$$p(a_1\alpha+b_1\beta+c_1)+q(a_2\alpha+b_2\beta+c_2)+r(a_3\alpha+b_3\beta+c_3) = 0$$

বা, $p\cdot 0+q\cdot 0+r(a_3\alpha+b_3\beta+c_3) = 0$

$a_3\alpha+b_3\beta+c_3 = 0 \quad [\because r \neq 0]$

অর্থাৎ (3) সমীকরণ (1) ও (2) সরলরেখার ছেদবিন্দু দ্বারা সিদ্ধ হয়।

সুতরাং, (1), (2) ও (3) রেখা তিনটি সমবিন্দু **(প্রমাণিত)**।

2.10 সংক্ষিপ্তকরণ [Summarisation]

1 প্রবণতা বা নতি (gradient or slope)—কোনো সরলরেখা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে θ কোণ করলে তার প্রবণতা,

$$m = \tan\theta$$

2 (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দু দুটির সংযোজক সরলরেখার প্রবণতা m হলে,

$$m = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \frac{\text{কোটি দুটির অন্তর}}{\text{ভুজ দুটির অন্তর}}$$

3 x-অক্ষের সমীকরণ হয় $y = 0$

4 মূলবিন্দু থেকে b একক দূরে এবং x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ হয় $y = b$

5 y-অক্ষের সমীকরণ হয় $x = 0$

6 মূলবিন্দু থেকে a একক দূরে এবং y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ হয় $x = a$

7 প্রবণতা-ছেদিতাংশ আকার (slope-intercept form)-এ সরলরেখার সমীকরণ: $y = mx+c$, যেখানে m = সরলরেখার প্রবণতা এবং c = y-অক্ষের ছেদিতাংশ।

8 বিন্দু-প্রবণতা আকার (point-slope form)-এ সরলরেখার সমীকরণ: $y-y_1 = m(x-x_1)$, যেখানে m = সরলরেখার প্রবণতা এবং (x_1, y_1) হল রেখার ওপর প্রদত্ত বিন্দু।

9 প্রতিসম আকার (symmetrical form)-এ সরলরেখার সমীকরণ:

$$\frac{y-y_1}{\sin\theta} = \frac{x-x_1}{\cos\theta} = r$$

যেখানে θ = রেখার আনতি, (x_1, y_1) হল রেখার ওপর নির্দিষ্ট বিন্দু এবং r = (x, y) ও (x_1, y_1) বিন্দু দুটির মধ্যে দূরত্ব।

10 দুই-বিন্দু আকার (two-point form)-এ সরলরেখার সমীকরণ:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

যেখানে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) হল রেখার ওপর দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

11 ছেদিতাংশ আকার (intercept form)-এ সরলরেখার সমীকরণ:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 1$$

যেখানে a ও b যথাক্রমে x ও y-অক্ষের ছেদিতাংশ। সরলরেখাটি x-অক্ষকে $(a, 0)$ বিন্দুতে ও y-অক্ষকে $(0, b)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

12 অভিলম্ব আকার (normal form)-এ সরলরেখার সমীকরণ হয়: $x\cos\alpha+y\sin\alpha = p$, যেখানে $p(>0)$ = মূলবিন্দু থেকে সরলরেখার লম্বদূরত্ব এবং $\alpha(0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi)$ = সরলরেখার ওপর মূলবিন্দু থেকে অঙ্কিত লম্বের সঙ্গে ধনাত্মক x-অক্ষের আনতি।

13 সাধারণ আকার (general form)-এ সরলরেখার সমীকরণ:

$$ax+by+c = 0,$$

যেখানে a, b, c বাস্তব ধ্রুবক সংখ্যা (a, b উভয়ে একত্রে শূন্য নয়); সরলরেখাটির নতি $= -\frac{a}{b}$।

14 দুটি প্রদত্ত সরলরেখার ছেদবিন্দুর ভুজ ও কোটি যথাক্রমে সমীকরণ দুটি সমাধান করে প্রাপ্ত x ও y-এর মান।

15 $a_1x+b_1y+c_1 = 0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2 = 0$ সরলরেখা দুটির ছেদবিন্দুগামী যে-কোনো সরলরেখার সমীকরণ হয়,

$$a_1x+b_1y+c_1+k(a_2x+b_2y+c_2) = 0,$$

যেখানে $k(\neq 0, \infty)$ যে-কোনো বাস্তব ধ্রুবক সংখ্যা। k এর মান নির্ণয়ের জন্য অন্য প্রদত্ত শর্ত প্রয়োগ করতে হয়।

16 তিনটি প্রদত্ত সরলরেখা সমবিন্দু (concurrent) হবে, যদি যে-কোনো দুটি সরলরেখার ছেদবিন্দু দ্বারা তৃতীয় সরলরেখার সমীকরণ সিদ্ধ হয়।

2.11 উদাহরণমালা [Examples]

উদাহরণ 1

$(4, 8)$ এবং $(-6, -2)$ বিন্দু দুটির সংযোজক সরলরেখার আনতি (inclination) এবং প্রবণতা (gradient) নির্ণয় করো।

সমাধান মনে করো, প্রদত্ত বিন্দু দুটির সংযোজক সরলরেখার আনতি ও প্রবণতা যথাক্রমে θ এবং m;

সুতরাং, $m = \tan\theta = \frac{8-(-2)}{4-(-6)}$

$\left[m = \tan\theta = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} \text{ সূত্র প্রয়োগ করে}\right]$

বা, $m = \tan\theta = \frac{10}{10} = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় প্রবণতা $= 1$

আবার $\tan\theta = 1 = \tan 45^\circ$ বা, $\theta = 45^\circ$

$\therefore$ নির্ণেয় আনতি $= 45^\circ$।

যদি (1) ও (2) একই সরলরেখার সমীকরণকে প্রকাশ করে তবে তাদের প্রবণতা সমান হবে।

$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \quad \text{বা, } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \qquad \cdots(3)$$

আবার, (1) ও (2) সরলরেখার y-ছেদিতাংশ সমান হবে।

$$-\frac{c_1}{b_1} = -\frac{c_2}{b_2} \quad \text{বা, } \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \qquad \cdots(4)$$

সুতরাং, (3) ও (4) থেকে বোঝা যায় যে, (1) ও (2) একই সরলরেখার সমীকরণকে প্রকাশ করবে, যখন,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$ (প্রমাণিত)।

2.16 সংক্ষিপ্তকরণ [Summarisation]

