अध्याय 1

पूर्णांक

0757CH01

1.1 पूर्णांकों के योग एवं व्यवकलन के गुण

हमने कक्षा 6 में पूर्ण संख्याओं और पूर्णांकों के विषय में पढ़ा है। साथ ही, पूर्णांकों को जोड़ने और घटाने के नियमों का भी अध्ययन किया है।

1.1.1 योग के अंतर्गत संवृत

हम सीख चुके हैं कि दो पूर्ण संख्याओं का योग पुनः एक पूर्ण संख्या ही होती है। उदाहरणत: 17 + 24 = 41 है, जो कि पुन: एक पूर्ण संख्या है। हम जानते हैं कि यह गुण पूर्ण संख्याओं के योग का संवृत गुण कहलाता है।

आइए देखें कि क्या यह गुण पूर्णांकों के लिए भी सत्य है अथवा नहीं। पूर्णांकों के कुछ युग्म नीचे दिए जा रहे हैं। नीचे दी हुई सारणी को देखिए और इसे पूरा कीजिए :

कथन	प्रेक्षण
(i) 17 + 23 = 40	परिणाम एक पूर्णांक है।
(ii) (–10) + 3 = ______	______________
(iii) (–75) + 18 = ______	______________
(iv) 19 + (–25) = – 6	परिणाम एक पूर्णांक है।
(v) 27 + (–27) = ______	______________
(vi) (–20) + 0 = ______	______________
(vii) (–35) + (– 10) = ______	______________

आप क्या देखते हैं ? क्या दो पूर्णांकों का योग हमेशा एक पूर्णांक प्राप्त करता है ?

क्या आपको पूर्णांकों का कोई ऐसा युग्म मिला जिसका योग पूर्णांक नहीं है ?

क्योंकि पूर्णांक का योग एक पूर्णांक होता है, इसलिए हम कहते हैं कि पूर्णांक योग के अंतर्गत संवृत (closed) होते हैं ?

व्यापक रूप में, किन्हीं दो पूर्णांकों $\boldsymbol{a}$ तथा $\boldsymbol{b}$ के लिए $\boldsymbol{a + b}$ एक पूर्णांक होता है।

1.1.2 व्यवकलन के अंतर्गत संवृत

जब हम एक पूर्णांक को दूसरे पूर्णांक में से घटाते हैं, तो क्या होता है ? क्या हम कह सकते हैं कि उनका अंतर भी एक पूर्णांक होता है ?

निम्नलिखित सारणी को देखिए और इसे पूरा कीजिए:

कथन	प्रेक्षण
(i) $7 - 9 = -2$	परिणाम एक पूर्णांक है।
(ii) $17 - (-21) =$ ________	____________
(iii) $(-8) - (-14) = 6$	परिणाम एक पूर्णांक है।
(iv) $(-21) - (-10) =$ ________	____________
(v) $32 - (-17) =$ ________	____________
(vi) $(-18) - (-18) =$ ________	____________
(vii) $(-29) - 0 =$ ________	____________

आप क्या देखते हैं? क्या पूर्णांकों का कोई ऐसा युग्म है जिसका अंतर पूर्णांक नहीं है ? क्या हम कह सकते हैं कि पूर्णांक व्यवकलन के अंतर्गत संवृत हैं ? *हाँ, हम कह सकते हैं कि पूर्णांक व्यवकलन के अंतर्गत संवृत होते हैं।*

अत:, *यदि a और b दो पूर्णांक हैं, तो $a - b$ भी एक पूर्णांक होता है।* क्या पूर्ण संख्याएँ भी इस गुण को संतुष्ट करती हैं ?

1.1.3 क्रमविनिमेय गुण

हम जानते हैं कि $3 + 5 = 5 + 3 = 8$ है, अर्थात् दो पूर्ण संख्याओं को किसी भी क्रम में जोड़ा जा सकता है। दूसरे शब्दों में, पूर्ण संख्याओं के लिए योग क्रमविनिमेय होता है।

क्या इसी कथन को हम पूर्णांकों के लिए भी कह सकते हैं ?

हम पाते हैं कि $5 + (-6) = -1$ और $(-6) + 5 = -1$ है।

इसलिए $5 + (-6) = (-6) + 5$ है।

क्या निम्नलिखित समान हैं ?

(i) $(-8) + (-9)$ और $(-9) + (-8)$

(ii) $(-23) + 32$ और $32 + (-23)$

(iii) $(-45) + 0$ और $0 + (-45)$

पाँच अन्य पूर्णांकों के युग्मों के लिए ऐसा प्रयास कीजिए। क्या आपको पूर्णांकों का कोई ऐसा युग्म मिलता है जिसके लिए पूर्णांकों का क्रम बदल देने से उनका योग भी बदल जाता है। नि:सन्देह नहीं। योग पूर्णांकों के लिए क्रमविनिमेय होता है ।

व्यापक रूप में, किन्हीं दो पूर्णांकों a और b, के लिए हम कह सकते हैं कि

$$a + b = b + a$$

- हम जानते हैं कि व्यवकलन पूर्ण संख्याओं के लिए क्रमविनिमेय नहीं है। क्या यह पूर्णांकों के लिए क्रमविनिमेय है ?

  पूर्णांक 5 एवं (–3) लीजिए। क्या 5 – (–3) एवं (–3) –5 समान हैं ? नहीं, क्योंकि

  5 – (–3) = 5 + 3 = 8 है एवं (–3) – 5 = – 3 – 5 = – 8 है।

  पूर्णांकों के कम से कम पाँच विभिन्न युग्म लीजिए और इस कथन की जाँच कीजिए। हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि *व्यवकलन पूर्णांकों के लिए क्रमविनिमेय नहीं है।*

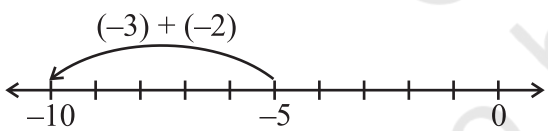
1.1.4 साहचर्य गुण

निम्नलिखित उदाहरणों को देखिए :

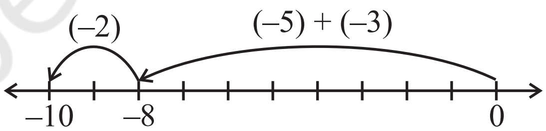
पूर्णांकों –3, –2 एवं –5 को लीजिए ।

(–5) + [(–3) + (–2)] और [(–5) + (–3)] + (–2) पर ध्यान दीजिए।

प्रथम योग में (–3) और (–2) को मिलाकर एक समूह बनाया गया है और दूसरे योग में (–5) एवं (–3) को मिलाकर एक समूह बनाया गया है। हम इसकी जाँच करेंगे कि क्या हमको विभिन्न परिणाम प्राप्त होते हैं।



(–5) + [(–3) + (–2)]



[(–5) + (–3)] + (–2)

इन दोनों ही स्थितियों में हमें –10 प्राप्त होता है।

अर्थात्, (–5) + [(–3) + (–2)] = [(–5) + (–2)] + (–3)

इसी प्रकार, –3 , 1 और –7 को लीजिए।

(–3) + [1 + (–7)] = –3 + __________ = __________

[(–3) + 1] + (–7) = –2 + __________ = __________

क्या (–3) + [1 + (–7)] एवं [(–3) + 1] + (–7) समान हैं ?

इस प्रकार के पाँच और उदाहरण लीजिए। आप ऐसा कोई उदाहरण नहीं पाएँगे जिसके लिए इस तरह के योग विभिन्न हैं। यह दर्शाता है कि पूर्णांकों के लिए योग सहचारी (associative) होता है। व्यापक रूप में, पूर्णांकों a, b और c के लिए हम कह सकते हैं कि

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

1.1.5 योज्य तत्समक

जब हम किसी पूर्ण संख्या में शून्य को जोड़ते हैं, तो हमें वही पूर्ण संख्या प्राप्त होती है। पूर्ण संख्याओं के लिए शून्य एक योज्य तत्समक (additive identity) है। क्या यह पूर्णांकों के लिए भी एक योज्य तत्समक है ?

निम्नलिखित को देखिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

(i) $(-8) + 0 = -8$ (ii) $0 + (-8) = -8$

(iii) $(-23) + 0 =$ _____ (iv) $0 + (-37) = -37$

(v) $0 + (-59) =$ _____ (vi) $0 +$ _____ $= -43$

(vii) $-61 +$ _____ $= -61$ (viii) _____ $+ 0 =$ _____

उपर्युक्त उदाहरण दर्शाते हैं कि शून्य, पूर्णांकों के लिए भी एक योज्य तत्समक है। आप किन्हीं पाँच अन्य पूर्णांकों में शून्य जोड़कर इसे सत्यापित कर सकते हैं।

व्यापक रूप में, किसी भी पूर्णांक a के लिए,

$$a + 0 = a = 0 + a$$

प्रयास कीजिए

1. एक ऐसा पूर्णांक युग्म लिखिए जिसके योग से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

(a) एक ऋणात्मक पूर्णांक (b) शून्य

(c) दोनों पूर्णांकों से छोटा एक पूर्णांक (d) दोनों पूर्णांकों में से केवल किसी एक से छोटा पूर्णांक

(e) दोनों पूर्णांकों से बड़ा एक पूर्णांक

2. एक ऐसा पूर्णांक युग्म लिखिए जिसके अंतर से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

(a) एक ऋणात्मक पूर्णांक (b) शून्य

(c) दोनों पूर्णांकों से छोटा एक पूर्णांक (d) दोनों पूर्णांकों में से केवल किसी एक से बड़ा पूर्णांक

(e) दोनों पूर्णांकों से बड़ा एक पूर्णांक

उदाहरण 1 ऐसे पूर्णांक युग्म लिखिए जिनका

(a) योग –3 है (b) अंतर –5 है

(c) अंतर 2 है (d) योग 0 है

हल (a) – 1, – 2, ∵ (–1) + (–2) = –3 या – 5, 2, ∵ (–5) + 2 = –3

(b) – 9, – 4, ∵ (–9) – (– 4) = –5 या – 2, 3, ∵ (–2) – 3 = –5

(c) – 7, – 9, ∵ (–7) – (–9) = 2 या 1, – 1, ∵ 1 – (–1) = 2

(d) – 10, 10, ∵ (–10) + 10 = 0 या 5, – 5, ∵ 5 + (–5) = 0

क्या आप इन उदाहरणों में और अधिक युग्म लिख सकते हैं ?

प्रश्नावली 1.1

1. ऐसा पूर्णांक युग्म लिखिए जिसका

(a) योग –7 है (b) अंतर –10 है (c) योग 0 है

2. (a) एक ऐसा ऋणात्मक पूर्णांक युग्म लिखिए जिसका अंतर 8 है।

(b) एक ऋणात्मक पूर्णांक और एक धनात्मक पूर्णांक लिखिए जिनका योग –5 है।

(c) एक ऋणात्मक पूर्णांक और एक धनात्मक पूर्णांक लिखिए जिनका अंतर –3 है।

3. किसी प्रश्नोत्तरी के तीन उत्तरोतर चक्करों (rounds) में टीम A द्वारा प्राप्त किए गए अंक – 40, 10, 0 थे और टीम B द्वारा प्राप्त किए गए अंक 10, 0, – 40 थे। किस टीम ने अधिक अंक प्राप्त किए ? क्या हम कह सकते हैं कि पूर्णांकों को किसी भी क्रम में जोड़ा जा सकता है ?

4. निम्नलिखित कथनों को सत्य बनाने के लिए रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

(i) (–5) + (– 8) = (– 8) + (............)

(ii) –53 + ... = –53

(iii) 17 + ... = 0

(iv) [13 + (– 12)] + (............) = 13 + [(–12) + (–7)]

(v) (– 4) + [15 + (–3)] = [– 4 + 15] + ...

1.2 पूर्णांकों का गुणन

हम पूर्णांकों का योग एवं व्यवकलन कर सकते हैं। आईए अब सीखें कि पूर्णांकों को कैसे गुणा किया जाता है।

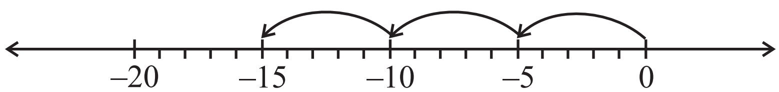
1.2.1 एक धनात्मक और एक ऋणात्मक पूर्णांक का गुणन

हम जानते हैं कि पूर्ण संख्याओं का गुणन बार-बार योग है।

उदाहरणत:, 5 + 5 + 5 = 3 × 5 = 15

क्या आप पूर्णांकों के योग को भी इसी प्रकार निरूपित कर सकते हैं ?

निम्नलिखित संख्या रेखा से हम पाते हैं कि (–5) + (–5) + (–5) = –15 है।



प्रयास कीजिए

संख्या रेखा का उपयोग करते हुए, ज्ञात कीजिए:

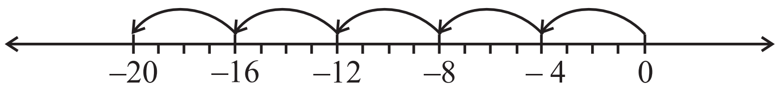
$4 \times (-8)$,
$8 \times (-2)$,
$3 \times (-7)$,
$10 \times (-1)$

परंतु इसे हम निम्नलिखित रूप में भी लिख सकते हैं:

$$(-5) + (-5) + (-5) = 3 \times (-5)$$

इसलिए, $3 \times (-5) = -15$

इसी प्रकार, $(-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) = 5 \times (-4) = -20$



और $(-3) + (-3) + (-3) + (-3) =$ ___________ $=$ ___________

साथ ही, $(-7) + (-7) + (-7) =$ ___________ $=$ ___________

आइए देखें कि संख्या रेखा का उपयोग किए बिना एक धनात्मक पूर्णांक एवं एक ऋणात्मक पूर्णांक का गुणनफल कैसे ज्ञात किया जाए।

आइए एक अन्य प्रकार से $3 \times (-5)$ ज्ञात करें। सर्वप्रथम 3×5 ज्ञात कीजिए और प्राप्त गुणनफल से पहले ऋण (–) रखिए। आप –15 प्राप्त करते हैं। अर्थात् –15 प्राप्त करने के लिए हम $-(3 \times 5)$ प्राप्त करते हैं।

इसी प्रकार, $5 \times (-4) = -(5 \times 4) = -20$ है।

इसी प्रकार, निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए :

$4 \times (-8) =$ _____ $=$ _____ , $3 \times (-7) =$ _____ $=$ _____

$6 \times (-5) =$ _____ $=$ _____ , $2 \times (-9) =$ _____ $=$ _____

इस विधि का उपयोग करते हुए, हम पाते हैं कि

$10 \times (-43) =$ _____ $-(10 \times 43) = -430$

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए:

(i) $6 \times (-19)$
(ii) $12 \times (-32)$
(iii) $7 \times (-22)$

अभी तक हमने पूर्णांकों को (धनात्मक पूर्णांक) × (ऋणात्मक पूर्णांक) के रूप में गुणा किया है।

आइए अब इनको (ऋणात्मक पूर्णांक) × (धनात्मक पूर्णांक) के रूप में गुणा करें।

सर्वप्रथम हम -3×5 ज्ञात करते हैं।

यह ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित पैटर्न को देखिए:

हम पाते हैं :

$3 \times 5 = 15$

$2 \times 5 = 10 = 15 - 5$

$1 \times 5 = 5 = 10 - 5$

$0 \times 5 = 0 = 5 - 5$

इसलिए,

$-1 \times 5 = 0 - 5 = -5$

$-2 \times 5 = -5 - 5 = -10$

$-3 \times 5 = -10 - 5 = -15$

हम पहले ही प्राप्त कर चुके हैं कि $3 \times (-5) = -15$

अत:, हम पाते हैं कि $(-3) \times 5 = -15 = 3 \times (-5)$

इस प्रकार के पैटर्नों का उपयोग करते हुए, हम $(-5) \times 4 = -20 = 5 \times (-4)$ भी प्राप्त करते हैं।

पैटर्नों का उपयोग करते हुए, $(-4) \times 8$, $(-3) \times 7$, $(-6) \times 5$ और $(-2) \times 9$ ज्ञात कीजिए और जाँच कीजिए कि क्या

$$(-4) \times 8 = 4 \times (-8),\ (-3) \times 7 = 3 \times (-7),\ (-6) \times 5 = 6 \times (-5)$$

और $(-2) \times 9 = 2 \times (-9)$ है?

इसका उपयोग करते हुए, हम $(-33) \times 5 = 33 \times (-5) = -165$ प्राप्त करते हैं।

इस प्रकार, हम पाते हैं कि एक धनात्मक पूर्णांक और एक ऋणात्मक पूर्णांक को गुणा करते समय हम उनको पूर्ण संख्याओं के रूप में गुणा करते हैं और गुणनफल से पहले ऋण चिह्न (–) रख देते हैं। इस प्रकार हमें एक ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।

प्रयास कीजिए

1. ज्ञात कीजिए:

(a) $15 \times (-16)$ (b) $21 \times (-32)$

(c) $(-42) \times 12$ (d) -55×15

2. जाँच कीजिए कि क्या

(a) $25 \times (-21) = (-25) \times 21$ है।

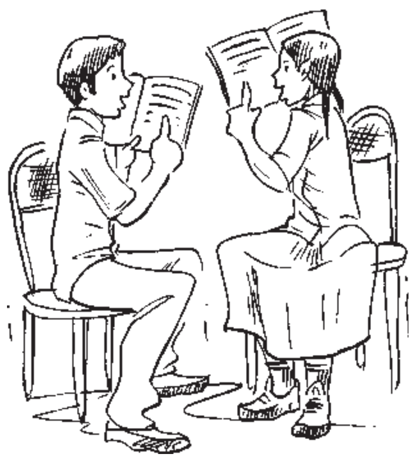
(b) $(-23) \times 20 = 23 \times (-20)$ है।

इस प्रकार के पाँच और उदाहरण लिखिए।

व्यापक रूप में, किन्हीं दो धनात्मक पूर्णांकों के लिए, हम कह सकते हैं कि:

$$a \times (-b) = (-a) \times b = -(a \times b)$$

1.2.2 दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणन



क्या आप गुणनफल $(-3) \times (-2)$ ज्ञात कर सकते हैं?

निम्नलिखित को देखिए :

$-3 \times 4 = -12$

$-3 \times 3 = -9 = -12 - (-3)$

$-3 \times 2 = -6 = -9 - (-3)$

$-3 \times 1 = -3 = -6 - (-3)$

$-3 \times 0 = 0 = -3 - (-3)$

$-3 \times (-1) = 0 - (-3) = 0 + 3 = 3$

$-3 \times (-2) = 3 - (-3) = 3 + 3 = 6$

क्या आपको कोई पैटर्न दिखाई देता है ? ध्यान दीजिए कि गुणनफल कैसे परिवर्तित हुए हैं। इन प्रेक्षणों के आधार पर, निम्नलिखित को पूरा कीजिए :

$-3 \times -3 =$ ______, $-3 \times -4 =$ ______

अब इन गुणनफलों को देखिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

$-4 \times 4 = -16$

$-4 \times 3 = -12 = -16 + 4$

$-4 \times 2 =$ ______ $= -12 + 4$

$-4 \times 1 =$ ______

$-4 \times 0 =$ ______

$-4 \times (-1) =$ ______

$-4 \times (-2) =$ ______

$-4 \times (-3) =$ ______

प्रयास कीजिए

(i) $(-5) \times 4$, से शुरू करते हुए, $(-5) \times (-6)$ ज्ञात कीजिए ।

(ii) $(-6) \times 3$ से शुरू करते हुए, $(-6) \times (-7)$ ज्ञात कीजिए ।

इन पैटर्नों से हम देखते हैं कि

$(-3) \times (-1) = 3 = 3 \times 1$

$(-3) \times (-2) = 6 = 3 \times 2$

$(-3) \times (-3) = 9 = 3 \times 3$

और $(-4) \times (-1) = 4 = 4 \times 1$

इसलिए, $(-4) \times (-2) = 4 \times 2 =$ ______

$(-4) \times (-3) =$ ______ $=$ ______

अतः इन गुणनफलों को देखते हुए हम कह सकते हैं कि *दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक होता है। हम दो ऋणात्मक पूर्णांकों को पूर्ण संख्याओं के रूप में गुणा करते हैं और गुणनफल से पहले धनात्मक चिह्न (+) रख देते हैं।*

इस प्रकार, हम पाते हैं कि $(-10) \times (-12) = +120 = 120$ है।

इसी प्रकार, $(-15) \times (-6) = +90 = 90$ है।

व्यापक रूप में, किन्हीं दो धनात्मक पूर्णांकों a एवं b के लिए,

$$(-a) \times (-b) = a \times b$$

प्रयास कीजिए ज्ञात कीजिए: $(-31) \times (-100)$, $(-25) \times (-72)$, $(-83) \times (-28)$

खेल 1

(i) एक ऐसा बोर्ड लीजिए जिस पर -104 से 104 तक के पूर्णांक अंकित हों, जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है।

(ii) एक थैले में दो नीले पासे और दो लाल पासे लीजिए। नीले पासों पर अंकित बिंदुओं की संख्या धनात्मक पूर्णांकों को दर्शाती हैं और लाल पासों पर अंकित बिंदुओं की संख्या ऋणात्मक पूर्णांकों को दर्शाती हैं।

104	103	102	101	100	99	98	97	96	95	94
83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93
82	81	80	79	78	77	76	75	74	73	72
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50
39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6
–5	– 4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
– 6	–7	– 8	–9	–10	–11	–12	–13	–14	–15	–16
–27	–26	–25	–24	–23	–22	–21	–20	–19	–18	–17
–28	–29	–30	–31	–32	–33	–34	–35	–36	–37	–38
– 49	–48	–47	–46	–45	–44	–43	–42	–41	–40	–39
– 50	–51	–52	–53	–54	–55	–56	–57	–58	–59	– 60
–71	–70	–69	–68	–67	–66	–65	–64	–63	–62	–61
–72	–73	–74	–75	–76	–77	–78	–79	–80	–81	–82
–93	–92	–91	–90	–89	–88	–87	–86	–85	–84	–83
–94	–95	–96	–97	–98	–99	–100	–101	–102	–103	–104

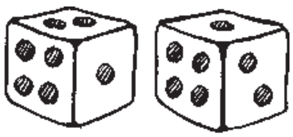
(iii) प्रत्येक खिलाड़ी अपने काउंटर को शून्य पर रखेगा।

(iv) प्रत्येक खिलाड़ी थैले में से एक साथ दो पासे निकालेगा और उनको फेंकेगा।

(v) पासों को फेंकने के बाद खिलाड़ी को प्रत्येक बार प्राप्त पासों पर अंकित संख्याओं को गुणा करना है।

(vi) यदि गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक है, तो खिलाड़ी अपने काउंटर को 104 की ओर खिसकाएगा और यदि गुणनफल एक ऋणात्मक पूर्णांक है, तो वह अपने काउंटर को –104 की ओर खिसकाएगा।

(vii) जो खिलाड़ी पहले –104 या 104 पर पहुँचता है, विजेता कहलाएगा।



1.3 पूर्णांकों के गुणन के गुण

1.3.1 गुणन के अंतर्गत संवृत

1. निम्नलिखित सारणी को देखिए और इसे पूरा कीजिए:

कथन	निष्कर्ष
$(-20) \times (-5) = 100$	गुणनफल एक पूर्णांक है
$(-15) \times 17 = -255$	गुणनफल एक पूर्णांक है
$(-30) \times 12 =$ _____	
$(-15) \times (-23) =$ _____	
$(-14) \times (-13) =$ _____	
$12 \times (-30) =$ _____	

आप क्या देखते हैं ? क्या आप एक ऐसा पूर्णांक युग्म ज्ञात कर सकते हैं जिसका गुणनफल एक पूर्णांक नहीं है ? नहीं, इससे हमें यह ज्ञात होता है कि दो पूर्णांकों का गुणनफल पुन: एक पूर्णांक ही होता है। अत: हम कह सकते हैं कि पूर्णांक गुणन के अंतर्गत संवृत होते हैं।

व्यापक रूप में,

सभी पूर्णांकों a तथा b के लिए $a \times b$ एक पूर्णांक होता है।

पाँच और पूर्णांक युग्मों के गुणनफल ज्ञात कीजिए और उपर्युक्त कथन को सत्यापित कीजिए।

1.3.2 गुणन की क्रमविनिमेयता

हम जानते हैं कि पूर्ण संख्याओं के लिए गुणन क्रमविनिमेय होता है। क्या हम कह सकते हैं कि पूर्णांकों के लिए भी गुणन क्रमविनिमेय है ?

निम्नलिखित सारणी को देखिए और इसे पूरा कीजिए:

कथन 1	कथन 2	निष्कर्ष
$3 \times (-4) = -12$	$(-4) \times 3 = -12$	$3 \times (-4) = (-4) \times 3$
$(-30) \times 12 =$ _____	$12 \times (-30) =$ _____	
$(-15) \times (-10) = 150$	$(-10) \times (-15) = 150$	
$(-35) \times (-12) =$ _____	$(-12) \times (-35) =$	
$(-17) \times 0 =$ _____		
__________ = _____	$(-1) \times (-15) =$	

आप क्या देखते हैं ? उपर्युक्त उदाहरण संकेत करते हैं कि पूर्णांकों के लिए गुणन क्रमविनिमेय है। इस प्रकार के पाँच और उदाहरण लिखिए एवं सत्यापन कीजिए।

व्यापक रूप में, किन्हीं दो पूर्णांकों a तथा b के लिए,

$$a \times b = b \times a$$

1.3.3 शून्य से गुणन

हम जानते है कि जब किसी पूर्ण संख्या को शून्य से गुणा किया जाता है, तो गुणनफल के रूप में शून्य प्राप्त होता है। ऋणात्मक पूर्णांकों एवं शून्य के निम्नलिखित गुणनफलों को देखिए। पहले किए गए पैटर्नों के आधार पर हम इन्हें प्राप्त करते हैं।

$(-3) \times 0 = 0$

$0 \times (-4) = 0$

$-5 \times 0 =$ ______

$0 \times (-6) =$ ______

यह सारणी दर्शाती है कि एक ऋणात्मक पूर्णांक और शून्य का गुणनफल शून्य होता है।व्यापक रूप में, किसी भी पूर्णांक a के लिए,

$$a \times 0 = 0 \times a = 0$$

1.3.4 गुणनात्मक तत्समक

हम जानते है कि पूर्ण संख्याओं के लिए 1 गुणनात्मक तत्समक (multiplicative identity) है।

जाँच कीजिए कि 1 पूर्णांकों के लिए भी गुणनात्मक तत्समक है। 1 के साथ पूर्णांकों के निम्नलिखित गुणनफलों को देखिए :

$(-3) \times 1 = -3$	$1 \times 5 = 5$
$(-4) \times 1 =$ ______	$1 \times 8 =$ ______
$1 \times (-5) =$ ______	$3 \times 1 =$ ______
$1 \times (-6) =$ ______	$7 \times 1 =$ ______

यह दर्शाता है कि 1 पूर्णांकों के लिए भी गुणनात्मक तत्समक है।

व्यापक रूप में, किसी भी पूर्णांक a के लिए, हम पाते हैं कि

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

यदि किसी भी पूर्णांक को -1से गुणा किया जाए, तो क्या होता है ? निम्नलिखित को पूरा कीजिए:

$(-3) \times (-1) = 3$

$3 \times (-1) = -3$

$(-6) \times (-1) =$ ______

$(-1) \times 13 =$ ______

$(-1) \times (-25) =$ ______

$18 \times (-1) =$ ______

पूर्णांकों के लिए शून्य योज्य तत्समक है, जबकि 1 गुणनात्मक तत्समक है। जब किसी पूर्णांक a को (-1) से गुणा किया जाता है, तो हमें उस पूर्णांक का योज्य प्रतिलोम प्राप्त होता है, अर्थात्

$a \times (-1) = (-1) \times a = -a$ होता है।

आप क्या देखते हैं ?

क्या हम कह सकते हैं कि -1 पूर्णांकों के लिए गुणनात्मक तत्समक है ? नहीं।

1.3.5 गुणन साहचर्य गुण

$-3, -2$ और 5 को लीजिए।

$[(-3) \times (-2)] \times 5$ और $(-3) \times [(-2) \times 5]$ पर विचार कीजिए।

प्रथम स्थिति में, (-3) एवं (-2) को मिलाकर एक समूह बनाया गया है और दूसरी स्थिति में, (-2) एवं 5 को मिलाकर एक समूह बनाया गया है।

हम पाते हैं कि $[(-3) \times (-2)] \times 5 = 6 \times 5 = 30$

और $(-3) \times [(-2) \times 5] = (-3) \times (-10) = 30$

इस प्रकार, दोनों ही स्थितियों में हम एक ही उत्तर प्राप्त करते हैं।

अत:, $[(-3) \times (-2)] \times 5 = (-3) \times [(-2) \times 5]$

निम्नलिखित पर विचार कीजिए और गुणनफलों को पूरा कीजिए:

$[7 \times (-6)] \times 4 =$ ___________ $\times 4 =$ ___________

$7 \times [(-6) \times 4] = 7 \times$ ___________ $=$ ___________

क्या $[7 \times (-6)] \times 4 = 7 \times [(-6) \times (4)]$ है?

क्या पूर्णांकों के विभिन्न प्रकार के समूहों से गुणनफल प्रभावित होता है?

व्यापक रूप में, किन्हीं तीन पूर्णांकों a, b तथा c के लिए,

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

a, b और c मे से प्रत्येक के लिए पाँच मान लीजिए और इस गुण का सत्यापन कीजिए।

अत: पूर्ण संख्याओं की तरह तीन पूर्णांकों का गुणनफल उनके समूह बनाने पर निर्भर नहीं करता है और यह पूर्णांकों के लिए गुणन का साहचर्य गुण कहलाता है।

1.3.6 वितरण गुण

हम जानते हैं कि

$16 \times (10 + 2) = (16 \times 10) + (16 \times 2)$ [योग पर गुणन का वितरण नियम]

आइए जाँच करते हैं क्या यह पूर्णांकों के लिए भी सत्य है? निम्नलिखित को देखिए:

(a) $(-2) \times (3 + 5) = -2 \times 8 = -16$

और $[(-2) \times 3] + [(-2) \times 5] = (-6) + (-10) = -16$

अत :, $(-2) \times (3 + 5) = [(-2) \times 3] + [(-2) \times 5]$

(b) $(-4) \times [(-2) + 7] = (-4) \times 5 = -20$

और $[(-4) \times (-2)] + [(-4) \times 7] = 8 + (-28) = -20$

अत :, $(-4) \times [(-2) + 7] = [(-4) \times (-2)] + [(-4) \times 7]$

(c) $(-8) \times [(-2) + (-1)] = (-8) \times (-3) = 24$

और $[(-8) \times (-2)] + [(-8) \times (-1)] = 16 + 8 = 24$

इसलिए, $(-8) \times [(-2) + (-1)] = [(-8) \times (-2)] + [(-8) \times (-1)]$

क्या हम कह सकते हैं कि पूर्णांकों के लिए भी योग पर गुणन का वितरण नियम सत्य है? हाँ

व्यापक रूप में, किन्हीं तीन पूर्णांकों a, b और c के लिए,

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

a, b और c में से प्रत्येक के लिए कम से कम पाँच विभिन्न मान लीजिए और उपर्युक्त वितरण गुण को सत्यापित कीजिए।

प्रयास कीजिए

(i) क्या $10 \times [(6 + (-2)] = 10 \times 6 + 10 \times (-2)$?

(ii) क्या $(-15) \times [(-7) + (-1)] = (-15) \times (-7) + (-15) \times (-1)$?

अब निम्नलिखित पर विचार कीजिए :

क्या हम कह सकते हैं कि $4 \times (3 - 8) = 4 \times 3 - 4 \times 8$ है?

आइए इसकी जाँच करें :

$$4 \times (3 - 8) = 4 \times (-5) = -20$$

$$4 \times 3 - 4 \times 8 = 12 - 32 = -20$$

इसलिए, $4 \times (3 - 8) = 4 \times 3 - 4 \times 8$ है।

निम्नलिखित पर विचार कीजिए :

$$(-5) \times [(-4) - (-6)] = (-5) \times 2 = -10$$

$$[(-5) \times (-4)] - [(-5) \times (-6)] = 20 - 30 = -10$$

अत :, $(-5) \times [(-4) - (-6)] = [(-5) \times (-4)] - [(-5) \times (-6)]$

$(-9) \times [10 - (-3)]$ और $[(-9) \times 10] - [(-9) \times (-3)]$

के लिए इस कथन की जाँच कीजिए।

आप पाएँगे कि ये भी समान हैं।

व्यापक रूप में किन्हीं भी तीन पूर्णांकों a, b और c के लिए,

$$a \times (b - c) = a \times b - a \times c$$

a, b और c में से प्रत्येक के लिए कम से कम पाँच मान लीजिए और इस गुण को सत्यापित कीजिए।

प्रयास कीजिए

(i) क्या $10 \times (6 - (-2)] = 10 \times 6 - 10 \times (-2)$ है?

(ii) क्या $(-15) \times [(-7) - (-1)] = (-15) \times (-7) - (-15) \times (-1)$ है?

प्रश्नावली 1.2

1. निम्नलिखित गुणनफलों को ज्ञात कीजिए :

(a) $3 \times (-1)$ (b) $(-1) \times 225$

(c) $(-21) \times (-30)$ (d) $(-316) \times (-1)$

(e) $(-15) \times 0 \times (-18)$ (f) $(-12) \times (-11) \times (10)$

(g) $9 \times (-3) \times (-6)$ (h) $(-18) \times (-5) \times (-4)$

(i) $(-1) \times (-2) \times (-3) \times 4$ (j) $(-3) \times (-6) \times (-2) \times (-1)$

2. निम्नलिखित को सत्यापित कीजिए :

(a) $18 \times [7 + (-3)] = [18 \times 7] + [18 \times (-3)]$

(b) $(-21) \times [(-4) + (-6)] = [(-21) \times (-4)] + [(-21) \times (-6)]$

3. (i) किसी भी पूर्णांक a के लिए, $(-1) \times a$ किसके समान है ?

(ii) वह पूर्णांक ज्ञात कीजिए, जिसका (–1) के साथ गुणनफल है :

(a) –22 (b) 37 (c) 0

4. $(-1) \times 5$ से आरंभ करके विभिन्न गुणनफलों द्वारा कोई पैटर्न दर्शाते हुए $(-1) \times (-1) = 1$ को निरूपित कीजिए।

1.4 पूर्णांकों का विभाजन

हम जानते हैं कि विभाजन, गुणा की विपरीत संक्रिया है। आइए पूर्ण संख्याओं के लिए एक उदाहरण देखें:

क्योंकि $3 \times 5 = 15$ है, इसलिए $15 \div 5 = 3$ और $15 \div 3 = 5$ है।

इसी प्रकार, $4 \times 3 = 12$ से $12 \div 4 = 3$ एवं $12 \div 3 = 4$ प्राप्त होता है।

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि पूर्ण संख्याओं के प्रत्येक गुणन कथन के लिए दो विभाजन या भाग, कथन हैं।

क्या आप पूर्णांकों के लिए गुणन कथन एवं संगत भाग कथनों को लिख सकते हैं ?

- निम्नलिखित सारणी को देखिए और इसे पूरा कीजिए।

गुणन कथन	संगत भाग कथन
$2 \times (-6) = (-12)$	$(-12) \div (-6) = 2$, $(-12) \div 2 = (-6)$
$(-4) \times 5 = (-20)$	$(-20) \div (5) = (-4)$, $(-20) \div (-4) = 5$
$(-8) \times (-9) = 72$	$72 \div$ ______ = ______ , $72 \div$ ______ = ______
$(-3) \times (-7) =$ ______	______ $\div (-3) =$ ______ , ______________
$(-8) \times 4 =$ _____	______________ , ______________
$5 \times (-9) =$ ______	______________ , ______________
$(-10) \times (-5) =$	______________ , ______________

उपर्युक्त से हम देखते हैं कि

$(-12) \div 2 = (-6)$ $(-20) \div (5) = (-4)$

$(-32) \div 4 = -8$ $(-45) \div 5 = -9$

हम देखते हैं कि जब हम एक ऋणात्मक पूर्णांक को धनात्मक पूर्णांक से भाग देते हैं, तो हम उन्हें पूर्ण संख्याओं के रूप में भाग देते हैं और उसके पश्चात् भागफल से पहले ऋण चिह्न (–) रख देते हैं।

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए :

(a) $(-100) \div 5$ (b) $(-81) \div 9$

(c) $(-75) \div 5$ (d) $(-32) \div 2$

- हम यह भी देखते हैं कि

$72 \div (-8) = -9$ और $50 \div (-10) = -5$

$72 \div (-9) = -8$ $50 \div (-5) = -10$

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि जब हम एक धनात्मक पूर्णांक को एक ऋणात्मक पूर्णांक से भाग देते हैं, तो सर्वप्रथम हम उन्हें पूर्ण संख्याओं के रूप में भाग देते हैं और उसके पश्चात् भागफल के सामने ऋण चिह्न (–) रख देते हैं।

क्या हम कह सकते हैं कि $(-48) \div 8 = 48 \div (-8)$? आइए जाँच करते हैं। हम जानते हैं कि $(-48) \div 8 = -6$ और $48 \div (-8) = -6$। इसलिए $(-48) \div 8 = 48 \div (-8)$।
निम्नलिखित के लिए इसकी जाँच कीजिए

(i) $90 \div (-45)$ और $(-90) \div 45$ (ii) $(-136) \div 4$ और $136 \div (-4)$

व्यापक रूप में, किन्हीं दो धनात्मक पूर्णांकों a तथा b के लिए,

$$a \div (-b) = (-a) \div b, \quad \text{जहाँ } b \neq 0$$

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए : (a) $125 \div (-25)$ (b) $80 \div (-5)$ (c) $64 \div (-16)$

- अंत में, हम देखते हैं कि

$(-12) \div (-6) = 2; (-20) \div (-4) = 5; (-32) \div (-8) = 4; (-45) \div (-9) = 5$

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि जब हम एक ऋणात्मक पूर्णांक को एक ऋणात्मक पूर्णांक से भाग देते हैं, तो सर्वप्रथम हम उन्हें पूर्ण संख्याओं के रूप में भाग देते हैं और उसके पश्चात् भागफल से पहले धनात्मक चिह्न (+) रख देते हैं।

व्यापक रूप में, किन्हीं दो ऋणात्मक पूर्णांकों a तथा b के लिए,

$$(-a) \div (-b) = a \div b, \quad \text{जहाँ } b \neq 0 \text{ है।}$$

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए : (a) $(-36) \div (-4)$ (b) $(-201) \div (-3)$ (c) $(-325) \div (-13)$

1.5 पूर्णांकों के भाग के गुण

निम्नलिखित सारणी को देखिए और इसे पूरा कीजिए :

कथन	निष्कर्ष	कथन	निष्कर्ष
$(-8) \div (-4) = 2$	परिणाम एक पूर्णांक है	$(-8) \div 3 = \frac{-8}{3}$	____________
$(-4) \div (-8) = \frac{-4}{-8}$	परिणाम एक पूर्णांक नहीं है	$3 \div (-8) = \frac{3}{-8}$	____________

आप क्या देखते हैं ? हम देखते हैं कि पूर्णांक भाग के अंतर्गत संवृत नहीं हैं। अपनी ओर से पाँच और उदाहरण लेते हुए, इस कथन की सत्यता के लिए उचित कारण बताइए।

- हम जानते हैं कि पूर्ण संख्याओं के लिए भाग क्रमविनिमेय नहीं है। आइए पूर्णांकों के लिए भी इसकी जाँच करें।

  आप सारणी से देख सकते हैं कि $(-8) \div (-4) \neq (-4) \div (-8)$ है।

  क्या $(-9) \div 3$ और $3 \div (-9)$ एक समान हैं ?

  क्या $(-30) \div (-6)$ और $(-6) \div (-30)$ एक समान हैं ?

  क्या हम कह सकते हैं कि पूर्णांकों के लिए भाग क्रमविनिमेय है ?

  नहीं। आप पाँच और पूर्णांक युग्म लेकर इसे सत्यापित कर सकते हैं।

- पूर्ण संख्याओं की तरह, किसी भी पूर्णांक को शून्य से भाग करना अर्थहीन है और शून्येतर पूर्णांक से शून्य को भाग देने पर शून्य प्राप्त होता है, अर्थात् किसी भी पूर्णांक a के लिए $a \div 0$ परिभाषित नहीं है। परंतु $0 \div a = 0$, $a \neq 0$ के लिए है।

- जब हम किसी पूर्ण संख्या को 1 से भाग देते हैं, तो हमें वही पूर्ण संख्या प्राप्त होती है। आइए इसकी जाँच करते हैं कि क्या यह ऋणात्मक पूर्णांकों के लिए भी सत्य है।

  निम्नलिखित को देखिए :

  $(-8) \div 1 = (-8)$ $\quad$ $(-11) \div 1 = -11$ $\quad$ $(-13) \div 1 = -13$

  $(-25) \div 1 =$ ____ $\quad$ $(-37) \div 1 =$ ____ $\quad$ $(-48) \div 1 =$ ____

  यह दर्शाता है कि ऋणात्मक पूर्णांक को 1 से भाग देने पर वही ऋणात्मक पूर्णाक प्राप्त होता है। *अतः किसी भी पूर्णाक को 1 से भाग देने पर वही पूर्णांक प्राप्त होता है।* व्यापक रूप में, किसी भी पूर्णांक a के लिए $\quad a \div 1 = a$

- किसी पूर्णांक को (-1) से भाग देने पर क्या होता है ? निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए :

  $(-8) \div (-1) = 8$ $\quad$ $11 \div (-1) = -11$ $\quad$ $13 \div (-1) =$ ____

  $(-25) \div (-1) =$ ____ $\quad$ $(-37) \div (-1) =$ ____ $\quad$ $-48 \div (-1) =$ ____

  आप क्या देखते हैं ?

  हम कह सकते हैं कि किसी भी पूर्णांक को (-1) से भाग देने पर वही पूर्णांक प्राप्त नहीं होता है।

- क्या हम कह सकते हैं कि $[(-16) \div 4] \div (-2)$ एवं $(-16) \div [4 \div (-2)]$ समान हैं ?

  हम जानते हैं कि $[(-16) \div 4] \div (-2) = (-4) \div (-2) = 2$

  और $(-16) \div [4 \div (-2)] = (-16) \div (-2) = 8$

  अतः, $[(-16) \div 4] \div (-2) \neq (-16) \div [4 \div (-2)]$

  क्या आप कह सकते हैं कि पूर्णांकों के लिए भाग साहचर्य है नहीं! अपनी ओर से पाँच अन्य उदाहरण लेकर इसे सत्यापित कीजिए।

उदाहरण 2 किसी टेस्ट में प्रत्येक सही उत्तर के लिए $(+5)$ अंक दिए जाते हैं ओर प्रत्येक गलत उत्तर के लिए (-2) अंक दिए जाते हैं। (i) राधिका ने सभी प्रश्नों के उत्तर दिए और 30 अंक प्राप्त किए, जबकि उसके 10 उत्तर सही पाए गए। (ii) जय ने भी सभी प्रश्नों के उत्तर दिए और उसने (-12) अंक प्राप्त किए, जबकि उसके चार उत्तर सही पा गए। उनमें से प्रत्येक ने कितने प्रश्नों के उत्तर गलत दिए ?

प्रयास कीजिए

क्या किसी भी पूर्णांक a के लिए

(i) $1 \div a = 1$ है ?

(ii) $a \div (-1) = -a$ है ?

a के विभिन्न मानों के लिए इनकी जाँच कीजिए।

हल

(i) एक सही उत्तर के लिए दिए गए अंक = 5

अतः, 10 सही उत्तरों के लिए दिए गए अंक $= 5 \times 10 = 50$

राधिका के द्वारा प्राप्त किए गए अंक = 30

गलत उत्तरों के लिए प्राप्तांक $= 30 - 50 = -20$

एक गलत उत्तर के लिए दिए गए अंक $= (-2)$

इसलिए, गलत उत्तरों की संख्या $= (-20) \div (-2) = 10$

(ii) चार सही उत्तरों के लिए दिए गए अंक $= 5 \times 4 = 20$

जय द्वारा प्राप्त किए गए अंक $= -12$

गलत उत्तरों के लिए प्राप्तांक $= -12 - 20 = -32$

इसलिए, गलत उत्तरों की संख्या $= (-32) \div (-2) = 16$

उदाहरण 3 कोई दुकानदार एक पेन बेचने पर ₹ 1 का लाभ अर्जित करती है और अपने पुराने स्टॉक की पेंसिलों को बेचते हुए 40 पैसे प्रति पेंसिल की हानि उठाती है।

(i) किसी विशिष्ट महीने में उसने ₹ 5 की हानि उठाई।

इस अवधि में उसने 45 पेन बेचे। बताइए इस अवधि में उसने कितनी पेंसिलें बेचीं।

(ii) अगले महीने में उसे न तो लाभ हुआ और न ही हानि हुई। यदि इस महीने में उसने 70 पेन बेचे, तो उसने कितनी पेंसिलें बेचीं ?

हल

(i) एक पेन को बेचने पर अर्जित लाभ = ₹ 1

45 पेनों को बेचने पर अर्जित लाभ = ₹ 45

जिसे हम + ₹ 45 से निर्दिष्ट करते हैं।

दी हुई कुल हानि = ₹ 5 जिसे – ₹ 5 से निर्दिष्ट करते हैं।

अर्जित लाभ + उठाई गई हानि = कुल हानि

इसलिए उठाई गई हानि = कुल हानि – अर्जित लाभ

= ₹ (– 5 – 45) = ₹ (–50) = –5000 पैसे

एक पेंसिल को बेचने से उठाई गई हानि = 40 पैसे जिसे हम – 40 पैसे के रूप में लिखते हैं।

इसलिए बेची गई पेंसिलों की संख्या = (–5000) ÷ (– 40) = 125

(ii) अगले महीने में न तो लाभ हुआ और न ही हानि हुई।

इसलिए अर्जित लाभ + उठाई गई हानि = 0

अर्थात् अर्जित लाभ = – उठाई गई हानि

अब, 70 पेनों को बेचने से अर्जित लाभ = ₹ 70

इसलिए पेंसिलों को बेचने से उठाई गई हानि = ₹ 70, जिसे हम – ₹ 70 अर्थात् – 7000 पैसे से दर्शाते हैं।

बेची गई पेंसिलों की कुल संख्या = (–7000) ÷ (– 40) = 175 पेंसिलें

प्रश्नावली 1.3

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

(a) (–30) ÷ 10 (b) 50 ÷ (–5) (c) (–36) ÷ (–9)

(d) (– 49) ÷ (49) (e) 13 ÷ [(–2) + 1] (f) 0 ÷ (–12)

(g) (–31) ÷ [(–30) + (–1)]

(h) [(–36) ÷ 12] ÷ 3 (i) [(– 6) + 5)] ÷ [(–2) + 1]

2. a, b और c के निम्नलिखित मानों में से प्रत्येक के लिए, $a \div (b + c) \neq (a \div b) + (a \div c)$ को सत्यापित कीजिए

(a) $a = 12, b = -4, c = 2$ (b) $a = (-10), b = 1, c = 1$

3. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

(a) 369 ÷ _____ = 369 (b) (–75) ÷ _____ = –1

(c) (–206) ÷ _____ = 1 (d) – 87 ÷ _____ = 87

(e) _____ ÷ 1 = – 87 (f) _____ ÷ 48 = –1

(g) 20 ÷ _____ = –2 (h) _____ ÷ (4) = –3

4. पाँच ऐसे पूर्णांक युग्म (a, b) लिखिए, ताकि $a \div b = -3$ हो। ऐसा एक युग्म (6, –2) है, क्योंकि 6 ÷ (–2) = (–3) है।

5. दोपहर 12 बजे तापमान शून्य से $10°C$ ऊपर था। यदि यह आधी रात तक $2°C$ प्रति घंटे की दर से कम होता है, तो किस समय तापमान शून्य से $8°C$ नीचे होगा ? आधी रात को तापमान क्या होगा ?

6. एक कक्षा टेस्ट में प्रत्येक सही उत्तर के लिए $(+ 3)$ अंक दिए जाते हैं और प्रत्येक गलत उत्तर के लिए $(–2)$ अंक दिए जाते हैं और किसी प्रश्न को हल करने का प्रयत्न नहीं करने पर कोई अंक नहीं दिया जाता है। (i) राधिका ने 20 अंक प्राप्त किए। यदि उसके 12 उत्तर सही पाए जाते हैं, तो उसने कितने प्रश्नों का उत्तर गलत दिया है ? (ii) मोहिनी टेस्ट में $(–5)$ अंक प्राप्त करती है, जबकि उसके 7 उत्तर सही पाए जाते हैं । उसने कितने प्रश्नों का उत्तर गलत दिया है?

7. एक उत्थापक किसी खान कूपक में 6 m प्रति मिनट की दर से नीचे जाता है। यदि नीचे जाना भूमि तल से 10 m ऊपर से शुरू होता है, तो – 350 m पहुँचने में कितना समय लगेगा ?

हमने क्या चर्चा की ?

1. अब हमने योग एवं व्यवकलन द्वारा संतुष्ट होने वाले गुणों का अध्ययन किया है।

(a) पूर्णांक योग एवं व्यवकलन दोनों के लिए संवृत्त है। अर्थात्, $a + b$ और $a – b$ दोनों पुनः पूर्णांक होते हैं, जहाँ a और b कोई भी पूर्णांक हैं।

(b) पूर्णांकों के लिए योग क्रमविनिमेय है, अर्थात् सभी पूर्णांकों a तथा b के लिए, $a + b = b + a$

(c) पूर्णांकों के लिए योग साहचर्य है, अर्थात् सभी पूर्णांकों a, b तथा c के लिए $(a + b) + c = a + (b + c)$ होता है।

(d) योग के अंतर्गत पूर्णांक शून्य तत्समक है, अर्थात किसी भी पूर्णांक a के लिए, $a + 0 = 0 + a = a$ होता है।

2. हमने यह भी अध्ययन किया है कि पूर्णांकों को कैसे गुणा किया जा सकता है और हमने पाया कि एक धनात्मक एवं एक ऋणात्मक पूर्णांक का गुणनफल एक ऋणात्मक पूर्णांक है, जबकि दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक है। उदाहरणत:, $– 2 \times 7 = – 14$ और $– 3 \times (– 8) = 24$ है।

3. ऋणात्मक पूर्णांकों की संख्या सम होने पर उनका गुणनफल धनात्मक होता है जबकि यह संख्या विषम होने पर उनका गुणनफल ऋणात्मक होता है।

4. पूर्णांक गुणन के अंतर्गत कुछ गुणों को दर्शाते हैं।

(a) गुणन के अंतर्गत पूर्णांक संवृत होते हैं, अर्थात् किन्हीं दो पूर्णांकों a तथा b के लिए $a \times b$ एक पूर्णांक होता है।

(b) पूर्णांकों के लिए गुणन क्रमविनिमेय होता है, अर्थात् किन्हीं दो पूर्णांको a तथा b के लिए $a \times b = b \times a$ होता है।

(c) गुणन के अंतर्गत पूर्णांक 1, तत्समक है, अर्थात् किसी भी पूर्णांक a के लिए $1 \times a = a \times 1 = a$ होता है।

(d) पूर्णांकों के लिए गुणन साहचर्य होता है, अर्थात् किन्हीं तीन पूर्णांकों $a, b,$ तथा c के लिए, $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ होता है।

5. योग एवं गुणन के अंतर्गत पूर्णांक एक गुण को दर्शाते हैं, जिसे वितरण गुण कहा जाता है, अर्थात् किन्हीं तीन पूर्णांकों a, b तथा c के लिए, $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ होता है।

6. योग एवं गुणन के अंतर्गत क्रमविनिमेयता, सहचारिता और वितरणता के गुण हमारे परिकलन को आसान बनाते हैं।

7. हमने यह भी सीखा है कि पूर्णांकों को कैसे भाग दिया जाता है। हमने पाया कि

(a) जब एक धनात्मक पूर्णांक को एक ऋणात्मक पूर्णांक से भाग दिया जाता है या जब एक ऋणात्मक पूर्णांक को एक धनात्मक पूर्णांक से भाग दिया जाता है, तो प्राप्त भागफल एक ऋणात्मक होता है।

(b) एक ऋणात्मक पूर्णांक को दूसरे ऋणात्मक पूर्णांक से भाग देने पर प्राप्त भागफल एक धनात्मक होता है।

8. किसी भी पूर्णांक a के लिए, हम पाते हैं कि

(a) $a \div 0$ परिभाषित नहीं है।

(b) $a \div 1 = a$ है।

भिन्न एवं दशमलव

0757CH02

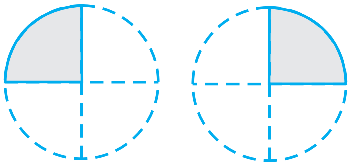
अध्याय 2

2.1 भिन्नों का गुणन

आप जानते हैं कि एक आयत का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात किया जाता है। यह लंबाई × चौड़ाई के बराबर होता है। यदि किसी आयत की लंबाई एवं चौड़ाई क्रमशः 7 cm और 4 cm है तो इसका क्षेत्रफल क्या होगा? इसका क्षेत्रफल $7 \times 4 = 28\ \text{cm}^2$ होगा।

यदि आयत की लंबाई एवं चौड़ाई क्रमशः $7\frac{1}{2}$ cm एवं $3\frac{1}{2}$ cm है तो इसका क्षेत्रफल क्या होगा? आप कहेंगे कि यह $7\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2} = \frac{15}{2} \times \frac{7}{2}\ \text{cm}^2$ है। संख्याएँ $\frac{15}{2}$ और $\frac{7}{2}$ भिन्न हैं। दिए हुए आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए यह ज्ञात करना आवश्यक है कि भिन्नों को गुणा कैसे किया जाए। हम अब इसे सीखेंगे।

2.1.1 एक भिन्न का पूर्ण संख्या से गुणन



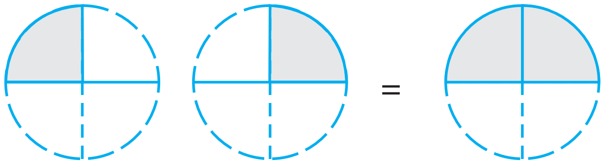
आकृति 2.1

बाईं तरफ़ (आकृति 2.1) में दी हुई तस्वीर को देखिए। प्रत्येक छायांकित (shaded) भाग वृत्त का $\frac{1}{4}$ भाग है। दो छायांकित भाग मिलकर वृत्त के कितने भाग को निरूपित करेंगे? ये $\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 2\times\frac{1}{4}$ को निरूपित करेंगे।

दो छायांकित भागों को संयोजित करने पर हम आकृति 2.2 को प्राप्त करते हैं। आकृति 2.2 का छायांकित भाग वृत्त के किस भाग को निरूपित करेगा? यह वृत्त के $\frac{2}{4}$ भाग को निरूपित करता है।

आकृति 2.2

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि आकृति 2.1 के छायांकित टुकड़े मिलकर, आकृति 2.2 के छायांकित भाग के समान हैं अर्थात् हमें आकृति 2.3 प्राप्त होती है।



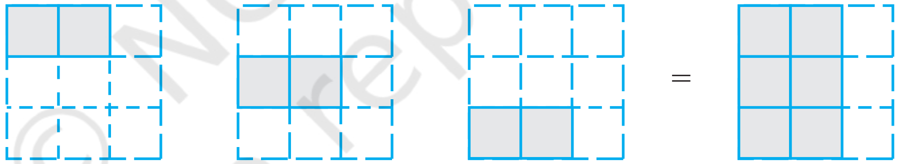
आकृति 2.3

अथवा $2 \times \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$

क्या अब आप बता सकते हैं कि आकृति 2.4 किसे निरूपित करेगी?

आकृति 2.4

और आकृति 2.5 किसे निरूपित करेगी?



आकृति 2.5

आइए अब हम $3 \times \frac{1}{2}$ ज्ञात करते हैं।

$$3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

हम यह भी पाते हैं, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+1+1}{2} = \frac{3 \times 1}{2} = \frac{3}{2}$

इसलिए $3 \times \frac{1}{2} = \frac{3 \times 1}{2} = \frac{3}{2}$

इसी प्रकार $\frac{2}{3} \times 5 = \frac{2 \times 5}{3} = ?$

क्या आप बता सकते हैं $3 \times \frac{2}{7} = ?$ $4 \times \frac{3}{5} = ?$

अभी तक हमने जितनी भिन्नों की चर्चा की है अर्थात् $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{7}$ और $\frac{3}{5}$ वे सभी उचित भिन्न हैं। विषम भिन्नों के लिए भी हमारे पास है:

$$2 \times \frac{5}{3} = \frac{2 \times 5}{3} = \frac{10}{3}$$

प्रयास कीजिए : $\quad 3 \times \frac{8}{7} = ? \quad 4 \times \frac{7}{5} = ?$

अत: *किसी पूर्ण संख्या को किसी उचित अथवा विषम भिन्न से गुणा करने के लिए हम पूर्ण संख्या को भिन्न के अंश के साथ गुणा करते हैं और भिन्न के हर को अपरिवर्तित या समान रखा जाता है।*

प्रयास कीजिए

1. ज्ञात कीजिए: (a) $\frac{2}{7} \times 3$ (b) $\frac{9}{7} \times 6$ (c) $3 \times \frac{1}{8}$ (d) $\frac{13}{11} \times 6$

   यदि गुणनफल एक विषम भिन्न है तो इसे मिश्रित भिन्न के रूप में व्यक्त कीजिए।

2. $2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$ को सचित्र निरूपित कीजिए।

किसी मिश्रित भिन्न को एक पूर्ण संख्या से गुणा करने के लिए सर्वप्रथम मिश्रित भिन्न को विषम भिन्न में परिवर्तित कीजिए और तब गुणा कीजिए।

इसीलिए $\quad 3 \times 2\frac{5}{7} = 3 \times \frac{19}{7} = \frac{57}{7} = 8\frac{1}{7}$

इसी प्रकार, $\quad 2 \times 4\frac{2}{5} = 2 \times \frac{22}{5} = ?$

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए (i) $5 \times 2\frac{3}{7}$

(ii) $1\frac{4}{9} \times 6$

भिन्न, प्रचालक 'का' के रूप में

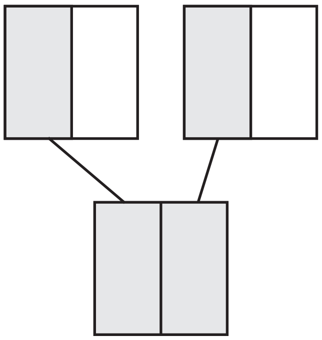
आकृति 2.6 को देखिए। दो वर्ग पूरी तरह से समरूप हैं।

प्रत्येक छायांकित टुकड़ा 1 के $\frac{1}{2}$ को निरूपित करता है।

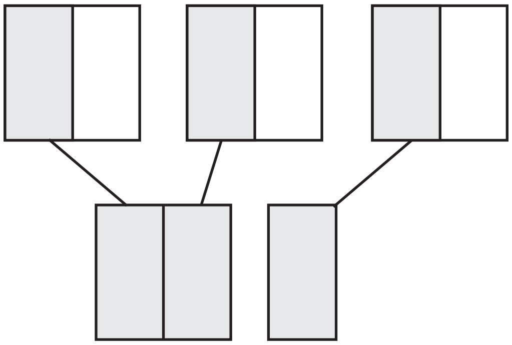
इसलिए दोनों छायांकित टुकड़े मिलकर 2 के $\frac{1}{2}$ को निरूपित करते हैं।

2 छायांकित $\frac{1}{2}$ भागों को संयोजित कीजिए। यह 1 को निरूपित करता है।

इस प्रकार हम कहते हैं कि 2 का $\frac{1}{2}$ एक भाग है। हम इसे $\frac{1}{2} \times 2 = 1$ के रूप में भी प्राप्त कर सकते हैं।



आकृति 2.6



आकृति 2.7

अत: 2 का $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

आकृति 2.7 के समरूप वर्गों को देखिए

प्रत्येक छायांकित टुकड़ा एक के $\frac{1}{2}$ भाग को निरूपित करता है।

इसलिए तीन छायांकित टुकड़े मिलकर 3 के $\frac{1}{2}$ भाग को निरूपित करते हैं।

तीन छायांकित भागों को संयोजित कीजिए।

यह $1\frac{1}{2}$ अर्थात् $\frac{3}{2}$ को निरूपित करता है।

इसलिए 3 का $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ है। और $\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$

अत: 3 का $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$

इस प्रकार हम देखते हैं कि **'का' गुणन को निरूपित करता है।**

फरीदा के पास 20 कँचे हैं। रेशमा के पास फरीदा के कँचों का $\frac{1}{5}$ है। रेशमा के पास कितने कँचे हैं? जैसा कि हम जानते हैं, 'का' गुणन को दर्शाता हैं। इसलिए रेशमा के पास $\frac{1}{5} \times 20 = 4$ कँचे हैं।

इसी प्रकार हम पाते हैं कि 16 का $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \times 16 = \frac{16}{2} = 8$ है।

प्रयास कीजिए

क्या आप बता सकते हैं कि (i) 10 का $\frac{1}{2}$ (ii) 16 का $\frac{1}{4}$ (iii) 25 का $\frac{2}{5}$, क्या है?

उदाहरण 1 40 विद्यार्थियों की एक कक्षा में कुल विद्यार्थियों की संख्या का $\frac{1}{5}$ अंग्रेज़ी पढ़ना पसंद करते है, कुल संख्या का $\frac{2}{5}$ गणित पढ़ना पसंद करते हैं और शेष विद्यार्थी विज्ञान पढ़ना पसंद करते हैं।

(i) कितने विद्यार्थी अंग्रेज़ी पढ़ना पसंद करते हैं?

(ii) कितने विद्यार्थी गणित पढ़ना पसंद करते हैं?

(iii) कुल विद्यार्थियों की संख्या का कितना भाग (fraction) विज्ञान पढ़ना पसंद करता है?

हल कक्षा के कुल विद्यार्थियों की संख्या = 40.

(i) इनमें से कुल संख्या का $\frac{1}{5}$ अंग्रेज़ी पढ़ना पसंद करते हैं।

अत: अंग्रेज़ी पढ़ना पसंद करने वाले विद्यार्थियों की संख्या 40 का $\frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times 40 = 8$ है।

(ii) स्वयं प्रयास कीजिए।

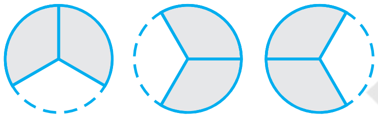
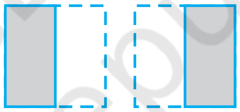
(iii) अंग्रेज़ी एवं गणित पसंद करने वाले विद्यार्थियों की संख्या $= 8 + 16 = 24$ है। अत: विज्ञान पसंद करने वाले विद्यार्थियों की संख्या $= 40 - 24 = 16$ है।

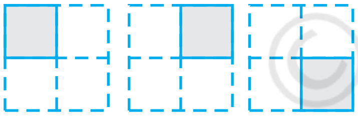
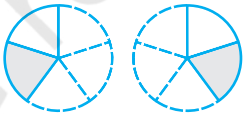
अत: वांछित भिन्न $\frac{16}{40}$ है।

प्रश्नावली 2.1

1. (a) से (d) तक के रेखाचित्रों में निम्नलिखित को कौन दर्शाता है :

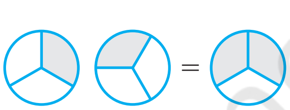
(i) $2 \times \frac{1}{5}$ (ii) $2 \times \frac{1}{2}$ (iii) $3 \times \frac{2}{3}$ (iv) $3 \times \frac{1}{4}$

(a)  (b) 

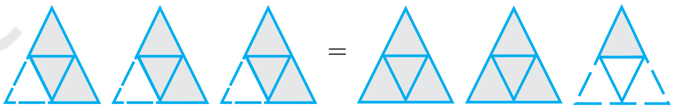
(c)  (d) 

2. (a) से (c) तक कुछ चित्र दिए हुए हैं। बताइए उनमें से कौन निम्नलिखित को दर्शाता है :

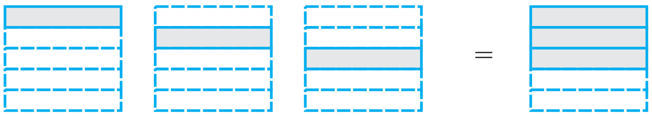
(i) $3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$ (ii) $2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ (iii) $3 \times \frac{3}{4} = 2\frac{1}{4}$



(a)



(b)



(c)

3. गुणा करके न्यूनतम रूप में लिखिए और मिश्रित भिन्न में व्यक्त कीजिए :

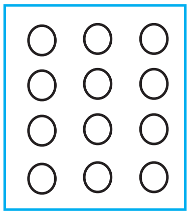
(i) $7\times\frac{3}{5}$ (ii) $4\times\frac{1}{3}$ (iii) $2\times\frac{6}{7}$ (iv) $5\times\frac{2}{9}$ (v) $\frac{2}{3}\times4$

(vi) $\frac{5}{2}\times6$ (vii) $11\times\frac{4}{7}$ (viii) $20\times\frac{4}{5}$ (ix) $13\times\frac{1}{3}$ (x) $15\times\frac{3}{5}$

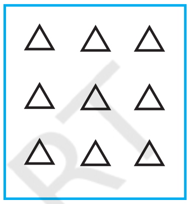
4. छायांकित कीजिए :

(i) बक्सा (a) के वृत्तों का $\frac{1}{2}$ भाग (ii) बक्सा (b) के त्रिभुजों का $\frac{2}{3}$ भाग

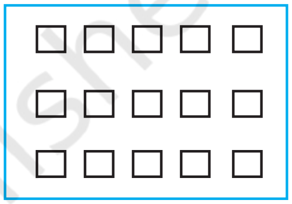
(iii) बक्सा (c) के वर्गों का $\frac{3}{5}$ भाग



(a)



(b)



(c)

5. ज्ञात कीजिए :

(a) (i) 24 का $\frac{1}{2}$ (ii) 46 का $\frac{1}{2}$ (b) (i) 18 का $\frac{2}{3}$ (ii) 27 का $\frac{2}{3}$

(c) (i) 16 का $\frac{3}{4}$ (ii) 36 का $\frac{3}{4}$ (d) (i) 20 का $\frac{4}{5}$ (ii) 35 का $\frac{4}{5}$

6. गुणा कीजिए और मिश्रित भिन्न के रूप में व्यक्त कीजिए :

(a) $3\times5\frac{1}{5}$ (b) $5\times6\frac{3}{4}$ (c) $7\times2\frac{1}{4}$

(d) $4\times6\frac{1}{3}$ (e) $3\frac{1}{4}\times6$ (f) $3\frac{2}{5}\times8$

7. ज्ञात कीजिए :

(a) (i) $2\frac{3}{4}$ का $\frac{1}{2}$ (ii) $4\frac{2}{9}$ का $\frac{1}{2}$ (b) (i) $3\frac{5}{6}$ का $\frac{5}{8}$ (ii) $9\frac{2}{3}$ का $\frac{5}{8}$

8. विद्या और प्रताप पिकनिक पर गए। उनकी माँ ने उन्हें 5 लीटर पानी वाली एक बोतल दी। विद्या ने कुल पानी का $\frac{2}{5}$ उपयोग किया। शेष पानी प्रताप ने पिया।

(i) विद्या ने कितना पानी पिया?

(ii) पानी की कुल मात्रा का कितना भिन्न (fraction) प्रताप ने पिया?

2.1.2 भिन्न का भिन्न से गुणन

फरीदा के पास 9 cm लंबी एक रिबन की पट्टी थी। उसने इस पट्टी को चार समान भागों में काटा। उसने यह किस प्रकार किया? उसने पट्टी को दो बार मोड़ा। प्रत्येक भाग कुल लंबाई के किस भिन्न को निरूपित करेगा। प्रत्येक भाग, पट्टी का $\frac{9}{4}$ होगा। उसने इनमें से एक भाग लिया और इस भाग को एक बार मोड़ते हुए इसे दो बराबर भागों में बाँट दिया। इन दो टुकड़ों में से एक टुकड़ा क्या निरूपित करेगा? यह $\frac{9}{4}$ का $\frac{1}{2}$ अर्थात् $\frac{1}{2} \times \frac{9}{4}$ को निरूपित करेगा।

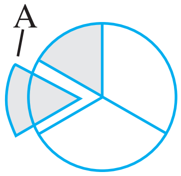
आइए देखते हैं कि दो भिन्नों का गुणनफल जैसे $\frac{1}{2} \times \frac{9}{4}$ को कैसे ज्ञात किया जाए।

इसे ज्ञात करने के लिए आइए सर्वप्रथम हम $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ जैसा गुणनफल ज्ञात करना सीखते हैं।

(a) किसी संपूर्ण भाग का $\frac{1}{3}$ हम कैसे ज्ञात करते हैं? हम संपूर्ण को तीन समान भागों में बाँटते है। तीनों में से प्रत्येक भाग संपूर्ण के $\frac{1}{3}$ भाग को निरूपित करता है। इन तीनों में से एक हिस्सा लीजिए और इसे छायांकित कर दीजिए जैसा कि आकृति 2.8 में दर्शाया गया है।

आकृति 2.8

(b) आप इस छायांकित भाग का $\frac{1}{2}$ भाग कैसे ज्ञात करोगे? इस छायांकित एक तिहाई ($\frac{1}{3}$) भाग को 2 समान भागों में बाँटिए। इन दोनों में से प्रत्येक भाग $\frac{1}{3}$ के $\frac{1}{2}$ को निरूपित करता है अर्थात् $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ को निरूपित करता है (आकृति 2.9)।



आकृति 2.9

इन दो भागों में से एक को बाहर निकाल लीजिए और इसे 'A' नाम दे दीजिए। 'A' $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ को निरूपित करता है।

(c) 'A' संपूर्ण का कितना भाग है? यह जानने के लिए शेष $\frac{1}{3}$ भागों में से प्रत्येक को 2 समान भागों में बाँटिए। अब आपके पास ऐसे कितने समान भाग हैं? ऐसे 6 समान भाग हैं। 'A' इनमें से एक भाग है।

अतः 'A' संपूर्ण का $\frac{1}{6}$ भाग है। इस प्रकार $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

हमने यह कैसे निर्णय लिया कि 'A' संपूर्ण का $\frac{1}{6}$ भाग है? संपूर्ण को $2 \times 3 = 6$ भागों में बाँटा गया और 1 भाग इसमें से बाहर निकाला गया।

अत: $$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{1 \times 1}{2 \times 3}$$

अथवा $$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1 \times 1}{2 \times 3}$$

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ का मान भी इसी प्रकार ज्ञात किया जा सकता है। संपूर्ण को 2 समान भागों में बाँटिए और तब इनमें से किसी एक भाग को 3 समान भागों में बाँटिए। इनमें से एक भाग को लीजिए। यह $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ अर्थात् $\frac{1}{6}$ भाग को निरूपित करेगा।

इसलिए जैसा कि पहले चर्चा की जा चुकी है $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} = \frac{1 \times 1}{3 \times 2}$

अत: $$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$ और $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$; $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5}$ और $\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$ ज्ञात कीजिए और जाँच कीजिए कि क्या आप

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$; $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$ पाते हैं?

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित बक्सों को भरिए :

(i) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{7} = \frac{1 \times 1}{2 \times 7} = \square$

(ii) $\frac{1}{5} \times \frac{1}{7} = \square = \square$

(iii) $\frac{1}{7} \times \frac{1}{2} = \square = \square$

(iv) $\frac{1}{7} \times \frac{1}{5} = \square = \square$

उदाहरण 2 सुशांत एक घंटे में किसी पुस्तक का $\frac{1}{3}$ भाग पढ़ता है। वह $2\frac{1}{5}$ घंटों में पुस्तक का कितना भाग पढ़ेगा?

हल सुशांत द्वारा 1 घंटे में पुस्तक का पढ़ा हुआ भाग $= \frac{1}{3}$.

इसलिए $2\frac{1}{5}$ घंटे में उसके द्वारा पुस्तक का पढ़ा हुआ भाग $= 2\frac{1}{5} \times \frac{1}{3}$

$$= \frac{11}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{11 \times 1}{5 \times 3} = \frac{11}{15}$$

आइए अब हम $\frac{1}{2} \times \frac{5}{3}$ ज्ञात करते हैं। हम जानते हैं कि $\frac{5}{3} = \frac{1}{3} \times 5$.

इसलिए, $\frac{1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 5 = \frac{1}{6} \times 5 = \frac{5}{6}$

साथ ही, $\frac{5}{6} = \frac{1 \times 5}{2 \times 3}$। अतः $\frac{1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{1 \times 5}{2 \times 3} = \frac{5}{6}$.

इसे नीचे खींची गई आकृतियों में भी दर्शाया गया है। पाँच समान आकारों (आकृति 2.10) में से प्रत्येक पाँच सर्वांगसम वृत्तों के भाग हैं। इस प्रकार का एक आकार लीजिए। इस आकार को प्राप्त करने के लिए सर्वप्रथम हम वृत्त को 3 समान भागों में बाँटते हैं। आगे भी इन तीन भागों में से प्रत्येक को 2 समान भागों में बाँटते हैं। इसका एक भाग वह आकार है जिसकी हमने चर्चा की है। यह क्या निरूपित करेगा? यह $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ को निरूपित करेगा। इस प्रकार के भाग मिलाकर कुल $5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ होंगे।

आकृति 2.10

इसी प्रकार, $\frac{3}{5} \times \frac{1}{7} = \frac{3 \times 1}{5 \times 7} = \frac{3}{35}$.

इस प्रकार हम $\frac{2}{3} \times \frac{7}{5}$ को $\frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{2 \times 7}{3 \times 5} = \frac{14}{15}$ के रूप में ज्ञात कर सकते हैं।

इस प्रकार हम पाते हैं कि हम दो भिन्नों का गुणन $\frac{\text{अंशों का गुणनफल}}{\text{हरों का गुणनफल}}$ के रूप में करते हैं।

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए: $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$; $\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}$

गुणनफल का मान

आपने देखा है कि दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल उन दोनों संख्याओं में से प्रत्येक से बड़ा होता है। उदाहरणार्थ $3 \times 4 = 12$ और $12 > 4$, $12 > 3$.

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए: $\frac{8}{3} \times \frac{4}{7}$; $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$

जब हम दो भिन्नों को गुणा करते हैं तो गुणनफल के मान को दिए गए भिन्नों से तुलना कीजिए?

आइए सर्वप्रथम हम दो उचित भिन्नों के गुणनफल की चर्चा करते हैं। हम पाते हैं,

$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$	$\frac{8}{15}<\frac{2}{3},\frac{8}{15}<\frac{4}{5}$	गुणनफल प्रत्येक भिन्न से कम है।
$\frac{1}{5}\times\frac{2}{7}$ = ---------	--------,--------	-------------------------------------
$\frac{3}{5}\times\frac{\square}{8}=\frac{21}{40}$	--------,--------	-------------------------------------
$\frac{2}{\square}\times\frac{4}{9}=\frac{8}{45}$	--------,--------	-------------------------------------

आप पाते हैं कि *जब दो उचित भिन्नों को गुणा किया जाता है तो गुणनफल दोनों भिन्नों से कम होता है। अर्थात् दो उचित भिन्नों के गुणनफल का मान दोनों भिन्नों में से प्रत्येक से छोटा होता है। पाँच और उदाहरण बनाकर इसकी जाँच कीजिए।*

आइए अब हम दो विषम भिन्नों को गुणा करते हैं।

$\frac{7}{3}\times\frac{5}{2}=\frac{35}{6}$	$\frac{35}{6}>\frac{7}{3},\frac{35}{6}>\frac{5}{2}$	गुणनफल प्रत्येक भिन्न से बड़ा है।
$\frac{6}{5}\times\frac{\square}{3}=\frac{24}{15}$	--------,--------	--
$\frac{9}{2}\times\frac{7}{\square}=\frac{63}{8}$	--------,--------	--
$\frac{3}{\square}\times\frac{8}{7}=\frac{24}{14}$	--------,--------	--

हम पाते हैं कि दो *विषम भिन्नों का गुणनफल उनमें से प्रत्येक भिन्न से बड़ा है। अथवा दो विषम भिन्नों के गुणनफल का मान उनमें से प्रत्येक भिन्न से अधिक है।*

ऐसे पाँच और उदाहरणों को बनाइए और उपर्युक्त कथन को सत्यापित कीजिए।

आइए अब हम एक उचित और एक विषम भिन्न को गुणा करते हैं।

मान लीजिए $\frac{2}{3}$ और $\frac{7}{5}$ को।

हम पाते हैं : $\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}=\frac{14}{15}$. यहाँ, $\frac{14}{15}<\frac{7}{5}$ और $\frac{14}{15}>\frac{2}{3}$

प्राप्त गुणनफल, गुणन में उपयोग किए गए विषम भिन्न से कम है और उचित भिन्न से ज़्यादा है।

$\frac{6}{5} \times \frac{2}{7}$, $\frac{8}{3} \times \frac{4}{5}$ के लिए भी गुणनफल की जाँच कीजिए।

प्रश्नावली 2.2

1. ज्ञात कीजिए :

(i) (a) $\frac{1}{4}$ का $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{3}{5}$ का $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{4}{3}$ का $\frac{1}{4}$

(ii) (a) $\frac{2}{9}$ का $\frac{1}{7}$ (b) $\frac{6}{5}$ का $\frac{1}{7}$ (c) $\frac{3}{10}$ का $\frac{1}{7}$

2. गुणा कीजिए और न्यूनतम रूप में बदलिए (यदि संभव है) :

(i) $\frac{2}{3} \times 2\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{2}{7} \times \frac{7}{9}$ (iii) $\frac{3}{8} \times \frac{6}{4}$ (iv) $\frac{9}{5} \times \frac{3}{5}$

(v) $\frac{1}{3} \times \frac{15}{8}$ (vi) $\frac{11}{2} \times \frac{3}{10}$ (vii) $\frac{4}{5} \times \frac{12}{7}$

3. निम्नलिखित भिन्नों को गुणा कीजिए:

(i) $\frac{2}{5} \times 5\frac{1}{4}$ (ii) $6\frac{2}{5} \times \frac{7}{9}$ (iii) $\frac{3}{2} \times 5\frac{1}{3}$ (iv) $\frac{5}{6} \times 2\frac{3}{7}$

(v) $3\frac{2}{5} \times \frac{4}{7}$ (vi) $2\frac{3}{5} \times 3$ (vii) $3\frac{4}{7} \times \frac{3}{5}$

4. कौन बड़ा है :

(i) $\frac{3}{4}$ का $\frac{2}{7}$ अथवा $\frac{5}{8}$ का $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{6}{7}$ का $\frac{1}{2}$ अथवा $\frac{3}{7}$ का $\frac{2}{3}$

5. सैली अपने बगीचे में चार छोटे पौधे एक पंक्ति में लगाती है। दो क्रमागत छोटे पौधों के बीच की दूरी $\frac{3}{4}$ m है। प्रथम एवं अंतिम पौधे के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

6. लिपिका एक पुस्तक को प्रतिदिन $1\frac{3}{4}$ घंटे पढ़ती है। वह संपूर्ण पुस्तक को 6 दिनों में पढ़ती है। उस पुस्तक को पढ़ने में उसने कुल कितने घंटे लगाए?

7. एक कार 1 लिटर पैट्रोल में 16 किमी दौड़ती है। $2\frac{3}{4}$ लिटर पैट्रोल में यह कार कुल कितनी दूरी तय करेगी?

8. (a) (i) बक्सा $\square$, में संख्या लिखिए, ताकि $\frac{2}{3} \times \square = \frac{10}{30}$।

(ii) बक्सा $\square$, में प्राप्त संख्या का न्यूनतम रूप ______ है।

(b) (i) बक्सा $\square$, में संख्या लिखिए, ताकि $\frac{3}{5} \times \square = \frac{24}{75}$ ।

(ii) बक्सा $\square$, में प्राप्त संख्या का न्यूनतम रूप ______ है।

2.2 भिन्नों की भाग

जॉन के पास 6 cm लंबी कागज़ की एक पट्टी है। वह इस पट्टी को 2 cm लंबी छोटी पट्टियों में काटता है। आप जानते हैं कि वह $6 \div 2 = 3$ पट्टियाँ प्राप्त करेगा। जॉन 6 cm लंबाई वाली एक दूसरी पट्टी को $\frac{3}{2}$ cm लंबाई वाली छोटी पट्टियों में काटता है। अब उसको कितनी छोटी पट्टियाँ प्राप्त होंगी? वह $6 \div \frac{3}{2}$ पट्टियाँ प्राप्त करेगा।

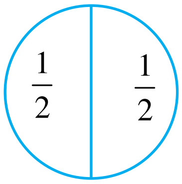
एक $\frac{15}{2}$ cm लंबाई वाली पट्टी को $\frac{3}{2}$ cm लंबाई वाली छोटी पट्टियों में काटा जा सकता है जिससे हमें $\frac{15}{2} \div \frac{3}{2}$ टुकड़े प्राप्त होंगे।

अतः, हमें एक पूर्ण संख्या को किसी भिन्न से अथवा एक भिन्न को दूसरी भिन्न से भाग देने की आवश्यकता है। आइए हम देखते हैं कि इसे कैसे करना है।

2.2.1 भिन्न से पूर्ण संख्या की भाग

आइए $1 \div \frac{1}{2}$ ज्ञात करते हैं।

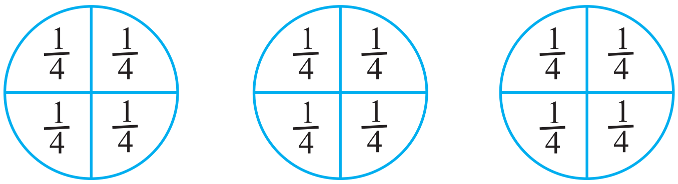
हम किसी संपूर्ण को कुछ बराबर भागों में इस प्रकार बाँटते हैं ताकि प्रत्येक भाग संपूर्ण का आधा है। ऐसे आधे $(\frac{1}{2})$ भागों की संख्या $1 \div \frac{1}{2}$ होगी। आकृति 2.11 को देखिए। आपको कितने आधे भाग दिखाई देते हैं? ऐसे दो आधे भाग हैं।



आकृति 2.11

इसलिए $1 \div \frac{1}{2} = 2$. साथ ही $1 \times \frac{2}{1} = 1 \times 2 = 2$ अतः $1 \div \frac{1}{2} = 1 \times \frac{2}{1}$

इसी प्रकार, $3 \div \frac{1}{4}$ = 3 संपूर्णों में से प्रत्येक को समान $\frac{1}{4}$ भागों में बाँटने पर, $\frac{1}{4}$ भागों की संख्या = 12 (आकृति 2.12 से)



आकृति 2.12

यह भी देखिए कि $3 \times \frac{4}{1} = 3 \times 4 = 12$. इस प्रकार, $3 \div \frac{1}{4} = 3 \times \frac{4}{1} = 12$.

इसी प्रकार $3 \div \frac{1}{2}$ और $3 \times \frac{2}{1}$ ज्ञात कीजिए।

भिन्न का व्युत्क्रम

$\frac{1}{2}$ के अंश एवं हर को परस्पर बदलने पर अथवा $\frac{1}{2}$ का प्रतिलोम करने पर संख्या $\frac{2}{1}$ प्राप्त की जा सकती है। इसी प्रकार $\frac{1}{3}$ का प्रतिलोम करने पर $\frac{3}{1}$ प्राप्त होता है।

आइए सर्वप्रथम हम ऐसी संख्याओं के प्रतिलोम के बारे में चर्चा करते हैं।
निम्नलिखित गुणनफलों को देखिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

$7 \times \frac{1}{7} = 1$	$\frac{5}{4} \times \frac{4}{5}$ = ---------
$\frac{1}{9} \times 9$ = ------	$\frac{2}{7} \times$ ------- $= 1$
$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{2 \times 3}{3 \times 2} = \frac{6}{6} = 1$	------ $\times \frac{5}{9} = 1$

ऐसे पाँच और युग्मों को गुणा कीजिए।

ऐसी शून्येतर संख्याएँ जिनका परस्पर गुणनफल 1 है, एक दूसरे के व्युत्क्रम कहलाती हैं।
इस प्रकार $\frac{5}{9}$ का व्युत्क्रम $\frac{9}{5}$ है और $\frac{9}{5}$ का व्युत्क्रम $\frac{5}{9}$ है। $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{7}$ के व्युत्क्रम क्या है?

आप देखेंगे कि $\frac{2}{3}$ का प्रतिलोम करने पर इसका व्युत्क्रम प्राप्त होता है। आप इस प्रकार $\frac{3}{2}$ प्राप्त करते हैं।

सोचिए, चर्चा कीजिए एवं लिखिए

(i) क्या एक उचित भिन्न का व्युत्क्रम भी उचित भिन्न होगी?
(ii) क्या एक विषम भिन्न का व्युत्क्रम भी एक विषम भिन्न होगा?

इसलिए हम कह सकते हैं कि

$1 \div \frac{1}{2} = 1 \times \frac{2}{1} = 1 \times (\frac{1}{2}$ का व्युत्क्रम$)$

$3 \div \frac{1}{4} = 3 \times \frac{4}{1} = 3 \times (\frac{1}{4}$ का व्युत्क्रम$)$

$3 \div \frac{1}{2}$ = ------ = ----------------------.

अतः, $2 \div \frac{3}{4} = 2 \times (\frac{3}{4}$ का व्युत्क्रम$) = 2 \times \frac{4}{3}$.

$5 \div \frac{2}{9} = 5 \times$ ------------------ $= 5 \times$ -------------

इस प्रकार किसी पूर्ण संख्या को एक भिन्न से भाग करने के लिए उस पूर्ण संख्या को उस भिन्न के व्युत्क्रम से गुणा कर दीजिए।

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए : (i) $7 \div \frac{2}{5}$ (ii) $6 \div \frac{4}{7}$ (iii) $2 \div \frac{8}{9}$

- *किसी पूर्ण संख्या को एक मिश्रित भिन्न से भाग करते समय, सर्वप्रथम मिश्रित भिन्न को विषम भिन्न में परिवर्तित कीजिए और तब इसको हल कीजिए।*

इस प्रकार $4 \div 2\frac{2}{5} = 4 \div \frac{12}{5} =$? साथ ही $5 \div 3\frac{1}{3} = 5 \div \frac{10}{3} = ?$

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए:

(i) $6 \div 5\frac{1}{3}$

(ii) $7 \div 2\frac{4}{7}$

2.2.2 पूर्ण संख्या से भिन्न की भाग

- $\frac{3}{4} \div 3$ का मान क्या होगा?

पूर्व प्रेक्षणों के आधार पर हम पाते हैं : $\frac{3}{4} \div 3 = \frac{3}{4} \div \frac{3}{1} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

अतः, $\frac{2}{3} \div 7 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{7} =$? $\frac{5}{7} \div 6$, $\frac{2}{7} \div 8$ के मान क्या हैं?

- मिश्रित भिन्नों को पूर्ण संख्या से भाग करते समय मिश्रित भिन्न को विषम भिन्न में परिवर्तित कीजिए। अर्थात्

$2\frac{2}{3} \div 5 = \frac{8}{3} \div 5 =$ ------ ; $4\frac{2}{5} \div 3 =$ ------ $=$ ------ $2\frac{3}{5} \div 2 =$ ------ $=$ ----

2.2.3 एक भिन्न की दूसरी भिन्न से भाग

अब हम $\frac{1}{3} \div \frac{6}{5}$ ज्ञात कर सकते हैं।

$\frac{1}{3} \div \frac{6}{5} = \frac{1}{3} \times (\frac{6}{5}$ का व्युत्क्रम$) = \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{18}$

इसी प्रकार, $\frac{8}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{8}{5} \times (\frac{2}{3}$ का व्युत्क्रम$) =$? और $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} =$?

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए: (i) $\frac{3}{5} \div \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$ (iii) $2\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$ (iv) $5\frac{1}{6} \div \frac{9}{2}$

प्रश्नावली 2.3

1. ज्ञात कीजिए :

(i) $12 \div \frac{3}{4}$ (ii) $14 \div \frac{5}{6}$ (iii) $8 \div \frac{7}{3}$ (iv) $4 \div \frac{8}{3}$

(v) $3 \div 2\frac{1}{3}$ (vi) $5 \div 3\frac{4}{7}$

2. निम्नलिखित भिन्नों में से प्रत्येक का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। व्युत्क्रमों को उचित भिन्न, विषम भिन्न एवं पूर्ण संख्या के रूप में वर्गीकृत कीजिए।

(i) $\frac{3}{7}$ (ii) $\frac{5}{8}$ (iii) $\frac{9}{7}$ (iv) $\frac{6}{5}$

(v) $\frac{12}{7}$ (vi) $\frac{1}{8}$ (vii) $\frac{1}{11}$

3. ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{7}{3} \div 2$ (ii) $\frac{4}{9} \div 5$ (iii) $\frac{6}{13} \div 7$ (iv) $4\frac{1}{3} \div 3$

(v) $3\frac{1}{2} \div 4$ (vi) $4\frac{3}{7} \div 7$

4. ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{2}{5} \div \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{4}{9} \div \frac{2}{3}$ (iii) $\frac{3}{7} \div \frac{8}{7}$ (iv) $2\frac{1}{3} \div \frac{3}{5}$ (v) $3\frac{1}{2} \div \frac{8}{3}$

(vi) $\frac{2}{5} \div 1\frac{1}{2}$ (vii) $3\frac{1}{5} \div 1\frac{2}{3}$ (viii) $2\frac{1}{5} \div 1\frac{1}{5}$

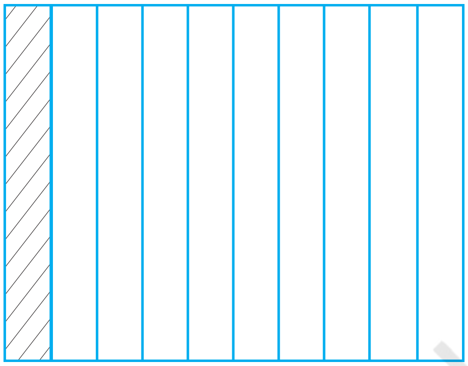
2.3 दशमलव संख्याओं का गुणन

रेशमा ने ₹ 8.50 प्रति kg की दर से 1.5 kg सब्जी खरीदी। उसे कितने धन का भुगतान करना चाहिए? निश्चित रूप से यह ₹ 8.50×1.50 होगा। 8.5 और 1.5 दोनों ही दशमलव संख्याएँ हैं। इस प्रकार हमें एक ऐसी परिस्थिति मिलती है जहाँ हमें यह ज्ञात करने की आवश्यकता है कि दो दशमलवों को कैसे गुणा किया जाता है। आइए अब दो दशमलव संख्याओं के गुणन को सीखते हैं।

सर्वप्रथम हम 0.1×0.1 ज्ञात करते हैं।

अब $0.1 = \frac{1}{10}$, इसलिए $0.1 \times 0.1 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1 \times 1}{10 \times 10} = \frac{1}{100} = 0.01$.

आइए इसका सचित्र निरूपण देखते हैं। (आकृति 2.13)



आकृति 2.13

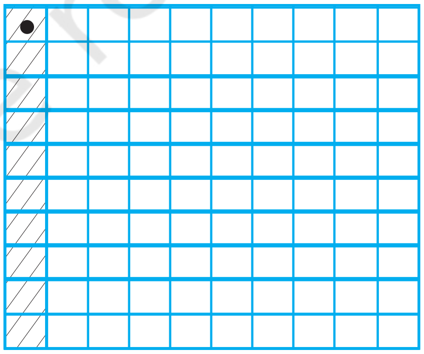
भिन्न $\frac{1}{10}$, 10 समान भागों में से एक को निरूपित करती है।

चित्र में छायांकित भाग $\frac{1}{10}$ को निरूपित करता है।

हम जानते हैं कि

$\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ का अर्थ है $\frac{1}{10}$ का $\frac{1}{10}$. इसलिए इस $\frac{1}{10}$ वें भाग को 10 बराबर भागों में बाँटिए और इनमें से एक भाग को लीजिए।

इस प्रकार हम पाते हैं (आकृति 2.14) कि



आकृति 2.14

$\frac{1}{10}$ वें भाग के 10 भागों में एक भाग बिंदु द्वारा चिह्नित वर्ग है। अर्थात् यह $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ अथवा 0.1×0.1 को निरूपित करता है।

क्या बिंदु वर्ग को किसी दूसरी विधि से निरूपित किया जा सकता है?

आप आकृति 2.14 में कितने छोटे वर्ग पाते हैं।

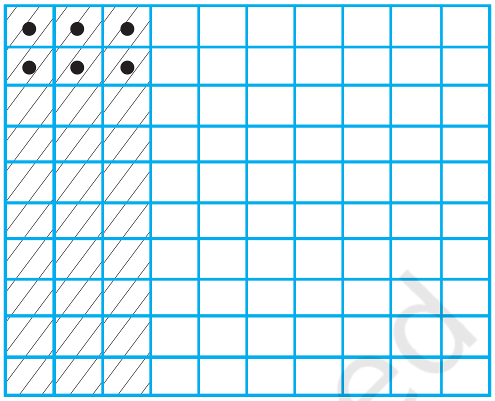
इसमें 100 छोटे वर्ग हैं। इस प्रकार बिंदु द्वारा चिह्नित वर्ग 100 में से एक को निरूपित करता है अर्थात् 0.01 को निरूपित करता है। अत: $0.1 \times 0.1 = 0.01$.

ध्यान दीजिए 0.1 गुणनफल में दो बार सम्मिलित है। 0.1 में दशमलव बिंदु के दाईं तरफ़ एक अंक है। 0.01 में दशमलव बिंदु के दाईं तरफ़ दो (अर्थात् 1 + 1) अंक हैं।

आइए अब हम 0.2×0.3 ज्ञात करते हैं।

हम पाते हैं, $0.2 \times 0.3 = \frac{2}{10} \times \frac{3}{10}$

जैसे हमने $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$, के लिए किया है, वैसे ही आइए हम वर्ग को 10 समान भागों में बाँटते हैं और $\frac{3}{10}$ प्राप्त करने के लिए इनमें से 3 भागों को बाहर निकाल लेते हैं। फिर से इन 3 समान भागों में से प्रत्येक भाग को 10 समान भागों में बाँटिए और प्रत्येक में से 2 ले लीजिए। इस प्रकार हम $\frac{2}{10} \times \frac{3}{10}$ प्राप्त करते हैं।



आकृति 2.15

बिंदु द्वारा चिह्नित वर्ग, $\frac{2}{10} \times \frac{3}{10}$ अर्थात् 0.2×0.3 को निरूपित करते हैं (आकृति 2.15 देखिए)

क्योंकि 100 में से 6 बिंदु द्वारा चिह्नित वर्ग हैं अत: ये 0.06 को भी निरूपित करते हैं।

इस प्रकार $0.2 \times 0.3 = 0.06$.

ध्यान दीजिए कि $2 \times 3 = 6$ और 0.06 में दशमलव बिंदु से दाईं तरफ़ अंकों की संख्या 2 (= 1 + 1) हैं।

जाँच कीजिए कि क्या यह 0.1×0.1 के लिए भी उचित है।

इन प्रेक्षणों का उपयोग करते हुए 0.2×0.4 ज्ञात कीजिए।

0.1×0.1 और 0.2×0.3 ज्ञात करते समय संभवत: आपने ध्यान दिया होगा कि सर्वप्रथम हमने दशमलव बिंदु की उपेक्षा करते हुए पूर्ण संख्याओं के रूप में गुणा किया था। 0.1×0.1 में हमने पाया, 01×01 अर्थात् 1×1 इसी प्रकार 0.2×0.3 में हमने पाया, $02 \times 03 = 2 \times 3$.

तब हमने सबसे दाईं तरफ़ के अंक से शुरू करते हुए और बाईं तरफ़ चलते हुए अंकों की संख्या को गिना। तब हमने वहाँ दशमलव बिंदु रखा। गिने जाने वाले अंकों की संख्या, गुणा की जा रही दशमलव संख्याओं के दशमलव बिंदु के दाईं तरफ़ के अंकों की संख्या का योग करने पर प्राप्त होती है।

आइए अब हम 1.2×2.5 ज्ञात करते हैं।

12 एवं 25 को गुणा कीजिए। हम 300 अंक प्राप्त करते हैं। 1.2 और 2.5 दोनों में दशमलव बिंदु के दाईं तरफ एक अंक है। इसलिए 300 में सबसे दाईं तरफ से 1 + 1 = 2 अंक गिन लीजिए (अर्थात् दो 0) और बाईं तरफ़ चलिए। हम 3.00 अर्थात् 3 प्राप्त करते हैं

इसी प्रकार 1.5×1.6, 2.4×4.2 ज्ञात कीजिए।

2.5 और 1.25 को गुणा करते समय सर्वप्रथम आप 25 एवं 125 को गुणा करेंगे। प्राप्त गुणनफल में दशमलव रखने के लिए आप सबसे दाईं तरफ़ के अंक से शुरू करते हुए $1 + 2 = 3$ (क्यों)? अंक गिनेंगे। अत: $2.5 \times 1.25 = 3.125$।

2.7×1.35 ज्ञात कीजिए।

प्रयास कीजिए

1. ज्ञात कीजिए: (i) 2.7×4 (ii) 1.8×1.2 (iii) 2.3×4.35
2. प्रश्न 1 में प्राप्त गुणनफलों को अवरोही क्रम में क्रमबद्ध कीजिए।

उदाहरण 3 एक समबाहु त्रिभुज की भुजा 3.5 cm है। इसका परिमाप ज्ञात कीजिए।

हल समबाहु त्रिभुज की सभी भुजाएँ समान होती हैं।

इसलिए, प्रत्येक भुजा की लंबाई = 3.5 cm। अत: परिमाप = 3×3.5 cm = 10.5 cm

उदाहरण 4 एक आयत की लंबाई 7.1 cm और इसकी चौड़ाई 2.5 cm है। आयत का क्षेत्रफल क्या है?

हल आयत की लंबाई = 7.1 cm आयत की चौड़ाई = 2.5 cm

इसलिए आयत का क्षेत्रफल = 7.1 cm $\times$ 2.5 cm = 17.75 cm^2

2.3.1 दशमलव संख्याओं का 10,100 और 1000 से गुणन

रेशमा ने देखा कि $2.3 = \frac{23}{10}$ है जबकि $2.35 = \frac{235}{100}$. अत: उसने पाया कि दशमलव बिंदु की स्थिति पर निर्भर करते हुए दशमलव संख्या को 10 अथवा 100 हर वाली भिन्न के रूप में परिवर्तित किया जा सकता है। उसने सोचा कि यदि किसी दशमलव संख्या को 10 अथवा 100 अथवा 1000 से गुणा किया जाए तो क्या होगा?

आइए देखते हैं क्या हम दशमलव संख्याओं को 10 अथवा 100 अथवा 1000 से गुणा करने का कोई प्रतिरूप (पैटर्न) प्राप्त कर सकते हैं।

नीचे दी हुई सारणी को देखिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

$1.76 \times 10 = \frac{176}{100} \times 10 = 17.6$	$2.35 \times 10 =$ ___	$12.356 \times 10 =$ ___
$1.76 \times 100 = \frac{176}{100} \times 100 = 176$ या 176.0	$2.35 \times 100 =$ ___	$12.356 \times 100 =$ ___
$1.76 \times 1000 = \frac{176}{100} \times 1000 = 1760$ या 1760.0	$2.35 \times 1000 =$ ___	$12.356 \times 1000 =$ ___
$0.5 \times 10 = \frac{5}{10} \times 10 = 5$; $0.5 \times 100 =$ ___ ; $0.5 \times 1000 =$ ___		

सारणी में गुणनफल के दशमलव बिंदु के विस्थापन को देखिए। यहाँ संख्याओं को 10,100 एवं 1000 से गुणा किया गया है। $1.76 \times 10 = 17.6$ में अंक वही हैं अर्थात् दोनों तरफ़ 1, 7 और 6 है। क्या आपने इसे दूसरे गुणनफलों में भी देखा है? 1.76 और 17.6 को भी देखिए। दशमलव बिंदु दाईं अथवा बाईं, किस तरफ़ विस्थापित हुआ है ध्यान दीजिए 10 में 1 के अतिरिक्त एक शून्य है।

$1.76 \times 100 = 176.0$ में, 1.76 एवं 176.0 को देखिये कि किस तरफ और कितने स्थानों से दशमलव बिंदु का विस्थापन हुआ है। दशमलव बिंदु दाईं तरफ़ दो स्थानों से विस्थापित हुआ है। ध्यान दीजिए 100 में 1 के अतिरिक्त दो शून्य है।

क्या आप दूसरे गुणनफलों में भी दशमलव बिंदु का इसी प्रकार का विस्थापन देखते हैं?

इस प्रकार हम कहते हैं कि जब किसी दशमलव संख्या को 10, 100 अथवा 1000 से गुणा किया जाता है तो गुणनफल के अंक वही होते हैं जो अंक दशमलव संख्या में होते हैं परंतु गुणनफल में दशमलव बिंदु दाईं तरफ उतने ही स्थानों से विस्थापित होता है जितने 1 के अतिरिक्त शून्य होते हैं। इन प्रेक्षणों के आधार पर अब हम कह सकते हैं कि:

$$0.07 \times 10 = 0.7,\ 0.07 \times 100 = 7 \text{ और } 0.07 \times 1000 = 70.$$

क्या अब आप बता सकते हैं कि $2.97 \times 10 = ?$ $2.97 \times 100 = ?$ $2.97 \times 1000 = ?$

क्या अब आप रेशमा द्वारा भुगतान किए जाने वाली राशि अर्थात् ₹ 8.50×150, ज्ञात करने में उसकी सहायता कर सकते हैं?

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए:

(i) 0.3×10

(ii) 1.2×100

(iii) 56.3×1000

प्रश्नावली 2.4

1. ज्ञात कीजिए :

(i) 0.2×6 (ii) 8×4.6 (iii) 2.71×5

(iv) 20.1×4 (v) 0.05×7 (vi) 211.02×4

(vii) 2×0.86

2. एक आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी लंबाई 5.7 cm और चौड़ाई 3 cm है।

3. ज्ञात कीजिए :

(i) 1.3×10 (ii) 36.8×10 (iii) 153.7×10

(iv) 168.07×10 (v) 31.1×100 (vi) 156.1×100

(vii) 3.62×100 (viii) 43.07×100 (ix) 0.5×10

(x) 0.08×10 (xi) 0.9×100 (xii) 0.03×1000

4. एक दुपहिया वाहन एक लीटर पैट्रोल में 55.3 km की दूरी तय करता है। 10 लीटर पैट्रोल में वह कितनी दूरी तय करेगा?

5. ज्ञात कीजिए :

(i) 2.5×0.3	(ii) 0.1×51.7	(iii) 0.2×316.8
(iv) 1.3×3.1	(v) 0.5×0.05	(vi) 11.2×0.15
(vii) 1.07×0.02	(viii) 10.05×1.05	
(ix) 101.01×0.01	(x) 100.01×1.1	

2.4 दशमलव संख्याओं की भाग

सविता अपनी कक्षा की सजावट के लिए एक डिजाईन तैयार कर रही थी। उसे 1.9 cm लंबाई वाली कुछ रंगीन कागज़ की पट्टियों की आवश्यकता थी। उसके पास 9.5 cm लंबाई वाली एक रंगीन कागज़ की पट्टी थी। इस पट्टी में से वह अभीष्ट लंबाई के कितने टुकड़े प्राप्त कर सकेगी। उसने सोचा शायद यह $\frac{9.5}{1.9}$ होगा। क्या यह सही है?

9.5 और 1.9 दोनों ही दशमलव संख्याएँ हैं। इसलिए हमें दशमलव संख्याओं की भाग भी जानने की आवश्यकता है।

2.4.1 10, 100 और 1000 से भाग

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए :

(i) $235.4 \div 10$

(ii) $235.4 \div 100$

(iii) $235.4 \div 1000$

आइए अब हम एक दशमलव संख्या की 10, 100 और 1000 से भाग ज्ञात करते हैं।

आइए हम $31.5 \div 10$ ज्ञात करते हैं।

$$31.5 \div 10 = \frac{315}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{315}{100} = 3.15$$

इसी प्रकार $$31.5 \div 100 = \frac{315}{10} \quad \frac{1}{100} = \frac{315}{1000} = 0.315$$

आइए हम यह देखते हैं कि क्या हम संख्याओं को 10, 100 अथवा 1000 से भाग करने का कोई प्रतिरूप ज्ञात कर सकते हैं। यह संख्याओं को 10, 100 अथवा 1000 से, संक्षिप्त विधि से भाग करने में हमारी सहायता कर सकता है।

$31.5 \div 10 = 3.15$	$231.5 \div 10 =$ ___	$1.5 \div 10 =$ ___	$29.36 \div 10 =$ ___
$31.5 \div 100 = 0.315$	$231.5 \div 100 =$ ___	$1.5 \div 100 =$ ___	$29.36 \div 100 =$ ___
$31.5 \div 1000 = 0.0315$	$231.5 \div 1000 =$ ___	$1.5 \div 1000 =$ ___	$29.36 \div 1000 =$ ___

$31.5 \div 10 = 3.15$ को लीजिए। 31.5 और 3.15 में अंक एक जैसे हैं अर्थात् 3, 1, और 5 परंतु भागफल में दशमलव बिंदु विस्थापित हो गया है। किस तरफ़ और कितने स्थानों से? दशमलव बिंदु बाईं तरफ़ एक स्थान से विस्थापित हो गया है। ध्यान दीजिए 10 में 1 के अतिरिक्त एक शून्य है।

अब 31.5 ÷ 100 = 0.315 की चर्चा करते हैं। 31.5 और 0.315 में अंक एक जैसे हैं परंतु भागफल में दशमलव बिंदु के बारे में क्या कह सकते हैं? यह बाईं तरफ दो स्थानों से विस्थापित हो गया है। ध्यान दीजिए 100 में 1 के अतिरिक्त दो शून्य हैं।

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि किसी संख्या को 10, 100 अथवा 1000 से भाग करने पर संख्या एवं भागफल के अंक एक जैसे हैं परंतु भागफल में दशमलव बिंदु बाईं तरफ उतने ही स्थानों से विस्थापित हो जाता है जितने 1 के साथ शून्य होते हैं। इस प्रेक्षण का उपयोग करते हुए अब हम शीघ्रतापूर्वक निम्नलिखित को ज्ञात करते हैं,

$$2.38 \div 10 = 0.238$$
$$2.38 \div 100 = 0.0238$$
$$2.38 \div 1000 = 0.00238$$

2.4.2 पूर्ण संख्या से दशमलव संख्या की भाग

आइए, हम $\frac{6.4}{2}$ ज्ञात करते हैं। याद कीजिए हम इसे 6.4 ÷ 2 के रूप में भी लिखते हैं।

इसलिए, जैसा कि हमने भिन्नों से सीखा है

$$6.4 \div 2 = \frac{64}{10} \div 2$$
$$= \frac{64}{10} \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{64 \times 1}{10 \times 2} = \frac{1 \times 64}{10 \times 2} = \frac{1}{10} \times \frac{64}{2}$$
$$= \frac{1}{10} \times 32 = \frac{32}{10} = 3.2$$

प्रयास कीजिए

(i) 35.7 ÷ 3 = ?
(ii) 25.5 ÷ 3 = ?

अथवा, आइए सर्वप्रथम हम 64 को 2 से भाग करते है। हम 32 प्राप्त करते हैं। 6.4 में दशमलव बिंदु के दाईं तरफ एक अंक है। 32 में दशमलव इस प्रकार रखिए ताकि दशमलव के दाईं तरफ़ केवल एक ही अंक रह पाए। हम फिर से 3.2 प्राप्त करते हैं।

19.5 ÷ 5 ज्ञात करने के लिए पहले 195 ÷ 5 ज्ञात कीजिए। हम 39 प्राप्त करते हैं। 19.5 में दशमलव बिंदु के दाईं तरफ़ एक अंक है। 39 में दशमलव बिंदु को इस प्रकार रखिए ताकि इसके दाईं तरफ़ केवल एक अंक रह पाए। आप 3.9 प्राप्त करेंगे।

प्रयास कीजिए

(i) 43.15 ÷ 5 = ?
(ii) 82.44 ÷ 6 = ?

$$12.96 \div 4 = \frac{1296}{100} \div 4$$

$$= \frac{1296}{100} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{100} \times \frac{1296}{4}$$

$$= \frac{1}{100} \times 324 = 3.24$$

अथवा, 1296 को 4 से भाग दीजिए। आप 324 प्राप्त करते हैं। 12.96 में दशमलव बिंदु के दाईं ओर 2 अंक हैं। 324 में इसी प्रकार दशमलव रखते हुए आप 3.24 प्राप्त करेंगे।

ध्यान दीजिए यहाँ और इससे अगले परिच्छेद में हमने केवल ऐसे विभाजनों की चर्चा की है जिनमें, दशमलव को ध्यान में न रखकर, एक संख्या को दूसरी संख्या से पूरी तरह विभाजित किया जा सकेगा अर्थात् शेषफल के रूप में शून्य प्राप्त होगा। जैसा कि $19.5 \div 5$ में, जब 195 को 5 से विभाजित किया जाता है तो शेषफल शून्य प्राप्त होता है।

यद्यपि ऐसी भी स्थितियाँ हैं जिनमें कोई संख्या किसी दूसरी संख्या से पूरी तरह विभाजित नहीं की जा सकती अर्थात् हमें शेषफल के रूप में शून्य की प्राप्ति नहीं होती है। उदाहरणत: $195 \div 7$ ऐसी स्थितियों के बारे में हम अगली कक्षाओं में चर्चा करेंगे।

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए:

(i) $15.5 \div 5$

(ii) $126.35 \div 7$

उदाहरण 5 4.2, 3.8 और 7.6 का औसत ज्ञात कीजिए।

हल 4.2, 3.8 और 7.6 का औसत

$$= \frac{4.2 + 3.8 + 7.6}{3}$$

$$= \frac{15.6}{3} = 5.2 \text{ होगा।}$$

2.4.3 एक दशमलव संख्या का दूसरी दशमलव संख्या से भाग

आइए हम $\frac{25.5}{0.5}$ अर्थात् $25.5 \div 0.5$ ज्ञात करते हैं।

हम पाते हैं: $25.5 \div 0.5 = \quad = \frac{255}{10} \times \frac{10}{5} = 51$

अत: $25.5 \div 0.5 = 51$

आप क्या देखते हैं? $\frac{25.5}{0.5}$ के लिए हम पाते हैं कि 0.5 में दशमलव के दाईं तरफ़ एक अंक है। इसको 10 से भाग करने पर पूर्ण संख्या में परिवर्तित किया जा सकता है। इसी तरह से 25.5 को भी 10 से भाग करके एक भिन्न में परिवर्तित किया गया है।

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए: (i) $\frac{7.75}{0.25}$ (ii) $\frac{42.8}{0.02}$ (iii) $\frac{5.6}{1.4}$

अथवा हम कहते हैं कि 0.5 को 5 बनाने के लिए दशमलव बिंदु को दाईं तरफ़ एक स्थान से विस्थापित किया गया है।

इसलिए 25.5 में भी दशमलव बिंदु को दाईं तरफ़ एक स्थान से विस्थापित करके 225 में परिवर्तित किया गया।

अत: $22.5 \div 1.5 = \frac{22.5}{1.5} = \frac{225}{15} = 15$

इसी प्रकार $\frac{20.3}{0.7}$ और $\frac{15.2}{0.8}$ ज्ञात कीजिए।

आइए अब हम $20.55 \div 1.5$ ज्ञात करते हैं।

उपर्युक्त चर्चा के अनुसार हम इसे $205.5 \div 15$ के रूप में लिख सकते हैं। इससे हम 13.7 प्राप्त करते हैं।

$\frac{3.96}{0.4}$, $\frac{2.31}{0.3}$ ज्ञात कीजिए।

अब $\frac{33.725}{0.25}$ की चर्चा करते हैं। हम इसे $\frac{3372.5}{25}$ के रूप में लिख सकते हैं (कैसे?) और हम 134.9 के रूप में भागफल प्राप्त करते हैं। आप $\frac{27}{0.03}$ कैसे ज्ञात करेंगे? हम जानते हैं कि 27 को 27.00 के रूप में लिखा जा सकता है।

इसलिए $\frac{27}{0.03} = \frac{27.00}{0.03} = \frac{2700}{3} = ?$

उदाहरण 6 एक सम बहुभुज की प्रत्येक भुजा की लंबाई 2.5 cm है। बहुभुज का परिमाप 12.5 cm है। इस बहुभुज की कितनी भुजाएँ हैं?

हल सम बहुभुज का परिमाप इसकी सभी समान भुजाओं की लंबाई का योग होता है = 12.5 cm

प्रत्येक भुजा की लंबाई = 2.5 cm

अतः भुजाओं की संख्या $= \dfrac{12.5}{2.5} = \dfrac{125}{25} = 5$

बहुभुज की 5 भुजाएँ हैं।

उदाहरण 7 एक कार 2.2 घंटे में 89.1 km की दूरी तय करती है। कार द्वारा 1 घंटे में तय की गई औसत दूरी कितनी है?

हल कार द्वारा तय की गई दूरी = 89.1 km

इस दूरी को तय करने में लिया गया समय = 2.2 घंटे

इसलिए कार द्वारा 1 घंटे में तय की गई दूरी $= \dfrac{89.1}{2.2}$

$$= \frac{891}{22} = 40.5 \text{ km}$$

प्रश्नावली 2.5

1. ज्ञात कीजिए :

(i) $0.4 \div 2$ (ii) $0.35 \div 5$ (iii) $2.48 \div 4$
(iv) $65.4 \div 6$ (v) $651.2 \div 4$ (vi) $14.49 \div 7$
(vii) $3.96 \div 4$ (viii) $0.80 \div 5$

2. ज्ञात कीजिए :

(i) $4.8 \div 10$ (ii) $52.5 \div 10$ (iii) $0.7 \div 10$
(iv) $33.1 \div 10$ (v) $272.23 \div 10$ (vi) $0.56 \div 10$
(vii) $3.97 \div 10$

3. ज्ञात कीजिए :

(i) $2.7 \div 100$ (ii) $0.3 \div 100$ (iii) $0.78 \div 100$
(iv) $432.6 \div 100$ (v) $23.6 \div 100$ (vi) $98.53 \div 100$

4. ज्ञात कीजिए :

(i) $7.9 \div 1000$ (ii) $26.3 \div 1000$
(iii) $38.53 \div 1000$ (iv) $128.9 \div 1000$ (v) $0.5 \div 1000$

5. ज्ञात कीजिए :

(i) $7 \div 3.5$ (ii) $36 \div 0.2$ (iii) $3.25 \div 0.5$
(iv) $30.94 \div 0.7$ (v) $0.5 \div 0.25$ (vi) $7.75 \div 0.25$
(vii) $76.5 \div 0.15$ (viii) $37.8 \div 1.4$ (ix) $2.73 \div 1.3$

6. एक गाड़ी 2.4 लीटर पैट्रोल में 43.2 km की दूरी तय करती है। यह गाड़ी एक लीटर पैट्रोल में कितनी दूरी तय करेगी?

हमने क्या चर्चा की?

1. हमने अध्ययन किया है कि भिन्नों को कैसे गुणा किया जाए। दो भिन्नों को गुणा करने के लिए उनके अंशों एवं हरों को पृथक्-पृथक् गुणा किया जाता है और फिर गुणनफल को

$\dfrac{\text{अंशों का गुणनफल}}{\text{हरों का गुणनफल}}$ के रूप में लिखा जाता है।

उदाहरणार्थ $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$

2. भिन्न, प्रचालक 'का' के रूप में काम करती है।

उदाहरणत: 2 का $\frac{1}{2}$ होता है $\frac{1}{2} \times 2 = 1$

3. (a) दो उचित भिन्नों का गुणनफल, गुणा किए गए प्रत्येक भिन्न से कम होता है।

(b) एक उचित और एक विषम भिन्न का गुणनफल विषम भिन्न से कम होता है और उचित भिन्न से अधिक होता है।

(c) दो विषम भिन्नों का गुणनफल, गुणा किए गए दोनों भिन्नों में से प्रत्येक से बड़ा होता है।

4. एक भिन्न का व्युत्क्रम इसके अंश और हर को परस्पर बदलने से प्राप्त होता है।

5. हमने देखा है कि दो भिन्नों को कैसे भाग दिया जाता है :

(a) एक पूर्ण संख्या को किसी भिन्न से भाग करते समय हम पूर्ण संख्या को भिन्न के व्युत्क्रम से गुणा करते हैं।

उदाहरणत: $2 \div \frac{3}{5} = 2 \times \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$

(b) एक भिन्न को पूर्ण संख्या से भाग करने के लिए हम भिन्न को पूर्ण संख्या के व्युत्क्रम से गुणा करते हैं।

उदाहरणत: $\frac{2}{3} \div 7 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{7} = \frac{2}{21}$

(c) एक भिन्न को दूसरी भिन्न से भाग करने के लिए हम पहली भिन्न को दूसरी भिन्न के व्युत्क्रम से गुणा करते हैं। इसलिए $\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$.

6. हमने यह भी सीखा है कि दो दशमलव संख्याएँ कैसे गुणा की जाती हैं। दो दशमलव संख्याओं को गुणा करने के लिए सर्वप्रथम हम उन्हें पूर्ण संख्याओं के रूप में गुणा करते हैं। दोनों दशमलव संख्याओं में दशमलव बिंदु के दाईं तरफ़ अंकों की संख्या को गिनते हैं। गिनी हुई अंकों की संख्या का योग ज्ञात करते हैं। सबसे दाएँ स्थान से अंकों को गिनते हुए गुणनफल में दशमलव बिंदु रखा जाता है। यह गिनती पूर्व में प्राप्त योग के समान होनी चाहिए।

उदाहरणत: $0.5 \times 0.7 = 0.35$

7. एक दशमलव संख्या को 10, 100 अथवा 1000 से गुणा करने के लिए हम उस संख्या में दशमलव बिंदु को दाईं तरफ उतने ही स्थान से विस्थापित करते हैं जितने 1 के अतिरिक्त शून्य होते हैं।

अत: $0.53 \times 10 = 5.3$, $0.53 \times 100 = 53$, $0.53 \times 1000 = 530$

8. हमने देखा है कि दशमलव संख्याएँ कैसे विभाजित की जाती है।

(a) एक दशमलव संख्या को पूर्ण संख्या से भाग करने के लिए सर्वप्रथम हम उन्हें पूर्ण संख्याओं के रूप में भाग देते हैं। तब भागफल में दशमलव बिंदु को वैसे ही रखा जाता है जैसे दशमलव संख्या में।

उदाहरणत: $8.4 \div 4 = 2.1$

ध्यान दीजिए हम यहाँ पर केवल ऐसे विभाजनों की बात कर रहे हैं जिनमें शेषफल शून्य है।

(b) एक दशमलव संख्या को 10, 100 अथवा 1000 से भाग करने के लिए दशमलव संख्या में दशमलव बिंदु को बाईं तरफ़ उतने ही स्थान से विस्थापित करते हैं जितने 1 के अतिरिक्त शून्य होते हैं। इस प्रकार भागफल की प्राप्ति होती है।

इसलिए, $23.9 \div 10 = 2.39$, $23.9 \div 100 = 0.239$, $23.9 \div 1000 = 0.0239$

(c) दो दशमलव संख्याओं को भाग करते समय सर्वप्रथम हम दोनों संख्याओं में दशमलव बिंदु को दाईं तरफ़ समान स्थानों से विस्थापित करते हैं और तब भाग देते हैं। अत: $2.4 \div 0.2 = 24 \div 2 = 12$.

आँकड़ों का प्रबंधन

0757CH03

अध्याय 3

3.1 प्रतिनिधि मान

आप 'औसत' (average) शब्द से अवश्य ही परिचित होंगे तथा अपने दैनिक जीवन में औसत शब्द से संबंधित निम्नलिखित प्रकार के कथन अवश्य ही सुने या पढ़े होंगे:

- ईशा अपनी पढ़ाई पर प्रतिदिन औसतन लगभग 5 घंटे का समय व्यतीत करती है।
- इस समय वर्ष का औसत तापमान 40 डिग्री (सेल्सियस) है।
- मेरी कक्षा के विद्यार्थियों की औसत आयु 12 वर्ष है।
- एक स्कूल की वार्षिक परीक्षा के समय विद्यार्थियों की औसत उपस्थिति 98 प्रतिशत थी।

इसी प्रकार के अनेक कथन हो सकते हैं। ऊपर दिए हुए कथनों के बारे में सोचिए।

क्या आप सोचते हैं कि पहले कथन में बताया गया बच्चा प्रतिदिन ठीक 5 घंटे पढ़ता है? अथवा, क्या उस विशेष समय पर, दिए हुए स्थान का तापमान सदैव 40 डिग्री रहता है?

अथवा, क्या उस कक्षा के प्रत्येक विद्यार्थी की आयु 12 वर्ष है? स्पष्टत: इन प्रश्नों का उत्तर है 'नहीं' ।

तब, ये कथन हमें क्या बताते हैं?

औसत से हम समझते हैं कि ईशा प्राय: एक दिन में 5 घंटे पढ़ती है। कुछ दिन वह इससे कम घंटे पढ़ती है और कुछ दिन इससे अधिक घंटे पढ़ती है।

इसी प्रकार, 40 डिग्री सेल्सियस के औसत तापमान का अर्थ है कि वर्ष के इस समय पर तापमान प्राय: 40 डिग्री सेल्सियस रहता है। कभी वह 40° C से कम रहता है और कभी 40° C से अधिक भी रहता है।

इस प्रकार, हम यह अनुभव करते हैं कि औसत एक ऐसी संख्या है जो प्रेक्षणों (observations) या आँकड़ों के एक समूह की केंद्रीय प्रवृत्ति (central tendency) को निरूपित करती (या दर्शाती) है। क्योंकि औसत सबसे अधिक तथा सबसे कम मूल्य (value) के आँकड़ों के बीच में होता है।

अध्याय 3

आँकड़ों का प्रबंधन

0757CH03

3.1 प्रतिनिधि मान

आप 'औसत' (average) शब्द से अवश्य ही परिचित होंगे तथा अपने दैनिक जीवन में औसत शब्द से संबंधित निम्नलिखित प्रकार के कथन अवश्य ही सुने या पढ़े होंगेः

- ईशा अपनी पढ़ाई पर प्रतिदिन औसतन लगभग 5 घंटे का समय व्यतीत करती है।
- इस समय वर्ष का औसत तापमान 40 डिग्री (सेल्सियस) है।
- मेरी कक्षा के विद्यार्थियों की औसत आयु 12 वर्ष है।
- एक स्कूल की वार्षिक परीक्षा के समय विद्यार्थियों की औसत उपस्थिति 98 प्रतिशत थी।

इसी प्रकार के अनेक कथन हो सकते हैं। ऊपर दिए हुए कथनों के बारे में सोचिए।

क्या आप सोचते हैं कि पहले कथन में बताया गया बच्चा प्रतिदिन ठीक 5 घंटे पढ़ता है?

अथवा, क्या उस विशेष समय पर, दिए हुए स्थान का तापमान सदैव 40 डिग्री रहता है?

अथवा, क्या उस कक्षा के प्रत्येक विद्यार्थी की आयु 12 वर्ष है? स्पष्टतः इन प्रश्नों का उत्तर है 'नहीं' ।

तब, ये कथन हमें क्या बताते हैं?

औसत से हम समझते हैं कि ईशा प्रायः एक दिन में 5 घंटे पढ़ती है। कुछ दिन वह इससे कम घंटे पढ़ती है और कुछ दिन इससे अधिक घंटे पढ़ती है।

इसी प्रकार, 40 डिग्री सेल्सियस के औसत तापमान का अर्थ है कि वर्ष के इस समय पर तापमान प्रायः 40 डिग्री सेल्सियस रहता है। कभी वह $40°$ C से कम रहता है और कभी $40°$ C से अधिक भी रहता है।

इस प्रकार, हम यह अनुभव करते हैं कि औसत एक ऐसी संख्या है जो प्रेक्षणों (observations) या आँकड़ों के एक समूह की केंद्रीय प्रवृत्ति (central tendency) को निरूपित करती (या दर्शाती) है। क्योंकि औसत सबसे अधिक तथा सबसे कम मूल्य (value) के आँकड़ों के बीच में होता है।

इसलिए हम कहते हैं कि औसत, आँकड़ों के एक समूह की केंद्रीय प्रवृत्ति का मापक (measure) है। विभिन्न प्रकार के आँकड़ों की व्याख्या करने के लिए, विभिन्न प्रकार के प्रतिनिधि (representative) या केंद्रीय मानों (central values) की आवश्यकता होती है। इनमें से एक प्रतिनिधि मान **अंकगणितीय माध्य** या **समांतर माध्य** (**arthmetic mean**) है।

3.2 अंकगणितीय माध्य

आँकड़ों के एक समूह के लिए अधिकांशतः प्रयोग किए जाना वाला प्रतिनिधि मान **अंकगणितीय माध्य** है, संक्षेप में इसे **माध्य** (mean) भी कहते हैं। इसे अच्छी प्रकार से समझने के लिए, आइए निम्नलिखित उदाहरण को देखें :

दो बर्तनों में क्रमशः 20 लीटर और 60 लीटर दूध है। यदि दोनों बर्तनों में बराबर-बराबर दूध रखा जाए, तो प्रत्येक बर्तन में कितना दूध होगा? जब हम इस प्रकार का प्रश्न पूछते हैं, तब हम अंकगणितीय माध्य ज्ञात करने के लिए कहते हैं।

उपरोक्त स्थिति में, औसत या अंकगणितीय माध्य होगा :

$$\frac{\text{दूध की कुल मात्रा}}{\text{बर्तनों की संख्या}} = \frac{20+60}{2} \text{ लीटर} = 40 \text{ लीटर}$$

इस प्रकार, प्रत्येक बर्तन में 40 लीटर दूध होगा।

औसत या अंकगणितीय माध्य (A.M.) या केवल माध्य को निम्नलिखित रूप से परिभाषित किया जाता है:

$$\text{माध्य} = \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$$

निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार कीजिए:

उदाहरण 1 आशिष तीन क्रमागत दिनों में क्रमशः 4 घंटे, 5 घंटे और 3 घंटे पढ़ता है। उसके प्रतिदिन पढ़ने का औसत समय क्या है?

हल आशिष के पढ़ने का औसत समय होगा :

$$\frac{\text{पढ़ाई में लगाया कुल समय}}{\text{दिनों की संख्या जिनमें पढ़ाई की}} = \frac{4+5+3}{3} \text{ घंटे} = 4 \text{ घंटे प्रतिदिन}$$

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि आशिष प्रतिदिन 4 घंटे के औसत से पढ़ाई करता है।

उदाहरण 2 एक बल्लेबाज ने 6 पारियों (innings) में निम्नलिखित संख्याओं में रन बनाए : 36, 35, 50, 46, 60, 55

एक पारी में उसके द्वारा बनाए गए रनों का माध्य ज्ञात कीजिए।

हल कुल रन = 36 + 35 + 50 + 46 + 60 + 55 = 282

माध्य ज्ञात करने के लिए, हम सभी प्रेक्षणों का योग ज्ञात करके उसे प्रेक्षणों की कुल संख्या से भाग देते हैं। अतः, इस स्थिति में

$$\text{माध्य} = \frac{282}{6} = 47.$$

इस प्रकार, एक पारी में उसके द्वारा बनाए गए रनों का माध्य 47 है।

अंकगणितीय माध्य कहाँ स्थित है?

प्रयास कीजिए

आप पढ़ाई में व्यतीत किए गए अपने समय (घंटों में) का पूरे सप्ताह का औसत किस प्रकार ज्ञात करेंगे?

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

उपरोक्त उदाहरणों में दिए गए आँकड़ों पर विचार कीजिए तथा निम्नलिखित विषय में सोचिएः

- क्या माध्य प्रत्येक प्रेक्षण से बड़ा है?
- क्या यह प्रत्येक प्रेक्षण से छोटा है?

अपने मित्रों के साथ चर्चा कीजिए। इसी प्रकार का एक और उदाहरण बनाइए और इन्हीं प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

आप पाएँगे कि माध्य सबसे बड़े और सबसे छोटे प्रेक्षणों के बीच में स्थित होता है। विशिष्ट रूप में, दो संख्याओं का माध्य सदैव उनके बीच में स्थित होता है।

उदाहरणार्थ, 5 और 11 का माध्य $\frac{5+11}{2} = 8$ है, जो 5 और 11 के बीच में स्थित है।

क्या आप इस अवधारणा का प्रयोग करके, यह दर्शा सकते हैं कि दो भिन्नात्मक संख्याओं के बीच में जितनी चाहें उतनी भिन्नात्मक संख्याएँ ज्ञात की जा सकती हैं? उदाहरणार्थ $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{4}$ के बीच में आपको इनका औसत मिलेगा $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2} = \frac{3}{8}$ और फिर $\frac{1}{2}$ और $\frac{3}{8}$ के बीच में इनका औसत होगा $\frac{7}{16}$ इत्यादि।

प्रयास कीजिए

1. एक सप्ताह कि अपनी नींद में व्यतीत किए गए समय (घंटों में) का माध्य ज्ञात कीजिए।

2. $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ के बीच कम से कम पाँच संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

3.2.1 प्रसार या परिसर

सबसे बड़े और सबसे छोटे प्रेक्षणों के अंतर से, हमें प्रेक्षणों के प्रसार का एक अनुमान लग जाता है। इसे सबसे बड़े प्रेक्षण में से सबसे छोटे प्रेक्षण को घटा कर ज्ञात किया जा सकता है। हम इस परिणाम को आँकड़ों या प्रेक्षणों का **प्रसार** या **परिसर** (**range**) कहते हैं।

निम्नलिखित उदाहरण देखिए :

उदाहरण 3 एक स्कूल के 10 अध्यापकों की वर्षों में आयु इस प्रकार है :

32, 41, 28, 54, 35, 26, 23, 33, 38, 40

(i) सबसे बड़ी उम्र वाले अध्यापक की आयु क्या है? तथा सबसे छोटी उम्र वाले अध्यापक की आयु क्या है?

(ii) अध्यापकों की आयु का परिसर क्या है?

(iii) इन अध्यापकों की माध्य आयु क्या है?

हल

(i) आयु को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

23, 26, 28, 32, 33, 35, 38, 40, 41, 54

हमें ज्ञात होता है कि सबसे बड़ी उम्र वाले अध्यापक की आयु 54 वर्ष है तथा सबसे छोटी उम्र वाले अध्यापक की आयु 23 वर्ष है।

(ii) अध्यापकों की आयु का परिसर = (54 – 23) वर्ष = 31 वर्ष है।

(iii) अध्यापकों की माध्य आयु

$$= \frac{23+26+28+32+33+35+38+40+41+54}{10} \text{ वर्ष}$$

$$= \frac{350}{10} \text{ वर्ष} = 35 \text{ वर्ष}$$

प्रश्नावली 3.1

1. अपनी कक्षा के किन्हीं दस (10) विद्यार्थियों की ऊँचाइयों का परिसर ज्ञात कीजिए।

2. कक्षा के एक मूल्यांकन में प्राप्त किए गए निम्नलिखित अंकों को एक सारणीबद्ध रूप में संगठित कीजिए :

4, 6, 7, 5, 3, 5, 4, 5, 2, 6, 2, 5, 1, 9, 6, 5, 8, 4, 6, 7

(i) सबसे बड़ा अंक कौन-सा है? (ii) सबसे छोटा अंक कौन-सा है?

(iii) इन आँकड़ों का परिसर क्या है? (iv) अंकगणितीय माध्य ज्ञात कीजिए।

3. प्रथम 5 पूर्ण संख्याओं का माध्य ज्ञात कीजिए।

4. एक क्रिकेट खिलाड़ी ने 8 पारियों में निम्नलिखित रन बनाए :

58, 76, 40, 35, 46, 50, 0, 100.

उसका माध्य स्कोर (score) या रन ज्ञात कीजिए।

5. निम्नलिखित सारणी प्रत्येक खिलाड़ी द्वारा चार खेलों में अर्जित किए गए अंकों को दर्शाती है:

खिलाड़ी	खेल 1	खेल 2	खेल 3	खेल 4
A	14	16	10	10
B	0	8	6	4
C	8	11	खेला नहीं	13

अब निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) प्रत्येक खेल में A द्वारा अर्जित औसत अंक ज्ञात करने के लिए, माध्य ज्ञात कीजिए।

(ii) प्रत्येक खेल में C द्वारा अर्जित माध्य अंक ज्ञात करने के लिए, आप कुल अंकों को 3 से भाग देंगे या 4 से? क्यों?

(iii) B ने सभी चार खेलों में भाग लिया है। आप उसके अंकों का माध्य किस प्रकार ज्ञात करेंगे?

(iv) किसका प्रदर्शन सबसे अच्छा है?

6. विज्ञान की एक परीक्षा में, विद्यार्थियों के एक समूह द्वारा (100 में से) प्राप्त किए गए अंक 85, 76, 90, 85, 39, 48, 56, 95, 81 और 75 हैं। ज्ञात कीजिए :

(i) विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त सबसे अधिक अंक और सबसे कम अंक

(ii) प्राप्त अंकों का परिसर

(iii) समूह द्वारा प्राप्त माध्य अंक

7. छह क्रमागत वर्षों में एक स्कूल में विद्यार्थियों की संख्या निम्नलिखित थी :
1555, 1670, 1750, 2013, 2540, 2820
इस समय काल में स्कूल के विद्यार्थियों की माध्य संख्या ज्ञात कीजिए।

8. एक नगर में किसी विशेष सप्ताह के 7 दिनों में हुई वर्षा (mm में) निम्नलिखित रूप से रिकॉर्ड की गई:

दिन	सोमवार	मंगलवार	बुधवार	वृहस्पतिवार	शुक्रवार	शनिवार	रविवार
वर्षा (mm)	0.0	12.2	2.1	0.0	20.5	5.5	1.0

(i) उपरोक्त आँकड़ों से वर्षा का परिसर ज्ञात कीजिए।

(ii) इस सप्ताह की माध्य वर्षा ज्ञात कीजिए।

(iii) कितने दिन वर्षा, माध्य वर्षा से कम रही?

9. 10 लड़कियों की ऊँचाइयाँ cm में मापी गईं और निम्नलिखित परिणाम प्राप्त हुए:
135, 150, 139, 128, 151, 132, 146, 149, 143, 141.

(i) सबसे लंबी लड़की की लंबाई क्या है?

(ii) सबसे छोटी लड़की की लंबाई क्या है?

(iii) इन आँकड़ों का परिसर क्या है?

(iv) लड़कियों की माध्य ऊँचाई (लंबाई) क्या है?

(v) कितनी लड़कियों की लंबाई, माध्य लंबाई से अधिक है?

3.3 बहुलक

जैसा कि हम पहले बता चुके हैं केवल माध्य ही केंद्रीय प्रवृत्ति का माप या प्रतिनिधि मान नहीं है। विभिन्न प्रकार की आवश्यकताओं के अनुसार अन्य प्रकार कि केंद्रीय प्रवृत्ति के मापकों का प्रयोग किया जाता है।

निम्नलिखित उदाहरण को देखिए :

कमीज़ों के विभिन्न मापों (साइज़ों) की साप्ताहिक माँग को ज्ञात करने के लिए, एक दुकानदार 90 cm, 95 cm, 100 cm, 105 cm और 110 cm मापों की कमीज़ों की बिक्री का रिकॉर्ड (record) रखता है। एक सप्ताह का रिकॉर्ड इस प्रकार है :

माप (cm में)	90	95	100	105	110	योग
बेची गई कमीज़ों की संख्या	8	22	32	37	6	**105**

यदि वह बेची गई कमीज़ों की संख्या का माध्य ज्ञात करे, तो क्या आप सोचते हैं कि वह यह निर्णय ले पाएगा कि किस माप की कमीज़ें स्टॉक (stock) में रखी जाएँ?

$$\text{बेची गई कमीज़ों का माध्य} = \frac{\text{बेची गई कमीज़ों की कुल संख्या}}{\text{कमीज़ों के विभिन्न मापों के प्रकार}} = \frac{105}{5} = 21$$

क्या वह प्रत्येक माप की 21 कमीज़ें स्टॉक में रखे? यदि वह ऐसा करता है, तो क्या वह अपने ग्राहकों की आवश्यकताओं को पूरा कर पाएगा?

उपरोक्त रिकॉर्ड को देखकर, दुकानदार 95 cm, 100 cm और 105 cm मापों की कमीज़ों को मँगवाने का निर्णय लेता है। वह अन्य मापों की कमीज़ों को मँगवाने का निर्णय, उनके कम खरीददारों को देखते हुए, आगे के लिए टाल देता है।

एक अन्य उदाहरण देखिए :

रेडीमेड (readymade) कपड़ों का एक दुकानदार कहता है, 'मेरे द्वारा सबसे अधिक माप की बेची गई कमीज़ का माप 90 cm है।'

ध्यान दीजिए कि यहाँ भी दुकानदार की रुचि विभिन्न मापों की बेची गई कमीज़ों की संख्याओं में ही है। वह कमीज़ के उस माप को देख रहा है, जो सबसे अधिक बिकती है। यह आँकड़ों का एक अन्य **प्रतिनिधि मान** है। सबसे अधिक बिक्री 105 cm माप की कमीज़ों की बिक्री है। यह प्रतिनिधि मान (105) आँकड़ों का **बहुलक (mode)** कहलाता है।

दिए हुए प्रेक्षणों के एक समूह में, सबसे अधिक बार आने वाला प्रेक्षण इस समूह का बहुलक कहलाता है।

उदाहरण 4 निम्नलिखित संख्याओं का बहुलक ज्ञात कीजिए:

1, 1, 2, 4, 3, 2, 1, 2, 2, 4

हल समान मान वाली संख्याओं को एक साथ व्यवस्थित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4

इन आँकड़ों का बहुलक 2 है, क्योंकि यह अन्य प्रेक्षणों की तुलना में अधिक बार आता है।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित के बहुलक ज्ञात कीजिए:

(i) 2, 6, 5, 3, 0, 3, 4, 3, 2, 4, 5, 2, 4,

(ii) 2, 14, 16, 12, 14, 14, 16, 14, 10, 14, 18, 14

3.3.1 बड़े आँकड़ों का बहुलक

यदि प्रेक्षणों की संख्या बड़ी हो, तो उनको समान मान वाले प्रेक्षणों के रूप में व्यवस्थित करना और फिर उनको गिनना इतना सरल नहीं होता है। ऐसी स्थितियों में, हम आँकड़ों को सारणीबद्ध करते हैं, जैसा कि आप पिछली कक्षा में कर चुके हैं, आँकड़ों की सारणी बनाने का कार्य मिलान चिह्नों (tally marks) से प्रारंभ करते हुए, प्रेक्षणों की बारंबारताएँ (frequencies) बना कर पूरा किया जा सकता है।

निम्न उदाहरणों को देखिए :

उदाहरण 5 टीमों के एक समूह में खेले गए फुटबॉल के मैचों में, जीतने के अंतर गोलों में (in goals) निम्नलिखित हैं :

1, 3, 2, 5, 1, 4, 6, 2, 5, 2, 2, 2, 4, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 3, 2,
6, 4, 3, 2, 1, 1, 4, 2, 1, 5, 3, 3, 2, 3, 2, 4, 2, 1, 2

इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल आइए इन आँकड़ों को एक सारणी के रूप में रखें :

जीतने का अंतर	मिलान चिह्न	मैचों की संख्या
1	~~||||~~ ||||	9
2	~~||||~~ ~~||||~~ ||||	14
3	~~||||~~ ||	7
4	~~||||~~	5
5	|||	3
6	||	2
	योग	**40**

इस सारणी को देखकर, हम तुरंत यह कह सकते हैं कि '2' बहुलक है, क्योंकि 2 सबसे अधिक बार आया है। इस प्रकार, अधिकांश मैच 2 गोलों के अंतर से जीते गए हैं।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

क्या संख्याओं के एक समूह में दो बहुलक हो सकते हैं?

उदाहरण 6 निम्नलिखित संख्याओं का बहुलक ज्ञात कीजिए: 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 8

हल यहाँ 2 और 5 दोनों ही तीन बार आए हैं। अत:, ये दोनों ही आँकड़ों के बहुलक हैं।

इन्हें कीजिए

1. अपनी कक्षा के साथियों की वर्षों में आयु रिकॉर्ड कीजिए और फिर उनका बहुलक ज्ञात कीजिए।
2. अपनी कक्षा के साथियों की cm में लंबाइयाँ रिकॉर्ड कीजिए और उनका बहुलक ज्ञात कीजिए।

प्रयास कीजिए

1. निम्नलिखित आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए:
   12, 14, 12, 16, 15, 13, 14, 18, 19, 12, 14, 15, 16, 15, 16, 16, 15,
   17, 13, 16, 16, 15, 15, 13, 15, 17, 15, 14, 15, 13, 15, 14
2. 25 बच्चों की ऊँचाइयाँ (cm में) नीचे दी गई हैं :
   168, 165, 163, 160, 163, 161, 162, 164, 163, 162, 164, 163, 160, 163, 160, 165, 163, 162, 163, 164, 163, 160, 165, 163, 162
   उनकी लंबाइयों का बहुलक क्या है? यहाँ बहुलक से हम क्या समझते हैं?

जहाँ माध्य हमें आँकड़ों के सभी प्रेक्षणें का औसत प्रदान करता है, वहीं बहुलक आँकड़ों में सबसे अधिक बार आने वाले प्रेक्षण को दर्शाता है।

आइए निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार करें :

(a) आपको एक दावत में बुलाए गए 25 व्यक्तियों के लिए आवश्यक चपातियों की संख्या के बारे में निर्णय लेना है।

(b) कमीज़ें बेचने वाले एक दुकानदार को अपने स्टॉक की आपूर्ति करनी है।

(c) हमें अपने घर के लिए आवश्यक दरवाज़े की ऊँचाई ज्ञात करनी है।

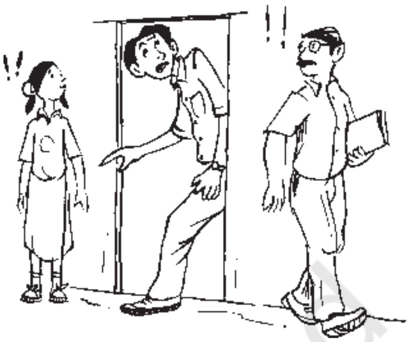
(d) एक पिकनिक (picnic) पर जाते समय, अगर प्रत्येक व्यक्ति के लिए केवल एक ही फल खरीदा जाना है, तब, हमें कौन-सा फल मिलेगा?

इन स्थितियों में हम किसमें बहुलक का एक अच्छे आकलन के रूप में प्रयोग कर सकते हैं?

पहले कथन पर विचार कीजिए। मान लीजिए प्रत्येक व्यक्ति के लिए आवश्यक चपातियों की संख्या इस प्रकार है : 2, 3, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 2, 4, 2, 2, 3, 2, 4, 4, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 5

इन आँकड़ों का बहुलक 2 चपाती है। यदि हम बहुलक को आँकड़ों के प्रतिनिधि मान के रूप में प्रयोग करें, तो हमें प्रति व्यक्ति 2 चपातियों की दर से 25 व्यक्तियों के लिए केवल 50

चपातियों की आवश्यकता होगी। परंतु निश्चय ही यह चपातियाँ सभी व्यक्तियों को अपर्याप्त होंगी। इस स्थिति में क्या **माध्य** एक उपयुक्त प्रतिनिधि मान होगा?



तीसरे कथन के लिए, दरवाज़े की ऊँचाई, उन व्यक्तियों की ऊँचाई से संबंधित है जो उस दरवाज़े का प्रयोग करेंगे। मान लीजिए कि घर में 5 बच्चे और 4 वयस्क हैं जो उस दरवाज़े का प्रयोग करते हैं तथा 5 बच्चों में से प्रत्येक की ऊँचाई 135 cm के आसपास है। ऊँचाइयों का बहुलक 135 cm है। क्या हमें एक ऐसा दरवाज़ा लेना चाहिए जिसकी ऊँचाई 144 cm है? क्या सभी वयस्क इस दरवाज़े में से निकल पाएँगे? यह स्पष्ट है कि इन आँकड़ों के लिए भी बहुलक एक उपयुक्त प्रतिनिधि मान नहीं है। क्या यहाँ **माध्य** एक उपयुक्त प्रतिनिधि मान होगा?

क्यों नहीं? दरवाज़े की ऊँचाई के बारे में निर्णय लेने के लिए, ऊँचाई के किस प्रतिनिधि मान का प्रयोग किया जाए?

इसी प्रकार, शेष कथनों का विश्लेषण कीजिए तथा इन स्थितियों के लिए उपयुक्त प्रतिनिधि मान ज्ञात कीजिए।

प्रयास कीजिए

अपने मित्रों से चर्चा कीजिए और

(a) दो स्थितियाँ दीजिए, जहाँ प्रतिनिधि मान के रूप में माध्य का प्रयोग उपयुक्त होगा।

(b) दो स्थितियाँ दीजिए, जहाँ प्रतिनिधि मान के रूप में बहुलक का प्रयोग उपयुक्त होगा।

3.4 माध्यक

हम देख चुके हैं कि कुछ स्थितियों में अंकगणितीय माध्य एक उपयुक्त केंद्रीय प्रवृत्ति का मापक है तथा कुछ स्थितियों में बहुलक एक उपयुक्त केंद्रीय प्रवृत्ति का मापक है।

आइए अब एक अन्य उदाहरण देखें। 17 विद्यार्थियों के एक समूह पर विचार कीजिए, जिनकी ऊँचाई cm में निम्नलिखित हैं :

106, 110, 123, 125, 117, 120, 112, 115, 110, 120, 115, 102, 115, 115, 109, 115, 101.

खेल की अध्यापिका कक्षा को ऐसे दो समूहों में इस तरह विभाजित करना चाहती है कि प्रत्येक समूह में विद्यार्थियों की संख्या बराबर हो तथा एक समूह में विद्यार्थियों की ऊँचाइयाँ एक विशेष ऊँचाई से कम हों और दूसरे समूह में विद्यार्थियों की ऊँचाइयाँ उस विशेष ऊँचाई से अधिक हों। वह ऐसा किस प्रकार करेगी?

आइए उसके पास जो विभिन्न विकल्प हैं, उन्हें देखें :

(i) वह माध्य ज्ञात कर सकती है। यह माध्य है :

$$\frac{106+110+123+125+117+120+112+115+110+120+115+102+115+115+109+115+101}{17}$$

$$=\frac{1930}{17}=113.5$$

अतः, अध्यापिका कक्षा के विद्यार्थियों को यदि ऐसे दो समूहों में विभाजित करती है, जिनमें से एक समूह में माध्य ऊँचाई से कम ऊँचाई वाले विद्यार्थी हैं और दूसरे समूह में माध्य ऊँचाई से अधिक ऊँचाई वाले विद्यार्थी हैं। तब, इन समूहों में विद्यार्थियों की संख्याएँ बराबर नहीं रहती हैं क्योंकि एक समूह में 7 सदस्य होंगे तथा दूसरे समूह में 10 सदस्य होंगे।

(ii) उसके पास दूसरा विकल्प है कि वह बहुलक ज्ञात करे। सबसे अधिक बारंबारताओं वाला प्रेक्षण 115 cm है और इसे बहुलक लिया जाएगा।

बहुलक से नीचे वाले 7 विद्यार्थी हैं तथा 10 विद्यार्थी बहुलक के बराबर या उससे ऊपर हैं। अतः, हम कक्षा के विद्यार्थियों को दो बराबर समूहों में विभाजित नहीं कर सकते।

इसलिए, आइए अब हम एक अन्य वैकल्पिक प्रतिनिधि मान या केंद्रीय प्रवृत्ति के मापक के बारे में सोचें। ऐसा करने के लिए, हम पुनः दी हुई ऊँचाइयों (cm में) को देखते हैं और इन्हें आरोही क्रम में व्यवस्थित करते हैं। हम निम्नलिखित प्रेक्षण प्राप्त करते हैं :

101, 102, 106, 109, 110, 110, 112, 115, 115, 115, 115, 115, 117, 120, 120, 123, 125

इन आँकड़ों में मध्य मान (middle value) 115 है, क्योंकि यह विद्यार्थियों को दो बराबर समूहों में विभाजित करता है जिनमें से प्रत्येक में 8 विद्यार्थी हैं। यह मान आँकड़ों का **माध्यक (median)** कहलाता है। माध्यक उस मान को बताता है, जो आँकड़ों के मध्य में स्थित होता है (उनको आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर) तथा आधे प्रेक्षण इससे अधिक मान वाले होते हैं और आधे प्रेक्षण इससे कम मान वाले होते हैं। खेल की अध्यापिका इस बीच वाले विद्यार्थी को इस खेल में निर्णायक (refree) बना सकती है।

यहाँ हम केवल उन स्थितियों को ही लेंगे, जहाँ प्रेक्षणों की संख्या विषम है।

प्रयास कीजिए

आपके एक मित्र ने दिए हुए आँकड़ों के माध्यक और बहुलक ज्ञात किए। उस मित्र द्वारा की गई त्रुटि, यदि कोई हो तो, बताइए और सही कीजिए:

35, 32, 35, 42, 38, 32, 34

माध्यक = 42, बहुलक = 32

इस प्रकार, दिए गए आँकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने के बाद उनका बीचों-बीच (मध्य) वाला मान उनका **माध्यक** होता है।

ध्यान दीजिए कि सामान्यतः, हमें माध्यक और बहुलक के लिए एक ही मान नहीं मिलेगा।

आइए कुछ उदाहरणों को देखें।

उदाहरण 7 निम्नलिखित आँकड़ों का माध्यक ज्ञात कीजिए :

24, 36, 46, 17, 18, 25, 35

हल आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

17, 18, 24, 25, 35, 36, 46

मध्य (बीच) वाला प्रेक्षण माध्यक होता है। अतः, माध्यक 25 है।

प्रश्नावली 3.2

1. गणित की एक परीक्षा में, 15 विद्यार्थियों द्वारा (25 में से) प्राप्त किए गए अंक निम्नलिखित हैं:

19, 25, 23, 20, 9, 20, 15, 10, 5, 16, 25, 20, 24, 12, 20

इन आँकड़ों के बहुलक और माध्यक ज्ञात कीजिए। क्या ये समान हैं?

2. एक क्रिकेट मैच में खिलाड़ियों द्वारा बनाए गए रन इस प्रकार हैं :

6, 15, 120, 50, 100, 80, 10, 15, 8, 10, 15

इन आँकड़ों के माध्य, बहुलक और माध्यक ज्ञात कीजिए। क्या ये तीनों समान हैं?

3. एक कक्षा के 15 विद्यार्थियों के भार (kg में) इस प्रकार हैं :

38, 42, 35, 37, 45, 50, 32, 43, 43, 40, 36, 38, 43, 38, 47

(i) इन आँकड़ों के बहुलक और माध्यक ज्ञात कीजिए।

(ii) क्या इनके एक से अधिक बहुलक हैं?

4. निम्नलिखित आँकड़ों के बहुलक और माध्यक ज्ञात कीजिए :

13, 16, 12, 14, 19, 12, 14, 13, 14

5. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है अथवा असत्य :

(i) बहुलक आँकड़ों में से सदैव एक संख्या होता है।

(ii) माध्य दिए हुए आँकड़ों में से एक संख्या हो सकता है।

(iii) माध्यक आँकड़ों में से सदैव एक संख्या होता है।

(iv) आँकड़ों 6, 4, 3, 8, 9, 12, 13, 9 का माध्य 9 है।

3.5 भिन्न उद्देश्य के साथ दंड आलेखों का प्रयोग

पिछले वर्ष हम देख चुके हैं कि किस प्रकार एकत्रित (संग्रहित) की गई सूचनाओं को एक बारंबारता बंटन सारणी (frequency distribution table) के रूप में पहले व्यवस्थित करके और फिर इन सूचनाओं को चित्रीय रूप में चित्रालेखों (pictographs) या दंड आलेखों (bargraphs) के रूप में निरूपित किया जाता है। आप इन दंड आलेखों को देख सकते हैं और इनके बारे में निष्कर्ष निकाल सकते हैं। आप इन दंड आलेखों के आधार पर सूचनाएँ भी प्राप्त कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, आप कह सकते हैं कि सबसे लंबा दंड (bar) ही बहुलक है, यदि दंड बारंबारता निरूपित करता है।

3.5.1 एक स्केल (या मापदंड) का चुनना

हम जानते हैं कि दंड आलेख समान चौड़ाई के दंडों द्वारा संख्याओं (आँकड़ों) का निरूपण है तथा दंडों की लंबाइयाँ बारंबारताओं और चुने गए स्केल (scale) पर निर्भर करती हैं। उदाहरणार्थ, एक दंड आलेख में, जहाँ संख्याओं को इकाइयों में दर्शाना है, आलेख एक प्रेक्षण के लिए एक इकाई लंबाई निरूपित करता है और यदि उसे संख्याओं को दहाई या सैकड़ों में दर्शाना है, तो एक इकाई लंबाई 10 या 100 प्रेक्षणों को निरूपित कर सकती है। निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार कीजिए:

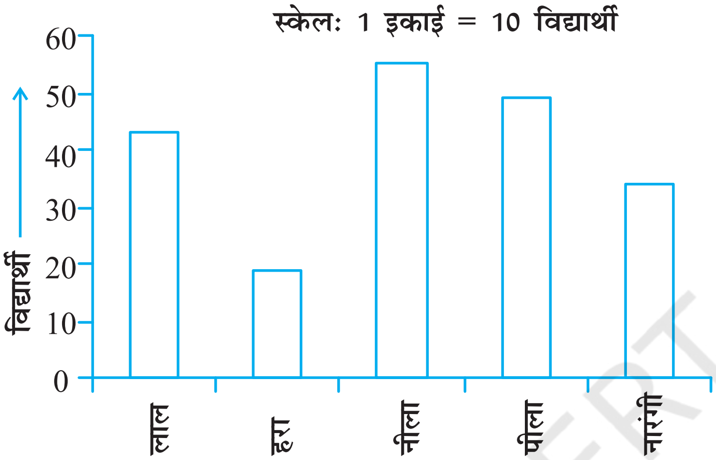
उदाहरण 8 छठी और सातवीं कक्षाओं के 200 विद्यार्थियों से उनके मनपसंद रंग का नाम बताने के लिए कहा गया, ताकि यह निर्णय लिया जा सके कि उनके स्कूल के भवन का क्या रंग रखा जाए। इसके परिणाम निम्नलिखित सारणी में दर्शाए गए हैं। इन आँकड़ों को एक दंड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए।

मनपसंद रंग	लाल	हरा	नीला	पीला	नारंगी
विद्यार्थियों की संख्या	43	19	55	49	34

इस दंड आलेख की सहायता से निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) कौन-सा रंग सबसे अधिक पसंद किया जाता है और कौन-सा रंग सबसे कम पसंद किया जाता है?

(ii) कुल कितने रंग हैं? वे क्या हैं?



हल एक उपयुक्त पैमाना नीचे दर्शाए अनुसार चुनिए :

स्केल को 0 से प्रारंभ कीजिए। आँकड़ों में सबसे बड़ा मान 55 है। अतः, स्केल को 55 से कुछ अधिक, मान लीजिए 60 पर समाप्त करते हैं। अक्ष पर समान विभाजनों (divisions) का प्रयोग कीजिए, जैसे कि 10 की वृद्धियाँ। आप जानते हैं कि सभी दंड (bars) 0 और 60 के बीच स्थित होंगे। हम स्केल को इस प्रकार चुनेंगे, ताकि 0 और 60 के बीच की लंबाई न तो अधिक छोटी हो और न ही अधिक बड़ी हो। यहाँ, हम 1 इकाई = 10 विद्यार्थी लेते हैं।

फिर हम आकृति में दर्शाए अनुसार, दंड आलेख को खींचते और नामांकित करते हैं।

दंड आलेख से हम निष्कर्ष निकालते हैं कि

(i) नीला रंग सबसे मनपसंद रंग है (क्योंकि नीले रंग को निरूपित करने वाला दंड सबसे लंबा है)

(ii) हरा रंग सबसे कम मनपसंद रंग है (क्योंकि हरे रंग को निरूपित करने वाला दंड सबसे छोटा है)।

(iii) यहाँ पांच रंग हैं। ये हैं लाल, हरा, नीला, पीला और नारंगी (ये क्षैतिज अक्ष पर देखे जा सकते हैं)।

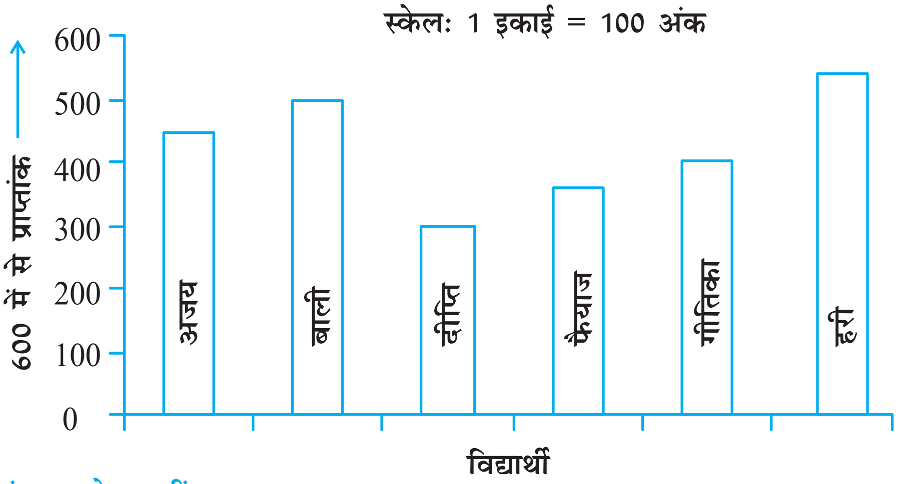
उदाहरण 9 निम्नलिखित आँकड़े किसी कक्षा के छः विद्यार्थियों द्वारा (600 में से) प्राप्त किए गए कुल अंकों को दर्शाते हैं। इन्हें एक दंड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए।

विद्यार्थी	अजय	बाली	दीप्ति	फैयाज	गीतिका	हरी
प्राप्तांक	450	500	300	360	400	540

हल

1. एक उपयुक्त स्केल चुनने के लिए, हम 100 की वृद्धियाँ लेते हुए, समान विभाजन अक्ष पर अंकित करते हैं। इस प्रकार, 1 इकाई 100 अंक निरूपित करेगी। (यदि हम 1 इकाई से 10 अंकों को निरूपित करें, तो क्या कठिनाई होगी?)

2. अब आँकड़ों को दंड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए।



दोहरे दंड आलेख खींचना

आँकड़ों के निम्नलिखित दो समूहों पर विचार कीजिए, जो दो नगरों, आबेरदीन और मारगेट में, वर्ष के सभी बारह महीनों के लिए, धूप रहने के औसत दैनिक घंटों को दर्शाते हैं। ये नगर दक्षिणी ध्रुव के निकट स्थित हैं और इसीलिए यहाँ प्रतिदिन धूप बहुत कम घंटों के लिए रहती है।

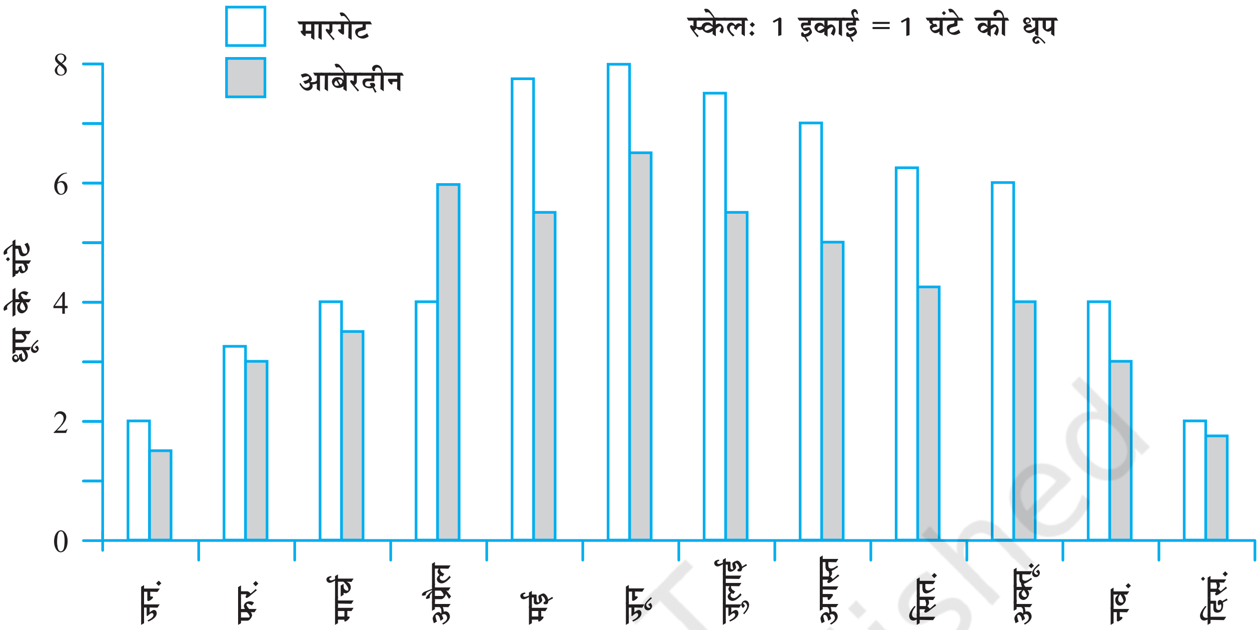
मारगेट में												
	जन.	फर.	मार्च.	अप्रैल	मई	जून	जुलाई	अग.	सितं.	अक्तू.	नव.	दिसं.
धूप के औसत घंटे	2	$3\frac{1}{4}$	4	4	$7\frac{3}{4}$	8	$7\frac{1}{2}$	7	$6\frac{1}{4}$	6	4	2
आबेरदीन में												
धूप के औसत घंटे	$1\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	6	$5\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$	5	$4\frac{1}{2}$	4	3	$1\frac{3}{4}$

इनके अलग-अलग दंड आलेख खींच कर आप निम्नलिखित प्रकार के प्रश्नों के उत्तर दे सकते हैं:

(i) प्रत्येक नगर में, किस महीने में अधिकतम धूप रहती है? या

(ii) प्रत्येक नगर में, किस महीने में न्यूनतम धूप रहती है?

परंतु 'एक विशेष महीने में, किस नगर में धूप अधिक घंटों तक रहती है?' जैसे प्रश्नों के उत्तर देने के लिए, हमें दोनों नगरों के औसत धूप के घंटों की तुलना करने की आवश्यकता होगी। इसके लिए हम उन आलेखों को खींचना सीखेंगे, जिन्हें दोहरे दंड आलेख (double bar graphs) कहा जाता है। इनमें दोनों नगरों की सूचना दंड आलेखों द्वारा साथ-साथ दी हुई होती हैं।

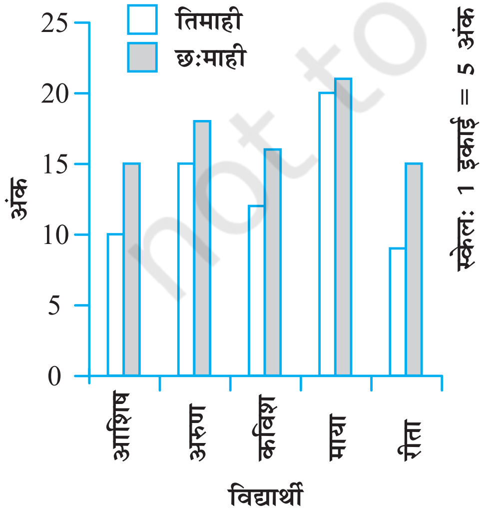


आकृति 3.1

उपरोक्त दंड आलेख (आकृति 3.1) दोनों नगरों के औसत धूप के समय को दर्शाता है। इसमें प्रत्येक महीने के लिए, हमारे पास दो दंड हैं, जिनकी ऊँचाइयाँ प्रत्येक नगर के औसत धूप के घंटों को दर्शाती हैं। इससे हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि अप्रैल के महीने को छोड़कर, अन्य सभी महीनों में मारगेट में आबेरदीन की अपेक्षा धूप सदैव अधिक रहती है। आप इसी प्रकार का दंड आलेख अपने क्षेत्र या नगर के लिए भी बना सकते हैं।

आइए एक और उदाहरण लें, जो हम से अधिक संबंधित है।

उदाहरण 10 गणित की अध्यापिका यह जानना चाहती है कि तिमाही परीक्षा के बाद, उसके द्वारा पढ़ाई में अपनाई गई नई तकनीक का कोई प्रभाव पड़ा या नहीं। वह सबसे कमजोर 5 बच्चों द्वारा तिमाही परीक्षा (25 में से) और छ:माही परीक्षा (25 में से) में प्राप्त किए अंकों को लेती है, जो इस प्रकार हैं :



विद्यार्थी	आशिष	अरुण	कविश	माया	रीता
तिमाही	10	15	12	20	9
छ:माही	15	18	16	21	15

हल पहले वह संलग्न आकृति में दर्शाए अनुसार एक दोहरा दंड आलेख (double bar graph) खींचती है। दंडों को देख कर लगता है कि विद्यार्थियों के प्रदर्शन में बहुत सुधार हुआ है। अत:, वह निर्णय लेती है कि उसे अपनी नई शिक्षण तकनीक जारी रखनी चाहिए।

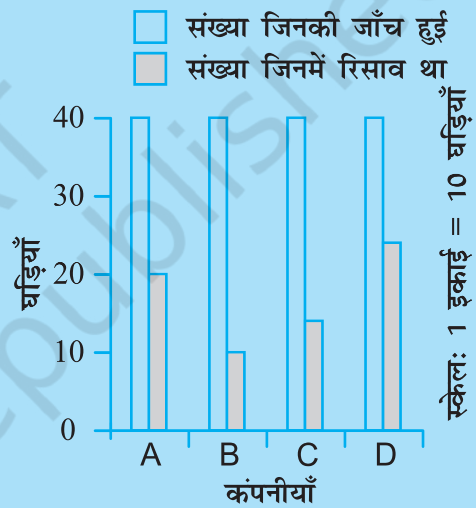
क्या आप कुछ अन्य स्थितियों के बारे में सोचते हैं, जहाँ आप दोहरे दंड आलेखों का प्रयोग कर सकते हैं?

प्रयास कीजिए

1. दिया हुआ दंड आलेख (आकृति 3.2), विभिन्न कंपनियों द्वारा बनाई गई जल प्रतिरोधी (Water resistant) घड़ियों की जाँच के लिए किए गए एक सर्वेक्षण को दर्शाता है। इनमें से प्रत्येक कंपनी ने यह दावा किया कि उनकी घड़ियाँ जल प्रतिरोधी हैं। एक जाँच के बाद उपरोक्त परिणाम प्राप्त हुए हैं।

(a) क्या आप प्रत्येक कंपनी के लिए, रिसाव (Leak) वाली घड़ियों की संख्या की, जाँच की गई कुल घड़ियों की संख्या से भिन्न बना सकते हैं?

(b) इसके आधार पर आप क्या बता सकते हैं कि किस कंपनी की घड़ियाँ बेहतर हैं?



आकृति 3.2

2. वर्षों 1995, 1996, 1997 और 1998 में, अंग्रेज़ी और हिंदी की पुस्तकों की बिक्री नीचे दी गई हैं :

	1995	**1996**	**1997**	**1998**
अंग्रेज़ी	350	400	450	620
हिंदी	500	525	600	650

एक दोहरा दंड आलेख खींचिए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(a) किस वर्ष में दोनों भाषाओं की पुस्तकों की बिक्री का अंतर न्यूनतम था?

(b) क्या आप कह सकते हैं कि अंग्रेज़ी की पुस्तकों की माँग में तेज़ी से वृद्धि हुई है? इसका औचित्य समझाइए।

प्रश्नावली 3.3

1. निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर देने के लिए, आकृति 3.3 में दिए दंड आलेख का प्रयोग कीजिए :

(a) कौन-सा पालतू पशु अधिक लोकप्रिय है?

(b) कितने विद्यार्थियों का पालतू पशु कुत्ता है?

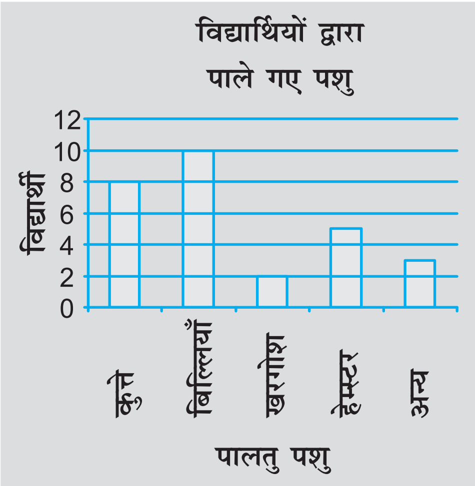
2. निम्नलिखित दंड आलेख को पढ़िए जो एक पुस्तक भंडार द्वारा 5 क्रमागत वर्षों में बेची गई पुस्तकों की संख्या दर्शाती है, और आगे आने वाले प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

(i) वर्षों 1989, 1990 और 1992 में से प्रत्येक में लगभग कितनी पुस्तकें बेची गईं?

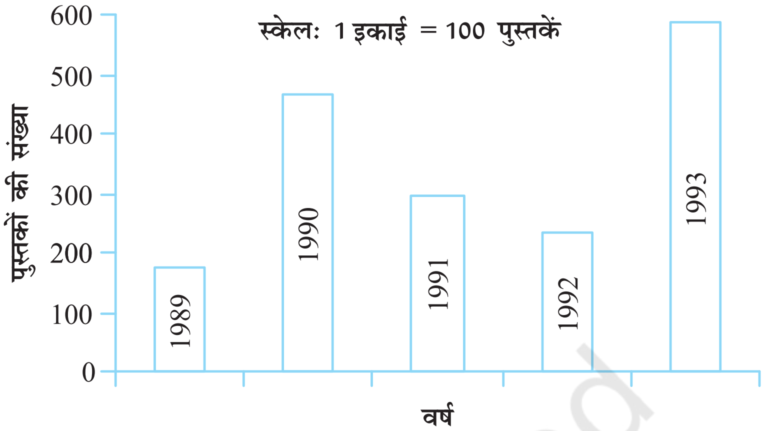
(ii) किस वर्ष में लगभग 475 पुस्तकें बेची गईं? किस वर्ष में लगभग 225 पुस्तकें बेची गईं?

(iii) किन वर्षों में 250 से कम पुस्तकें बेची गईं?

(iv) क्या आप स्पष्ट कर सकते हैं कि आप वर्ष 1989 में बेची गई पुस्तकों का आकलन किस प्रकार करेंगे?



आकृति 3.3



आकृति 3.4

3. छः विभिन्न कक्षाओं के विद्यार्थियों की संख्याएँ नीचे दी गई हैं। इन आँकड़ों को एक दंड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए:

कक्षा	पाँचवीं	छठी	सातवीं	आठवीं	नौंवी	दसवीं
विद्यार्थियों की संख्या	135	120	95	100	90	80

(a) आप स्केल किस प्रकार चुनेंगे?

(b) निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) किस कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या अधिकतम है? किस कक्षा में न्यूनतम है?

(ii) कक्षा 6 के विद्यार्थियों की संख्या का कक्षा 8 के विद्यार्थियों की संख्या से अनुपात ज्ञात कीजिए।

4. एक विद्यार्थी के प्रथम सत्र और द्वितीय सत्र का प्रदर्शन दिया हुआ है। एक उपयुक्त स्केल चुनकर एक दोहरा दंड आलेख खींचिए और दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

विषय	अंग्रेज़ी	हिन्दी	गणित	विज्ञान	सामाजिक विज्ञान
प्रथम सत्र (अधिकतम अंक 100)	67	72	88	81	73
द्वितीय सत्र (अधिकतम अंक 100)	70	65	95	85	75

(i) किस विषय में विद्यार्थी ने अपने प्रदर्शन में सबसे अधिक सुधार किया है?

(ii) किस विषय में सुधार सबसे कम है?

(iii) क्या किसी विषय में प्रदर्शन नीचे गिरा है?

5. किसी कॉलोनी में किए गए सर्वेक्षण से प्राप्त निम्नलिखित आँकड़ों पर विचार कीजिए :

पसंदीदा खेल	क्रिकेट	बॉस्केट बॉल	तैरना	हॉकी	खेलकूद
देखना	1240	470	510	430	250
भाग लेना	620	320	320	250	105

(i) एक उपयुक्त स्केल चुनकर, एक दोहरा दंड आलेख खींचिए। इस दंड आलेख से आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं?

(ii) कौन-सा खेल अधिक लोकप्रिय हैं?

(iii) खेलों को देखना अधिक पसंद किया जाता है या उनमें भाग लेना?

6. इस अध्याय के प्रारंभ में, दिए हुए विभिन्न नगरों के न्यूनतम और अधिकतम तापमानों के आँकड़ों (सारणी 3.1) को लीजिए। इन आँकड़ों का एक दोहरा दंड आलेख खींच कर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) दी हुई तिथि पर किस नगर के न्यूनतम और अधिकतम तापमान का अंतर सबसे अधिक है?

(ii) कौन-सा नगर सबसे गर्म है और कौन-सा नगर सबसे ठंडा है।

(iii) ऐसे दो नगरों के नाम लिखिए, जिनमें से एक का अधिकतम तापमान दूसरे के न्यूनतम तापमान से कम था।

(iv) उस नगर का नाम लिखिए, जिसके न्यूनतम और अधिकतम तापमानों का अंतर सबसे कम है।

हमने क्या चर्चा की?