1. $y = m_1x + c_1$ ও $y = m_2x + c_2$ সরলরেখা দুটির অন্তর্গত কোণ θ হলে $\tan\theta = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$ হবে।
2. দুটি সরলরেখা পরস্পর সমান্তরাল হলে সরলরেখা দুটির প্রবণতার মান সমান হবে অর্থাৎ $y = m_1x + c_1$ ও $y = m_2x + c_2$ সরলরেখা দুটি পরস্পর সমান্তরাল হবে, যদি $m_1 = m_2$ হয়।
3. $ax + by + c = 0$ সরলরেখার সমান্তরাল যে-কোনো সরলরেখার সমীকরণ হয়, $ax + by + k = 0$, যেখানে k একটি অনির্দিষ্ট ধ্রুবক।
4. দুটি সরলরেখা পরস্পর লম্ব হবে যদি সরলরেখা দুটির প্রবণতা দুটির গুণফল $= -1$ হয়, অর্থাৎ $y = m_1x + c_1$ ও $y = m_2x + c_2$ সরলরেখা দুটি পরস্পর লম্ব হবে যদি $m_1m_2 = -1$ হয়।
5. $ax + by + c = 0$ সরলরেখার ওপর লম্ব যে-কোনো সরলরেখার সমীকরণ হয়, $bx - ay + k = 0$ যেখানে k একটি অনির্দিষ্ট ধ্রুবক।
6. $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ও $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ সমীকরণ দুটি একই সরলরেখার সমীকরণকে প্রকাশ করবে যদি $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ হয়।

2.17 উদাহরণমালা [Examples]

উদাহরণ 1

$7x - 4y = 0$ এবং $3x - 11y + 2 = 0$ সরলরেখা দুটির অন্তর্গত সূক্ষ্মকোণটির মান নির্ণয় করো।

সমাধান $7x - 4y = 0$ বা, $y = \frac{7}{4}x$ $\quad\cdots(1)$

আবার, $3x - 11y + 2 = 0$ বা, $y = \frac{3}{11}x + \frac{2}{11}$ $\quad\cdots(2)$

স্পষ্টতই, (1) সরলরেখার প্রবণতা $= m_1 = \frac{7}{4}$ এবং (2) সরলরেখার প্রবণতা $= m_2 = \frac{3}{11}$

সুতরাং, (1) ও (2) সরলরেখা দুটির অন্তর্গত কোণ θ হলে,

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right|$$

$$= \left|\frac{\frac{7}{4} - \frac{3}{11}}{1 + \frac{7}{4}\cdot\frac{3}{11}}\right| = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

$\therefore$ প্রদত্ত সরলরেখা দুটির অন্তর্গত নির্ণেয় সূক্ষ্মকোণের পরিমাপ $= \frac{\pi}{4}$।

উদাহরণ 2

$x - y + 2 = 0$ এবং $(2 - \sqrt{3})x - y + 1 = 0$ সরলরেখা দুটির অন্তর্গত স্থূলকোণটির মান নির্ণয় করো।

সমাধান $x - y + 2 = 0$

বা, $y = x + 2$ $\quad\cdots(1)$

আবার, $(2 - \sqrt{3})x - y + 1 = 0$

বা, $y = (2 - \sqrt{3})x + 1$ $\quad\cdots(2)$

স্পষ্টতই, (1) সরলরেখার প্রবণতা $= m_1 = 1$ এবং, (2) সরলরেখার প্রবণতা $= m_2 = (2 - \sqrt{3})$

সুতরাং, (1) ও (2) সরলরেখা দুটির অন্তর্গত সূক্ষ্মকোণ θ হলে,

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right| = \left|\frac{1 - (2 - \sqrt{3})}{1 + 1\cdot(2 - \sqrt{3})}\right|$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{3 - \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

সুতরাং, প্রদত্ত সরলরেখা দুটির অন্তর্গত স্থূলকোণটির নির্ণেয় মান $= \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$।

উদাহরণ 3

m-এর মান কত হলে $y = x - 6$ এবং $y = mx + 3$ সরলরেখা দুটির অন্তর্গত কোণের পরিমাপ $60°$ হবে?

সমাধান স্পষ্টতই, প্রদত্ত সরলরেখা দুটির প্রবণতা যথাক্রমে 1 এবং m। আবার, সরলরেখা দুটির অন্তর্গত কোণের পরিমাপ $60°$।

$$\therefore \quad \tan 60° = \pm\frac{1 - m}{1 + m} \qquad \cdots(1)$$

মনে করা যাক, উপবৃত্তের সমীকরণ হয়,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a^2>b^2) \qquad \ldots(1)$$

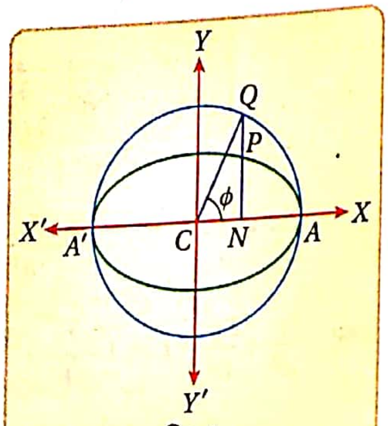
(1) উপবৃত্তের পরাক্ষ $\overline{AA'}$-র দৈর্ঘ্য $=2a$ একক; স্পষ্টতই, $\overline{AA'}$-কে ব্যাস করে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ হয়,

$$x^2+y^2=a^2$$

সুতরাং, (1) উপবৃত্তের সহায়ক বৃত্তের সমীকরণ হয়,

$$x^2+y^2=a^2 \qquad \ldots(2)$$

এখন, (1) উপবৃত্তের ওপর যে-কোনো বিন্দু $P(x, y)$ নেওয়া হল এবং P থেকে পরাক্ষের ওপর $\overline{PN}$ লম্ব অঙ্কন করা হল। মনে করা হল, বর্ধিত NP সহায়ক বৃত্ত (2)-কে Q বিন্দুতে ছেদ করে। $\overline{CQ}$ যোগ করা হল এবং মনে করা যাক, $\angle QCN=\phi$।



চিত্র 4

যেহেতু, $\overline{CQ}=a$,

সুতরাং $\overline{CN}=a\cos\phi$

$\therefore$ P বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক $=\overline{CN}=a\cos\phi$ বা, $x=a\cos\phi$

এখন, P বিন্দু (1) উপবৃত্তের ওপর অবস্থিত।

$$\therefore \quad \frac{a^2\cos^2\phi}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

বা, $y^2=b^2\sin^2\phi$

বা, $y=\overline{PN}=b\sin\phi$ [$\because$ চিত্র অনুযায়ী, P-এর কোটি ধনাত্মক

এবং $\overline{QN}=a\sin\phi$ $\left[\because \frac{\overline{QN}}{\overline{CQ}}=\sin\phi\right]$

সুতরাং, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক হয় $(a\cos\phi, b\sin\phi)$ এবং $\frac{\overline{PN}}{\overline{QN}}=b:$

স্পষ্টতই, ϕ-এর সব মানে $P(a\cos\phi, b\sin\phi)$ বিন্দু (1) সমীকরণ সিদ্ধ করবে। এক্ষেত্রে, $(a\cos\phi, b\sin\phi)$ আকারের স্থানাঙ্ককে বিন্দুর **প্যারামেট্রিক স্থানাঙ্ক** (parametric co-ordinates) এ $x=a\cos\phi$, $y=b\sin\phi$-কে (1) উপবৃত্তের প্যারামেট্রিক আকারে সমীকরণ বলা হয়; ϕ-কে P বিন্দুর উৎকেন্দ্রিক কোণ (eccentric angle) বলা হয়।

5.12 সংক্ষিপ্তকরণ [Summarisation]

1 নিম্নলিখিত সারণিতে বিভিন্ন প্রকার উপবৃত্তের প্রয়োজনীয় ফলসমূহ উল্লেখ করা হল:

	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $[a^2>b^2]$	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ $[a^2>b^2]$	$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ $[a^2>b^2]$	$\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}+\frac{(y-\beta)^2}{a^2}=1$ $[a^2>b^2]$
পরাক্ষ	x-অক্ষ	y-অক্ষ	x-অক্ষের সমান্তরাল	y-অক্ষের সমান্তরাল
উপাক্ষ	y-অক্ষ	x-অক্ষ	y-অক্ষের সমান্তরাল	x-অক্ষের সমান্তরাল
পরাক্ষের সমীকরণ	$y=0$	$x=0$	$y=\beta$	$x=\alpha$
উপাক্ষের সমীকরণ	$x=0$	$y=0$	$x=\alpha$	$y=\beta$
পরাক্ষের দৈর্ঘ্য	$2a$ একক	$2a$ একক	$2a$ একক	$2a$ একক
উপাক্ষের দৈর্ঘ্য	$2b$ একক	$2b$ একক	$2b$ একক	$2b$ একক
কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক	$(0, 0)$	$(0, 0)$	(α, β)	(α, β)
শীর্ষবিন্দু দুটির স্থানাঙ্ক	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm a)$	$(\alpha\pm a, \beta)$	$(\alpha, \beta\pm a)$
উৎকেন্দ্রতা	$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$	$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$	$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$	$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$
নাভি দুটির স্থানাঙ্ক	$(\pm ae, 0)$	$(0, \pm ae)$	$(\alpha\pm ae, \beta)$	$(\alpha, \beta\pm ae)$
নাভি দুটির দূরত্ব	$2ae$ একক	$2ae$ একক	$2ae$ একক	$2ae$ একক
নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য	$\frac{2b^2}{a}$ একক	$\frac{2b^2}{a}$ একক	$\frac{2b^2}{a}$ একক	$\frac{2b^2}{a}$ একক

নাভিলম্ব দুটির প্রান্তবিন্দু চারটির স্থানাঙ্ক	$\left(ae, \frac{b^2}{a}\right), \left(ae, -\frac{b^2}{a}\right)$ $\left(-ae, \frac{b^2}{a}\right), \left(-ae, -\frac{b^2}{a}\right)$	$\left(\frac{b^2}{a}, ae\right), \left(-\frac{b^2}{a}, ae\right)$ $\left(\frac{b^2}{a}, -ae\right), \left(-\frac{b^2}{a}, -ae\right)$	$\left(\alpha \pm ae, \beta \pm \frac{b^2}{a}\right)$	$\left(\alpha \pm \frac{b^2}{a}, \beta \pm ae\right)$
নাভিলম্ব দুটির সমীকরণ	$x = \pm ae$	$y = \pm ae$	$x = \alpha \pm ae$	$y = \beta \pm ae$
নিয়ামক দুটির সমীকরণ	$x = \pm\frac{a}{e}$	$y = \pm\frac{a}{e}$	$x = \alpha \pm \frac{a}{e}$	$y = \beta \pm \frac{a}{e}$
নিয়ামক দুটির দূরত্ব	$\frac{2a}{e}$ একক	$\frac{2a}{e}$ একক	$\frac{2a}{e}$ একক	$\frac{2a}{e}$ একক

2 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ $[a^2 > b^2]$ উপবৃত্তের দুটি নাভিবিন্দু S ও S' এবং এর ওপর $P(x, y)$ যে-কোনো বিন্দু হলে,

$\overline{SP} = a - ex$, $\overline{S'P} = a + ex$ এবং $\overline{SP} + \overline{S'P} = 2a$ একক হবে।

3 $P(x_1, y_1)$ বিন্দু $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ $[a^2 > b^2]$ উপবৃত্তের বাইরে, ওপরে অথবা ভিতরে থাকবে যদি,

$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2} - 1 >, =$ অথবা, < 0 হয়।

4 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ $[a^2 > b^2]$ উপবৃত্তের সহায়ক বৃত্ত (auxiliary circle)-এর সমীকরণ হয়, $x^2 + y^2 = a^2$

5 (i) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ $[a^2 > b^2]$ উপবৃত্তের প্যারামেট্রিক আকারে সমীকরণ হয়, $x = a\cos\phi$, $y = b\sin\phi$

যেখানে, $\phi =$ উপবৃত্তের ওপর অবস্থিত $P(x, y)$ বিন্দুর উৎকেন্দ্রিক কোণ।

(ii) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ $[a^2 > b^2]$ উপবৃত্তের ওপর অবস্থিত যে-কোনো বিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক হয় $(a\cos\phi, b\sin\phi)$।

5.13 উদাহরণমালা [Examples]

হরণ 1

$9x^2 + 25y^2 = 225$ এবং (ii) $25x^2 + 9y^2 = 225$ উপবৃত্ত (a) অক্ষ দুটির দৈর্ঘ্য (b) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য (c) শীর্ষ দুটির স্থানাঙ্ক উৎকেন্দ্রতা (e) নাভিবিন্দু দুটির স্থানাঙ্ক এবং (f) নিয়ামক দুটির রণ নির্ণয় করো।

সমাধান

$$9x^2 + 25y^2 = 225$$

(1) উপবৃত্তের সমীকরণকে, উপবৃত্তের আদর্শ আকারের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$-এর $(a^2 > b^2)$ সঙ্গে তুলনা করে পাই,