1. औसत एक ऐसी संख्या है, जो दिए हुए प्रेक्षणों के समूह (या आँकड़ों) का प्रतिनिधित्व करता है या उनकी केंद्रीय प्रवृत्ति को दर्शाता है।

2. अंकगणितीय माध्य आँकड़ों का एक प्रतिनिधि मान है।

3. बहुलक केंद्रीय प्रवृत्ति या प्रतिनिधि मान का एक अन्य रूप है। प्रेक्षणों के एक समूह का बहुलक वह प्रेक्षण है जो सबसे अधिक बार आता है।

4. माध्यक भी एक प्रकार का प्रतिनिधि मान है। यह उस मान को दर्शाता है, जो प्रेक्षण के मध्य (बीच) में होता है (उन्हें आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने के बाद) तथा आधे प्रेक्षण इसके ऊपर होते हैं और आधे प्रेक्षण इसके नीचे होते हैं।

5. इकट्ठे किए आँकड़ों को बारंबारता बंटन सारणी की सहायता से चित्रीय रूप से दंड आलेखों के रूप में दर्शाया जा सकता है। दंड आलेख संख्याओं या आँकड़ों का समान चौड़ाई वाले दंडों द्वारा एक चित्रीय निरूपण है।
6. हमने यह भी सीखा है कि एक दोहरा दंड आलेख किस प्रकार खींचा जाता है। यह एक ही दृष्टि में, प्रेक्षणों के दो समूहों की तुलना करने में सहायक रहता है।

इसलिए हम कहते हैं कि औसत, आँकड़ों के एक समूह की केंद्रीय प्रवृत्ति का मापक (measure) है। विभिन्न प्रकार के आँकड़ों की व्याख्या करने के लिए, विभिन्न प्रकार के प्रतिनिधि (representative) या केंद्रीय मानों (central values) की आवश्यकता होती है। इनमें से एक प्रतिनिधि मान **अंकगणितीय माध्य** या **समांतर माध्य** (**arthmetic mean**) है।

3.2 अंकगणितीय माध्य

आँकड़ों के एक समूह के लिए अधिकांशतः प्रयोग किए जाना वाला प्रतिनिधि मान **अंकगणितीय माध्य** है, संक्षेप में इसे **माध्य** (mean) भी कहते हैं। इसे अच्छी प्रकार से समझने के लिए, आइए निम्नलिखित उदाहरण को देखें :

दो बर्तनों में क्रमशः 20 लीटर और 60 लीटर दूध है। यदि दोनों बर्तनों में बराबर-बराबर दूध रखा जाए, तो प्रत्येक बर्तन में कितना दूध होगा? जब हम इस प्रकार का प्रश्न पूछते हैं, तब हम अंकगणितीय माध्य ज्ञात करने के लिए कहते हैं।

उपरोक्त स्थिति में, औसत या अंकगणितीय माध्य होगा :

$$\frac{\text{दूध की कुल मात्रा}}{\text{बर्तनों की संख्या}} = \frac{20+60}{2} \text{ लीटर} = 40 \text{ लीटर}$$

इस प्रकार, प्रत्येक बर्तन में 40 लीटर दूध होगा।

औसत या अंकगणितीय माध्य (A.M.) या केवल माध्य को निम्नलिखित रूप से परिभाषित किया जाता है:

$$\text{माध्य} = \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$$

निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार कीजिए:

उदाहरण 1 आशिष तीन क्रमागत दिनों में क्रमशः 4 घंटे, 5 घंटे और 3 घंटे पढ़ता है। उसके प्रतिदिन पढ़ने का औसत समय क्या है?

हल आशिष के पढ़ने का औसत समय होगा :

$$\frac{\text{पढ़ाई में लगाया कुल समय}}{\text{दिनों की संख्या जिनमें पढ़ाई की}} = \frac{4+5+3}{3} \text{ घंटे} = 4 \text{ घंटे प्रतिदिन}$$

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि आशिष प्रतिदिन 4 घंटे के औसत से पढ़ाई करता है।

उदाहरण 2 एक बल्लेबाज ने 6 पारियों (innings) में निम्नलिखित संख्याओं में रन बनाए : 36, 35, 50, 46, 60, 55

एक पारी में उसके द्वारा बनाए गए रनों का माध्य ज्ञात कीजिए।

हल कुल रन = 36 + 35 + 50 + 46 + 60 + 55 = 282

माध्य ज्ञात करने के लिए, हम सभी प्रेक्षणों का योग ज्ञात करके उसे प्रेक्षणों की कुल संख्या से भाग देते हैं। अतः, इस स्थिति में

$$\text{माध्य} = \frac{282}{6} = 47.$$

इस प्रकार, एक पारी में उसके द्वारा बनाए गए रनों का माध्य 47 है।

अंकगणितीय माध्य कहाँ स्थित है?

प्रयास कीजिए

आप पढ़ाई में व्यतीत किए गए अपने समय (घंटों में) का पूरे सप्ताह का औसत किस प्रकार ज्ञात करेंगे?

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

उपरोक्त उदाहरणों में दिए गए आँकड़ों पर विचार कीजिए तथा निम्नलिखित विषय में सोचिए:

- क्या माध्य प्रत्येक प्रेक्षण से बड़ा है?
- क्या यह प्रत्येक प्रेक्षण से छोटा है?

अपने मित्रों के साथ चर्चा कीजिए। इसी प्रकार का एक और उदाहरण बनाइए और इन्हीं प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

आप पाएँगे कि माध्य सबसे बड़े और सबसे छोटे प्रेक्षणों के बीच में स्थित होता है। विशिष्ट रूप में, दो संख्याओं का माध्य सदैव उनके बीच में स्थित होता है।

उदाहरणार्थ, 5 और 11 का माध्य $\frac{5+11}{2}=8$ है, जो 5 और 11 के बीच में स्थित है।

क्या आप इस अवधारणा का प्रयोग करके, यह दर्शा सकते हैं कि दो भिन्नात्मक संख्याओं के बीच में जितनी चाहें उतनी भिन्नात्मक संख्याएँ ज्ञात की जा सकती हैं? उदाहरणार्थ $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{4}$ के बीच में आपको इनका औसत मिलेगा $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2}=\frac{3}{8}$ और फिर $\frac{1}{2}$ और $\frac{3}{8}$ के बीच में इनका औसत होगा $\frac{7}{16}$ इत्यादि।

प्रयास कीजिए

1. एक सप्ताह कि अपनी नींद में व्यतीत किए गए समय (घंटों में) का माध्य ज्ञात कीजिए।
2. $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ के बीच कम से कम पाँच संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

3.2.1 प्रसार या परिसर

सबसे बड़े और सबसे छोटे प्रेक्षणों के अंतर से, हमें प्रेक्षणों के प्रसार का एक अनुमान लग जाता है। इसे सबसे बड़े प्रेक्षण में से सबसे छोटे प्रेक्षण को घटा कर ज्ञात किया जा सकता है। हम इस परिणाम को आँकड़ों या प्रेक्षणों का **प्रसार** या **परिसर** (**range**) कहते हैं।

निम्नलिखित उदाहरण देखिए :

उदाहरण 3 एक स्कूल के 10 अध्यापकों की वर्षों में आयु इस प्रकार है :

32, 41, 28, 54, 35, 26, 23, 33, 38, 40

(i) सबसे बड़ी उम्र वाले अध्यापक की आयु क्या है? तथा सबसे छोटी उम्र वाले अध्यापक की आयु क्या है?

(ii) अध्यापकों की आयु का परिसर क्या है?

(iii) इन अध्यापकों की माध्य आयु क्या है?

हल

(i) आयु को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

23, 26, 28, 32, 33, 35, 38, 40, 41, 54

हमें ज्ञात होता है कि सबसे बड़ी उम्र वाले अध्यापक की आयु 54 वर्ष है तथा सबसे छोटी उम्र वाले अध्यापक की आयु 23 वर्ष है।

(ii) अध्यापकों की आयु का परिसर = (54 – 23) वर्ष = 31 वर्ष है।

(iii) अध्यापकों की माध्य आयु

$$= \frac{23+26+28+32+33+35+38+40+41+54}{10} \text{ वर्ष}$$

$$= \frac{350}{10} \text{ वर्ष } = 35 \text{ वर्ष}$$

प्रश्नावली 3.1

1. अपनी कक्षा के किन्हीं दस (10) विद्यार्थियों की ऊँचाइयों का परिसर ज्ञात कीजिए।

2. कक्षा के एक मूल्यांकन में प्राप्त किए गए निम्नलिखित अंकों को एक सारणीबद्ध रूप में संगठित कीजिए :

   4, 6, 7, 5, 3, 5, 4, 5, 2, 6, 2, 5, 1, 9, 6, 5, 8, 4, 6, 7

   (i) सबसे बड़ा अंक कौन-सा है? (ii) सबसे छोटा अंक कौन-सा है?

   (iii) इन आँकड़ों का परिसर क्या है? (iv) अंकगणितीय माध्य ज्ञात कीजिए।

3. प्रथम 5 पूर्ण संख्याओं का माध्य ज्ञात कीजिए।

4. एक क्रिकेट खिलाड़ी ने 8 पारियों में निम्नलिखित रन बनाए :

   58, 76, 40, 35, 46, 50, 0, 100.

   उसका माध्य स्कोर (score) या रन ज्ञात कीजिए।

5. निम्नलिखित सारणी प्रत्येक खिलाड़ी द्वारा चार खेलों में अर्जित किए गए अंकों को दर्शाती है:

खिलाड़ी	खेल 1	खेल 2	खेल 3	खेल 4
A	14	16	10	10
B	0	8	6	4
C	8	11	खेला नहीं	13

अब निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) प्रत्येक खेल में A द्वारा अर्जित औसत अंक ज्ञात करने के लिए, माध्य ज्ञात कीजिए।

(ii) प्रत्येक खेल में C द्वारा अर्जित माध्य अंक ज्ञात करने के लिए, आप कुल अंकों को 3 से भाग देंगे या 4 से? क्यों?

(iii) B ने सभी चार खेलों में भाग लिया है। आप उसके अंकों का माध्य किस प्रकार ज्ञात करेंगे?

(iv) किसका प्रदर्शन सबसे अच्छा है?

6. विज्ञान की एक परीक्षा में, विद्यार्थियों के एक समूह द्वारा (100 में से) प्राप्त किए गए अंक 85, 76, 90, 85, 39, 48, 56, 95, 81 और 75 हैं। ज्ञात कीजिए :

(i) विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त सबसे अधिक अंक और सबसे कम अंक

(ii) प्राप्त अंकों का परिसर

(iii) समूह द्वारा प्राप्त माध्य अंक

7. छह क्रमागत वर्षों में एक स्कूल में विद्यार्थियों की संख्या निम्नलिखित थी :
1555, 1670, 1750, 2013, 2540, 2820
इस समय काल में स्कूल के विद्यार्थियों की माध्य संख्या ज्ञात कीजिए।

8. एक नगर में किसी विशेष सप्ताह के 7 दिनों में हुई वर्षा (mm में) निम्नलिखित रूप से रिकॉर्ड की गई:

दिन	सोमवार	मंगलवार	बुधवार	वृहस्पतिवार	शुक्रवार	शनिवार	रविवार
वर्षा (mm)	0.0	12.2	2.1	0.0	20.5	5.5	1.0

(i) उपरोक्त आँकड़ों से वर्षा का परिसर ज्ञात कीजिए।

(ii) इस सप्ताह की माध्य वर्षा ज्ञात कीजिए।

(iii) कितने दिन वर्षा, माध्य वर्षा से कम रही?

9. 10 लड़कियों की ऊँचाइयाँ cm में मापी गईं और निम्नलिखित परिणाम प्राप्त हुए:
135, 150, 139, 128, 151, 132, 146, 149, 143, 141.

(i) सबसे लंबी लड़की की लंबाई क्या है?

(ii) सबसे छोटी लड़की की लंबाई क्या है?

(iii) इन आँकड़ों का परिसर क्या है?

(iv) लड़कियों की माध्य ऊँचाई (लंबाई) क्या है?

(v) कितनी लड़कियों की लंबाई, माध्य लंबाई से अधिक है?

3.3 बहुलक

जैसा कि हम पहले बता चुके हैं केवल माध्य ही केंद्रीय प्रवृत्ति का माप या प्रतिनिधि मान नहीं है। विभिन्न प्रकार की आवश्यकताओं के अनुसार अन्य प्रकार कि केंद्रीय प्रवृत्ति के मापकों का प्रयोग किया जाता है।

निम्नलिखित उदाहरण को देखिए :

कमीज़ों के विभिन्न मापों (साइज़ों) की साप्ताहिक माँग को ज्ञात करने के लिए, एक दुकानदार 90 cm, 95 cm, 100 cm, 105 cm और 110 cm मापों की कमीज़ों की बिक्री का रिकॉर्ड (record) रखता है। एक सप्ताह का रिकॉर्ड इस प्रकार है :

माप (cm में)	90	95	100	105	110	**योग**
बेची गई कमीज़ों की संख्या	8	22	32	37	6	**105**

यदि वह बेची गई कमीज़ों की संख्या का माध्य ज्ञात करे, तो क्या आप सोचते हैं कि वह यह निर्णय ले पाएगा कि किस माप की कमीज़ें स्टॉक (stock) में रखी जाएँ?

$$\text{बेची गई कमीज़ों का माध्य} = \frac{\text{बेची गई कमीज़ों की कुल संख्या}}{\text{कमीज़ों के विभिन्न मापों के प्रकार}} = \frac{105}{5} = 21$$

क्या वह प्रत्येक माप की 21 कमीज़ें स्टॉक में रखे? यदि वह ऐसा करता है, तो क्या वह अपने ग्राहकों की आवश्यकताओं को पूरा कर पाएगा?

उपरोक्त रिकॉर्ड को देखकर, दुकानदार 95 cm, 100 cm और 105 cm मापों की कमीज़ों को मँगवाने का निर्णय लेता है। वह अन्य मापों की कमीज़ों को मँगवाने का निर्णय, उनके कम खरीददारों को देखते हुए, आगे के लिए टाल देता है।

एक अन्य उदाहरण देखिए :

रेडीमेड (readymade) कपड़ों का एक दुकानदार कहता है, 'मेरे द्वारा सबसे अधिक माप की बेची गई कमीज़ का माप 90 cm है।'

ध्यान दीजिए कि यहाँ भी दुकानदार की रुचि विभिन्न मापों की बेची गई कमीज़ों की संख्याओं में ही है। वह कमीज़ के उस माप को देख रहा है, जो सबसे अधिक बिकती है। यह आँकड़ों का एक अन्य **प्रतिनिधि मान** है। सबसे अधिक बिक्री 105 cm माप की कमीज़ों की बिक्री है। यह प्रतिनिधि मान (105) आँकड़ों का **बहुलक (mode)** कहलाता है।

दिए हुए प्रेक्षणों के एक समूह में, सबसे अधिक बार आने वाला प्रेक्षण इस समूह का बहुलक कहलाता है।

उदाहरण 4 निम्नलिखित संख्याओं का बहुलक ज्ञात कीजिए:

1, 1, 2, 4, 3, 2, 1, 2, 2, 4

हल समान मान वाली संख्याओं को एक साथ व्यवस्थित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4

इन आँकड़ों का बहुलक 2 है, क्योंकि यह अन्य प्रेक्षणों की तुलना में अधिक बार आता है।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित के बहुलक ज्ञात कीजिए:

(i) 2, 6, 5, 3, 0, 3, 4, 3, 2, 4, 5, 2, 4,

(ii) 2, 14, 16, 12, 14, 14, 16, 14, 10, 14, 18, 14

3.3.1 बड़े आँकड़ों का बहुलक

यदि प्रेक्षणों की संख्या बड़ी हो, तो उनको समान मान वाले प्रेक्षणों के रूप में व्यवस्थित करना और फिर उनको गिनना इतना सरल नहीं होता है। ऐसी स्थितियों में, हम आँकड़ों को सारणीबद्ध करते हैं, जैसा कि आप पिछली कक्षा में कर चुके हैं, आँकड़ों की सारणी बनाने का कार्य मिलान चिह्नों (tally marks) से प्रारंभ करते हुए, प्रेक्षणों की बारंबारताएँ (frequencies) बना कर पूरा किया जा सकता है।

निम्न उदाहरणों को देखिए :

उदाहरण 5 टीमों के एक समूह में खेले गए फुटबॉल के मैचों में, जीतने के अंतर गोलों में (in goals) निम्नलिखित हैं :

1, 3, 2, 5, 1, 4, 6, 2, 5, 2, 2, 2, 4, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 3, 2,
6, 4, 3, 2, 1, 1, 4, 2, 1, 5, 3, 3, 2, 3, 2, 4, 2, 1, 2

इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल आइए इन आँकड़ों को एक सारणी के रूप में रखें :

जीतने का अंतर	मिलान चिह्न	मैचों की संख्या
1	𝍸 𝍷𝍷𝍷𝍷	9
2	𝍸 𝍸 𝍷𝍷𝍷𝍷	14
3	𝍸 𝍷𝍷	7
4	𝍸	5
5	𝍷𝍷𝍷	3
6	𝍷𝍷	2
	योग	**40**

इस सारणी को देखकर, हम तुरंत यह कह सकते हैं कि '2' बहुलक है, क्योंकि 2 सबसे अधिक बार आया है। इस प्रकार, अधिकांश मैच 2 गोलों के अंतर से जीते गए हैं।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

क्या संख्याओं के एक समूह में दो बहुलक हो सकते हैं?

उदाहरण 6 निम्नलिखित संख्याओं का बहुलक ज्ञात कीजिए: 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 8

हल यहाँ 2 और 5 दोनों ही तीन बार आए हैं। अत:, ये दोनों ही आँकड़ों के बहुलक हैं।

इन्हें कीजिए

1. अपनी कक्षा के साथियों की वर्षों में आयु रिकॉर्ड कीजिए और फिर उनका बहुलक ज्ञात कीजिए।
2. अपनी कक्षा के साथियों की cm में लंबाइयाँ रिकॉर्ड कीजिए और उनका बहुलक ज्ञात कीजिए।

प्रयास कीजिए

1. निम्नलिखित आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए:
   12, 14, 12, 16, 15, 13, 14, 18, 19, 12, 14, 15, 16, 15, 16, 16, 15,
   17, 13, 16, 16, 15, 15, 13, 15, 17, 15, 14, 15, 13, 15, 14
2. 25 बच्चों की ऊँचाइयाँ (cm में) नीचे दी गई हैं :
   168, 165, 163, 160, 163, 161, 162, 164, 163, 162, 164, 163, 160, 163, 160, 165, 163, 162, 163, 164, 163, 160, 165, 163, 162
   उनकी लंबाइयों का बहुलक क्या है? यहाँ बहुलक से हम क्या समझते हैं?

जहाँ माध्य हमें आँकड़ों के सभी प्रेक्षणों का औसत प्रदान करता है, वहीं बहुलक आँकड़ों में सबसे अधिक बार आने वाले प्रेक्षण को दर्शाता है।

आइए निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार करें :

(a) आपको एक दावत में बुलाए गए 25 व्यक्तियों के लिए आवश्यक चपातियों की संख्या के बारे में निर्णय लेना है।

(b) कमीज़ें बेचने वाले एक दुकानदार को अपने स्टॉक की आपूर्ति करनी है।

(c) हमें अपने घर के लिए आवश्यक दरवाज़े की ऊँचाई ज्ञात करनी है।

(d) एक पिकनिक (picnic) पर जाते समय, अगर प्रत्येक व्यक्ति के लिए केवल एक ही फल खरीदा जाना है, तब, हमें कौन-सा फल मिलेगा?

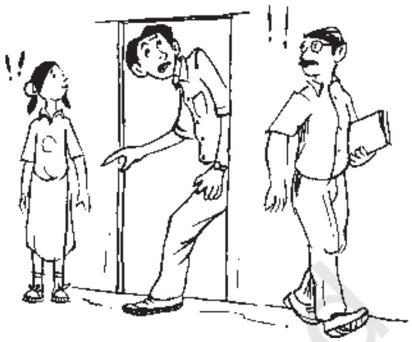
इन स्थितियों में हम किसमें बहुलक का एक अच्छे आकलन के रूप में प्रयोग कर सकते हैं?

पहले कथन पर विचार कीजिए। मान लीजिए प्रत्येक व्यक्ति के लिए आवश्यक चपातियों की संख्या इस प्रकार है : 2, 3, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 2, 4, 2, 2, 3, 2, 4, 4, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 5

इन आँकड़ों का बहुलक 2 चपाती है। यदि हम बहुलक को आँकड़ों के प्रतिनिधि मान के रूप में प्रयोग करें, तो हमें प्रति व्यक्ति 2 चपातियों की दर से 25 व्यक्तियों के लिए केवल 50

चपातियों की आवश्यकता होगी। परंतु निश्चय ही यह चपातियाँ सभी व्यक्तियों को अपर्याप्त होंगी। इस स्थिति में क्या **माध्य** एक उपयुक्त प्रतिनिधि मान होगा?

तीसरे कथन के लिए, दरवाज़े की ऊँचाई, उन व्यक्तियों की ऊँचाई से संबंधित है जो उस दरवाज़े का प्रयोग करेंगे। मान लीजिए कि घर में 5 बच्चे और 4 वयस्क हैं जो उस दरवाज़े का प्रयोग करते हैं तथा 5 बच्चों में से प्रत्येक की ऊँचाई 135 cm के आसपास है। ऊँचाइयों का बहुलक 135 cm है। क्या हमें एक ऐसा दरवाज़ा लेना चाहिए जिसकी ऊँचाई 144 cm है? क्या सभी वयस्क इस दरवाज़े में से निकल पाएँगे? यह स्पष्ट है कि इन आँकड़ों के लिए भी बहुलक एक उपयुक्त प्रतिनिधि मान नहीं है। क्या यहाँ **माध्य** एक उपयुक्त प्रतिनिधि मान होगा?



क्यों नहीं? दरवाज़े की ऊँचाई के बारे में निर्णय लेने के लिए, ऊँचाई के किस प्रतिनिधि मान का प्रयोग किया जाए?

इसी प्रकार, शेष कथनों का विश्लेषण कीजिए तथा इन स्थितियों के लिए उपयुक्त प्रतिनिधि मान ज्ञात कीजिए।

प्रयास कीजिए

अपने मित्रों से चर्चा कीजिए और

(a) दो स्थितियाँ दीजिए, जहाँ प्रतिनिधि मान के रूप में माध्य का प्रयोग उपयुक्त होगा।

(b) दो स्थितियाँ दीजिए, जहाँ प्रतिनिधि मान के रूप में बहुलक का प्रयोग उपयुक्त होगा।

3.4 माध्यक

हम देख चुके हैं कि कुछ स्थितियों में अंकगणितीय माध्य एक उपयुक्त केंद्रीय प्रवृत्ति का मापक है तथा कुछ स्थितियों में बहुलक एक उपयुक्त केंद्रीय प्रवृत्ति का मापक है।

आइए अब एक अन्य उदाहरण देखें। 17 विद्यार्थियों के एक समूह पर विचार कीजिए, जिनकी ऊँचाई cm में निम्नलिखित हैं :

106, 110, 123, 125, 117, 120, 112, 115, 110, 120, 115, 102, 115, 115, 109, 115, 101.

खेल की अध्यापिका कक्षा को ऐसे दो समूहों में इस तरह विभाजित करना चाहती है कि प्रत्येक समूह में विद्यार्थियों की संख्या बराबर हो तथा एक समूह में विद्यार्थियों की ऊँचाइयाँ एक विशेष ऊँचाई से कम हों और दूसरे समूह में विद्यार्थियों की ऊँचाइयाँ उस विशेष ऊँचाई से अधिक हों। वह ऐसा किस प्रकार करेगी?

आइए उसके पास जो विभिन्न विकल्प हैं, उन्हें देखें :

(i) वह माध्य ज्ञात कर सकती है। यह माध्य है :

$$\frac{106+110+123+125+117+120+112+115+110+120+115+102+115+115+109+115+101}{17}$$

$$=\frac{1930}{17}=113.5$$

अत:, अध्यापिका कक्षा के विद्यार्थियों को यदि ऐसे दो समूहों में विभाजित करती है, जिनमें से एक समूह में माध्य ऊँचाई से कम ऊँचाई वाले विद्यार्थी हैं और दूसरे समूह में माध्य ऊँचाई से अधिक ऊँचाई वाले विद्यार्थी हैं। तब, इन समूहों में विद्यार्थियों की संख्याएँ बराबर नहीं रहती हैं क्योंकि एक समूह में 7 सदस्य होंगे तथा दूसरे समूह में 10 सदस्य होंगे।

(ii) उसके पास दूसरा विकल्प है कि वह बहुलक ज्ञात करे। सबसे अधिक बारंबारताओं वाला प्रेक्षण 115 cm है और इसे बहुलक लिया जाएगा।

बहुलक से नीचे वाले 7 विद्यार्थी हैं तथा 10 विद्यार्थी बहुलक के बराबर या उससे ऊपर हैं। अत:, हम कक्षा के विद्यार्थियों को दो बराबर समूहों में विभाजित नहीं कर सकते।

इसलिए, आइए अब हम एक अन्य वैकल्पिक प्रतिनिधि मान या केंद्रीय प्रवृत्ति के मापक के बारे में सोचें। ऐसा करने के लिए, हम पुन: दी हुई ऊँचाइयों (cm में) को देखते हैं और इन्हें आरोही क्रम में व्यवस्थित करते हैं। हम निम्नलिखित प्रेक्षण प्राप्त करते हैं :

101, 102, 106, 109, 110, 110, 112, 115, 115, 115, 115, 115, 117, 120, 120, 123, 125

इन आँकड़ों में मध्य मान (middle value) 115 है, क्योंकि यह विद्यार्थियों को दो बराबर समूहों में विभाजित करता है जिनमें से प्रत्येक में 8 विद्यार्थी हैं। यह मान आँकड़ों का **माध्यक (median)** कहलाता है। माध्यक उस मान को बताता है, जो आँकड़ों के मध्य में स्थित होता है (उनको आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर) तथा आधे प्रेक्षण इससे अधिक मान वाले होते हैं और आधे प्रेक्षण इससे कम मान वाले होते हैं। खेल की अध्यापिका इस बीच वाले विद्यार्थी को इस खेल में निर्णायक (refree) बना सकती है।

यहाँ हम केवल उन स्थितियों को ही लेंगे, जहाँ प्रेक्षणों की संख्या विषम है।

प्रयास कीजिए

आपके एक मित्र ने दिए हुए आँकड़ों के माध्यक और बहुलक ज्ञात किए। उस मित्र द्वारा की गई त्रुटि, यदि कोई हो तो, बताइए और सही कीजिए:

35, 32, 35, 42, 38, 32, 34

माध्यक = 42, बहुलक = 32

इस प्रकार, दिए गए आँकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने के बाद उनका बीचों-बीच (मध्य) वाला मान उनका **माध्यक** होता है।

ध्यान दीजिए कि सामान्यत:, हमें माध्यक और बहुलक के लिए एक ही मान नहीं मिलेगा।

आइए कुछ उदाहरणों को देखें।

उदाहरण 7 निम्नलिखित आँकड़ों का माध्यक ज्ञात कीजिए :

24, 36, 46, 17, 18, 25, 35

हल आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

17, 18, 24, 25, 35, 36, 46

मध्य (बीच) वाला प्रेक्षण माध्यक होता है। अत:, माध्यक 25 है।

प्रश्नावली 3.2

1. गणित की एक परीक्षा में, 15 विद्यार्थियों द्वारा (25 में से) प्राप्त किए गए अंक निम्नलिखित हैं:

19, 25, 23, 20, 9, 20, 15, 10, 5, 16, 25, 20, 24, 12, 20

इन आँकड़ों के बहुलक और माध्यक ज्ञात कीजिए। क्या ये समान हैं?

2. एक क्रिकेट मैच में खिलाड़ियों द्वारा बनाए गए रन इस प्रकार हैं :

6, 15, 120, 50, 100, 80, 10, 15, 8, 10, 15

इन आँकड़ों के माध्य, बहुलक और माध्यक ज्ञात कीजिए। क्या ये तीनों समान हैं?

3. एक कक्षा के 15 विद्यार्थियों के भार (kg में) इस प्रकार हैं :

38, 42, 35, 37, 45, 50, 32, 43, 43, 40, 36, 38, 43, 38, 47

(i) इन आँकड़ों के बहुलक और माध्यक ज्ञात कीजिए।

(ii) क्या इनके एक से अधिक बहुलक हैं?

4. निम्नलिखित आँकड़ों के बहुलक और माध्यक ज्ञात कीजिए :

13, 16, 12, 14, 19, 12, 14, 13, 14

5. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है अथवा असत्य :

(i) बहुलक आँकड़ों में से सदैव एक संख्या होता है।

(ii) माध्य दिए हुए आँकड़ों में से एक संख्या हो सकता है।

(iii) माध्यक आँकड़ों में से सदैव एक संख्या होता है।

(iv) आँकड़ों 6, 4, 3, 8, 9, 12, 13, 9 का माध्य 9 है।

3.5 भिन्न उद्देश्य के साथ दंड आलेखों का प्रयोग

पिछले वर्ष हम देख चुके हैं कि किस प्रकार एकत्रित (संग्रहित) की गई सूचनाओं को एक बारंबारता बंटन सारणी (frequency distribution table) के रूप में पहले व्यवस्थित करके और फिर इन सूचनाओं को चित्रीय रूप में चित्रालेखों (pictographs) या दंड आलेखों (bargraphs) के रूप में निरूपित किया जाता है। आप इन दंड आलेखों को देख सकते हैं और इनके बारे में निष्कर्ष निकाल सकते हैं। आप इन दंड आलेखों के आधार पर सूचनाएँ भी प्राप्त कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, आप कह सकते हैं कि सबसे लंबा दंड (bar) ही बहुलक है, यदि दंड बारंबारता निरूपित करता है।

3.5.1 एक स्केल (या मापदंड) का चुनना

हम जानते हैं कि दंड आलेख समान चौड़ाई के दंडों द्वारा संख्याओं (आँकड़ों) का निरूपण है तथा दंडों की लंबाइयाँ बारंबारताओं और चुने गए स्केल (scale) पर निर्भर करती हैं। उदाहरणार्थ, एक दंड आलेख में, जहाँ संख्याओं को इकाइयों में दर्शाना है, आलेख एक प्रेक्षण के लिए एक इकाई लंबाई निरूपित करता है और यदि उसे संख्याओं को दहाई या सैकड़ों में दर्शाना है, तो एक इकाई लंबाई 10 या 100 प्रेक्षणों को निरूपित कर सकती है। निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार कीजिए:

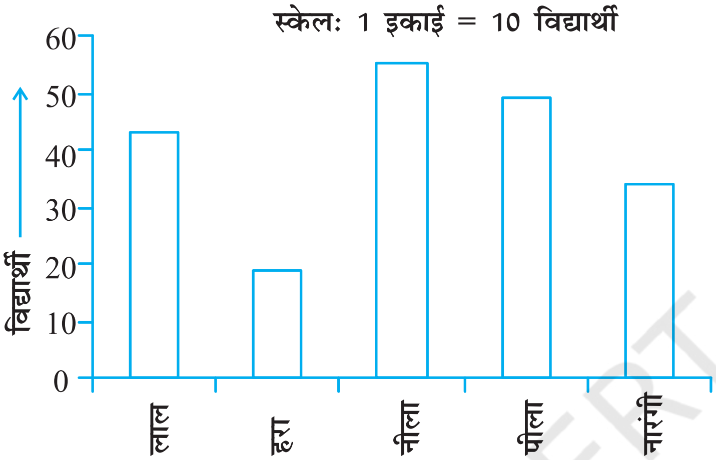
उदाहरण 8 छठी और सातवीं कक्षाओं के 200 विद्यार्थियों से उनके मनपसंद रंग का नाम बताने के लिए कहा गया, ताकि यह निर्णय लिया जा सके कि उनके स्कूल के भवन का क्या रंग रखा जाए। इसके परिणाम निम्नलिखित सारणी में दर्शाए गए हैं। इन आँकड़ों को एक दंड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए।

मनपसंद रंग	लाल	हरा	नीला	पीला	नारंगी
विद्यार्थियों की संख्या	43	19	55	49	34

इस दंड आलेख की सहायता से निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) कौन-सा रंग सबसे अधिक पसंद किया जाता है और कौन-सा रंग सबसे कम पसंद किया जाता है?

(ii) कुल कितने रंग हैं? वे क्या हैं?



हल एक उपयुक्त पैमाना नीचे दर्शाए अनुसार चुनिए :

स्केल को 0 से प्रारंभ कीजिए। आँकड़ों में सबसे बड़ा मान 55 है। अत:, स्केल को 55 से कुछ अधिक, मान लीजिए 60 पर समाप्त करते हैं। अक्ष पर समान विभाजनों (divisions) का प्रयोग कीजिए, जैसे कि 10 की वृद्धियाँ। आप जानते हैं कि सभी दंड (bars) 0 और 60 के बीच स्थित होंगे। हम स्केल को इस प्रकार चुनेंगे, ताकि 0 और 60 के बीच की लंबाई न तो अधिक छोटी हो और न ही अधिक बड़ी हो। यहाँ, हम 1 इकाई = 10 विद्यार्थी लेते हैं।

फिर हम आकृति में दर्शाए अनुसार, दंड आलेख को खींचते और नामांकित करते हैं।

दंड आलेख से हम निष्कर्ष निकालते हैं कि

(i) नीला रंग सबसे मनपसंद रंग है (क्योंकि नीले रंग को निरूपित करने वाला दंड सबसे लंबा है)

(ii) हरा रंग सबसे कम मनपसंद रंग है (क्योंकि हरे रंग को निरूपित करने वाला दंड सबसे छोटा है)।

(iii) यहाँ पांच रंग हैं। ये हैं लाल, हरा, नीला, पीला और नारंगी (ये क्षैतिज अक्ष पर देखे जा सकते हैं)।

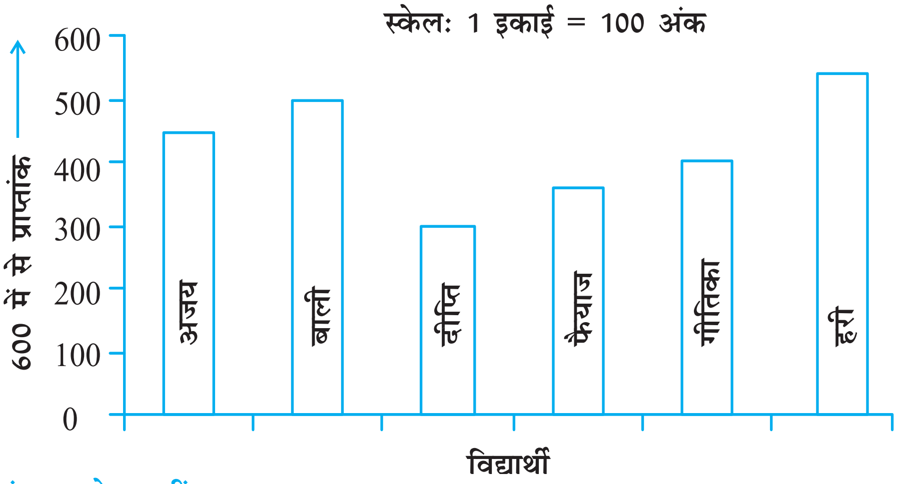
उदाहरण 9 निम्नलिखित आँकड़े किसी कक्षा के छ: विद्यार्थियों द्वारा (600 में से) प्राप्त किए गए कुल अंकों को दर्शाते हैं। इन्हें एक दंड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए।

विद्यार्थी	अजय	बाली	दीप्ति	फैयाज	गीतिका	हरी
प्राप्तांक	450	500	300	360	400	540

हल

1. एक उपयुक्त स्केल चुनने के लिए, हम 100 की वृद्धियाँ लेते हुए, समान विभाजन अक्ष पर अंकित करते हैं। इस प्रकार, 1 इकाई 100 अंक निरूपित करेगी। (यदि हम 1 इकाई से 10 अंकों को निरूपित करें, तो क्या कठिनाई होगी?)

2. अब आँकड़ों को दंड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए।



दोहरे दंड आलेख खींचना

आँकड़ों के निम्नलिखित दो समूहों पर विचार कीजिए, जो दो नगरों, आबेरदीन और मारगेट में, वर्ष के सभी बारह महीनों के लिए, धूप रहने के औसत दैनिक घंटों को दर्शाते हैं। ये नगर दक्षिणी ध्रुव के निकट स्थित हैं और इसीलिए यहाँ प्रतिदिन धूप बहुत कम घंटों के लिए रहती है।

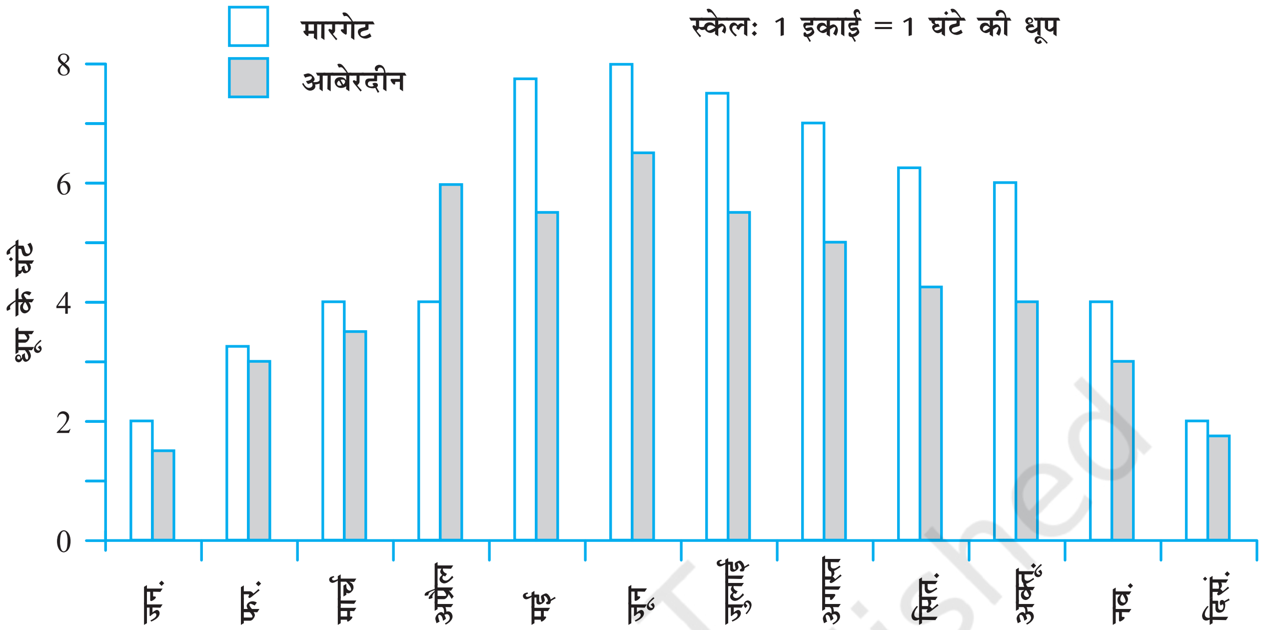
मारगेट में												
	जन.	फर.	मार्च.	अप्रैल	मई	जून	जुलाई	अग.	सित.	अक्तू.	नव.	दिस.
धूप के औसत घंटे	2	$3\frac{1}{4}$	4	4	$7\frac{3}{4}$	8	$7\frac{1}{2}$	7	$6\frac{1}{4}$	6	4	2
आबेरदीन में												
धूप के औसत घंटे	$1\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	6	$5\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$	5	$4\frac{1}{2}$	4	3	$1\frac{3}{4}$

इनके अलग-अलग दंड आलेख खींच कर आप निम्नलिखित प्रकार के प्रश्नों के उत्तर दे सकते हैं:

(i) प्रत्येक नगर में, किस महीने में अधिकतम धूप रहती है? या

(ii) प्रत्येक नगर में, किस महीने में न्यूनतम धूप रहती है?

परंतु 'एक विशेष महीने में, किस नगर में धूप अधिक घंटों तक रहती है?' जैसे प्रश्नों के उत्तर देने के लिए, हमें दोनों नगरों के औसत धूप के घंटों की तुलना करने की आवश्यकता होगी। इसके लिए हम उन आलेखों को खींचना सीखेंगे, जिन्हें दोहरे दंड आलेख (double bar graphs) कहा जाता है। इनमें दोनों नगरों की सूचना दंड आलेखों द्वारा साथ-साथ दी हुई होती हैं।

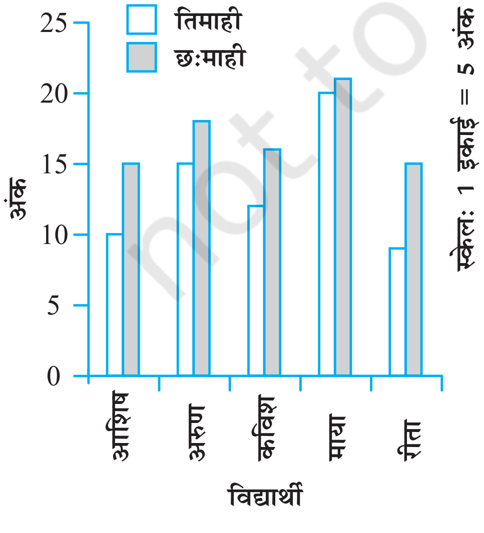


आकृति 3.1

उपरोक्त दंड आलेख (आकृति 3.1) दोनों नगरों के औसत धूप के समय को दर्शाता है। इसमें प्रत्येक महीने के लिए, हमारे पास दो दंड हैं, जिनकी ऊँचाइयाँ प्रत्येक नगर के औसत धूप के घंटों को दर्शाती हैं। इससे हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि अप्रैल के महीने को छोड़कर, अन्य सभी महीनों में मारगेट में आबेरदीन की अपेक्षा धूप सदैव अधिक रहती है। आप इसी प्रकार का दंड आलेख अपने क्षेत्र या नगर के लिए भी बना सकते हैं।

आइए एक और उदाहरण लें, जो हम से अधिक संबंधित है।

उदाहरण 10 गणित की अध्यापिका यह जानना चाहती है कि तिमाही परीक्षा के बाद, उसके द्वारा पढ़ाई में अपनाई गई नई तकनीक का कोई प्रभाव पड़ा या नहीं। वह सबसे कमजोर 5 बच्चों द्वारा तिमाही परीक्षा (25 में से) और छःमाही परीक्षा (25 में से) में प्राप्त किए अंकों को लेती है, जो इस प्रकार हैं :



विद्यार्थी	आशिष	अरुण	कविश	माया	रीता
तिमाही	10	15	12	20	9
छःमाही	15	18	16	21	15

हल पहले वह संलग्न आकृति में दर्शाए अनुसार एक दोहरा दंड आलेख (double bar graph) खींचती है। दंडों को देख कर लगता है कि विद्यार्थियों के प्रदर्शन में बहुत सुधार हुआ है। अतः, वह निर्णय लेती है कि उसे अपनी नई शिक्षण तकनीक जारी रखनी चाहिए।

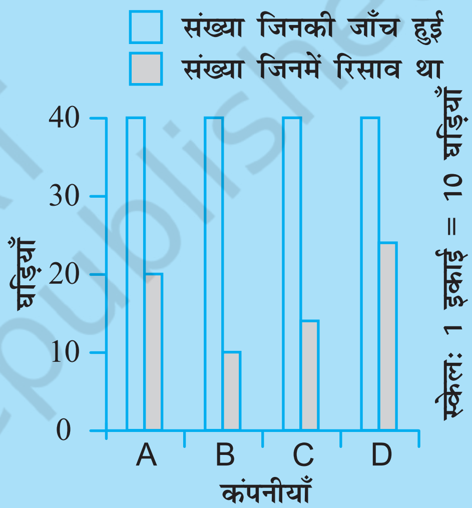
क्या आप कुछ अन्य स्थितियों के बारे में सोचते हैं, जहाँ आप दोहरे दंड आलेखों का प्रयोग कर सकते हैं?

प्रयास कीजिए

1. दिया हुआ दंड आलेख (आकृति 3.2), विभिन्न कंपनियों द्वारा बनाई गई जल प्रतिरोधी (Water resistant) घड़ियों की जाँच के लिए किए गए एक सर्वेक्षण को दर्शाता है। इनमें से प्रत्येक कंपनी ने यह दावा किया कि उनकी घड़ियाँ जल प्रतिरोधी हैं। एक जाँच के बाद उपरोक्त परिणाम प्राप्त हुए हैं।

(a) क्या आप प्रत्येक कंपनी के लिए, रिसाव (Leak) वाली घड़ियों की संख्या की, जाँच की गई कुल घड़ियों की संख्या से भिन्न बना सकते हैं?

(b) इसके आधार पर आप क्या बता सकते हैं कि किस कंपनी की घड़ियाँ बेहतर हैं?



आकृति 3.2

2. वर्षों 1995, 1996, 1997 और 1998 में, अंग्रेज़ी और हिंदी की पुस्तकों की बिक्री नीचे दी गई हैं :

	1995	**1996**	**1997**	**1998**
अंग्रेज़ी	350	400	450	620
हिंदी	500	525	600	650

एक दोहरा दंड आलेख खींचिए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(a) किस वर्ष में दोनों भाषाओं की पुस्तकों की बिक्री का अंतर न्यूनतम था?

(b) क्या आप कह सकते हैं कि अंग्रेज़ी की पुस्तकों की माँग में तेज़ी से वृद्धि हुई है? इसका औचित्य समझाइए।

प्रश्नावली 3.3

1. निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर देने के लिए, आकृति 3.3 में दिए दंड आलेख का प्रयोग कीजिए :

(a) कौन-सा पालतू पशु अधिक लोकप्रिय है?

(b) कितने विद्यार्थियों का पालतू पशु कुत्ता है?

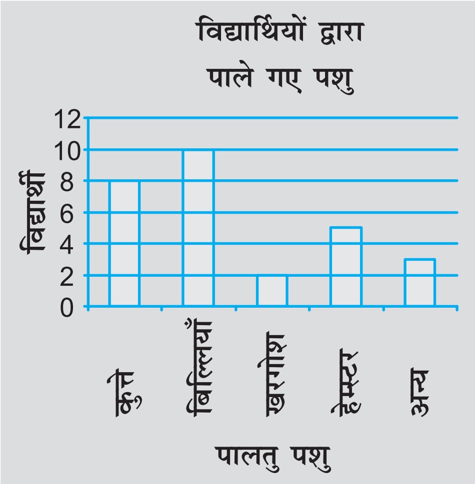
2. निम्नलिखित दंड आलेख को पढ़िए जो एक पुस्तक भंडार द्वारा 5 क्रमागत वर्षों में बेची गई पुस्तकों की संख्या दर्शाती है, और आगे आने वाले प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

(i) वर्षों 1989, 1990 और 1992 में से प्रत्येक में लगभग कितनी पुस्तकें बेची गईं?

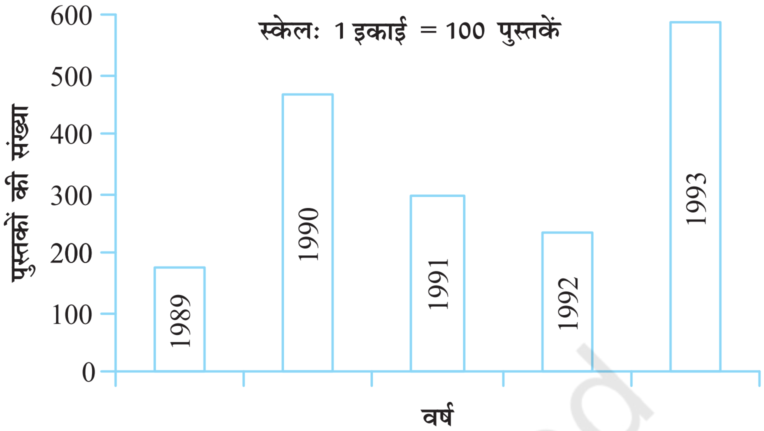
(ii) किस वर्ष में लगभग 475 पुस्तकें बेची गईं? किस वर्ष में लगभग 225 पुस्तकें बेची गईं?

(iii) किन वर्षों में 250 से कम पुस्तकें बेची गईं?

(iv) क्या आप स्पष्ट कर सकते हैं कि आप वर्ष 1989 में बेची गई पुस्तकों का आकलन किस प्रकार करेंगे?



आकृति 3.3



आकृति 3.4

3. छः विभिन्न कक्षाओं के विद्यार्थियों की संख्याएँ नीचे दी गई हैं। इन आँकड़ों को एक दंड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए:

कक्षा	पाँचवीं	छठी	सातवीं	आठवीं	नौंवी	दसवीं
विद्यार्थियों की संख्या	135	120	95	100	90	80

(a) आप स्केल किस प्रकार चुनेंगे?

(b) निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) किस कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या अधिकतम है? किस कक्षा में न्यूनतम है?

(ii) कक्षा 6 के विद्यार्थियों की संख्या का कक्षा 8 के विद्यार्थियों की संख्या से अनुपात ज्ञात कीजिए।

4. एक विद्यार्थी के प्रथम सत्र और द्वितीय सत्र का प्रदर्शन दिया हुआ है। एक उपयुक्त स्केल चुनकर एक दोहरा दंड आलेख खींचिए और दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

विषय	**अंग्रेज़ी**	**हिन्दी**	**गणित**	**विज्ञान**	**सामाजिक विज्ञान**
प्रथम सत्र (अधिकतम अंक 100)	67	72	88	81	73
द्वितीय सत्र (अधिकतम अंक 100)	70	65	95	85	75

(i) किस विषय में विद्यार्थी ने अपने प्रदर्शन में सबसे अधिक सुधार किया है?

(ii) किस विषय में सुधार सबसे कम है?

(iii) क्या किसी विषय में प्रदर्शन नीचे गिरा है?

5. किसी कॉलोनी में किए गए सर्वेक्षण से प्राप्त निम्नलिखित आँकड़ों पर विचार कीजिए :

पसंदीदा खेल	क्रिकेट	बॉस्केट बॉल	तैरना	हॉकी	खेलकूद
देखना	1240	470	510	430	250
भाग लेना	620	320	320	250	105

(i) एक उपयुक्त स्केल चुनकर, एक दोहरा दंड आलेख खींचिए।
इस दंड आलेख से आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं?

(ii) कौन-सा खेल अधिक लोकप्रिय हैं?

(iii) खेलों को देखना अधिक पसंद किया जाता है या उनमें भाग लेना?

6. इस अध्याय के प्रारंभ में, दिए हुए विभिन्न नगरों के न्यूनतम और अधिकतम तापमानों के आँकड़ों (सारणी 3.1) को लीजिए। इन आँकड़ों का एक दोहरा दंड आलेख खींच कर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) दी हुई तिथि पर किस नगर के न्यूनतम और अधिकतम तापमान का अंतर सबसे अधिक है?

(ii) कौन-सा नगर सबसे गर्म है और कौन-सा नगर सबसे ठंडा है।

(iii) ऐसे दो नगरों के नाम लिखिए, जिनमें से एक का अधिकतम तापमान दूसरे के न्यूनतम तापमान से कम था।

(iv) उस नगर का नाम लिखिए, जिसके न्यूनतम और अधिकतम तापमानों का अंतर सबसे कम है।

हमने क्या चर्चा की?

1. औसत एक ऐसी संख्या है, जो दिए हुए प्रेक्षणों के समूह (या आँकड़ों) का प्रतिनिधित्व करता है या उनकी केंद्रीय प्रवृत्ति को दर्शाता है।

2. अंकगणितीय माध्य आँकड़ों का एक प्रतिनिधि मान है।

3. बहुलक केंद्रीय प्रवृत्ति या प्रतिनिधि मान का एक अन्य रूप है। प्रेक्षणों के एक समूह का बहुलक वह प्रेक्षण है जो सबसे अधिक बार आता है।

4. माध्यक भी एक प्रकार का प्रतिनिधि मान है। यह उस मान को दर्शाता है, जो प्रेक्षण के मध्य (बीच) में होता है (उन्हें आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने के बाद) तथा आधे प्रेक्षण इसके ऊपर होते हैं और आधे प्रेक्षण इसके नीचे होते हैं।

5. इकट्ठे किए आँकड़ों को बारंबारता बंटन सारणी की सहायता से चित्रीय रूप से दंड आलेखों के रूप में दर्शाया जा सकता है। दंड आलेख संख्याओं या आँकड़ों का समान चौड़ाई वाले दंडों द्वारा एक चित्रीय निरूपण है।
6. हमने यह भी सीखा है कि एक दोहरा दंड आलेख किस प्रकार खींचा जाता है। यह एक ही दृष्टि में, प्रेक्षणों के दो समूहों की तुलना करने में सहायक रहता है।

अध्याय 4

सरल समीकरण

0757CH04

4.1 बौद्धिक खेल!

अध्यापिका ने कहा है कि वह गणित का एक नया अध्याय पढ़ाना प्रारंभ करने जा रही हैं और वह है सरल समीकरण। अप्पू, सरिता और अमीना ने कक्षा VI में पढ़े गए बीजगणित वाले अध्याय का पुर्नावलोकन कर लिया है। क्या आपने भी कर लिया है? अप्पू, सरिता और अमीना उत्साहित हैं क्योंकि उन्होंने एक खेल बनाया है, जिसे वे बौद्धिक खेल (mind reader) कहती हैं तथा वे उसे पूरी कक्षा के सम्मुख प्रस्तुत करना चाहती हैं।

अध्यापिका उनके उत्साह की सराहना करती है और उन्हें अपना खेल प्रस्तुत करने के लिए आमंत्रित करती है। अमीना खेल प्रारंभ करती है। वह सारा से कोई संख्या सोचने को कहती है तथा उसे 4 से गुणा करके गुणनफल में 5 जोड़ने को कहती है। इसके बाद वह सारा से इसका परिणाम बताने को भी कहती है। सारा कहती है कि परिणाम 65 है। अमीना तुरंत घोषणा करती है कि सारा द्वारा सोची गई संख्या 15 है। सारा सिर हिलाकर हाँ कहती है। सारा समेत पूरी कक्षा आश्चर्यचकित हो जाती है।

अब अप्पू की बारी है। वह बालू से कोई संख्या सोचने, उसे 10 से गुणा करने और गुणनफल में से 20 घटाने को कहता है। इसके बाद वह बालू से उसका परिणाम बताने को कहता है। बालू कहता है कि यह 50 है। अप्पू तुरंत बालू द्वारा सोची गई संख्या बताता है और कहता है कि वह संख्या 7 है। बालू इसकी पुष्टि करता है।

प्रत्येक व्यक्ति यह जानना चाहता है कि अप्पू, सरिता और अमीना द्वारा प्रस्तुत बौद्धिक खेल किस प्रकार कार्य करता है। क्या आप देख सकते हैं कि यह कैसे कार्य करता है? इस अध्याय और अध्याय 12 को पढ़ने के बाद, आप भली-भाँति यह जान जाएँगे कि यह खेल किस प्रकार कार्य करता है।

4.2 समीकरण बनाना

आइए अमीना का उदाहरण लें। अमीना सारा से कोई संख्या सोचने को कहती है। अमीना संख्या के बारे में कुछ नहीं जानती है। उसके लिए, यह संख्या 1, 2, 3, . . ., 11, . . . , 100, ... में से कुछ भी हो सकती है। आइए इस अज्ञात संख्या को एक अक्षर x से व्यक्त करें। आप x के स्थान पर कोई अन्य अक्षर जैसे y, t इत्यादि का प्रयोग कर सकते हैं। इससे कोई प्रभाव नहीं पड़ता कि सारा द्वारा सोची गई अज्ञात संख्या के लिए हम कौन–सा अक्षर प्रयोग करते हैं। सारा जब संख्या को 4 से गुणा करती है, तो उसे $4x$ प्राप्त होता है। फिर वह इस गुणनफल में 5 जोड़ती है और $4x + 5$ प्राप्त करती है। $(4x + 5)$ का मान x के मान पर निर्भर करता है। इस प्रकार, यदि $x = 1$ है, तो $4x + 5 = 4 \times 1 + 5 = 9$ है। इसका अर्थ है कि यदि सारा के मस्तिष्क में 1 होता, तो उसके द्वारा प्राप्त परिणाम 9 होता। इसी प्रकार, यदि उसने संख्या 5 सोची होती, तो उसका $x = 5$ के लिए $4x + 5 = 4 \times 5 + 5 = 25$ । यानी, सारा ने यदि संख्या 5 सोची होती तो उसका परिणाम 25 होता।

सारा द्वारा सोची संख्या ज्ञात करने के लिए, आइए उसके द्वारा प्राप्त उत्तर 65 से विपरीत की ओर कार्य करना प्रारंभ करें। हमें ऐसा x ज्ञात करना है कि

$$4x + 5 = 65 \qquad (4.1)$$

इस समीकरण (equation) का हल ही हमें सारा के मन की संख्या को बताएगा।

इस प्रकार, आइए अब अप्पू के उदाहरण पर विचार करें। आइए बालू द्वारा चुनी गई संख्या को y मान लें। अप्पू ने बालू से इस संख्या को 10 से गुणा कर और फिर गुणनफल में से 20 घटाने को कहा था। अर्थात् बालू y से, पहले $10y$ प्राप्त करता है और उसमें से 20 घटा कर $(10y – 20)$ प्राप्त करता है। इसका ज्ञात परिणाम 50 है।

अतः, $$10y - 20 = 50 \qquad (4.2)$$

इस समीकरण का हल ही बालू द्वारा सोची गई संख्या बताएगा।

4.3 जो हमें ज्ञात है उसकी समीक्षा

ध्यान दीजिए कि (4.1) और (4.2) समीकरण हैं। आइए याद करें कि कक्षा VI में हमने समीकरणों के बारे में क्या पढ़ा था। *समीकरण चर पर एक प्रतिबंध होता है।* समीकरण (4.1) में, चर x है तथा समीकरण (4.2) में, चर y है।

शब्द **चर (variable)** का अर्थ है, ऐसी कोई वस्तु जो विचरण कर, अर्थात् बदल *सकती हो। एक चर विभिन्न संख्यात्मक मान ले (ग्रहण कर) सकता है, अर्थात् इसका मान निश्चित या स्थिर नहीं होता है। चरों को प्राय: अंग्रेज़ी वर्णमाला के अक्षरों* x, y, z, l, m, n, p इत्यादि से व्यक्त किया जाता है। *चरों से हम व्यंजकों (expressions) को बनाते हैं।* ये व्यंजक चरों पर योग, व्यवकलन, गुणन और विभाजन जैसी संक्रियाएँ करके प्राप्त किए (बनाए) जाते हैं। x से हमने व्यंजक $(4x + 5)$ बनाया था। इसके लिए, हमने पहले x को 4 से गुणा किया और फिर गुणनफल में 5 जोड़ा था। इसी प्रकार, हमने y से व्यंजक $(10y – 20)$ बनाया था। इसके लिए, हमने y को 10 से गुणा किया और फिर गुणनफल में से 20 को घटाया था। ये सभी व्यंजकों के उदाहरण हैं।

उपरोक्त प्रकार के बनाए गए एक व्यंजक का मान, चर के चुने गए मान पर निर्भर करता है। जैसा कि हम पहले ही देख चुके हैं कि जब $x = 1$ है, तो $4x + 5 = 9$ है; जब $x = 5$ है, तो $4x + 5 = 25$ है इसी प्रकार,

जब $x = 15$, तो $4x + 5 = 4 \times 15 + 5 = 65$ है;

जब $x = 0$, तो $4x + 5 = 4 \times 0 + 5 = 5$ है, इत्यादि।

समीकरण (4.1) चर x पर एक प्रतिबंध है। यह बताती है कि व्यंजक $4x + 5$ का मान 65 है। यह प्रतिबंध $x = 15$ होने पर संतुष्ट होता है। संख्या 15 समीकरण $4x + 5 = 65$ का एक हल (solution) है। जब $x = 5$ है, तो $4x + 5 = 25$ है जो 65 के बराबर नहीं है। इस प्रकार, $x = 5$ इस समीकरण का हल नहीं है। इसी प्रकार, $x = 0$ भी इस समीकरण का हल नहीं है। 15 के अतिरिक्त, x का कोई भी मान प्रतिबंध $4x + 5 = 65$ को संतुष्ट नहीं करता है।

प्रयास कीजिए

व्यंजक $(10y - 20)$ का मान y के मान पर निर्भर करता है। y को पाँच भिन्न-भिन्न मान देकर तथा y के प्रत्येक मान के लिए $(10y - 20)$ का मान ज्ञात करके इसकी पुष्टि कीजिए। $(10y - 20)$ के प्राप्त किए गए विभिन्न मानों से, क्या आप $10y - 20 = 50$ का कोई हल देख रहे हैं? यदि कोई हल प्राप्त नहीं हुआ हे, तो y को कुछ अन्य मान देकर, ज्ञात कीजिए कि प्रतिबंध $10y - 20 = 50$ संतुष्ट होता है या नहीं।

4.4 समीकरण क्या है?

एक समीकरण में, **समता** या **समिका** (equality) का चिह्न सदैव होता है। समता का चिह्न यह दर्शाता है कि इस चिह्न के बाईं ओर के व्यंजक [बायाँ पक्ष (LHS)] का मान चिह्न के दाईं ओर के व्यंजक [दायाँ पक्ष (RHS)] के मान के बराबर है। समीकरण (4.1) में, L.H.S $(4x + 5)$ है तथा RHS 65 है। समीकरण (4.2) में, LHS $(10y - 20)$ तथा RHS 50 है।

यदि LHS और RHS के बीच में समता चिह्न के अतिरिक्त कोई अन्य चिह्न हो, तो वह एक समीकरण नहीं होती है। इसलिए $4x + 5 > 65$ एक समीकरण नहीं है।

यह कथन हमें बताता है कि $(4x + 5)$ का मान 65 से अधिक है।

इसी प्रकार, $4x + 5 < 65$ भी एक समीकरण नहीं है। यह कथन हमें बताता है कि $(4x + 5)$ का मान 65 से कम है।

समीकरणों में हम प्राय: यह देखते हैं कि RHS केवल एक संख्या है। समीकरण (4.1) में यह 65 है तथा समीकरण (4.2) में यह 50 है। परंतु ऐसा होना सदैव आवश्यक नहीं है। एक समीकरण का दायाँ पक्ष (RHS) चर से संबद्ध एक व्यंजक भी हो सकता है। उदाहरणार्थ, समीकरण

$$4x + 5 = 6x - 25$$

में समता चिह्न के बाईं ओर व्यंजक $4x + 5$ है तथा उसके दाईं ओर व्यंजक $6x - 25$ है।

संक्षिप्त रूप में, एक समीकरण चर पर एक प्रतिबंध होता है। प्रतिबंध यह है कि दोनों व्यंजकों के मान बराबर होने चाहिए। ध्यान दीजिए कि इन दोनों व्यंजकों में से कम से कम एक में चर अवश्य होना चाहिए।

हम समीकरणों का एक सरल और उपयोगी गुण देखते हैं। समीकरण $4x + 5 = 65$ वही है जो समीकरण $65 = 4x + 5$ है। इसी प्रकार, समीकरण $6x - 25 = 4x + 5$ वही है जो समीकरण $4x + 5 = 6x - 25$ है। *किसी समीकरण के बाएँ और दाएँ पक्षों के व्यंजकों को आपस में बदलने पर, समीकरण वही रहती है।* यह गुण बहुधा समीकरणों को हल करने में उपयोगी रहता है।

उदाहरण 1 निम्नलिखित कथनों को समीकरणों के रूप में लिखिए :

(i) x के तिगुने और 11 का योग 32 है।

(ii) यदि किसी संख्या के 6 गुने में से आप 5 घटाएँ, तो 7 प्राप्त होता है।

(iii) m का एक चौथाई 7 से 3 अधिक है।

(iv) किसी संख्या के एक तिहाई में 5 जोड़ने पर 8 प्राप्त होता है ।

हल

(i) x का तिगुना $3x$ है।

$3x$ और 11 का योग $3x + 11$ है। यह योग 32 है।

अत:, वांछित समीकरण $3x + 11 = 32$ है।

(ii) आइए मान लें कि यह संख्या z है। z को 6 से गुणा करने पर $6z$ प्राप्त होता है।

$6z$ में से 5 घटाने पर $6z - 5$ प्राप्त होगा। यह परिणाम 7 है।

अत:, वांछित समीकरण $6z - 5 = 7$ है।

(iii) m का एक चौथाई $\frac{m}{4}$ है।

यह 7 से 3 अधिक है। इसका अर्थ है कि अंतर $(\frac{m}{4} - 7)$ बराबर 3 है।

अत:, वांछित समीकरण $\frac{m}{4} - 7 = 3$ है।

(iv) वांछित संख्या को n मान लीजिए। n का एक तिहाई $\frac{n}{3}$ है।

उपरोक्त एक-तिहाई जमा 5, $\frac{n}{3} + 5$ है। यह 8 के बराबर है ।

अत:, वांछित समीकरण $\frac{n}{3} + 5 = 8$ है।

उदाहरण 2 निम्नलिखित समीकरणों को सामान्य कथनों के रूप में बदलिए :

(i) $x - 5 = 9$ (ii) $5p = 20$ (iii) $3n + 7 = 1$ (iv) $\frac{m}{5} - 2 = 6$

हल

(i) x में से 5 निकालने पर 9 प्राप्त होता है।

(ii) एक संख्या p का पाँच गुना 20 है।

(iii) 1 प्राप्त करने के लिए n के तीन गुने में 7 जोड़िए।

(iv) किसी संख्या m के $\frac{1}{5}$ वें भाग में से 2 घटाने पर 6 प्राप्त होता है।

यहाँ ध्यान देने योग्य एक महत्वपूर्ण बात यह है कि एक दिए हुए समीकरण को, केवल एक ही नहीं, बल्कि अनेक सामान्य कथनों के रूप दिए जा सकते हैं। उदाहरणार्थ, उपरोक्त समीकरण (i) के लिए आप कह सकते हैं :

x में से 5 घटाइए। आपको 9 प्राप्त होता है।

अथवा संख्या x, 9 से 5 अधिक है।

अथवा 9 संख्या x से 5 कम है।

अथवा x और 5 का अंतर 9 है; इत्यादि।

प्रयास कीजिए

उपरोक्त समीकरणों (ii), (iii) और (iv) में से प्रत्येक के लिए, कम से कम एक अन्य कथन के रूप में लिखिए ।

उदाहरण 3 निम्नलिखित स्थिति पर विचार कीजिए :

राजू के पिता की आयु राजू की आयु के तीन गुने से 5 वर्ष अधिक है। राजू के पिता की आयु 44 वर्ष है। राजू की आयु ज्ञात करने के लिए, एक समीकरण बनाइए (स्थापित कीजिए)।

हल हमें राजू की आयु ज्ञात नहीं है। आइए इसे y वर्ष मान लें। राजू की आयु का तीन गुना $3y$ वर्ष है। राजू के पिता की आयु $3y$ वर्ष से 5 वर्ष अधिक है। अर्थात् राजू के पिता की आयु $(3y + 5)$ वर्ष है। यह भी दिया है कि राजू के पिता की आयु 44 वर्ष है।

अतः,
$$3y + 5 = 44 \qquad (4.3)$$

यह चर y में एक समीकरण है। इसे हल करने पर राजू की आयु ज्ञात हो जाएगी।

उदाहरण 4 एक दुकानदार दो प्रकार की पेटियों में आम बेचता है। ये पेटियाँ छोटी और बड़ी हैं। एक बड़ी पेटी में 8 छोटी पेटियों के बराबर आम और 4 खुले आम आते हैं। प्रत्येक छोटी पेटी में आमों की संख्या बताने वाला एक समीकरण बनाइए। दिया हुआ है कि एक बड़ी पेटी में आमों की संख्या 100 है।

हल मान लीजिए कि एक छोटी पेटी में m आम हैं। एक बड़ी पेटी में m के 8 गुने से 4 अधिक आम हैं। अर्थात् एक बड़ी पेटी में $8m + 4$ आम हैं। परंतु यह संख्या 100 दी हुई है। इस प्रकार,

$$8m + 4 = 100 \qquad (4.4)$$

इस समीकरण को हल करके, आप एक छोटी पेटी के आमों की संख्या ज्ञात कर सकते हैं।

प्रश्नावली 4.1

1. निम्नलिखित सारणी के अंतिम स्तंभ को पूरा कीजिए :

क्रम संख्या	समीकरण	चर का मान	बताइए कि समीकरण संतुष्ट होती है या नहीं (हाँ/नहीं)
(i)	$x + 3 = 0$	$x = 3$	–
(ii)	$x + 3 = 0$	$x = 0$	–
(iii)	$x + 3 = 0$	$x = -3$	–
(iv)	$x - 7 = 1$	$x = 7$	–
(v)	$x - 7 = 1$	$x = 8$	–
(vi)	$5x = 25$	$x = 0$	–
(vii)	$5x = 25$	$x = 5$	–
(viii)	$5x = 25$	$x = -5$	–
(ix)	$\frac{m}{3} = 2$	$m = -6$	–
(x)	$\frac{m}{3} = 2$	$m = 0$	–
(xi)	$\frac{m}{3} = 2$	$m = 6$	–

2. जाँच कीजिए कि कोष्ठकों में दिये हुए मान, दिए गए संगत समीकरणों के हल हैं या नहीं :

(a) $n + 5 = 19$ $(n = 1)$ (b) $7n + 5 = 19$ $(n = -2)$ (c) $7n + 5 = 19$ $(n = 2)$

(d) $4p - 3 = 13$ $(p = 1)$ (e) $4p - 3 = 13$ $(p = -4)$ (f) $4p - 3 = 13$ $(p = 0)$

3. प्रयत्न और भूल विधि से निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए :

(i) $5p + 2 = 17$ (ii) $3m - 14 = 4$

4. निम्नलिखित कथनों के लिए समीकरण दीजिए :

(i) संख्याओं x और 4 का योग 9 है। (ii) y में से 2 घटाने पर 8 प्राप्त होते हैं।

(iii) a का 10 गुना 70 है। (iv) संख्या b को 5 से भाग देने पर 6 प्राप्त होता है।

(v) t का तीन-चौथाई 15 है।

(vi) m का 7 गुना और 7 का योगफल आपको 77 देता है।

(vii) एक संख्या x की चौथाई ऋण 4 आपको 4 देता है।

(viii) यदि आप y के 6 गुने में से 6 घटाएँ, तो आपको 60 प्राप्त होता है।

(ix) यदि आप z के एक-तिहाई में 3 जोड़ें, तो आपको 30 प्राप्त होता है।

5. निम्नलिखित समीकरणों को सामान्य कथनों के रूप में लिखिए :

(i) $p + 4 = 15$ (ii) $m - 7 = 3$ (iii) $2m = 7$ (iv) $\frac{m}{5} = 3$

(v) $\frac{3m}{5} = 6$ (vi) $3p + 4 = 25$ (vii) $4p - 2 = 18$ (viii) $\frac{p}{2} + 2 = 8$

6. निम्नलिखित स्थितियों में समीकरण बनाइए :

(i) इरफान कहता है कि उसके पास, परमीत के पास जितने कँचे हैं उनके पाँच गुने से 7 अधिक कँचे हैं। इरफान के पास 37 कँचे हैं। (परमीत के कँचों की संख्या को m लीजिए।)

(ii) लक्ष्मी के पिता की आयु 49 वर्ष है। उनकी आयु, लड़की की आयु के तीन गुने से 4 वर्ष अधिक है। (लक्ष्मी की आयु को y वर्ष लीजिए।)

(iii) अध्यापिका बताती हैं कि उनकी कक्षा में एक विद्यार्थी द्वारा प्राप्त किए गए अधिकतम अंक, प्राप्त किए न्यूनतम अंक का दुगुना धन 7 हैं। प्राप्त किए गए अधिकतम अंक 87 हैं। (न्यूनतम प्राप्त किए गए अंकों को l लीजिए।)

(iv) एक समद्विबाहु त्रिभुज में शीर्ष कोण प्रत्येक आधार कोण का दुगुना है। (मान लीजिए प्रत्येक आधार कोण b डिग्री है। याद रखिए कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180 डिग्री होता है।)

4.4.1 एक समीकरण को हल करना

इस समिका पर विचार कीजिए

$$8 - 3 = 4 + 1 \qquad (4.5)$$

समिका (4.5) सत्य है, क्योंकि इसके दोनों पक्ष बराबर हैं (प्रत्येक 5 के बराबर है)।

- आइए दोनों पक्षों में 2 जोड़ें। इसके परिणामस्वरूप, हमें प्राप्त होता है:

  LHS $= 8 - 3 + 2 = 5 + 2 = 7$, RHS $= 4 + 1 + 2 = 5 + 2 = 7$.

  पुनः, समिका (4.5) सत्य है (अर्थात LHS और RHS समान हैं)।

  इस प्रकार, *यदि हम एक समिका के दोनों पक्षों में एक ही संख्या जोड़ें, तो भी वह समिका सत्य होती है।*

- आइए अब दोनों पक्षों में से 2 घटाइए। इसके परिणामस्वरूप, हमें प्राप्त होता है :

  LHS $= 8 - 3 - 2 = 5 - 2 = 3$, RHS $= 4 + 1 - 2 = 5 - 2 = 3$.

  पुनः, वह समिका सत्य है।

  इस प्रकार, *यदि हम एक समिका के दोनों पक्षों में से एक ही संख्या घटाएँ, तो भी वह समिका सत्य होती है।*

- इसी प्रकार, *यदि हम एक समिका के दोनों पक्षों को एक ही शून्येतर (non-zero) संख्या से गुणा करें या भाग दें, तो भी वह समिका सत्य होती है।*

  उदाहरणार्थ, आइए उपरोक्त समिका के दोनों पक्षों को 3 से गुणा करें। हमें प्राप्त होता है :

  LHS $= 3 \times (8 - 3) = 3 \times 5 = 15$, RHS $= 3 \times (4 + 1) = 3 \times 5 = 15$.

  समिका सत्य है।

आइए अब हम उपरोक्त समिका के दोनों पक्षों को 2 से भाग करें ।

$$\text{LHS} = (8 - 3) \div 2 = 5 \div 2 = \frac{5}{2}$$

$$\text{RHS} = (4 + 1) \div 2 = 5 \div 2 = \frac{5}{2} = \text{LHS}$$

पुन:, समिका सत्य है।

यदि हम कोई अन्य समिका लें, तो भी हमें यही निष्कर्ष प्राप्त होता है।

मान लीजिए कि हम इस नियम का पालन नहीं करते हैं। विशेष रूप से, मान लीजिए कि हम एक समिका के दोनों पक्षों में भिन्न-भिन्न संख्याएँ जोड़ते हैं। इस स्थिति में, हम देखेंगे कि समिका सत्य नहीं होगी (अर्थात दोनों पक्ष समान नहीं होंगे)। उदाहरणार्थ, आइए समिका (4.5) को पुनः लें :

$$8 - 3 = 4 + 1$$

अब, इसके बाएँ पक्ष में 2 जोड़ें और दाएँ पक्ष में 3 जोड़े। अब नई LHS $= 8 - 3 + 2 = 5 + 2 = 7$ है तथा नई RHS $= 4 + 1 + 3 = 5 + 3 = 8$ है। अब, समिका सत्य नहीं है, क्योंकि नई LHS और RHS बराबर नहीं हैं।

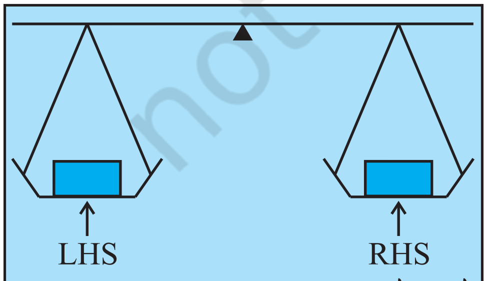
इस प्रकार, *यदि हम एक समिका के दोनों पक्षों में, कोई गणितीय संक्रिया एक ही संख्या के साथ न करें, तो समिका सत्य नहीं हो सकती है।*

समीकरण, एक चरों वाली समिका होती है।

उपरोक्त निष्कर्ष समीकरणों के लिए भी मान्य होते हैं, क्योंकि प्रत्येक समीकरण में चर केवल संख्या ही निरूपित करता है।

प्रायः एक समीकरण को एक तौलने वाली तराजू या तुला (balance) समझा जाता है। एक समीकरण पर एक गणितीय संक्रिया करना इस प्रकार समझना चाहिए, जैसे कि तौलने वाली तराजू के दोनों पलड़ों में बराबर बाँट डालना या उनमें से बराबर बाँट निकाल लेना।

[एक समीकरण एक ऐसी तौलने वाली तराजू समझा जा सकता है, जिसके दोनों पलड़ों में बराबर बाँट रखे हों।] इस स्थिति में, तराजू की डंडी ठीक क्षैतिज रहती है। यदि हम दोनों पलड़ों में बराबर बाँट (weights) डालें, तो डंडी अभी भी क्षैतिज ही रहती है। इसी प्रकार, यदि हम दोनों पलड़ों में से बराबर बाँट हटा लें (निकालें), तो भी डंडी क्षैतिज रहती है। इसके विपरीत, यदि हम दोनों पलड़ों में भिन्न बाँट डालें (जोड़ें) या उनमें से भिन्न बाँट निकालें (घटाएँ), तो भी तराजू की डंडी का संतुलन बिगड़ जाता है, अर्थात् डंडी क्षैतिज पर नहीं रहती है।



एक संतुलित समीकरण तराजू जैसी है जिसके दोनों पलड़ों में बराबर बाँट रखें हों।

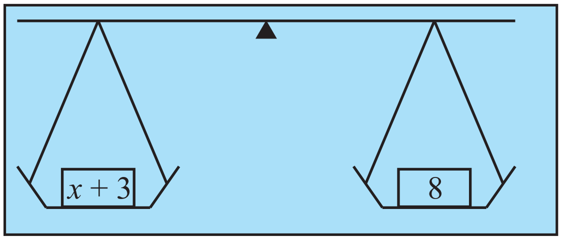
हम यह सिद्धांत एक समीकरण को हल करने में प्रयोग करते हैं। निस्संदेह, यहाँ तराजू काल्पनिक है तथा संख्याओं को बाँटों की तरह भौतिक रूप से संतुलित करने के लिए प्रयोग नहीं किया जा सकता। इस सिद्धांत को प्रस्तुत करने का यही मुख्य उद्देश्य है। आइए कुछ उदाहरण लें।

- निम्नलिखित समीकरण पर विचार कीजिए:

$$x + 3 = 8 \qquad (4.6)$$

हम इस समीकरण के दोनों पक्षों में से 3 को घटाते हैं।

नई LHS है : $x + 3 - 3 = x$ तथा नई RHS है : $8 - 3 = 5$



हम 3 को क्यों घटाएँ कोई और संख्या क्यों न घटाएँ? 3 को जोड़ कर देखिए। क्या यह कुछ सहायता करेगा? क्यों नहीं?

ऐसा इसलिए किया है, क्योंकि 3 को घटाने पर L.H.S. में x रह जाता है।

चूँकि इससे संतुलन में कोई परिवर्तन नहीं होता है, इसलिए हमें प्राप्त होता है :

नई LHS = नई RHS या $x = 5$

यह वही है, जो हम चाहते हैं। अर्थात् यह समीकरण (4.6) का एक हल है।

इसकी पुष्टि करने के लिए कि यह सही है या नहीं, हम प्रारंभिक समीकरण में $x = 5$ रखेंगे। हमें LHS $= x + 3 = 5 + 3 = 8$ प्राप्त होती है, जो RHS के बराबर है। यही हल सही होने के लिए आवश्यक है।

समीकरण के दोनों पक्षों में सही गणितीय संक्रिया करने से (अर्थात् 3 घटाने से), हम समीकरण के हल पर पहुँच गए ।

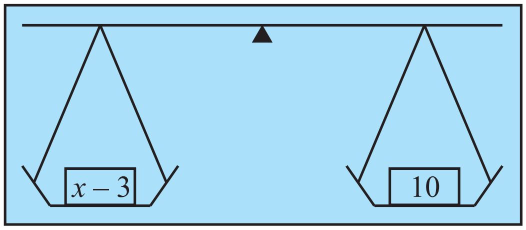
- आइए एक अन्य समीकरण लें :

$$x - 3 = 10 \qquad (4.7)$$

यहाँ हमें क्या करना चाहिए? हमें दोनों पक्षों में 3 जोड़ना चाहिए। ऐसा करने से, समीकरण का संतुलन बना रहेगा तथा L.H.S में केवल x रह जाएगा।

नई LHS $= x - 3 + 3 = x$, नई RHS $= 10 + 3 = 13$

अत: $x = 13$ है, जो वांछित हल है।



प्रारंभिक समीकरण (4.7) में $x = 13$ रखने पर, हम इसकी पुष्टि करते हैं कि यह हल सही है :

प्रारंभिक समीकरण की LHS $= x - 3 = 13 - 3 = 10$ है।

जैसा कि वांछनीय है यह, RHS के बराबर है।

- इसी प्रकार, आइए निम्नलिखित समीकरणों को देखें :

$$5y = 35 \qquad (4.8)$$

$$\frac{m}{2} = 5 \qquad (4.9)$$

पहली स्थिति में, हम दोनों पक्षों को 5 से भाग देंगे। इससे LHS में केवल y रह जाता है।

नई LHS $= \frac{5y}{5} = \frac{5 \times y}{5} = y$,   नई RHS $= \frac{35}{5} = \frac{5 \times 7}{5} = 7$

अतः $y = 7$

यही समीकरण का वांछित हल है। हम समीकरण (4.8) में $y = 7$ प्रतिस्थापित करके इसकी जाँच कर सकते हैं कि समीकरण संतुष्ट हो जाता है।

दूसरी स्थिति में, हम दोनों पक्षों को 2 से गुणा करते हैं। इससे LHS में केवल m रह जाता है।

नई LHS $= \frac{m}{2} \times 2 = m$. तथा नई RHS $= 5 \times 2 = 10$ है।

अतः, $m = 10$ (यही वांछित हल है। आप इसकी जाँच कर सकते हैं कि यह हल सही है या नहीं)।

उपरोक्त उदाहरणों से यह देखा जा सकता है कि समीकरण के हल करने के लिए, हमें जिस संक्रिया की आवश्यकता पड़ेगी वह समीकरण पर निर्भर करता है। हमारा प्रयास यह होना चाहिए कि समीकरण में चर पृथक् हो जाए। कभी-कभी ऐसा करने के लिए, हमें एक से अधिक गणितीय संक्रियाएँ करनी पड़ सकती हैं। इसको मस्तिष्क में रखते हुए, आइए कुछ और समीकरण हल करें।

उदाहरण 5 हल कीजिए:

(a) $3n + 7 = 25$ (4.10)

(b) $2p - 1 = 23$ (4.11)

हल

(a) हम समीकरण की LHS में चर n को पृथक् करने के लिए, एक चरणबद्ध विधि से कार्य करते हैं। LHS यहाँ $3n + 7$ है। पहले हम इसमें से 7 घटाएँगे, जिससे $3n$ प्राप्त होगा। इससे अगले चरण में, हम इसे 3 से भाग देंगे, जिससे n प्राप्त होगा। याद रखिए कि हमें समीकरण के दोनों पक्षों में एक ही संक्रिया करनी चाहिए। अतः, दोनों पक्षों में से 7 घटाने पर,

$$3n + 7 - 7 = 25 - 7 \quad \text{(चरण 1)}$$

या, $3n = 18$

अब दोनों पक्षों को 3 से भाग दीजिए :

$$\frac{3n}{3} = \frac{18}{3} \quad \text{(चरण 2)}$$

या, $n = 6$, जो इसका हल है।

(b) यहाँ हमें क्या करना चाहिए? पहले हम दोनों पक्षों में 1 जोड़ते हैं :

$$2p - 1 + 1 = 23 + 1 \quad \text{(चरण 1)}$$

या $2p = 24$

अब, दोनों पक्षों को 2 से भाग देते हैं : $\frac{2p}{2} = \frac{24}{2}$ (चरण 2)

या $p = 12$, जो इसका हल है।

आपको एक अच्छी आदत विकसित कर लेनी चाहिए, जो यह है कि प्राप्त किए हल की जाँच अवश्य कर लें। यद्यपि हमने यह (a) के लिए नहीं किया है, परंतु आइए इस उदाहरण (b) के लिए ऐसा करें।

आइए इस हल $p = 12$ को समीकरण में रखें ।

$$\text{LHS} = 2p - 1 = 2 \times 12 - 1 = 24 - 1$$
$$= 23 = \text{RHS}$$

इस प्रकार, हल की सत्यता की जाँच हो गई।

उपरोक्त (a) के हल की भी अब आप जाँच कर ही लीजिए ।

अब हम इस स्थिति में हैं कि अप्पू, सरिता और अमीना द्वारा प्रस्तुत किए गए बौद्धिक खेल पर वापस जाएँ और समझें कि उन्होंने अपने उत्तर किस प्रकार ज्ञात किए। इस कार्य के लिए, आइए समीकरणों (4.1) और (4.2) को देखें, जो क्रमशः अमीना और अप्पू के उदाहरणों के संगत हैं।

- पहले निम्नलिखित समीकरण पर विचार कीजिए: $4x + 5 = 65$. (4.1)

  दोनों पक्षों में से 5 घटाने पर, $4x + 5 - 5 = 65 - 5$.