$a^2 = 25$ বা, $a = 5$ একক

এবং $b^2 = 9$ বা, $b = 3$ একক

স্পষ্টতই, (1) উপবৃত্তের পরাক্ষ x-অক্ষ বরাবর, উপাক্ষ y-অক্ষ বরাবর এবং কেন্দ্র মূলবিন্দুতে। সুতরাং,

(a) (1) উপবৃত্তের পরাক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a = 2 \cdot 5 = 10$ একক এবং উপাক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2b = 2 \cdot 3 = 6$ একক।

(b) এর নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \cdot 9}{5} = \frac{18}{5}$ একক।

(c) এর শীর্ষ দুটির স্থানাঙ্ক: $(\pm a, 0)$ বা $(\pm 5, 0)$

(d) এর উৎকেন্দ্রতা $= e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

(e) এর নাভিবিন্দু দুটির স্থানাঙ্ক:

$(\pm ae, 0)$ বা, $\left(\pm 5 \cdot \frac{4}{5}, 0\right)$ বা, $(\pm 4, 0)$

(f) এর নিয়ামক দুটির সমীকরণ:

$x = \pm\frac{a}{e}$ বা, $x = \pm\frac{5}{\frac{4}{5}} = \pm\frac{25}{4}$

বা, $4x = \pm 25$

ii $25x^2 + 9y^2 = 225$

বা, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25} = 1$ $\cdots(2)$

(2) উপবৃত্তের সমীকরণকে $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2} = 1$ $(a^2 > b^2)$ আকারের উপবৃত্তের সঙ্গে তুলনা করে পাই, $b^2 = 9$

বা, $b = 3$ একক এবং $a^2 = 25$ বা, $a = 5$ একক।

স্পষ্টতই, (2) উপবৃত্তের পরাক্ষ y-অক্ষ বরাবর, উপাক্ষ x-অক্ষ বরাবর এবং কেন্দ্র মূলবিন্দুতে।

(a) সুতরাং (2) উপবৃত্তের পরাক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a = 2 \cdot 5 = 10$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{u(x+h)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x+h)}{v(x+h)\cdot v(x)}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{v(x)\cdot\{u(x+h)-u(x)\} - u(x)\cdot\{v(x+h)-v(x)\}}{v(x+h)\cdot v(x)}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{v(x+h)\cdot v(x)}\left[v(x)\cdot\frac{u(x+h)-u(x)}{h} - u(x)\cdot\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right]$$

$$= \frac{1}{v(x)\cdot v(x)}[v(x)\cdot u'(x) - u(x)\cdot v'(x)]$$

অর্থাৎ $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

উদাহরণ

(i) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{e^x}\right) = \frac{e^x\cdot\frac{d}{dx}x^4 - x^4\cdot\frac{d}{dx}(e^x)}{(e^x)^2} = \frac{4x^3\cdot e^x - x^4\cdot e^x}{e^{2x}}$

(ii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x\frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x\frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$

বা, $\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}$

$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

(iii) $\frac{d}{dx}(\text{cosec}x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \frac{\sin x\frac{d}{dx}(1) - 1\cdot\frac{d}{dx}(\sin x)}{\sin^2 x}$

$= \frac{\sin x\cdot 0 - \cos x}{\sin^2 x}$

$= -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\text{cosec}x\cot x$

3.6 সংক্ষিপ্তকরণ [Summarisation]

1. x চলের বৃদ্ধি $= \Delta x$ (বা h) $=$ চলের অন্তিম মান $-$ তার প্রারম্ভিক মান।

2. $y = f(x)$ যদি x-এর একটি একমানবিশিষ্ট অপেক্ষক হয় এবং স্বাধীন চল x-এর বৃদ্ধি Δx (বা h)-এর অনুরূপ অধীন চল y বা $f(x)$-এর বৃদ্ধি Δy বা k হয়, তবে Δy (বা k) $= f(x+\Delta x) - f(x) = f(x+h) - f(x)$ হবে।

3. x বিন্দুতে $y = f(x)$ অপেক্ষকের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ (বা অবকল সহগ) হয়,
$\frac{dy}{dx}$ বা, $f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

4. $x = a$ বিন্দুতে $y = f(x)$ অপেক্ষকের অন্তরকলজ বা অবকল সহগকে $f'(a)$ অথবা $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়; অর্থাৎ, $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$ অথবা $f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

5. (i) $\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ সীমাকে $x = a$ বিন্দুতে $y = f(x)$ অপেক্ষকের ডানপক্ষের অন্তরকলজ (right hand derivative) বলা হয় এবং তা $Rf'(a)$ অথবা $f'(a+)$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(ii) $\lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ সীমাকে $x = a$ বিন্দুতে $y = f(x)$ অপেক্ষকের বামপক্ষের অন্তরকলজ (left hand derivative) বলা হয় এবং তা $Lf'(a)$ অথবা $f'(a-)$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(iii) $x = a$ বিন্দুতে $y = f(x)$ অপেক্ষকের অন্তরকলজ (অর্থাৎ $f'(a)$) আছে বলা হবে, যদি $Rf'(a)$ এবং $Lf'(a)$ নির্ণয় করা যায় এবং $Rf'(a) = Lf'(a)$ হয়।

6. n যে-কোনো মূলদ সংখ্যা হলে, $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

7. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

8. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

9. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

10. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\text{cosec}^2 x$

11. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x\tan x$

12. $\frac{d}{dx}(\text{cosec}x) = -\text{cosec}x\cot x$

13. c একটি ধ্রুবক রাশি হলে, $\frac{d}{dx}(c) = 0$

14. $\frac{d}{dx}\{c\cdot f(x)\} = cf'(x)$, যেখানে $c =$ ধ্রুবক

15. $\frac{d}{dx}[u \pm v \pm w \pm \cdots] = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \pm \cdots$

16. $\frac{d}{dx}(u\cdot v) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

17. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

4.5 সংক্ষিপ্তকরণ [Summarisation]

1 $\sin^{-1}x$ অপেক্ষকটি সংজ্ঞাত হয়, যদি $-1 \leqslant x \leqslant 1$ হয়; $\sin^{-1}x$-এর মুখ্য মান α হলে $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ হয়;

2 $\cos^{-1}x$ অপেক্ষকটি সংজ্ঞাত হয়, যদি $-1 \leqslant x \leqslant 1$ হয়; $\cos^{-1}x$-এর মুখ্য মান α হলে $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ হয়;

3 $\tan^{-1}x$ অপেক্ষকটি x-এর যে-কোনো বাস্তব মানে সংজ্ঞাত অর্থাৎ $-\infty < x < \infty$ হলে $\tan^{-1}x$ সংজ্ঞাত হয়; $\tan^{-1}x$-এর মুখ্য মান α হলে $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