  अर्थात्, $4x = 60$

  x को पृथक् करने के लिए, दोनों पक्षों को 4 से भाग देने पर, $\frac{4x}{4} = \frac{60}{4}$

  या $x = 15$, जो वांछित हल है। (जाँच कीजिए कि यह सही है।)

- अब निम्नलिखित समीकरण पर विचार कीजिए:

  $10y - 20 = 50$ (4.2)

  दोनों पक्षों में, 20 जोड़ने पर, हमें प्राप्त होता है:

  $10y - 20 + 20 = 50 + 20$ या $10y = 70$

  दोनों पक्षों को 10 से भाग देने पर, हमें प्राप्त होता है : $\frac{10y}{10} = \frac{70}{10}$

  या, $y = 7$, जो वांछित हल है। (जाँच कीजिए कि यह सही है।)

आप यह अनुभव करेंगे कि ठीक यही उत्तर अप्पू, सरिता और अमीना ने दिए थे। उन्होंने समीकरण बनाना और फिर उन्हें हल करना सीख लिया था। इसी कारण वे अपना बौद्धिक खेल बनाकर संपूर्ण कक्षा पर अपना प्रभाव डाल पाए। हम इस पर अनुच्छेद 4.7 में वापस आएँगे।

प्रश्नवली 4.2

1. पहले चर को पृथक् करने वाला चरण बताइए और फिर समीकरण को हल कीजिए :

(a) $x - 1 = 0$ (b) $x + 1 = 0$ (c) $x - 1 = 5$

(d) $x + 6 = 2$ (e) $y - 4 = -7$ (f) $y - 4 = 4$

(g) $y + 4 = 4$ (h) $y + 4 = -4$

2. पहले चर को पृथक् करने के लिए प्रयोग किए जाने वाले चरण को बताइए और फिर समीकरण को हल कीजिए :

(a) $3l = 42$ (b) $\frac{b}{2} = 6$ (c) $\frac{p}{7} = 4$ (d) $4x = 25$

(e) $8y = 36$ (f) $\frac{z}{3} = \frac{5}{4}$ (g) $\frac{a}{5} = \frac{7}{15}$ (h) $20t = -10$

3. चर को पृथक् करने के लिए, जो आप चरण प्रयोग करेंगे, उसे बताइए और फिर समीकरण को हल कीजिए :

(a) $3n - 2 = 46$ (b) $5m + 7 = 17$ (c) $\frac{20p}{3} = 40$ (d) $\frac{3p}{10} = 6$

4. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए :

(a) $10p = 100$ (b) $10p + 10 = 100$ (c) $\frac{p}{4} = 5$ (d) $\frac{-P}{3} = 5$

(e) $\frac{3p}{4} = 6$ (f) $3s = -9$ (g) $3s + 12 = 0$ (h) $3s = 0$

(i) $2q = 6$ (j) $2q - 6 = 0$ (k) $2q + 6 = 0$ (l) $2q + 6 = 12$

4.5 कुछ और समीकरण

आइए कुछ और समीकरणों को हल करने का अभ्यास करें। इन समीकरणों को हल करते समय, हम एक संख्या (पद) को **स्थानापन्न (transpose)** करने (अर्थात् एक पक्ष से दूसरे पक्ष में ले जाने) के बारे में पढ़ेंगे (सीखेंगे) हम किसी संख्या को, समीकरण के दोनों पक्षों में जोड़ने या दोनों पक्षों में घटाने के एवज में, स्थानापन्न कर सकते हैं।

उदाहरण 6 हल कीजिए : $12p - 5 = 25$ (4.12)

हल

- समीकरण के दोनों पक्षों में 5 जोड़ने पर,

$12p - 5 + 5 = 25 + 5$ या, $12p = 30$

- दोनों पक्षों को 12 से भाग देने पर,

$$\frac{12p}{12}=\frac{30}{12} \quad \text{या} \quad p=\frac{5}{2}$$

जाँच : समीकरण (4.12) की LHS में, $p=\frac{5}{2}$ रखने पर

$$\text{LHS} = 12\times\frac{5}{2}-5$$
$$= 6\times 5-5$$
$$= 30-5 = 25 = \text{RHS}$$

ध्यान दीजिए कि दोनों पक्षों में 5 जोड़ने का वही अर्थ है, जो (– 5) का पक्ष बदलने का है!

$$12p - 5 = 25$$
$$12p = 25 + 5$$

पक्ष बदलने को **स्थानापन्न** करना कहते हैं। स्थानापन्न करने में, संख्या का चिह्न बदल जाता है।

जैसा कि हमने किसी समीकरण को हल करते समय देखा है, सामान्यत: हम समीकरण के दोनों पक्षों में एक ही संख्या जोड़ते हैं या उनमें से एक ही संख्या को घटाते हैं। *किसी संख्या को स्थानापन्न करना* (अर्थात् संख्या के पक्षों में परिवर्तन करना) *संख्या को दोनों पक्षों में जोड़ने या दोनों पक्षों में से घटाने जैसा ही है।* ऐसा करने के लिए, उस संख्या का चिह्न बदलना पड़ता है। जो नियम संख्याओं के लिए प्रयोग किया जाता है, वही नियम व्यंजकों के लिए भी प्रयोग किया जाता है। आइए स्थानापन्न के दो और उदाहरण लें।

दोनों पक्षों में जोड़ना या घटाना	स्थानापन्न करना
(i) $3p - 10 = 5$	(i) $3p - 10 = 5$
दोनों पक्षों में 10 जोड़िए	LHS से (–10) को स्थानापन्न करना
$3p - 10 + 10 = 5 + 10$	(स्थानापन्न करने पर, – 10 बदल कर + 10 हो जाता है।)
या $3p = 15$	$3p = 5 + 10$ या $3p = 15$
(ii) $5x + 12 = 27$	(ii) $5x + 12 = 27$
दोनों पक्षों में से 12 घटाइए।	+ 12 को स्थानापन्न करना
	(+ 12 स्थानापन्न करने पर, – 12 हो जाता है)
$5x + 12 - 12 = 27 - 12$	$5x = 27 - 12$
या $5x = 15$	या $5x = 15$

अब हम दो और समीकरणों को हल करेंगे। जैसा कि आप देख सकते हैं, इन समीकरणों में कोष्ठक भी हैं, जिन्हें सर्वप्रथम खोलना पड़ेगा।

उदाहरण 7 हल कीजिए :

(a) $4(m + 3) = 18$ (b) $-2(x + 3) = 8$

हल

(a) $4(m + 3) = 18$

आइए दोनों पक्षों को 4 से विभाजित करें। इससे LHS में से कोष्ठक हट जाएँगे। हमें प्राप्त होता है:

$$m+3=\frac{18}{4} \quad \text{या} \quad m+3=\frac{9}{2}$$

या $\quad m=\frac{9}{2}-3$ (3 को RHS में स्थानापन्न करने पर)

या $\quad m=\frac{3}{2}$ (वांछित हल) $\left(\text{क्योंकि } \frac{9}{2}-3=\frac{9}{2}-\frac{6}{2}=\frac{3}{2}\right)$

जाँच $\quad$ LHS $= 4\left[\frac{3}{2}+3\right]=4\times\frac{3}{2}+4\times3=2\times3+4\times3$ [$m=\frac{3}{2}$ रखिए]

$= 6 + 12 = 18 =$ RHS

(b) $\quad -2\,(x + 3) = 8$

LHS में से कोष्ठकों को हटाने के लिए, हम दोनों पक्षों को -2 से भाग देते हैं। हमें प्राप्त होता है :

$$x+3=-\frac{8}{2} \quad \text{या} \quad x+3=-4$$

या, $x = -4 - 3$ (3 को RHS में स्थानापन्न करने पर)

या $\quad x = -7 \quad$ (वांछित हल)

जाँच $\quad$ LHS $= -2(-7+3)$

$= -2(-4)$

$= 8 =$ RHS जो होना चाहिए।

4.6 व्यावहारिक स्थितियों में सरल समीकरणों के अनुप्रयोग

हम ऐसे कई उदाहरण देख चुके हैं, जिनमें हमने दैनिक जीवन की भाषा से कथनों को लेकर, उन्हें सरल समीकरणों के रूप में बदला था। हम यह भी सीख चुके हैं कि सरल समीकरणों को किस प्रकार हल किया जाता है। इस प्रकार, अब हम पहेलियों और व्यावहारिक स्थितियों से संबंधित समस्याओं को हल करने के लिए, पूर्णतया समर्थ हो चुके हैं। इसकी विधि यह है कि पहले इन स्थितियों के संगत समीकरणों को बना लिया जाए और फिर इन पहेलियों/समस्याओं के हल प्राप्त करने के लिए प्राप्त समीकरणों को हल कर लिया जाए। हम उसी से प्रारंभ करते हैं, जिसे हम पहले ही देख चुके हैं [उदाहरण 1 (i) और (iii), अनुच्छेद 4.2]

उदाहरण 8 $\quad$ किसी संख्या के तिगुने और 11 का योग 32 है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

हल

- यदि अज्ञात संख्या को x मान लिया जाए, तो उसका तिगुना $3x$ होगा तथा $3x$ और 11 का योग 32 है। अर्थात् $3x + 11 = 32$.
- इस समीकरण को हल करने के लिए, हम 11 को RHS में स्थानापन्न करते हैं, जिससे हमें प्राप्त होता है :

  $3x = 32 - 11$ या, $3x = 21$

  अब दोनों पक्षों को 3 से भाग देने पर, हमें प्राप्त होता है:

  $$x = \frac{21}{3} = 7$$

  अत: वांछनीय संख्या 7 है। (हम इसकी जाँच के लिए 7 के तिगुने में 11 जोड़कर देख सकते हैं कि परिणाम 32 आता है)।

> यही समीकरण हमें पहले अनुच्छेद 4.2 के उदारहण 1 में प्राप्त हुआ था।

उदाहरण 9 वह संख्या ज्ञात कीजिए जिसका एक-चौथाई, 7 से 3 अधिक है।

हल

- आइए अज्ञात संख्या को y लें। इसका एक-चौथाई $\frac{y}{4}$ है।

  संख्या $\left(\frac{y}{4}\right)$ संख्या 7 से 3 अधिक है।

  अत:, हमें y में निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है : $\frac{y}{4} - 7 = 3$

- इस समीकरण को हल करने के लिए पहले -7 को RHS में स्थानापन्न कीजिए।

  इस प्रकार, $\frac{y}{4} = 3 + 7 = 10.$

  फिर हम दोनों पक्षों को 4 से गुणा करके, प्राप्त करते हैं :

  $\frac{y}{4} \times 4 = 10 \times 4$ या, $y = 40$ (वांछित संख्या)

  जाँच y का मान रखने पर,

  $\text{LHS} = \frac{40}{4} - 7 = 10 - 7 = 3 = \text{RHS}$, जो होना चाहिए।

प्रयास कीजिए

(i) जब आप एक संख्या को 6 से गुणा करते हैं और फिर गुणनफल में से 5 घटाते हैं, तो आपको 7 प्राप्त होता है। क्या आप बता सकते हैं कि वह संख्या क्या है?

(ii) वह कौन-सी संख्या है, जिसके एक-तिहाई में 5 जोड़ने पर 8 प्राप्त होता है?

उदाहरण 10 राजू के पिता की आयु राजू की आयु के तीन गुने से 5 वर्ष अधिक है। राजू की आयु ज्ञात कीजिए, यदि उसके पिता की आयु 44 वर्ष है।

हल

- उदाहरण 3 के अनुसार राजू की आयु (y) ज्ञात करने का समीकरण है: $3y + 5 = 44$
- इसे हल करने के लिए, पहले हम 5 को स्थानापन्न करते हैं। हमें प्राप्त होता है:
  $3y = 44 - 5 = 39$
  दोनों पक्षों को 3 से भाग देने पर, हमें प्राप्त होता है: $y = 13$
  अर्थात् राजू की आयु 13 वर्ष है। (आप अपने उत्तर की जाँच कर सकते हैं।)

प्रयास कीजिए

मापों के अनुसार, दो प्रकार की पेटियाँ हैं, जिनमें आम रखे हुए हैं। प्रत्येक बड़ी पेटी में रखे आमों की संख्या 8 छोटी पेटियों में रखे आमों की संख्या से 4 अधिक हैं। प्रत्येक बड़ी पेटी में 100 आम हैं। प्रत्येक छोटी पेटी में कितने आम हैं?

प्रश्नावली 4.3

1. निम्नलिखित स्थितियों के लिए समीकरण बनाइए और फिर उन्हें हल करके अज्ञात संख्याएँ ज्ञात कीजिए :

(a) एक संख्या के आठ गुने में 4 जोड़िए; आपको 60 प्राप्त होगा।

(b) एक संख्या का $\frac{1}{5}$ घटा 4, संख्या 3 देता है।

(c) यदि मैं किसी संख्या का तीन-चौथाई लेकर इसमें 3 जोड़ दूँ, तो मुझे 21 प्राप्त होते हैं।

(d) जब मैंने किसी संख्या के दुगुने में से 11 को घटाया, तो परिणाम 15 प्राप्त हुआ।

(e) मुन्ना ने 50 में से अपनी अभ्यास-पुस्तिकाओं की संख्या के तिगुने को घटाया, तो उसे परिणाम 8 प्राप्त होता है।

(f) इबेनहल एक संख्या सोचती है। वह इसमें 19 जोड़कर योग को 5 से भाग देती है, उसे 8 प्राप्त होता है।

(g) अनवर एक संख्या सोचता है। यदि वह इस संख्या के $\frac{5}{2}$ में से 7 निकाल दे, तो परिणाम 23 है।

2. निम्नलिखित को हल कीजिए :

(a) अध्यापिका बताती है कि उनकी कक्षा में एक विद्यार्थी द्वारा प्राप्त किए गए अधिकतम अंक, प्राप्त किए न्यूनतम अंक का दुगुना जमा 7 है। प्राप्त किए गए अधिकतम अंक 87 हैं। प्राप्त किए गए न्यूनतम अंक क्या हैं?

(b) किसी समद्विबाहु त्रिभुज में आधार कोण बराबर होते हैं। शीर्ष कोण 40° है। इस त्रिभुज के आधार कोण क्या हैं? (याद कीजिए कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है।)

(c) सचिन द्वारा बनाए गए रनों की संख्या राहुल द्वारा बनाए गए रनों की संख्या की दुगुनी है। उन दोनों द्वारा मिलकर बनाए गए कुल रन एक दोहरे शतक से 2 रन कम हैं। प्रत्येक ने कितने रन बनाए थे?

3. निम्नलिखित को हल कीजिए :

(i) इरफान कहता है कि उसके पास परमीत के पास जितने कँचे हैं उनके पाँच गुने से 7 अधिक कँचे हैं। इरफान के पास 37 कँचे हैं। परमीत के पास कितने कँचे हैं?

(ii) लक्ष्मी के पिता की आयु 49 वर्ष है। उनकी आयु लक्ष्मी की आयु के तीन गुने से 4 वर्ष अधिक है। लक्ष्मी की आयु क्या है?

(iii) सुंदरग्राम के निवासियों ने अपने गाँव के एक बाग में कुछ पेड़ लगाए। इनमें से कुछ पेड़ फलों के पेड़ थे। उन पेड़ों की संख्या, जो फलों के नहीं थे, फलों वाले पेड़ों की संख्या के तिगुने से 2 अधिक थी। यदि ऐसे पेड़ों की संख्या, जो फलों के नहीं थे, 77 है, तो लगाए गए फलों के पेड़ों की संख्या क्या थी?

4. निम्नलिखित पहेली को हल कीजिए :

मैं एक संख्या हूँ,
मेरी पहचान बताओ!
मुझे सात बार लो,
और एक पचास जोड़ो!
एक तिहरे शतक तक पहुँचने के लिए
आपको अभी भी चालीस चाहिए!

हमने क्या चर्चा की?

1. एक समीकरण, एक चर पर ऐसा प्रतिबंध होता है जिसमें दोनों पक्षों में व्यंजकों का मान बराबर होना चाहिए ।
2. चर का वह मान जिसके लिए समीकरण संतुष्ट होता है, समीकरण का हल कहलाता है ।
3. किसी समीकरण के बाएँ और दाएँ पक्षों को परस्पर बदलने पर, समीकरण नहीं बदलता ।
4. एक संतुलित समीकरण की स्थिति में यदि हम

   (i) दोनों पक्षों में एक ही संख्या जोड़ें या (ii) दोनों पक्षों में से एक ही संख्या घटाएँ या (iii) दोनों पक्षों को एक ही संख्या से गुणा करें या (iv) दोनों पक्षों को एक ही संख्या से भाग दें तो संतुलन में कोई परिवर्तन नहीं होता है अर्थात् LHS और RHS के मान समान रहते हैं ।
5. उपरोक्त गुणों द्वारा समीकरण को चरणबद्ध विधि से हल किया जा सकता है। हमें दोनों पक्षों में एक से अधिक गणितीय संक्रियाएँ करनी पड़ती हैं, जिससे कि दोनों में से एक पक्ष में हमें केवल चर प्राप्त हो। अंतिम चरण समीकरण का हल है।
6. स्थानापन्न का अर्थ है एक पक्ष से दूसरे पक्ष में जाना । किसी संख्या को स्थानापन्न करना, संख्या को दोनों पक्षों में जोड़ने या दोनों पक्षों में से घटाने के समान ही है। जब आप एक संख्या को एक पक्ष से दूसरे पक्ष में स्थानापन्न करते हैं तो आप उसके चिह्न को बदल देते हैं । उदाहरणार्थ, समीकरण $x + 3 = 8$ में $+ 3$ का स्थानापन्न LHS से RHS करने पर $x = 8 – 3 = 5$ प्राप्त होता है । हम व्यंजकों का भी स्थानापन्न उसी विधि से करते हैं जैसे एक संख्या का स्थानापन्न करते हैं ।
7. हमने यह भी सीखा कि हम किसी समीकरण के हल से प्रारंभ कर, दोनों पक्षों पर समान गणितीय संक्रियाओं की विधि का प्रयोग कर (उदाहरण के लिए दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ना या घटाना) एक समीकरण कैसे बना सकते हैं। साथ ही हमने यह भी सीखा कि हम किसी दिए गए समीकरण का व्यावहारिक स्थिति से संबंध बना सकते हैं और उस समीकरण के लिए कोई व्यावहारिक समस्या या पहेली भी बना सकते हैं ।

रेखा एवं कोण

अध्याय 5

5.1 रेखा

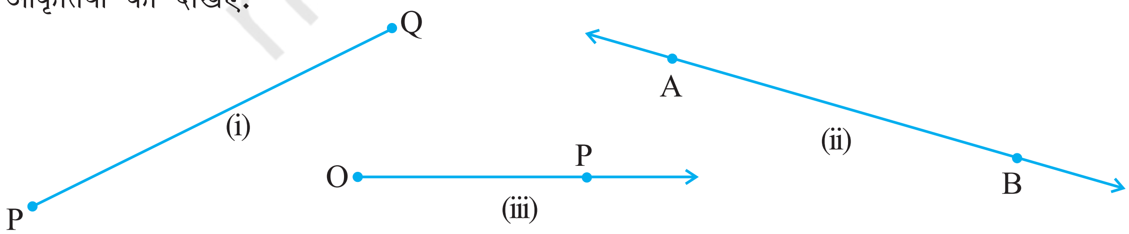
आप पहले से ही जानते हैं कि किसी दिए हुए आकार में विभिन्न रेखाएँ, रेखाखंडों एवं कोणों की पहचान कैसे की जाती है। क्या आप निम्नलिखित आकृतियों में विभिन्न रेखाखंडों एवं कोणों की पहचान कर सकते हैं? (आकृति 5.1)

(i) (i) (i) (i)

आकृति 5.1

क्या आप यह भी जान सकते हैं कि निर्मित कोण, न्यून कोण अथवा अधिक कोण अथवा सम कोण हैं?

स्मरण कीजिए कि एक **रेखाखंड** के दो अंत **बिंदु** होते हैं। यदि हम इन दो अंत बिंदुओं को अपनी-अपनी दिशाओं में अपरिमित रूप में बढ़ाते हैं तो हमें एक **रेखा** प्राप्त होती है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि एक रेखा का कोई अंत बिंदु नहीं होता है। दूसरी तरफ़ स्मरण कीजिए कि किरण का एक अंत बिंदु (नामतः प्रारंभिक बिंदु) होता है। उदाहरणतः नीचे दी हुई आकृतियों को देखिए:



आकृति 5.2

यहाँ आकृति 5.2 (i) **रेखाखंड,** आकृति 5.2 (ii) **रेखा** एवं **आकृति** 5.2 (iii) **एक किरण,** को दर्शाती है। सामान्यत: एक रेखाखंड PQ को संकेत $\overline{PQ}$, रेखा AB को संकेत AB एवं किरण OP को संकेत $\overrightarrow{OP}$, से निर्दिष्ट किया जाता है। अपने दैनिक जीवन से रेखाखंडों एवं किरणों के कुछ उदाहरण दीजिए और उनके बारे में अपने मित्रों से चर्चा कीजिए।

पुन: स्मरण कीजिए कि रेखाएँ अथवा रेखाखंडों के मिलने पर **कोण** निर्मित होता है। उपर्युक्त आकृतियों (आकृति 5.1) में कोनों (corners) को प्रेक्षित कीजिए। जब दो रेखाएँ अथवा रेखाखंड किसी बिंदु पर प्रतिच्छेद करते हैं तो इन कोनों का निर्माण होता है। उदाहरणत: नीचे दी हुई आकृतियों को देखिए:

(i) (ii)

आकृति 5.3

आकृति 5.3 (i) में रेखाखंड AB एवं BC, कोण ABC का निर्माण करने के लिए, एक दूसरे को बिंदु B पर प्रतिच्छेद करते हैं और रेखाखंड BC एवं AC, कोण ACB का निर्माण करने के लिए एक दूसरे को C पर प्रतिच्छेद करते हैं इत्यादि। जबकि आकृति 5.3 (ii) में रेखाएँ PQ एवं RS एक दूसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं जिससे कोण POS, SOQ, QOR और ROP निर्मित होते हैं। कोण ABC को संकेत ∠ABC द्वारा निरूपित किया जाता है। इस प्रकार आकृति 5.3 (i) में निर्मित तीन कोण ∠ABC, ∠BCA एवं ∠BAC हैं और आकृति 5.3 (ii) में निर्मित चार कोण ∠POS, ∠SOQ, ∠QOR एवं ∠POR हैं। आप पहले से ही अध्ययन कर चुके हैं कि न्यून कोण, अधिक कोण अथवा सम कोण के रूप में कोणों का वर्गीकरण कैसे किया जाता है।

प्रयास कीजिए

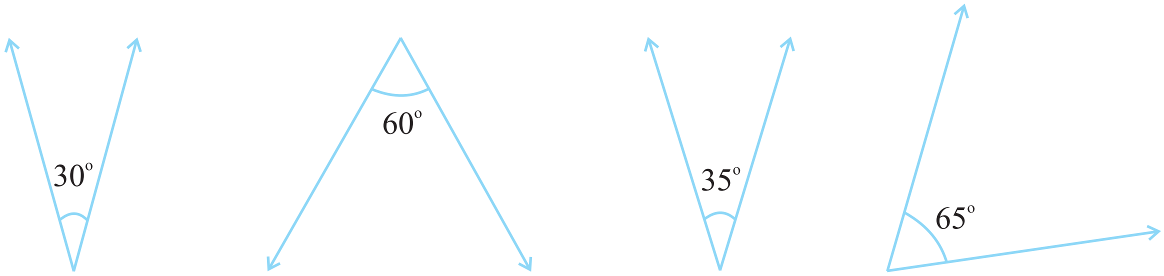
अपने आसपास दस आकृतियों को सूचीबद्ध कीजिए और उनमें पाए जाने वाले न्यून कोणों, अधिक कोणों एवं समकोणों की पहचान कीजिए।

टिप्पणी कोण ABC के माप के संदर्भ में, m∠ABC को साधारणत: ∠ABC के रूप में लिखेंगे। प्रकरण से यह बात स्पष्ट हो जाएगी कि हम कोण के संदर्भ में अथवा इसके माप के सदर्भ में बात कर रहे हैं।

5.2 संबंधित कोण

5.2.1 पूरक कोण

जब दो कोणों के मापों का योग 90° होता है, तो ये कोण पूरक कोण (complementary angles) कहलाते हैं।



(i) (ii) (iii) (iv)

क्या ये दो कोण पूरक कोण हैं? हाँ **आकृति 5.4** क्या ये दो कोण पूरक कोण हैं? नहीं

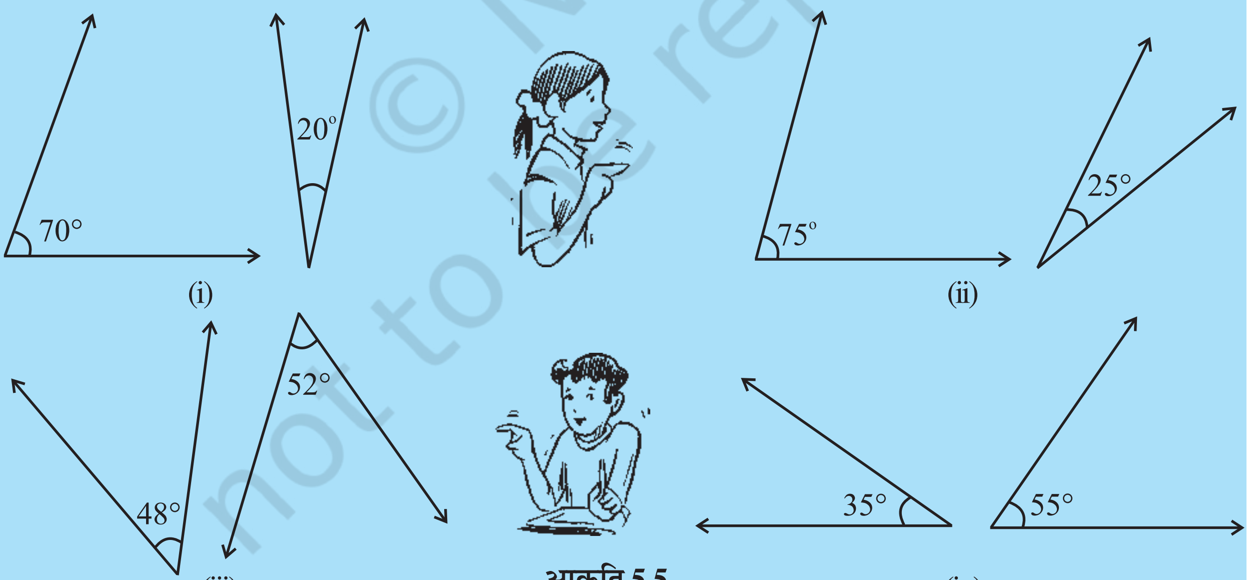
जब दो कोण पूरक होते हैं, तो इनमें से प्रत्येक कोण दूसरे कोण का **पूरक** कहलाता है। उपर्युक्त आरेख (आकृति 5.4) में "30° का कोण", "60° के कोण" का पूरक है और विलोमत:

सोचिए, चर्चा कीजिए एवं लिखिए

1. क्या दो न्यून कोण एक दूसरे के पूरक हो सकते हैं?
2. क्या दो अधिक कोण एक दूसरे के पूरक हो सकते हैं?
3. क्या दो समकोण एक दूसरे के पूरक हो सकते हैं?

प्रयास कीजिए

1. निम्नलिखित कोणों के युग्मों में कौन-से पूरक हैं? (आकृति 5.5)

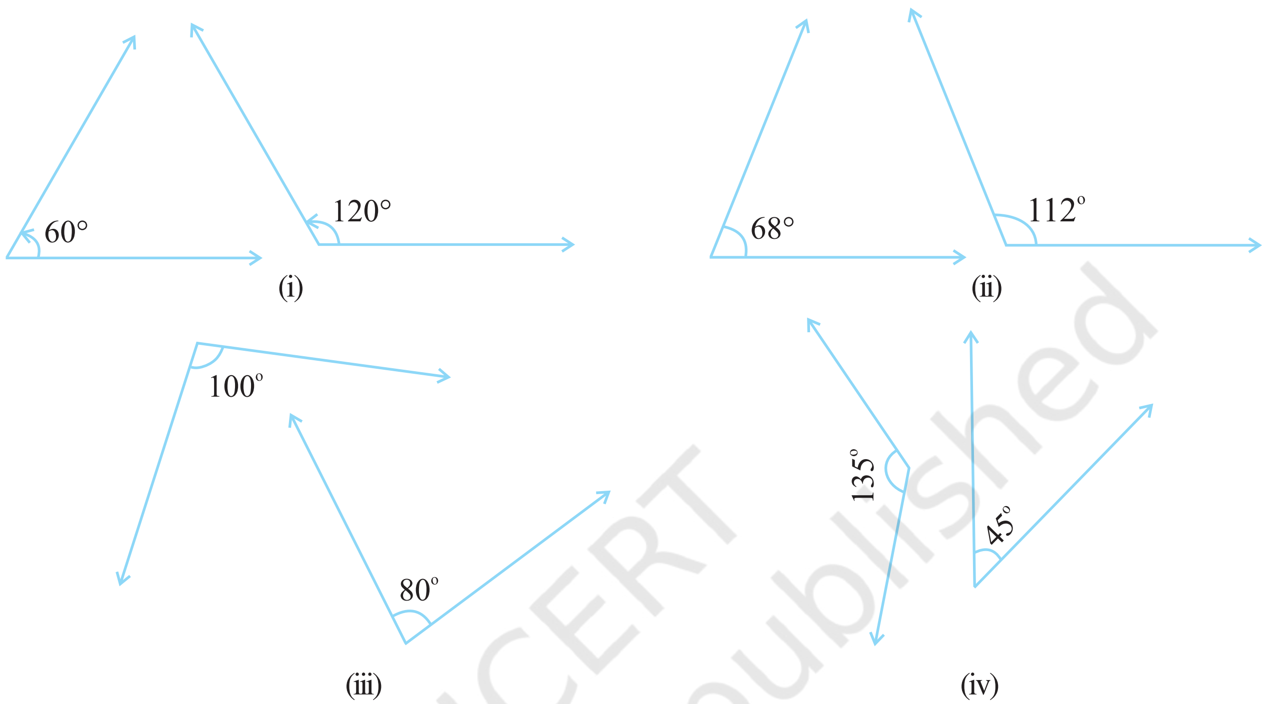


आकृति 5.5

2. निम्नलिखित कोणों में प्रत्येक के पूरक का माप क्या है?
   (i) 45° (ii) 65° (iii) 41° (iv) 54°
3. दो पूरक कोणों के मापों का अंतर 12° है। कोणों के माप ज्ञात कीजिए।

5.2.2 संपूरक कोण

आइए कोणों के निम्नलिखित युग्मों को देखते हैं (आकृति 5.6):



आकृति 5.6

क्या आप देखते हैं कि उपर्युक्त प्रत्येक युग्म में (आकृति 5.6) कोणों के मापों का योग 180° पाया जाता है ? कोणों के ऐसे युग्म **संपूरक कोण (supplementary angles)** कहलाते हैं। जब दो कोण संपूरक होते हैं तो उनमें से प्रत्येक कोण दूसरे कोण का **संपूरक** कहलाता है।

सोचिए, चर्चा कीजिए एवं लिखिए

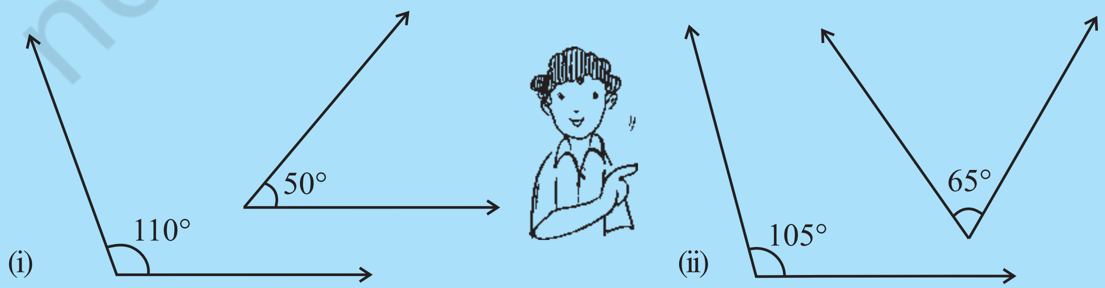
1. क्या दो अधिक कोण संपूरक हो सकते हैं?

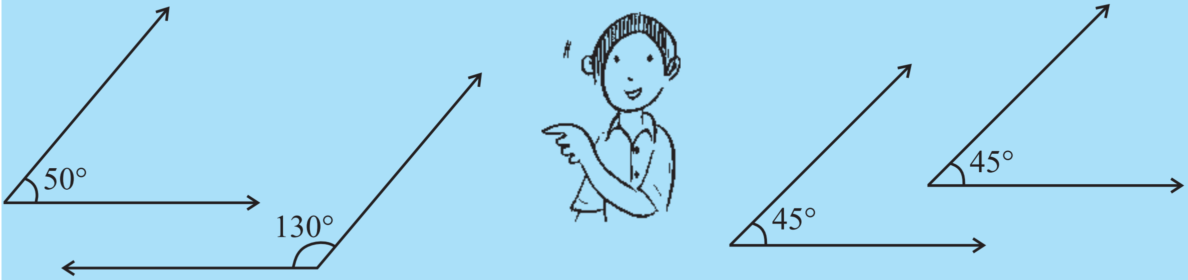
2. क्या दो न्यून कोण संपूरक हो सकते हैं?

3. क्या दो सम कोण संपूरक हो सकते हैं?

प्रयास कीजिए

1. आकृति 5.7 में संपूरक कोणों के युग्म ज्ञात कीजिए :





(iii) (iv)

आकृति 5.7

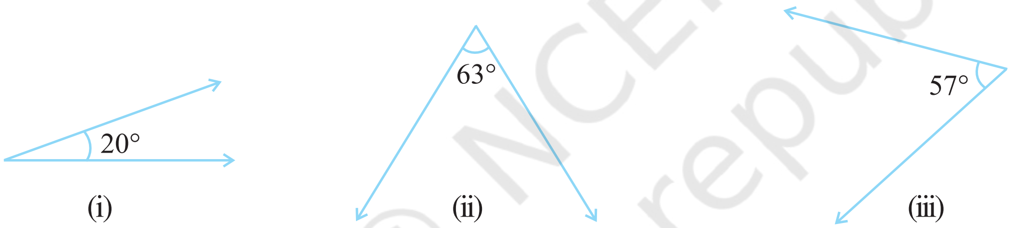
2. निम्नलिखित कोणों में प्रत्येक के संपूरक का माप क्या होगा?

(i) 100º (ii) 90º (iii) 55º (iv) 125º

3. दो संपूरक कोणों में बड़े कोण का माप छोटे कोण के माप से 44º अधिक है। कोणों के माप ज्ञात कीजिए।

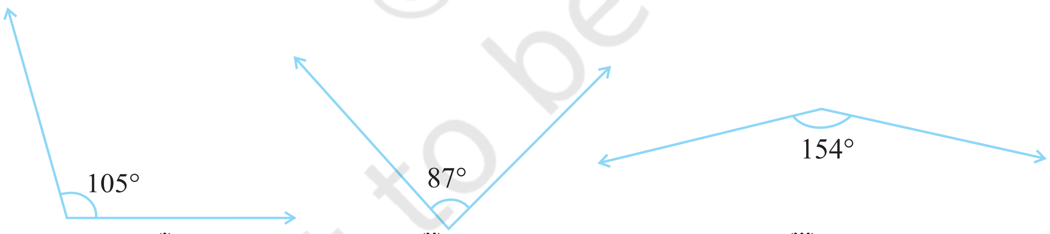
प्रश्नावली 5.1

1. निम्नलिखित कोणों में से प्रत्येक का पूरक ज्ञात कीजिए :



(i) (ii) (iii)

2. निम्नलिखित कोणों में से प्रत्येक का संपूरक ज्ञात कीजिए।



(i) (ii) (iii)

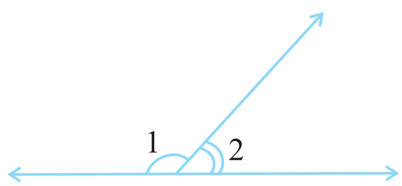
3. कोणों के निम्नलिखित युग्मों में से पूरक एवं संपूरक युग्मों की पृथक्-पृथक् पहचान कीजिए :

(i) 65º, 115º (ii) 63º, 27º (iii) 112º, 68º
(iv) 130º, 50º (v) 45º, 45º (vi) 80º, 10º

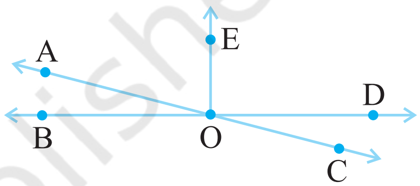
4. ऐसा कोण ज्ञात कीजिए जो अपने पूरक के समान हो।

5. ऐसा कोण ज्ञात कीजिए जो अपने संपूरक के समान हो।

6. दी हुई आकृति में $\angle 1$ एवं $\angle 2$ संपूरक कोण हैं। यदि $\angle 1$ में कमी की जाती है, तो $\angle 2$ में क्या परिवर्तन होगा ताकि दोनों कोण फिर भी संपूरक ही रहें।

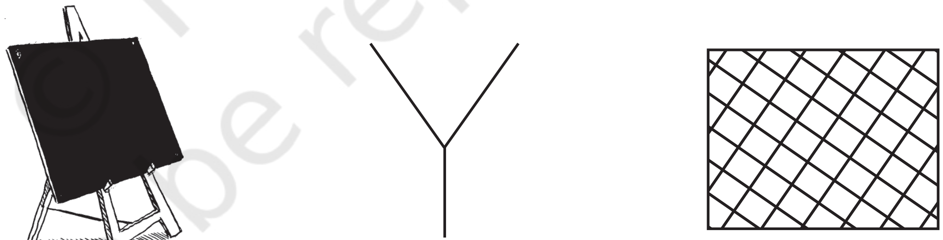


7. क्या दो ऐसे कोण संपूरक हो सकते हैं यदि उनमें से दोनों
   (i) न्यून कोण हैं? (ii) अधिक कोण हैं? (iii) समकोण हैं?
8. एक कोण 45° से बड़ा है। क्या इसका पूरक कोण 45° से बड़ा है अथवा 45° के बराबर है अथवा 45° से छोटा है?
9. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :
   (i) यदि दो कोण पूरक हैं, तो उनके मापों का योग ________ है।
   (ii) यदि दो कोण संपूरक हैं तो उनके मापों का योग _______ है।
   (iii) यदि दो आसन्न कोण संपूरक हैं, तो वे _____________ बनाते हैं।
10. संलग्न आकृति में निम्नलिखित कोण युग्मों को नाम दीजिए :
   (i) शीर्षाभिमुख अधिक कोण
   (ii) आसन्न पूरक कोण
   (iii) समान संपूरक कोण
   (iv) असमान संपूरक कोण
   (v) आसन्न कोण जो रैखिक युग्म नहीं बनाते हैं।



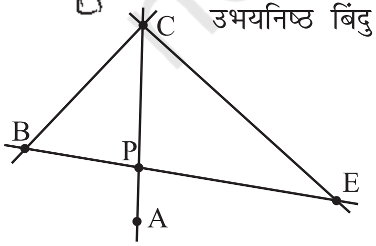
5.3 रेखा-युग्म

5.3.1 प्रतिच्छेदी रेखाएँ



आकृति 5.8

स्टैंड पर रखा हुआ श्यामपट्ट, रेखाखंडों द्वारा निर्मित अक्षर Y और एक खिड़की का जालीदार दरवाज़ा, इन सभी में उभयनिष्ठ क्या हैं? ये प्रतिच्छेदी रेखाओं (intersecting lines) के उदाहरण हैं (आकृति 5.8)। दो रेखाएँ *l* और *m* **प्रतिच्छेद** करती हैं यदि उनमें एक बिंदु उभयनिष्ठ है। यह उभयनिष्ठ बिंदु उनका **प्रतिच्छेद बिंदु** कहलाता है।



आकृति 5.9

आकृति 5.20 में, AC और BE, P पर प्रतिच्छेद करती हैं।
AC और BC, C पर प्रतिच्छेद करती हैं। AC और EC, C पर प्रतिच्छेद करती हैं।
प्रतिच्छेदी रेखाखंडों के दस अन्य युग्म ज्ञात करने का प्रयास कीजिए।

क्या दो रेखाएँ अथवा रेखाखंड आवश्यक रूप से प्रतिच्छेद करने चाहिए?
क्या आप इस आकृति में दो रेखाखंडों के युग्म ज्ञात कर सकते हैं जो प्रतिच्छेदी नहीं है? क्या दो रेखाएँ एक से ज्यादा बिंदुओं पर प्रतिच्छेद कर सकती हैं। इसके बारे में विचार कीजिए।

प्रयास कीजिए

1. अपने आसपास के परिवेश से ऐसे उदाहरण ज्ञात कीजिए जहाँ रेखाएँ सम कोण पर प्रतिच्छेद करती हैं।
2. एक समबाहु त्रिभुज के शीर्षों पर प्रतिच्छेदी रेखाओं द्वारा निर्मित कोणों के माप ज्ञात कीजिए।
3. एक आयत खींचिए और प्रतिच्छेदी रेखाओं द्वारा निर्मित चार शीर्षों के कोणों के माप ज्ञात कीजिए।
4. यदि दो रेखाएँ एक-दूसरे को प्रतिच्छेद करती हैं, तो क्या वे हमेशा एक-दूसरे को सम कोण पर प्रतिच्छेद करती हैं?

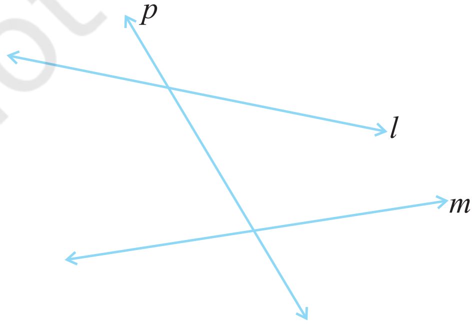
5.3.2 तिर्यक छेदी रेखा

शायद, आपने दो अथवा अधिक सड़कों को पार करते हुए एक सड़क देखी होगी अथवा कई अन्य रेल पटरियों को पार करते हुए एक रेल पटरी देखी होगी। इनसे तिर्यक छेदी रेखा या तिर्यक रेखा (transversal) का अनुभव प्राप्त होता है (आकृति 5.10)।

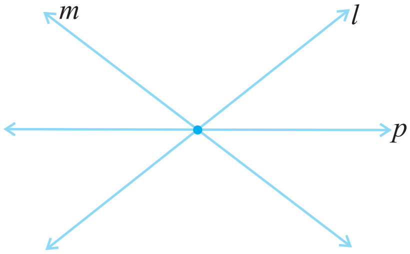
(i) **आकृति 5.10** (ii)

एक ऐसी रेखा जो दो अथवा अधिक रेखाओं को भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है, **तिर्यक छेदी रेखा** (transversal) कहलाती है। आकृति 5.11 में, p, रेखाएँ l और m की तिर्यक छेदी रेखा है।

आकृति 5.12 में, p एक तिर्यक छेदी रेखा नहीं है तथापि यह रेखाएँ l और m को काटती है। क्या आप बता सकते हैं 'क्यों'?



आकृति 5.11



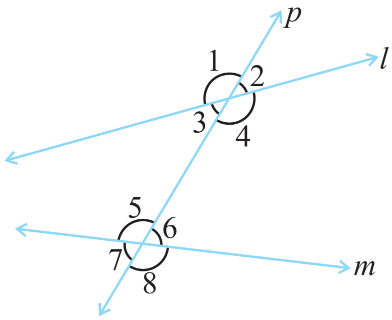
आकृति 5.12

प्रयास कीजिए

1. मान लीजिए दो रेखाएँ दी हुई हैं। इन रेखाओं के लिए आप कितनी तिर्यक छेदी रेखाएँ खींच सकते हैं?
2. यदि एक रेखा तीन रेखाओं की तिर्यक छेदी रेखा है, तो बताइए कितने प्रतिच्छेदन बिंदु हैं।
3. अपने आसपास कुछ तिर्यक छेदी रेखाएँ ढूँढने का प्रयास कीजिए।

5.3.3 तिर्यक छेदी रेखा द्वारा निर्मित कोण

आकृति 5.13 में, आप देखते हैं कि रेखाएँ l एवं m तिर्यक छेदी रेखा p द्वारा काटी जा रही है। इस प्रकार बनने वाले 1 से 8 तक अंकित कोणों के विशिष्ट नाम हैं:

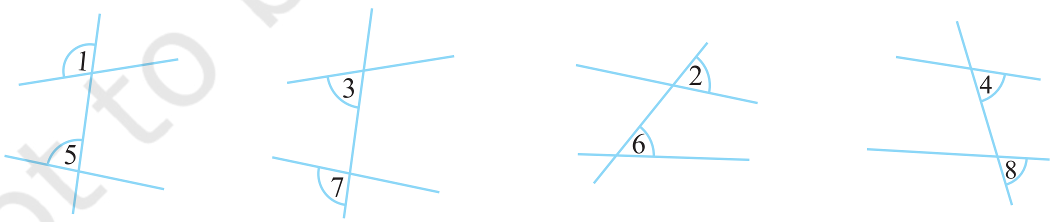


आकृति 5.13

अंत:कोण	$\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$, $\angle 6$,
बाह्य कोण	$\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 7$, $\angle 8$
संगत कोणों के युग्म	$\angle 1$ और $\angle 5$, $\angle 2$ और $\angle 6$, $\angle 3$ और $\angle 7$, $\angle 4$ और $\angle 8$.
एकांतर अंत: कोणों के युग्म	$\angle 3$ और $\angle 6$, $\angle 4$ और $\angle 5$
एकांतर बाह्य कोणों के युग्म	$\angle 1$ और $\angle 8$, $\angle 2$ और $\angle 7$
तिर्यक छेदी रेखा के एक ही तरफ़ बने अंत:कोणों के युग्म	$\angle 3$ और $\angle 5$, $\angle 4$ और $\angle 6$

टिप्पणी: आकृति 5.14 में ($\angle 1$ एवं $\angle 5$ जैसे) संगत कोणों में निम्नलिखित सम्मिलित होते हैं :

(i) विभिन्न शीर्ष
(ii) तिर्यक छेदी रेखा के एक ही तरफ बने होते हैं।
(iii) दो रेखाओं के सापेक्ष संगत स्थितियों (ऊपर अथवा नीचे, बायाँ अथवा दायाँ) में होते हैं।



आकृति 5.14

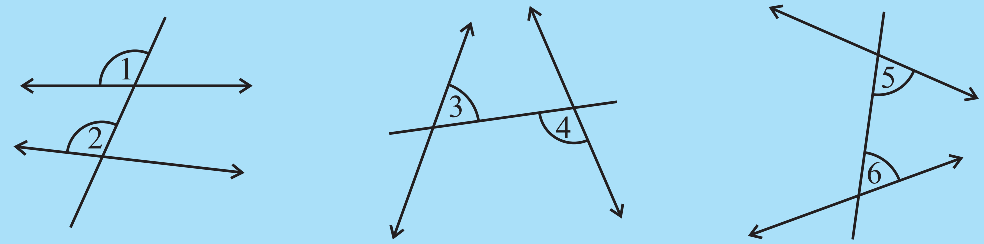
आकृति 5.15

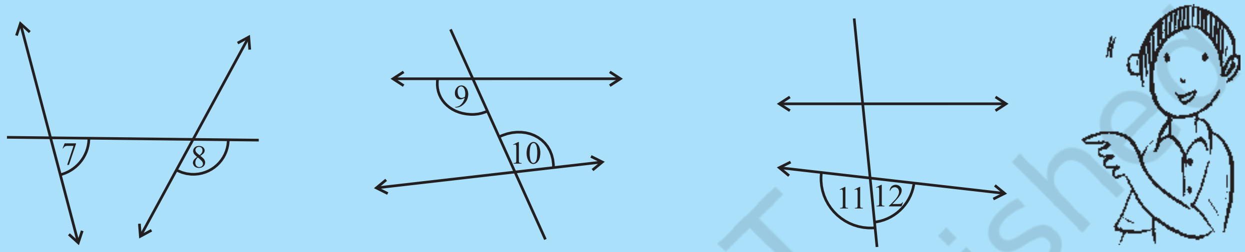
आकृति 5.15 में ($\angle 3$ एवं $\angle 6$ जैसे) अंत: एकांतर कोण

(i) के विभिन्न शीर्ष होते हैं।
(ii) तिर्यक छेदी रेखा के सम्मुख स्थिति पर बने होते हैं।
(iii) दो रेखाओं के "मध्य" स्थित होते हैं।

प्रयास कीजिए

प्रत्येक आकृति में कोण-युग्म को नाम दीजिए :





5.3.4 समांतर रेखाओं की तिर्यक छेदी रेखा

क्या आपको याद है कि समांतर रेखाएँ क्या हैं । ये किसी तल में ऐसी रेखाएँ होती हैं जो एक-दूसरे से कहीं नहीं मिलती। क्या आप निम्नलिखित आकृतियों में समांतर रेखाओं की पहचान कर सकते हैं? (आकृति 5.16)

आकृति 5.16

समांतर रेखाओं की तिर्यक छेदी रेखा या तिर्यक रेखा से बहुत ही रुचिकर परिणाम प्राप्त होते हैं।

इन्हें कीजिए

एक रेखांकित कागज़ लीजिए। दो मोटी रंगीली समांतर रेखाएँ l और m खींचिए।

रेखाएँ l और m की एक तिर्यक छेदी रेखा t खींचिए। $\angle 1$ और $\angle 2$ को लेबल कीजिए जैसा कि आकृति 5.17(i) में दर्शाया गया है।

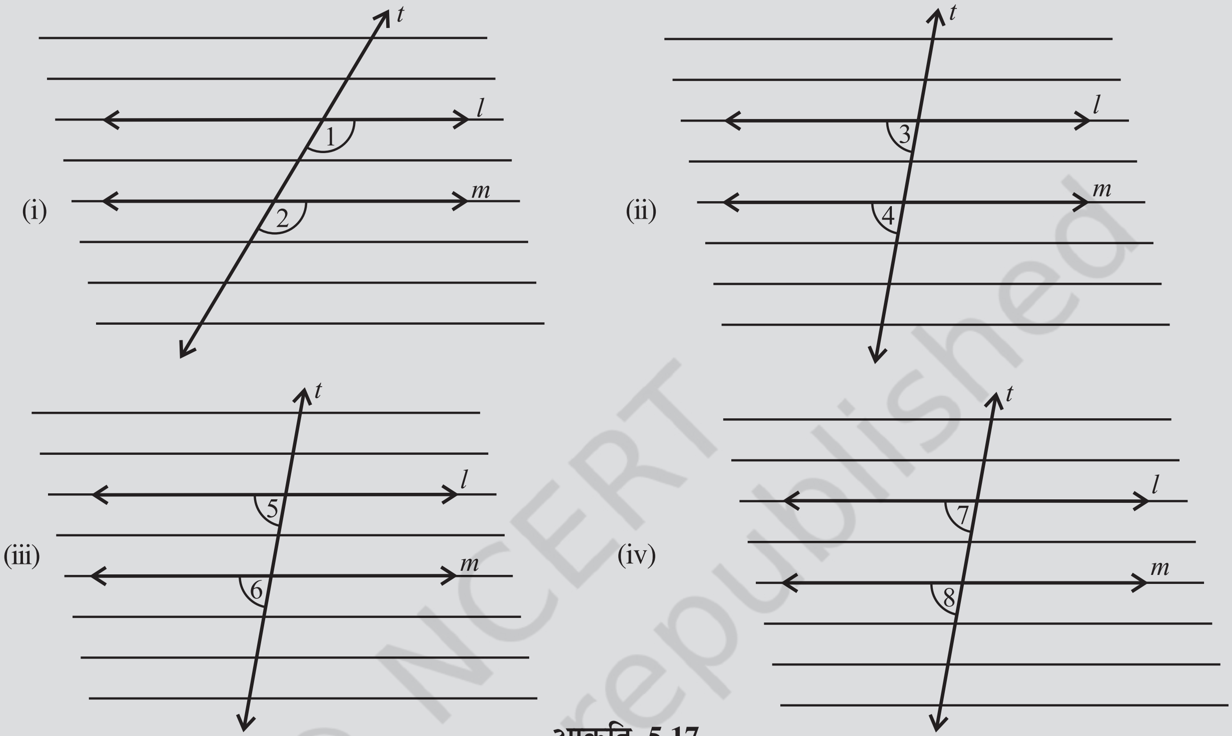
खींची गई आकृति पर एक अनुरेखण कागज़ (ट्रेसिंग पेपर) रखिए। रेखाएँ l, m और t की प्रतिलिपि बनाइए।

ट्रेसिंग पेपर को t के अनु तब तक खिसकाइए जब तक l, m के संपाती न हो जाए।

आप पाते हैं कि प्रतिलिपित आकृति का $\angle 1$, मूल आकृति के $\angle 2$ के संपाती हो जाता है।

वास्तव में आप निम्नलिखित परिणामों को अनुरेखण एवं खिसकाने के क्रियाकलाप से सत्यापित कर सकते हैं।

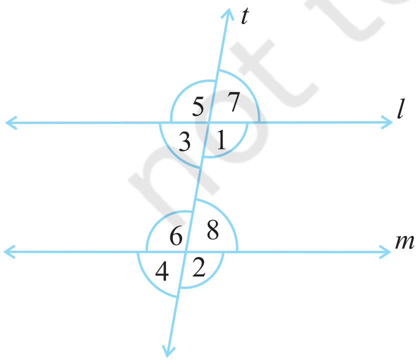
(i) $\angle 1 = \angle 2$ (ii) $\angle 3 = \angle 4$ (iii) $\angle 5 = \angle 6$ (iv) $\angle 7 = \angle 8$



आकृति 5.17

यह क्रियाकलाप निम्नलिखित तथ्य को दृष्टांतित करती है :

> यदि दो समांतर रेखाएँ किसी तिर्यक छेदी रेखा द्वारा काटी जाती है, तो संगत कोणों के प्रत्येक युग्म का माप समान होता है।



आकृति 5.18

इस परिणाम का उपयोग करते हुए हम एक दूसरा रुचिकर परिणाम प्राप्त करते हैं। आकृति 5.18 को देखिए।

जब समांतर रेखाएँ l और m, रेखा t द्वारा काटी जाती हैं, तो $\angle 3 = \angle 7$ (शीर्षाभिमुख कोण)

परंतु $\angle 7 = \angle 8$ (संगत कोण) इसलिए $\angle 3 = \angle 8$

इसी प्रकार आप दर्शा सकते हैं कि $\angle 1 = \angle 6$.

अत: हमें निम्नलिखित परिणाम की प्राप्ति होती है:

> यदि दो समांतर रेखाएँ किसी तिर्यक छेदी रेखा द्वारा काटी जाती हैं, तो अंत: एकांतर कोणों का प्रत्येक युग्म समान होता है।

यह दूसरा परिणाम हमें एक ओर रुचिकर गुणधर्म की ओर अग्रसर करता है। फिर से आकृति 5.18 में दिए हुए आलेख से, $\angle 3 + \angle 1 = 180°$ ($\angle 3$ और $\angle 1$ रैखिक युग्म बनाते हैं)

परंतु $\angle 1 = \angle 6$ (अंत: एकांतर कोणों का एक युग्म)

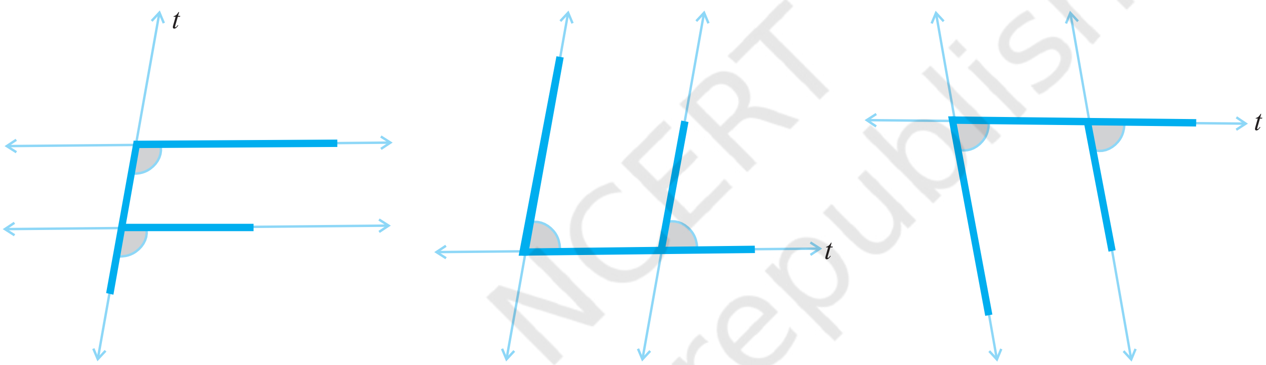
इस प्रकार हम कह सकते हैं कि $\angle 3 + \angle 6 = 180°$।

इसी प्रकार $\angle 1 + \angle 8 = 180°$. इस प्रकार हमें निम्नलिखित परिणाम की प्राप्ति होती है :

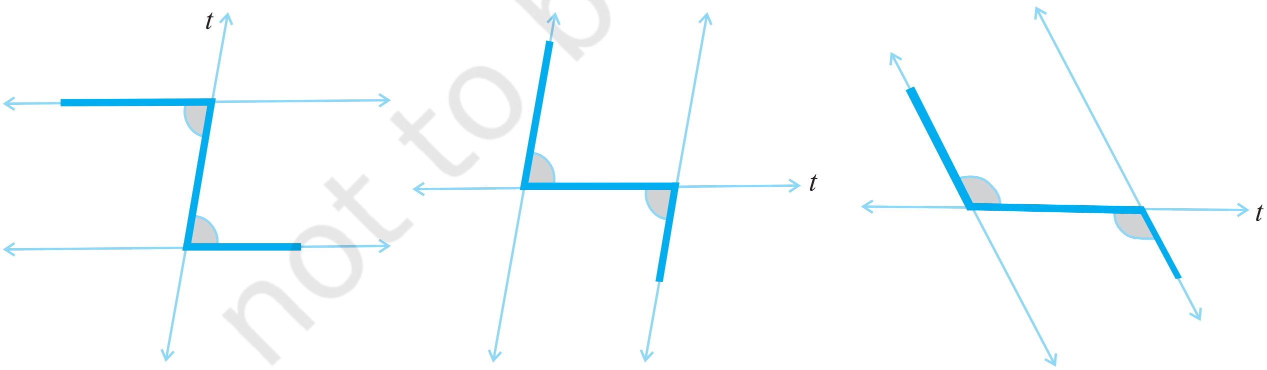
> यदि दो समांतर रेखाएँ किसी एक तिर्यक छेदी रेखा द्वारा काटी जाती हैं तो तिर्यक छेदी रेखा के एक ही तरफ़ को बने अंत: कोणों का प्रत्येक युग्म संपूरक होता है।

सुसंगत आकृतियों को ध्यान में रखते हुए आप इन परिणामों को बहुत आसानी से स्मरण कर सकते हैं:

संगत कोणों के लिए F-आकार को ध्यान में रखिए



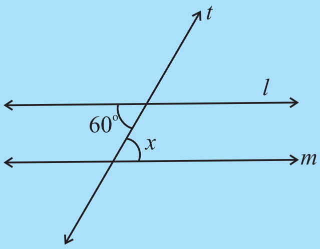
एकांतर कोणों के लिए Z - आकार को ध्यान में रखिए।



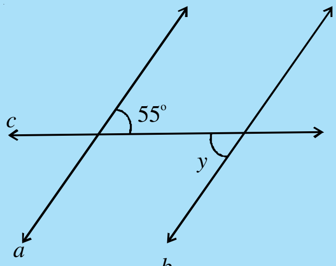
इन्हें कीजिए

समांतर रेखाओं का एक युग्म एवं एक तिर्यक छेदी रेखा खींचिए। कोणों को मापकर उपर्युक्त तीन कथनों का सत्यापन कीजिए।

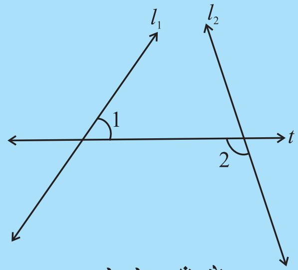
प्रयास कीजिए



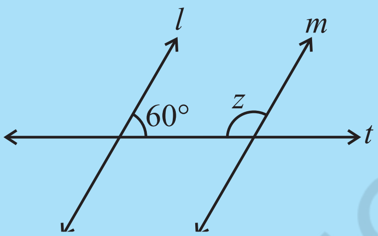
$l \parallel m$,
t एक तिर्यक छेदी रेखा है
$\angle x = ?$



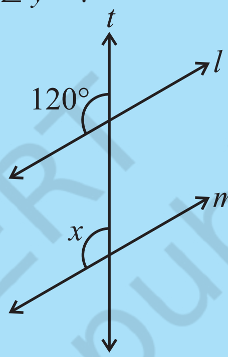
$a \parallel b$,
c एक तिर्यक छेदी रेखा है
$\angle y = ?$



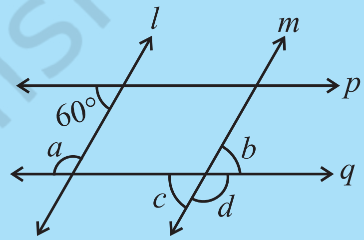
l_1, l_2 दो रेखाएँ हैं,
t एक तिर्यक छेदी रेखा है।
क्या $\angle 1 = \angle 2$ हैं?



$l \parallel m$,
t एक तिर्यक छेदी रेखा है,
$\angle z = ?$

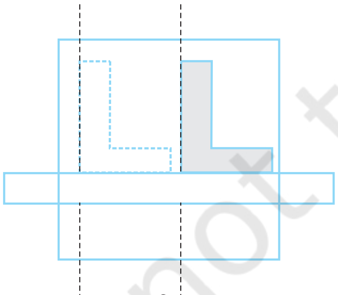


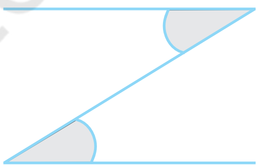
$l \parallel m$,
t एक तिर्यक छेदी रेखा है,
$\angle x = ?$



$l \parallel m, p \parallel q$,
a, b, c, d ज्ञात कीजिए

5.4 समांतर रेखाओं की जाँच


आकृति 5.19


आकृति 5.20

यदि दो रेखाएँ समांतर हैं, तो आप जानते हैं कि एक तिर्यक छेदी रेखा की सहायता से, समान संगत कोणों का एक युग्म प्राप्त होता है, समान अंतः एकांतर कोणों का युग्म प्राप्त होता है और तिर्यक छेदी रेखा के एक ही तरफ़ बनें अंतः कोण, जो संपूरक होते हैं।

जब दो रेखाएँ दी हुई हैं तो क्या कोई ऐसी विधि है जिसकी सहायता से यह जाँच की जा सके कि दी हुई रेखाएँ समांतर हैं अथवा नहीं? जीवन से जुड़ी अनेक परिस्थितियों में आपको इस कौशल की आवश्यकता होती है।

इन खंडों को (आकृति 5.19) खींचने के लिए एक नक्शानवीश, बढ़ई के वर्ग एवं रुलर का प्रयोग करता है। वह दावा करता है कि ये समांतर हैं। कैसे? क्या आप देख पाते हैं कि उसने संगत कोणों को समान रखा है? (यहाँ तिर्यक छेदी रेखा क्या है?)

अत: जब एक तिर्यक छेदी रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार काटती है कि संगत कोणों के युग्म समान हैं, तो रेखाएँ समांतर होती हैं।

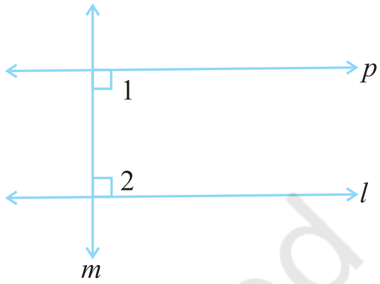
अक्षर Z (आकृति 5.20) को देखिए। यहाँ क्षैतिज खंड समांतर हैं क्योंकि एकांतर कोण समान हैं।

जब एक तिर्यक छेदी रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार काटती है कि अंत: एकांतर कोणों का युग्म समान है, तो रेखाएँ समांतर होती हैं।

एक रेखा l खींचिए (आकृति 5.21).

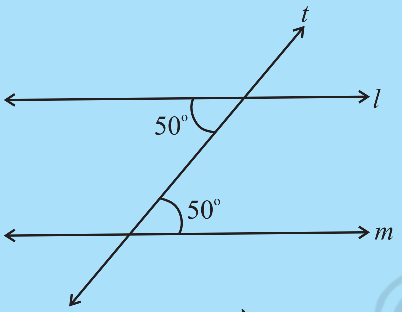
रेखा l के लंबवत् एक रेखा m खींचिए। एक रेखा p इस प्रकार खींचिए ताकि p, m के लंबवत् हो। इस प्रकार p, l लंब पर लंब है। आप पाते हैं $p \parallel l$ कैसे? यह इसलिए है क्योंकि आपने p को इस प्रकार खींचा है कि $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

अत: *जब एक तिर्यक छेदी रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार काटती है कि तिर्यक छेदी रेखा के एक ही तरफ़ बने अंत: कोणों का युग्म संपूरक है, तो रेखाएँ समांतर होती हैं।*

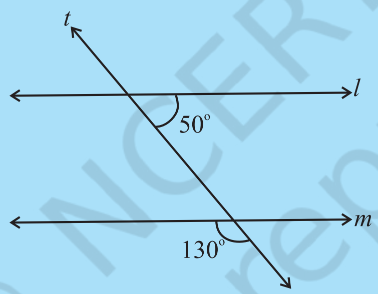


आकृति 5.21

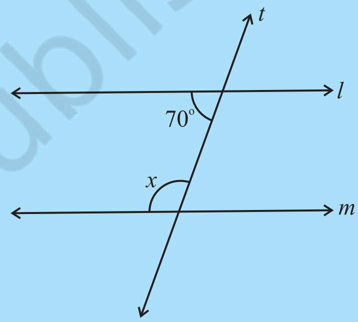
प्रयास कीजिए



क्या $l \parallel m$ है? क्यों



क्या $l \parallel m$ है? क्यों



यदि $l \parallel m$, तो x क्या है?

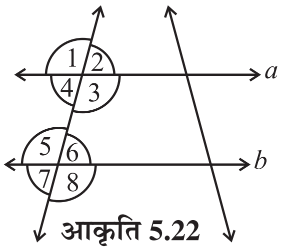
प्रश्नावली 5.2

1. निम्नलिखित कथनों में प्रत्येक कथन में उपयोग किए गए गुणधर्म का वर्णन कीजिए (आकृति 5.22)।

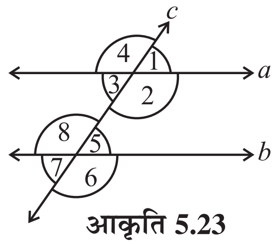
(i) यदि $a \parallel b$, तो $\angle 1 = \angle 5$

(ii) यदि $\angle 4 = \angle 6$, तो $a \parallel b$.

(iii) यदि $\angle 4 + \angle 5 = 180°$, तो $a \parallel b$



आकृति 5.22



आकृति 5.23

2. आकृति 5.23 में निम्नलिखित की पहचान कीजिए:

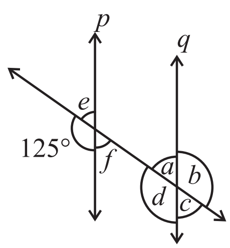
(i) संगत कोणों के युग्म

(ii) अंत: एकांतर कोणों के युग्म

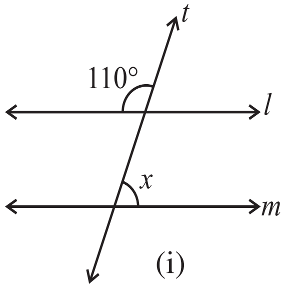
(iii) तिर्यक छेदी रेखा के एक तरफ़ बने अंत:कोणों के युग्म

(iv) शीर्षाभिमुख कोण

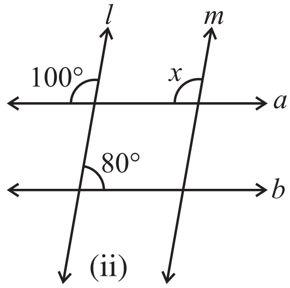
3. सलंग्न आकृति में $p \parallel q$। अज्ञात कोण ज्ञात कीजिए।



4. यदि $l \parallel m$ है, तो निम्नलिखित आकृतियों में प्रत्येक में x का मान ज्ञात कीजिए।



(i)

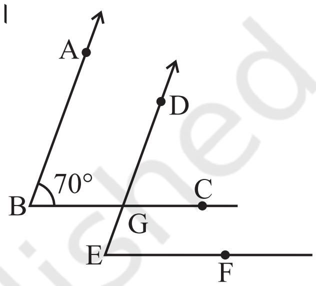


(ii)

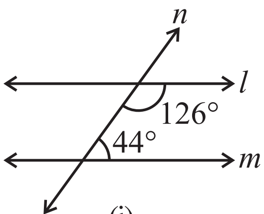
5. दी हुई आकृति में, दो कोणों की भुजाएँ समांतर हैं। यदि $\angle ABC = 70^\circ$, तो

(i) $\angle DGC$ ज्ञात कीजिए।

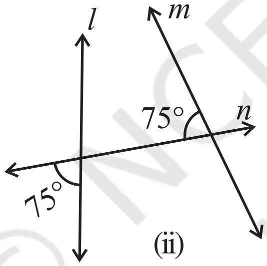
(ii) $\angle DEF$ ज्ञात कीजिए।



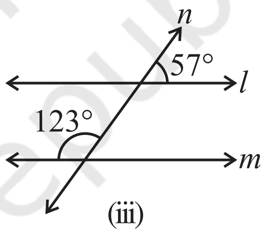
6. नीचे दी हुई आकृतियों में निर्णय लीजिए कि क्या l, m के समांतर है।



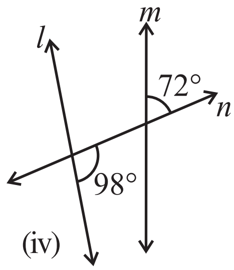
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

हमने क्या चर्चा की?

1. हम स्मरण करते हैं कि

(i) एक रेखाखंड के दो अंत बिंदु होते हैं।

(ii) एक किरण का केवल एक अंत बिंदु (इसका शीर्ष) होता है।

(iii) एक रेखा का किसी भी तरफ़ कोई अंत बिंदु नहीं होता है।

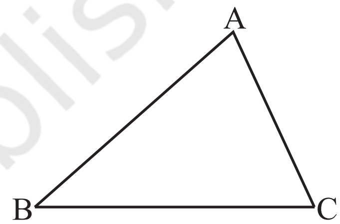
2. जब दो रेखाएँ l और m एक दूसरे से मिलती हैं तो हम कहते हैं कि ये रेखाएँ *प्रतिच्छेद* करती हैं। मिलान बिंदु प्रतिच्छेद बिंदु कहलाता है। ऐसी रेखाएँ जिन्हें कितना भी बढ़ाया जाए, आपस में नहीं मिलती, *समांतर रेखाएँ* कहलाती हैं।

अध्याय 6

त्रिभुज और उसके गुण

0757CH06

6.1 भूमिका



आकृति 6.1

आप देख चुके हैं कि त्रिभुज, तीन रेखाखंडों से बनी एक बंद सरल आकृति है। इसके तीन शीर्ष, तीन भुजाएँ व तीन कोण होते हैं।

यहाँ एक ΔABC (आकृति 6.1) है। इसमें हैं :

भुजाएँ : $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$

कोण : $\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle BCA$

शीर्ष : A, B, C

शीर्ष A की सम्मुख भुजा $\overline{BC}$ है। क्या आप भुजा $\overline{AB}$ के सम्मुख कोण का नाम बता सकते हैं ? आप जानते हैं कि त्रिभुजों का वर्गीकरण (i) भुजाओं (ii) कोणों के आधार पर किस प्रकार किया जाता है।

(i) भुजाओं के आधार पर : विषमबाहु, समद्विबाहु तथा समबाहु त्रिभुज।

(ii) कोणों के आधार पर : न्यून कोण, अधिक कोण तथा समकोण त्रिभुज।

ऊपर बताए गए, सभी प्रकार के त्रिभुजों के आकारों के नमूने, कागज़ से काटकर बनाइए। अपने नमूनों की, साथियों के नमूनों से तुलना कीजिए और उनके बारे में चर्चा कीजिए।

प्रयास कीजिए

1. ΔABC के छः अवयवों (तीन भुजाओं तथा तीन कोणों) के नाम लिखिए।

2. लिखिए:

(i) ΔPQR के शीर्ष Q की सम्मुख भुजा

(ii) ΔLMN की भुजा LM का सम्मुख कोण

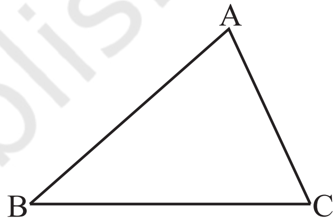
(iii) ΔRST की भुजा RT का सम्मुख शीर्ष

अध्याय 6

त्रिभुज और उसके गुण

0757CH06

6.1 भूमिका



आकृति 6.1

आप देख चुके हैं कि त्रिभुज, तीन रेखाखंडों से बनी एक बंद सरल आकृति है। इसके तीन शीर्ष, तीन भुजाएँ व तीन कोण होते हैं। यहाँ एक ΔABC (आकृति 6.1) है। इसमें हैं :

भुजाएँ : $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$

कोण : $\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle BCA$

शीर्ष : A, B, C

शीर्ष A की सम्मुख भुजा $\overline{BC}$ है। क्या आप भुजा $\overline{AB}$ के सम्मुख कोण का नाम बता सकते हैं ? आप जानते हैं कि त्रिभुजों का वर्गीकरण (i) भुजाओं (ii) कोणों के आधार पर किस प्रकार किया जाता है।

(i) भुजाओं के आधार पर : विषमबाहु, समद्विबाहु तथा समबाहु त्रिभुज।

(ii) कोणों के आधार पर : न्यून कोण, अधिक कोण तथा समकोण त्रिभुज।

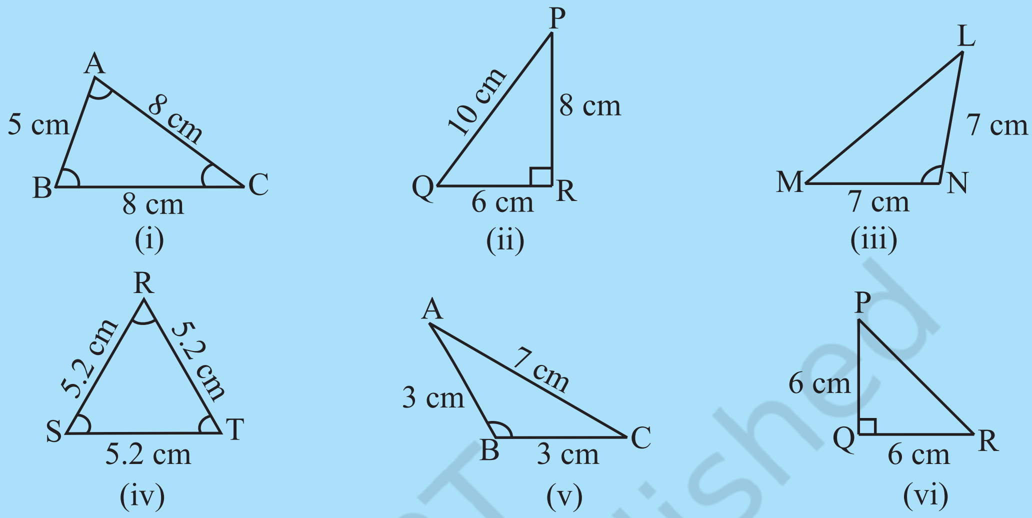
ऊपर बताए गए, सभी प्रकार के त्रिभुजों के आकारों के नमूने, कागज़ से काटकर बनाइए। अपने नमूनों की, साथियों के नमूनों से तुलना कीजिए और उनके बारे में चर्चा कीजिए।

प्रयास कीजिए

1. ΔABC के छः अवयवों (तीन भुजाओं तथा तीन कोणों) के नाम लिखिए।
2. लिखिए:
   (i) ΔPQR के शीर्ष Q की सम्मुख भुजा
   (ii) ΔLMN की भुजा LM का सम्मुख कोण
   (iii) ΔRST की भुजा RT का सम्मुख शीर्ष

3. आकृति 6.2 देखिए तथा त्रिभुजों में से प्रत्येक का वर्गीकरण कीजिए :

(a) भुजाओं के आधार पर (b) कोणों के आधार पर



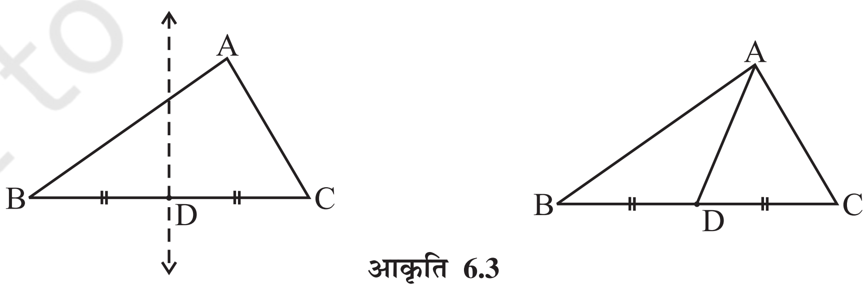
आकृति 6.2

आइए, त्रिभुजों के बारे में कुछ और अधिक जानने का प्रयास करें।

6.2 त्रिभुज की माध्यिकाएँ

आप जानते हैं कि एक दिए गए रेखाखंड का लंब समद्विभाजक कागज़ मोड़ने की प्रक्रिया द्वारा कैसे ज्ञात किया जाता है।

कागज़ के टुकड़े से एक त्रिभुज ABC काटिए (आकृति 6.3)। इसकी कोई एक भुजा, मानों $\overline{BC}$ लीजिए। कागज़ मोड़ने की प्रक्रिया द्वारा $\overline{BC}$ का लंब समद्विभाजक ज्ञात कीजिए। कागज़ पर मोड़ की तह, भुजा $\overline{BC}$ को D पर काटती है जो उसका मध्य बिंदु है। शीर्ष A को D से मिलाइए।



आकृति 6.3

रेखाखंड AD, जो भुजा $\overline{BC}$ के मध्यबिंदु D को सम्मुख शीर्ष A से मिलाता है, त्रिभुज की एक **माध्यिका** है।

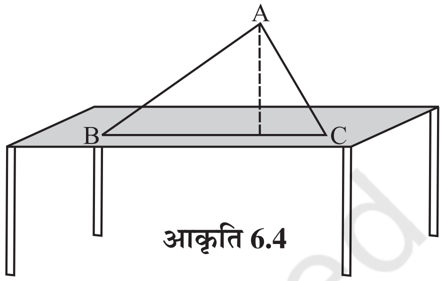
भुजाएँ $\overline{AB}$ तथा $\overline{CA}$ लेकर, इस त्रिभुज की दो और माध्यिकाएँ खींचिए।

माध्यिका, त्रिभुज के एक शीर्ष को, सम्मुख भुजा के मध्य बिंदु से मिलाती है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. एक त्रिभुज में कितनी माध्यिकाएँ हो सकती हैं ?
2. क्या एक माध्यिका पूर्णतया त्रिभुज के अंदर में स्थित होती है ? (यदि आप समझते हैं कि यह सत्य नहीं है तो उस स्थिति के लिए एक आकृति खींचिए।)

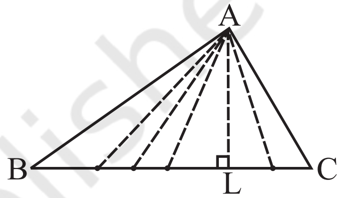
6.3 त्रिभुज के शीर्षलंब



आकृति 6.4

त्रिभुज के आकार वाला गत्ते का एक टुकड़ा ABC लीजिए। इसे एक मेज पर सीधा ऊर्ध्वाधर खड़ा कीजिए। इसकी ऊँचाई कितनी है ? यह ऊँचाई शीर्ष A से भुजा $\overline{BC}$ तक की दूरी है (आकृति 6.4)।

शीर्ष A से भुजा $\overline{BC}$ तक अनेक रेखाखंड खींचे जा सकते हैं (आकृति 6.5)। इनमें से त्रिभुज की ऊँचाई कौन-सी रेखाखंड प्रदर्शित करती है ?



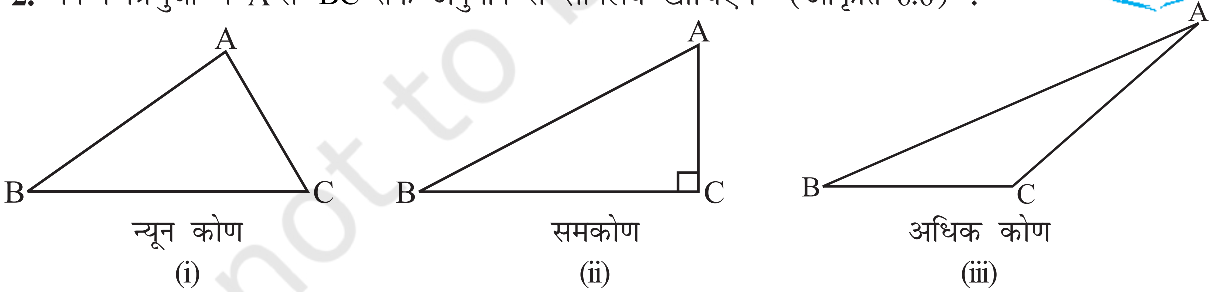
आकृति 6.5

वह रेखाखंड जो शीर्ष A से सीधा ऊर्ध्वाधर नीचे $\overline{BC}$ तक और उस पर लंबवत होता है, इसकी **ऊँचाई** होती है।
रेखाखंड AL त्रिभुज का एक **शीर्षलंब** है।

शीर्षलंब का एक अंत बिंदु, त्रिभुज के एक शीर्ष पर और दूसरा अंत बिंदु सम्मुख भुजा बनाने वाली रेखा पर स्थित होता है। प्रत्येक शीर्ष से एक शीर्षलंब खींचा जा सकता है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. एक त्रिभुज में कितने शीर्ष हो सकते हैं ?
2. निम्न त्रिभुजों में A से $\overline{BC}$ तक अनुमान से शीर्षलंब खींचिए। (आकृति 6.6) :



आकृति 6.6

3. क्या एक शीर्षलंब पूर्णतया त्रिभुज के अभ्यंतर में सदैव स्थित होगा ? (यदि आप समझते हैं कि यह सत्य होना आवश्यक नहीं है तो उस स्थिति के लिए एक आकृति खींचिए।
4. क्या आप कोई ऐसा त्रिभुज सोच सकते हैं; जिसके दो शीर्षलंब उसकी दो भुजाएँ ही हों ?
5. क्या किसी त्रिभुज की माध्यिका व शीर्षलंब एक ही रेखाखंड हो सकता है ?

(संकेत: प्रश्न 4 व 5 के लिए, प्रत्येक प्रकार के त्रिभुज के शीर्षलंब खींचकर खोज करिए।)

इन्हें कीजिए

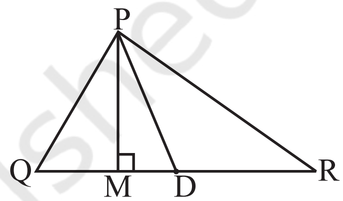
कागज़ से काटी गई इन आकृतियों को लीजिए।

(i) समबाहु त्रिभुज (ii) समद्विबाहु त्रिभुज तथा

(iii) विषमबाहु त्रिभुज

इनके शीर्षलंब तथा माध्यिकाएँ ज्ञात कीजिए। क्या आप इनमें कुछ विशेषता पाते हैं? अपने साथियों के साथ इन पर चर्चा कीजिए।

प्रश्नावली 6.1



1. Δ PQR में भुजा $\overline{QR}$ का मध्य बिंदु D है

   $\overline{PM}$ ________________ है।

   PD ________________ है।

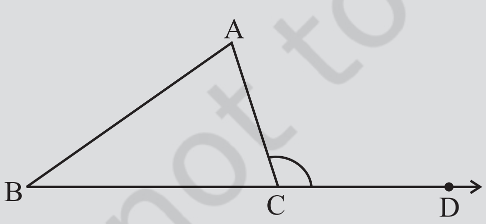
   क्या QM = MR ?

2. निम्न के लिए अनुमान से आकृति खींचिए।
   (a) ΔABC में, BE एक माध्यिका है।
   (b) ΔPQR में, PQ तथा PR त्रिभुज के शीर्षलंब हैं।
   (c) ΔXYZ में, YL एक शीर्षलंब उसके बहिर्भाग में है।

3. आकृति खींचकर पुष्टि कीजिए कि एक समद्विबाहु त्रिभुज में शीर्षलंब व माध्यिका एक ही रेखाखंड हो सकता है।

6.4 त्रिभुज का बाह्य कोण एवं इसके गुण

इन्हें कीजिए



आकृति 6.7

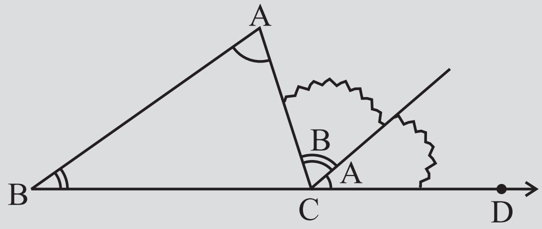
1. एक त्रिभुज ABC खींचिए और इसकी एक भुजा, $\overline{BC}$ को एक ओर बढ़ाइए (आकृति 6.7)। शीर्ष C पर बने कोण ACD पर ध्यान दीजिए। यह कोण ΔABC के बहिर्भाग में स्थित है। हम इसे ΔABC के शीर्ष C पर बना एक बाह्य कोण कहते हैं।

   स्पष्ट है कि $\angle$BCA तथा $\angle$ACD परस्पर संलग्न कोण हैं। त्रिभुज के शेष दो कोण, $\angle$A तथा $\angle$B बाह्य कोण ACD के दो **सम्मुख अंतःकोण** या **दूरस्थ अंतःकोण** कहलाते हैं। अब काट कर या अक्स (Trace copy) लेकर $\angle$A तथा $\angle$B एक दूसरे के संलग्न मिलाकर $\angle$ACD पर रखिए जैसा कि आकृति 6.8 में दिखाया गया है।

क्या ये दोनों कोण ∠ACD को पूर्णतया आच्छादित करते हैं ?

क्या आप कह सकते हैं

$m\,\angle ACD = m\,\angle A + m\,\angle B$?



आकृति 6.8

2. जैसा कि पहले किया गया है, एक त्रिभुज ABC लेकर उसका बाह्य कोण ACD बनाइए। कोण मापक की सहायता से ∠ACD, ∠A तथा ∠B को मापिए।

∠A + ∠B का योग ज्ञात कर उसकी तुलना ∠ACD की माप से कीजिए। कोण मापक की सहायता से ∠ACD की माप ∠A + ∠B के बराबर होगी। यदि माप में कोई त्रुटि है तो इसकी माप लगभग बराबर होगी ।

इन दो क्रियाकलापों को, कुछ अन्य त्रिभुज लेकर और उनके बाह्य कोण खींचकर, आप दोहरा सकते हैं। प्रत्येक बार आप यही पाएँगे कि त्रिभुज का बाह्य कोण उसके दोनों सम्मुख अंत:कोणों के योग के बराबर होता है।

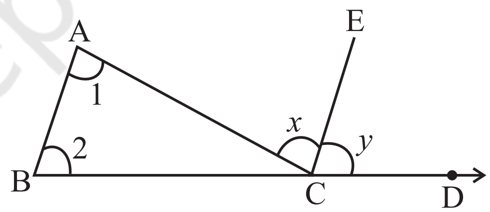
एक चरणबद्ध व तर्कपूर्ण विधि से भी इस गुण की पुष्टि की जा सकती है।

किसी त्रिभुज का बाह्य कोण अपने दोनों सम्मुख अंत:कोणों के योग के बराबर होता है।

दिया है : ΔABC लेते हैं। ∠ACD इसका एक बाह्य कोण है।

दिखाना है : $m\angle ACD = m\angle A + m\angle B$

शीर्ष C से भुजा $\overline{BA}$ के समांतर CE रेखा खींचिए ।



आकृति 6.9

औचित्य

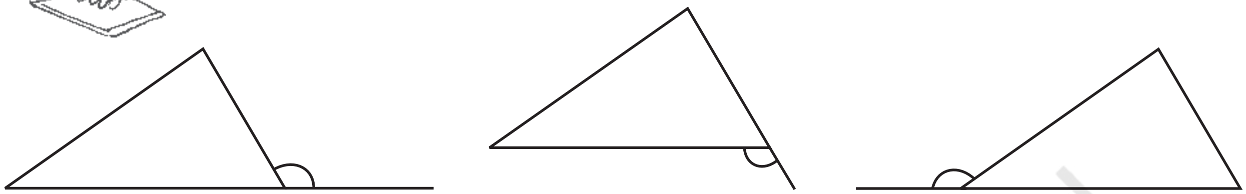
चरण	कारण
(a) $\angle 1 = \angle x$	$\overline{BA} \parallel \overline{CE}$ तथा $\overline{AC}$ एक तिर्यक रेखा है। अत:, एकांतर कोण समान होने चाहिए।
(b) $\angle 2 = \angle y$	$\overline{BA} \parallel \overline{CE}$ तथा $\overline{BD}$ एक तिर्यक रेखा है। अत:, संगत कोण समान होने चाहिए।
(c) $\angle 1 + \angle 2 = \angle x + \angle y$	
(d) अब, $\angle x + \angle y = m\,\angle ACD$	(आकृति 6.9 से)

अत:, $\angle 1 + \angle 2 = \angle ACD$

किसी त्रिभुज में बाह्य कोण और उसके दोनों सम्मुख अंत:कोणों के बीच यह संबंध **त्रिभुज के बाह्य कोण के गुण** के नाम से जाना जाता है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. एक त्रिभुज के लिए बाह्य कोण भिन्न-भिन्न प्रकार से बनाए जा सकते हैं। इनमें से तीन, निम्न प्रकार से दिखाए गए हैं (आकृति 6.10)।



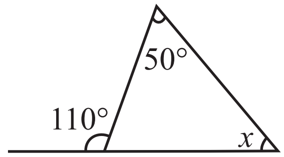
आकृति 6.10

इनके अतिरिक्त तीन और प्रकार से भी बाह्य कोण बनाए जा सकते हैं। उन्हें भी अनुमान से बनाइए।

2. किसी त्रिभुज के एक शीर्ष पर बने दोनों बाह्य कोण क्या परस्पर समान होते हैं?

3. किसी त्रिभुज के एक बाह्य कोण और उसके संलग्न अंत:कोण के योग के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

उदाहरण 1 आकृति 6.11 में x का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 6.11

हल सम्मुख अंत:कोणों का योग = बाह्य कोण

अथवा $50° + x = 110°$

अथवा $x = 60°$

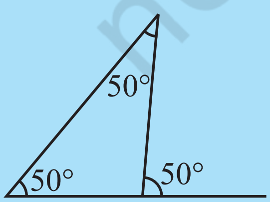
सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. प्रत्येक दशा में अंत: सम्मुख कोणों के बारे में आप क्या कह सकते हैं जब कि बाह्य कोण है:

(i) एक समकोण (ii) एक अधिक कोण (iii) एक न्यून कोण

2. क्या किसी त्रिभुज का कोई बाह्य कोण एक सरल कोण भी हो सकता है?

प्रयास कीजिए



आकृति 6.12

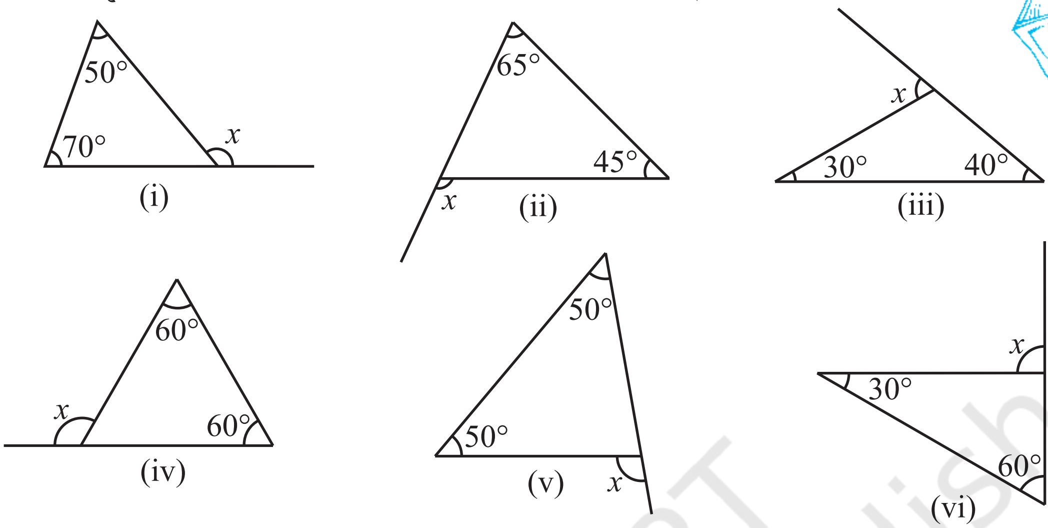
1. किसी त्रिभुज में एक बाह्य कोण की माप 70° है और उसके अंत: सम्मुख कोणों में से एक की माप 25° है। दूसरे अंत: सम्मुख कोण की माप ज्ञात कीजिए।

2. किसी त्रिभुज के दो अंत: सम्मुख कोणों की माप 60° तथा 80° है। उसके बाह्य कोण की माप ज्ञात कीजिए।

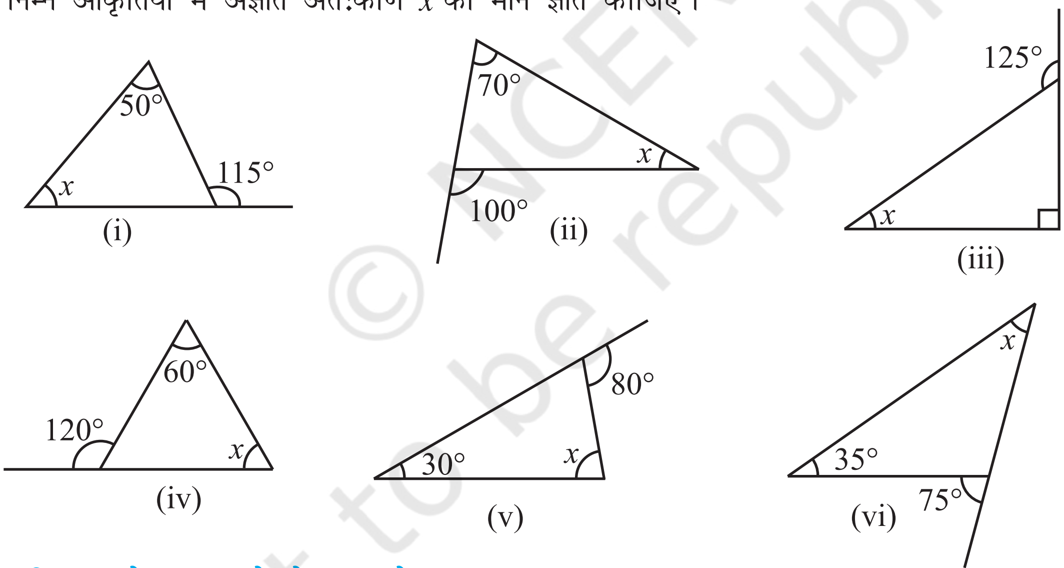
3. क्या इस आकृति में कोई त्रुटि है (आकृति 6.12)? टिप्पणी करें।

प्रश्नावली 6.2

1. निम्न आकृतियों में अज्ञात बाह्य कोण x का मान ज्ञात कीजिए।



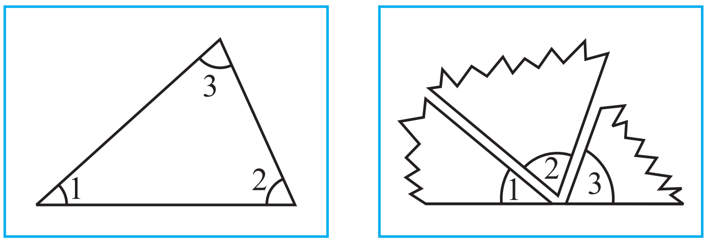
2. निम्न आकृतियों में अज्ञात अंत:कोण x का मान ज्ञात कीजिए।



6.5 त्रिभुज के अंत:कोणों का योग गुण

त्रिभुज के तीनों कोणों का आपस में संबंध दर्शाने वाला एक अद्‌भुत गुण है। इस गुण को आप निम्नलिखित चार क्रियाकलापों द्वारा देख व समझ पाएँगे।

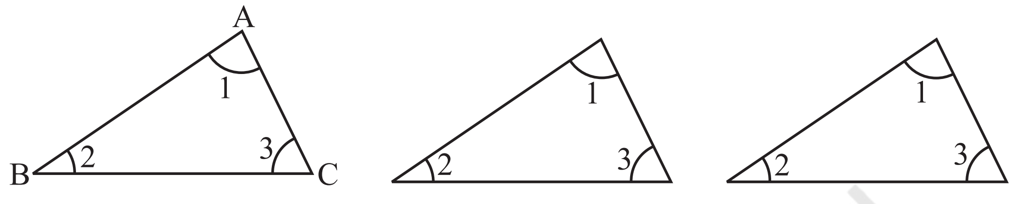
1. एक त्रिभुज खींचिए। इसके तीनों कोणों को काटकर अलग-अलग कीजिए। इन्हें अब इस प्रकार व्यवस्थित करके रखिए जैसा कि आकृति 6.13 (i) व (ii) में दिखाया गया है।



(i) **आकृति 6.13** (ii)

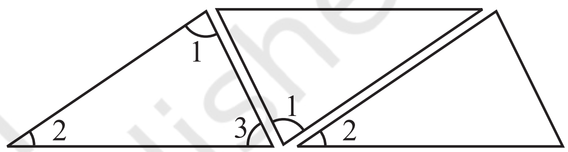
ये तीनों कोण मिलकर एक कोण बनाते हैं। जिसकी माप 180° है।
इस प्रकार, त्रिभुज के तीनों कोणों की मापों का योग 180° होता है।

2. इस तथ्य को आप एक अन्य विधि द्वारा भी देख सकते हैं। किसी ΔABC के तीन प्रतिरूप बनाइए, (आकृति 6.14)।



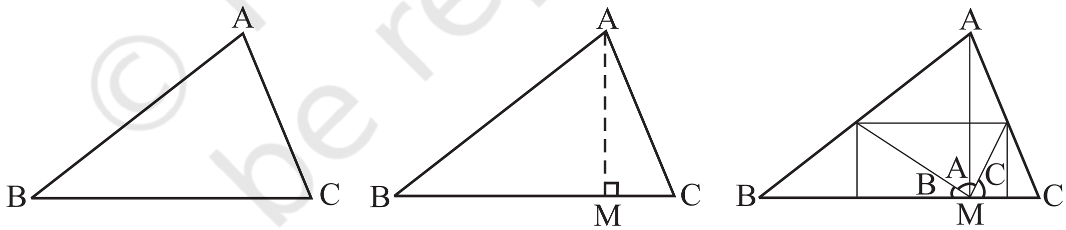
आकृति 6.14

इन तीनों को आकृति 6.15 की भाँति मिलाकर ठीक से रखिए।
$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ के बारे में आप क्या अवलोकन करते हैं?
(क्या आप यहाँ बाह्य कोण से संबंधित गुण भी देख पाते हैं?)



आकृति 6.15

3. कागज़ के एक टुकड़े से कोई एक त्रिभुज, जैसे ΔABC (आकृति 6.16) काटिए।
इस त्रिभुज को मोड़कर शीर्ष A से गुज़रता हुआ शीर्षलंब AM निर्धारित कीजिए। अब इस त्रिभुज के तीनों कोनों को इस प्रकार मोड़िए जिससे तीनों शीर्ष A, B तथा C बिंदु M पर मिलें।



(i) (ii) (iii)

आकृति 6.16

आप देखते हैं कि त्रिभुज के तीनों कोण मिलकर एक सरल कोण बनाते हैं। यह क्रियाकलाप पुनः दर्शाता है कि त्रिभुज के तीनों कोणों की मापों का योग 180° होता है।

4. अपनी अभ्यास पुस्तिका में कोई तीन त्रिभुज, मानों ΔABC, ΔPQR तथा ΔXYZ खींचिए। इन सभी त्रिभुजों के प्रत्येक कोण की माप एक कोण मापक द्वारा माप कर ज्ञात कीजिए। इन मापों को तालिका रूप में इस प्रकार लिखिए,

Δ का नाम	कोणों की माप			तीनों कोणों की मापों का योग
ΔABC	$m\angle A =$	$m\angle B =$	$m\angle C =$	$m\angle A + m\angle B + m\angle C =$
ΔPQR	$m\angle P =$	$m\angle Q =$	$m\angle R =$	$m\angle P + m\angle Q + m\angle R =$
ΔXYZ	$m\angle X =$	$m\angle Y =$	$m\angle Z =$	$m\angle X + m\angle Y + m\angle Z =$

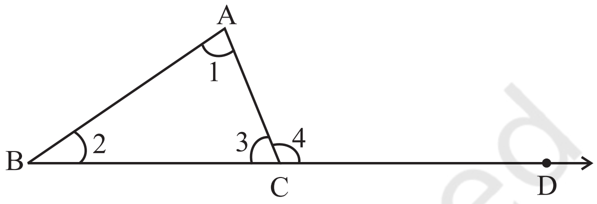
मापने में हुई संभावित त्रुटियों को ध्यान में रखते हुए आप पाएँगे कि अंतिम स्तंभ में तीनों कोणों का योग 180° (या लगभग 180°) ही है।

पूर्णयता शुद्ध माप संभव होने पर हम यही पाएँगे कि त्रिभुज के तीनों कोणों की मापों का योग 180° होता है।

अब आप अपने इस निर्णय को तर्कपूर्ण कथनों द्वारा चरणबद्ध रूप में प्रस्तुत कर सकते हैं।

कथन त्रिभुज के तीनों कोणों की मापों का योग 180° होता है।

इस तथ्य को स्थापित करने के लिए हम त्रिभुज के बाह्य कोण के गुण का उपयोग करते हैं।



आकृति 6.17

दिया है : ΔABC के तीन कोण $\angle 1, \angle 2$ तथा $\angle 3$ हैं (आकृति 6.17)।

$\angle 4$ एक बाह्य कोण है जो भुजा $\overline{BC}$ को D तक बढ़ाने पर बनता है।

उपपत्ति $\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$ (बाह्य कोण का गुण)

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 3$ (दोनों पक्षों में $\angle 3$ योग करने पर)

परंतु $\angle 4$ तथा $\angle 3$ एक रैखिक युग्म बनाते हैं। अतः, इनका योग 180° है।

अर्थात् $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$

आइए, अब देखें कि त्रिभुज के कोणों के इस गुण को, विभिन्न समस्याएँ हल करने में हम कैसे उपयोग कर सकते हैं।

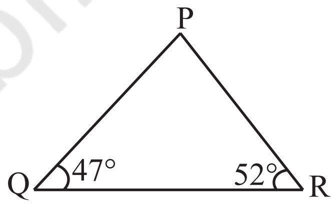


Fig 6.18

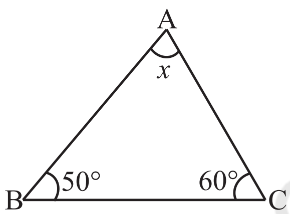
उदाहरण 2 दी गई आकृति 6.18 में $\angle P$ की माप ज्ञात कीजिए।

हल त्रिभुज के कोणों का योग गुण से $m\angle P + 47° + 52° = 180°$

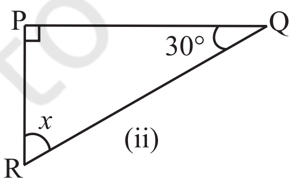
अतः $m\angle P = 180° - 47° - 52° = 180° - 99° = 81°$

प्रश्नावली 6.3

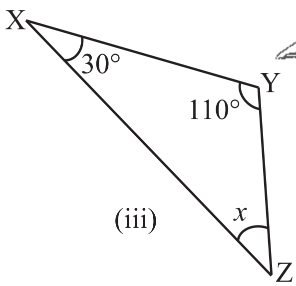
1. निम्नांकित आकृतियों में अज्ञात x का मान ज्ञात कीजिए।



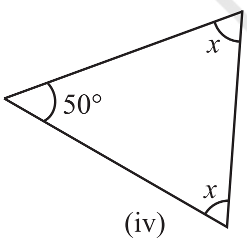
(i)



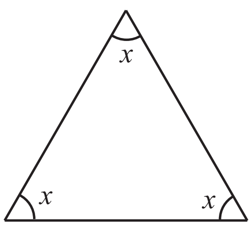
(ii)



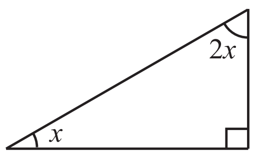
(iii)



(iv)

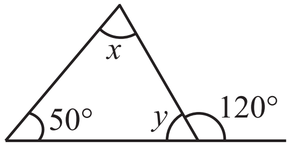


(v)

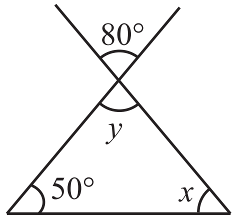


(vi)

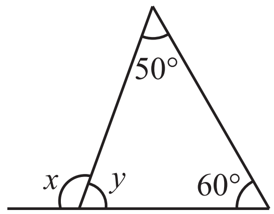
2. निम्नांकित आकृतियों में अज्ञात x और y का मान ज्ञात कीजिए।



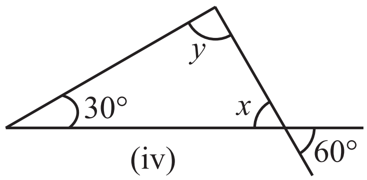
(i)



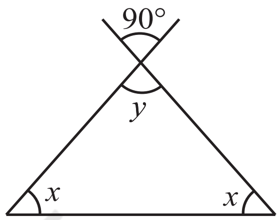
(ii)



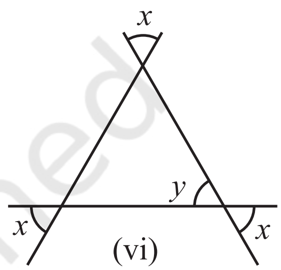
(iii)



(iv)



(v)



(vi)

प्रयास कीजिए

1. एक त्रिभुज के दो कोण 30° तथा 80° हैं। इस त्रिभुज का तीसरा कोण ज्ञात कीजिए।

2. किसी त्रिभुज का एक कोण 80° है तथा शेष दोनों कोण बराबर हैं। बराबर कोणों में प्रत्येक की माप ज्ञात कीजिए।

3. किसी त्रिभुज के तीनों कोणों में 1 : 2 : 1 का अनुपात है। त्रिभुज के तीनों कोण ज्ञात कीजिए। त्रिभुज का दोनों प्रकार से वर्गीकरण भी कीजिए।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. क्या कोई ऐसा त्रिभुज संभव है जिसके दो कोण समकोण हों?

2. क्या कोई ऐसा त्रिभुज संभव है जिसमें दो कोण अधिक कोण हों?

3. क्या कोई ऐसा त्रिभुज संभव है जिसमें दो कोण न्यून कोण हों?

4. क्या कोई ऐसा त्रिभुज संभव है जिसमें तीनों कोण 60° से अधिक हों?

5. क्या कोई ऐसा त्रिभुज संभव है जिसमें तीनों कोण 60° के हों?

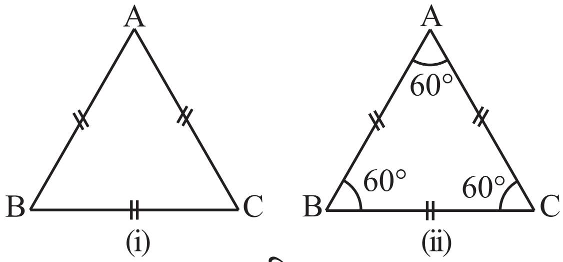
6. क्या कोई ऐसा त्रिभुज संभव है जिसमें तीनों कोण 60° से कम के हों?

6.6 दो विशेष त्रिभुज : समबाहु तथा समद्विबाहु

एक त्रिभुज, जिसकी तीनों भुजाओं की माप समान हो, समबाहु त्रिभुज कहलाता है।

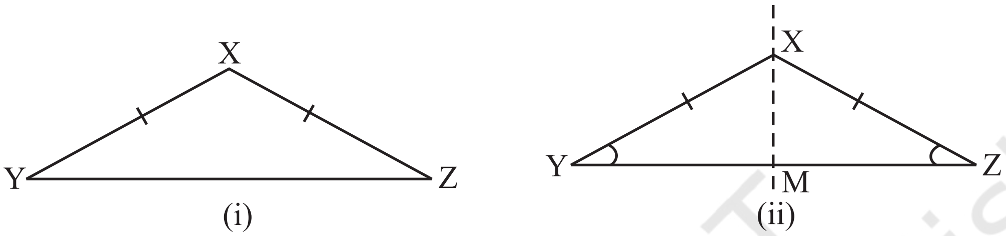
एक समबाहु त्रिभुज ABC (आकृति 6.19) बनाइए। इसका प्रतिरूप यानी इसी माप का एक और समबाहु त्रिभुज कागज़ से काटें। पहले त्रिभुज को स्थिर रखते हुए इस पर दूसरा त्रिभुज इसे ढकते

हुए रखें। दूसरा त्रिभुज पहले को पूरी तरह ढक लेता है। दूसरे त्रिभुज को पहले त्रिभुज पर किसी भी तरह घुमाकर रखें, वे दोनों त्रिभुज फिर भी एक दूसरे को ढक लेते हैं। क्या आप देख पाते हैं कि यदि त्रिभुज की तीनों भुजाएँ समान माप की हैं तब तीनों कोण भी समान माप के ही होते हैं। हम निष्कर्ष निकालते हैं कि समबाहु त्रिभुज में (i) तीनों भुजाएँ समान माप की होती हैं। (ii) प्रत्येक कोण की माप 60° होती है।



आकृति 6.19

एक त्रिभुज, जिसकी दो भुजाओं की माप समान हों, एक समद्विबाहु त्रिभुज कहलाता है।



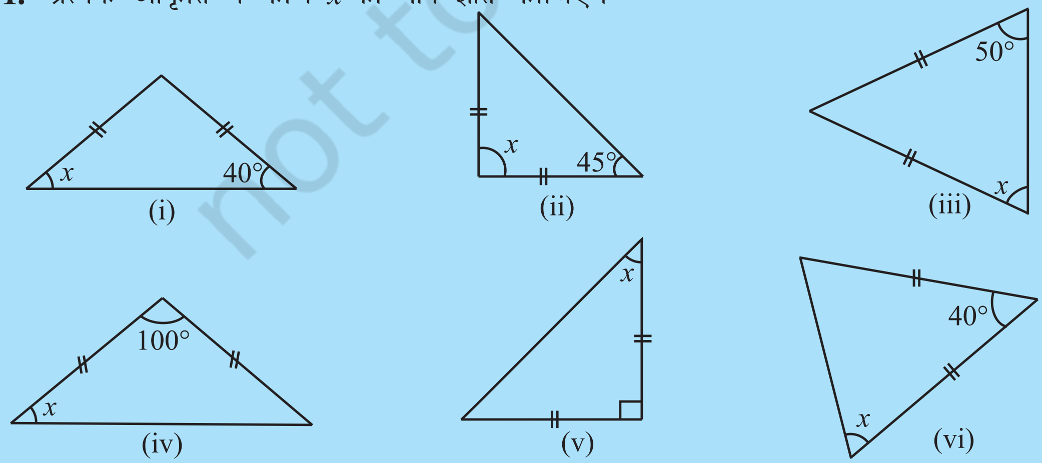
आकृति 6.20

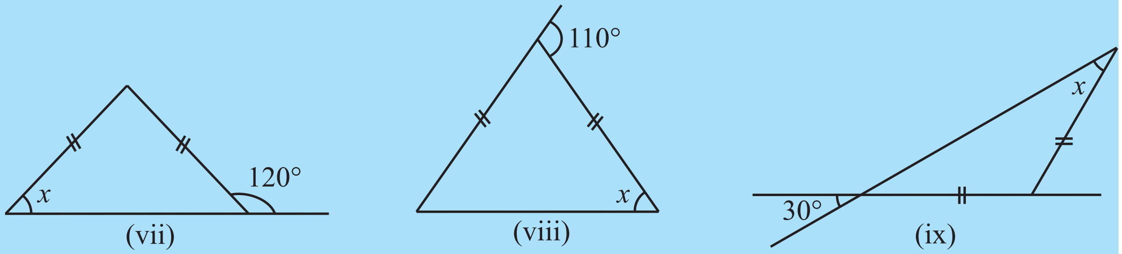
कागज़ के टुकड़े से एक समद्विबाहु त्रिभुज XYZ, काटिए, जिसमें भुजा XY = भुजा XZ हो (आकृति 6.20)। इसे इस प्रकार मोड़िए जिससे शीर्ष Z शीर्ष Y पर आच्छादित हो। अब शीर्ष X से गुज़रने वाली रेखा XM इस त्रिभुज का सममित अक्ष है (जिसके बारे में आप अध्याय 14 में पढ़ेंगे)। आप देखते हैं कि $\angle Y$ और $\angle Z$ एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेते हैं। XY और XZ त्रिभुज की सम भुजाएँ कहलाती हैं। YZ आधार कहलाता है; $\angle Y$ तथा $\angle Z$ आधार कोण कहलाते हैं जो परस्पर समान होते हैं।

इस प्रकार हम निष्कर्ष निकालते हैं कि समद्विबाहु त्रिभुज में (i) दो भुजाएँ बराबर लंबाई की होती हैं। (ii) समान भुजाओं के सामने का कोण समान होता है।

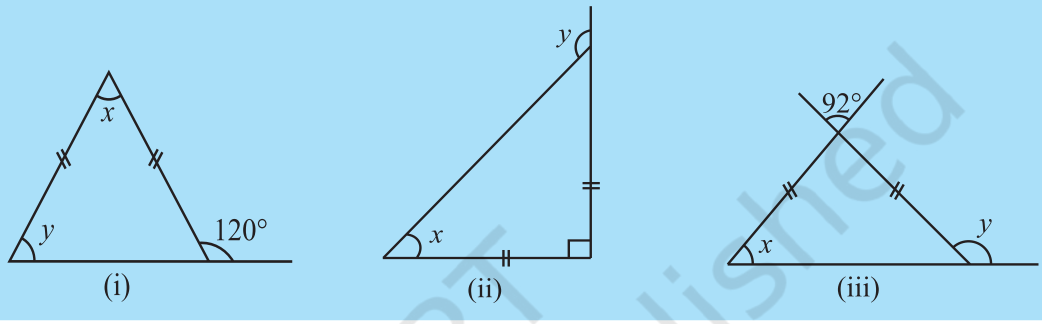
प्रयास कीजिए

1. प्रत्येक आकृति में कोण x का मान ज्ञात कीजिए।



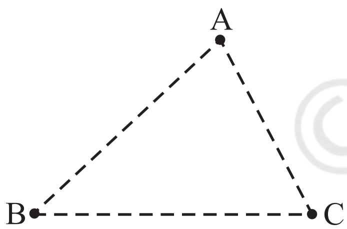


2. प्रत्येक आकृति में कोण x तथा y का मान ज्ञात कीजिए।



6.7 एक त्रिभुज की दो भुजाओं की मापों का योग

1. अपने खेल के मैदान में तीन बिंदु A, B तथा C अंकित कीजिए जो एक ही रेखा में न हों। चूना पाउडर लेकर AB, BC तथा AC पथ निर्धारित कीजिए।



आकृति 6.21

अपने किसी मित्र से कहिए कि वह निर्धारित पथों का उपयोग कर किसी प्रकार A से प्रारंभ कर C तक पहुँचे। उदाहरण के लिए, वह पहले पथ $\overline{AB}$ पर और फिर पथ $\overline{BC}$ पर चलकर C पर पहुँचें अथवा पथ $\overline{AC}$ पर चलकर सीधे C पर पहुँच जाए। स्वाभाविक है कि वह सीधा पथ AC पसंद करेगी। अगर वह कोई अन्य पथ (जैसे $\overline{AB}$ फिर $\overline{BC}$) लेगी, तब उसे अधिक दूरी चलनी पड़ेगी। दूसरे शब्दों में

$$AB + BC > AC \qquad \text{(i)}$$

इसी प्रकार यदि वह B से प्रारंभ कर A पर पहुँचना चाहती है तब वह पहले पथ $\overline{BC}$ और फिर पथ $\overline{CA}$ नहीं लेगी बल्कि वह पथ $\overline{BA}$ लेकर सीधा B से A पर पहुँचेगी। यह इसलिए कि

$$BC + CA > AB \qquad \text{(ii)}$$

इसी प्रकार तर्क करने पर हम देखते हैं कि

$$CA + AB > BC \qquad \text{(iii)}$$

इससे पता चलता है कि **किसी त्रिभुज की दो भुजाओं की मापों का योग तीसरी भुजा की माप से बड़ा होता है।**

2. अलग-अलग मापों वाली 15 छोटी तीलियाँ (या पट्टियाँ) लीजिए। उनकी मापें, मान लीजिए 6 cm, 7 cm, 8 cm 9 cm, ...20 cm हैं।

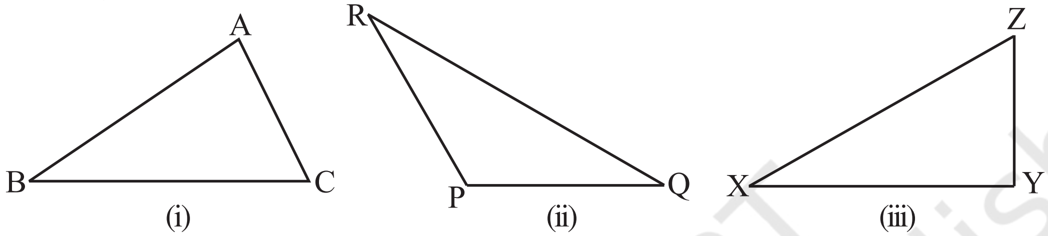
   इनमें से कोई तीन तीलियाँ लेकर त्रिभुज बनाने का प्रयत्न कीजिए। तीन-तीन तीलियों के विभिन्न समूह लेकर इस प्रक्रिया को दोहराइए।

मान लीजिए पहले आप दो तीलियाँ 6 cm व 12 cm लंबी लेते हैं। तीसरी तीली $12 - 6 = 6$ cm से अधिक लंबी लेकिन $12 + 6 = 18$ cm से कम लंबी लेनी होगी। यह सब करके देखिए और पता लगाइए कि ऐसा क्यों आवश्यक है।

एक त्रिभुज बनाने के लिए, आपको तीन तीलियाँ इस प्रकार चुननी होंगी जिससे कि उनमें, कोई दो तीलियों की लंबाइयों का योग तीसरी तीली की लंबाई से अधिक हो।

इस प्रक्रिया से यह भी पता चलता है कि एक त्रिभुज की दो भुजाओं की मापों का योग तीसरी भुजा की माप से अधिक होता है।

3. अपनी अभ्यास-पुस्तिका में कोई तीन त्रिभुज, जैसे ΔABC, ΔPQR तथा ΔXYZ बनाइए (आकृति 6.22)।



आकृति 6.22

अपने पैमाने (रूलर) की सहायता से इन त्रिभुजों की भुजाओं को माप कर, एक तालिका के रूप में निम्न प्रकार से लिखिए :

Δ का नाम	भुजाओं की माप	क्या यह सही है?	
Δ ABC	AB ___	AB – BC < CA ___ + ___ > ___	(हाँ/नहीं)
	BC ___	BC – CA < AB ___ + ___ > ___	(हाँ/नहीं)
	CA ___	CA – AB < BC ___ + ___ > ___	(हाँ/नहीं)
Δ PQR	PQ ___	PQ – QR < RP ___ + ___ > ___	(हाँ/नहीं)
	QR ___	QR – RP < PQ ___ + ___ > ___	(हाँ/नहीं)
	RP ___	RP – PQ < QR ___ + ___ > ___	(हाँ/नहीं)
Δ XYZ	XY ___	XY – YZ < ZX ___ + ___ > ___	(हाँ/नहीं)
	YZ ___	YZ – ZX < XY ___ + ___ > ___	(हाँ/नहीं)
	ZX ___	ZX – XY < YZ ___ + ___ > ___	(हाँ/नहीं)

इस प्रक्रिया से हमारे पिछले अनुमान की भी पुष्टि होती है। अत: हम निष्कर्ष निकालते हैं कि **एक त्रिभुज की कोई दो भुजाओं की मापों का योग, तीसरी भुजा की माप से अधिक होती है।**

साथ ही हमें यह भी पता चलता है कि एक त्रिभुज की किसी दो भुजाओं का अंतर, तीसरी भुजा की माप से कम होता है।

उदाहरण 3 क्या कोई ऐसा त्रिभुज संभव है जिसकी भुजाओं की मापें 10.2 cm, 5.8 cm तथा 4.5 cm हों ?

हल मान लीजिए ऐसा त्रिभुज संभव है। तब इस त्रिभुज की कोई भी दो भुजाओं की लंबाइयों का योग तीसरी भुजा की लंबाई से अधिक होगा। आइए, जाँच करके देखें :

क्या	$4.5 + 5.8 > 10.2$?	सही है
क्या	$5.8 + 10.2 > 4.5$?	सही है
क्या	$10.2 + 4.5 > 5.8$?	सही है

अत:, इन भुजाओं वाला त्रिभुज संभव है।

उदाहरण 4 एक त्रिभुज की दो भुजाओं की माप 6 cm तथा 8 cm हैं। इसकी तीसरी भुजा की माप किन दो संख्याओं के बीच होगी ?

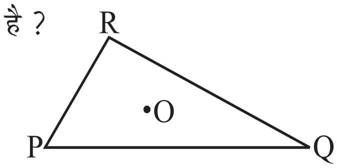
हल हम जानते हैं कि त्रिभुज की कोई दो भुजाओं का योग तीसरी से अधिक होता है।

अत:, तीसरी भुजा, दी हुई दो भुजाओं के योग से कम होनी चाहिए। अर्थात् तीसरी भुजा $8 + 6 = 14$ cm से कम होगी।

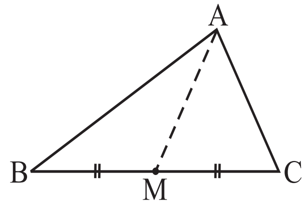
यह तीसरी भुजा दी हुई दोनों भुजाओं के अंतर से अधिक होनी चाहिए। अर्थात् तीसरी भुजा $8 - 6 = 2$ cm से अधिक होगी।

तीसरी भुजा की माप 2 cm से अधिक तथा 14 cm से कम होनी चाहिए।

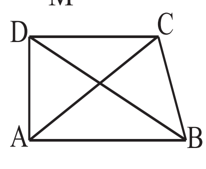
प्रश्नावली 6.4



1. निम्न दी गई भुजाओं की मापों से क्या कोई त्रिभुज संभव है ?
   (i) 2 cm, 3 cm, 5 cm (ii) 3 cm, 6 cm, 7 cm
   (iii) 6 cm, 3 cm, 2 cm
2. त्रिभुज PQR के अभ्यंतर में कोई बिंदु O लीजिए। क्या यह सही है कि
   (i) $OP + OQ > PQ$?
   (ii) $OQ + OR > QR$?
   (iii) $OR + OP > RP$?



3. त्रिभुज ABC की एक माध्यिका AM है। बताइए कि क्या $AB + BC + CA > 2\,AM$?
   (संकेत : ΔABM तथा ΔAMC की भुजाओं पर विचार कीजिए।)



4. ABCD एक चतुर्भुज है। क्या AB + BC + CD + DA > AC + BD?

5. ABCD एक चतुर्भुज है। क्या AB + BC + CD + DA < 2 (AC + BD)?

6. एक त्रिभुज की दो भुजाओं की माप 12 cm तथा 15 cm है। इसकी तीसरी भुजा की माप किन दो मापों के बीच होनी चाहिए ?

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. किसी त्रिभुज में क्या उसके कोई दो कोणों का योग तीसरे कोण से सदैव अधिक होता है ?

6.8 समकोण त्रिभुज तथा पाइथागोरस गुण

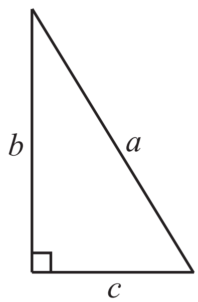
आकृति 6.23

ईसा से छठी शताब्दी पूर्व, एक यूनानी दार्शनिक पाइथागोरस ने, समकोण त्रिभुज से संबंधित एक बहुत उपयोगी व महत्वपूर्ण गुण के बारे में पता लगाया, जिसे हम इस अनुभाग में बता रहे हैं। अत: इस गुण को उनके नाम से ही जाना जाता है। वास्तव में इस गुण का ज्ञान कुछ अन्य देशों के लोगों को भी था। भारतीय गणितज्ञ बौधायन ने भी इस गुण के समकक्ष एक गुण की जानकारी दी थी।

अब हम पाइथागोरस गुण का विस्तार से अध्ययन करते हैं।

समकोण त्रिभुज में उसकी भुजाओं को विशेष नाम दिए जाते हैं। समकोण के सामने वाली भुजा को **कर्ण** कहते हैं। अन्य दो भुजाओं को समकोण त्रिभुज के **पाद** (legs) कहते हैं।

ΔABC में (आकृति 6.23), शीर्ष B पर समकोण बना है। अत:, AC इसका कर्ण है। $\overline{AB}$ तथा $\overline{BC}$ समकोण त्रिभुज ABC के दो पाद हैं।



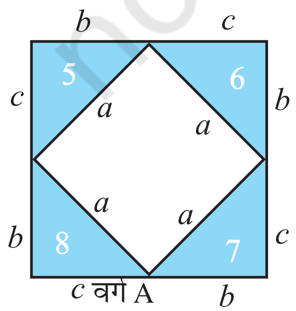
आकृति 6.24

किसी भी माप का एक समकोण त्रिभुज लेकर उसके आठ प्रतिरूप बनाइए। उदाहरण के लिए एक समकोण त्रिभुज लेते हैं जिसके कर्ण की माप a इकाई तथा उसके दो पादों की माप b इकाई तथा c इकाई है (आकृति 6.24)।

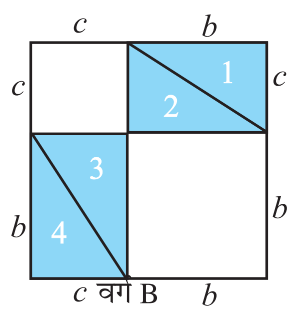
एक कागज़ पर एक समान माप वाले दो वर्ग बनाइए जिनकी भुजाओं की माप $b + c$ के बराबर हो।

अब अपने आठ त्रिभुजों में से चार त्रिभुजों को वर्ग A में तथा चार त्रिभुजों को वर्ग B में स्थापित कीजिए जैसा कि निम्न आकृति में दिखाया गया है (आकृति 6.25)।

वर्ग A



वर्ग B



आकृति 6.25

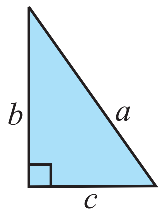
आप जानते हैं कि दोनों वर्ग एकरूप हैं यानी एक समान हैं तथा रखे गए आठों त्रिभुज भी एक समान हैं।

अत: वर्ग A का अनाच्छदित क्षेत्रफल = वर्ग B का अनाच्छादित क्षेत्रफल

अथवा वर्ग A के भीतर वाले वर्ग का क्षेत्रफल = वर्ग B के भीतर दोनों अनाच्छादित वर्गों के क्षेत्रफल का योग अर्थात्

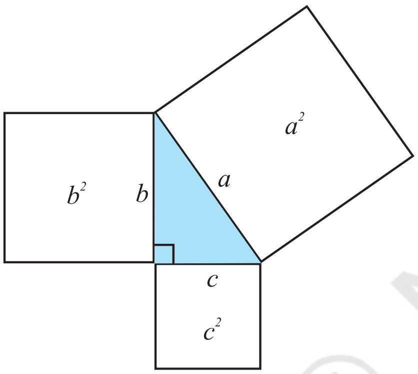
$$a^2 = b^2 + c^2$$

यह पाइथागोरस गुण है। इसे इस प्रकार कहा जा सकता है :



एक समकोण त्रिभुज में कर्ण पर बना वर्ग = पादों पर बने दोनों वर्गों का योग

पाइथागोरस गुण, गणित में एक बहुत ही महत्वपूर्ण गुण है। आगे की कक्षाओं में इसे एक साध्य के रूप में विधिपूर्वक सिद्ध भी किया जाएगा। अभी आप इसके तात्पर्य को भली भांति समझ लें।



आकृति 6.26

इसके अनुसार, किसी समकोण त्रिभुज में कर्ण पर बने वर्ग का क्षेत्रफल दोनों पादों पर बने वर्गों के क्षेत्रफल के योग के बराबर होता है।

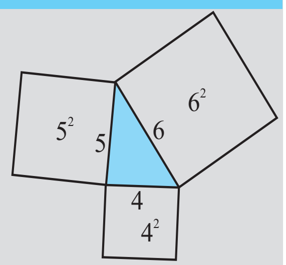
एक वर्गाकार कागज़ लेकर, उस पर एक समकोण त्रिभुज बनाइए। इसकी भुजाओं पर वर्गों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए और इस साध्य की व्यावहारिक रूप से जाँच कीजिए (आकृति 6.26)।

यदि कोई त्रिभुज, समकोण त्रिभुज है तब उस पर पाइथागोरस गुण प्रयुक्त होता है। अब यदि किसी त्रिभुज पर पाइथागोरस गुण सत्य है तो क्या यह एक समकोण त्रिभुज होगा ? (ऐसी समस्याओं को हम विलोम समस्याएँ कहते हैं।) हम इस बात का उत्तर देने का प्रयत्न करेंगे। अब हम दिखाएँगे कि यदि किसी त्रिभुज में कोई दो भुजाओं के वर्गों का योग, तीसरी भुजा के वर्ग के बराबर है तब वह एक समकोण त्रिभुज होना चाहिए।

इन्हें कीजिए

1. 4 cm, 5 cm तथा 6 सेमी लंबी भुजाओं वाले तीन वर्ग कागज़ से काटिए। इन तीनों वर्गों के तीन शीर्षों को मिलाते हुए इस प्रकार व्यवस्थित कर रखिए कि उनकी भुजाओं से एक त्रिभुज प्राप्त हो (**आकृति** 6.27)। इस प्रकार प्राप्त त्रिभुज को कागज़ पर चिन्हित कीजिए। इस त्रिभुज के तीनों कोणों को मापिए। आप देखेंगे कि इनमें कोई भी समकोण नहीं है। ध्यान दीजिए कि

$4^2 + 5^2 \neq 6^2$, $5^2 + 6^2 \neq 4^2$ तथा $6^2 + 4^2 \neq 5^2$



आकृति 6.27

2. उपर्युक्त प्रक्रिया को 4 cm, 5 cm तथा 7 cm भुजाओं वाले तीन वर्ग लेकर फिर दोहराइए। इस बार आपको एक अधिक कोण त्रिभुज प्राप्त होगा। यहाँ ध्यान दीजिए कि

$4^2 + 5^2 \neq 7^2$ इत्यादि ।

इस प्रक्रिया से पता चलता है कि पाइथागोरस गुण केवल तभी प्रयुक्त होता है जब कि त्रिभुज एक समकोण त्रिभुज होगा।

अतः हमें यह तथ्य प्राप्त होता है :

> यदि किसी त्रिभुज पर पाइथागोरस गुण प्रयुक्त होता है, तभी वह एक समकोण त्रिभुज होगा।

उदाहरण 5 एक त्रिभुज की भुजाएँ 3 cm, 4 cm तथा 5 cm लंबी हैं। निर्धारित कीजिए कि क्या वह एक समकोण त्रिभुज है ?

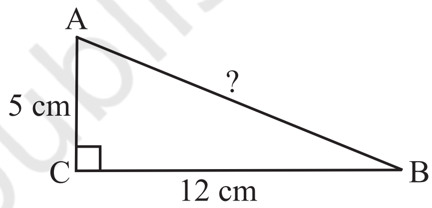
हल $3^2 = 3 \times 3 = 9;\ 4^2 = 4 \times 4 = 16;\ 5^2 = 5 \times 5 = 25$

हम देखते हैं कि $3^2 + 4^2 = 5^2$

अतः, यह त्रिभुज, एक समकोण त्रिभुज है।

ध्यान दीजिए : किसी भी समकोण त्रिभुज में कर्ण सबसे लंबी भुजा होती है। इस उदाहरण में 5 cm लंबी भुजा ही कर्ण है।

उदाहरण 6 Δ ABC का C एक समकोण है। यदि AC = 5 cm तथा BC = 12 cm, तब AB की लंबाई ज्ञात कीजिए।



आकृति 6.28

हल सहायता के लिए अनुमान से एक उपयुक्त आकृति बनाते हैं (आकृति 6.28)।

पाइथागोरस गुण से,

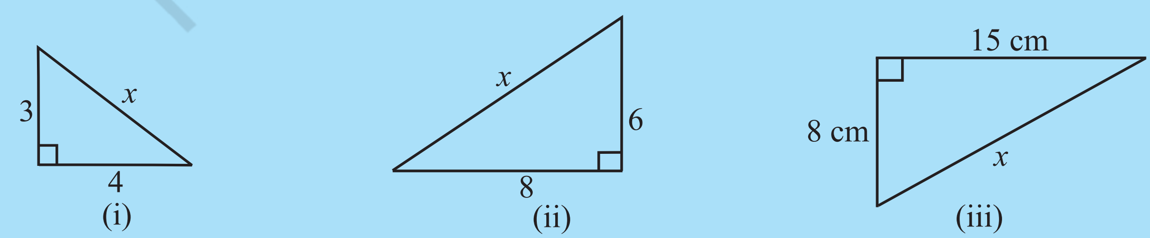
$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$
$$= 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$$

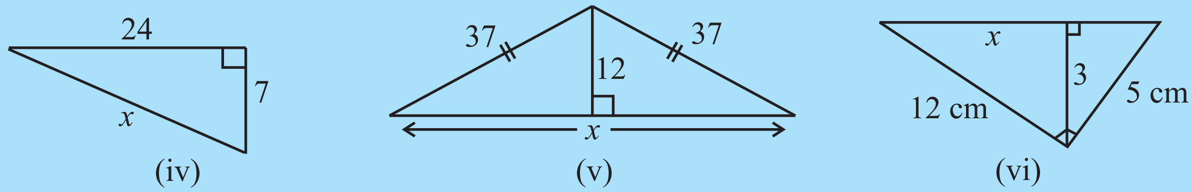
अर्थात् $AB^2 = 13^2$. अतः, AB = 13 है। अर्थात् AB की लंबाई 13 cm है।

ध्यान रखें : पूर्ण वर्ग संख्याएँ पहचानने के लिए आप अभाज्य गुणनखंड विधि प्रयोग में ला सकते हैं।

प्रयास कीजिए

निम्न आकृति 6.29 में अज्ञात लंबाई x ज्ञात कीजिए:





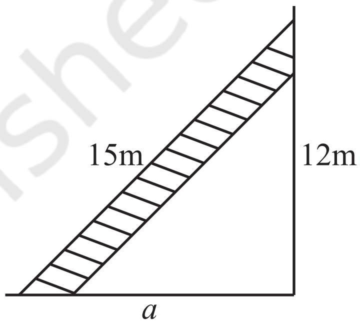
आकृति 6.29

प्रश्नावली 6.5

1. PQR एक त्रिभुज है जिसका P एक समकोण है। यदि PQ = 10 cm तथा PR = 24 cm तब QR ज्ञात कीजिए।

2. ABC एक त्रिभुज है जिसका C एक समकोण है। यदि AB = 25 cm तथा AC = 7 cm तब BC ज्ञात कीजिए।

3. दीवार के सहारे उसके पैर कुछ दूरी पर टिका कर 15 m लंबी एक सीढ़ी भूमि से 12 m ऊँचाई पर स्थित खिड़की तक पहुँच जाती है। दीवार से सीढ़ी के पैर की दूरी ज्ञात कीजिए।

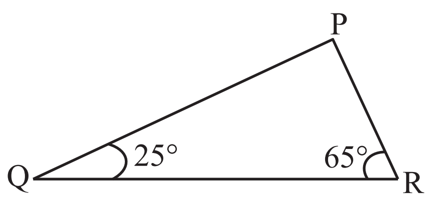


4. निम्नलिखित में भुजाओं के कौन से समूह एक समकोण त्रिभुज बना सकते हैं?
   (i) 2.5 cm, 6.5 cm,6 cm
   (ii) 2 cm, 2 cm, 5 cm
   (iii) 1.5 cm, 2 cm, 2.5 cm

   समकोण त्रिभुज होने की स्थिति में उसके समकोण को भी पहचानिए।

5. एक पेड़ भूमि से 5 m की ऊँचाई पर टूट जाता है और उसका ऊपरी सिरा भूमि को उसके आधार से 12 m की दूरी पर छूता है। पेड़ की पूरी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

6. त्रिभुज PQR में कोण Q = 25° तथा कोण R = 65°. हैं। निम्नलिखित में कौन सा कथन सत्य है?
   (i) $PQ^2 + QR^2 = RP^2$
   (ii) $PQ^2 + RP^2 = QR^2$
   (iii) $RP^2 + QR^2 = PQ^2$



7. एक आयत की लंबाई 40 cm है तथा उसका एक विकर्ण 41 cm है। इसका परिमाप ज्ञात कीजिए।

8. एक समचतुर्भुज के विकर्ण 16cm तथा 30 cm हैं। इसका परिमाप ज्ञात कीजिए।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. त्रिभुज PQR का कोण P एक समकोण है। इसकी सबसे लंबी भुजा कौन-सी है?
2. त्रिभुज ABC का कोण B एक समकोण है। इसकी सबसे लंबी भुजा कौन-सी है?
3. किसी समकोण त्रिभुज में सबसे लंबी भुजा कौन-सी होती है?
4. किसी आयत में विकर्ण पर बने वर्ग का क्षेत्रफल उसकी लंबाई तथा चौड़ाई पर बने वर्गों के क्षेत्रफल के योग के बराबर होता है। यह बौधायन का प्रमेय है। इसकी पाइथागोरस गुण से तुलना कीजिए।

इन्हें कीजिए

ज्ञानवर्द्धक क्रियाकलाप

आकृतियों को जोड़ अथवा तोड़कर, पाइथागोरस साध्य को अनेक विधियों से सिद्ध किया गया है। इन विधियों में से कुछ को एकत्रित कर उन्हें एक चार्ट बनाकर प्रस्तुत कीजिए।

हमने क्या चर्चा की?

1. एक त्रिभुज की **तीन भुजाएँ** तथा **तीन कोण**, इसके **छः अवयव** कहलाते हैं।
2. किसी त्रिभुज के एक शीर्ष को उसके सम्मुख भुजा के मध्य बिंदु से मिलाने वाले रेखाखंड को उसकी एक **माध्यिका** कहते हैं। एक त्रिभुज की तीन माध्यिकाएँ होती हैं।
3. किसी त्रिभुज के एक शीर्ष से उसके सम्मुख भुजा पर खींचे गए लंब को त्रिभुज का एक **शीर्षलंब** कहते हैं। एक त्रिभुज के तीन शीर्षलंब होते हैं।
4. किसी त्रिभुज का **बाह्य कोण** किसी एक भुजा को एक ही ओर बढ़ाने पर बनता है। प्रत्येक शीर्ष पर, एक भुजा को दो प्रकार से बढ़ाकर दो बाह्य कोण बनाए जा सकते हैं।
5. बाह्य कोण का एक गुण –

   त्रिभुज के बाह्य कोण की माप, उसके दो सम्मुख अंत:कोणों के योग के बराबर होती है।
6. त्रिभुज के कोणों के योग का गुण –

   एक त्रिभुज के तीनों कोणों का योग $180°$ होता है।
7. एक त्रिभुज जिसकी प्रत्येक भुजा की माप समान हो, **समबाहु त्रिभुज** कहलाता है। समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण $60°$ का होता है।
8. एक त्रिभुज, जिसकी कोई दो भुजाएँ माप में समान हों, **समद्विबाहु त्रिभुज** कहलाता है। समद्विबाहु त्रिभुज की असमान भुजा उसका **आधार** कहलाती है तथा आधार पर बने दोनों कोण एक दूसरे के बराबर होते हैं।

9. त्रिभुज की भुजाओं से संबंधित गुण–

(i) त्रिभुज की कोई दो भुजाओं की मापों का योग, तीसरी भुजा की माप से अधिक होता है।

(ii) त्रिभुज की कोई दो भुजाओं की मापों का अंतर, तीसरी भुजा की माप से कम होता है।

यें दोनों गुण, किसी त्रिभुज की रचना की संभावना बताने में उपयोगी होते हैं जब कि उसकी तीनों भुजाओं की माप दी हों।

10. समकोण त्रिभुज में समकोण के सामने वाली भुजा **कर्ण** तथा अन्य दोनों भुजाएँ उसके **पाद** कहलाती हैं।

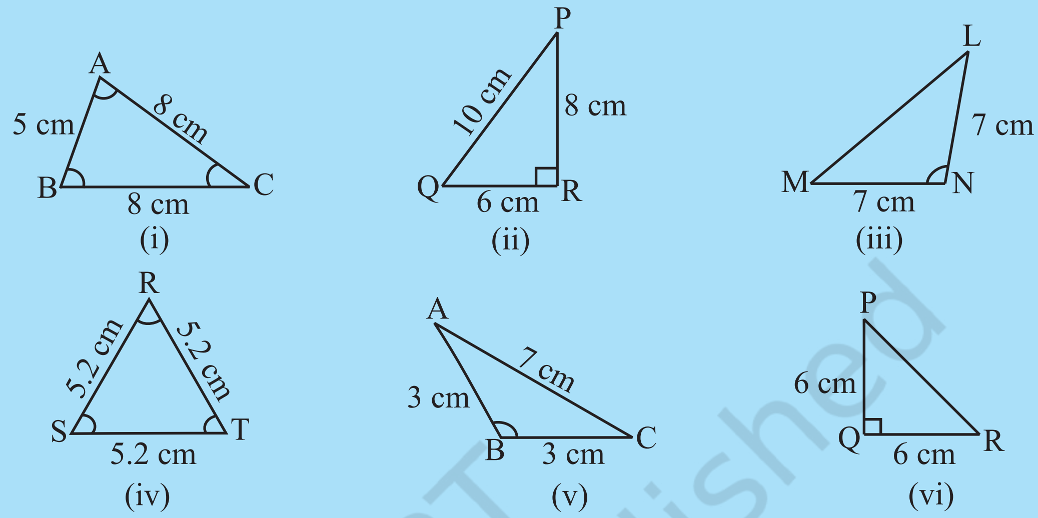
11. पाइथागोरस गुण–

एक समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग = उसके पादों के वर्गों का योग।

यदि एक त्रिभुज, समकोण त्रिभुज नहीं है तब यह गुण प्रयुक्त नहीं होता है। यह गुण इस बात को तय करने में उपयोगी होता है कि कोई दिया गया त्रिभुज समकोण त्रिभुज है या नहीं।

3. आकृति 6.2 देखिए तथा त्रिभुजों में से प्रत्येक का वर्गीकरण कीजिए :

(a) भुजाओं के आधार पर (b) कोणों के आधार पर



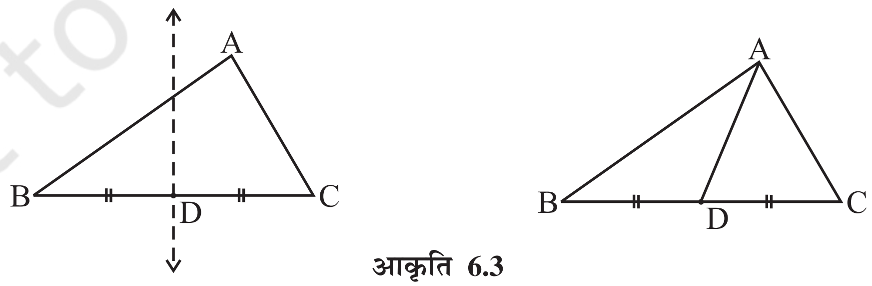
आकृति 6.2

आइए, त्रिभुजों के बारे में कुछ और अधिक जानने का प्रयास करें।

6.2 त्रिभुज की माध्यिकाएँ

आप जानते हैं कि एक दिए गए रेखाखंड का लंब समद्विभाजक कागज़ मोड़ने की प्रक्रिया द्वारा कैसे ज्ञात किया जाता है।

कागज़ के टुकड़े से एक त्रिभुज ABC काटिए (आकृति 6.3)। इसकी कोई एक भुजा, मानों $\overline{BC}$ लीजिए। कागज़ मोड़ने की प्रक्रिया द्वारा $\overline{BC}$ का लंब समद्विभाजक ज्ञात कीजिए। कागज़ पर मोड़ की तह, भुजा $\overline{BC}$ को D पर काटती है जो उसका मध्य बिंदु है। शीर्ष A को D से मिलाइए।



आकृति 6.3

रेखाखंड AD, जो भुजा $\overline{BC}$ के मध्यबिंदु D को सम्मुख शीर्ष A से मिलाता है, त्रिभुज की एक **माध्यिका** है।

भुजाएँ $\overline{AB}$ तथा $\overline{CA}$ लेकर, इस त्रिभुज की दो और माध्यिकाएँ खींचिए।

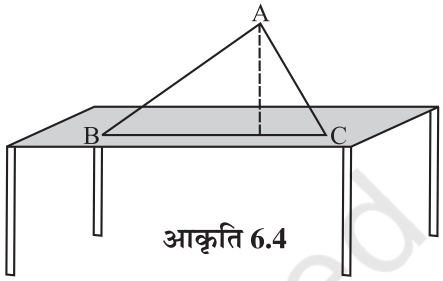
माध्यिका, त्रिभुज के एक शीर्ष को, सम्मुख भुजा के मध्य बिंदु से मिलाती है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. एक त्रिभुज में कितनी माध्यिकाएँ हो सकती हैं ?
2. क्या एक माध्यिका पूर्णतया त्रिभुज के अंदर में स्थित होती है ? (यदि आप समझते हैं कि यह सत्य नहीं है तो उस स्थिति के लिए एक आकृति खींचिए।)

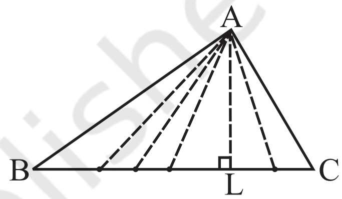
6.3 त्रिभुज के शीर्षलंब

त्रिभुज के आकार वाला गत्ते का एक टुकड़ा ABC लीजिए। इसे एक मेज पर सीधा ऊर्ध्वाधर खड़ा कीजिए। इसकी ऊँचाई कितनी है ? यह ऊँचाई शीर्ष A से भुजा $\overline{BC}$ तक की दूरी है (आकृति 6.4)।



आकृति 6.4

शीर्ष A से भुजा $\overline{BC}$ तक अनेक रेखाखंड खींचे जा सकते हैं (आकृति 6.5)। इनमें से त्रिभुज की ऊँचाई कौन-सी रेखाखंड प्रदर्शित करती है ?



आकृति 6.5

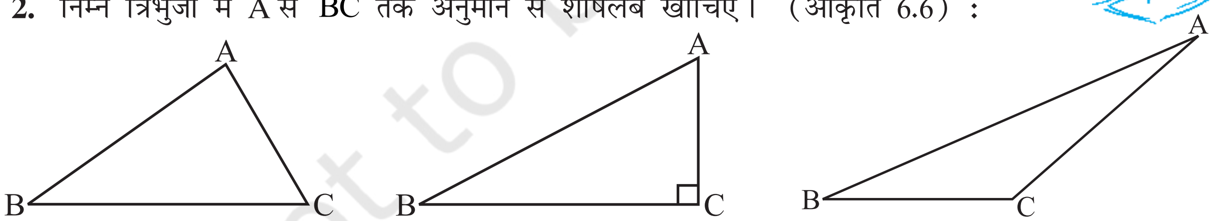
वह रेखाखंड जो शीर्ष A से सीधा ऊर्ध्वाधर नीचे $\overline{BC}$ तक और उस पर लंबवत होता है, इसकी **ऊँचाई** होती है।

रेखाखंड AL त्रिभुज का एक **शीर्षलंब** है।

शीर्षलंब का एक अंत बिंदु, त्रिभुज के एक शीर्ष पर और दूसरा अंत बिंदु सम्मुख भुजा बनाने वाली रेखा पर स्थित होता है। प्रत्येक शीर्ष से एक शीर्षलंब खींचा जा सकता है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. एक त्रिभुज में कितने शीर्ष हो सकते हैं ?
2. निम्न त्रिभुजों में A से $\overline{BC}$ तक अनुमान से शीर्षलंब खींचिए। (आकृति 6.6) :



न्यून कोण (i) | समकोण (ii) | अधिक कोण (iii)

आकृति 6.6

3. क्या एक शीर्षलंब पूर्णतया त्रिभुज के अभ्यंतर में सदैव स्थित होगा ? (यदि आप समझते हैं कि यह सत्य होना आवश्यक नहीं है तो उस स्थिति के लिए एक आकृति खींचिए।
4. क्या आप कोई ऐसा त्रिभुज सोच सकते हैं; जिसके दो शीर्षलंब उसकी दो भुजाएँ ही हों ?
5. क्या किसी त्रिभुज की माध्यिका व शीर्षलंब एक ही रेखाखंड हो सकता है ?

(संकेत: प्रश्न 4 व 5 के लिए, प्रत्येक प्रकार के त्रिभुज के शीर्षलंब खींचकर खोज करिए।)

इन्हें कीजिए

कागज़ से काटी गई इन आकृतियों को लीजिए।

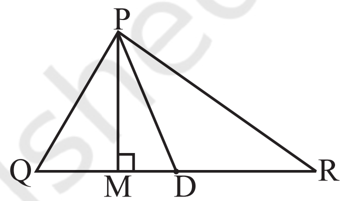
(i) समबाहु त्रिभुज (ii) समद्विबाहु त्रिभुज तथा

(iii) विषमबाहु त्रिभुज

इनके शीर्षलंब तथा माध्यिकाएँ ज्ञात कीजिए। क्या आप इनमें कुछ विशेषता पाते हैं? अपने साथियों के साथ इन पर चर्चा कीजिए।

प्रश्नावली 6.1

1. Δ PQR में भुजा $\overline{QR}$ का मध्य बिंदु D है



$\overline{PM}$ ________________ है।

PD ________________ है।

क्या QM = MR ?

2. निम्न के लिए अनुमान से आकृति खींचिए।

(a) ΔABC में, BE एक माध्यिका है।

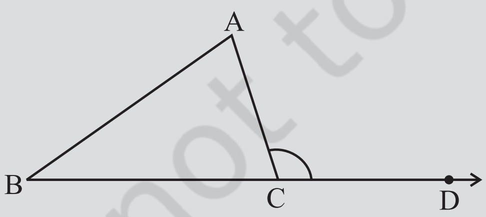
(b) ΔPQR में, PQ तथा PR त्रिभुज के शीर्षलंब हैं।

(c) ΔXYZ में, YL एक शीर्षलंब उसके बहिर्भाग में है।

3. आकृति खींचकर पुष्टि कीजिए कि एक समद्विबाहु त्रिभुज में शीर्षलंब व माध्यिका एक ही रेखाखंड हो सकता है।

6.4 त्रिभुज का बाह्य कोण एवं इसके गुण

इन्हें कीजिए



आकृति 6.7

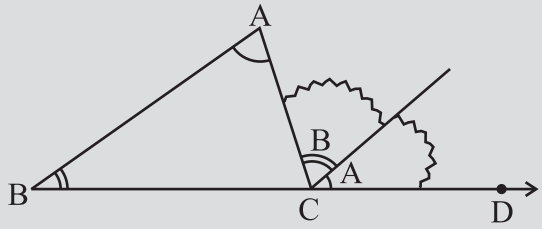
1. एक त्रिभुज ABC खींचिए और इसकी एक भुजा, $\overline{BC}$ को एक ओर बढ़ाइए (आकृति 6.7)। शीर्ष C पर बने कोण ACD पर ध्यान दीजिए। यह कोण ΔABC के बहिर्भाग में स्थित है। हम इसे ΔABC के शीर्ष C पर बना एक बाह्य कोण कहते हैं।

स्पष्ट है कि $\angle$BCA तथा $\angle$ACD परस्पर संलग्न कोण हैं। त्रिभुज के शेष दो कोण, $\angle$A तथा $\angle$B बाह्य कोण ACD के दो **सम्मुख अंतःकोण** या **दूरस्थ अंतःकोण** कहलाते हैं। अब काट कर या अक्स (Trace copy) लेकर $\angle$A तथा $\angle$B एक दूसरे के संलग्न मिलाकर $\angle$ACD पर रखिए जैसा कि आकृति 6.8 में दिखाया गया है।

क्या ये दोनों कोण $\angle ACD$ को पूर्णतया आच्छादित करते हैं ?

क्या आप कह सकते हैं

$m\angle ACD = m\angle A + m\angle B$?



आकृति 6.8

2. जैसा कि पहले किया गया है, एक त्रिभुज ABC लेकर उसका बाह्य कोण ACD बनाइए। कोण मापक की सहायता से $\angle ACD$, $\angle A$ तथा $\angle B$ को मापिए।

$\angle A + \angle B$ का योग ज्ञात कर उसकी तुलना $\angle ACD$ की माप से कीजिए। कोण मापक की सहायता से $\angle ACD$ की माप $\angle A + \angle B$ के बराबर होगी। यदि माप में कोई त्रुटि है तो इसकी माप लगभग बराबर होगी ।

इन दो क्रियाकलापों को, कुछ अन्य त्रिभुज लेकर और उनके बाह्य कोण खींचकर, आप दोहरा सकते हैं। प्रत्येक बार आप यही पाएँगे कि त्रिभुज का बाह्य कोण उसके दोनों सम्मुख अंत:कोणों के योग के बराबर होता है।

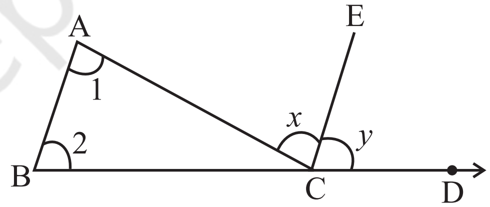
एक चरणबद्ध व तर्कपूर्ण विधि से भी इस गुण की पुष्टि की जा सकती है।

किसी त्रिभुज का बाह्य कोण अपने दोनों सम्मुख अंत:कोणों के योग के बराबर होता है।

दिया है : ΔABC लेते हैं। $\angle ACD$ इसका एक बाह्य कोण है।

दिखाना है : $m\angle ACD = m\angle A + m\angle B$

शीर्ष C से भुजा $\overline{BA}$ के समांतर CE रेखा खींचिए ।



आकृति 6.9

औचित्य

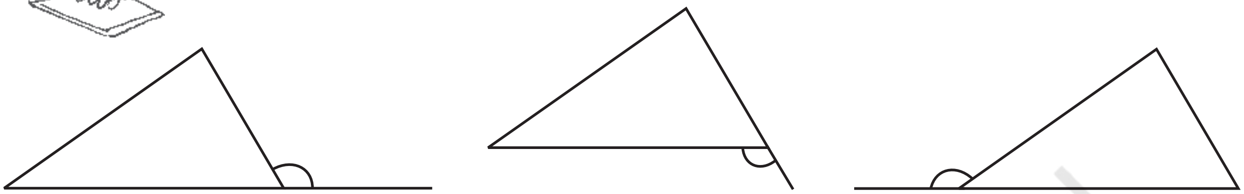
चरण	कारण
(a) $\angle 1 = \angle x$	$\overline{BA} \parallel \overline{CE}$ तथा $\overline{AC}$ एक तिर्यक रेखा है। अत:, एकांतर कोण समान होने चाहिए।
(b) $\angle 2 = \angle y$	$\overline{BA} \parallel \overline{CE}$ तथा $\overline{BD}$ एक तिर्यक रेखा है। अत:, संगत कोण समान होने चाहिए।
(c) $\angle 1 + \angle 2 = \angle x + \angle y$	
(d) अब, $\angle x + \angle y = m\angle ACD$	(आकृति 6.9 से)

अत:, $\angle 1 + \angle 2 = \angle ACD$

किसी त्रिभुज में बाह्य कोण और उसके दोनों सम्मुख अंत:कोणों के बीच यह संबंध **त्रिभुज के बाह्य कोण के गुण** के नाम से जाना जाता है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. एक त्रिभुज के लिए बाह्य कोण भिन्न-भिन्न प्रकार से बनाए जा सकते हैं। इनमें से तीन, निम्न प्रकार से दिखाए गए हैं (आकृति 6.10)।

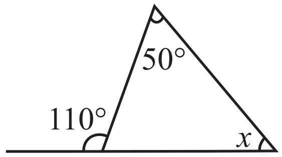


आकृति 6.10

इनके अतिरिक्त तीन और प्रकार से भी बाह्य कोण बनाए जा सकते हैं। उन्हें भी अनुमान से बनाइए।

2. किसी त्रिभुज के एक शीर्ष पर बने दोनों बाह्य कोण क्या परस्पर समान होते हैं?
3. किसी त्रिभुज के एक बाह्य कोण और उसके संलग्न अंत:कोण के योग के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

उदाहरण 1 आकृति 6.11 में x का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 6.11

हल सम्मुख अंत:कोणों का योग = बाह्य कोण

अथवा $50° + x = 110°$

अथवा $x = 60°$

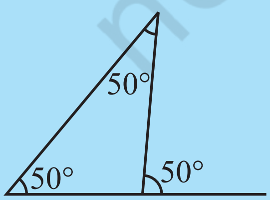
सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. प्रत्येक दशा में अंत: सम्मुख कोणों के बारे में आप क्या कह सकते हैं जब कि बाह्य कोण है:

   (i) एक समकोण (ii) एक अधिक कोण (iii) एक न्यून कोण

2. क्या किसी त्रिभुज का कोई बाह्य कोण एक सरल कोण भी हो सकता है?

प्रयास कीजिए

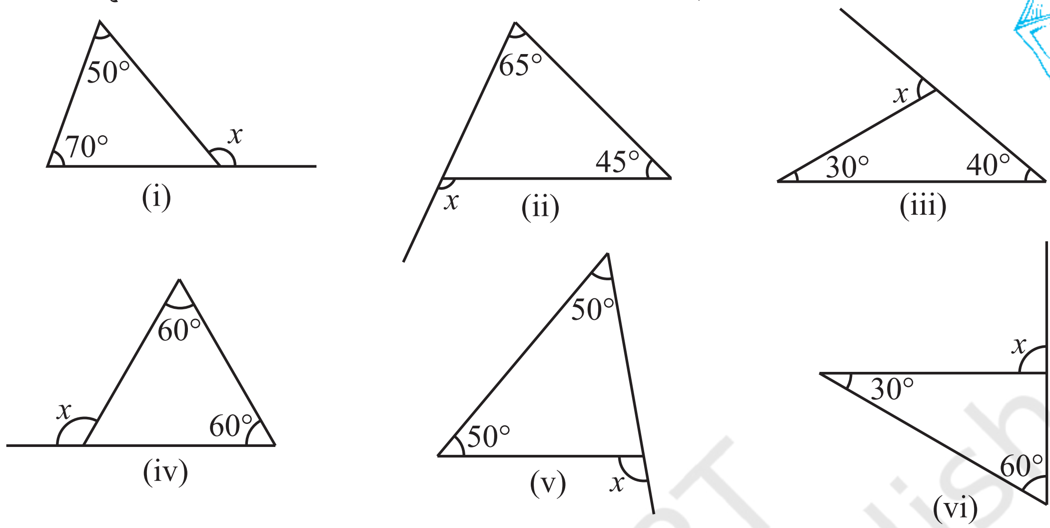


आकृति 6.12

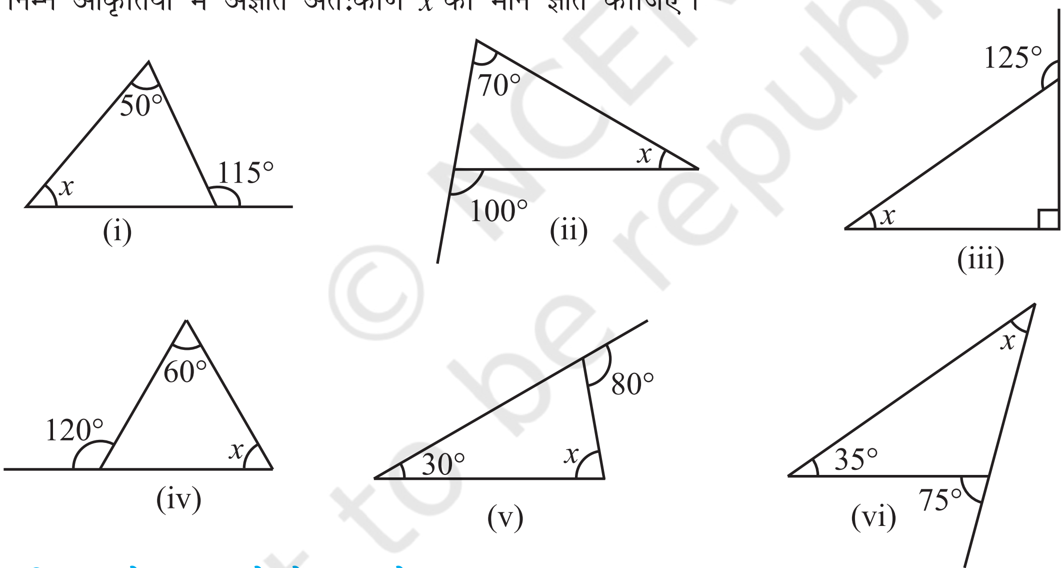
1. किसी त्रिभुज में एक बाह्य कोण की माप 70° है और उसके अंत: सम्मुख कोणों में से एक की माप 25° है। दूसरे अंत: सम्मुख कोण की माप ज्ञात कीजिए।
2. किसी त्रिभुज के दो अंत: सम्मुख कोणों की माप 60° तथा 80° है। उसके बाह्य कोण की माप ज्ञात कीजिए।
3. क्या इस आकृति में कोई त्रुटि है (आकृति 6.12)? टिप्पणी करें।

प्रश्नावली 6.2

1. निम्न आकृतियों में अज्ञात बाह्य कोण x का मान ज्ञात कीजिए।



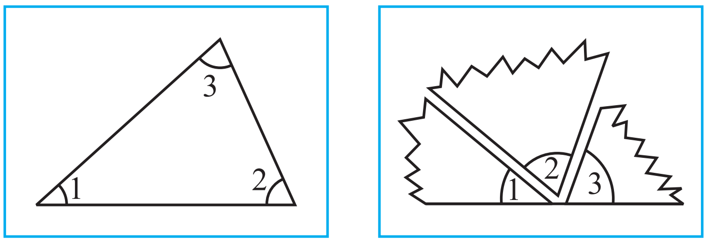
2. निम्न आकृतियों में अज्ञात अंत:कोण x का मान ज्ञात कीजिए।



6.5 त्रिभुज के अंत:कोणों का योग गुण

त्रिभुज के तीनों कोणों का आपस में संबंध दर्शाने वाला एक अद्‌भुत गुण है। इस गुण को आप निम्नलिखित चार क्रियाकलापों द्वारा देख व समझ पाएँगे।

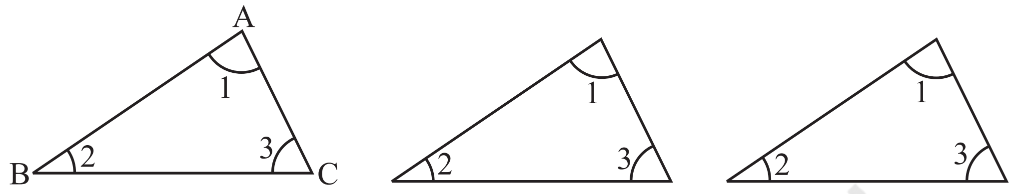
1. एक त्रिभुज खींचिए। इसके तीनों कोणों को काटकर अलग-अलग कीजिए। इन्हें अब इस प्रकार व्यवस्थित करके रखिए जैसा कि आकृति 6.13 (i) व (ii) में दिखाया गया है।



(i) **आकृति 6.13** (ii)

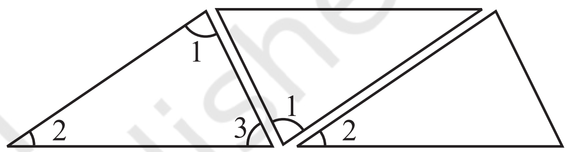
ये तीनों कोण मिलकर एक कोण बनाते हैं। जिसकी माप 180° है।
इस प्रकार, त्रिभुज के तीनों कोणों की मापों का योग 180° होता है।

2. इस तथ्य को आप एक अन्य विधि द्वारा भी देख सकते हैं। किसी ΔABC के तीन प्रतिरूप बनाइए, (आकृति 6.14)।



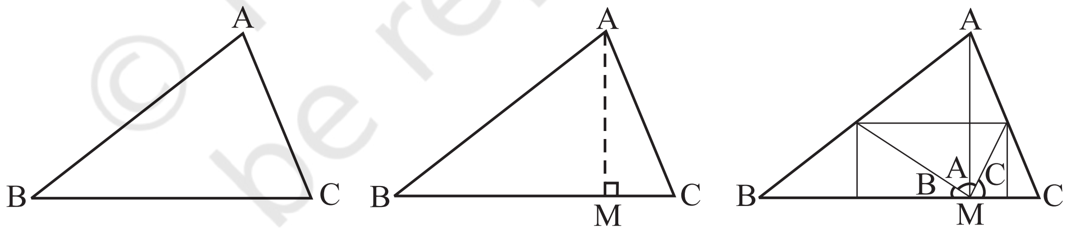
आकृति 6.14

इन तीनों को आकृति 6.15 की भाँति मिलाकर ठीक से रखिए।
$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ के बारे में आप क्या अवलोकन करते हैं?
(क्या आप यहाँ बाह्य कोण से संबंधित गुण भी देख पाते हैं?)



आकृति 6.15

3. कागज़ के एक टुकड़े से कोई एक त्रिभुज, जैसे ΔABC (आकृति 6.16) काटिए।
इस त्रिभुज को मोड़कर शीर्ष A से गुज़रता हुआ शीर्षलंब AM निर्धारित कीजिए। अब इस त्रिभुज के तीनों कोनों को इस प्रकार मोड़िए जिससे तीनों शीर्ष A, B तथा C बिंदु M पर मिलें।



(i) (ii) (iii)

आकृति 6.16

आप देखते हैं कि त्रिभुज के तीनों कोण मिलकर एक सरल कोण बनाते हैं। यह क्रियाकलाप पुनः दर्शाता है कि त्रिभुज के तीनों कोणों की मापों का योग 180° होता है।

4. अपनी अभ्यास पुस्तिका में कोई तीन त्रिभुज, मानों ΔABC, ΔPQR तथा ΔXYZ खींचिए। इन सभी त्रिभुजों के प्रत्येक कोण की माप एक कोण मापक द्वारा माप कर ज्ञात कीजिए। इन मापों को तालिका रूप में इस प्रकार लिखिए,

Δ का नाम	कोणों की माप			तीनों कोणों की मापों का योग
ΔABC	$m\angle A =$	$m\angle B =$	$m\angle C =$	$m\angle A + m\angle B + m\angle C =$
ΔPQR	$m\angle P =$	$m\angle Q =$	$m\angle R =$	$m\angle P + m\angle Q + m\angle R =$
ΔXYZ	$m\angle X =$	$m\angle Y =$	$m\angle Z =$	$m\angle X + m\angle Y + m\angle Z =$

मापने में हुई संभावित त्रुटियों को ध्यान में रखते हुए आप पाएँगे कि अंतिम स्तंभ में तीनों कोणों का योग 180° (या लगभग 180°) ही है।

पूर्णयता शुद्ध माप संभव होने पर हम यही पाएँगे कि त्रिभुज के तीनों कोणों की मापों का योग 180° होता है।

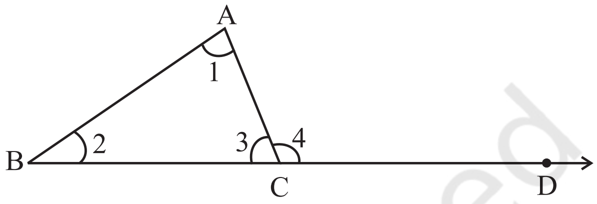
अब आप अपने इस निर्णय को तर्कपूर्ण कथनों द्वारा चरणबद्ध रूप में प्रस्तुत कर सकते हैं।

कथन त्रिभुज के तीनों कोणों की मापों का योग 180° होता है।

इस तथ्य को स्थापित करने के लिए हम त्रिभुज के बाह्य कोण के गुण का उपयोग करते हैं।

दिया है : ΔABC के तीन कोण $\angle 1, \angle 2$ तथा $\angle 3$ हैं (आकृति 6.17)।

$\angle 4$ एक बाह्य कोण है जो भुजा $\overline{BC}$ को D तक बढ़ाने पर बनता है।



आकृति 6.17

उपपत्ति $\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$ (बाह्य कोण का गुण)

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 3$ (दोनों पक्षों में $\angle 3$ योग करने पर)

परंतु $\angle 4$ तथा $\angle 3$ एक रैखिक युग्म बनाते हैं। अतः, इनका योग 180° है।

अर्थात् $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$

आइए, अब देखें कि त्रिभुज के कोणों के इस गुण को, विभिन्न समस्याएँ हल करने में हम कैसे उपयोग कर सकते हैं।

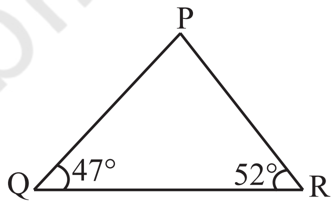


Fig 6.18

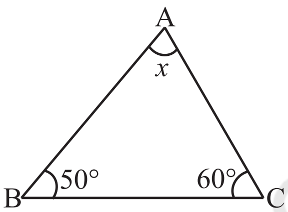
उदाहरण 2 दी गई आकृति 6.18 में $\angle P$ की माप ज्ञात कीजिए।

हल त्रिभुज के कोणों का योग गुण से $m\angle P + 47° + 52° = 180°$

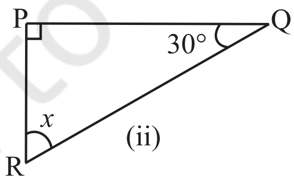
अतः $m\angle P = 180° - 47° - 52° = 180° - 99° = 81°$

प्रश्नावली 6.3

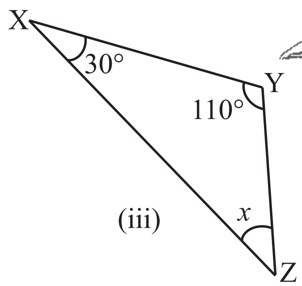
1. निम्नांकित आकृतियों में अज्ञात x का मान ज्ञात कीजिए।



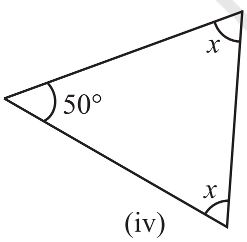
(i)



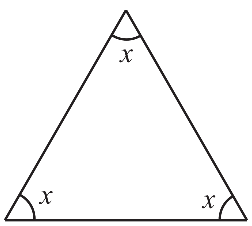
(ii)



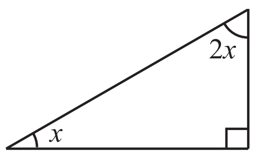
(iii)



(iv)

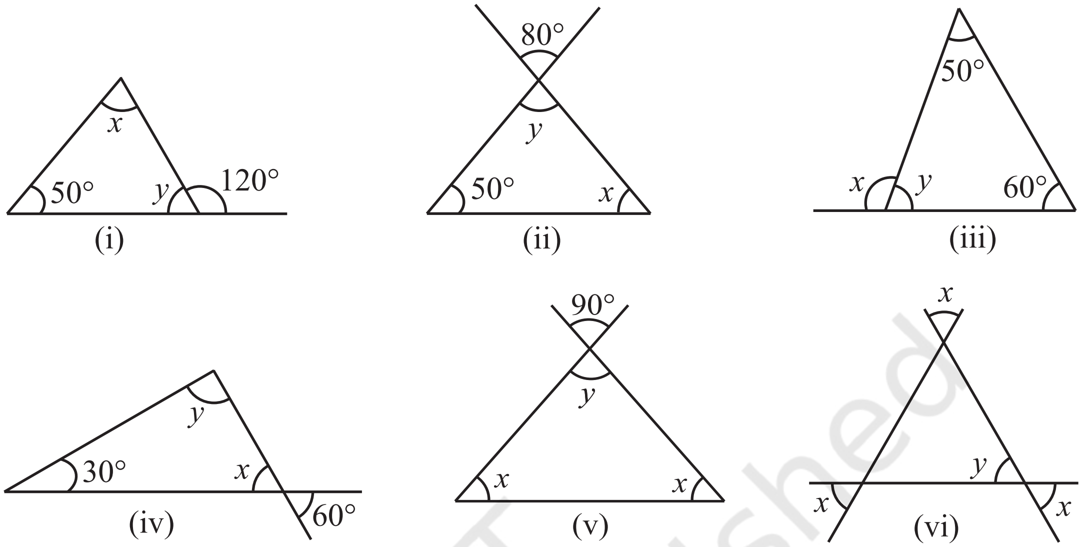


(v)



(vi)

2. निम्नांकित आकृतियों में अज्ञात x और y का मान ज्ञात कीजिए।



प्रयास कीजिए

1. एक त्रिभुज के दो कोण 30° तथा 80° हैं। इस त्रिभुज का तीसरा कोण ज्ञात कीजिए।

2. किसी त्रिभुज का एक कोण 80° है तथा शेष दोनों कोण बराबर हैं। बराबर कोणों में प्रत्येक की माप ज्ञात कीजिए।

3. किसी त्रिभुज के तीनों कोणों में 1 : 2 : 1 का अनुपात है। त्रिभुज के तीनों कोण ज्ञात कीजिए। त्रिभुज का दोनों प्रकार से वर्गीकरण भी कीजिए।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. क्या कोई ऐसा त्रिभुज संभव है जिसके दो कोण समकोण हों?

2. क्या कोई ऐसा त्रिभुज संभव है जिसमें दो कोण अधिक कोण हों?

3. क्या कोई ऐसा त्रिभुज संभव है जिसमें दो कोण न्यून कोण हों?

4. क्या कोई ऐसा त्रिभुज संभव है जिसमें तीनों कोण 60° से अधिक हों?

5. क्या कोई ऐसा त्रिभुज संभव है जिसमें तीनों कोण 60° के हों?

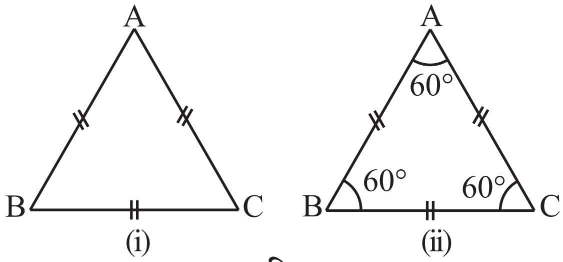
6. क्या कोई ऐसा त्रिभुज संभव है जिसमें तीनों कोण 60° से कम के हों?