4 $\cot^{-1}x$ অপেক্ষকটি সংজ্ঞাত হয়, যদি $-\infty < x < \infty$ হয়; $\cot^{-1}x$-এর মুখ্য মান α হলে $0 < \alpha < \pi$ হয়;

5 $\sec^{-1}x$ অপেক্ষকটি সংজ্ঞাত হয়, যদি $|x| \geqslant 1$ হয়; $\sec^{-1}x$-এর মুখ্য মান α হলে $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ এবং $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ হয়;

6 $\operatorname{cosec}^{-1}x$ অপেক্ষকটি সংজ্ঞাত হয়, যদি $|x| \geqslant 1$ (অর্থাৎ $x \geqslant 1$ অথবা $x \leqslant -1$) হয়; $\operatorname{cosec}^{-1}x$-এর মুখ্য মান α হলে $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ এবং $\alpha \neq 0$ হয়;

7 প্রশ্নে কিছু উল্লেখ না থাকলে বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকগুলির মুখ্য মান গ্রাহ্য হয়।

8 $\sin(\sin^{-1}x) = x$; $\cos(\cos^{-1}x) = x$; $\tan(\tan^{-1}x) = x$ ইত্যাদি;

9 $\sin^{-1}(\sin\theta) = \theta$; $\cos^{-1}(\cos\theta) = \theta$; $\tan^{-1}(\tan\theta) = \theta$ ইত্যাদি;

10 $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$,
$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}x$, $\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1}x$,
$\operatorname{cosec}^{-1}(-x) = -\operatorname{cosec}^{-1}x$ এবং
$\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1}x$;

11 $\sin^{-1}x = \operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$, $\cos^{-1}x = \sec^{-1}\frac{1}{x}$,
$\tan^{-1}x = \cot^{-1}\frac{1}{x}$ যখন $x > 0$ এবং
$\tan^{-1}x = \cot^{-1}\frac{1}{x} - \pi$ যখন $x < 0$;

12 $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} (-1 \leqslant x \leqslant 1)$;
$\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2} (-\infty < x < \infty)$;
$\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x = \frac{\pi}{2} (x \leqslant -1$ বা, $x \geqslant 1)$;

13 $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$,
($\tan^{-1}x$ ও $\tan^{-1}y$-এর মুখ্য মানে);

14 $\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}$,
($\tan^{-1}x$ ও $\tan^{-1}y$-এর মুখ্য মানে);

15 $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$;
$\sin^{-1}x - \sin^{-1}y = \sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2})$

16 $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \cos^{-1}[xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}]$;
$\cos^{-1}x - \cos^{-1}y = \cos^{-1}[xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}]$;
($\cos^{-1}x$ ও $\cos^{-1}y$-এর মুখ্য মানে);

17 $2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2} = \tan^{-1}$

(12) থেকে (17) সূত্রাবলির ক্ষেত্রে আমাদের বামপক্ষের কোণগু
মান নিতে হবে।

18 বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকগুলির ক্ষেত্র বা অঞ্চল (domain
বা পাল্লা (range) এবং মুখ্য মান (principal value) (

অপেক্ষক [Function]	ক্ষেত্র বা অঞ্চল [Domain]	প্রসার বা পাল্লা [Range]	মুখ্য [Princ Valu
(i) $\sin^{-1}x$	$[-1, 1]$	$n\pi + (-1)^n\alpha$	α যে $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha$
(ii) $\cos^{-1}x$	$[-1, 1]$	$2n\pi \pm \alpha$	α যেখা $0 \leqslant \alpha <$
(iii) $\tan^{-1}x$	$(-\infty, \infty)$	$n\pi + \alpha$	α যেখা $-\frac{\pi}{2} < \alpha <$
(iv) $\cot^{-1}x$	$(-\infty, \infty)$	$n\pi + \alpha$	α যেখানে $0 < \alpha <$
(v) $\operatorname{cosec}^{-1}x$	$\|x\| \geqslant 1$	$n\pi + (-1)^n\alpha$	α যেখানে $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant$ $\alpha \neq 0$
(vi) $\sec^{-1}x$	$\|x\| \geqslant 1$	$2n\pi \pm \alpha$	α যেখানে $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$

4.6 উদাহরণমালা [Examples]

উদাহরণ 1

নীচের বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকগুলির মুখ্য মান নির্ণয় করো:

(i) $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ *[NCERT]* **(ii)** $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **(iii)** $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right.$

(iv) $\cot^{-1}(-1)$ **(v)** $\sec^{-1}(1)$ **(vi)** $\operatorname{cosec}^{-1}(-1)$

সমাধান

1 আমরা জানি, $\sin^{-1}x$-এর মুখ্য মান α হলে $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ হ

সুতরাং, $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$-এর মুখ্য মান α হলে,

$$\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \alpha$$

বা, $\sin\alpha = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ $\left[\because -\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\right]$

$\therefore$ $\sin\left(-\frac{1}{2}\right)$-এর মুখ্য মান $= -\frac{\pi}{6}$।

3.10 সংক্ষিপ্তকরণ [Summarisation]

1 $y = f(u)$ এবং $u = \phi(x)$ হলে, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

সাধারণভাবে, $y = f_1(x_1)$, $x_1 = f_2(x_2)$, ..., $x_n = f_{n+1}(x)$ হলে,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx_1}\cdot\frac{dx_1}{dx_2}\cdot\frac{dx_2}{dx_3}\cdots\frac{dx_n}{dx}$$

2 $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy} = 1$ বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

যেখানে $\frac{dy}{dx} \neq 0$ ও $\frac{dx}{dy} \neq 0$

3 $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $[|x| < 1]$

4 $\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $[|x| < 1]$

5 $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}$ $[-\infty < x < \infty]$

6 $\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\frac{1}{1+x^2}$ $[-\infty < x < \infty]$

7 $\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ $[|x| > 1]$

8 $\frac{d}{dx}(\text{cosec}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ $[|x| > 1]$

9 অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষকের অন্তরকলজ, অর্থাৎ $f(x, y) = 0$ আকারের সমীকরণ থেকে $\frac{dy}{dx}$-এর মান নির্ণয় করতে হলে সমীকরণটিকে x-এর সাপেক্ষে অবকলন করে প্রাপ্ত সমীকরণ থেকে $\frac{dy}{dx}$-এর সমাধান করতে হয়।

10 $y = f(t)$ এবং $x = \phi(t)$ হলে,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{f'(t)}{\phi'(t)}$$