6.6 दो विशेष त्रिभुज : समबाहु तथा समद्विबाहु

एक त्रिभुज, जिसकी तीनों भुजाओं की माप समान हो, समबाहु त्रिभुज कहलाता है।

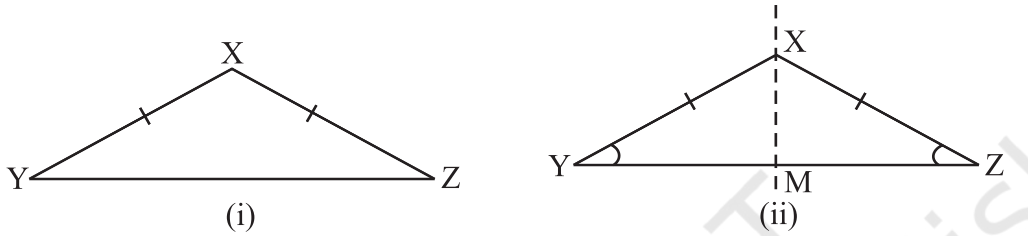
एक समबाहु त्रिभुज ABC (आकृति 6.19) बनाइए। इसका प्रतिरूप यानी इसी माप का एक और समबाहु त्रिभुज कागज़ से काटें। पहले त्रिभुज को स्थिर रखते हुए इस पर दूसरा त्रिभुज इसे ढकते

हुए रखें। दूसरा त्रिभुज पहले को पूरी तरह ढक लेता है। दूसरे त्रिभुज को पहले त्रिभुज पर किसी भी तरह घुमाकर रखें, वे दोनों त्रिभुज फिर भी एक दूसरे को ढक लेते हैं। क्या आप देख पाते हैं कि यदि त्रिभुज की तीनों भुजाएँ समान माप की हैं तब तीनों कोण भी समान माप के ही होते हैं। हम निष्कर्ष निकालते हैं कि समबाहु त्रिभुज में (i) तीनों भुजाएँ समान माप की होती हैं। (ii) प्रत्येक कोण की माप 60° होती है।



आकृति 6.19

एक त्रिभुज, जिसकी दो भुजाओं की माप समान हों, एक समद्विबाहु त्रिभुज कहलाता है।



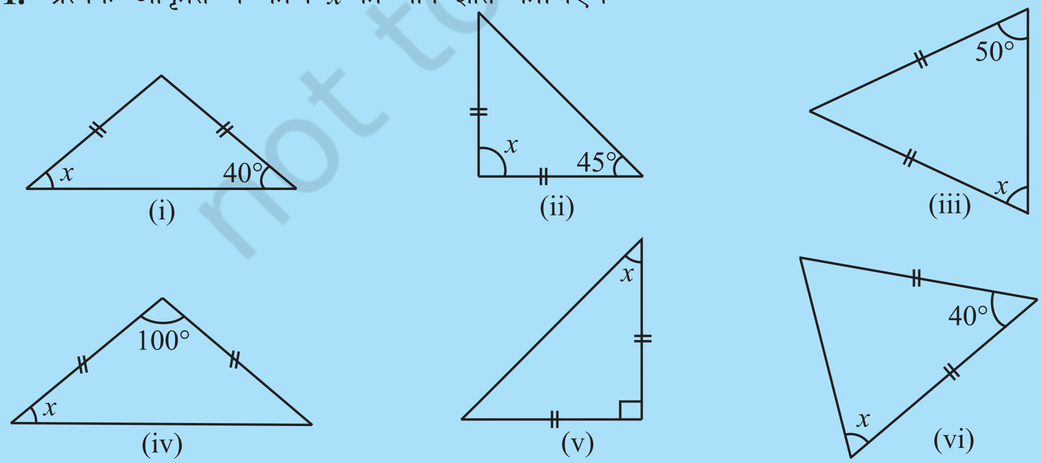
आकृति 6.20

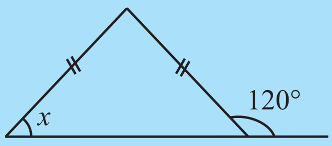
कागज़ के टुकड़े से एक समद्विबाहु त्रिभुज XYZ, काटिए, जिसमें भुजा XY = भुजा XZ हो (आकृति 6.20)। इसे इस प्रकार मोड़िए जिससे शीर्ष Z शीर्ष Y पर आच्छादित हो। अब शीर्ष X से गुज़रने वाली रेखा XM इस त्रिभुज का सममित अक्ष है (जिसके बारे में आप अध्याय 14 में पढ़ेंगे)। आप देखते हैं कि $\angle Y$ और $\angle Z$ एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेते हैं। XY और XZ त्रिभुज की सम भुजाएँ कहलाती हैं। YZ आधार कहलाता है; $\angle Y$ तथा $\angle Z$ आधार कोण कहलाते हैं जो परस्पर समान होते हैं।

इस प्रकार हम निष्कर्ष निकालते हैं कि समद्विबाहु त्रिभुज में (i) दो भुजाएँ बराबर लंबाई की होती हैं। (ii) समान भुजाओं के सामने का कोण समान होता है।

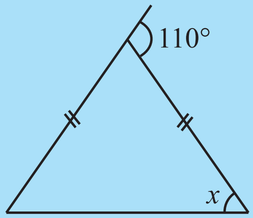
प्रयास कीजिए

1. प्रत्येक आकृति में कोण x का मान ज्ञात कीजिए।

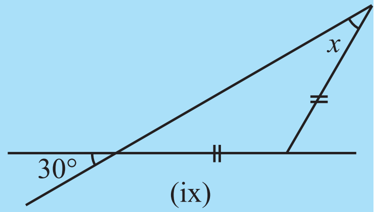




(vii)

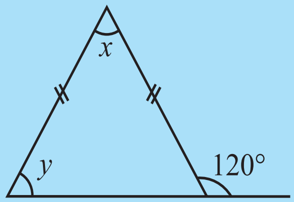


(viii)

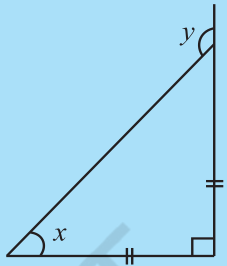


(ix)

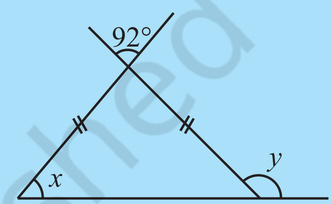
2. प्रत्येक आकृति में कोण x तथा y का मान ज्ञात कीजिए।



(i)



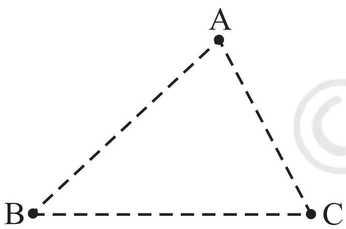
(ii)



(iii)

6.7 एक त्रिभुज की दो भुजाओं की मापों का योग

1. अपने खेल के मैदान में तीन बिंदु A, B तथा C अंकित कीजिए जो एक ही रेखा में न हों। चूना पाउडर लेकर AB, BC तथा AC पथ निर्धारित कीजिए।



आकृति 6.21

अपने किसी मित्र से कहिए कि वह निर्धारित पथों का उपयोग कर किसी प्रकार A से प्रारंभ कर C तक पहुँचे। उदाहरण के लिए, वह पहले पथ $\overline{AB}$ पर और फिर पथ $\overline{BC}$ पर चलकर C पर पहुँचें अथवा पथ $\overline{AC}$ पर चलकर सीधे C पर पहुँच जाए। स्वाभाविक है कि वह सीधा पथ AC पसंद करेगी। अगर वह कोई अन्य पथ (जैसे $\overline{AB}$ फिर $\overline{BC}$) लेगी, तब उसे अधिक दूरी चलनी पड़ेगी। दूसरे शब्दों में

$$AB + BC > AC \qquad \text{(i)}$$

इसी प्रकार यदि वह B से प्रारंभ कर A पर पहुँचना चाहती है तब वह पहले पथ $\overline{BC}$ और फिर पथ $\overline{CA}$ नहीं लेगी बल्कि वह पथ $\overline{BA}$ लेकर सीधा B से A पर पहुँचेगी। यह इसलिए कि

$$BC + CA > AB \qquad \text{(ii)}$$

इसी प्रकार तर्क करने पर हम देखते हैं कि

$$CA + AB > BC \qquad \text{(iii)}$$

इससे पता चलता है कि **किसी त्रिभुज की दो भुजाओं की मापों का योग तीसरी भुजा की माप से बड़ा होता है।**

2. अलग-अलग मापों वाली 15 छोटी तीलियाँ (या पट्टियाँ) लीजिए। उनकी मापें, मान लीजिए 6 cm, 7 cm, 8 cm 9 cm, ...20 cm हैं।

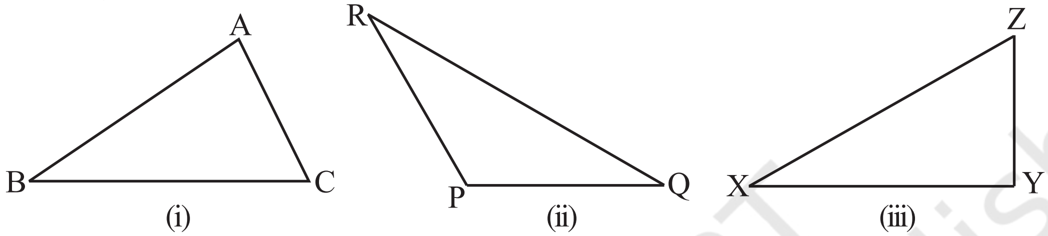
   इनमें से कोई तीन तीलियाँ लेकर त्रिभुज बनाने का प्रयत्न कीजिए। तीन-तीन तीलियों के विभिन्न समूह लेकर इस प्रक्रिया को दोहराइए।

मान लीजिए पहले आप दो तीलियाँ 6 cm व 12 cm लंबी लेते हैं। तीसरी तीली $12 - 6 = 6$ cm से अधिक लंबी लेकिन $12 + 6 = 18$ cm से कम लंबी लेनी होगी। यह सब करके देखिए और पता लगाइए कि ऐसा क्यों आवश्यक है।

एक त्रिभुज बनाने के लिए, आपको तीन तीलियाँ इस प्रकार चुननी होंगी जिससे कि उनमें, कोई दो तीलियों की लंबाइयों का योग तीसरी तीली की लंबाई से अधिक हो।

इस प्रक्रिया से यह भी पता चलता है कि एक त्रिभुज की दो भुजाओं की मापों का योग तीसरी भुजा की माप से अधिक होता है।

3. अपनी अभ्यास-पुस्तिका में कोई तीन त्रिभुज, जैसे ΔABC, ΔPQR तथा ΔXYZ बनाइए (आकृति 6.22)।



आकृति 6.22

अपने पैमाने (रूलर) की सहायता से इन त्रिभुजों की भुजाओं को माप कर, एक तालिका के रूप में निम्न प्रकार से लिखिए :

Δ का नाम	भुजाओं की माप	क्या यह सही है?	
Δ ABC	AB ___ BC ___ CA ___	AB – BC < CA ___ + ___ > ___ BC – CA < AB ___ + ___ > ___ CA – AB < BC ___ + ___ > ___	(हाँ/नहीं) (हाँ/नहीं) (हाँ/नहीं)
Δ PQR	PQ ___ QR ___ RP ___	PQ – QR < RP ___ + ___ > ___ QR – RP < PQ ___ + ___ > ___ RP – PQ < QR ___ + ___ > ___	(हाँ/नहीं) (हाँ/नहीं) (हाँ/नहीं)
Δ XYZ	XY ___ YZ ___ ZX ___	XY – YZ < ZX ___ + ___ > ___ YZ – ZX < XY ___ + ___ > ___ ZX – XY < YZ ___ + ___ > ___	(हाँ/नहीं) (हाँ/नहीं) (हाँ/नहीं)

इस प्रक्रिया से हमारे पिछले अनुमान की भी पुष्टि होती है। अत: हम निष्कर्ष निकालते हैं कि **एक त्रिभुज की कोई दो भुजाओं की मापों का योग, तीसरी भुजा की माप से अधिक होती है।**

साथ ही हमें यह भी पता चलता है कि एक त्रिभुज की किसी दो भुजाओं का अंतर, तीसरी भुजा की माप से कम होता है।

उदाहरण 3 क्या कोई ऐसा त्रिभुज संभव है जिसकी भुजाओं की मापें 10.2 cm, 5.8 cm तथा 4.5 cm हों ?

हल मान लीजिए ऐसा त्रिभुज संभव है। तब इस त्रिभुज की कोई भी दो भुजाओं की लंबाइयों का योग तीसरी भुजा की लंबाई से अधिक होगा। आइए, जाँच करके देखें :

क्या $4.5 + 5.8 > 10.2$? सही है

क्या $5.8 + 10.2 > 4.5$? सही है

क्या $10.2 + 4.5 > 5.8$? सही है

अत:, इन भुजाओं वाला त्रिभुज संभव है।

उदाहरण 4 एक त्रिभुज की दो भुजाओं की माप 6 cm तथा 8 cm हैं। इसकी तीसरी भुजा की माप किन दो संख्याओं के बीच होगी ?

हल हम जानते हैं कि त्रिभुज की कोई दो भुजाओं का योग तीसरी से अधिक होता है।

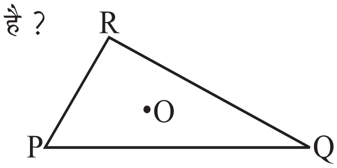
अत:, तीसरी भुजा, दी हुई दो भुजाओं के योग से कम होनी चाहिए। अर्थात् तीसरी भुजा $8 + 6 = 14$ cm से कम होगी।

यह तीसरी भुजा दी हुई दोनों भुजाओं के अंतर से अधिक होनी चाहिए। अर्थात् तीसरी भुजा $8 - 6 = 2$ cm से अधिक होगी।

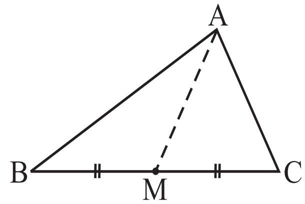
तीसरी भुजा की माप 2 cm से अधिक तथा 14 cm से कम होनी चाहिए।

प्रश्नावली 6.4

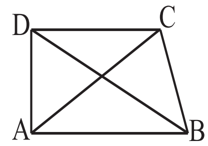
1. निम्न दी गई भुजाओं की मापों से क्या कोई त्रिभुज संभव है ?
   (i) 2 cm, 3 cm, 5 cm (ii) 3 cm, 6 cm, 7 cm
   (iii) 6 cm, 3 cm, 2 cm



2. त्रिभुज PQR के अभ्यंतर में कोई बिंदु O लीजिए।
   क्या यह सही है कि
   (i) $OP + OQ > PQ$?
   (ii) $OQ + OR > QR$?
   (iii) $OR + OP > RP$?



3. त्रिभुज ABC की एक माध्यिका AM है। बताइए कि क्या $AB + BC + CA > 2\,AM$?
   (संकेत : ΔABM तथा ΔAMC की भुजाओं पर विचार कीजिए।)

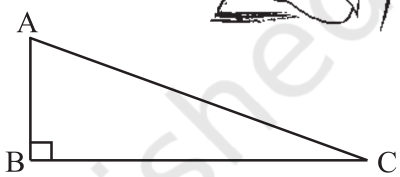


4. ABCD एक चतुर्भुज है। क्या AB + BC + CD + DA > AC + BD?
5. ABCD एक चतुर्भुज है। क्या AB + BC + CD + DA < 2 (AC + BD)?
6. एक त्रिभुज की दो भुजाओं की माप 12 cm तथा 15 cm है। इसकी तीसरी भुजा की माप किन दो मापों के बीच होनी चाहिए ?

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. किसी त्रिभुज में क्या उसके कोई दो कोणों का योग तीसरे कोण से सदैव अधिक होता है ?

6.8 समकोण त्रिभुज तथा पाइथागोरस गुण



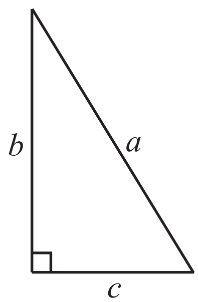
आकृति 6.23

ईसा से छठी शताब्दी पूर्व, एक यूनानी दार्शनिक पाइथागोरस ने, समकोण त्रिभुज से संबंधित एक बहुत उपयोगी व महत्वपूर्ण गुण के बारे में पता लगाया, जिसे हम इस अनुभाग में बता रहे हैं। अतः इस गुण को उनके नाम से ही जाना जाता है। वास्तव में इस गुण का ज्ञान कुछ अन्य देशों के लोगों को भी था। भारतीय गणितज्ञ बौधायन ने भी इस गुण के समकक्ष एक गुण की जानकारी दी थी।

अब हम पाइथागोरस गुण का विस्तार से अध्ययन करते हैं।

समकोण त्रिभुज में उसकी भुजाओं को विशेष नाम दिए जाते हैं। समकोण के सामने वाली भुजा को **कर्ण** कहते हैं। अन्य दो भुजाओं को समकोण त्रिभुज के **पाद** (legs) कहते हैं।

ΔABC में (आकृति 6.23), शीर्ष B पर समकोण बना है। अतः, AC इसका कर्ण है। $\overline{AB}$ तथा $\overline{BC}$ समकोण त्रिभुज ABC के दो पाद हैं।

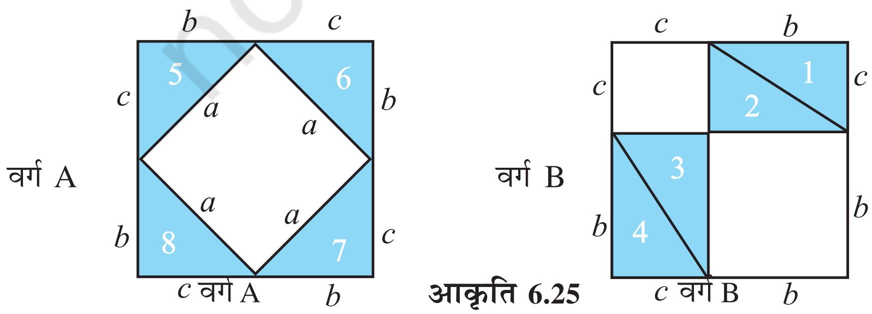


आकृति 6.24

किसी भी माप का एक समकोण त्रिभुज लेकर उसके आठ प्रतिरूप बनाइए। उदाहरण के लिए एक समकोण त्रिभुज लेते हैं जिसके कर्ण की माप a इकाई तथा उसके दो पादों की माप b इकाई तथा c इकाई है (आकृति 6.24)।

एक कागज़ पर एक समान माप वाले दो वर्ग बनाइए जिनकी भुजाओं की माप $b + c$ के बराबर हो।

अब अपने आठ त्रिभुजों में से चार त्रिभुजों को वर्ग A में तथा चार त्रिभुजों को वर्ग B में स्थापित कीजिए जैसा कि निम्न आकृति में दिखाया गया है (आकृति 6.25)।



आकृति 6.25

आप जानते हैं कि दोनों वर्ग एकरूप हैं यानी एक समान हैं तथा रखे गए आठों त्रिभुज भी एक समान हैं।

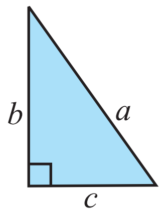
अतः वर्ग A का अनाच्छदित क्षेत्रफल = वर्ग B का अनाच्छादित क्षेत्रफल

अथवा वर्ग A के भीतर वाले वर्ग का क्षेत्रफल = वर्ग B के भीतर दोनों अनाच्छादित वर्गों के क्षेत्रफल का योग अर्थात्

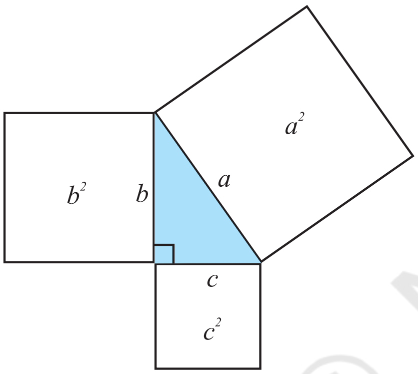
$$a^2 = b^2 + c^2$$

यह पाइथागोरस गुण है। इसे इस प्रकार कहा जा सकता है :

> एक समकोण त्रिभुज में
> कर्ण पर बना वर्ग = पादों पर बने दोनों वर्गों का योग



पाइथागोरस गुण, गणित में एक बहुत ही महत्वपूर्ण गुण है। आगे की कक्षाओं में इसे एक साध्य के रूप में विधिपूर्वक सिद्ध भी किया जाएगा। अभी आप इसके तात्पर्य को भली भांति समझ लें।



आकृति 6.26

इसके अनुसार, किसी समकोण त्रिभुज में कर्ण पर बने वर्ग का क्षेत्रफल दोनों पादों पर बने वर्गों के क्षेत्रफल के योग के बराबर होता है।

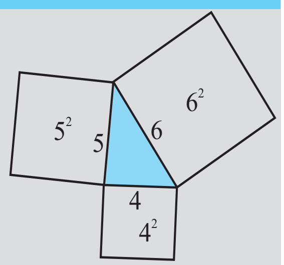
एक वर्गाकार कागज़ लेकर, उस पर एक समकोण त्रिभुज बनाइए। इसकी भुजाओं पर वर्गों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए और इस साध्य की व्यावहारिक रूप से जाँच कीजिए (आकृति 6.26)।

यदि कोई त्रिभुज, समकोण त्रिभुज है तब उस पर पाइथागोरस गुण प्रयुक्त होता है। अब यदि किसी त्रिभुज पर पाइथागोरस गुण सत्य है तो क्या यह एक समकोण त्रिभुज होगा ? (ऐसी समस्याओं को हम विलोम समस्याएँ कहते हैं।) हम इस बात का उत्तर देने का प्रयत्न करेंगे। अब हम दिखाएँगे कि यदि किसी त्रिभुज में कोई दो भुजाओं के वर्गों का योग, तीसरी भुजा के वर्ग के बराबर है तब वह एक समकोण त्रिभुज होना चाहिए।

इन्हें कीजिए

1. 4 cm, 5 cm तथा 6 सेमी लंबी भुजाओं वाले तीन वर्ग कागज़ से काटिए। इन तीनों वर्गों के तीन शीर्षों को मिलाते हुए इस प्रकार व्यवस्थित कर रखिए कि उनकी भुजाओं से एक त्रिभुज प्राप्त हो (**आकृति** 6.27)। इस प्रकार प्राप्त त्रिभुज को कागज़ पर चिन्हित कीजिए। इस त्रिभुज के तीनों कोणों को मापिए। आप देखेंगे कि इनमें कोई भी समकोण नहीं है। ध्यान दीजिए कि

$4^2 + 5^2 \neq 6^2$, $5^2 + 6^2 \neq 4^2$ तथा $6^2 + 4^2 \neq 5^2$



आकृति 6.27

2. उपर्युक्त प्रक्रिया को 4 cm, 5 cm तथा 7 cm भुजाओं वाले तीन वर्ग लेकर फिर दोहराइए। इस बार आपको एक अधिक कोण त्रिभुज प्राप्त होगा। यहाँ ध्यान दीजिए कि

$4^2 + 5^2 \neq 7^2$ इत्यादि ।

इस प्रक्रिया से पता चलता है कि पाइथागोरस गुण केवल तभी प्रयुक्त होता है जब कि त्रिभुज एक समकोण त्रिभुज होगा।

अतः हमें यह तथ्य प्राप्त होता है :

यदि किसी त्रिभुज पर पाइथागोरस गुण प्रयुक्त होता है, तभी वह एक समकोण त्रिभुज होगा।

उदाहरण 5 एक त्रिभुज की भुजाएँ 3 cm, 4 cm तथा 5 cm लंबी हैं। निर्धारित कीजिए कि क्या वह एक समकोण त्रिभुज है ?

हल $3^2 = 3 \times 3 = 9; 4^2 = 4 \times 4 = 16; 5^2 = 5 \times 5 = 25$

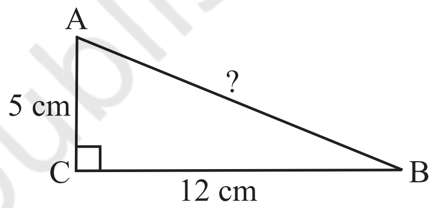
हम देखते हैं कि $3^2 + 4^2 = 5^2$

अतः, यह त्रिभुज, एक समकोण त्रिभुज है।

ध्यान दीजिए : किसी भी समकोण त्रिभुज में कर्ण सबसे लंबी भुजा होती है। इस उदाहरण में 5 cm लंबी भुजा ही कर्ण है।

उदाहरण 6 Δ ABC का C एक समकोण है। यदि AC = 5 cm तथा BC = 12 cm, तब AB की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल सहायता के लिए अनुमान से एक उपयुक्त आकृति बनाते हैं (आकृति 6.28)।



आकृति 6.28

पाइथागोरस गुण से,

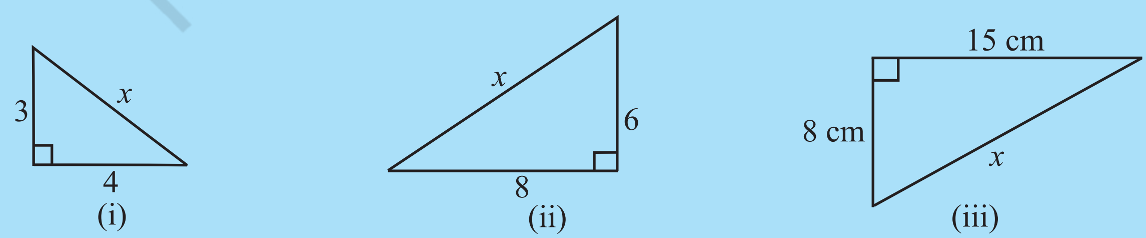
$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$
$$= 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$$

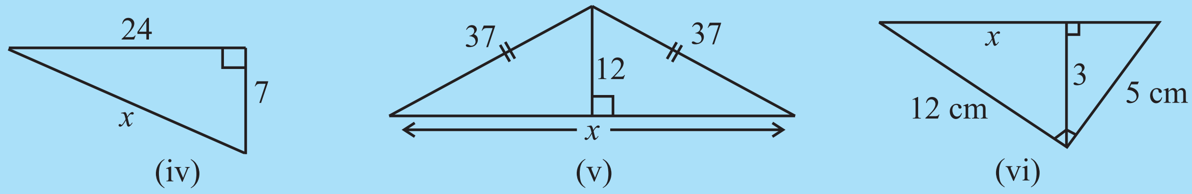
अर्थात् $AB^2 = 13^2$. अतः, AB = 13 है। अर्थात् AB की लंबाई 13 cm है।

ध्यान रखें : पूर्ण वर्ग संख्याएँ पहचानने के लिए आप अभाज्य गुणनखंड विधि प्रयोग में ला सकते हैं।

प्रयास कीजिए

निम्न आकृति 6.29 में अज्ञात लंबाई x ज्ञात कीजिए:



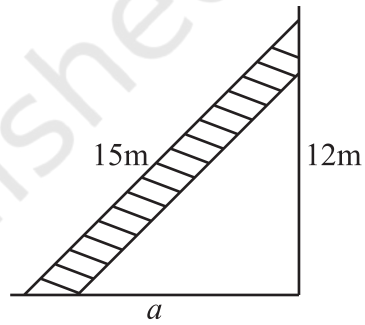


आकृति 6.29

प्रश्नावली 6.5

1. PQR एक त्रिभुज है जिसका P एक समकोण है। यदि PQ = 10 cm तथा PR = 24 cm तब QR ज्ञात कीजिए।

2. ABC एक त्रिभुज है जिसका C एक समकोण है। यदि AB = 25 cm तथा AC = 7 cm तब BC ज्ञात कीजिए।



3. दीवार के सहारे उसके पैर कुछ दूरी पर टिका कर 15 m लंबी एक सीढ़ी भूमि से 12 m ऊँचाई पर स्थित खिड़की तक पहुँच जाती है। दीवार से सीढ़ी के पैर की दूरी ज्ञात कीजिए।

4. निम्नलिखित में भुजाओं के कौन से समूह एक समकोण त्रिभुज बना सकते हैं ?

(i) 2.5 cm, 6.5 cm, 6 cm

(ii) 2 cm, 2 cm, 5 cm

(iii) 1.5 cm, 2 cm, 2.5 cm

समकोण त्रिभुज होने की स्थिति में उसके समकोण को भी पहचानिए।

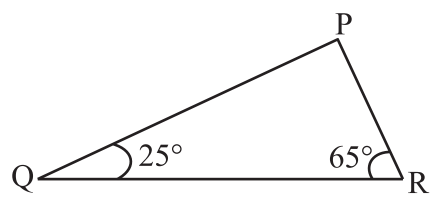
5. एक पेड़ भूमि से 5 m की ऊँचाई पर टूट जाता है और उसका ऊपरी सिरा भूमि को उसके आधार से 12 m की दूरी पर छूता है। पेड़ की पूरी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

6. त्रिभुज PQR में कोण Q = 25° तथा कोण R = 65°. हैं। निम्नलिखित में कौन सा कथन सत्य है ?

(i) $PQ^2 + QR^2 = RP^2$

(ii) $PQ^2 + RP^2 = QR^2$

(iii) $RP^2 + QR^2 = PQ^2$



7. एक आयत की लंबाई 40 cm है तथा उसका एक विकर्ण 41 cm है। इसका परिमाप ज्ञात कीजिए।

8. एक समचतुर्भुज के विकर्ण 16cm तथा 30 cm हैं। इसका परिमाप ज्ञात कीजिए।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. त्रिभुज PQR का कोण P एक समकोण है। इसकी सबसे लंबी भुजा कौन-सी है ?
2. त्रिभुज ABC का कोण B एक समकोण है। इसकी सबसे लंबी भुजा कौन-सी है ?
3. किसी समकोण त्रिभुज में सबसे लंबी भुजा कौन-सी होती है ?
4. किसी आयत में विकर्ण पर बने वर्ग का क्षेत्रफल उसकी लंबाई तथा चौड़ाई पर बने वर्गों के क्षेत्रफल के योग के बराबर होता है। यह बौधायन का प्रमेय है। इसकी पाइथागोरस गुण से तुलना कीजिए।

इन्हें कीजिए

ज्ञानवर्द्धक क्रियाकलाप

आकृतियों को जोड़ अथवा तोड़कर, पाइथागोरस साध्य को अनेक विधियों से सिद्ध किया गया है। इन विधियों में से कुछ को एकत्रित कर उन्हें एक चार्ट बनाकर प्रस्तुत कीजिए।

हमने क्या चर्चा की?

1. एक त्रिभुज की **तीन भुजाएँ** तथा **तीन कोण**, इसके **छः अवयव** कहलाते हैं।
2. किसी त्रिभुज के एक शीर्ष को उसके सम्मुख भुजा के मध्य बिंदु से मिलाने वाले रेखाखंड को उसकी एक **माध्यिका** कहते हैं। एक त्रिभुज की तीन माध्यिकाएँ होती हैं।
3. किसी त्रिभुज के एक शीर्ष से उसके सम्मुख भुजा पर खींचे गए लंब को त्रिभुज का एक **शीर्षलंब** कहते हैं। एक त्रिभुज के तीन शीर्षलंब होते हैं।
4. किसी त्रिभुज का **बाह्य कोण** किसी एक भुजा को एक ही ओर बढ़ाने पर बनता है। प्रत्येक शीर्ष पर, एक भुजा को दो प्रकार से बढ़ाकर दो बाह्य कोण बनाए जा सकते हैं।
5. बाह्य कोण का एक गुण –

   त्रिभुज के बाह्य कोण की माप, उसके दो सम्मुख अंतःकोणों के योग के बराबर होती है।
6. त्रिभुज के कोणों के योग का गुण –

   एक त्रिभुज के तीनों कोणों का योग $180°$ होता है।
7. एक त्रिभुज जिसकी प्रत्येक भुजा की माप समान हो, **समबाहु त्रिभुज** कहलाता है। समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण $60°$ का होता है।
8. एक त्रिभुज, जिसकी कोई दो भुजाएँ माप में समान हों, **समद्विबाहु त्रिभुज** कहलाता है। समद्विबाहु त्रिभुज की असमान भुजा उसका **आधार** कहलाती है तथा आधार पर बने दोनों कोण एक दूसरे के बराबर होते हैं।

9. त्रिभुज की भुजाओं से संबंधित गुण–

(i) त्रिभुज की कोई दो भुजाओं की मापों का योग, तीसरी भुजा की माप से अधिक होता है।

(ii) त्रिभुज की कोई दो भुजाओं की मापों का अंतर, तीसरी भुजा की माप से कम होता है।
यें दोनों गुण, किसी त्रिभुज की रचना की संभावना बताने में उपयोगी होते हैं जब कि उसकी तीनों भुजाओं की माप दी हों।

10. समकोण त्रिभुज में समकोण के सामने वाली भुजा **कर्ण** तथा अन्य दोनों भुजाएँ उसके **पाद** कहलाती हैं।

11. **पाइथागोरस गुण–**

एक समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग = उसके पादों के वर्गों का योग।

यदि एक त्रिभुज, समकोण त्रिभुज नहीं है तब यह गुण प्रयुक्त नहीं होता है। यह गुण इस बात को तय करने में उपयोगी होता है कि कोई दिया गया त्रिभुज समकोण त्रिभुज है या नहीं।

अध्याय 7

राशियों की तुलना

0757CH08

7.1 प्रतिशतता–राशियों के तुलना करने की एक और विधि

अनीता की रिपोर्ट
प्राप्तांक : 320/400
प्रतिशत : 80

रीता की रिपोर्ट
प्राप्तांक : 300/360
प्रतिशत : 83.3

अनीता कहती है कि उसका परीक्षाफल अधिक अच्छा है, क्योंकि उसने 320 अंक प्राप्त किए है जबकि रीता ने केवल 300 अंक। क्या आप उससे सहमत हैं? आपके विचार में किसका परीक्षाफल अधिक अच्छा है?

मानसी कहती है कि केवल प्राप्तांकों की तुलना कर यह नहीं कहा जा सकता है कि किसका परीक्षाफल अधिक अच्छा है क्योंकि अधिकतम अंक जिनमें से दोनों को अंक प्राप्त हुए हैं वे समान नहीं हैं।

वह कहती है कि रिपोर्ट कार्डों में दिए गए प्रतिशत अंकों पर आप ध्यान क्यों नहीं देती। अनीता के प्रतिशत अंक 80 हैं जबकि रीता के प्रतिशत अंक 83.3 हैं। इससे पता चलता है कि रीता का परीक्षाफल अधिक अच्छा है।

क्या आप इससे सहमत हैं?

प्रतिशत उन भिन्नों का अंश होता है जिनका हर 100 होता है, और यहाँ पर परीक्षाफलों की तुलना करने में इसे किया गया है।

इस प्रकार की भिन्नों को आइए अब विस्तार से समझने का प्रयत्न करें।

7.1.1 प्रतिशतता के अर्थ

प्रतिशत (percent) शब्द, लेटिन भाषा के एक शब्द 'percentum' से लिया गया है जिसका अर्थ है 'प्रति एक सौ'।

प्रतिशत को चिह्न % से प्रदर्शित किया जाता है जिसका अर्थ हैं सौवाँ। यानी एक सौवाँ अर्थात् 1% का अर्थ है सौ में से एक अथवा एक सौवाँ। इसे इस प्रकार लिखते हैं:

$1\% = \frac{1}{100} = 0.01$। इसे समझने के लिए निम्न उदाहरण पर विचार करते हैं।

रीना एक मेज़ के ऊपरी भाग (टॉप) को बनाने के लिए 100 भिन्न-भिन्न रंगों वाली टाइलें प्रयोग करती है। उसने पीले, हरे, लाल और नीले रंग वाली टाइलें अलग-अलग गिनी और एक तालिका में निम्न प्रकार लिखा। क्या आप इस तालिका को पूरी करने में उसकी सहायता करेंगे ?

रंग	टाइलों की संख्या	प्रतिशत दर	भिन्न	ऐसे लिखा जाता है	ऐसे पढ़ा जाता है
पीली	14	14	$\frac{14}{100}$	14%	14 प्रतिशत
हरी	26	26	$\frac{26}{100}$	26%	26 प्रतिशत
लाल	35	35	----	----	----
नीली	25	--------	----	----	----
योग	**100**				

प्रयास कीजिए

1. निम्न आँकड़ों के लिए विभिन्न ऊँचाई वाले बच्चों का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

ऊँचाई	बच्चों की संख्या	भिन्न रूप में	प्रतिशत में
110 cm	22		
120 cm	25		
128 cm	32		
130 cm	21		
योग	**100**		

2. एक दुकान में विभिन्न मापों वाले जूतों की जोड़ियों की संख्या निम्न प्रकार है।

माप 2 : 20; माप 3 : 30; माप 4 : 28; माप 5 : 14; माप 6 : 8

इस सूचना को ऊपर की भाँति एक तालिका के रूप में लिखिए और दुकान में उपलब्ध जूते की हर माप को प्रतिशतता में भी ज्ञात कर लिखिए।

प्रतिशतता ज्ञात करना जब योग सौ न हो।

उक्त सभी उदाहरणों में वस्तुओं की संख्याओं का योग 100 हो जाता है। उदाहरण के लिए रीना के पास कुल 100 टाइलें थी; बच्चों की संख्या भी 100 तथा जूतों की संख्या भी 100 ही थी। यदि वस्तुओं की कुल संख्या 100 न हो तो प्रत्येक वस्तु का प्रतिशत रूप में कैसे आकलन किया जाता है ? ऐसी स्थिति में हमें प्रत्येक भिन्न को उसकी ऐसी तुल्य भिन्न में बदलना पड़ेगा जिसका हर 100 हो। निम्न उदाहरण पर विचार कीजिए। आपके पास गले की ऐसी माला है जिसमें दो रंगों के बीस मनके (beads) पिरोए गए हैं।

रंग	मनकों की संख्या	भिन्न	100 हर वाली तुल्य भिन्न	प्रतिशत
लाल	8	$\frac{8}{20}$	$\frac{8}{20}\times\frac{100}{100}=\frac{40}{100}$	40%
नीले	12	$\frac{12}{20}$	$\frac{12}{20}\times\frac{100}{100}=\frac{60}{100}$	60%
योग	**20**			

हम देखते है कि जब वस्तुओं का कुल योग 100 नहीं हो तब प्रतिशत ज्ञात करने के लिए इन तीन विधियों को उपयोग किया जा सकता है। तालिका में दिखाई गई विधि में, हम भिन्न को $\frac{100}{100}$ से गुणा करते हैं। इस प्रकार भिन्न का मान भी नहीं बदलता और हमें ऐसी भिन्न प्राप्त हो जाती है जिसका हर 100 होता है।

अनवर, लाल मनकों का प्रतिशत इस प्रकार ज्ञात करता है:
20 मनकों में लाल की संख्या 8 है, अत: 100 मनकों में लाल की संख्या $= \frac{8}{20}\times 100$

$= 40$ (एक सौ में) $= 40\%$

आशा, लाल मनकों का प्रतिशत इस प्रकार ज्ञात करती है:

$$\frac{8}{20} = \frac{8\times 5}{20\times 5}$$

$$= \frac{40}{100} = 40\%$$

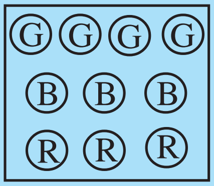
अनवर ने ऐकिक विधि प्रयोग की है। आशा ने हर में 100 प्राप्त करने के लिए उसे $\frac{5}{5}$ से गुणा किया। आपको जो विधि उपयुक्त लगे, उसे उपयोग में ला सकते हैं। हो सकता है आप अपनी कोई विधि भी सोच सकें।

अनवर ने जिस विधि का उपयोग किया वह सभी अनुपातों के लिए प्रयोग की जा सकती है। क्या, आशा ने जिस विधि का उपयोग किया; वह भी सब अनुपातों के लिए उपयुक्त है ? अनवर का कहना है कि आशा की विधि उन भिन्नों में ही उपयोग में लाई जा सकती है, जिनके हर में

ऐसी संख्या हो जिसे किसी प्राकृत संख्या से गुणा करने पर 100 प्राप्त हो जाए। क्योंकि उसकी विधि में, हर में संख्या 20 थी जिसे उसने 5 से गुणा कर 100 प्राप्त कर लिया। यदि हर में संख्या 6 होती तब वह इस विधि को उपयोग नहीं कर सकती थी। क्या आप इससे सहमत हैं ?

प्रयास कीजिए

1. विभिन्न रंगों वाली 10 टुकड़ों (chips) का संग्रह इस प्रकार से है:



रंग	संख्या	भिन्न	हर सौ	प्रतिशत में
हरा (G)				
नीला (B)				
लाल (R)				
योग				

तालिका पूर्ण कीजिए तथा प्रत्येक रंग वाले टुकड़ों का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

2. माला के पास चूड़ियों का एक संग्रह है जिनमें 20 सोने तथा 10 चाँदी की चूड़ियाँ हैं। प्रत्येक प्रकार की चूड़ियों का प्रतिशत क्या है ? क्या आप इसके लिए भी ऊपर की तरह तालिका बना सकते हैं ?

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

निम्न उदाहरणों को ध्यान से देखिए और चर्चा कीजिए कि उनमें प्रत्येक के लिए कौन-सी विधि अधिक उपयुक्त है।

1. वातावरण में, 1 gm वायु में उपस्थित हैं:

.78 ग्राम नाइट्रोजन
.21 ग्राम ऑक्सीजन
.01 ग्राम अन्य गैस

अथवा

78% नाइट्रोजन
21% ऑक्सीजन
1% अन्य गैस

2. एक कमीज़ के कपड़े में होते हैं :

$\frac{3}{5}$ सूती

$\frac{2}{5}$ पॉलिस्टर

60% सूती

40% पॉलिस्टर

7.1.2 भिन्न संख्याओं को प्रतिशत में बदलना

भिन्न संख्याओं में, हर विभिन्न संख्याएँ हो सकती हैं। उनकी तुलना करने के लिए हमें उनके हरों को समान करना पड़ता है और हम देख चुके हैं कि तब उनकी तुलना करना बहुत आसान हो जाता है यदि उनमें प्रत्येक का हर 100 हो। यानी हम भिन्नों को प्रतिशत में बदल रहे हैं। आइए अब कुछ भिन्नों को प्रतिशत में बदलने का प्रयत्न करें।

उदाहरण 1 $\frac{1}{3}$ को प्रतिशत रूप में लिखिए।

हल संख्या है, $\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\times\frac{100}{100}=\frac{1}{3}\times 100\%$

$$=\frac{100}{3}\% = 33\frac{1}{3}\%$$

उदाहरण 2 25 बच्चों की कक्षा में 15 लड़कियाँ हैं। लड़कियों का प्रतिशत क्या है ?

हल 25 बच्चों में 15 लड़कियाँ हैं

अत: लड़कियों का प्रतिशत $=\frac{15}{25}\times 100 = 60$। अर्थात् कक्षा में 60% लड़कियाँ हैं।

उदाहरण 3 $\frac{5}{4}$ को प्रतिशत में बदलिए।

हल संख्या में, $\frac{5}{4}=\frac{5}{4}\times 100\% = 125\%$

इन उदाहरणों में हम देखते हैं कि एक उचित भिन्न को प्रतिशत में बदलने पर 100 से कम प्रतिशत तथा मिश्र भिन्न को प्रतिशत में बदलने पर 100 से अधिक प्रतिशत प्राप्त होता है।

सोचिए और चर्चा कीजिए

(i) क्या आप किसी 'केक' (cake) का 50% खा सकते हैं ?

क्या आप किसी 'केक' (cake) का 100% खा सकते हैं ?

क्या आप किसी 'केक' (cake) का 150% खा सकते हैं ?

(ii) क्या किसी वस्तु का मूल्य 50% बढ़ सकता है ?

क्या किसी वस्तु का मूल्य 100% बढ़ सकता है ?

क्या किसी वस्तु का मूल्य 150% बढ़ सकता है ?

7.1.3 दशमलव भिन्न को प्रतिशत में बदलना

हमने देखा कि साधारण भिन्नों को प्रतिशत में किस प्रकार बदला जाता है। अब आइए देखें दशमलव भिन्नों को भी प्रतिशत में कैसे बदला जाता है।

उदाहरण 4 दिए गए दशमलवों को प्रतिशत में बदलिए :

(a) 0.75 (b) 0.09 (c) 0.2

हल

(a) $0.75 = 0.75 \times 100\ \%$

$= \frac{75}{100} \times 100\ \% = 75\%$

(b) $0.09 = \frac{9}{100} = 9\ \%$

(c) $0.2 = \frac{2}{10} \times 100\% = 20\ \%$

प्रयास कीजिए

1. निम्नलिखित भिन्नों को प्रतिशत में बदलिए।

(a) $\frac{12}{16}$ (b) 3.5 (c) $\frac{49}{50}$

(d) $\frac{2}{2}$ (e) 0.05

2. (i) 32 विद्यार्थियों में 8 अनुपस्थित हैं। विद्यार्थियों का क्या प्रतिशत अनुपस्थित है?

(ii) 25 रेडियो सैट में 16 खराब हैं। खराब रेडियो सैटों का प्रतिशत क्या है ?

(iii) एक दुकान में 500 पुर्जे हैं जिनमें 5 बेकार हैं। बेकार पुर्जो का प्रतिशत क्या है ?

(iv) 120 मतदाताओं में से 90 ने 'हाँ' में मत दिया। कितने प्रतिशत ने 'हाँ' में मत दिया?

7.1.4 प्रतिशत को साधारण भिन्न या दशमलव में बदलना

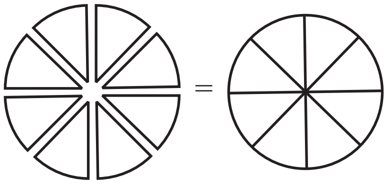
अभी तक हमने साधारण भिन्न या दशमलव भिन्न को प्रतिशत में बदला। हम इसका विपरीत भी कर सकते हैं। यानी, प्रतिशत दिए होने पर उसे साधारण या दशमलव भिन्न में भी बदल सकते हैं। निम्न तालिका को ध्यान से देखकर पूरा कीजिए:

ऐसे कुछ अन्य उदाहरण बनाइए और उन्हें हल भी कीजिए।

प्रतिशत	1%	10%	25%	50%	90%	125%	250%
साधारण भिन्न	$\frac{1}{100}$	$\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$					
दशमलव भिन्न	0.01	0.10					

किसी वस्तु के सभी भाग मिलकर सदैव एक संपूर्ण वस्तु बनाते हैं।

रंगीन टाइलों, बच्चों की ऊँचाइयों तथा वातावरण में गैसों के उदाहरणों में हमने देखा कि जब हम उनके प्रतिशतों को जोड़ते हैं तब 100 ही प्राप्त होता है। वे सभी भाग मिलकर जो एक पूर्ण वस्तु बनाते हैं, जोड़ने पर एक या 100% देते हैं। अतः यदि दो भागों में एक भाग दिया हो तब हम दूसरा भाग ज्ञात कर सकते हैं। निम्न उदाहरण पर विचार कीजिए:



विद्यार्थियों की दी गई संख्या में 30% लड़के हैं।

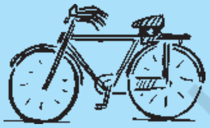
इसका अर्थ यह हुआ कि यदि 100 विद्यार्थी हैं तो उनमें 30 लड़के हैं तथा शेष लड़कियाँ होंगी।

स्पष्ट है कि लड़कियाँ होंगी (100–30)% = 70%.

प्रयास कीजिए

1. 35% + ________% = 100%, 64% + 20% +_________ % = 100%

   45% = 100% – __________ %, 70% = ______% – 30%



2. किसी कक्षा के विद्यार्थियों में 65% के पास साइकिलें हैं। कितने प्रतिशत विद्यार्थियों के पास साइकिलें नहीं हैं?

3. हमारे पास, सेब, संतरों तथा आमों से भरी एक टोकरी है। यदि उसमें 50% सेब तथा 30% संतरे हैं तब आमों का प्रतिशत कितना है ?

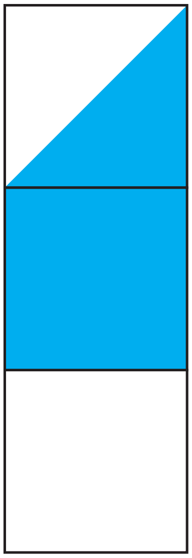
सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

एक परिधान के बनाने पर हुए व्यय को देखिए। कढ़ाई पर 20%, कपड़े पर 50%, सिलाई पर 30%। क्या आप कुछ अन्य ऐसे ही उदाहरण दे सकते हैं।

7.1.5 अनुमान के साथ मनोरंजन

प्रतिशतता, एक दिए क्षेत्रफल के किसी भाग का अनुमान लगाने में सहायता करती है।

उदाहरण 5 निम्न आकृति में छायांकित भाग पूर्ण का कितने प्रतिशत है ?



हल पहले हम देखते हैं कि पूर्ण आकृति का कितना भाग छायांकित है। इस प्रकार प्राप्त भिन्न से छायांकित भाग की प्रतिशतता ज्ञात की जा सकती है।

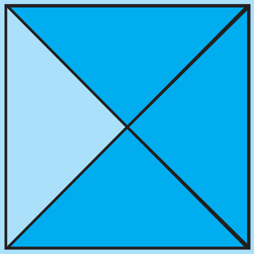
आप देख सकते हैं कि पूर्ण आकृति का आधा भाग छायांकित है।

तथा $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 100\,\% = 50\,\%$

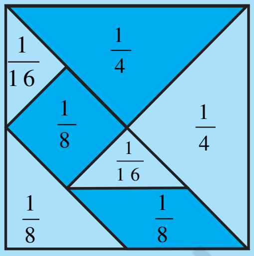
इस प्रकार, 50 % छायांकित है।

निम्न आकृतियों का कितने प्रतिशत छायांकित है ?

(i)



(ii)



टेनग्राम

आप इसी प्रकार कुछ अन्य आकृतियाँ बना सकते हैं और अपने साथियों से छायांकित भाग अनुमान करने को कहिए।

7.2 प्रतिशतता के उपयोग

7.2.1 प्रतिशतता की व्याख्या

आपने देखा कि तुलना करने के लिए प्रतिशतता कितनी उपयोगी है। हमने साधारण व दशमलव भिन्नों को प्रतिशत में बदलना भी सीखा। अब हम देखेंगे कि प्रतिशतता दैनिक जीवन में किस प्रकार प्रयोग में लाई जा सकती है। इसके लिए हम निम्नलिखित कथनों की व्याख्या से आरंभ करते हैं।

– रवि अपनी आय का 5% बचत करता है।

– रेखा को प्रत्येक पुस्तक बेचने पर 10% लाभ मिलता हैं।

– मीरा के 20% वस्त्र नीले रंग के हैं।

इन कथनों में प्रत्येक से आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं ?

5% से हमारा तात्पर्य है 100 में से 5 भाग तथा इसे हम लिखते हैं $\frac{5}{100}$। इसका अर्थ हैं कि रवि, अर्जित किए गए प्रत्येक ₹ 100 में से ₹ 5 बचाता है। इस प्रकार आप भी ऊपर दिए गए अन्य कथनों के अर्थ लगाइए।

7.2.2 प्रतिशतता से संख्या ज्ञात करना

निम्नलिखित उदाहरणों पर ध्यान दीजिए

उदाहरण 6 40 बच्चों के सर्वेक्षण से पता चला कि 25% फुटबॉल खेलना पसंद करते हैं। ज्ञात कीजिए कि इनमें कितने बच्चों को फुटबॉल खेलना पसंद था ।

हल यहाँ पर बच्चों की कुल संख्या 40 है। इनमें से 25% फुटबॉल खेलना पसंद करते हैं। मीना और अरुण ने ऐसे बच्चों की संख्या ज्ञात करने के लिए निम्न विधियाँ प्रयुक्त की। आप ऐसे प्रश्नों के हल करने के लिए इनमें से कोई भी विधि प्रयोग कर सकते हैं।

अरूण ने इस प्रकार हल किया

100 में से फुटबॉल खेलना पसंद करने वाले = 25

अत:, 40 में से फुटबॉल खेलना पसंद करने वाले

$= \frac{25}{100} \times 40 = 10$

मीना ने इस प्रकार हल किया

40 का 25% $= \frac{25}{100} \times 40$

$= 10$

इस प्रकार 40 बच्चों में 10 फुटबॉल खेलना पसंद करते हैं।

प्रयास कीजिए

1. ज्ञात कीजिए :

(a) 164 का 50% (b) 12 का 75% (c) 64 का $12\frac{1}{2}\%$

2. 25 बच्चों की कक्षा में 8% बच्चे वर्षा में भीगना पसंद करते हैं। वर्षा में भीगने वाले बच्चों की संख्या ज्ञात कीजिए।

उदाहरण 7 जब 25% छूट दी जा रही थी तब राहुल ने एक स्वेटर खरीदा और ₹ 200 बचाए। छूट से पहले स्वेटर का क्या मूल्य था ?

हल राहुल ने ₹ 200 बचाए जब 25% छूट मिली। यानी मूल्य में 25% कम होने के कारण राहुल को ₹ 200 की बचत हुई। आइए देखें कि मोहन और अब्दुल ने स्वेटर का प्रारंभिक मूल्य कैसे ज्ञात किया ?

मोहन का हल

वास्तविक मूल्य का 25% = ₹ 200

माना मूल्य है ₹ P

अत: P का 25% $= 200$

अर्थात् $\frac{25}{100} \times P = 200$

अर्थात् $\frac{P}{4} = 200$ या $P = 200 \times 4$

अत: $P =$ ₹ 800

अब्दुल का हल

प्रत्येक ₹ 100 पर ₹ 25 की बचत होती है।

तब ₹ 200 की बचत इस राशि पर होगी

$= \frac{100}{25} \times 200 =$ ₹ 800

दोनों ने ही स्वेटर का वास्तविक मूल्य ₹ 800 ज्ञात किया।

प्रयास कीजिए

1. 9 किस संख्या का 25% है ?

2. 15 किस संख्या का 75% है ?

प्रश्नमाला 7.1

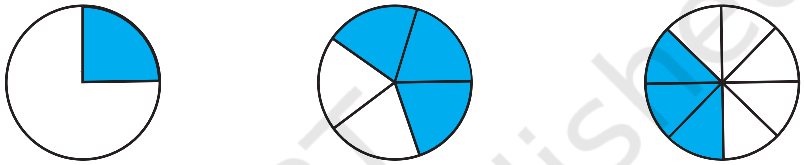
1. दी गई भिन्न संख्याओं को प्रतिशत में बदलो।

(a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{5}{4}$ (c) $\frac{3}{40}$ (d) $\frac{2}{7}$

2. दी गई दशमलव भिन्नों को प्रतिशत में बदलो।

(a) 0.65 (b) 2.1 (c) 0.02 (d) 12.35

3. अनुमान लगाइए कि आकृति का कितना भाग रंग दिया गया है और इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि कितने प्रतिशत रंगीन है।



(i) (ii) (iii)

4. ज्ञात कीजिए :

(a) 250 का 15% (b) 1 घंटे का 1%

(c) 2500 का 20% (d) 1 किग्रा का 75%

5. संपूर्ण राशि ज्ञात कीजिए यदि

(a) इसका 5%, 600 है। (b) इसका 12%, 1080 है। (c) इसका 40%, 500 km है।

(d) इसका 70% 14 मिनट है। (e) इसका 8%, 40 लीटर है।

6. दिए गए प्रतिशतों को साधारण व दशमलव भिन्नों में बदलो और अपने उत्तर को सरलतम रूप में लिखो।

(a) 25% (b) 150% (c) 20% (d) 5%

7. एक नगर में 30% महिलाएँ, 40% पुरुष तथा शेष बच्चे हैं। बच्चों का प्रतिशत कितना है?

8. किसी क्षेत्र के 15,000 मतदाताओं में से 60% ने मतदान में भाग लिया। ज्ञात कीजिए कि कितने प्रतिशत ने मतदान में भाग नहीं लिया। क्या अब ज्ञात कर सकते हैं कि वास्तव में कितने मतदाताओं ने मतदान नहीं किया?

9. मीता अपने वेतन में से ₹ 4000 बचाती है। यदि यह उसके वेतन का 10% है, तब उसका वेतन कितना है?

10. एक स्थानीय क्रिकेट टीम ने, एक सत्र (season) में 20 मैच खेले। इनमें से उस टीम ने 25% मैच जीते। जीते गए मैचों की संख्या कितनी थी?

7.2.3 अनुपातों से प्रतिशत

कभी-कभी किसी वस्तु या राशि के भाग अनुपात के रूप में दिए होते हैं और हमें उन्हें प्रतिशत में बदलना पड़ता है। निम्न उदाहरणों पर ध्यान दीजिए।

उदाहरण 8 रीना की माता जी ने बताया कि इडली बनाने के लिए 1 भाग उड़द की दाल तथा 2 भाग चावल की आवश्यकता होती है। इडली के ऐसे मिश्रण में, उड़द की दाल व चावल का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

हल मिश्रण को अनुपात रूप में इस प्रकार लिखा जाएगा।

चावल : उड़द की दाल = 2 : 1

अब, कुल भाग है $2 + 1 = 3$। अर्थात् मिश्रण में $\frac{2}{3}$ भाग चावल तथा $\frac{1}{3}$ भाग उड़द की दाल है।

अतः, चावल का प्रतिशत होगा $\frac{2}{3} \times 100\,\% = \frac{200}{3} = 66\frac{2}{3}\,\%$

तथा उड़द की दाल का प्रतिशत होगा $\frac{1}{3} \times 100\,\% = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}\,\%$

उदाहरण 9 रवि, राजू तथा राय में ₹ 250 इस प्रकार बाँटे गए कि रवि को दो भाग, राजू को तीन भाग तथा राय को पाँच भाग मिले। इस बँटवारे में प्रत्येक को कितना धन मिला तथा उनका प्रतिशत कितना था ?

हल प्रत्येक के भाग को अनुपात रूप में इस प्रकार लिखा जाएगा 2 : 3 : 5
सभी भागों का योग हुआ $2 + 3 + 5 = 10$.

कुल राशि में प्रत्येक का प्रतिशत	प्रत्येक को मिली राशि
रवि को मिला $\frac{2}{10} \times 100\,\% = 20\,\%$	$\frac{2}{10} \times$ ₹ 250 = ₹50
राजू को मिला $\frac{3}{10} \times 100\,\% = 30\,\%$	$\frac{3}{10} \times$ ₹ 250 = ₹75
राय को मिला $\frac{5}{10} \times 100\,\% = 50\,\%$	$\frac{5}{10} \times$ ₹ 250 = ₹125

प्रयास कीजिए

1. 15 मिठाइयों को मनु तथा सोनू में इस प्रकार बाँटिए कि उन्हें कुल का क्रमशः 20 % तथा 80 % मिले।
2. यदि किसी त्रिभुज के कोणों में अनुपात 2 : 3 : 4 है तब उसके प्रत्येक कोण की माप क्या होगी ?

7.2.4 बढ़त या घटत, प्रतिशत रूप में

अनेक अवसरों पर हमें किसी राशि में हुई बढ़त या घटत को प्रतिशत रूप में ज्ञात करने की आवश्यकता होती है। उदाहरण के लिए, यदि किसी प्रदेश की जनसंख्या 5,50,000 से बढ़कर 6,05,000 हो गई तब ऐसी स्थिति में जनसंख्या की वृद्धि को प्रतिशत के रूप में समझना अधिक आसान होता है, जैसे कहें कि प्रदेश की जनसंख्या 10 % बढ़ गई।

हम किसी राशि के बढ़ने या घटने को, कुल राशि के प्रतिशत के रूप में किस प्रकार प्रकट कर सकते हैं? आइए निम्न उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 10 एक विद्यालय की टीम ने इस वर्ष 6 खेलों में जीत प्राप्त की जबकि पिछले वर्ष 4 में ही की थी। पिछले वर्ष की तुलना में जीत कितने प्रतिशत बढ़ी ?

हल जीत की संख्या में वृद्धि $= 6 - 4 = 2$.

$$\text{प्रतिशत वृद्धि} = \frac{\text{वृद्धि}}{\text{आधार वर्ष में जीत}} \times 100$$

$$= \frac{\text{जीत की संख्या में वृद्धि}}{\text{पिछले वर्ष में जीत की संख्या}} \times 100 = \frac{2}{4} \times 100 = 50$$

अर्थात् जीत में 50 प्रतिशत की वृद्धि हुई।

उदाहरण 11 किसी देश में, पिछले 10 वर्षों में अशिक्षितों की संख्या 150 लाख से घटकर 100 लाख रह गई। घटने का प्रतिशत कितना रहा ?

हल प्रारंभिक राशि = प्रारंभ में अशिक्षितों की संख्या = 150 लाख

प्रारंभिक राशि में परिवर्तन = अशिक्षितों की संख्या में घटत = 150 – 100 = 50 लाख

अत: प्रतिशत घटत

$$= \frac{\text{राशि में परिवर्तन}}{\text{प्रारंभिक राशि}} \times 100 = \frac{50}{150} \times 100 = 33\frac{1}{3}\,\%$$

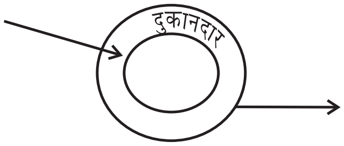
अत: घटने का प्रतिशत $33\frac{1}{3}\%$ है।

प्रयास कीजिए

1. बढ़ने या घटने का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।
   - कमीज़ का मूल्य ₹280 से घटकर ₹210 हो गया।
   - किसी परीक्षा में प्राप्तांक बढ़कर 20 से 30 हो गए।
2. मेरी माता जी कहती हैं कि उनके बचपन के समय पैट्रोल की दर ₹ 1 प्रति लीटर थी और आजकल यह ₹ 52 प्रति लीटर है। पैट्रोल की दर में कितने प्रतिशत की वृद्धि हुई ?

7.3 किसी वस्तु से संबंधित मूल्य, अर्थात् क्रय तथा विक्रय

मैंने इसे ₹ 600 में खरीदा



और मैं इसे ₹ 610 में बेचूँगा।

जिस मूल्य पर कोई वस्तु खरीदी जाती है वह उसका **क्रय मूल्य (cost price)** कहलाता है इसे संक्षिप्त में क्र.मू. (C.P.) लिखा जाता है। जिस मूल्य पर कोई वस्तु बेची जाती है वह उसका **विक्रय मूल्य (selling price)** कहलाता है और इसे संक्षिप्त में वि. मू. (S.P.) लिखा जाता है।

आप किसे अधिक अच्छा कहेंगे, यदि किसी वस्तु को क्रय मूल्य पर ही या उससे कम मूल्य पर या उससे अधिक मूल्य पर बेचा जाए ?

क्रय मूल्य तथा विक्रय मूल्य के आधार पर आप तय कर सकते है कि कोई वस्तु बेचकर आपको लाभ हुआ या नहीं।

यदि क्रय मूल्य (CP) < विक्रय मूल्य (SP)। तब लाभ = SP – CP.

यदि क्रय मूल्य (CP) = विक्रय मूल्य (SP)। तब ना लाभ तथा ना हानि

यदि क्रय मूल्य (CP) > विक्रय मूल्य (SP)। तब हानि = CP – SP (क्रय मूल्य–विक्रय मूल्य)।

आइए कुछ वस्तुओं के क्रय तथा विक्रय मूल्य देखकर, कथनों को समझने का प्रयत्न करें।

- एक खिलौना ₹ 72 में खरीदा गया और ₹ 80 में बेचा गया।

- एक टी-शर्ट ₹ 120 में खरीदी गई और ₹ 100 में बेची गई।

- एक साइकिल ₹ 800 में खरीदी गई और ₹ 940 में बेची गई।

अब पहले कथन पर विचार करते हैं। यहाँ क्रय मूल्य ₹ 72 है तथा विक्रय मूल्य ₹ 80 है।
अतः विक्रय मूल्य अधिक है, क्रय मूल्य से।
अतः लाभ = SP – CP = ₹ 80 – ₹ 72 = ₹ 8
अब आप अन्य दो कथनों की इसी प्रकार सोचकर व्याख्या करें।

7.3.1 लाभ या हानि, प्रतिशत में

लाभ या हानि को प्रतिशत रूप में ज्ञात किया जा सकता है। ध्यान में रखिए कि इसे सदैव क्रय मूल्य पर ही परिकलित करते हैं। उपरोक्त उदाहरणों में हम प्रतिशत लाभ या प्रतिशत हानि भी ज्ञात कर सकते हैं।

आइए खिलौने वाला उदाहरण ही लेते हैं। यहाँ है: CP = ₹ 72, SP = ₹ 80, तथा लाभ = ₹ 8। लाभ प्रतिशत ज्ञात करने के लिए नेहा तथा शेखर ने निम्न विधियाँ प्रयुक्त कीं।

नेहा ने हल इस प्रकार किया

लाभ प्रतिशत $= \dfrac{\text{लाभ}}{\text{क्र. मू.}} \times 100 = \dfrac{8}{72} \times 100$

$= \dfrac{1}{9} \times 100 = 11\dfrac{1}{9}$

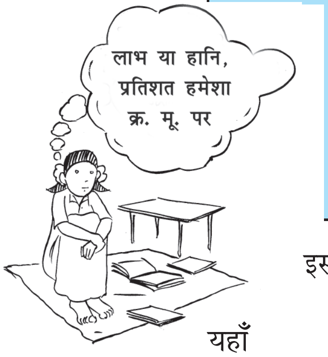
अतः लाभ % $= 11\dfrac{1}{9}$

शेखर ने इस प्रकार किया

₹ 72 पर ₹ 8 लाभ प्राप्त होता है

अतः ₹ 100 पर लाभ $= \dfrac{8}{72} \times 100$

अतः लाभ % $= 11\dfrac{1}{9}$



इसी प्रकार आप दूसरे प्रश्न में भी हानि प्रतिशत ज्ञात कर सकते हैं।

यहाँ CP = ₹ 120, SP = ₹ 100 है।

अतः हानि = ₹ 120 – ₹ 100 = ₹ 20

हानि प्रतिशत $= \dfrac{\text{हानि}}{\text{क्र. मू.}} \times 100$

$= \dfrac{20}{120} \times 100$

$= \dfrac{50}{3} = 16\dfrac{2}{3}$ प्रतिशत

अतः हानि $= 16\dfrac{2}{3}\%$

120 पर हानि = ₹ 20

अतः ₹ 100 पर हानि

$= \dfrac{20}{120} \times 100 = \dfrac{50}{3} = 16\dfrac{2}{3}$

अतः हानि प्रतिशत $16\dfrac{2}{3}$ है

अब आप साईकिल वाला उदाहरण हल करके देखिए।

हम यहाँ यह भी देखते हैं कि किसी वस्तु से संबंधित क्रय मूल्य, विक्रय मूल्य तथा लाभ या हानि में तीन राशियों में से कोई भी दो राशियाँ ज्ञात हों तो तीसरी राशि ज्ञात की जा सकती है।

उदाहरण 12 एक फूलदान का लागत मूल्य ₹ 120 है। यदि दुकानदार इसे 10% हानि पर बेचता है तब उसका विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल पहले, दी हुई राशियों को पहचानते हैं। दिया है, क्रय मूल्य = ₹ 120 तथा हानि प्रतिशत = 10, हमें ज्ञात करना है विक्रय मूल्य।

सोहन ने इस प्रकार हल निकाला

10% हानि का अर्थ है यदि क्र.मू. = ₹ 100
तब हानि = ₹ 10

अतः विक्रय मूल्य = ₹ (100 – 10) = ₹ 90

आनंदी ने इस प्रकार हल किया

हानि = क्रय मूल्य का 10 %
= ₹ 120 का 10 %

$= \dfrac{10}{100} \times 120 =$ ₹ 12

जब क्र.मू. = ₹ 100, तब विक्रय मूल्य
= ₹ 90
अत: जब क्र.मू. = ₹ 120 है, तब

विक्रय मूल्य = $\frac{90}{100} \times 120$ = ₹ 108

अत:
विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य – हानि
= ₹ 120 – ₹ 12 = ₹ 108

दोनों ही विधियों से विक्रय मूल्य ₹ 108 प्राप्त होता है।

उदाहरण 13 एक खिलौना कार का विक्रय मूल्य ₹ 540 था। एक दुकानदार ने उसे 20% लाभ पर बेचा। खिलौने का क्रय मूल्य क्या था ?

हल हमें पता है कि विक्रय मूल्य = ₹ 540 तथा लाभ = 20%, हमें ज्ञात करना है क्रय मूल्य

अमीना ने इस प्रकार हल किया :
20% लाभ का अर्थ है कि यदि क्रय मूल्य ₹ 100 हो तो लाभ ₹ 20 तथा विक्रय मूल्य 100 + 20 = ₹ 120 होगा।
अर्थात् ₹ 120 विक्रय मूल्य होने पर क्रय मूल्य = ₹ 100

अत: ₹ 540 विक्रय मूल्य होने पर क्रय मूल्य $= \frac{100}{120} \times$ ₹ 540 = ₹ 450

अरुण ने प्रश्न इस प्रकार हल किया:
लाभ = क्रय मूल्य का 20% तथा विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य + लाभ
अत: 540 = क्रय मूल्य + क्रय मूल्य का 20%

या 540 = क्रय मूल्य + $\frac{20}{100}$ × क्रय मूल्य = $\left[1+\frac{1}{5}\right]$ क्रय मूल्य

= $\frac{6}{5}$ क्रय मूल्य इसलिए, $540 \times \frac{5}{6}$ = क्रय मूल्य

या ₹ 450 = क्रय मूल्य ।

इस प्रकार दोनों विधियों से क्रय मूल्य ₹ 450 है।

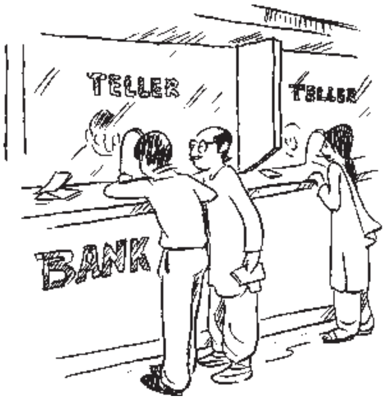
प्रयास कीजिए

1. एक दुकानदार ने एक कुर्सी 375 में खरीदी तथा ₹ 400 में बेच दी। उसका लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।
2. एक वस्तु ₹ 50 में क्रय की गई तथा 12 प्रतिशत लाभ पर बेच दी गई। उसका विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।
3. एक वस्तु ₹ 250 में बेचने पर 5 प्रतिशत लाभ प्राप्त हुआ। उसका क्रय मूल्य क्या था ?
4. एक वस्तु 5 प्रतिशत हानि उठा कर ₹ 540 में बेची गई। उसका क्रय मूल्य क्या था ?

7.4 उधार लिए गए धन पर शुल्क अर्थात् साधारण ब्याज

सोहनी ने बताया कि वे एक नया स्कूटर खरीदने जा रहे हैं। मोहन ने पूछा कि क्या उनके पास इसके लिए पर्याप्त धन है? सोहनी ने उत्तर दिया कि उसके पिताजी इसके लिए बैंक से उधार धन (ऋण) लेंगे। उधार लिए गए धन को **मूलधन** कहते है।

यह धन, वापस करने से पहले, ऋण प्राप्त करने वाले व्यक्ति द्वारा कुछ समय तक इसका उपयोग किया जाता है; अत: उसे उतने समय का, धन उपयोग में लाने के बदले, कुछ अतिरिक्त धन बैंक को देना होता है। यह अतिरिक्त धन **ब्याज** कहलाता है।



एक निश्चित अवधि के बाद आपको मूलधन तथा ब्याज, दोनों को मिलाकर पूरा धन वापस करना होता है जिसे **मिश्रधन** कहते हैं।

अर्थात्, **मिश्रधन = मूलधन + ब्याज**

ब्याज एक निश्चित दर पर परिकलित किया जाता है जो प्राय: प्रत्येक ₹ 100 के लिए एक वर्ष के लिए निर्धारित होता है।

इसे इस प्रकार लिखा जा सकता है, 10 प्रतिशत प्रति वर्ष या 10 प्रतिशत वार्षिक।

10 प्रतिशत वार्षिक का अर्थ है कि उधार लिए गए प्रत्येक ₹ 100 के लिए, प्रत्येक वर्ष के बाद ₹ 10 ब्याज के रूप में अतिरिक्त देने होंगे।

एक उदाहरण लेकर देखें कि ब्याज कैसे परिकलित किया जाता है।

उदाहरण 14 अनीता ₹ 5000 का एक ऋण 15 प्रतिशत वार्षिक की दर से ब्याज पर लेती है। ज्ञात कीजिए कि एक वर्ष के बाद उसे कुल कितना धन वापस करना होगा।

हल उधार ली गई राशि = ₹ 5000

ब्याज की दर = 15 प्रतिशत प्रति वर्ष

इसका अर्थ है कि यदि वह ₹ 100 उधार लेती है तब उसे एक वर्ष बाद ₹ 15 ब्याज के रूप में भी देने होंगे।

अत: ₹ 5000 के उधार पर उसे 1 वर्ष बाद देने होंगे : $\frac{15}{100} \times$ ₹ 5000 = ₹ 750

अर्थात् एक वर्ष बाद उसे ब्याज मिलाकर मिश्रधन देना होगा ₹ 5000 + ₹ 750 = ₹ 5750

एक वर्ष का ब्याज ज्ञात करने के लिए हम एक संबंध या सूत्र भी प्राप्त कर सकते हैं।

हम मूलधन को P से तथा दर $R\,\%$ वार्षिक को R से प्रदर्शित करते हैं।

तो हमें प्रत्येक ₹ 100 के लिए एक वर्ष का ₹ R ब्याज देना होगा।

अत: ₹ P उधार लेने पर एक वर्ष का ब्याज I होगा।

$$I = \frac{R \times P}{100} = \frac{P \times R}{100}$$

7.4.1 अनेक वर्षों के लिए ब्याज

अगर धन एक वर्ष से अधिक समय के लिए उधार लिया जाता है तब ब्याज भी उस पूरे समय के लिए परिकलित किया जाता है जितने समय के लिए धन रखा गया है। उदाहरण के लिए यदि अनीता वही धन उसी दर पर दो वर्ष बाद वापस करती तब उसे ब्याज भी दुगना देना पड़ता; अर्थात् ₹ 750 पहले वर्ष के लिए तथा ₹ 750 दूसरे वर्ष के लिए। मूलधन वही रहता है, बदलता नहीं और ब्याज भी प्रत्येक वर्ष के लिए समान ही रहता है। इस प्रकार के ब्याज को **साधारण ब्याज** कहते हैं। जिस प्रकार वर्षों की संख्या बढ़ती जाती है उसी प्रकार ब्याज की राशि भी। 3 वर्ष के लिए ₹100, 18% वार्षिक दर से उधार लेने पर 3 वर्षों बाद ब्याज देना होगा, $18 + 18 + 18 = 3 \times 18 =$ ₹ 54

हम एक वर्ष से अधिक समय के लिए भी साधारण ब्याज ज्ञात करने के लिए सूत्र प्राप्त कर सकते हैं।

हम देख चुके हैं कि ₹ P के लिए R % वार्षिक की दर से 1 वर्ष बाद ब्याज देना होता है $\frac{R \times P}{100}$। अत: T वर्षों के लिए दिया गया ब्याज (I) होगा:

$$I = \frac{T \times R \times P}{100} = \frac{P \times R \times T}{100} \text{ या } \frac{PRT}{100}$$

और T वर्षों बाद मिश्रधन A होगा : $A = P + I$

प्रयास कीजिए

1. ₹ 10,000, 5 प्रतिशत वार्षिक दर से जमा किए जाते हैं। एक वर्ष बाद कितना ब्याज प्राप्त होगा ?
2. ₹ 3500, 7 प्रतिशत वार्षिक दर से उधार दिए जाते हैं। दो वर्ष बाद कितना साधारण ब्याज देय होगा ?
3. ₹ 6050, 6.5 प्रतिशत वार्षिक दर से उधार लिए जाते हैं। 3 वर्ष बाद कितना ब्याज तथा कितना मिश्रधन देय होगा ?
4. ₹ 7000, 3.5 प्रतिशत वार्षिक दर से दो वर्ष के लिए उधार लिए जाते हैं। दो वर्ष बाद कितना मिश्रधन देय होगा ?

जैसा आपने क्रय-विक्रय मूल्यों की समस्याओं में देखा था उसी प्रकार सूत्र $I = \frac{P \times T \times R}{100}$ द्वारा, चार राशियों में से कोई भी तीन ज्ञात होने पर चौथी ज्ञात की जा सकती है।

उदाहरण 15 ₹ 4500 के ऋण पर 2 वर्ष बाद, मनोहर ₹ 750 साधारण ब्याज देता है। ब्याज की दर प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

हल 1

$$\mathrm{I} = \frac{P \times T \times R}{100}$$

अत: $750 = \dfrac{4500 \times 2 \times R}{100}$

या $\dfrac{750}{45 \times 2} = R$

अत: ब्याज की दर

$= 8\frac{1}{3}\%$ वार्षिक

हल 2

2 वर्ष का ब्याज है = ₹ 750

अत: 1वर्ष का ब्याज होगा = $\dfrac{750}{2}$ = ₹ 375

अब ₹ 4500 पर ब्याज = ₹ 375

अत: ₹ 100 पर ब्याज

$= \dfrac{375 \times 100}{4500} = 8\frac{1}{3}\%$

अत: ब्याज की दर = $8\frac{1}{3}\%$ वार्षिक

प्रयास कीजिए

1. आपके बैंक खाते में ₹ 2400 जमा हैं तथा ब्याज की दर 5 प्रतिशत वार्षिक है। कितने वर्षों बाद ब्याज की राशि ₹ 240 होगी ?
2. किसी धन का 5 प्रतिशत वार्षिक दर से 3 वर्ष का ब्याज ₹ 450 होता है। वह धन ज्ञात कीजिए।

प्रश्नवली 7.2

1. क्रय-विक्रय के निम्न सौदों में हानि या लाभ ज्ञात कीजिए। प्रत्येक दशा में प्रतिशत हानि या प्रतिशत लाभ भी ज्ञात कीजिए।
   (a) बग़ीचे में काम आने वाली कैंची ₹ 250 में खरीदी गई तथा ₹ 325 में बेची गई।
   (b) एक रेफ़्रीज़रेटर ₹12000 में खरीदा गया और ₹13500 में बेचा गया।
   (c) एक अलमारी ₹2500 में खरीदी गई और ₹3000 में बेची गई।
   (d) एक स्कर्ट ₹250 में खरीद कर ₹150 में बेची गई।
2. दिए गए प्रत्येक अनुपात के दोनों पदों को प्रतिशत में बदलिए।
   (a) 3:1 (b) 2 : 3 : 5 (c) 1:4 (d) 1 : 2 : 5

3. एक नगर की जनसंख्या 25000 से घटकर 24500 रह गई। घटने का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।
4. अरुण ने एक कार ₹ 3,50,000 में खरीदी। अगले वर्ष उसका मूल्य बढ़कर ₹ 3,70,000 हो गया। कार के मूल्य की प्रतिशत वृद्धि ज्ञात कीजिए ।
5. मैने एक टी.वी. ₹ 10,000 में खरीद कर 20 प्रतिशत लाभ पर बेच दिया। मुझे बेचने पर कितना धन प्राप्त हुआ ?
6. जूही एक वाशिंग मशीन ₹ 13,500 में बेचने पर 20 प्रतिशत की हानि उठाती है। उसने वह मशीन कितने में खरीदी थी ?
7. (i) चाक-पाउडर में कैल्शियम, कार्बन तथा ऑक्सीजन का अनुपात 10:3:12 होता है। इसमे कार्बन की प्रतिशत मात्रा ज्ञात कीजिए।
   (ii) चाक की एक छड़ी में यदि कार्बन की मात्रा 3 gm है तब उसका कुल भार कितना होगा ?
8. अमीना एक पुस्तक ₹ 275 में खरीद कर उसे 15 प्रतिशत हानि पर बेचती है। पुस्तक का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।
9. प्रत्येक दशा में 3 वर्ष बाद कितना मिश्रधन देय होगा ?
   (a) मूलधन = ₹ 1200 दर 12% वार्षिक (b) मूलधन = ₹ 7500 दर 5% वार्षिक
10. ₹ 56000 पर, 2 वर्ष पश्चात किस दर से ₹ 280 साधारण ब्याज देय होगा ?
11. मीना ने 9 प्रतिशत वार्षिक दर से, 1 वर्ष पश्चात् ₹ 45 ब्याज के रूप में दिए। उसने कितना धन उधार लिया था ?

हमने क्या चर्चा की ?

1. तुलना करने की एक विधि प्रतिशत भी है। भिन्न, जिनके हर 100 होते हैं, उनके अंश, प्रतिशत प्रकट करते हैं। प्रतिशत का अर्थ होता है प्रत्येक सौ पर।
2. भिन्नों को प्रतिशत में बदला जा सकता है तथा प्रतिशत को भिन्नों में।

   उदाहरण के लिए $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times 100\% = 25\%$ तथा, $75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$
3. दशमलव भिन्न को भी प्रतिशत में बदला जा सकता है तथा प्रतिशत को दशमलव में।
   उदाहरण के लिए, $0.25 = 0.25 \times 100\% = 25\%$
4. प्रतिशत के हमारे दैनिक जीवन में व्यापक उपयोग हैं:
   (a) जब हमें किसी राशि का प्रतिशत ज्ञात हो तब हम वह संपूर्ण राशि ज्ञात कर सकते हैं।
   (b) यदि हमें किसी राशि के भागों में अनुपात दिया हो तब हम उन्हें प्रतिशत में भी बदल सकते हैं।

(c) किसी राशि का घटना या बढ़ना भी प्रतिशत में दर्शाया जा सकता है।

(d) किसी वस्तु के क्रय-विक्रय में हुए लाभ या हानि को भी प्रतिशत में दर्शाया जा सकता है।

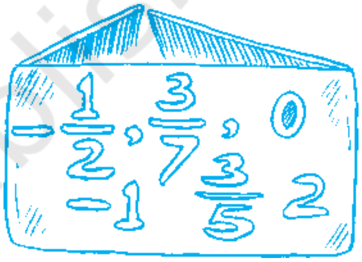
(e) उधार लिए गए धन पर ब्याज परिकलन के लिए उसकी दर प्रतिशत में ही दी जाती है। उदाहरण के लिए ₹ 800, 3 वर्ष के लिए 12 प्रतिशत ब्याज की दर पर उधार लिया गया।

अध्याय 8

परिमेय संख्याएँ

0757CH09

8.1 भूमिका



आपने संख्याओं का अध्ययन अपने परिवेश की वस्तुओं के गिनने से प्रारंभ किया। इस कार्य में प्रयोग की गई संख्याओं को गणन संख्याएँ (counting numbers) या प्राकृत संख्याएँ (natural numbers) कहा गया था। ये हैं 1, 2, 3, 4, ...। प्राकृत संख्याओं में 0 को सम्मिलित करने पर हमें पूर्ण संख्याएँ (whole numbers), अर्थात् 0, 1, 2, 3, ... प्राप्त हुईं। इसके बाद, पूर्णांक (integers) प्राप्त करने के लिए, पूर्ण संख्याओं में प्राकृत संख्याओं के ऋणात्मकों (negatives) को सम्मिलित किया गया। ... −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3 ... पूर्णांक हैं। इस प्रकार, हमने संख्या पद्धति (number system) को प्राकृत संख्याओं से पूर्ण संख्याओं तक और पूर्ण संख्याओं से पूर्णांकों तक विस्तृत किया।

आपका भिन्नों (fractions) से भी परिचय कराया गया था। ये $\frac{\text{अंश}}{\text{हर}}\left(\frac{\text{numerator}}{\text{denominator}}\right)$, के प्रकार की संख्याएँ होती हैं, जहाँ अंश या तो 0 या एक धनात्मक पूर्णांक होता है तथा हर, एक धनात्मक पूर्णांक होता है। आपने दो भिन्नों की तुलना की, उनके समतुल्य (equivalent) रूप (भिन्नें) ज्ञात किए तथा उन पर सभी चारों आधारभूत संक्रियाओं योग, व्यवकलन (घटाना), गुणन और विभाजन का अध्ययन किया।

इस अध्याय में, हम संख्या पद्धति का और आगे विस्तार करेंगे। हम परिमेय संख्याओं (rational numbers) की अवधारणा का परिचय देकर उन पर योग, व्यवकलन, गुणन और विभाजन (भाग) की संक्रियाएँ करना सीखेंगे।

8.2 परिमेय संख्याओं की आवश्यकता

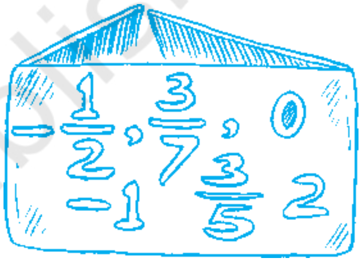
पहले हम देख चुके हैं कि किस प्रकार संख्याओं से संबद्ध विपरीत (opposite) स्थितियों को व्यक्त करने के लिए पूर्णांकों का प्रयोग किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, यदि एक स्थान के दाईं ओर 3 km दूरी को 3 से व्यक्त किया जाए, तो उसी स्थान से बाईं ओर की 5 km दूरी को −5

परिमेय संख्याएँ

0757CH09

अध्याय 8

8.1 भूमिका



आपने संख्याओं का अध्ययन अपने परिवेश की वस्तुओं के गिनने से प्रारंभ किया। इस कार्य में प्रयोग की गई संख्याओं को गणन संख्याएँ (counting numbers) या प्राकृत संख्याएँ (natural numbers) कहा गया था। ये हैं 1, 2, 3, 4, ...। प्राकृत संख्याओं में 0 को सम्मिलित करने पर हमें पूर्ण संख्याएँ (whole numbers), अर्थात् 0, 1, 2, 3, ... प्राप्त हुईं। इसके बाद, पूर्णांक (integers) प्राप्त करने के लिए, पूर्ण संख्याओं में प्राकृत संख्याओं के ऋणात्मकों (negatives) को सम्मिलित किया गया। ... –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3 ... पूर्णांक हैं। इस प्रकार, हमने संख्या पद्धति (number system) को प्राकृत संख्याओं से पूर्ण संख्याओं तक और पूर्ण संख्याओं से पूर्णांकों तक विस्तृत किया।

आपका भिन्नों (fractions) से भी परिचय कराया गया था। ये $\frac{\text{अंश}}{\text{हर}}\left(\frac{\text{numerator}}{\text{denominator}}\right)$, के प्रकार की संख्याएँ होती हैं, जहाँ अंश या तो 0 या एक धनात्मक पूर्णांक होता है तथा हर, एक धनात्मक पूर्णांक होता है। आपने दो भिन्नों की तुलना की, उनके समतुल्य (equivalent) रूप (भिन्नें) ज्ञात किए तथा उन पर सभी चारों आधारभूत संक्रियाओं योग, व्यवकलन (घटाना), गुणन और विभाजन का अध्ययन किया।

इस अध्याय में, हम संख्या पद्धति का और आगे विस्तार करेंगे। हम परिमेय संख्याओं (rational numbers) की अवधारणा का परिचय देकर उन पर योग, व्यवकलन, गुणन और विभाजन (भाग) की संक्रियाएँ करना सीखेंगे।

8.2 परिमेय संख्याओं की आवश्यकता

पहले हम देख चुके हैं कि किस प्रकार संख्याओं से संबद्ध विपरीत (opposite) स्थितियों को व्यक्त करने के लिए पूर्णांकों का प्रयोग किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, यदि एक स्थान के दाईं ओर 3 km दूरी को 3 से व्यक्त किया जाए, तो उसी स्थान से बाईं ओर की 5 km दूरी को –5

से व्यक्त किया जा सकता है। यदि 150 रु के लाभ को 150 से व्यक्त किया जाए, तो 100 रु की हानि को -100 से व्यक्त किया जा सकता है।

इसी प्रकार की अनेक स्थितियाँ होती हैं, जिनमें भिन्नात्मक संख्याएँ (भिन्न) संबद्ध होती हैं। हम समुद्र तल से ऊपर 750 m की ऊँचाई को $\frac{3}{4}$ km से व्यक्त कर सकते हैं। क्या हम समुद्र तल से नीचे 750 m की गहराई को km में व्यक्त कर सकते हैं? क्या हम समुद्र तल से नीचे $\frac{3}{4}$ km की गहराई को $\frac{-3}{4}$ से व्यक्त कर सकते हैं? हम देख सकते हैं कि $\frac{-3}{4}$ न तो एक पूर्णांक है और न ही एक भिन्न। ऐसी संख्याओं को सम्मिलित करने के लिए, हमें संख्या पद्धति को विस्तृत करने की आवश्यकता है।

8.3 परिमेय संख्याएँ क्या हैं ?

शब्द 'परिमेय' (rational) की उत्पत्ति, पद 'अनुपात' (ratio) से हुई है। आप जानते हैं कि अनुपात $3:2$ को $\frac{3}{2}$ भी लिखा जा सकता है। यहाँ 3 और 2 प्राकृत संख्याएँ हैं।

इसी प्रकार, दो पूर्णांकों p और q $(q \neq 0)$ के अनुपात $p:q$ को $\frac{p}{q}$ लिखा जा सकता है। यही वह रूप है जिसमें परिमेय संख्याएँ व्यक्त की जाती हैं।

एक परिमेय संख्या को ऐसी संख्या के रूप में परिभाषित किया जाता है, जिसे $\frac{p}{q}$, के रूप में व्यक्त किया जा सके, जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ है।

इस प्रकार, $\frac{4}{5}$ एक परिमेय संख्या है। यहाँ $p = 4$ है और $q = 5$ है।

क्या $\frac{-3}{4}$ भी एक परिमेय संख्या है? हाँ, क्योंकि $p = -3$ और $q = 4$ पूर्णांक हैं।

- आपने $\frac{3}{8}, \frac{4}{8}, 1\frac{2}{3}$, इत्यादि जैसी अनेक भिन्न देखी हैं। सभी भिन्न परिमेय संख्याएँ होती हैं। क्या आप इसका कारण बता सकते हैं? दशमलव संख्याओं 0.5, 2.3, 0.333 इत्यादि के बारे में क्या कहा जा सकता है? इस प्रकार की प्रत्येक संख्या को एक सामान्य भिन्न के रूप में लिखा जा सकता है और इसीलिए ये परिमेय संख्याएँ हैं। उदाहरणार्थ, $0.5 = \frac{5}{10}$, $2.3 = \frac{23}{10}$, $0.333 = \frac{333}{1000}$ इत्यादि।

प्रयास कीजिए

1. क्या संख्या $\frac{2}{-3}$ परिमेय संख्या है? इसके बारे में सोचिए।
2. दस परिमेय संख्याओं की एक सूची बनाइए।

अंश और हर

$\frac{p}{q}$ में, पूर्णांक p अंश है तथा पूर्णांक $q\ (\neq 0)$ हर है।

इस प्रकार, $\frac{-3}{7}$ में, -3 अंश है और 7 हर है।

ऐसी पाँच परिमेय संख्याएँ लिखिए, जिनमें से प्रत्येक का

(a) अंश एक ऋणात्मक पूर्णांक हो और हर एक धनात्मक पूर्णांक हो।
(b) अंश एक धनात्मक पूर्णांक हो और हर एक ऋणात्मक पूर्णांक हो।
(c) अंश और हर दोनों ऋणात्मक पूर्णांक हों।
(d) अंश और हर दोनों धनात्मक पूर्णांक हों।

- क्या पूर्णांक भी परिमेय संख्याएँ हैं?

किसी भी पूर्णांक को एक परिमेय संख्या माना जा सकता है। उदाहरणार्थ, पूर्णांक -5 एक परिमेय संख्या है, क्योंकि आप इसे $\frac{-5}{1}$ के रूप में लिख सकते हैं। पूर्णांक 0 को भी $0 = \frac{0}{2}$ या $\frac{0}{7}$ इत्यादि के रूप में लिखा जा सकता है। अत: यह भी एक परिमेय संख्या है।

इस प्रकार, परिमेय संख्याओं में पूर्णांक और भिन्न सम्मिलित होते हैं।

समतुल्य परिमेय संख्याएँ

एक परिमेय संख्या को अलग-अलग अंशों और हरों का प्रयोग करते हुए लिखा जा सकता है।

उदाहरणार्थ, परिमेय संख्या $\frac{-2}{3}$ पर विचार कीजिए।

$\frac{-2}{3} = \frac{-2\times 2}{3\times 2} = \frac{-4}{6}$। हम देखते हैं कि $\frac{-2}{3}$ वही है जो $\frac{-4}{6}$ है।

साथ ही, $\frac{-2}{3} = \frac{(-2)\times(-5)}{3\times(-5)} = \frac{10}{-15}$ है। अत:, $\frac{-2}{3}$ वही है जो $\frac{10}{-15}$ है।

इस प्रकार, $\frac{-2}{3} = \frac{10}{-15} = \frac{10}{-15}$ है। ऐसी परिमेय संख्याएँ जो परस्पर बराबर हों एक दूसरे के **समतुल्य (equivalent)** या **तुल्य** कही जाती हैं।

पुनः, $\frac{10}{-15} = \frac{-10}{15}$ (कैसे?)

एक परिमेय संख्या के अंश और हर को एक ही शून्येतर (non-zero) पूर्णांक से गुणा करने पर, हमें दी हुई परिमेय संख्या के समतुल्य (या तुल्य) एक अन्य परिमेय संख्या प्राप्त होती है। यह ठीक समतुल्य भिन्न प्राप्त करने जैसा ही है।

गुणा की तरह, एक ही शून्येतर पूर्णांक से अंश और हर को भाग देने पर भी समतुल्य परिमेय संख्याएँ प्राप्त होती हैं। उदाहरणार्थ,

$$\frac{10}{-15} = \frac{10\div(-5)}{-15\div(-5)} = \frac{-2}{3} \quad , \quad \frac{-12}{24} = \frac{-12\div 12}{24\div 12} = \frac{-1}{2}$$

हम $\frac{-2}{3}$ को $-\frac{2}{3}$, $\frac{-10}{15}$ को $-\frac{10}{15}$ इत्यादि, लिखते हैं।

प्रयास कीजिए

रिक्त स्थानों को भरिए :

(i) $\frac{5}{4} = \frac{\square}{16} = \frac{25}{\square} = \frac{-15}{\square}$

(ii) $\frac{-3}{7} = \frac{\square}{14} = \frac{9}{\square} = \frac{-6}{\square}$

8.4 धनात्मक और ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ

परिमेय संख्या $\frac{2}{3}$ पर विचार कीजिए। इस संख्या के अंश और हर दोनों ही धनात्मक पूर्णांक हैं। ऐसी परिमेय संख्या को एक **धनात्मक परिमेय संख्या** कहते हैं। अतः, $\frac{3}{8}, \frac{5}{7}, \frac{2}{9}$ इत्यादि धनात्मक परिमेय संख्याएँ हैं।

$\frac{-3}{5}$ का अंश एक ऋणात्मक पूर्णांक है, जबकि इसका हर एक धनात्मक पूर्णांक है। ऐसी परिमेय संख्या को **ऋणात्मक परिमेय संख्या** कहते हैं। अतः $\frac{-5}{7}, \frac{-3}{8}, \frac{-9}{5}$ इत्यादि ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ हैं।

प्रयास कीजिए

1. क्या 5 एक धनात्मक परिमेय संख्या है?
2. पाँच और धनात्मक परिमेय संख्याएँ लिखिए।

- क्या $\frac{8}{-3}$ एक ऋणात्मक संख्या है? हम जानते हैं कि $\frac{8}{-3} = \frac{8\times(-1)}{-3\times(-1)} = \frac{-8}{3}$ है, तथा $\frac{-8}{3}$ एक ऋणात्मक परिमेय संख्या है। अतः, $\frac{8}{-3}$ एक ऋणात्मक परिमेय संख्या है।

  इसी प्रकार, $\frac{5}{-7}, \frac{6}{-5}, \frac{2}{-9}$ इत्यादि सभी ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ हैं। ध्यान दीजिए कि इनके अंश धनात्मक हैं तथा हर ऋणात्मक हैं।

प्रयास कीजिए

1. क्या −8 एक ऋणात्मक परिमेय संख्या है।
2. पाँच और ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ लिखिए।

- संख्या 0 न तो एक धनात्मक परिमेय संख्या है और न ही एक ऋणात्मक परिमेय संख्या।
- $\frac{-3}{-5}$ के बारे में क्या कहा जा सकता है?

आप देखेंगे कि $\frac{-3}{-5} = \frac{-3\times(-1)}{-5\times(-1)} = \frac{3}{5}$ है। अतः, $\frac{-3}{-5}$ एक धनात्मक परिमेय संख्या है। इस प्रकार, $\frac{-2}{-5}, \frac{-5}{-3}$, इत्यादि धनात्मक परिमेय संख्याएँ हैं।

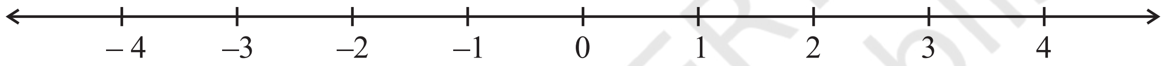
प्रयास कीजिए

निम्नलिखित में से कौन-सी संख्याएँ ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ हैं?

(i) $\frac{-2}{3}$ (ii) $\frac{5}{7}$ (iii) $\frac{3}{-5}$ (iv) 0 (v) $\frac{6}{11}$ (vi) $\frac{-2}{-9}$

8.5 एक संख्या रेखा पर परिमेय संख्याएँ

आप यह जानते हैं कि एक संख्या रेखा पर पूर्णांकों को किस प्रकार निरूपित किया जाता है। आइए ऐसी ही एक संख्या रेखा खींचें।



0 के दाईं ओर के बिंदुओं को + चिह्न से व्यक्त करते हैं और ये धनात्मक पूर्णांक दर्शाते हैं। 0 से बाईं ओर के बिंदुओं को – चिह्न से व्यक्त करते हैं और ये ऋणात्मक पूर्णांक दर्शाते हैं। संख्या रेखा पर भिन्नों के निरूपण से भी आप परिचित हैं।

आइए अब देखें कि परिमेय संख्याएँ संख्या रेखा पर किस प्रकार निरूपित की जा सकती हैं?

आइए संख्या रेखा पर संख्या $-\frac{1}{2}$ को निरूपित करें।

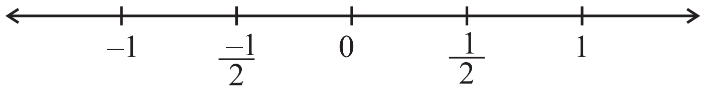
जैसा कि धनात्मक पूर्णांकों की स्थिति में किया गया था, धनात्मक परिमेय संख्याओं को 0 के दाईं ओर अंकित किया जाएगा तथा ऋणात्मक परिमेय संख्याओं को 0 के बाईं ओर अंकित किया जाएगा।

0 के किस ओर आप $-\frac{1}{2}$ को अंकित करेंगे? ऋणात्मक परिमेय संख्या होने के कारण इसे 0 के बाईं ओर अंकित किया जाएगा।

आप जानते हैं कि संख्या रेखा पर पूर्णांकों को अंकित करते समय, उत्तरोत्तर पूर्णांकों को समान अंतरालों पर अंकित किया जाता है। साथ ही, संख्याओं 1 और –1 का युग्म संख्या 0 से समदूरस्थ हैं। इसी प्रकार, 2 और –2 तथा 3 और –3 भी समदूरस्थ हैं।

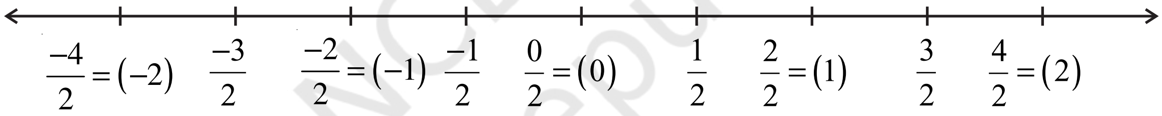
इसी प्रकार, परिमेय संख्याएँ $\frac{1}{2}$ और $-\frac{1}{2}$ भी 0 से समदूरस्थ होंगी। हम जानते हैं कि परिमेय संख्या $\frac{1}{2}$ को किस प्रकार संख्या रेखा पर अंकित किया जाता है। यह उस बिंदु पर अंकित किया

जाता है, जो 0 और 1 से बराबर दूरी (ठीक बीच में) पर है। अर्थात् 0 और 1 की आधी दूरी पर है। इसलिए, $-\frac{1}{2}$ को 0 और –1 की आधी दूरी पर अंकित किया जाएगा।



हम जानते हैं कि $\frac{3}{2}$ को संख्या रेखा पर किस प्रकार अंकित किया जाता है। इसे 0 के दाईं ओर 1 और 2 के बीच में आधी दूरी पर अंकित किया जाता है। आइए अब संख्या रेखा पर $\frac{-3}{2}$ को अंकित करें। यह 0 के बाईं ओर उतनी ही दूरी पर अंकित होगा जितनी दूरी 0 और $\frac{3}{2}$ के बीच है।

घटते हुए क्रम में $\frac{-1}{2}, \frac{-2}{2} (= -1), \frac{-3}{2}, \frac{-4}{2} (= -2)$, इत्यादि प्राप्त हैं। इससे यह प्रदर्शित होता है कि $\frac{-3}{2}$ संख्याओं – 1 और – 2 के बीच में आधी दूरी पर स्थित (या अंकित) होगा।



इसी प्रकार, $\frac{-5}{2}$ और $\frac{-7}{2}$ को संख्या रेखा पर अंकित कीजिए।

इसी प्रकार, $-\frac{1}{3}$ संख्या रेखा पर 0 के बाईं ओर शून्य से उतनी ही दूरी पर होगी जितनी कि $\frac{1}{3}$ शून्य से दाईं ओर है।

अत: जैसा कि ऊपर किया गया है, $-\frac{1}{3}$ को संख्या रेखा पर निरूपित किया जा सकता है। एक बार, हमें $-\frac{1}{3}$ को संख्या रेखा पर निरूपित करना आ जाए तो, हम $-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, \ldots$ इत्यादि को संख्या रेखा पर निरूपित कर सकते हैं। विभिन्न हरों वाली अन्य परिमेय संख्याओं को भी इसी प्रकार संख्या रेखा पर निरूपित किया जा सकता है।

8.6 मानक रूप में परिमेय संख्याएँ

निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को देखिए :

$$\frac{3}{5}, \frac{-5}{8}, \frac{2}{7}, \frac{-7}{11}$$

इन सभी परिमेय संख्याओं के हर धनात्मक पूर्णांक हैं तथा अंश और हरों के बीच में केवल 1 सार्व गुणनखंड (common factor) है। साथ ही, ऋणात्मक चिह्न (–) केवल अंश में ही स्थित है।

ऐसी परिमेय संख्याओं को **मानक रूप (standard form)** में व्यक्त की गई परिमेय संख्याएँ कहा जाता है।

एक परिमेय संख्या मानक रूप में व्यक्त की हुई कही जाती है, यदि उसका हर धनात्मक पूर्णांक हो तथा उसके अंश और हर में 1 के अतिरिक्त कोई सार्व गुणनखंड न हो।

यदि कोई परिमेय संख्या मानक रूप में नहीं है, तो उसे उसके मानक रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

स्मरण कीजिए कि भिन्नों को उनके न्यूनतम रूपों में व्यक्त करने के लिए, हमने उनके अंशों और हरों को एक ही शून्येतर पूर्णांक से भाग दिया था। हम इसी विधि का प्रयोग परिमेय संख्याओं को उनके मानक रूपों में व्यक्त करने में करेंगे।

उदाहरण 1 $\frac{-45}{30}$ को मानक रूप में व्यक्त कीजिए।

हल हमें प्राप्त है : $\frac{-45}{30}=\frac{-45\div 3}{30\div 3}=\frac{-15}{10}=\frac{-15\div 5}{10\div 5}=\frac{-3}{2}$

हमें दो बार भाग देना पड़ा। पहली बार 3 से और फिर 5 से। इसे निम्नलिखित प्रकार से भी किया जा सकता था :

$$\frac{-45}{30}=\frac{-45\div 15}{30\div 15}=\frac{-3}{2}$$

इस उदाहरण में देखिए कि 15, संख्याओं 45 और 30 का म.स. है।

इस प्रकार, एक परिमेय संख्या को मानक रूप में व्यक्त करने के लिए, हम उसके अंश और हर को उनके ***म.स.*** *से, ऋण चिह्न पर बिना कोई ध्यान दिए (यदि कोई हो), भाग देते हैं।* (ऋण चिह्न पर ध्यान ना देने का कारण हम अगली कक्षाओं में पढ़ेंगे)

यदि हर में ऋणात्मक चिह्न है, तो '**–म.स.**' से भाग दीजिए।

उदाहरण 2 मानक रूप में बदलिए :

(i) $\frac{36}{-24}$ (ii) $\frac{-3}{-15}$

हल

(i) 36 और 24 का म.स. 12 है।

अतः, मानक रूप अंश और हर को -12 से भाग देने पर प्राप्त होगा।

इस प्रकार, $\frac{36}{-24}=\frac{36\div(-12)}{-24\div(-12)}=\frac{-3}{2}$

(ii) 3 और 15 का म.स. 3 है।

इस प्रकार, $\frac{-3}{-15}=\frac{-3\div(-3)}{-15\div(-3)}=\frac{1}{5}$

प्रयास कीजिए

मानक रूप ज्ञात कीजिए (i) $\frac{-18}{45}$ (ii) $\frac{-12}{18}$

8.7 परिमेय संख्याओं की तुलना

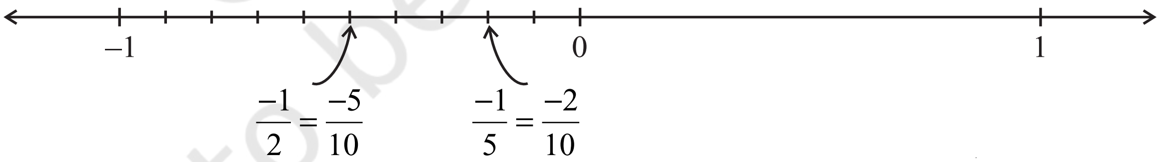
हम यह जानते हैं कि दो पूर्णांकों या दो भिन्नों की तुलना किस प्रकार की जाती है तथा यह भी कि इनमें कौन बड़ा है और कौन छोटा। आइए अब देखें कि दो परिमेय संख्याओं की तुलना किस प्रकार की जा सकती है।

- $\frac{2}{3}$ और $\frac{5}{7}$ जैसी दो धनात्मक परिमेय संख्याओं की तुलना ठीक उसी प्रकार की जा सकती है, जैसा कि हम भिन्नों की स्थिति के लिए पहले पढ़ चुके हैं।

- मेरी ने दो ऋणात्मक परिमेय संख्याओं $-\frac{1}{2}$ और $-\frac{1}{5}$ की तुलना संख्या रेखा का प्रयोग करते हुए की। उसे ज्ञात था कि दो पूर्णांकों में वह पूर्णांक बड़ा था जो दूसरे पूर्णांक के दाईं ओर स्थित था।

  उदाहरणार्थ, संख्या रेखा पर पूर्णांक 5 पूर्णांक 2 के दाईं ओर स्थित है तथा $5 > 2$ है। संख्या रेखा पर पूर्णांक -2 पूर्णांक -5 के दाईं ओर स्थित है तथा $-2 > -5$ है।

  उसने इस विधि का प्रयोग परिमेय संख्याओं के लिए भी किया। उसे पता था कि संख्या रेखा पर परिमेय संख्याओं को किस प्रकार अंकित (निरूपित) किया जाता है। उसने $-\frac{1}{2}$ और $-\frac{1}{5}$ को नीचे दर्शाए अनुसार अंकित किया:



  क्या उसने दोनों बिंदु सही प्रकार से अंकित किए हैं? उसने कैसे और क्यों $-\frac{1}{2}$ को $-\frac{5}{10}$ तथा $-\frac{1}{5}$ को $-\frac{2}{10}$ में बदला? उसे ज्ञात हुआ कि परिमेय संख्या $-\frac{1}{5}$ परिमेय संख्या $-\frac{1}{2}$ के दाईं ओर स्थित है। इस प्रकार, $-\frac{1}{5} > -\frac{1}{2}$ है या $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{5}$ है।

  क्या आप $-\frac{3}{4}$ और $-\frac{2}{3}$ की तथा $-\frac{1}{3}$ और $-\frac{1}{5}$ की तुलना कर सकते हैं?

  हम भिन्नों के अपने अध्ययन से यह जानते हैं कि $\frac{1}{5} < \frac{1}{2}$ है। साथ ही, मेरी ने $-\frac{1}{2}$ और $-\frac{1}{5}$ के लिए क्या प्राप्त किया? क्या यह इसका ठीक विपरीत नहीं था।

आप देखते हैं कि $\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$ है, परंतु $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{5}$ है।

क्या आप $-\frac{3}{4}$ और $-\frac{2}{3}$ तथा $-\frac{1}{2}$ और $-\frac{1}{5}$ के लिए भी इसी प्रकार का परिणाम देखते हैं?

मेरी को याद आता है कि उसने पूर्णांकों में पढ़ा था कि $4 > 3$ है, परंतु $-4 < -3$ है; $5 > 2$ है, परंतु $-5 < -2$ इत्यादि।

- ऋणात्मक परिमेय संख्याओं के युग्मों की स्थिति भी ठीक इसी प्रकार है। दो *ऋणात्मक परिमेय संख्याओं की तुलना करने के लिए, हम उनकी तुलना उनके चिह्नों को छोड़ते हुए करते हैं और बाद में असमिका (inequality) के चिह्न को उल्टा कर (बदल) देते हैं।*

  उदाहरणार्थ, $-\frac{7}{5}$ और $-\frac{5}{3}$, की तुलना करने के लिए, पहले हम $\frac{7}{5}$ और $\frac{5}{3}$ की तुलना करते हैं।

  हमें $\frac{7}{5} < \frac{5}{3}$ प्राप्त होता है और इससे हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $\frac{-7}{5} > \frac{-5}{3}$ है।

  ऐसे पाँच युग्म और लीजिए और फिर उनकी तुलना कीजिए।

  कौन बड़ा है : $-\frac{3}{8}$ या $-\frac{2}{7}$?; $-\frac{4}{3}$ या $-\frac{3}{2}$?

- एक ऋणात्मक और धनात्मक परिमेय संख्या की तुलना सुस्पष्ट है। संख्या रेखा पर, एक ऋणात्मक परिमेय संख्या शून्य के बाईं ओर स्थित होती है तथा एक धनात्मक परिमेय संख्या शून्य के दाईं ओर स्थित होती है। अतः, एक ऋणात्मक परिमेय संख्या सदैव एक धनात्मक परिमेय संख्या से छोटी होती है।

  इस प्रकार $-\frac{2}{7} < \frac{1}{2}$ है।

- परिमेय संख्याओं $\frac{-3}{-5}$ और $\frac{-2}{-7}$ की तुलना करने के लिए पहले उन्हें मानक रूप में बदलिए और फिर उनकी तुलना कीजिए।

उदाहरण 3 क्या $\frac{4}{-9}$ और $\frac{-16}{36}$ एक ही परिमेय संख्या को निरूपित करते हैं?

हल हाँ, क्योंकि $\frac{4}{-9} = \frac{4 \times (-4)}{-9 \times (-4)} = \frac{-16}{36}$ या $\frac{-16}{36} = \frac{-16 \div -4}{36 \div -4} = \frac{4}{-9}$ है।

8.8 दो परिमेय संख्याओं के बीच में परिमेय संख्याएँ

रेशमा 3 और 10 के बीच में पूर्ण संख्याएँ गिनना चाहती थी। उसको अपनी पिछली कक्षाओं से यह ज्ञात था कि 3 और 10 के बीच में ठीक 6 पूर्ण संख्याएँ होंगी। इसी प्रकार, वह -3 और 3 के बीच पूर्णांकों की संख्या भी ज्ञात करना चाहती थी। -3 और 3 के बीच में पूर्णांक $-2, -1, 0, 1$ और 2 हैं। इस प्रकार, -3 और 3 के बीच ठीक 5 पूर्णांक हैं।

क्या –3 और –2 के बीच कोई पूर्णांक हैं? नहीं, –3 और –2 के बीच कोई पूर्णांक नहीं है। दो क्रमागत पूर्णांकों के बीच पूर्णांकों की संख्या 0 होती है।

इस प्रकार, हम प्राप्त करते हैं कि दो पूर्णांकों के बीच में पूर्णांकों की संख्या सीमित परिमित या (finite) होती है।

क्या यह परिमेय संख्याओं की स्थिति में भी होगा?

रेशमा ने दो परिमेय संख्याएँ $\frac{-3}{5}$ और $\frac{-1}{3}$ लीं।

उसने इन्हें समान हर वाली परिमेय संख्याओं में बदल लिया।

अतः, $\frac{-3}{5}=\frac{-9}{15}$ और $\frac{-1}{3}=\frac{-5}{15}$ है।

हमें प्राप्त है कि $\frac{-9}{15}<\frac{-8}{15}<\frac{-7}{15}<\frac{-6}{15}<\frac{-5}{15}$ है, या $\frac{-3}{5}<\frac{-8}{15}<\frac{-7}{15}<\frac{-6}{15}<\frac{-1}{3}$ है।

इस प्रकार, वह $\frac{-3}{5}$ और $\frac{-1}{3}$ के बीच में परिमेय संख्याएँ $\frac{-8}{15},\frac{-7}{15},\frac{-6}{15}$ ज्ञात कर सकी।

क्या $\frac{-3}{5}$ और $\frac{-1}{3}$ के बीच में केवल परिमेय संख्याएँ $\frac{-8}{15},\frac{-7}{15},\frac{-6}{15}$ ही हैं?

हमें प्राप्त है कि $\frac{-3}{5}=\frac{-18}{30}$ और $\frac{-3}{15}=\frac{-16}{30}$ है।

साथ ही, $\frac{-18}{30}<\frac{-17}{30}<\frac{-16}{30}$ है। अर्थात् $\frac{-3}{5}<\frac{-17}{30}<\frac{-8}{15}$ है।

अतः, $\frac{-3}{5}<\frac{-17}{30}<\frac{-8}{15}<\frac{-7}{15}<\frac{-6}{15}<\frac{-1}{3}$ है।

इस प्रकार, $\frac{-1}{3}$ और $\frac{-3}{5}$ के बीच हम एक और परिमेय संख्या ज्ञात करने में सफल हो गए।

इस विधि का प्रयोग करके, आप दो भिन्न-भिन्न परिमेय संख्याओं के बीच में जितनी चाहें उतनी परिमेय संख्याएँ ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरणार्थ, $\frac{-3}{5}=\frac{-3\times 30}{5\times 30}=\frac{-90}{150}$ और $\frac{-1}{3}=\frac{-1\times 50}{3\times 50}=\frac{-50}{150}$ है।

हमें $\frac{-90}{150}$ और $\frac{-50}{150}$ के बीच में, अर्थात् $\frac{-3}{5}$ और $\frac{-1}{3}$ के बीच में 39 परिमेय संख्याएँ $\frac{-89}{150},\frac{-88}{150},\frac{-87}{150},\ldots,\frac{-51}{150}$ प्राप्त करते हैं।

आप यह ज्ञात करेंगे कि यह सूची कभी समाप्त नहीं होगी।

क्या आप $\frac{-5}{3}$ और $\frac{-8}{7}$ के बीच में पाँच परिमेय संख्याएँ लिख सकते हैं?

हम दो परिमेय संख्याओं के बीच में असीमित (या अपरिमित रूप से अनेक) परिमेय संख्याएँ ज्ञात कर सकते हैं।

प्रयास कीजिए

$\frac{-5}{7}$ और $\frac{-3}{8}$ के बीच में पाँच परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

उदाहरण 4 – 2 और – 1 के बीच में तीन परिमेय संख्याएँ लिखिए।

हल आइए –1 और –2 को हर 5 वाली परिमेय संख्याओं के रूप में लिखें।

हमें प्राप्त है कि $-1 = \frac{-5}{5}$ और $-2 = \frac{-10}{5}$ है।

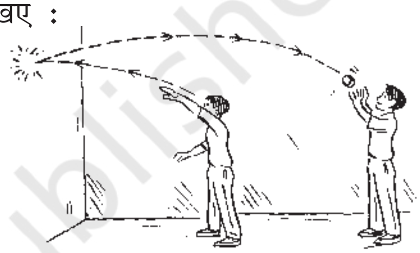
अतः, $\frac{-10}{5} < \frac{-9}{5} < \frac{-8}{5} < \frac{-7}{5} < \frac{-6}{5} < \frac{-5}{5}$ है, या $-2 < \frac{-9}{5} < \frac{-8}{5} < \frac{-7}{5} < \frac{-6}{5} < -1$ है।

–2 और –1 के बीच तीन परिमेय संख्याएँ $\frac{-9}{5}, \frac{-8}{5}, \frac{-7}{5}$ होंगी।

(आप $\frac{-9}{5}, \frac{-8}{5}, \frac{-7}{5}$ और $\frac{-6}{5}$ में से कोई सी भी तीन परिमेय संख्याएँ ले सकते हैं।)

उदाहरण 5 निम्नलिखित प्रतिरूप (Pattern) में, चार और संख्याएँ लिखिए :

$$\frac{-1}{3}, \frac{-2}{6}, \frac{-3}{9}, \frac{-4}{12}, \ldots$$



हल हमें प्राप्त है :

$$\frac{-2}{6} = \frac{-1\times 2}{3\times 2}, \frac{-3}{9} = \frac{-1\times 3}{3\times 3}, \frac{-4}{12} = \frac{-1\times 4}{3\times 4}$$

अथवा $\frac{-1\times 1}{3\times 1} = \frac{-1}{3}, \frac{-1\times 2}{3\times 2} = \frac{-2}{6}, \frac{-1\times 3}{3\times 3} = \frac{-3}{9}, \frac{-1\times 4}{3\times 4} = \frac{-4}{12}$ है।

इस प्रकार, इन संख्याओं में हम एक प्रतिरूप देखते हैं।

अन्य संख्याएँ $\frac{-1\times 5}{3\times 5} = \frac{-5}{15}, \frac{-1\times 6}{3\times 6} = \frac{-6}{18}, \frac{-1\times 7}{3\times 7} = \frac{-7}{21}$ होंगी।

प्रश्नावली 8.1

1. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के बीच में पाँच परिमेय संख्याएँ लिखिए :

(i) –1 और 0 (ii) –2 और –1 (iii) $\frac{-4}{5}$ और $\frac{-2}{3}$ (iv) $-\frac{1}{2}$ और $\frac{2}{3}$

2. निम्नलिखित प्रतिरूपों में से प्रत्येक में चार और परिमेय संख्याएँ लिखिए :

(i) $\frac{-3}{5}, \frac{-6}{10}, \frac{-9}{15}, \frac{-12}{20}, \ldots\ldots$ (ii) $\frac{-1}{4}, \frac{-2}{8}, \frac{-3}{12}, \ldots\ldots$

(iii) $\frac{-1}{6}, \frac{2}{-12}, \frac{3}{-18}, \frac{4}{-24}, \ldots\ldots$ (iv) $\frac{-2}{3}, \frac{2}{-3}, \frac{4}{-6}, \frac{6}{-9}, \ldots\ldots$

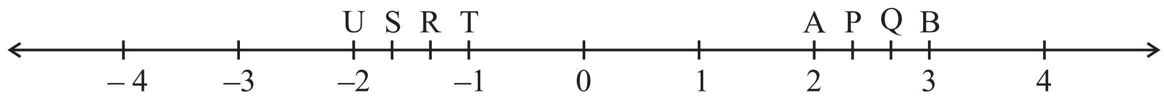
3. निम्नलिखित के समतुल्य चार परिमेय संख्याएँ लिखिए :

(i) $\frac{-2}{7}$ (ii) $\frac{5}{-3}$ (iii) $\frac{4}{9}$

4. एक संख्या रेखा खींचिए और उस पर निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को निरूपित कीजिए :

(i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{-5}{8}$ (iii) $\frac{-7}{4}$ (iv) $\frac{7}{8}$

5. एक संख्या रेखा पर बिंदु P, Q, R, S, T, U, A और B इस प्रकार हैं कि TR = RS = SU तथा AP = PQ = QB है। P, Q, R और S से निरूपित परिमेय संख्याओं को लिखिए।



6. निम्नलिखित में से कौन-से युग्म एक ही परिमेय संख्या को निरूपित करते हैं?

(i) $\frac{-7}{21}$ और $\frac{3}{9}$ (ii) $\frac{-16}{20}$ और $\frac{20}{-25}$ (iii) $\frac{-2}{-3}$ और $\frac{2}{3}$

(iv) $\frac{-3}{5}$ और $\frac{-12}{20}$ (v) $\frac{8}{-5}$ और $\frac{-24}{15}$ (vi) $\frac{1}{3}$ और $\frac{-1}{9}$

(vii) $\frac{-5}{-9}$ और $\frac{5}{-9}$

7. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को उनके सरलतम रूप में लिखिए :

(i) $\frac{-8}{6}$ (ii) $\frac{25}{45}$ (iii) $\frac{-44}{72}$ (iv) $\frac{-8}{10}$

8. संकेतों >, <, और = में से सही संकेत चुन कर रिक्त स्थानों को भरिए :

(i) $\frac{-5}{7} \boxed{} \frac{2}{3}$ (ii) $\frac{-4}{5} \boxed{} \frac{-5}{7}$ (iii) $\frac{-7}{8} \boxed{} \frac{14}{-16}$

(iv) $\frac{-8}{5} \boxed{} \frac{-7}{4}$ (v) $\frac{1}{-3} \boxed{} \frac{-1}{4}$ (vi) $\frac{5}{-11} \boxed{} \frac{-5}{11}$

(vii) $0 \boxed{} \frac{-7}{6}$

9. निम्नलिखित में प्रत्येक में से कौन-सी संख्या बड़ी है?

(i) $\frac{2}{3}, \frac{5}{2}$ (ii) $\frac{-5}{6}, \frac{-4}{3}$ (iii) $\frac{-3}{4}, \frac{2}{-3}$

(iv) $\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}$ (v) $-3\frac{2}{7}, -3\frac{4}{5}$

10. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को आरोही क्रम में लिखिए :

(i) $\frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}$ (ii) $\frac{1}{3}, \frac{-2}{9}, \frac{-4}{3}$ (iii) $\frac{-3}{7}, \frac{-3}{2}, \frac{-3}{4}$

8.9 परिमेय संख्याओं पर संक्रियाएँ

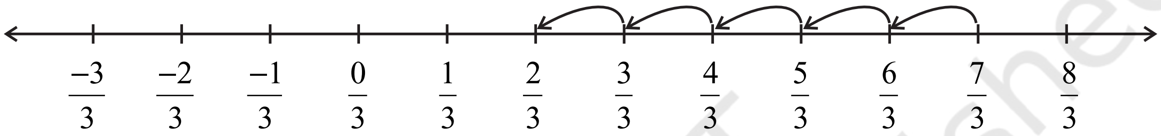
आप जानते हैं कि पूर्णांकों तथा भिन्नों को किस प्रकार जोड़ा, घटाया, गुणा और भाग किया जाता है। आइए इन आधारभूत संक्रियाओं का परिमेय संख्याओं पर अध्ययन करें।

8.9.1 योग

- आइए समान हर वाली दो परिमेय संख्याओं, मान लीजिए $\frac{7}{3}$ और $\frac{-5}{3}$, को जोड़ें।

  हम $\frac{7}{3}+\left(\frac{-5}{3}\right)$ ज्ञात करते हैं।

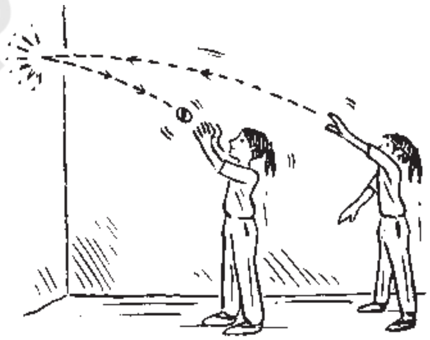
  संख्या रेखा पर, हमें प्राप्त होता है :



दो क्रमागत बिंदुओं के बीच की दूरी $\frac{1}{3}$ है। अतः, $\frac{7}{3}$ में $\frac{-5}{3}$ जोड़ने का अर्थ है कि $\frac{7}{3}$ के बाईं ओर 5 कदम चलें। हम कहाँ पहुँचते हैं? हम $\frac{2}{3}$ पर पहुँचते हैं। अतः, $\frac{7}{3}+\left(\frac{-5}{3}\right)=\frac{2}{3}$ है।

आइए इसको इस प्रकार करने का प्रयत्न करें :

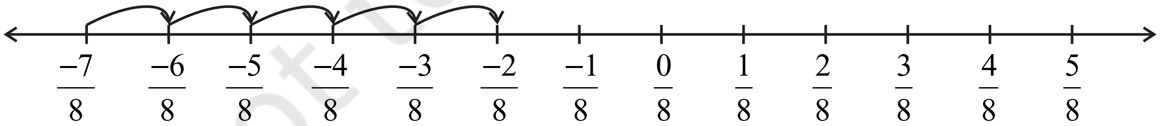
$$\frac{7}{3}+\frac{(-5)}{3}=\frac{7+(-5)}{3}=\frac{2}{3}$$



हमें वही उत्तर प्राप्त होता है।

$\frac{6}{5}+\frac{(-2)}{5}$, $\frac{3}{7}+\frac{(-5)}{7}$ को उपरोक्त दोनों विधियों से ज्ञात कीजिए और जाँच करें कि क्या दोनों उत्तर समान हैं।

इसी प्रकार, $\frac{-7}{8}+\frac{5}{8}$ निम्नलिखित होगा :



हमें क्या प्राप्त होता है?

साथ ही, $\frac{-7}{8}+\frac{5}{8}=\frac{-7+5}{8}=?$ क्या दोंनों मान समान हैं?

प्रयास कीजिए

$\frac{-13}{7}+\frac{6}{7}$ तथा $\frac{19}{5}+\left(\frac{-7}{5}\right)$ ज्ञात कीजिए:

इस प्रकार, हम देखते हैं कि समान हर वाली परिमेय संख्याओं को जोड़ते समय, हम, हर को वही रखते हुए, अंशों को जोड़ देते हैं।

इस प्रकार, $\frac{-11}{5}+\frac{7}{5}=\frac{-11+7}{5}=\frac{-4}{5}$ है।

- हम अलग-अलग हरों वाली दो परिमेय संख्याओं को किस प्रकार जोड़ें? भिन्नों की तरह, हम पहले इन हरों का ल.स. ज्ञात करते हैं। फिर हम ऐसी समतुल्य परिमेय संख्याएँ ज्ञात करते हैं, जिनके हर यह ल.स. हों। इसके बाद हम इन दोनों परिमेय संख्याओं को जोड़ते हैं।

उदाहरणार्थ, आइए $\frac{-7}{5}$ और $\frac{-2}{3}$ को जोड़ें। 5 और 3 का ल.स. 15 है।

अत:, $\frac{-7}{5}=\frac{-21}{15}$ और $\frac{-2}{3}=\frac{-10}{15}$ है।

इस प्रकार $\frac{-7}{5}+\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{-21}{15}+\left(\frac{-10}{15}\right)=\frac{-31}{15}$ हुआ।

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{-3}{7}+\frac{2}{3}$

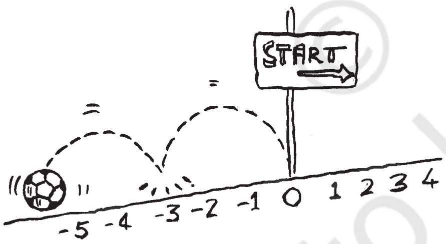
(ii) $\frac{-5}{6}+\frac{-3}{11}$

योज्य प्रतिलोम :

$\frac{-4}{7}+\frac{4}{7}$ किसके बराबर होगा?

$\frac{-4}{7}+\frac{4}{7}=\frac{-4+4}{7}=0$ है। साथ ही, $\frac{4}{7}+\left(\frac{-4}{7}\right)=0$ है

इसी प्रकार, $\frac{-2}{3}+\frac{2}{3}=0=\frac{2}{3}+\left(\frac{-2}{3}\right)$ है।



आपको याद होगा कि पूर्णांकों में, – 2 का **योज्य प्रतिलोम (additive inverse)** 2 है, तथा 2, पूर्णांक – 2 का योज्य प्रतिलोम होता है।

परिमेय संख्याओं के लिए, हम कहते हैं कि $\frac{-4}{7}$ परिमेय संख्या $\frac{4}{7}$ का **योज्य प्रतिलोम** है तथा $\frac{4}{7}$ परिमेय संख्या $\frac{-4}{7}$ का योज्य प्रतिलोम है। इसी प्रकार, $\frac{-2}{3}$ परिमेय संख्या $\frac{2}{3}$ का योज्य प्रतिलोम है तथा $\frac{2}{3}$ परिमेय संख्या $\frac{-2}{3}$ का योज्य प्रतिलोम है।

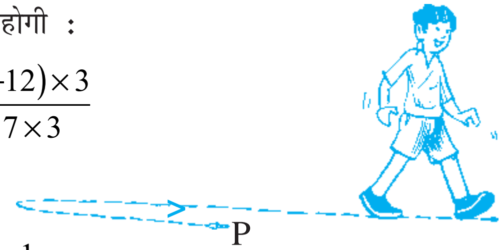
प्रयास कीजिए

$\frac{-3}{9}, \frac{-9}{11}$ और $\frac{5}{7}$ के योज्य प्रतिलोम क्या हैं?

उदाहरण 6 सतपाल किसी स्थान P से पूर्व दिशा में $\frac{2}{3}$ km चलता है और फिर वहाँ से पश्चिम दिशा में $1\frac{5}{7}$ km चलता है। अब वह P से कहाँ स्थित होगा?

हल आइए पूर्व दिशा में चली गई दूरी को धनात्मक चिह्न से व्यक्त करें। इसलिए, पश्चिम दिशा में चली गई दूरी को ऋणात्मक चिह्न से व्यक्त किया जाएगा।

इस प्रकार, बिंदु P से सतपाल की दूरी (km में) होगी :



$$\frac{2}{3}+\left(-1\frac{5}{7}\right)=\frac{2}{3}+\frac{(-12)}{7}=\frac{2\times7}{3\times7}+\frac{(-12)\times3}{7\times3}$$

$$=\frac{14-36}{21}=\frac{-22}{21}=-1\frac{1}{21}$$

क्योंकि यह ऋणात्मक है, इसलिए सतपाल P से पश्चिम की ओर $1\frac{1}{21}$ km की दूरी पर है।

8.9.2 व्यवकलन (घटाना)

सविता ने दो परिमेय संख्याओं $\frac{5}{7}$ और $\frac{3}{8}$ का अंतर इस विधि से प्राप्त किया :

$$\frac{5}{7}-\frac{3}{8}=\frac{40-21}{56}=\frac{19}{56}$$

फरीदा जानती थी कि दो पूर्णांकों a और b के लिए, $a - b = a + (-b)$ लिखा जा सकता है। उसने ऐसा परिमेय संख्याओं के लिए भी किया और ज्ञात किया कि $\frac{5}{7}-\frac{3}{8}=\frac{5}{7}+\frac{(-3)}{8}=\frac{19}{56}$ है। दोनों ने एक ही (समान) अंतर प्राप्त किया।

दोनों विधियों से, $\frac{7}{8}-\frac{5}{9}$, $\frac{3}{11}-\frac{8}{7}$ ज्ञात करने का प्रयत्न कीजिए। क्या आपको समान उत्तर प्राप्त होते हैं?

अत: हम कहते हैं कि *दो परिमेय संख्याओं को घटाते (व्यवकलन करते) समय, घटाए जाने वाली संख्या के योज्य प्रतिलोम को अन्य परिमेय संख्या में जोड़ देना चाहिए।*

इस प्रकार, $1\frac{2}{3}-2\frac{4}{5}=\frac{5}{3}-\frac{14}{5}=\frac{5}{3}+\frac{14}{5}$ का योज्य प्रतिलोम

$$=\frac{5}{3}+\frac{(-14)}{5}=\frac{-17}{15}=-1\frac{2}{15}$$ है।

$\frac{2}{7}-\left(\frac{-5}{6}\right)$ क्या होगा? $\frac{2}{7}-\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{2}{7}+\left(\frac{-5}{6}\right)$ का योज्य प्रतिलोम

$$=\frac{2}{7}+\frac{5}{6}=\frac{47}{42}=1\frac{5}{42}$$

प्रयास कीजिए

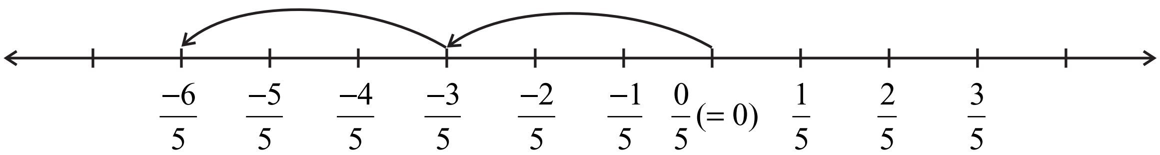
ज्ञात कीजिए

(i) $\frac{7}{9}-\frac{2}{5}$ (ii) $2\frac{1}{5}-\frac{(-1)}{3}$

8.9.3 गुणन

आइए परिमेय संख्या $\frac{-3}{5}$ को 2 से गुणा करें, अर्थात् हम $\frac{-3}{5}\times2$ ज्ञात करें।

संख्या रेखा पर इसका अर्थ होगा $\frac{3}{5}$ कि बाईं ओर दो कदम चलना।



हम कहाँ पहुँचते हैं? हम $\frac{-6}{5}$ पर पहुँचते हैं। आइए हम इसको भिन्नों वाली विधि से ज्ञात करें।

$$\frac{-3}{5}\times 2=\frac{-3\times 2}{5}=\frac{-6}{5}$$

हम उसी परिमेय संख्या पर पहुँच जाते हैं।

दोनों विधियों का प्रयोग करते हुए, $\frac{-4}{7}\times 3$ और $\frac{-6}{5}\times 4$, को ज्ञात कीजिए। आप क्या देखते हैं?

अत:, *हम ज्ञात करते हैं कि एक परिमेय संख्या को एक धनात्मक पूर्णांक से गुणा करने पर, हम अंश को उस पूर्णांक से गुणा कर देते हैं तथा हर को वही रखते हैं।*

आइए अब एक परिमेय संख्या को एक ऋणात्मक पूर्णांक से गुणा करें।

$$\frac{-2}{9}\times(-5)=\frac{-2\times(-5)}{9}=\frac{10}{9}$$

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित गुणनफल क्या होंगे?

(i) $\frac{-3}{5}\times 7$ (ii) $\frac{-6}{5}\times(-2)$

याद रखिए कि –5 को $\frac{-5}{1}$ लिखा जा सकता है।

अत:, $\frac{-2}{9}\times\frac{-5}{1}=\frac{10}{9}=\frac{-2\times(-5)}{9\times 1}$ है।

इसी प्रकार, $\frac{3}{11}\times(-2)=\frac{3\times(-2)}{11\times 1}=\frac{-6}{11}$ है।

उपरोक्त प्रेक्षणों के आधार पर, हम ज्ञात करते हैं कि $\frac{-3}{8}\times\frac{5}{7}=\frac{-3\times 5}{8\times 7}=\frac{-15}{56}$ है।

अत:, जैसा कि हमने भिन्नों की स्थिति में किया था, हम दो परिमेय संख्याओं को निम्नलिखित विधि से गुणा करते हैं :

चरण 1 : दोनों परिमेय संख्याओं के अंशों का गुणा कीजिए।

चरण 2 : दोनों परिमेय संख्याओं के हरों का गुणा कीजिए।

चरण 3 : गुणनफल को $\frac{\text{चरण 1 में प्राप्त परिणाम}}{\text{चरण 2 में प्राप्त परिणाम}}$ के रूप में लिखिए।

इस प्रकार, $\frac{-3}{5}\times\frac{2}{7}=\frac{-3\times 2}{5\times 7}=\frac{-6}{35}$ है।

साथ ही $\frac{-5}{8}\times\left(\frac{-9}{7}\right)=\frac{(-5)\times(-9)}{8\times 7}=\frac{45}{56}$ है।

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{-3}{4}\times\frac{1}{7}$

(ii) $\frac{2}{3}\times\frac{-5}{9}$

8.9.4 विभाजन

भिन्नों के व्युत्क्रमों (reciprocals) के बारे में हम पहले पढ़ चुके हैं। $\frac{2}{7}$ का व्युत्क्रम क्या है? यह $\frac{7}{2}$ है। हम इस अवधारणा को शून्येतर परिमेय संख्याओं के व्युत्क्रमों के लिए भी लागू करते हैं।

इस प्रकार, $\frac{-2}{7}$ का व्युत्क्रम $\frac{7}{-2}$, अर्थात् $\frac{-7}{2}$ होगा तथा $\frac{-3}{5}$ का व्युत्क्रम $\frac{-5}{3}$ होगा।

परिमेय संख्या का उसके व्युत्क्रम से गुणनफल

किसी संख्या का उसके व्युत्क्रम से गुणनफल सदैव 1 होता है।

उदाहरणार्थ $\frac{-4}{9} \times (\frac{-4}{9}$ का व्युत्क्रम$)$

$= \frac{-4}{9} \times \left(\frac{-9}{4}\right) = 1$ है।

इसी प्रकार $\frac{-6}{13}\left(\frac{-13}{6}\right) = 1$ है।

कुछ और उदाहरण लेकर, इस प्रेक्षण की पुष्टि कीजिए।

प्रयास कीजिए

$\frac{-6}{11}, \frac{-8}{5}$ के व्युत्क्रम क्या होंगे?

सविता ने एक परिमेय संख्या $\frac{4}{9}$ को एक अन्य परिमेय संख्या $\frac{-5}{7}$ से इस प्रकार विभाजित किया (भाग दिया) :

$$\frac{4}{9} \div \left(\frac{-5}{7}\right) = \frac{4}{9} \times \frac{7}{-5} = \frac{-28}{45}$$

उसने भिन्नों की तरह ही व्युत्क्रम की अवधारणा का प्रयोग किया।

अर्पित ने पहले $\frac{4}{9}$ को $\frac{5}{7}$ से भाग दिया और $\frac{28}{45}$ प्राप्त किया।

अंत में, उसने कहा कि $\frac{4}{9} \div \left(\frac{-5}{7}\right) = \frac{-28}{45}$ है। उसने ऐसा किस प्रकार प्राप्त किया?

उसने ऋणात्मक चिह्न को छोड़ते हुए, उन्हें भिन्नों की तरह विभाजित किया और बाद में प्राप्त परिणाम के साथ ऋणात्मक चिह्न लगा दिया।

दोनों ने एक ही मान $\frac{-28}{45}$ प्राप्त किया। $\frac{2}{3}$ को $\frac{-5}{7}$ से दोनों विधियों द्वारा भाग देकर देखिए कि क्या आप एक ही (समान) उत्तर प्राप्त करते हैं।

उपरोक्त से यह प्रदर्शित होता है कि *एक परिमेय संख्या को किसी अन्य परिमेय संख्या से भाग देने के लिए, हम उस परिमेय संख्या को अन्य परिमेय संख्या के व्युत्क्रम से गुणा कर देते हैं।*

इस प्रकार, $\frac{6}{-5} \div \frac{-2}{3} = \frac{6}{-5} \times \left(\frac{-2}{3}\right.$ का व्युत्क्रम$\left.\right) = \frac{6}{-5} \times \frac{3}{-2} = \frac{18}{10}$ है।

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए: (i) $\frac{2}{3} \times \left(\frac{-7}{8}\right)$ (ii) $\frac{-6}{7} \times \frac{5}{7}$

प्रश्नावली 8.2

1. योग ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{5}{4}+\left(\frac{-11}{4}\right)$ (ii) $\frac{5}{3}+\frac{3}{5}$ (iii) $\frac{-9}{10}+\frac{22}{15}$

(iv) $\frac{-3}{-11}+\frac{5}{9}$ (v) $\frac{-8}{19}+\frac{(-2)}{57}$ (vi) $\frac{-2}{3}+0$

(vii) $-2\frac{1}{3}+4\frac{3}{5}$

2. ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{7}{24}-\frac{17}{36}$ (ii) $\frac{5}{63}-\left(\frac{-6}{21}\right)$ (iii) $\frac{-6}{13}-\left(\frac{-7}{15}\right)$

(iv) $\frac{-3}{8}-\frac{7}{11}$ (v) $-2\frac{1}{9}-6$

3. गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{9}{2}\times\left(\frac{-7}{4}\right)$ (ii) $\frac{3}{10}\times(-9)$ (iii) $\frac{-6}{5}\times\frac{9}{11}$

(iv) $\frac{3}{7}\times\left(\frac{-2}{5}\right)$ (v) $\frac{3}{11}\times\frac{2}{5}$ (vi) $\frac{3}{-5}\times\frac{-5}{3}$

4. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $(-4)\div\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{-3}{5}\div 2$ (iii) $\frac{-4}{5}\div(-3)$

(iv) $\frac{-1}{8}\div\frac{3}{4}$ (v) $\frac{-2}{13}\div\frac{1}{7}$ (vi) $\frac{-7}{12}\div\left(\frac{-2}{13}\right)$

(vii) $\frac{3}{13}\div\left(\frac{-4}{65}\right)$

हमने क्या चर्चा की ?

1. एक संख्या जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सके, जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ है, परिमेय संख्या कहलाती है। संख्याएँ $\frac{-2}{7}, \frac{3}{8}, 3$ इत्यादि परिमेय संख्याएँ हैं।

2. सभी पूर्णांक और भिन्न परिमेय संख्याएँ हैं।

3. यदि किसी परिमेय संख्या के अंश और हर को एक ही शून्येतर पूर्णांक से गुणा किया जाए या भाग दिया जाए, तो हमें एक परिमेय संख्या प्राप्त होती है जो दी हुई परिमेय संख्या के समतुल्य परिमेय संख्या कही जाती है। उदाहरणार्थ, $\frac{-3}{7} = \frac{-3 \times 2}{7 \times 2} = \frac{-6}{14}$ है।

अत:, हम कहते हैं कि $\frac{-6}{14}$ संख्या $\frac{-3}{7}$ का एक समतुल्य रूप है। साथ ही, ध्यान दीजिए कि $\frac{-6}{14} = \frac{-6 \div 2}{14 \div 2} = \frac{-3}{7}$ है।

4. परिमेय संख्याओं को धनात्मक और ऋणात्मक परिमेय संख्याओं के रूप में वर्गीकृत किया जाता है। जब अंश और हर दोनों ही या तो धनात्मक पूर्णांक हों या ऋणात्मक पूर्णांक हों, तो वह परिमेय संख्या धनात्मक परिमेय संख्या कहलाती है। जब अंश या हर में से एक ऋणात्मक पूर्णांक हो, तो वह परिमेय संख्या एक ऋणात्मक परिमेय संख्या कहलाती है। उदाहरणार्थ, $\frac{3}{8}$ एक धनात्मक परिमेय संख्या है तथा $\frac{-8}{9}$ एक ऋणात्मक परिमेय संख्या है।

5. संख्या 0 न तो एक धनात्मक परिमेय संख्या है और न ही ऋणात्मक परिमेय संख्या है।

6. एक परिमेय संख्या को अपने मानक रूप में तब माना जाता है, जब उसका हर धनात्मक पूर्णांक हो तथा अंश और हर में 1 के अतिरिक्त कोई सार्व गुणनखंड न हो। संख्याएँ $\frac{-1}{3}, \frac{2}{7}$, इत्यादि मानक रूप में हैं।

7. दो परिमेय संख्याओं के बीच असीमित परिमेय संख्याएँ होती हैं।

8. समान हर वाली दो परिमेय संख्याओं का योग ज्ञात करने के लिए, उनके अंशों को जोड़ा जा सकता है तथा हर वही रख कर योग ज्ञात किया जा सकता है। भिन्न-भिन्न हरों वाली दो परिमेय संख्याओं को जोड़ने के लिए, पहले दोनों हरों का ल.स. ज्ञात किया जाता है और फिर दोनों परिमेय संख्याओं को ल.स. के बराबर समान हर वाली दो समतुल्य परिमेय संख्याओं में बदल कर जोड़ लिया जाता है। उदाहरणार्थ, $\frac{-2}{3} + \frac{3}{8} = \frac{-16}{24} + \frac{9}{24} = \frac{-16+9}{24} = \frac{-7}{24}$ है। यहां 3 और 8 का ल. स. 24 है।

9. दो परिमेय संख्याओं का व्यवकलन करने के लिए हम घटाई जाने वाली परिमेय संख्या के योज्य प्रतिलोम को अन्य परिमेय संख्या में जोड़ते हैं।

इस प्रकार, $\frac{7}{8}-\frac{2}{3}=\frac{7}{8}+\frac{2}{3}$ का योज्य प्रतिलोम $=\frac{7}{8}+\frac{(-2)}{3}=\frac{21+(-16)}{24}=\frac{5}{24}$ है।

10. दो परिमेय संख्याओं का गुणा करने के लिए, हम इन संख्याओं के अंशों तथा हरों को अलग-अलग गुणा करते हैं और फिर गुणनफल को $\frac{\text{अंशों का गुणनफल}}{\text{हरों का गुणनफल}}$ के रूप में लिखते हैं।

11. एक परिमेय संख्या को एक अन्य शून्येतर परिमेय संख्या से भाग देने के लिए, हम पहली परिमेय संख्या को अन्य परिमेय संख्या के व्युत्क्रम से गुणा करते हैं। इस प्रकार $\frac{-7}{2}\div\frac{4}{3}=\frac{-7}{2}\times(\frac{4}{3}$ का व्युत्क्रम$)=\frac{-7}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{-21}{8}$ है।

से व्यक्त किया जा सकता है। यदि 150 रु के लाभ को 150 से व्यक्त किया जाए, तो 100 रु की हानि को -100 से व्यक्त किया जा सकता है।

इसी प्रकार की अनेक स्थितियाँ होती हैं, जिनमें भिन्नात्मक संख्याएँ (भिन्न) संबद्ध होती हैं। हम समुद्र तल से ऊपर 750 m की ऊँचाई को $\frac{3}{4}$ km से व्यक्त कर सकते हैं। क्या हम समुद्र तल से नीचे 750 m की गहराई को km में व्यक्त कर सकते हैं? क्या हम समुद्र तल से नीचे $\frac{3}{4}$ km की गहराई को $\frac{-3}{4}$ से व्यक्त कर सकते हैं? हम देख सकते हैं कि $\frac{-3}{4}$ न तो एक पूर्णांक है और न ही एक भिन्न। ऐसी संख्याओं को सम्मिलित करने के लिए, हमें संख्या पद्धति को विस्तृत करने की आवश्यकता है।

8.3 परिमेय संख्याएँ क्या हैं ?

शब्द 'परिमेय' (rational) की उत्पत्ति, पद 'अनुपात' (ratio) से हुई है। आप जानते हैं कि अनुपात 3 : 2 को $\frac{3}{2}$ भी लिखा जा सकता है। यहाँ 3 और 2 प्राकृत संख्याएँ हैं।

इसी प्रकार, दो पूर्णांकों p और q $(q \neq 0)$ के अनुपात $p : q$ को $\frac{p}{q}$ लिखा जा सकता है। यही वह रूप है जिसमें परिमेय संख्याएँ व्यक्त की जाती हैं।

एक परिमेय संख्या को ऐसी संख्या के रूप में परिभाषित किया जाता है, जिसे $\frac{p}{q}$, के रूप में व्यक्त किया जा सके, जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ है।

इस प्रकार, $\frac{4}{5}$ एक परिमेय संख्या है। यहाँ $p = 4$ है और $q = 5$ है।

क्या $\frac{-3}{4}$ भी एक परिमेय संख्या है? हाँ, क्योंकि $p = -3$ और $q = 4$ पूर्णांक हैं।

- आपने $\frac{3}{8}, \frac{4}{8}, 1\frac{2}{3}$, इत्यादि जैसी अनेक भिन्न देखी हैं। सभी भिन्न परिमेय संख्याएँ होती हैं। क्या आप इसका कारण बता सकते हैं? दशमलव संख्याओं 0.5, 2.3, 0.333 इत्यादि के बारे में क्या कहा जा सकता है? इस प्रकार की प्रत्येक संख्या को एक सामान्य भिन्न के रूप में लिखा जा सकता है और इसीलिए ये परिमेय संख्याएँ हैं। उदाहरणार्थ, $0.5 = \frac{5}{10}$, $2.3 = \frac{23}{10}$, $0.333 = \frac{333}{1000}$ इत्यादि।

प्रयास कीजिए

1. क्या संख्या $\frac{2}{-3}$ परिमेय संख्या है? इसके बारे में सोचिए।

2. दस परिमेय संख्याओं की एक सूची बनाइए।

अंश और हर

$\frac{p}{q}$ में, पूर्णांक p अंश है तथा पूर्णांक $q\ (\neq 0)$ हर है।

इस प्रकार, $\frac{-3}{7}$ में, -3 अंश है और 7 हर है।

ऐसी पाँच परिमेय संख्याएँ लिखिए, जिनमें से प्रत्येक का

(a) अंश एक ऋणात्मक पूर्णांक हो और हर एक धनात्मक पूर्णांक हो।

(b) अंश एक धनात्मक पूर्णांक हो और हर एक ऋणात्मक पूर्णांक हो।

(c) अंश और हर दोनों ऋणात्मक पूर्णांक हों।

(d) अंश और हर दोनों धनात्मक पूर्णांक हों।

- क्या पूर्णांक भी परिमेय संख्याएँ हैं?

किसी भी पूर्णांक को एक परिमेय संख्या माना जा सकता है। उदाहरणार्थ, पूर्णांक -5 एक परिमेय संख्या है, क्योंकि आप इसे $\frac{-5}{1}$ के रूप में लिख सकते हैं। पूर्णांक 0 को भी $0=\frac{0}{2}$ या $\frac{0}{7}$ इत्यादि के रूप में लिखा जा सकता है। अतः यह भी एक परिमेय संख्या है।

इस प्रकार, परिमेय संख्याओं में पूर्णांक और भिन्न सम्मिलित होते हैं।

समतुल्य परिमेय संख्याएँ

एक परिमेय संख्या को अलग-अलग अंशों और हरों का प्रयोग करते हुए लिखा जा सकता है।

उदाहरणार्थ, परिमेय संख्या $\frac{-2}{3}$ पर विचार कीजिए।

$\frac{-2}{3}=\frac{-2\times 2}{3\times 2}=\frac{-4}{6}$। हम देखते हैं कि $\frac{-2}{3}$ वही है जो $\frac{-4}{6}$ है।

साथ ही, $\frac{-2}{3}=\frac{(-2)\times(-5)}{3\times(-5)}=\frac{10}{-15}$ है। अतः, $\frac{-2}{3}$ वही है जो $\frac{10}{-15}$ है।

इस प्रकार, $\frac{-2}{3}=\frac{10}{-15}=\frac{10}{-15}$ है। ऐसी परिमेय संख्याएँ जो परस्पर बराबर हों एक दूसरे के **समतुल्य (equivalent)** या **तुल्य** कही जाती हैं।

पुनः, $\frac{10}{-15} = \frac{-10}{15}$ (कैसे?)

एक परिमेय संख्या के अंश और हर को एक ही शून्येतर (non-zero) पूर्णांक से गुणा करने पर, हमें दी हुई परिमेय संख्या के समतुल्य (या तुल्य) एक अन्य परिमेय संख्या प्राप्त होती है। यह ठीक समतुल्य भिन्न प्राप्त करने जैसा ही है।

गुणा की तरह, एक ही शून्येतर पूर्णांक से अंश और हर को भाग देने पर भी समतुल्य परिमेय संख्याएँ प्राप्त होती हैं। उदाहरणार्थ,

$$\frac{10}{-15} = \frac{10 \div (-5)}{-15 \div (-5)} = \frac{-2}{3} \quad , \quad \frac{-12}{24} = \frac{-12 \div 12}{24 \div 12} = \frac{-1}{2}$$

हम $\frac{-2}{3}$ को $-\frac{2}{3}$, $\frac{-10}{15}$ को $-\frac{10}{15}$ इत्यादि, लिखते हैं।

प्रयास कीजिए

रिक्त स्थानों को भरिए :

(i) $\frac{5}{4} = \frac{\square}{16} = \frac{25}{\square} = \frac{-15}{\square}$

(ii) $\frac{-3}{7} = \frac{\square}{14} = \frac{9}{\square} = \frac{-6}{\square}$

8.4 धनात्मक और ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ

परिमेय संख्या $\frac{2}{3}$ पर विचार कीजिए। इस संख्या के अंश और हर दोनों ही धनात्मक पूर्णांक हैं। ऐसी परिमेय संख्या को एक **धनात्मक परिमेय संख्या** कहते हैं। अतः, $\frac{3}{8}, \frac{5}{7}, \frac{2}{9}$ इत्यादि धनात्मक परिमेय संख्याएँ हैं।

प्रयास कीजिए

1. क्या 5 एक धनात्मक परिमेय संख्या है?
2. पाँच और धनात्मक परिमेय संख्याएँ लिखिए।

$\frac{-3}{5}$ का अंश एक ऋणात्मक पूर्णांक है, जबकि इसका हर एक धनात्मक पूर्णांक है। ऐसी परिमेय संख्या को **ऋणात्मक परिमेय संख्या** कहते हैं। अत: $\frac{-5}{7}, \frac{-3}{8}, \frac{-9}{5}$ इत्यादि ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ हैं।

प्रयास कीजिए

1. क्या −8 एक ऋणात्मक परिमेय संख्या है।
2. पाँच और ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ लिखिए।

- क्या $\frac{8}{-3}$ एक ऋणात्मक संख्या है? हम जानते हैं कि $\frac{8}{-3} = \frac{8 \times (-1)}{-3 \times (-1)} = \frac{-8}{3}$ है, तथा $\frac{-8}{3}$ एक ऋणात्मक परिमेय संख्या है। अतः, $\frac{8}{-3}$ एक ऋणात्मक परिमेय संख्या है।

  इसी प्रकार, $\frac{5}{-7}, \frac{6}{-5}, \frac{2}{-9}$ इत्यादि सभी ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ हैं। ध्यान दीजिए कि इनके अंश धनात्मक हैं तथा हर ऋणात्मक हैं।

- संख्या 0 न तो एक धनात्मक परिमेय संख्या है और न ही एक ऋणात्मक परिमेय संख्या।
- $\frac{-3}{-5}$ के बारे में क्या कहा जा सकता है?

आप देखेंगे कि $\frac{-3}{-5}=\frac{-3\times(-1)}{-5\times(-1)}=\frac{3}{5}$ है। अतः, $\frac{-3}{-5}$ एक धनात्मक परिमेय संख्या है। इस प्रकार, $\frac{-2}{-5}, \frac{-5}{-3}$, इत्यादि धनात्मक परिमेय संख्याएँ हैं।

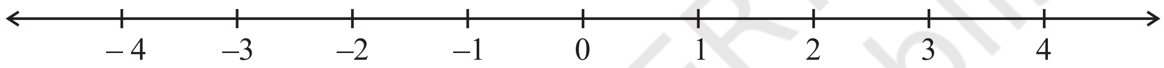
प्रयास कीजिए

निम्नलिखित में से कौन-सी संख्याएँ ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ हैं?

(i) $\frac{-2}{3}$ (ii) $\frac{5}{7}$ (iii) $\frac{3}{-5}$ (iv) 0 (v) $\frac{6}{11}$ (vi) $\frac{-2}{-9}$

8.5 एक संख्या रेखा पर परिमेय संख्याएँ

आप यह जानते हैं कि एक संख्या रेखा पर पूर्णांकों को किस प्रकार निरूपित किया जाता है। आइए ऐसी ही एक संख्या रेखा खींचें।



0 के दाईं ओर के बिंदुओं को + चिह्न से व्यक्त करते हैं और ये धनात्मक पूर्णांक दर्शाते हैं। 0 से बाईं ओर के बिंदुओं को – चिह्न से व्यक्त करते हैं और ये ऋणात्मक पूर्णांक दर्शाते हैं। संख्या रेखा पर भिन्नों के निरूपण से भी आप परिचित हैं।

आइए अब देखें कि परिमेय संख्याएँ संख्या रेखा पर किस प्रकार निरूपित की जा सकती हैं?

आइए संख्या रेखा पर संख्या $-\frac{1}{2}$ को निरूपित करें।

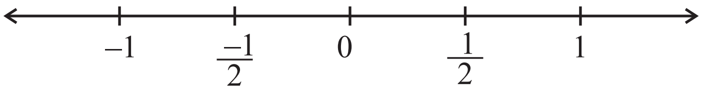
जैसा कि धनात्मक पूर्णांकों की स्थिति में किया गया था, धनात्मक परिमेय संख्याओं को 0 के दाईं ओर अंकित किया जाएगा तथा ऋणात्मक परिमेय संख्याओं को 0 के बाईं ओर अंकित किया जाएगा।

0 के किस ओर आप $-\frac{1}{2}$ को अंकित करेंगे? ऋणात्मक परिमेय संख्या होने के कारण इसे 0 के बाईं ओर अंकित किया जाएगा।

आप जानते हैं कि संख्या रेखा पर पूर्णांकों को अंकित करते समय, उत्तरोत्तर पूर्णांकों को समान अंतरालों पर अंकित किया जाता है। साथ ही, संख्याओं 1 और –1 का युग्म संख्या 0 से समदूरस्थ हैं। इसी प्रकार, 2 और –2 तथा 3 और –3 भी समदूरस्थ हैं।

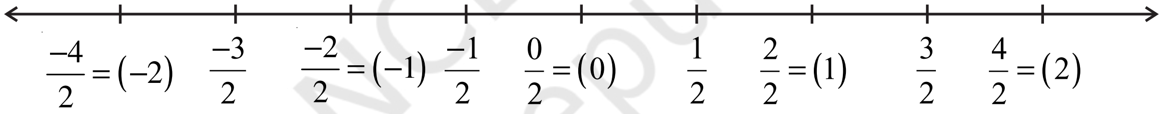
इसी प्रकार, परिमेय संख्याएँ $\frac{1}{2}$ और $-\frac{1}{2}$ भी 0 से समदूरस्थ होंगी। हम जानते हैं कि परिमेय संख्या $\frac{1}{2}$ को किस प्रकार संख्या रेखा पर अंकित किया जाता है। यह उस बिंदु पर अंकित किया

जाता है, जो 0 और 1 से बराबर दूरी (ठीक बीच में) पर है। अर्थात् 0 और 1 की आधी दूरी पर है। इसलिए, $-\frac{1}{2}$ को 0 और –1 की आधी दूरी पर अंकित किया जाएगा।



हम जानते हैं कि $\frac{3}{2}$ को संख्या रेखा पर किस प्रकार अंकित किया जाता है। इसे 0 के दाईं ओर 1 और 2 के बीच में आधी दूरी पर अंकित किया जाता है। आइए अब संख्या रेखा पर $\frac{-3}{2}$ को अंकित करें। यह 0 के बाईं ओर उतनी ही दूरी पर अंकित होगा जितनी दूरी 0 और $\frac{3}{2}$ के बीच है।

घटते हुए क्रम में $\frac{-1}{2}, \frac{-2}{2} (=-1), \frac{-3}{2}, \frac{-4}{2} (=-2)$, इत्यादि प्राप्त हैं। इससे यह प्रदर्शित होता है कि $\frac{-3}{2}$ संख्याओं – 1 और – 2 के बीच में आधी दूरी पर स्थित (या अंकित) होगा।



इसी प्रकार, $\frac{-5}{2}$ और $\frac{-7}{2}$ को संख्या रेखा पर अंकित कीजिए।

इसी प्रकार, $-\frac{1}{3}$ संख्या रेखा पर 0 के बाईं ओर शून्य से उतनी ही दूरी पर होगी जितनी कि $\frac{1}{3}$ शून्य से दाईं ओर है।

अत: जैसा कि ऊपर किया गया है, $-\frac{1}{3}$ को संख्या रेखा पर निरूपित किया जा सकता है। एक बार, हमें $-\frac{1}{3}$ को संख्या रेखा पर निरूपित करना आ जाए तो, हम $-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, \ldots$ इत्यादि को संख्या रेखा पर निरूपित कर सकते हैं। विभिन्न हरों वाली अन्य परिमेय संख्याओं को भी इसी प्रकार संख्या रेखा पर निरूपित किया जा सकता है।

8.6 मानक रूप में परिमेय संख्याएँ

निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को देखिए :

$$\frac{3}{5}, \frac{-5}{8}, \frac{2}{7}, \frac{-7}{11}$$

इन सभी परिमेय संख्याओं के हर धनात्मक पूर्णांक हैं तथा अंश और हरों के बीच में केवल 1 सार्व गुणनखंड (common factor) है। साथ ही, ऋणात्मक चिह्न (–) केवल अंश में ही स्थित है।

ऐसी परिमेय संख्याओं को **मानक रूप (standard form)** में व्यक्त की गई परिमेय संख्याएँ कहा जाता है।

एक परिमेय संख्या मानक रूप में व्यक्त की हुई कही जाती है, यदि उसका हर धनात्मक पूर्णांक हो तथा उसके अंश और हर में 1 के अतिरिक्त कोई सार्व गुणनखंड न हो।

यदि कोई परिमेय संख्या मानक रूप में नहीं है, तो उसे उसके मानक रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

स्मरण कीजिए कि भिन्नों को उनके न्यूनतम रूपों में व्यक्त करने के लिए, हमने उनके अंशों और हरों को एक ही शून्येतर पूर्णांक से भाग दिया था। हम इसी विधि का प्रयोग परिमेय संख्याओं को उनके मानक रूपों में व्यक्त करने में करेंगे।

उदाहरण 1 $\frac{-45}{30}$ को मानक रूप में व्यक्त कीजिए।

हल हमें प्राप्त है : $\frac{-45}{30}=\frac{-45\div 3}{30\div 3}=\frac{-15}{10}=\frac{-15\div 5}{10\div 5}=\frac{-3}{2}$

हमें दो बार भाग देना पड़ा। पहली बार 3 से और फिर 5 से। इसे निम्नलिखित प्रकार से भी किया जा सकता था :

$$\frac{-45}{30}=\frac{-45\div 15}{30\div 15}=\frac{-3}{2}$$

इस उदाहरण में देखिए कि 15, संख्याओं 45 और 30 का म.स. है।

इस प्रकार, एक परिमेय संख्या को मानक रूप में व्यक्त करने के लिए, हम उसके अंश और हर को उनके ***म.स.*** *से, ऋण चिह्न पर बिना कोई ध्यान दिए (यदि कोई हो), भाग देते हैं।* (ऋण चिह्न पर ध्यान ना देने का कारण हम अगली कक्षाओं में पढ़ेंगे)

यदि हर में ऋणात्मक चिह्न है, तो **'–म.स.'** से भाग दीजिए।

उदाहरण 2 मानक रूप में बदलिए :

(i) $\frac{36}{-24}$ (ii) $\frac{-3}{-15}$

हल

(i) 36 और 24 का म.स. 12 है।

अत:, मानक रूप अंश और हर को –12 से भाग देने पर प्राप्त होगा।

इस प्रकार, $\frac{36}{-24}=\frac{36\div(-12)}{-24\div(-12)}=\frac{-3}{2}$

(ii) 3 और 15 का म.स. 3 है।

इस प्रकार, $\frac{-3}{-15}=\frac{-3\div(-3)}{-15\div(-3)}=\frac{1}{5}$

प्रयास कीजिए

मानक रूप ज्ञात कीजिए (i) $\frac{-18}{45}$ (ii) $\frac{-12}{18}$

8.7 परिमेय संख्याओं की तुलना

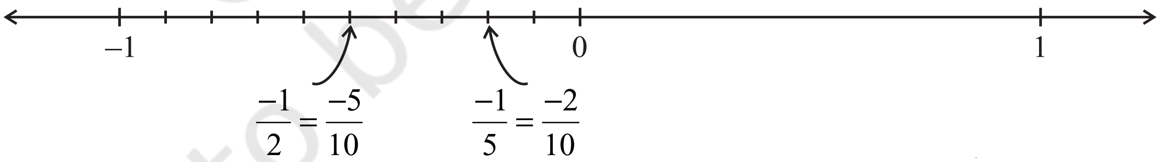
हम यह जानते हैं कि दो पूर्णांकों या दो भिन्नों की तुलना किस प्रकार की जाती है तथा यह भी कि इनमें कौन बड़ा है और कौन छोटा। आइए अब देखें कि दो परिमेय संख्याओं की तुलना किस प्रकार की जा सकती है।

- $\frac{2}{3}$ और $\frac{5}{7}$ जैसी दो धनात्मक परिमेय संख्याओं की तुलना ठीक उसी प्रकार की जा सकती है, जैसा कि हम भिन्नों की स्थिति के लिए पहले पढ़ चुके हैं।

- मेरी ने दो ऋणात्मक परिमेय संख्याओं $-\frac{1}{2}$ और $-\frac{1}{5}$ की तुलना संख्या रेखा का प्रयोग करते हुए की। उसे ज्ञात था कि दो पूर्णांकों में वह पूर्णांक बड़ा था जो दूसरे पूर्णांक के दाईं ओर स्थित था।

  उदाहरणार्थ, संख्या रेखा पर पूर्णांक 5 पूर्णांक 2 के दाईं ओर स्थित है तथा $5 > 2$ है। संख्या रेखा पर पूर्णांक -2 पूर्णांक -5 के दाईं ओर स्थित है तथा $-2 > -5$ है।

  उसने इस विधि का प्रयोग परिमेय संख्याओं के लिए भी किया। उसे पता था कि संख्या रेखा पर परिमेय संख्याओं को किस प्रकार अंकित (निरूपित) किया जाता है। उसने $-\frac{1}{2}$ और $-\frac{1}{5}$ को नीचे दर्शाए अनुसार अंकित किया:



क्या उसने दोनों बिंदु सही प्रकार से अंकित किए हैं? उसने कैसे और क्यों $-\frac{1}{2}$ को $-\frac{5}{10}$ तथा $-\frac{1}{5}$ को $-\frac{2}{10}$ में बदला? उसे ज्ञात हुआ कि परिमेय संख्या $-\frac{1}{5}$ परिमेय संख्या $-\frac{1}{2}$ के दाईं ओर स्थित है। इस प्रकार, $-\frac{1}{5} > -\frac{1}{2}$ है या $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{5}$ है।

क्या आप $-\frac{3}{4}$ और $-\frac{2}{3}$ की तथा $-\frac{1}{3}$ और $-\frac{1}{5}$ की तुलना कर सकते हैं?

हम भिन्नों के अपने अध्ययन से यह जानते हैं कि $\frac{1}{5} < \frac{1}{2}$ है। साथ ही, मेरी ने $-\frac{1}{2}$ और $-\frac{1}{5}$ के लिए क्या प्राप्त किया? क्या यह इसका ठीक विपरीत नहीं था।

आप देखते हैं कि $\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$ है, परंतु $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{5}$ है।

क्या आप $-\frac{3}{4}$ और $-\frac{2}{3}$ तथा $-\frac{1}{2}$ और $-\frac{1}{5}$ के लिए भी इसी प्रकार का परिणाम देखते हैं?

मेरी को याद आता है कि उसने पूर्णांकों में पढ़ा था कि $4 > 3$ है, परंतु $-4 < -3$ है; $5 > 2$ है, परंतु $-5 < -2$ इत्यादि।

- ऋणात्मक परिमेय संख्याओं के युग्मों की स्थिति भी ठीक इसी प्रकार है। दो *ऋणात्मक परिमेय संख्याओं की तुलना करने के लिए, हम उनकी तुलना उनके चिह्नों को छोड़ते हुए करते हैं और बाद में असमिका (inequality) के चिह्न को उल्टा कर (बदल) देते हैं।*

  उदाहरणार्थ, $-\frac{7}{5}$ और $-\frac{5}{3}$, की तुलना करने के लिए, पहले हम $\frac{7}{5}$ और $\frac{5}{3}$ की तुलना करते हैं।

  हमें $\frac{7}{5} < \frac{5}{3}$ प्राप्त होता है और इससे हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $\frac{-7}{5} > \frac{-5}{3}$ है।

  ऐसे पाँच युग्म और लीजिए और फिर उनकी तुलना कीजिए।

  कौन बड़ा है : $-\frac{3}{8}$ या $-\frac{2}{7}$?; $-\frac{4}{3}$ या $-\frac{3}{2}$?

- एक ऋणात्मक और धनात्मक परिमेय संख्या की तुलना सुस्पष्ट है। संख्या रेखा पर, एक ऋणात्मक परिमेय संख्या शून्य के बाईं ओर स्थित होती है तथा एक धनात्मक परिमेय संख्या शून्य के दाईं ओर स्थित होती है। अतः, एक ऋणात्मक परिमेय संख्या सदैव एक धनात्मक परिमेय संख्या से छोटी होती है।

  इस प्रकार $-\frac{2}{7} < \frac{1}{2}$ है।

- परिमेय संख्याओं $\frac{-3}{-5}$ और $\frac{-2}{-7}$ की तुलना करने के लिए पहले उन्हें मानक रूप में बदलिए और फिर उनकी तुलना कीजिए।

उदाहरण 3 क्या $\frac{4}{-9}$ और $\frac{-16}{36}$ एक ही परिमेय संख्या को निरूपित करते हैं?

हल हाँ, क्योंकि $\frac{4}{-9} = \frac{4 \times (-4)}{-9 \times (-4)} = \frac{-16}{36}$ या $\frac{-16}{36} = \frac{-16 \div -4}{36 \div -4} = \frac{4}{-9}$ है।

8.8 दो परिमेय संख्याओं के बीच में परिमेय संख्याएँ

रेशमा 3 और 10 के बीच में पूर्ण संख्याएँ गिनना चाहती थी। उसको अपनी पिछली कक्षाओं से यह ज्ञात था कि 3 और 10 के बीच में ठीक 6 पूर्ण संख्याएँ होंगी। इसी प्रकार, वह -3 और 3 के बीच पूर्णांकों की संख्या भी ज्ञात करना चाहती थी। -3 और 3 के बीच में पूर्णांक $-2, -1, 0, 1$ और 2 हैं। इस प्रकार, -3 और 3 के बीच ठीक 5 पूर्णांक हैं।

क्या -3 और -2 के बीच कोई पूर्णांक हैं? नहीं, -3 और -2 के बीच कोई पूर्णांक नहीं है। दो क्रमागत पूर्णांकों के बीच पूर्णांकों की संख्या 0 होती है।

इस प्रकार, हम प्राप्त करते हैं कि दो पूर्णांकों के बीच में पूर्णांकों की संख्या सीमित परिमित या (finite) होती है।

क्या यह परिमेय संख्याओं की स्थिति में भी होगा?

रेशमा ने दो परिमेय संख्याएँ $\frac{-3}{5}$ और $\frac{-1}{3}$ लीं।

उसने इन्हें समान हर वाली परिमेय संख्याओं में बदल लिया।

अतः, $\frac{-3}{5} = \frac{-9}{15}$ और $\frac{-1}{3} = \frac{-5}{15}$ है।

हमें प्राप्त है कि $\frac{-9}{15} < \frac{-8}{15} < \frac{-7}{15} < \frac{-6}{15} < \frac{-5}{15}$ है, या $\frac{-3}{5} < \frac{-8}{15} < \frac{-7}{15} < \frac{-6}{15} < \frac{-1}{3}$ है।

इस प्रकार, वह $\frac{-3}{5}$ और $\frac{-1}{3}$ के बीच में परिमेय संख्याएँ $\frac{-8}{15}, \frac{-7}{15}, \frac{-6}{15}$ ज्ञात कर सकी।

क्या $\frac{-3}{5}$ और $\frac{-1}{3}$ के बीच में केवल परिमेय संख्याएँ $\frac{-8}{15}, \frac{-7}{15}, \frac{-6}{15}$ ही हैं?

हमें प्राप्त है कि $\frac{-3}{5} = \frac{-18}{30}$ और $\frac{-3}{15} = \frac{-16}{30}$ है।

साथ ही, $\frac{-18}{30} < \frac{-17}{30} < \frac{-16}{30}$ है। अर्थात् $\frac{-3}{5} < \frac{-17}{30} < \frac{-8}{15}$ है।

अतः, $\frac{-3}{5} < \frac{-17}{30} < \frac{-8}{15} < \frac{-7}{15} < \frac{-6}{15} < \frac{-1}{3}$ है।

इस प्रकार, $\frac{-1}{3}$ और $\frac{-3}{5}$ के बीच हम एक और परिमेय संख्या ज्ञात करने में सफल हो गए।

इस विधि का प्रयोग करके, आप दो भिन्न-भिन्न परिमेय संख्याओं के बीच में जितनी चाहें उतनी परिमेय संख्याएँ ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरणार्थ, $\frac{-3}{5} = \frac{-3 \times 30}{5 \times 30} = \frac{-90}{150}$ और $\frac{-1}{3} = \frac{-1 \times 50}{3 \times 50} = \frac{-50}{150}$ है।

हमें $\frac{-90}{150}$ और $\frac{-50}{150}$ के बीच में, अर्थात् $\frac{-3}{5}$ और $\frac{-1}{3}$ के बीच में 39 परिमेय संख्याएँ $\frac{-89}{150}, \frac{-88}{150}, \frac{-87}{150}, \ldots, \frac{-51}{150}$ प्राप्त करते हैं।

आप यह ज्ञात करेंगे कि यह सूची कभी समाप्त नहीं होगी।

क्या आप $\frac{-5}{3}$ और $\frac{-8}{7}$ के बीच में पाँच परिमेय संख्याएँ लिख सकते हैं?