11 (i) x^n-এর অবকল নির্ণয় করতে $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ সূত্রটি ব্যবহার করা হয়, যেখানে ঘাতের সূচক $= n =$ ধ্রুবক।

(ii) a^x-এর অবকল নির্ণয় করতে [যেখানে নিধান $= a =$ ধ্রুবক] $\frac{d}{dx}a^x = a^x\log_e a$ সূত্রটি ব্যবহার করা হয়।

(iii) যদি $y = u^v$ হয়, যেখানে u এবং v উভয়ই x-এর অপেক্ষক তবে প্রথমে $y = u^v$-এর লগারিদম্ নেওয়া হয় এবং তারপর ওই লগারিদ্মিক অপেক্ষকটিকে x-এর সাপেক্ষে অবকল করে $\frac{dy}{dx}$-এর মান নির্ণয় করতে হয়।

12 কোনো অপেক্ষক যদি অপর কয়েকটি অপেক্ষকের গুণফলের আকারে প্রদত্ত হয়, তবে তার অন্তরকলজ নির্ণয় করার জন্য প্রথমে উভয়পক্ষের লগারিদম্ নিয়ে তারপর উভয়পক্ষের অন্তরকলন করা সুবিধাজনক।

13 $u(x)$ অপেক্ষকের যদি $v(x)$-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ করতে হয়, তাহলে $y = u(x)$ ও $z = v(x)$ ধরে, $\frac{dy}{dz} = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}}$-এর মান নির্ণয় করতে হয়।

3.11 উদাহরণমালা [Examples]

উদাহরণ 1

নীচের প্রতিক্ষেত্রে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করো :

(i) $y = \log f(x)$ **(ii)** $y = e^{\sin\phi(x)}$

(iii) $y = (ax^2+b)^{\frac{9}{2}}$ **(iv)** $y = \log\left(\tan\frac{x}{2}\right)$

(v) $y = \cos^3\log(x\tan\sqrt{x})$

(vi) $2\log_3 x - e^{2\log x} + e^{2+x}$

সমাধান

i প্রদত্ত, $y = \log f(x)$

সুতরাং, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\log f(x) = \frac{1}{f(x)}\cdot\frac{d}{dx}f(x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$

ii প্রদত্ত, $y = e^{\sin\phi(x)}$

সুতরাং, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}e^{\sin\phi(x)} = e^{\sin\phi(x)}\cdot\frac{d}{dx}\sin\phi(x)$

বা, $\frac{dy}{dx} = e^{\sin\phi(x)}\cdot\cos\phi(x)\cdot\frac{d}{dx}\phi(x)$

$= e^{\sin\phi(x)}\cdot\cos\phi(x)\cdot\phi'(x)$

iii প্রদত্ত, $y = (ax^2+b)^{\frac{9}{2}}$

সুতরাং, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ax^2+b)^{\frac{9}{2}}$

$= \frac{9}{2}(ax^2+b)^{\frac{9}{2}-1}\cdot\frac{d}{dx}(ax^2+b)$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{9}{2}(ax^2+b)^{\frac{7}{2}}\cdot 2ax = 9ax(ax^2+b)^{\frac{7}{2}}$

iv প্রদত্ত, $y = \log\left(\tan\frac{x}{2}\right)$

সুতরাং, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\log\left(\tan\frac{x}{2}\right)$

10 $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e a} + c$

11 $\int \sin mx \, dx = -\frac{\cos mx}{m} + c$

12 $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

13 $\int \cos mx \, dx = \frac{\sin mx}{m} + c$

14 $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

15 $\int \sec^2 mx \, dx = \frac{\tan mx}{m} + c$

16 $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$

17 $\int \operatorname{cosec}^2 mx \, dx = -\frac{\cot mx}{m} + c$

18 $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + c$

19 $\int \sec mx \tan mx \, dx = \frac{\sec mx}{m} + c$

20 $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$

21 $\int \operatorname{cosec} mx \cot mx \, dx = -\frac{\operatorname{cosec} mx}{m} + c$

22 $\int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx = -\operatorname{cosec} x + c$

5.7 উদাহরণমালা [Examples]

উদাহরণ 1

নীচের প্রত্যেকটি অপেক্ষকের x-এর সাপেক্ষে সমাকলন করো :

(i) $\frac{(x-2)^3}{x^2}$ (ii) $\frac{px^2+qx+r}{x\sqrt{x}}$ (iii) $\frac{x^3+4x^2+x-6}{x^2+2x}$

সমাধান

i নির্ণেয় সমাকল $= \int \frac{(x-2)^3}{x^2} dx = \int \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2} dx$

$= \int x dx - 6\int dx + 12\int \frac{1}{x} dx - 8\int x^{-2} dx$

$= \frac{x^{1+1}}{1+1} - 6x + 12\log|x| - 8 \cdot \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c$

$= \frac{1}{2}x^2 - 6x + 12\log|x| + \frac{8}{x} + c$

[যেখানে c = সমাকলনের ধ্রুবক]

ii নির্ণেয় সমাকল $= \int \frac{px^2+qx+r}{x\sqrt{x}} dx = \int \frac{px^2+qx+r}{x^{\frac{3}{2}}} dx$

$= p\int x^{2-\frac{3}{2}} dx + q\int x^{1-\frac{3}{2}} dx + r\int x^{-\frac{3}{2}} dx$

$= p\int x^{\frac{1}{2}} dx + q\int x^{-\frac{1}{2}} dx + r\int x^{-\frac{3}{2}} dx$

$= p \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + q \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + r \cdot \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + c$

$= \frac{2p}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2qx^{\frac{1}{2}} - 2rx^{-\frac{1}{2}} + c$

[যেখানে c = সমাকলনের ধ্রুবক]

iii $\because x^3 + 4x^2 + x - 6 = x^2(x+2) + 2x(x+2) - 3(x+2)$

$= (x+2)(x^2+2x-3)$

সুতরাং, নির্ণেয় সমাকল $= \int \frac{x^3+4x^2+x-6}{x^2+2x} dx$

$= \int \frac{(x+2)(x^2+2x-3)}{x(x+2)} dx$

$= \int \frac{(x^2+2x-3)}{x} dx$ ($x \neq -2$ ধরে)

$= \int x dx + 2\int dx - 3\int \frac{dx}{x}$

$= \frac{x^2}{2} + 2x - 3\log|x| + c$

[যেখানে c = সমাকলনের ধ্রুবক]

দ্রষ্টব্য

1. সমাকলনের সূত্রাবলি প্রয়োগ করে সমাকলের মান লেখার সময় (অর্থাৎ, যখন সমাকলনের চিহ্ন আর থাকে না) সমাকলনের ধ্রুবক (এখানে প্রতিক্ষেত্রে যা c দ্বারা প্রকাশ করা হয়েছে) লিখতে হয়।
2. দুই বা ততোধিক সমাকল থাকলেও কেবল একটি সমাকলনের ধ্রুবক লিখতে হয়।
3. এখানে, পরবর্তী উদাহরণগুলিতে সমাকলনের ধ্রুবকের জায়গায় c বা k লেখা হবে, কিন্তু সেটা সমাকলনের ধ্রুবক বলে উল্লেখ করা হবে না। কিন্তু পরীক্ষার সময় অনির্দিষ্ট সমাকল নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ধ্রুবক হিসাবে c বা k লিখে তারপর "c বা k সমাকলন ধ্রুবক"—এটা উল্লেখ করা প্রয়োজন।

উদাহরণ 2

মান নির্ণয় করো :

(i) $\int \frac{2e^{4x} - 3e^{2x} + 4}{e^{3x}} dx$ (ii) $\int \frac{e^{6x} + e^{4x}}{e^x + e^{-x}} dx$

(iii) $\int \frac{e^{2\log x} - e^{-\log x}}{e^{2\log x} - e^{\log x}} dx$

সমাধান

i $\int \frac{2e^{4x} - 3e^{2x} + 4}{e^{3x}} dx$

$= 2\int \frac{e^{4x}}{e^{3x}} dx - 3\int \frac{e^{2x}}{e^{3x}} dx + 4\int \frac{1}{e^{3x}} dx$

প্রমাণ

1 $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx$

$= -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x}$

$= -\log|\cos x| + c$

$= \log|\sec x| + c$

2 $\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x}$

$= \log|\sin x| + c$

3 $\int \sec x\,dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}dx$

$= \int \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x}dx$

$= \int \frac{d(\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)}$

$= \log|\sec x + \tan x| + c$

এখন, $\sec x + \tan x = \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}$

$= \frac{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos x}$

$= \frac{\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}$

$= \frac{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}} = \frac{1 + \tan\frac{x}{2}}{1 - \tan\frac{x}{2}}$

[লব ও হরকে $\cos\frac{x}{2}$ দ্বারা ভাগ করে]

$= \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{x}{2}}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{x}{2}}$

$= \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$

$\therefore \int \sec x\,dx = \log\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + c$

4 $\int \text{cosec}\,x\,dx = \int \frac{\text{cosec}\,x(\text{cosec}\,x - \cot x)}{\text{cosec}\,x - \cot x}dx$

$= \int \frac{-\text{cosec}\,x \cot x + \text{cosec}^2 x}{\text{cosec}\,x - \cot x}dx$

$= \int \frac{d(\text{cosec}\,x - \cot x)}{\text{cosec}\,x - \cot x}$

$= \log|\text{cosec}\,x - \cot x| + c$

এখন, $\text{cosec}\,x - \cot x = \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

$= \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \tan\frac{x}{2}$

$\therefore \int \text{cosec}\,x\,dx = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$

6.5 সংক্ষিপ্তকরণ [Summarisation]

1 প্রতিস্থাপন প্রক্রিয়া দ্বারা সমাকল নির্ণয় করতে হলে চলের প্রতিস্থাপন এমনভাবে করার চেষ্টা করা হয় যাতে সমাকল্য, পরিচিত একটি আদর্শ সমাকল্যে পরিণত হয়।

2 $n \neq -1$ হলে $\int \{f(x)\}^n f'(x)dx = \frac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1} + c$

3 $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + c$

4 $\int e^x[f(x) + f'(x)]dx = e^x f(x) + c$

5 $\int \tan x\,dx = \log|\sec x| + c$

6 $\int \cot x\,dx = \log|\sin x| + c$

7 $\int \sec x\,dx = \log|\sec x + \tan x| + c$

$= \log\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + c$

8 $\int \text{cosec}\,x\,dx = \log|\text{cosec}\,x - \cot x| + c$

$= \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$

6.6 উদাহরণমালা [Examples]

উদাহরণ 1

সমাকলন করো :

(i) $\int x^2 \tan x^3 dx$ (ii) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3x^2+1}}$

(iii) $\int (\tan x - x)\tan^2 x\,dx$ (iv) $\int \frac{e^{\cos^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

সমাধান

i মনে করা যাক, $x^3 = z$; $\therefore 3x^2 dx = dz$

$\therefore \int x^2 \tan x^3 dx = \int \tan x^3 \cdot x^2 dx$

$= \int \tan z \cdot \frac{dz}{3}$

$\left[\because x^3 = z \text{ ও } x^2 dx = \frac{dz}{3}\right]$

7.6 $\int (lx+m)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ $(l \neq 0, a \neq 0)$ আকারের সমাকল নির্ণয় [To Find Integral of the Form $\int (lx+m)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ $l \neq 0, a \neq 0$]

মনে করা যাক, $lx+m = k_1\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)+k_2$

$= k_1(2ax+b)+k_2$

$\therefore\ 2ak_1 = l$

বা, $k_1 = \frac{l}{2a}$

এবং $k_1b+k_2 = m$

বা, $k_2 = m-\frac{lb}{2a}$

$\therefore\ \int (lx+m)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$

$= k_1\int (2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx + k_2\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$

এখন, প্রথম সমাকলটিতে $ax^2+bx+c = z$ বসালে তা নির্ণয় করা যাবে; দ্বিতীয় সমাকলটি §7.5-এর পদ্ধতিতে নির্ণয় করতে হবে (উদাহরণ 18 লক্ষণীয়)।

7.7 সংক্ষিপ্তকরণ [Summarisation]

1 $\int uv\,dx = u\cdot\int v\,dx - \int\left[\frac{du}{dx}\cdot\int v\,dx\right]dx$

অর্থাৎ, দুটি অপেক্ষকের গুণফলের সমাকল = [প্রথম অপেক্ষক × দ্বিতীয় অপেক্ষকের সমাকল] − [প্রথম অপেক্ষকের অন্তরকলজ × দ্বিতীয় অপেক্ষকের সমাকল]-এর সমাকল।

2 $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)+c$

$= \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\left(bx-\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)+c$

3 $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)+c$

$= \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\left(bx-\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)+c$

4 $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c$

5 $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2}-\frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c$

6 $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+c$

7.8 উদাহরণমালা [Examples]

উদাহরণ 1

সমাকলন করো :

(i) $\int \log x^2 dx$ (ii) $\int (\log x)^2 dx$

(iii) $\int \log(2x^2+5x-12)dx$

(iv) $\int \log(x+\sqrt{x^2+a^2})dx$

সমাধান

i $\int \log x^2 dx = 2\int (\log x)\cdot 1\,dx$

$= 2\left[\log x\int 1\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\log x)\int 1\,dx\right\}dx\right]$

[আংশিক পদ্ধতিতে সমাকলন করে]

$= 2\left[\log x\cdot x - \int\frac{1}{x}\cdot x\,dx\right]$

$= 2[x\log x - x]+c = 2x(\log x-1)+c$

ii $\int (\log x)^2 dx = (\log x)^2\int dx - \int\left[\frac{d}{dx}(\log x)^2\int dx\right]dx$

[আংশিক পদ্ধতিতে সমাকলন করে]

$= (\log x)^2\cdot x - \int 2\log x\cdot\frac{1}{x}\cdot x\,dx$

$= x(\log x)^2 - 2\int \log x\,dx$

$= x(\log x)^2 - 2x(\log x-1)+c$

[উদাহরণ 1(i)-এর সাহায্যে]

iii $\because\ 2x^2+5x-12 = 2x^2+8x-3x-12$

$= 2x(x+4)-3(x+4)$

$= (x+4)(2x-3)$

$\therefore\ \int \log(2x^2+5x-12)dx$

$= \int \log\{(x+4)(2x-3)\}dx$

$= \int \log(x+4)dx + \int \log(2x-3)dx$

$= \log(x+4)\int dx - \int\left[\frac{d}{dx}\log(x+4)\int dx\right]dx$

$+ \log(2x-3)\int dx - \int\left[\frac{d}{dx}\log(2x-3)\int dx\right]dx$

[উভয় সমাকলকে আংশিক পদ্ধতিতে সমাকলন করে]

$= \log(x+4)\cdot x - \int\frac{1}{x+4}\cdot x\,dx$

$+ \log(2x-3)\cdot x - \int\frac{2}{2x-3}\cdot x\,dx$

9.4 সংক্ষিপ্তকরণ [Summarisation]

1 যোগফলের সীমারূপে নির্দিষ্ট সমাকলের সংজ্ঞা:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=0}^{n-1} f(a+rh)$$

অথবা, $\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n} f(a+rh)$

[যেখানে, $nh = b-a$]

বিশেষ ক্ষেত্রে, $a = 0$ ও $b = 1$ হলে,

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=0}^{n-1} f(rh)$$

অথবা, $\int_0^1 f(x)dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n} f(rh)$ [যেখানে, $nh = 1$]

2 $a \leqslant x \leqslant b$ বিস্তারে $f(x)$ অপেক্ষক সমাকলনযোগ্য এবং $f(x) = \phi'(x)$ হলে,

$$\int_a^b f(x)dx = \phi(b)-\phi(a) \text{ হবে।}$$

এটি সমাকলনবিদ্যার মৌলিক উপপাদ্য নামে পরিচিত।

3 নির্দিষ্ট সমাকল নির্ণয়ের সময় কোনো সমাকলনের ধ্রুবক থাকে না।

9.5 উদাহরণমালা [Examples]

উদাহরণ 1

নির্দিষ্ট সমাকলের সংজ্ঞা থেকে মান নির্ণয় করো:

(i) $\int_a^b k\,dx$, যেখানে k = ধ্রুবক

(ii) $\int_0^1 (ax+b)dx$ (iii) $\int_1^2 5x^2dx$

সমাধান

i নির্দিষ্ট সমাকলের সংজ্ঞা থেকে পাওয়া যায়,

$\int_a^b k\,dx = \lim_{h\to 0} h\sum_1^n k$ [যেখানে, $nh = b-a$]

$= \lim_{h\to 0} h(k+k+k+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত)

$= \lim_{h\to 0} h\cdot nk = k(b-a)$ [$\because nh = b-a$]

ii নির্দিষ্ট সমাকলের সংজ্ঞা থেকে পাওয়া যায়,

$\int_0^1 (ax+b)dx$

$= \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n}(arh+b)$ [যেখানে, $nh = 1-0 = 1$]

$= \lim_{h\to 0} h[(ah+b)+(2ah+b)+(3ah+b)+\cdots + (nah+b)]$

$= \lim_{h\to 0} h[ah(1+2+3+\cdots+n)+nb]$

$= \lim_{h\to 0} h\left[ah\cdot\frac{n(n+1)}{2}+nb\right]$

$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{a}{2}\cdot nh(nh+h)+b\cdot nh\right]$

$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{a}{2}\cdot 1\cdot(1+h)+b\cdot 1\right]$ [$\because nh = 1$]

$= \frac{a}{2}+b$

iii নির্দিষ্ট সমাকলের সংজ্ঞা থেকে পাওয়া যায়,

$\int_1^2 5x^2dx$

$= \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n} 5(1+rh)^2$ [যেখানে, $nh = 2-1 = 1$]

$= 5\lim_{h\to 0} h[(1+h)^2+(1+2h)^2+(1+3h)^2+\cdots + (1+nh$

$= 5\lim_{h\to 0} h[(1+2h\cdot 1+h^2)+(1+2h\cdot 2+2^2h^2) + (1+2h\cdot 3+3^2h^2)+\cdots+(1+2h\cdot n+n^2h^2$

$= 5\lim_{h\to 0} h[n+2h(1+2+3+\cdots+n) + h^2(1^2+2^2+3^2+\cdots+n$

$= 5\lim_{h\to 0} h\left[n+2h\cdot\frac{n(n+1)}{2}+h^2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right.$

$= 5\lim_{h\to 0}\left[nh+nh(nh+h)+\frac{1}{6}nh(nh+h)(2nh+h\right.$

$= 5\lim_{h\to 0}\left[1+1(1+h)+\frac{1}{6}\times 1(1+h)(2\times 1+h)\right]$

[$\because nh$ =

$= 5\left[1+1+\frac{1}{6}\times 1\times 2\right] = 5\times\frac{7}{3} = \frac{35}{3}$

উদাহরণ 2

সংজ্ঞার সাহায্যে নিম্নলিখিত নির্দিষ্ট সমাকলগুলির মান নির্ণয় কর

(i) $\int_a^b x^3dx$ (ii) $\int_a^b e^{kx}dx$ (k = ধ্রুবক)

(iii) $\int_0^1 2^xdx$ (iv) $\int_a^b x^mdx$ ($m \neq -1$)

সমাধান

i নির্দিষ্ট সমাকলের সংজ্ঞা থেকে পাওয়া যায়,

$$\int_a^b x^3dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n}(a+rh)^3$$

[যেখানে, nh =