हम दो परिमेय संख्याओं के बीच में असीमित (या अपरिमित रूप से अनेक) परिमेय संख्याएँ ज्ञात कर सकते हैं।

प्रयास कीजिए

$\frac{-5}{7}$ और $\frac{-3}{8}$ के बीच में पाँच परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

उदाहरण 4 – 2 और – 1 के बीच में तीन परिमेय संख्याएँ लिखिए।

हल आइए –1 और –2 को हर 5 वाली परिमेय संख्याओं के रूप में लिखें।

हमें प्राप्त है कि $-1 = \frac{-5}{5}$ और $-2 = \frac{-10}{5}$ है।

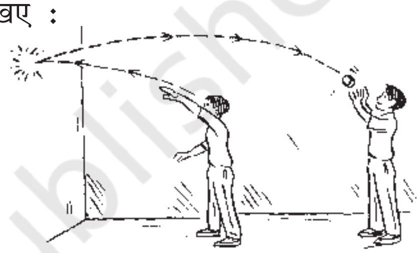
अत:, $\frac{-10}{5} < \frac{-9}{5} < \frac{-8}{5} < \frac{-7}{5} < \frac{-6}{5} < \frac{-5}{5}$ है, या $-2 < \frac{-9}{5} < \frac{-8}{5} < \frac{-7}{5} < \frac{-6}{5} < -1$ है।

–2 और –1 के बीच तीन परिमेय संख्याएँ $\frac{-9}{5}, \frac{-8}{5}, \frac{-7}{5}$ होंगी।

(आप $\frac{-9}{5}, \frac{-8}{5}, \frac{-7}{5}$ और $\frac{-6}{5}$ में से कोई सी भी तीन परिमेय संख्याएँ ले सकते हैं।)

उदाहरण 5 निम्नलिखित प्रतिरूप (Pattern) में, चार और संख्याएँ लिखिए :

$$\frac{-1}{3}, \frac{-2}{6}, \frac{-3}{9}, \frac{-4}{12}, \ldots$$



हल हमें प्राप्त है :

$$\frac{-2}{6} = \frac{-1\times 2}{3\times 2}, \frac{-3}{9} = \frac{-1\times 3}{3\times 3}, \frac{-4}{12} = \frac{-1\times 4}{3\times 4}$$

अथवा $\frac{-1\times 1}{3\times 1} = \frac{-1}{3}, \frac{-1\times 2}{3\times 2} = \frac{-2}{6}, \frac{-1\times 3}{3\times 3} = \frac{-3}{9}, \frac{-1\times 4}{3\times 4} = \frac{-4}{12}$ है।

इस प्रकार, इन संख्याओं में हम एक प्रतिरूप देखते हैं।

अन्य संख्याएँ $\frac{-1\times 5}{3\times 5} = \frac{-5}{15}, \frac{-1\times 6}{3\times 6} = \frac{-6}{18}, \frac{-1\times 7}{3\times 7} = \frac{-7}{21}$ होंगी।

प्रश्नावली 8.1

1. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के बीच में पाँच परिमेय संख्याएँ लिखिए :

   (i) –1 और 0 (ii) –2 और –1 (iii) $\frac{-4}{5}$ और $\frac{-2}{3}$ (iv) $-\frac{1}{2}$ और $\frac{2}{3}$

2. निम्नलिखित प्रतिरूपों में से प्रत्येक में चार और परिमेय संख्याएँ लिखिए :

   (i) $\frac{-3}{5}, \frac{-6}{10}, \frac{-9}{15}, \frac{-12}{20}, \ldots\ldots$ (ii) $\frac{-1}{4}, \frac{-2}{8}, \frac{-3}{12}, \ldots\ldots$

   (iii) $\frac{-1}{6}, \frac{2}{-12}, \frac{3}{-18}, \frac{4}{-24}, \ldots\ldots$ (iv) $\frac{-2}{3}, \frac{2}{-3}, \frac{4}{-6}, \frac{6}{-9}, \ldots\ldots$

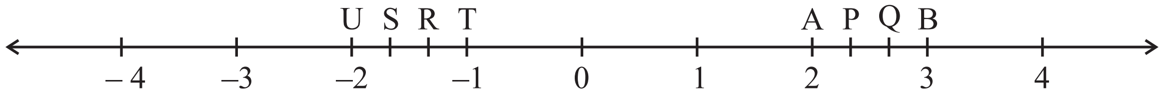
3. निम्नलिखित के समतुल्य चार परिमेय संख्याएँ लिखिए :

   (i) $\frac{-2}{7}$ (ii) $\frac{5}{-3}$ (iii) $\frac{4}{9}$

4. एक संख्या रेखा खींचिए और उस पर निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को निरूपित कीजिए :

(i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{-5}{8}$ (iii) $\frac{-7}{4}$ (iv) $\frac{7}{8}$

5. एक संख्या रेखा पर बिंदु P, Q, R, S, T, U, A और B इस प्रकार हैं कि TR = RS = SU तथा AP = PQ = QB है। P, Q, R और S से निरूपित परिमेय संख्याओं को लिखिए।



6. निम्नलिखित में से कौन-से युग्म एक ही परिमेय संख्या को निरूपित करते हैं?

(i) $\frac{-7}{21}$ और $\frac{3}{9}$ (ii) $\frac{-16}{20}$ और $\frac{20}{-25}$ (iii) $\frac{-2}{-3}$ और $\frac{2}{3}$

(iv) $\frac{-3}{5}$ और $\frac{-12}{20}$ (v) $\frac{8}{-5}$ और $\frac{-24}{15}$ (vi) $\frac{1}{3}$ और $\frac{-1}{9}$

(vii) $\frac{-5}{-9}$ और $\frac{5}{-9}$

7. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को उनके सरलतम रूप में लिखिए :

(i) $\frac{-8}{6}$ (ii) $\frac{25}{45}$ (iii) $\frac{-44}{72}$ (iv) $\frac{-8}{10}$

8. संकेतों >, <, और = में से सही संकेत चुन कर रिक्त स्थानों को भरिए :

(i) $\frac{-5}{7} \boxed{} \frac{2}{3}$ (ii) $\frac{-4}{5} \boxed{} \frac{-5}{7}$ (iii) $\frac{-7}{8} \boxed{} \frac{14}{-16}$

(iv) $\frac{-8}{5} \boxed{} \frac{-7}{4}$ (v) $\frac{1}{-3} \boxed{} \frac{-1}{4}$ (vi) $\frac{5}{-11} \boxed{} \frac{-5}{11}$

(vii) $0 \boxed{} \frac{-7}{6}$

9. निम्नलिखित में प्रत्येक में से कौन-सी संख्या बड़ी है?

(i) $\frac{2}{3}, \frac{5}{2}$ (ii) $\frac{-5}{6}, \frac{-4}{3}$ (iii) $\frac{-3}{4}, \frac{2}{-3}$

(iv) $\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}$ (v) $-3\frac{2}{7}, -3\frac{4}{5}$

10. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को आरोही क्रम में लिखिए :

(i) $\frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}$ (ii) $\frac{1}{3}, \frac{-2}{9}, \frac{-4}{3}$ (iii) $\frac{-3}{7}, \frac{-3}{2}, \frac{-3}{4}$

8.9 परिमेय संख्याओं पर संक्रियाएँ

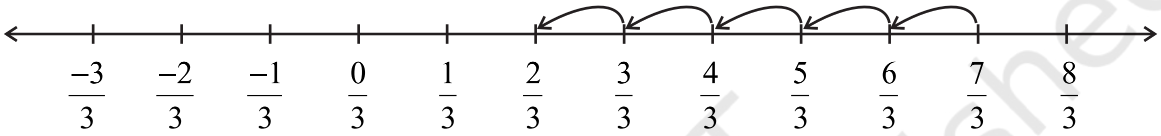
आप जानते हैं कि पूर्णांकों तथा भिन्नों को किस प्रकार जोड़ा, घटाया, गुणा और भाग किया जाता है। आइए इन आधारभूत संक्रियाओं का परिमेय संख्याओं पर अध्ययन करें।

8.9.1 योग

- आइए समान हर वाली दो परिमेय संख्याओं, मान लीजिए $\frac{7}{3}$ और $\frac{-5}{3}$, को जोड़ें।

  हम $\frac{7}{3}+\left(\frac{-5}{3}\right)$ ज्ञात करते हैं।

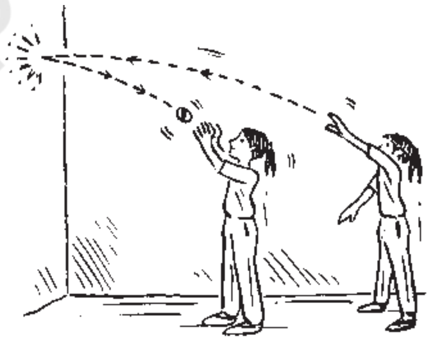
  संख्या रेखा पर, हमें प्राप्त होता है :



दो क्रमागत बिंदुओं के बीच की दूरी $\frac{1}{3}$ है। अतः, $\frac{7}{3}$ में $\frac{-5}{3}$ जोड़ने का अर्थ है कि $\frac{7}{3}$ के बाईं ओर 5 कदम चलें। हम कहाँ पहुँचते हैं? हम $\frac{2}{3}$ पर पहुँचते हैं। अतः, $\frac{7}{3}+\left(\frac{-5}{3}\right)=\frac{2}{3}$ है।

आइए इसको इस प्रकार करने का प्रयत्न करें :

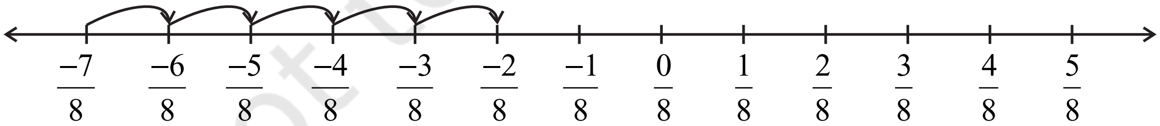
$$\frac{7}{3}+\frac{(-5)}{3}=\frac{7+(-5)}{3}=\frac{2}{3}$$



हमें वही उत्तर प्राप्त होता है।

$\frac{6}{5}+\frac{(-2)}{5}$, $\frac{3}{7}+\frac{(-5)}{7}$ को उपरोक्त दोनों विधियों से ज्ञात कीजिए और जाँच करें कि क्या दोनों उत्तर समान हैं।

इसी प्रकार, $\frac{-7}{8}+\frac{5}{8}$ निम्नलिखित होगा :



हमें क्या प्राप्त होता है?

साथ ही, $\frac{-7}{8}+\frac{5}{8}=\frac{-7+5}{8}=?$ क्या दोनों मान समान हैं?

प्रयास कीजिए

$\frac{-13}{7}+\frac{6}{7}$ तथा $\frac{19}{5}+\left(\frac{-7}{5}\right)$ ज्ञात कीजिए:

इस प्रकार, हम देखते हैं कि समान हर वाली परिमेय संख्याओं को जोड़ते समय, हम, हर को वही रखते हुए, अंशों को जोड़ देते हैं।

इस प्रकार, $\frac{-11}{5}+\frac{7}{5}=\frac{-11+7}{5}=\frac{-4}{5}$ है।

- हम अलग-अलग हरों वाली दो परिमेय संख्याओं को किस प्रकार जोड़ें? भिन्नों की तरह, हम पहले इन हरों का ल.स. ज्ञात करते हैं। फिर हम ऐसी समतुल्य परिमेय संख्याएँ ज्ञात करते हैं, जिनके हर यह ल.स. हों। इसके बाद हम इन दोनों परिमेय संख्याओं को जोड़ते हैं।

उदाहरणार्थ, आइए $\frac{-7}{5}$ और $\frac{-2}{3}$ को जोड़ें। 5 और 3 का ल.स. 15 है।

अतः, $\frac{-7}{5}=\frac{-21}{15}$ और $\frac{-2}{3}=\frac{-10}{15}$ है।

इस प्रकार $\frac{-7}{5}+\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{-21}{15}+\left(\frac{-10}{15}\right)=\frac{-31}{15}$ हुआ।

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{-3}{7}+\frac{2}{3}$

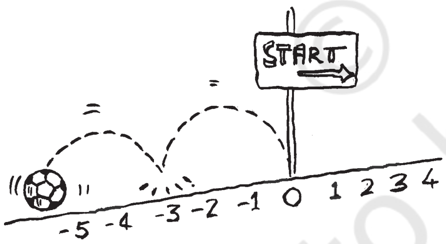
(ii) $\frac{-5}{6}+\frac{-3}{11}$

योज्य प्रतिलोम :

$\frac{-4}{7}+\frac{4}{7}$ किसके बराबर होगा?

$\frac{-4}{7}+\frac{4}{7}=\frac{-4+4}{7}=0$ है। साथ ही, $\frac{4}{7}+\left(\frac{-4}{7}\right)=0$ है

इसी प्रकार, $\frac{-2}{3}+\frac{2}{3}=0=\frac{2}{3}+\left(\frac{-2}{3}\right)$ है।



आपको याद होगा कि पूर्णांकों में, -2 का **योज्य प्रतिलोम (additive inverse)** 2 है, तथा 2, पूर्णांक -2 का योज्य प्रतिलोम होता है।

परिमेय संख्याओं के लिए, हम कहते हैं कि $\frac{-4}{7}$ परिमेय संख्या $\frac{4}{7}$ का **योज्य प्रतिलोम** है तथा $\frac{4}{7}$ परिमेय संख्या $\frac{-4}{7}$ का योज्य प्रतिलोम है। इसी प्रकार, $\frac{-2}{3}$ परिमेय संख्या $\frac{2}{3}$ का योज्य प्रतिलोम है तथा $\frac{2}{3}$ परिमेय संख्या $\frac{-2}{3}$ का योज्य प्रतिलोम है।

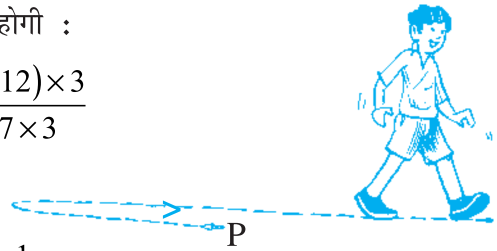
प्रयास कीजिए

$\frac{-3}{9}, \frac{-9}{11}$ और $\frac{5}{7}$ के योज्य प्रतिलोम क्या हैं?

उदाहरण 6 सतपाल किसी स्थान P से पूर्व दिशा में $\frac{2}{3}$ km चलता है और फिर वहाँ से पश्चिम दिशा में $1\frac{5}{7}$ km चलता है। अब वह P से कहाँ स्थित होगा?

हल आइए पूर्व दिशा में चली गई दूरी को धनात्मक चिह्न से व्यक्त करें। इसलिए, पश्चिम दिशा में चली गई दूरी को ऋणात्मक चिह्न से व्यक्त किया जाएगा।

इस प्रकार, बिंदु P से सतपाल की दूरी (km में) होगी :



$$\frac{2}{3}+\left(-1\frac{5}{7}\right)=\frac{2}{3}+\frac{(-12)}{7}=\frac{2\times7}{3\times7}+\frac{(-12)\times3}{7\times3}$$

$$=\frac{14-36}{21}=\frac{-22}{21}=-1\frac{1}{21}$$

क्योंकि यह ऋणात्मक है, इसलिए सतपाल P से पश्चिम की ओर $1\frac{1}{21}$ km की दूरी पर है।

8.9.2 व्यवकलन (घटाना)

सविता ने दो परिमेय संख्याओं $\frac{5}{7}$ और $\frac{3}{8}$ का अंतर इस विधि से प्राप्त किया :

$$\frac{5}{7}-\frac{3}{8}=\frac{40-21}{56}=\frac{19}{56}$$

फरीदा जानती थी कि दो पूर्णांकों a और b के लिए, $a-b=a+(-b)$ लिखा जा सकता है।

उसने ऐसा परिमेय संख्याओं के लिए भी किया और ज्ञात किया कि $\frac{5}{7}-\frac{3}{8}=\frac{5}{7}+\frac{(-3)}{8}=\frac{19}{56}$ है।

दोनों ने एक ही (समान) अंतर प्राप्त किया।

दोनों विधियों से, $\frac{7}{8}-\frac{5}{9}$, $\frac{3}{11}-\frac{8}{7}$ ज्ञात करने का प्रयत्न कीजिए। क्या आपको समान उत्तर प्राप्त होते हैं?

अतः हम कहते हैं कि *दो परिमेय संख्याओं को घटाते (व्यवकलन करते) समय, घटाए जाने वाली संख्या के योज्य प्रतिलोम को अन्य परिमेय संख्या में जोड़ देना चाहिए।*

इस प्रकार, $1\frac{2}{3}-2\frac{4}{5}=\frac{5}{3}-\frac{14}{5}=\frac{5}{3}+\frac{14}{5}$ का योज्य प्रतिलोम

$$=\frac{5}{3}+\frac{(-14)}{5}=\frac{-17}{15}=-1\frac{2}{15}$$ है।

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए

(i) $\frac{7}{9}-\frac{2}{5}$ (ii) $2\frac{1}{5}-\frac{(-1)}{3}$

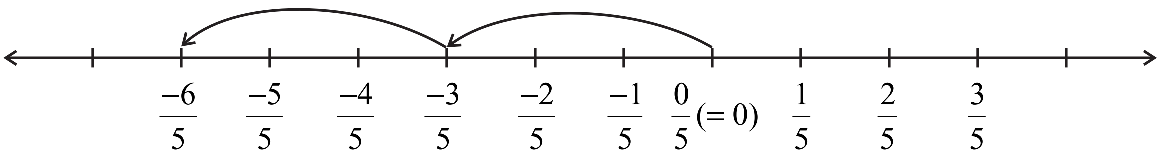
$\frac{2}{7}-\left(\frac{-5}{6}\right)$ क्या होगा? $\frac{2}{7}-\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{2}{7}+\left(\frac{-5}{6}\right)$ का योज्य प्रतिलोम

$$=\frac{2}{7}+\frac{5}{6}=\frac{47}{42}=1\frac{5}{42}$$

8.9.3 गुणन

आइए परिमेय संख्या $\frac{-3}{5}$ को 2 से गुणा करें, अर्थात् हम $\frac{-3}{5}\times2$ ज्ञात करें।

संख्या रेखा पर इसका अर्थ होगा $\frac{3}{5}$ कि बाईं ओर दो कदम चलना।



हम कहाँ पहुँचते हैं? हम $\frac{-6}{5}$ पर पहुँचते हैं। आइए हम इसको भिन्नों वाली विधि से ज्ञात करें।

$$\frac{-3}{5} \times 2 = \frac{-3 \times 2}{5} = \frac{-6}{5}$$

हम उसी परिमेय संख्या पर पहुँच जाते हैं।

दोनों विधियों का प्रयोग करते हुए, $\frac{-4}{7} \times 3$ और $\frac{-6}{5} \times 4$, को ज्ञात कीजिए। आप क्या देखते हैं?

अत:, *हम ज्ञात करते हैं कि एक परिमेय संख्या को एक धनात्मक पूर्णांक से गुणा करने पर, हम अंश को उस पूर्णांक से गुणा कर देते हैं तथा हर को वही रखते हैं।*

आइए अब एक परिमेय संख्या को एक ऋणात्मक पूर्णांक से गुणा करें।

$$\frac{-2}{9} \times (-5) = \frac{-2 \times (-5)}{9} = \frac{10}{9}$$

याद रखिए कि –5 को $\frac{-5}{1}$ लिखा जा सकता है।

अत:, $\frac{-2}{9} \times \frac{-5}{1} = \frac{10}{9} = \frac{-2 \times (-5)}{9 \times 1}$ है।

इसी प्रकार, $\frac{3}{11} \times (-2) = \frac{3 \times (-2)}{11 \times 1} = \frac{-6}{11}$ है।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित गुणनफल क्या होंगे?

(i) $\frac{-3}{5} \times 7$ (ii) $\frac{-6}{5} \times (-2)$

उपरोक्त प्रेक्षणों के आधार पर, हम ज्ञात करते हैं कि $\frac{-3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{-3 \times 5}{8 \times 7} = \frac{-15}{56}$ है।

अत:, जैसा कि हमने भिन्नों की स्थिति में किया था, हम दो परिमेय संख्याओं को निम्नलिखित विधि से गुणा करते हैं :

चरण 1 : दोनों परिमेय संख्याओं के अंशों का गुणा कीजिए।

चरण 2 : दोनों परिमेय संख्याओं के हरों का गुणा कीजिए।

चरण 3 : गुणनफल को $\frac{\text{चरण 1 में प्राप्त परिणाम}}{\text{चरण 2 में प्राप्त परिणाम}}$ के रूप में लिखिए।

इस प्रकार, $\frac{-3}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{-3 \times 2}{5 \times 7} = \frac{-6}{35}$ है।

साथ ही $\frac{-5}{8} \times \left(\frac{-9}{7}\right) = \frac{(-5) \times (-9)}{8 \times 7} = \frac{45}{56}$ है।

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{-3}{4} \times \frac{1}{7}$

(ii) $\frac{2}{3} \times \frac{-5}{9}$

8.9.4 विभाजन

भिन्नों के व्युत्क्रमों (reciprocals) के बारे में हम पहले पढ़ चुके हैं। $\frac{2}{7}$ का व्युत्क्रम क्या है? यह $\frac{7}{2}$ है। हम इस अवधारणा को शून्येतर परिमेय संख्याओं के व्युत्क्रमों के लिए भी लागू करते हैं।

इस प्रकार, $\frac{-2}{7}$ का व्युत्क्रम $\frac{7}{-2}$, अर्थात् $\frac{-7}{2}$ होगा तथा $\frac{-3}{5}$ का व्युत्क्रम $\frac{-5}{3}$ होगा।

परिमेय संख्या का उसके व्युत्क्रम से गुणनफल

किसी संख्या का उसके व्युत्क्रम से गुणनफल सदैव 1 होता है।

उदाहरणार्थ $\frac{-4}{9} \times (\frac{-4}{9}$ का व्युत्क्रम)

$= \frac{-4}{9} \times \left(\frac{-9}{4}\right) = 1$ है।

इसी प्रकार $\frac{-6}{13} \left(\frac{-13}{6}\right) = 1$ है।

कुछ और उदाहरण लेकर, इस प्रेक्षण की पुष्टि कीजिए।

प्रयास कीजिए

$\frac{-6}{11}, \frac{-8}{5}$ के व्युत्क्रम क्या होंगे?

सविता ने एक परिमेय संख्या $\frac{4}{9}$ को एक अन्य परिमेय संख्या $\frac{-5}{7}$ से इस प्रकार विभाजित किया (भाग दिया) :

$$\frac{4}{9} \div \left(\frac{-5}{7}\right) = \frac{4}{9} \times \frac{7}{-5} = \frac{-28}{45}$$

उसने भिन्नों की तरह ही व्युत्क्रम की अवधारणा का प्रयोग किया।

अर्पित ने पहले $\frac{4}{9}$ को $\frac{5}{7}$ से भाग दिया और $\frac{28}{45}$ प्राप्त किया।

अंत में, उसने कहा कि $\frac{4}{9} \div \left(\frac{-5}{7}\right) = \frac{-28}{45}$ है। उसने ऐसा किस प्रकार प्राप्त किया?

उसने ऋणात्मक चिह्न को छोड़ते हुए, उन्हें भिन्नों की तरह विभाजित किया और बाद में प्राप्त परिणाम के साथ ऋणात्मक चिह्न लगा दिया।

दोनों ने एक ही मान $\frac{-28}{45}$ प्राप्त किया। $\frac{2}{3}$ को $\frac{-5}{7}$ से दोनों विधियों द्वारा भाग देकर देखिए कि क्या आप एक ही (समान) उत्तर प्राप्त करते हैं।

उपरोक्त से यह प्रदर्शित होता है कि *एक परिमेय संख्या को किसी अन्य परिमेय संख्या से भाग देने के लिए, हम उस परिमेय संख्या को अन्य परिमेय संख्या के व्युत्क्रम से गुणा कर देते हैं।*

इस प्रकार, $\frac{6}{-5} \div \frac{-2}{3} = \frac{6}{-5} \times \left(\frac{-2}{3}\right.$ का व्युत्क्रम$\left.\right) = \frac{6}{-5} \times \frac{3}{-2} = \frac{18}{10}$ है।

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए: (i) $\frac{2}{3} \times \left(\frac{-7}{8}\right)$ (ii) $\frac{-6}{7} \times \frac{5}{7}$

प्रश्नावली 8.2

1. योग ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{5}{4}+\left(\frac{-11}{4}\right)$ (ii) $\frac{5}{3}+\frac{3}{5}$ (iii) $\frac{-9}{10}+\frac{22}{15}$

(iv) $\frac{-3}{-11}+\frac{5}{9}$ (v) $\frac{-8}{19}+\frac{(-2)}{57}$ (vi) $\frac{-2}{3}+0$

(vii) $-2\frac{1}{3}+4\frac{3}{5}$

2. ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{7}{24}-\frac{17}{36}$ (ii) $\frac{5}{63}-\left(\frac{-6}{21}\right)$ (iii) $\frac{-6}{13}-\left(\frac{-7}{15}\right)$

(iv) $\frac{-3}{8}-\frac{7}{11}$ (v) $-2\frac{1}{9}-6$

3. गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{9}{2}\times\left(\frac{-7}{4}\right)$ (ii) $\frac{3}{10}\times(-9)$ (iii) $\frac{-6}{5}\times\frac{9}{11}$

(iv) $\frac{3}{7}\times\left(\frac{-2}{5}\right)$ (v) $\frac{3}{11}\times\frac{2}{5}$ (vi) $\frac{3}{-5}\times\frac{-5}{3}$

4. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $(-4)\div\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{-3}{5}\div 2$ (iii) $\frac{-4}{5}\div(-3)$

(iv) $\frac{-1}{8}\div\frac{3}{4}$ (v) $\frac{-2}{13}\div\frac{1}{7}$ (vi) $\frac{-7}{12}\div\left(\frac{-2}{13}\right)$

(vii) $\frac{3}{13}\div\left(\frac{-4}{65}\right)$

हमने क्या चर्चा की ?

1. एक संख्या जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सके, जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ है, परिमेय संख्या कहलाती है। संख्याएँ $\frac{-2}{7}, \frac{3}{8}, 3$ इत्यादि परिमेय संख्याएँ हैं।

2. सभी पूर्णांक और भिन्न परिमेय संख्याएँ हैं।

3. यदि किसी परिमेय संख्या के अंश और हर को एक ही शून्येतर पूर्णांक से गुणा किया जाए या भाग दिया जाए, तो हमें एक परिमेय संख्या प्राप्त होती है जो दी हुई परिमेय संख्या के समतुल्य परिमेय संख्या कही जाती है। उदाहरणार्थ, $\frac{-3}{7} = \frac{-3 \times 2}{7 \times 2} = \frac{-6}{14}$ है। अतः, हम कहते हैं कि $\frac{-6}{14}$ संख्या $\frac{-3}{7}$ का एक समतुल्य रूप है। साथ ही, ध्यान दीजिए कि $\frac{-6}{14} = \frac{-6 \div 2}{14 \div 2} = \frac{-3}{7}$ है।

4. परिमेय संख्याओं को धनात्मक और ऋणात्मक परिमेय संख्याओं के रूप में वर्गीकृत किया जाता है। जब अंश और हर दोनों ही या तो धनात्मक पूर्णांक हों या ऋणात्मक पूर्णांक हों, तो वह परिमेय संख्या धनात्मक परिमेय संख्या कहलाती है। जब अंश या हर में से एक ऋणात्मक पूर्णांक हो, तो वह परिमेय संख्या एक ऋणात्मक परिमेय संख्या कहलाती है। उदाहरणार्थ, $\frac{3}{8}$ एक धनात्मक परिमेय संख्या है तथा $\frac{-8}{9}$ एक ऋणात्मक परिमेय संख्या है।

5. संख्या 0 न तो एक धनात्मक परिमेय संख्या है और न ही ऋणात्मक परिमेय संख्या है।

6. एक परिमेय संख्या को अपने मानक रूप में तब माना जाता है, जब उसका हर धनात्मक पूर्णांक हो तथा अंश और हर में 1 के अतिरिक्त कोई सार्व गुणनखंड न हो। संख्याएँ $\frac{-1}{3}, \frac{2}{7}$, इत्यादि मानक रूप में हैं।

7. दो परिमेय संख्याओं के बीच असीमित परिमेय संख्याएँ होती हैं।

8. समान हर वाली दो परिमेय संख्याओं का योग ज्ञात करने के लिए, उनके अंशों को जोड़ा जा सकता है तथा हर वही रख कर योग ज्ञात किया जा सकता है। भिन्न-भिन्न हरों वाली दो परिमेय संख्याओं को जोड़ने के लिए, पहले दोनों हरों का ल.स. ज्ञात किया जाता है और फिर दोनों परिमेय संख्याओं को ल.स. के बराबर समान हर वाली दो समतुल्य परिमेय संख्याओं में बदल कर जोड़ लिया जाता है। उदाहरणार्थ, $\frac{-2}{3} + \frac{3}{8} = \frac{-16}{24} + \frac{9}{24} = \frac{-16+9}{24} = \frac{-7}{24}$ है। यहां 3 और 8 का ल. स. 24 है।

9. दो परिमेय संख्याओं का व्यवकलन करने के लिए हम घटाई जाने वाली परिमेय संख्या के योज्य प्रतिलोम को अन्य परिमेय संख्या में जोड़ते हैं।

इस प्रकार, $\frac{7}{8}-\frac{2}{3}=\frac{7}{8}+\frac{2}{3}$ का योज्य प्रतिलोम $=\frac{7}{8}+\frac{(-2)}{3}=\frac{21+(-16)}{24}=\frac{5}{24}$ है।

10. दो परिमेय संख्याओं का गुणा करने के लिए, हम इन संख्याओं के अंशों तथा हरों को अलग-अलग गुणा करते हैं और फिर गुणनफल को $\frac{\text{अंशों का गुणनफल}}{\text{हरों का गुणनफल}}$ के रूप में लिखते हैं।

11. एक परिमेय संख्या को एक अन्य शून्येतर परिमेय संख्या से भाग देने के लिए, हम पहली परिमेय संख्या को अन्य परिमेय संख्या के व्युत्क्रम से गुणा करते हैं। इस प्रकार $\frac{-7}{2}\div\frac{4}{3}=\frac{-7}{2}\times(\frac{4}{3}$ का व्युत्क्रम$)=\frac{-7}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{-21}{8}$ है।

परिमाप और क्षेत्रफल

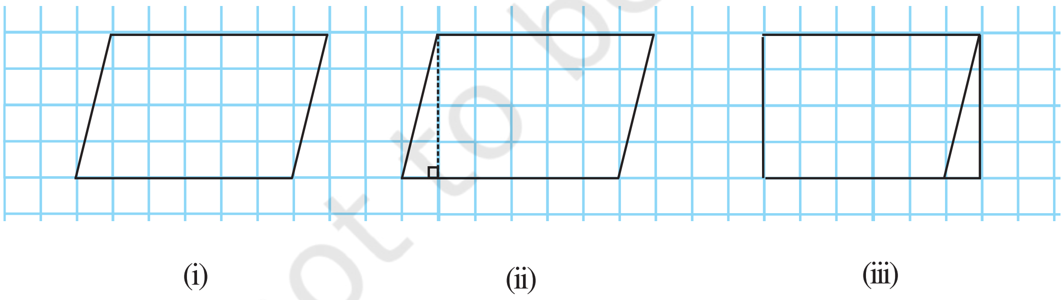
0757CH11

अध्याय 9

9.1 समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

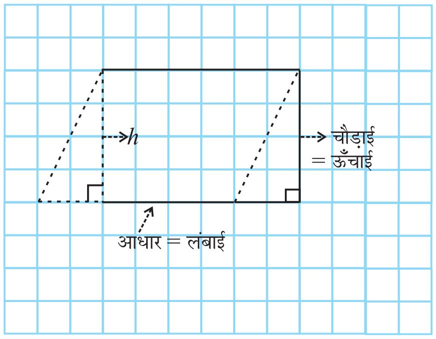
हमें वर्ग और आयत के अतिरिक्त बहुत से दूसरे आकार देखने को मिलते हैं।
आप एक भूखंड का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करेंगे जिसका आकार समांतर चतुर्भुज जैसा है?
आइए समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल प्राप्त करने की एक विधि ज्ञात करें।
क्या एक समांतर चतुर्भुज को एक समान क्षेत्रफल वाले आयत में रूपांतरित किया जा सकता है?

ग्राफ़ पेपर पर एक समांतर चतुर्भुज बनाइए जैसाकि आकृति [9.1(i)] में दिखाया गया है। इस समांतर चतुभुर्ज को काटिए। समांतर चतुर्भुज के एक शीर्ष से इसकी सम्मुख भुजा पर एक लंब खींचिए [आकृति 9.1(ii)]। इस त्रिभुज को काट लीजिए और इस त्रिभुज को समांतर चतुर्भुज की दूसरी भुजा के साथ रखिए [आकृति 9.1(iii)]।



आकृति 9.1

आप कैसा आकार प्राप्त करते हैं? आप एक आयत प्राप्त करते हैं।
क्या समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल बनाए गए आयत के क्षेत्रफल के बराबर है?
हाँ, समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = बनाए गए आयत का क्षेत्रफल
आयत की लंबाई और चौड़ाई क्या है?



आकृति 9.2

हमने देखा कि बनाए गए आयत की लंबाई, समांतर चतुर्भुज के आधार की लंबाई के बराबर है और आयत की चौड़ाई, समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई के बराबर है (आकृति 9.2)।

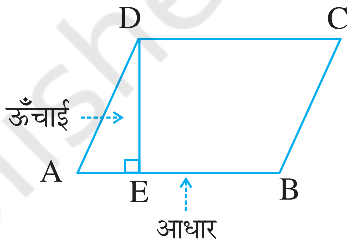
अब, समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आयत का क्षेत्रफल

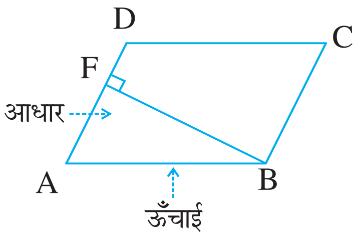
$$= \text{लंबाई} \times \text{चौड़ाई} = l \times b$$

लेकिन आयत की लंबाई l तथा चौड़ाई b क्रमश: समांतर चतुर्भुज का आधार b और ऊँचाई h ही है।

इस प्रकार, समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई = $b \times h$

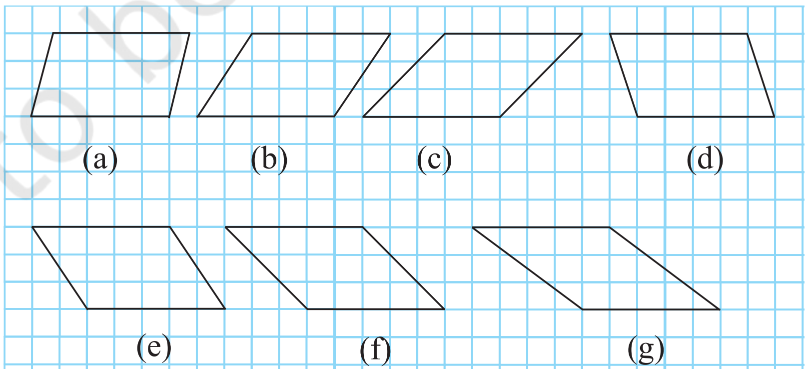
समांतर चतुर्भुज की किसी भी भुजा को **आधार** ले सकते हैं। इस भुजा पर, सम्मुख शीर्ष से डाला गया लंब, इसकी **ऊँचाई** कहलाती है। समांतर चतुर्भुज ABCD में DE, AB पर लंब है। यहाँ AB आधार तथा DE समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई है।





इस समांतर चतुर्भुज ABCD में, BF, सम्मुख भुजा AD पर डाला गया लंब है। यहाँ AD **आधार** तथा BF **ऊँचाई** है।

निम्न समांतर चतुर्भुजों के बारे में सोचिए (आकृति 9.3)।



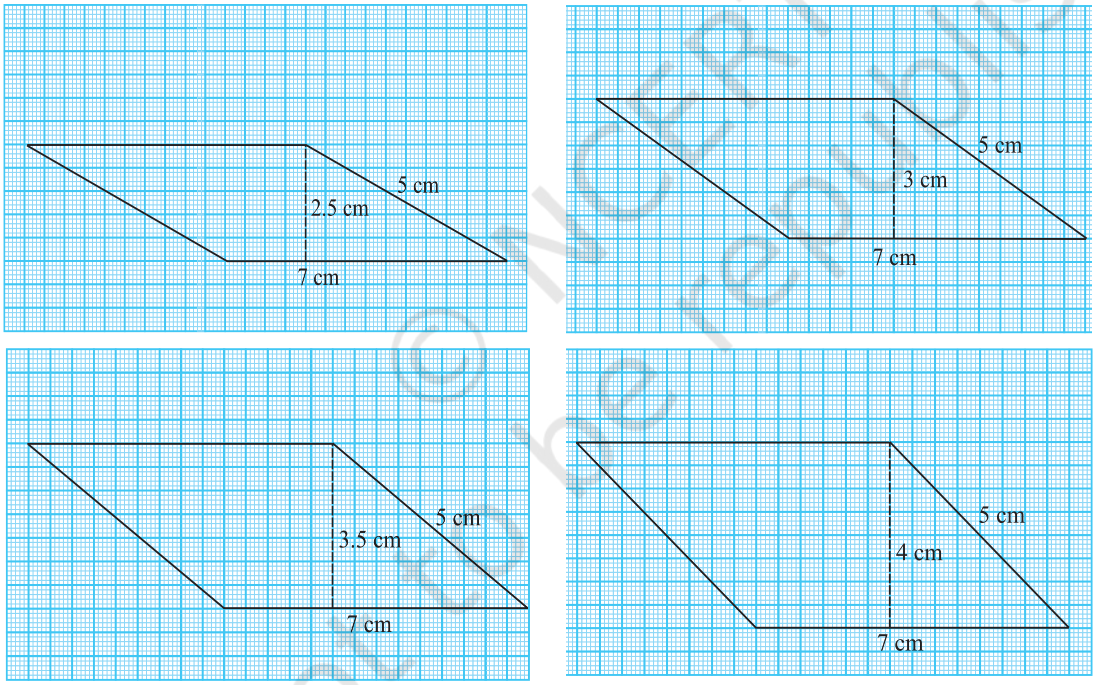
आकृति 9.3

आकृतियों द्वारा घेरे गए वर्गों की संख्या को गिन कर, समांतर चतुर्भुजों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए और भुजाओं को माप कर परिमाप भी ज्ञात कीजिए।

निम्न तालिका को पूरा कीजिए :

समांतर चतुर्भुज	आधार	ऊँचाई	क्षेत्रफल	परिमाप
(a)	5 इकाई	3 इकाई	15 वर्ग इकाई	
(b)				
(c)				
(d)				
(e)				
(f)				
(g)				

आप दखेंगे कि इन सभी समांतर चतुर्भुजों का क्षेत्रफल तो समान है परंतु परिमाप अलग-अलग हैं। अब, निम्न 7 cm तथा 5 cm भुजाओं वाले समांतर चतुर्भुजों को देखते हैं (आकृति 9.4)।



आकृति 9.4

प्रत्येक समांतर चतुर्भुज का परिमाप तथा क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। अपने परिणाम का विश्लेषण कीजिए।

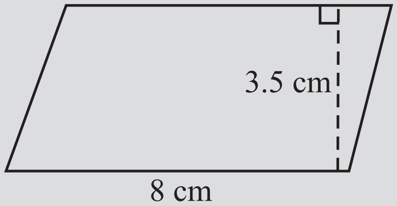
आप देखेंगे कि इन समांतर चतुर्भुजों का क्षेत्रफल अलग-अलग हैं लेकिन परिमाप समान हैं।

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए आपको समांतर चतुर्भुज का आधार तथा संगत ऊँचाई को ज्ञात करने की आवश्यकता है।

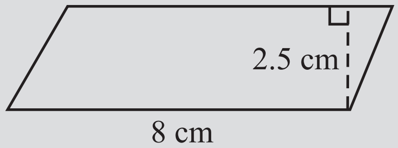
इन्हें कीजिए

निम्न समांतर चतुर्भुजों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए

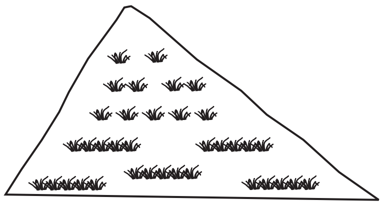
(i)



(ii)



(iii) समांतर चतुर्भुज ABCD में AB = 7.2 cm और C से AB पर लंब 4.5 cm है।

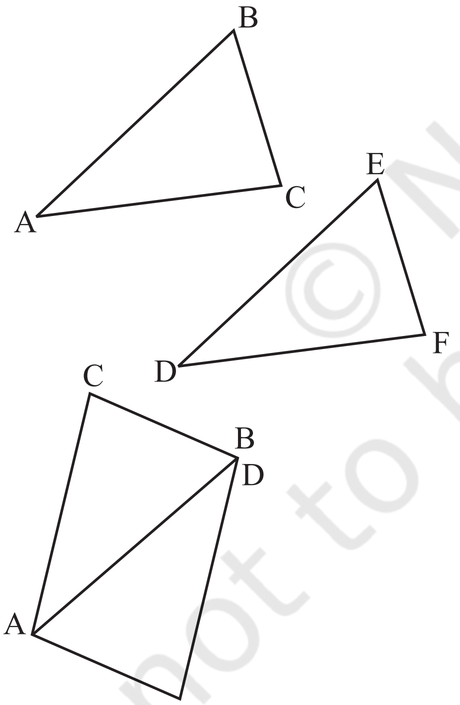


9.2 एक त्रिभुज का क्षेत्रफल

एक माली पूरे तिकोने पार्क पर घास लगाने का व्यय जानना चाहता है। इस स्थिति में हमें त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने की आवश्यकता है।

आइए एक त्रिभुज के क्षेत्रफल को प्राप्त करने की विधि ज्ञात करें।

कागज़ के एक टुकड़े पर एक विषमबाहु त्रिभुज बनाइए। इस त्रिभुज को काट लीजिए।



आकृति 9.5

इस त्रिभुज को दूसरे कागज़ के टुकड़े पर रखिए और समान माप का एक ओर त्रिभुज काटिए।

इस प्रकार अब आपके पास समान माप के दो विषमबाहु त्रिभुज हैं। क्या दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं?

एक त्रिभुज को दूसरे पर रखिए जिससे वे एक-दूसरे को पूर्ण रूप से ढक लें। आप दोनों में से एक त्रिभुज को घुमा भी सकते हैं।

अब दोनों त्रिभुजों को इस प्रकार आपस में रखिए जिससे उनकी संगत भुजाओं का एक युग्म आपस में मिल जाएँ (जैसा आकृति 9.5 में दिखाया गया है)।

क्या इस प्रकार से बनी आकृति एक समांतर चतुर्भुज है?

प्रत्येक त्रिभुज के क्षेत्रफल की तुलना समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल से कीजिए।

त्रिभुजों के आधार तथा ऊँचाई की तुलना समांतर चतुर्भुज के आधार तथा ऊँचाई से कीजिए।

आप देखेंगे कि दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का योगफल समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल के बराबर है। त्रिभुज का आधार और ऊँचाई क्रमश: समांतर चतुर्भुज के आधार और ऊँचाई के बराबर है।

$$\text{प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}\,(\text{समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल})$$

$$= \frac{1}{2}\,(\text{आधार} \times \text{ऊँचाई})\ (\text{क्योंकि, समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल} = \text{आधार} \times \text{ऊँचाई})$$

$$= \frac{1}{2}(b \times h)\ \left(\text{या } \frac{1}{2}bh, \text{ संक्षेप में}\right)$$

इन्हें कीजिए

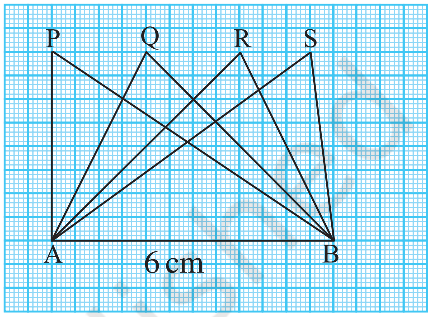
1. ऊपर दिए गए क्रियाकलापों को अलग-अलग प्रकार के त्रिभुज लेकर कीजिए।
2. अलग-अलग प्रकार के समांतर चतुर्भुज लीजिए। प्रत्येक समांतर चतुर्भुज को दो त्रिभुजों में एक विकर्ण के अनुदिश काटिए। क्या ये त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

आकृति (9.6) में सभी त्रिभुज, आधार AB = 6 cm पर स्थित हैं। आधार AB पर प्रत्येक त्रिभुज की संगत ऊँचाई के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

क्या हम कह सकते हैं कि सभी त्रिभुजों का क्षेत्रफल बराबर है? हाँ।

क्या त्रिभुज सर्वांगसम हैं? नहीं।

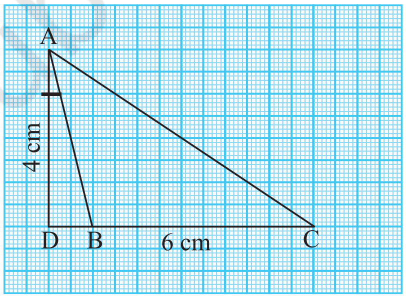
हम निष्कर्ष निकालते हैं कि **सभी सर्वांगसम त्रिभुजों का क्षेत्रफल बराबर होता है लेकिन यह आवश्यक नहीं है कि वे त्रिभुज जिनका क्षेत्रफल बराबर होता है वे सर्वांगसम हैं।**



आकृति 9.6

आधार 6 cm वाले एक अधिक कोण (obtuse angled triangle) त्रिभुज ABC पर विचार करते हैं (आकृति 9.7)।

इसकी ऊँचाई AD शीर्ष A से DC पर लंब है जो त्रिभुज के बाह्य स्थित है। क्या आप इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं?

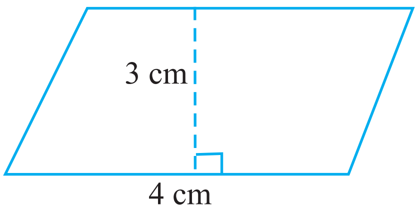


आकृति 9.7

उदाहरण 1 एक समांतर चतुर्भुज की एक भुजा और संगत ऊँचाई क्रमशः 4 cm और 3 cm है। समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए (आकृति 9.8)।

हल आधार की लंबाई दी गई है $(b) = 4$ cm, ऊँचाई $(h) = 3$ cm

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= b \times h = 4 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^2$



आकृति 9.8

उदाहरण 2 यदि एक समांतर चतुर्भुज (आकृति 9.9) का क्षेत्रफल 24 cm² और आधार 4 cm हो तो ऊँचाई 'x' ज्ञात कीजिए।

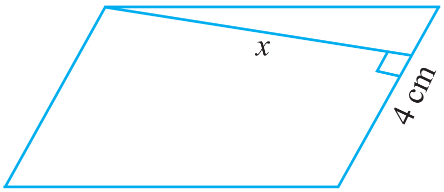
हल समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= b \times h$

इसलिए, $24 = 4 \times x$

या $\dfrac{24}{4} = x$

या $x = 6$ cm

इस प्रकार, समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई 6 cm है।



आकृति 9.9

उदाहरण 3 समांतर चतुर्भुज ABCD की दो भुजाओं की लंबाइयाँ 6 cm और 4 cm हैं। आधार CD की संगत ऊँचाई 3 cm है (आकृति 9.10)। ज्ञात कीजिए :

(i) समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल (ii) आधार AD की संगत ऊँचाई

हल

(i) समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= b \times h$

$= 6 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 18 \text{ cm}^2$

(ii) आधार $(b) = 4 \text{ cm}$,

ऊँचाई $= x$ (मान लीजिए)

क्षेत्रफल $= 18 \text{ cm}^2$

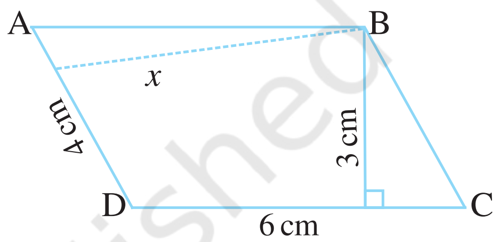
समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= b \times x$

$18 = 4 \times x$

$\frac{18}{4} = x$

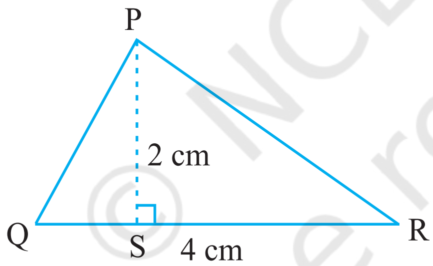
इसलिए, $x = 4.5 \text{ cm}$

इस प्रकार, आधार AD की संगत ऊँचाई 4.5 cm है।

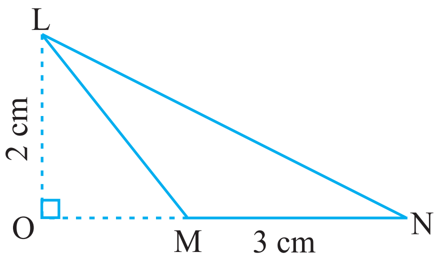


आकृति 9.10

उदाहरण 4 निम्न त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए (आकृति 9.11) :



(i)



(ii)

आकृति 9.11

हल

(i) त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\ bh = \frac{1}{2} \times \text{QR} \times \text{PS}$

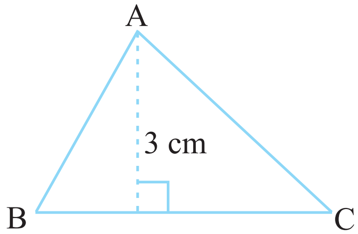
$= \frac{1}{2} \times 4 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} = 4 \text{ cm}^2$

(ii) त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\ bh = \frac{1}{2} \times \text{MN} \times \text{LO}$

$= \frac{1}{2} \times 3 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} = 3 \text{ cm}^2$

उदाहरण 5 BC ज्ञात कीजिए, यदि त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल 36 cm² और ऊँचाई AD 3 cm है। (आकृति 9.12) :

हल ऊँचाई = 3 cm, क्षेत्रफल = 36 cm^2



आकृति 9.12

$$\text{त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}bh$$

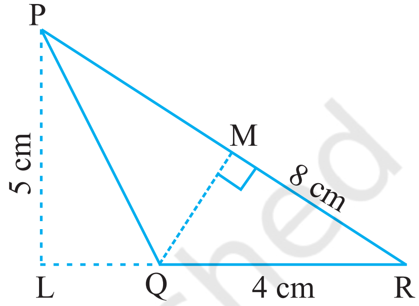
या
$$36 = \frac{1}{2}\times b\times 3$$

$$b = \frac{36\times 2}{3} = 24 \text{ cm}$$

इसलिए BC = 24 cm

उदाहरण 6 ΔPQR में PR = 8 cm, QR = 4 cm और PL = 5 cm (आकृति 9.13)।
ज्ञात कीजिए:

(i) ΔPQR का क्षेत्रफल (ii) QM



आकृति 9.13

हल

(i) आधार = 4 cm ऊँचाई = 5 cm

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}bh$$

$$= \frac{1}{2}\times 4 \text{ cm}\times 5 \text{ cm} = 10 \text{ cm}^2$$

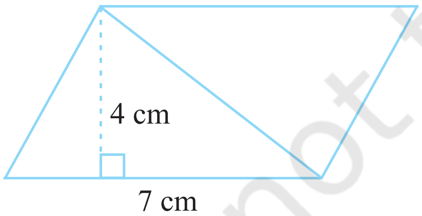
(ii) आधार = 8 cm, ऊँचाई = ?, क्षेत्रफल = 10 cm^2

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}\times b\times h \qquad \text{अर्थात्} \quad 10 = \frac{1}{2}\times 8\times h$$

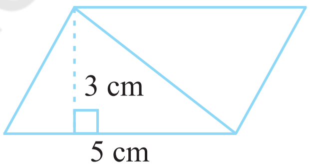
$$h = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2.5 \qquad \text{इसलिए,} \quad QM = 2.5 \text{ cm}$$

प्रश्नावली 9.1

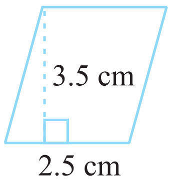
1. निम्न में प्रत्येक समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :



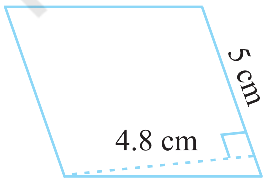
(a)



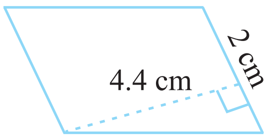
(b)



(c)

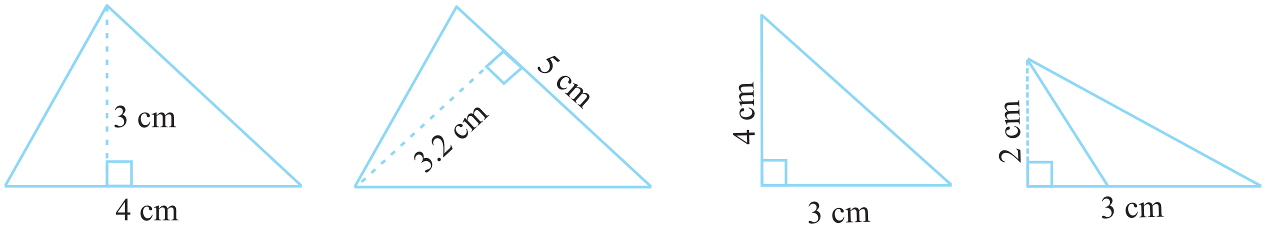


(d)



(e)

2. निम्न में प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :



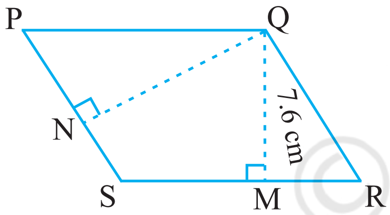
(a) (b) (c) (d)

3. रिक्त स्थान का मान ज्ञात कीजिए :

क्र.सं.	आधार	ऊँचाई	समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल
a.	20 cm		246 cm^2
b.		15 cm	154.5 cm^2
c.		8.4 cm	48.72 cm^2
d.	15.6 cm		16.38 cm^2

4. रिक्त स्थानों का मान ज्ञात कीजिए :

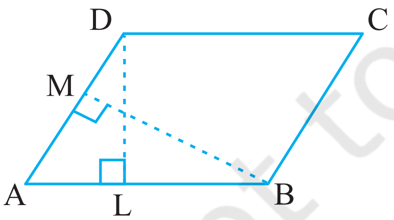
आधार	ऊँचाई	त्रिभुज का क्षेत्रफल
15 cm	_____	87 cm^2
_____	31.4 mm	1256 mm^2
22 cm	_____	170.5 cm^2



आकृति 9.14

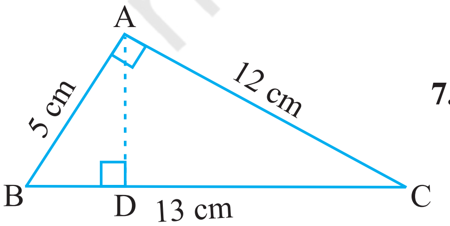
5. PQRS एक समांतर चतुर्भुज है (आकृति 9.14)। QM शीर्ष Q से SR तक की ऊँचाई तथा QN शीर्ष Q से PS तक की ऊँचाई है। यदि SR = 12 cm और QM = 7.6 cm तो ज्ञात कीजिए :

(a) समांतर चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल (b) QN, यदि PS = 8 cm



आकृति 9.15

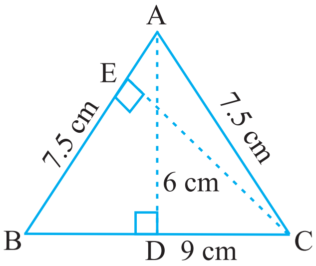
6. DL और BM समांतर चतुर्भुज ABCD की क्रमशः भुजाएँ AB और AD पर लंब हैं (आकृति 9.15)। यदि समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल 1470 cm^2 है, AB = 35 cm और AD = 49 cm है, तो BM तथा DL की लंबाई ज्ञात कीजिए।



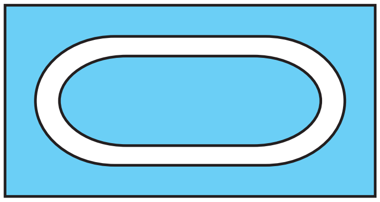
आकृति 9.16

7. त्रिभुज ABC, A पर समकोण है (आकृति 9.16), और AD भुजा BC पर लंब है। यदि AB = 5 cm, BC = 13 cm और AC = 12 cm है, तो ΔABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। AD की लंबाई भी ज्ञात कीजिए।

8. ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC = 7.5$ cm और $BC = 9$ cm है (आकृति 9.17)। A से BC तक की ऊँचाई AD, 6 cm है। ΔABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। C से AB तक की ऊँचाई, अर्थात् CE क्या होगी?



आकृति 9.17



आकृति 9.18

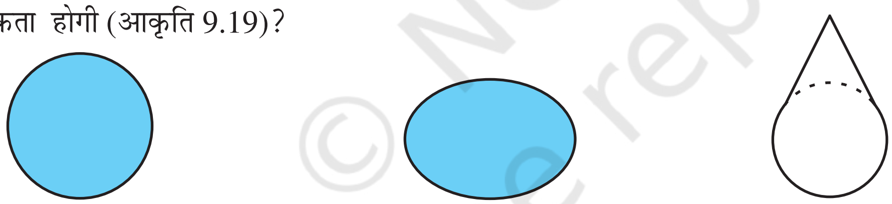
9.3 वृत्त

एक दौड़ पथ अपने दोनों किनारों पर अर्धवृत्ताकार है (आकृति 9.18)।

क्या आप एक धावक द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कर सकते हैं यदि वह इस दौड़ पथ के दो पूरे चक्कर लगाता है? जब आकार वृत्ताकार हो तो हमें उसके चारों ओर की दूरी प्राप्त करने की एक विधि ज्ञात करने की आवश्यकता होती है।

9.3.1 वृत्त की परिधि

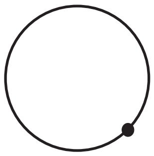
तान्या गत्ते के घुमावदार आकार के अलग-अलग कार्ड काटती है। वह इन कार्डों को सजाने के लिए इनके चारों ओर किनारी लगाना चाहती है। प्रत्येक के लिए उसे कितनी लंबी किनारी की आवश्यकता होगी (आकृति 9.19)?



(a) (b) (c)

आकृति 9.19

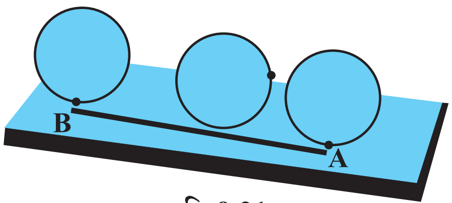
आप एक पैमाने (रूलर) की सहायता से वक्र (curve) को नहीं माप सकते क्योंकि ये आकृतियाँ सीधी नहीं हैं। आप क्या करेंगे?



आकृति 9.20

आकृति 9. 19(a) में दिए गए आकार की आवश्यक किनारी की लंबाई ज्ञात करने के लिए आपको एक तरीका बताया जा रहा है। कार्ड के किनारे पर एक बिंदु अंकित कीजिए और इसे एक टेबल पर रखिए। बिंदु की स्थिति को टेबल पर भी अंकित कीजिए (आकृति 9.20)।

अब वृत्ताकार कार्ड को एक सरल रेखा की दिशा में टेबल पर तब तक घुमाइए जब तक अंकित बिंदु टेबल को दुबारा स्पर्श न कर जाए। इस दूरी को रेखा के अनुदिश में मापिए। यह आवश्यक किनारी की लंबाई है। यह कार्ड के अंकित किए गए बिंदु से कार्ड के किनारे-किनारे वापस उसी बिंदु तक की दूरी है।



आकृति 9.21

आप एक धागे को वृत्ताकार वस्तु के चारों ओर किनारे-किनारे रख कर भी दूरी ज्ञात कर सकते हैं।

एक वृत्ताकार क्षेत्र के चारों ओर की दूरी इसकी परिधि कहलाती है।

इन्हें कीजिए

एक बोतल का ढक्कन, एक चूड़ी या कोई अन्य वृत्ताकार वस्तु लीजिए और इसकी परिधि ज्ञात कीजिए।

अब, क्या आप इस विधि से एक धावक द्वारा एक पथ पर तय की गई दूरी ज्ञात कर सकते है?

अभी भी, पथ के चारों ओर की दूरी ज्ञात करना या अन्य किसी वृत्ताकार वस्तु को धागे से मापना बहुत ही मुश्किल होगा। तथापि यह माप सही नहीं होगी।

अत: इसके लिए हमें एक सूत्र की आवश्यकता है जैसाकि तल की आकृति या आकारों के लिए हम प्रयोग करते हैं।

आइए हम देखें क्या वृत्तों के व्यास और परिधि के बीच में कोई संबंध है।

निम्न तालिका पर विचार कीजिए। अलग-अलग त्रिज्याओं के 6 वृत्त खींचिए और धागे की सहायता से उनकी परिधि ज्ञात कीजिए। परिधि और व्यास के अनुपात को भी ज्ञात कीजिए :

वृत्त	त्रिज्या	व्यास	परिधि	परिधि और व्यास का अनुपात
1.	3.5 cm	7.0 cm	22.0 cm	$\frac{22}{7} = 3.14$
2.	7.0 cm	14.0 cm	44.0 cm	$\frac{44}{14} = 3.14$
3.	10.5 cm	21.0 cm	66.0 cm	$\frac{66}{21} = 3.14$
4.	21.0 cm	42.0 cm	132.0 cm	$\frac{132}{42} = 3.14$
5.	5.0 cm	10.0 cm	32.0 cm	$\frac{32}{10} = 3.2$
6.	15.0 cm	30.0 cm	94.0 cm	$\frac{94}{30} = 3.13$

ऊपर दी गई तालिका से आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं? क्या यह अनुपात लगभग समान है? हाँ।

क्या आप कह सकते हैं कि एक वृत्त की परिधि हमेशा इसके व्यास की तीन गुणा है? हाँ।

यह अनुपात स्थिर है और इसे 'π' (*pi*) (पाई) से प्रदर्शित करते हैं। इसका मान लगभग $\frac{22}{7}$ या 3.14 है।

अत: हम कह सकते हैं $\frac{C}{d} = \pi$, जहाँ 'C' वृत्त की परिधि और 'd' इसका व्यास दर्शाता है।

या $$C = \pi d$$

हम जानते हैं कि एक वृत्त का व्यास (d), त्रिज्या (r) का दुगुना होता है; अर्थात् $d = 2r$

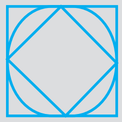
अत:, $C = \pi d = \pi \times 2r$ या $C = 2\pi r$

इन्हें कीजिए

आकृति 9.22 में

(a) किस वर्ग का परिमाप अधिक है ?

(b) कौन-सा अधिक है, छोटे वर्ग का परिमाप या वृत्त की परिधि?



आकृति 9.22

प्रयास कीजिए

एक चौथाई प्लेट तथा एक अर्ध प्लेट लीजिए। प्रत्येक को टेबल की ऊपरी सतह पर एक बार घुमाइए। कौन-सी प्लेट एक पूरे चक्कर में अधिक दूरी तय करती है? कौन-सी प्लेट कम चक्कर में टेबल की ऊपरी सतह की लंबाई को पूरा करेगी?

उदाहरण 7 10 cm व्यास वाले एक वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ लीजिए)

हल वृत्त का व्यास (d) = 10 cm

वृत्त की परिधि $= \pi d$

$= 3.14 \times 10 \text{ cm} = 31.4 \text{ cm}$

अत:, 10 cm व्यास वाले वृत्त की परिधि 31.4 cm है।

उदाहरण 8 एक वृत्ताकार तश्तरी (disc) की परिधि ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 14 cm है।

$$\left(\text{प्रयोग करें } \pi = \frac{22}{7}\right)$$

हल वृत्ताकार तश्तरी (disc) की त्रिज्या (r) = 14 cm

तश्तरी की परिधि $= 2\pi r$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \text{ cm} = 88 \text{ cm}$$

अत:, वृत्ताकार तश्तरी की परिधि 88 cm है।

उदाहरण 9 एक वृत्ताकार पाइप की त्रिज्या 10 cm है। पाइप के चारों ओर एक बार टेप लपेटने की आवश्यक लंबाई ज्ञात कीजिए (प्रयोग करें $\pi = 3.14$)।

हल पाइप की त्रिज्या (r) = 10 cm

आवश्यक टेप की लंबाई, पाइप की परिधि के बराबर है।

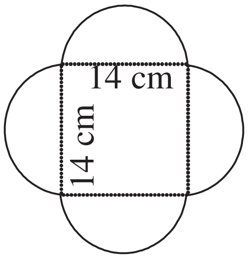
$$\text{पाइप की परिधि} = 2\pi r$$
$$= 2 \times 3.14 \times 10 \text{ cm} = 62.8 \text{ cm}$$

इसलिए, पाइप के चारों ओर एक बार टेप लपेटने की आवश्यक लंबाई 62.8 cm है।

उदाहरण 10 दी गई आकृति का परिमाप ज्ञात कीजिए (आकृति 9.23)।

($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)।

हल इस आकृति में हमें वर्ग के प्रत्येक ओर स्थित अर्धवृत्त की परिधि को ज्ञात करने की आवश्यकता है। क्या आपको वर्ग के परिमाप को भी ज्ञात करने की आवश्यकता है? नहीं। इस आकृति की बाह्य परिसीमा अर्धवृत्तों से मिलकर बनी है। प्रत्येक अर्धवृत्त का व्यास 14 cm है।



आकृति 9.23

हम जानते हैं कि, वृत्त की परिधि $= \pi d$

$$\text{अर्धवृत्त की परिधि} = \frac{1}{2}\pi d$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 14 \text{ cm} = 22 \text{ cm}$$

प्रत्येक अर्धवृत्त की परिधि 22 cm है। अतः दी गई आकृति का परिमाप $= 4 \times 22$ cm $= 88$ cm

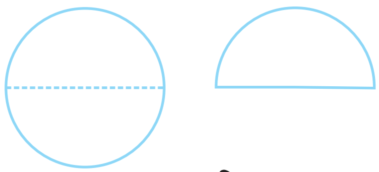
उदाहरण 11 सुधांशु 7 cm त्रिज्या वाली एक वृत्ताकार तश्तरी (disc) को दो बराबर भागों में विभाजित करता है। प्रत्येक अर्धवृत्ताकार तश्तरी का परिमाप ज्ञात कीजिए (प्रयोग करें $\pi = \frac{22}{7}$)

हल अर्धवृत्ताकार तश्तरी (disc) के परिमाप को ज्ञात करने के लिए, (आकृति 9.24), हमें ज्ञात करने की आवश्यकता है:

(i) अर्धवृत्ताकार आकार की परिधि (ii) व्यास

दी गई त्रिज्या $(r) = 7$ cm

हम जानते हैं कि वृत्त की परिधि $= 2\pi r$


आकृति 9.24

$$\text{अतः, अर्धवृत्त की परिधि} = \frac{1}{2} \times 2\pi r = \pi r$$
$$= \frac{22}{7} \times 7 \text{ cm} = 22 \text{ cm}$$

इसलिए, वृत्त का व्यास $= 2r = 2 \times 7$ cm $= 14$ cm

अतः प्रत्येक अर्धवृत्ताकार तश्तरी (disc) का परिमाप $= 22$ cm $+ 14$ cm $= 36$ cm

9.3.2 वृत्त का क्षेत्रफल

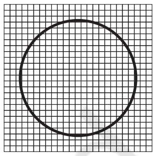
निम्न पर विचार कीजिए :

- एक किसान खेत के केंद्र पर 7 m त्रिज्या वाली एक फूलों की क्यारी खोदता है। उसे खाद को खरीदने की आवश्यकता है। यदि 1 m^2 क्षेत्रफल के लिए 1 kg खाद की आवश्यकता हो, तो उसे कितने किलोग्राम खाद खरीदनी चाहिए?

- 10 रु प्रति m^2 की दर से, 2 m त्रिज्या वाले एक वृत्ताकार टेबल के ऊपरी सतह पर पॉलिश कराने का व्यय क्या होगा?

क्या आप बता सकते हैं कि इन स्थितियों में हमें क्या ज्ञात करने की आवश्यकता है, क्षेत्रफल या परिमाप? ऐसी स्थितियों में हमें वृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने की आवश्यकता होती है। आइए ग्राफ़ पेपर की सहायता से हम एक वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं।

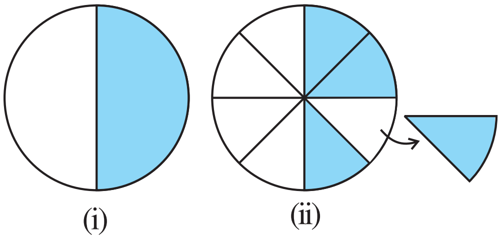
4 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त को ग्राफ़ पेपर पर बनाइए (आकृति 9.25)। वृत्त के द्वारा घिरे हुए वर्गों को गिनकर इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



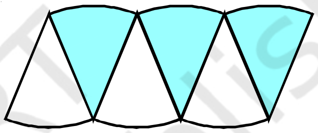
आकृति 9.25

क्योंकि किनारे सीधे नहीं हैं, हमें, इस विधि से, वृत्त के क्षेत्रफल का एक कच्चा (rough) अनुमान ही प्राप्त होता है। एक और विधि से वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं।

एक वृत्त बनाइए और उसके अर्धभाग को छायांकित कीजिए [आकृति 9.26(i)] अब वृत्त को **आठ भागों** में मोड़िए और उन्हें मुड़ी हुई तहों के अनुदिश में काटिए (आकृति 9.26(ii))।



आकृति 9.26



आकृति 9.27

अलग-अलग टुकड़ों को, जैसा आकृति 9.27 में दिखाया गया है, व्यवस्थित कीजिए, जो एक स्थूल रूप से (roughly) समांतर चतुर्भुज को दर्शाता है।

जितने अधिक त्रिज्याखंड होंगे, उतना ही सही समांतर चतुर्भुज हमें प्राप्त होता है।

जैसा ऊपर किया गया है यदि हम वृत्त को 64 त्रिज्याखंडों में विभाजित करें और उन्हें व्यवस्थित करें, तो हमें लगभग एक आयत प्राप्त होता है (आकृति 9.28)।

आकृति 9.28

इस आयत की चौड़ाई क्या है? इस आयत की चौड़ाई वृत्त की त्रिज्या ही है अर्थात् 'r'

जैसाकि पूरे वृत्त को 64 त्रिज्याखंडों में विभाजित किया गया तथा प्रत्येक ओर 32 त्रिज्यखंड हैं। आयत की लंबाई 32 त्रिज्यखंडों की लंबाइयों के बराबर है जो वृत्त की परिधि की आधी है (आकृति 9.28)।

इन्हें कीजिए

ग्राफ़ पेपर पर अलग-अलग त्रिज्याओं के वृत्तों को बनाइए। वर्गों की संख्या को गिनकर क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। सूत्र का प्रयोग करके भी क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। दोनों उत्तरों की तुलना कीजिए।

वृत्त का क्षेत्रफल = बनाए गए आयत का क्षेत्रफल = $l \times b$

= (परिधि का आधा) × त्रिज्या = $\left(\frac{1}{2} \times 2\pi r\right) \times r = \pi r^2$

अतः, वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

उदाहरण 12 30 cm त्रिज्या वाले वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

हल त्रिज्या $r = 30$ cm

वृत्त का क्षेत्रफल = $\pi r^2 = 3.14 \times 30^2 = 2826$ cm^2

उदाहरण 13 एक वृत्ताकार बगीचे का व्यास 9.8 m है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए

हल व्यास, $d = 9.8$ m अत: त्रिज्या $r = 9.8 \div 2 = 4.9$ m

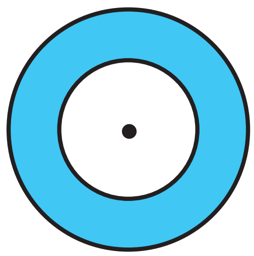
वृत्त का क्षेत्रफल = $\pi r^2 = \frac{22}{7} \times (4.9)^2$ m^2 = $\frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9$ m^2 = 75.46 m^2

उदाहरण 14 संलग्न आकृति दो वृत्तों को दर्शाती है जिनका केंद्र समान है। बड़े वृत्त की त्रिज्या 10 cm और छोटे वृत्त की त्रिज्या 4 cm है।

ज्ञात कीजिए (a) बड़े वृत्त का क्षेत्रफल (b) छोटे वृत्त का क्षेत्रफल

(c) दोनों वृत्तों के बीच छायांकित भाग का क्षेत्रफल ($\pi = 3.14$)

हल



(a) बड़े वृत्त की त्रिज्या = 10 cm

अतः, बड़े वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

= $3.14 \times 10 \times 10 = 314$ cm^2

(b) छोटे वृत्त की त्रिज्या = 4 cm

छोटे वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

= $3.14 \times 4 \times 4 = 50.24$ cm^2

(c) छायांकित भाग का क्षेत्रफल = $(314 - 50.24)$ cm^2 = 263.76 cm^2

प्रश्नावली 9.2

1. निम्न त्रिज्याओं वाले वृत्तों की परिधि ज्ञात कीजिए ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

   (a) 14 cm (b) 28 mm (c) 21 cm

2. निम्न वृत्तों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। दिया गया है :

   (a) त्रिज्या = 14 mm ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए) (b) व्यास = 49 m

   (c) त्रिज्या = 5 cm

3. यदि एक वृत्ताकार शीट की परिधि 154 m हो तो इसकी त्रिज्या ज्ञात कीजिए। शीट का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

4. 21 m व्यास वाले एक वृत्ताकार बगीचे के चारों ओर माली बाड़ लगाना चाहता है। खरीदे जाने वाले आवश्यक रस्से की लंबाई ज्ञात कीजिए, यदि वह 2 पूरे चक्कर की बाड़ बनाना चाहता है। 4 रु प्रति मीटर की दर से रस्से पर व्यय ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

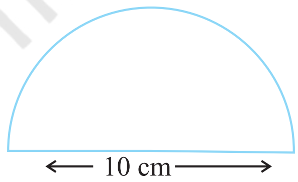
5. 4 cm त्रिज्या वाली एक वृत्ताकार शीट में से 3 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त को निकाल दिया जाता है। शीट के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

6. साइमा 1.5 m व्यास वाले एक वृत्ताकार टेबल कवर के चारों ओर किनारी लगाना चाहती है। आवश्यक किनारी की लंबाई ज्ञात कीजिए और ₹ 15 प्रति मीटर की दर से किनारी लगाने का व्यय ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

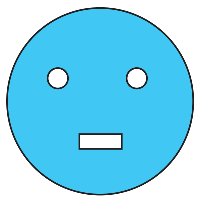
7. दी गई आकृति, व्यास के साथ एक अर्धवृत्त है। उसका परिमाप ज्ञात कीजिए।

8. 15 रु प्रति वर्ग मीटर की दर से, 1.6 m व्यास वाले एक वृत्ताकार टेबल के ऊपरी सतह पर पॉलिश कराने का व्यय ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

9. शाझली 44 cm लंबाई वाली एक तार लेती है और उसे एक वृत्त के आकार में मोड़ देती है। उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। इसका क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए। यदि इसी तार को दुबारा एक वर्ग के आकार में मोड़ा जाता है, तो इसकी प्रत्येक भुजा की लंबाई क्या होगी? कौन–सी आकृति अधिक क्षेत्रफल घेरती है वृत्त या वर्ग? ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)



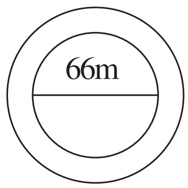
10. 14 cm त्रिज्या वाली एक वृत्ताकार गत्ते की शीट में से, 3.5 cm त्रिज्या वाले दो वृत्तों को और 3 cm लंबाई तथा 1 cm चौड़ाई वाले एक आयत को निकाल दिया जाता है (जैसाकि आकृति में दिखाया गया है) शीट के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)।



11. 6 cm भुजा वाले एक वर्गाकार एल्युमिनियम शीट के टुकड़े में से 2 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त को काट दिया जाता है। शीट के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए? ($\pi = 3.14$ लीजिए)

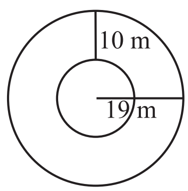
12. एक वृत्त की परिधि 31.4 cm है। वृत्त की त्रिज्या और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए? ($\pi = 3.14$ लीजिए)

13. एक वृत्ताकार फूलों की क्यारी के चारों ओर 4 m चौड़ा पथ है तथा फूलों की क्यारी का व्यास 66 m है। इस पथ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए? ($\pi = 3.14$ लीजिए)



14. एक वृत्ताकार फूलों के बगीचे का क्षेत्रफल 314 m^2 है। बगीचे के केंद्र में एक घूमने वाला फव्वारा (sprinkler) लगाया जाता है, जो अपने चारों ओर 12 m त्रिज्या के क्षेत्रफल में पानी का छिड़काव करता है। क्या फव्वारा पूरे बगीचे में पानी का छिड़काव कर सकेगा। ($\pi = 3.14$)

15. आकृति में, अंतः और बाह्य वृत्तों की परिधि ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)



16. 28 cm त्रिज्या वाले एक पहिए को 352 m दूरी तय करने के लिए कितनी बार घुमाना पड़ेगा? ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

17. एक वृत्ताकार घड़ी की मिनट की सुई की लंबाई 15 cm है। मिनट की सुई की नोक 1 घंटे में कितनी दूरी तय करती है। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

हमने क्या चर्चा की?

1. एक समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार $\times$ ऊँचाई
2. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (इससे प्राप्त समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल)
   $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई
3. एक वृत्ताकार क्षेत्र के चारों ओर की दूरी इसकी परिधि कहलाती है। एक वृत्त की परिधि $= \pi d$, जहाँ d वृत्त का व्यास और $\pi = \frac{22}{7}$ या 3.14 (लगभग) है।

बीजीय व्यंजक

0757CH12

अध्याय 10

10.1 भूमिका

हम $x + 3$, $y - 5$, $4x + 5$, $10y - 5$, इत्यादि जैसे सरल बीजीय व्यंजकों से परिचित हो चुके हैं। कक्षा VI में, हमने देखा था कि ये व्यंजक किस प्रकार पहेलियों और समस्याओं को एक सुव्यवस्थित प्रकार से प्रस्तुत करने में सहायक होते हैं। हम सरल समीकरणों वाले अध्याय में भी व्यंजकों के अनेक उदाहरणों को देख चुके हैं।

बीजगणित में व्यंजकों (expressions) को एक केंद्रीय अवधारणा माना जाता है। यह अध्याय बीजीय व्यंजकों से संबद्ध होगा। जब आप इस अध्याय को पढ़ लेंगे, तो आपको ज्ञात हो जाएगा कि बीजीय व्यंजक किस प्रकार बनते हैं, इन्हें किस प्रकार संयोजित किया (मिलाया) जाता है, इनके मान हम कैसे ज्ञात कर सकते हैं तथा इनका किस प्रकार उपयोग किया जा सकता है।

10.1 व्यंजक किस प्रकार बनते हैं ?

अब हम भली भाँति जानते हैं कि एक चर (variable) क्या होता है। हम चरों को व्यक्त करने के लिए, अक्षरों $x, y, l, m, \ldots$ इत्यादि का प्रयोग करते हैं। एक **चर** के विभिन्न मान हो सकते हैं। इसका मान निश्चित नहीं होता है। इसके दूसरी ओर **अचर** (constant) का एक निश्चित मान होता है। अचरों के उदाहरण $4, 100, -17$, इत्यादि हैं।

हम चरों और अचरों को संयोजित करके बीजीय व्यंजकों को बनाते हैं। इसके लिए हम योग, व्यवकलन, गुणन और विभाजन की संक्रियाओं का प्रयोग करते हैं। हम, $4x + 5$, $10y - 20$ जैसे व्यंजकों को पहले ही देख चुके हैं। व्यंजक $4x + 5$, 'x' चर के प्रयोग से बना है, जिसमें पहले चर x को अचर 4 से गुणा करके और फिर इस गुणनफल में अचर 5 जोड़ कर प्राप्त किया जाता है। इसी प्रकार, $10y - 20$ पहले चर y को अचर 10 से गुणा करके और फिर इस गुणनफल में से 20 घटा कर प्राप्त किया जाता है।

उपरोक्त व्यंजक चरों और अचरों को संयोजित करके प्राप्त किए गए थे। हम व्यंजकों को, चरों को स्वयं उन चरों से अथवा अन्य चरों से संयोजित करके भी प्राप्त कर सकते हैं।

देखिए कि निम्नलिखित व्यंजक किस प्रकार प्राप्त किए जाते हैं ?

$$x^2, 2y^2, 3x^2 - 5, xy, 4xy + 7$$

(i) व्यंजक x^2 चर x को स्वयं x से गुणा करके प्राप्त किया जाता है।

अर्थात् $x \times x = x^2$ है।

जिस प्रकार $4 \times 4 = 4^2$ लिखा जाता है, उसी प्रकार हम $x \times x = x^2$. लिखते हैं। इसे सामान्यत: x का वर्ग (x squared) पढ़ा जाता है।

[बाद में, जब आप 'घातांक और घात' वाले अध्याय का अध्ययन करेंगे, तब आप अनुभव करेंगे कि x^2 को x के ऊपर घात 2 भी पढ़ा जा सकता है]।

इसी प्रकार, हम लिख सकते हैं : $x \times x \times x = x^3$

सामान्यत:, x^3 को x का घन (x cubed) पढ़ा जाता है। बाद में, आप यह अनुभव करेंगे कि x^3 को x के ऊपर घात 3 भी पढ़ा जा सकता है।

$x, x^2, x^3, \ldots$ में से प्रत्येक x से प्राप्त एक बीजीय व्यंजक है।

(ii) व्यंजक $2y^2$ को y से इस प्रकार प्राप्त किया जाता है: $2y^2 = 2 \times y \times y$

यहाँ, हम y को y से गुणा करके y^2 प्राप्त करते हैं और फिर इस गुणनफल y^2 को 2 से गुणा करते हैं।

(iii) $(3x^2 - 5)$ में, हम पहले x^2 प्राप्त करते हैं और फिर उसे 3 से गुणा करके $3x^2$ प्राप्त करते हैं। अंत में, $3x^2 - 5$ पर पहुँचने के लिए, हम $3x^2$ में से 5 को घटाते हैं।

(iv) xy में, हम चर x को एक अन्य चर y से गुणा करते हैं। इस प्रकार, $x \times y = xy$।

(v) $4xy + 7$ में, हम पहले xy प्राप्त करते हैं; उसे 4 से गुणा करके $4xy$ प्राप्त करते हैं और फिर दिया हुआ व्यंजक प्राप्त करने के लिए, $4xy$ में 7 जोड़ते हैं।

प्रयास कीजिए

बताइए कि निम्नलिखित व्यंजक किस प्रकार प्राप्त किए जाते हैं :

$7xy + 5, x^2y, 4x^2 - 5x$

10.3 एक व्यंजक के पद

अभी तक ऊपर हमने पढ़ा है कि व्यंजक किस प्रकार बनाए जाते हैं, अब हम उसे एक सुव्यवस्थित रूप में रखेंगे। इस कार्य के लिए, हमें यह जानने की आवश्यकता है कि एक व्यंजक के पद (terms) और उनके गुणनखंड (factors) क्या होते हैं, अर्थात् उनके अर्थ क्या हैं।

व्यंजक $(4x + 5)$ पर विचार कीजिए। इस व्यंजक को बनाने के लिए, पहले हमने अलग से 4 और x का गुणा करके $4x$ बनाया था और फिर इसमें 5 जोड़ दिया था। इसी प्रकार, व्यंजक $(3x^2 + 7y)$ पर विचार कीजिए। यहाँ, हमने पहले अलग से 3, x और x का गुणा करके $3x^2$ बनाया था। फिर हमने अलग से 7 और y का गुणा करके $7y$ बनाया था। $3x^2$ और $7y$ बनाने के बाद, हमने दिया हुआ व्यंजक प्राप्त करने के लिए, इनको जोड़ दिया था।

आप पाएँगे कि हम जितने भी व्यंजकों पर कार्य करते हैं वे सभी इसी रूप में देखे जा सकते हैं। इनके भाग होते हैं जो अलग से बनाए जाते हैं और फिर जोड़ दिए जाते हैं। व्यंजकों के इस प्रकार के भाग, जो पहले अलग से बनाए जाते हैं और फिर जोड़ दिए जाते हैं, इस व्यंजक के **पद** कहलाते हैं। व्यंजक $4x^2 - 3xy$ को देखिए। हम कहते हैं कि इसके दो पद $4x^2$ और $-3xy$ हैं। पद $4x^2$; 4, x और x का गुणनफल है तथा पद $-3xy$; -3, x और y का गुणनफल है।

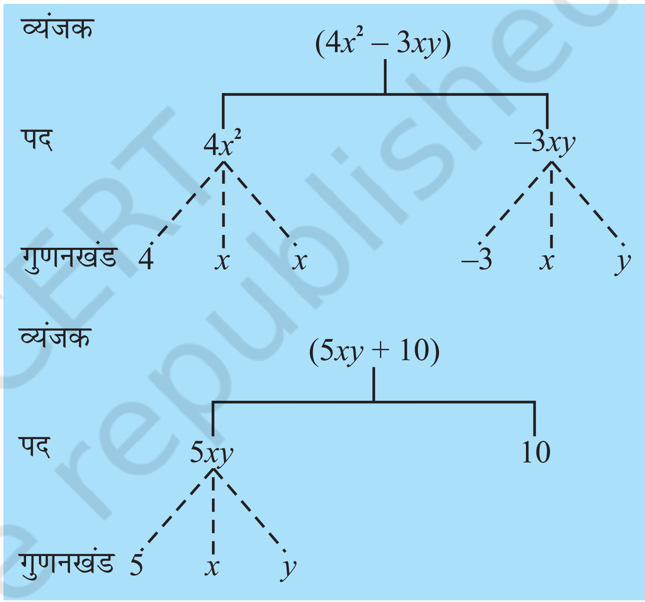
व्यंजकों को बनाने के लिए पदों को जोड़ा जाता है। जिस प्रकार व्यंजक $(4x + 5)$ को बनाने के लिए $4x$ और 5 को जोड़ा जाता है, उसी प्रकार व्यंजक $(4x^2 – 3xy)$ को बनाने के लिए $4x^2$ और $(– 3xy)$ को जोड़ा जाता है। इसका कारण $4x^2 + (–3xy) = 4x^2 – 3xy$ होता है।

ध्यान दीजिए कि पद में ऋण *(minus)* चिह्न सम्मिलित होता है। व्यंजक $4x^2 –3xy$ में, हमने पद को $3xy$ न लेकर $(–3xy)$ लिया था। इसलिए, हमें यह कहने कि आवश्यकता नहीं है कि एक व्यंजक को बनाने के लिए, पदों को जोड़ा या घटाया जाता है। इसके लिए केवल यह कहना ही पर्याप्त है कि पदों को जोड़ा जाता है।

एक पद के गुणनखंड

हमने ऊपर देखा था कि व्यंजक $(4x^2 – 3xy)$ के दो पद $4x^2$ और $–3xy$ हैं। पद $4x^2$; $4, x$ और x का गुणनफल है। हम कहते हैं कि $4, x$ और x पद $4x^2$ के गुणनखंड (factors) हैं। एक पद अपने गुणनखंडों का एक गुणनफल होता है। पद $–3xy$, गुणनखंडों $–3, x$ और y का एक गुणनफल है।

हम एक व्यंजक के पदों तथा पदों के गुणनखंडों को एक सुविधाजनक और आकर्षक प्रकार से एक व्यंजक पेड़ आरेख (tree diagram) द्वारा निरूपित कर सकते हैं। व्यंजक $(4x^2 – 3xy)$ का पेड़ संलग्न आकृति में दर्शाया गया है।



ध्यान दीजिए कि पेड़ आरेख में, हमने गुणनखंड के लिए बिंदुकित रेखाओं का प्रयोग किया तथा पदों के लिए सतत रेखाओं का प्रयोग किया है। यह इनके मिश्रित न होने के लिए किया गया है।

आइए व्यंजक $5xy + 10$ का पेड़ आरेख खींचें। गुणनखंड ऐसे लिखे जाएँ कि जिनके आगे गुणनखंड न हो सके। इस प्रकार, हम $5xy$ को $5 \times xy$ के रूप में नहीं लिखते हैं, क्योंकि xy के आगे और भी गुणनखंड हो सकते हैं। इसी प्रकार, यदि x^3 एक पद होता, तो इसे $x \times x^2$ न लिख कर $x\times x \times x$ लिखा जाए। साथ ही, याद रखिए 1 को अलग से गुणनखंड नहीं लिया जाता है।

प्रयास कीजिए

1. निम्नलिखित व्यंजकों में कौन-कौन से पद हैं ? दर्शाइए कि ये व्यंजक कैसे बनाए जाते हैं। प्रत्येक व्यंजक के लिए एक पेड़ आरेख भी खींचिए।
   $8y + 3x^2$, $7mn – 4$, $2x^2 y$
2. ऐसे तीन व्यंजक लिखिए, जिनमें से प्रत्येक में चार पद हों।

गुणांक

हम एक पद को उसके गुणनखंडों के एक गुणनफल के रूप में लिखना सीख चुके हैं। इनमें से एक गुणनखंड संख्यात्मक (numerical) हो सकता है तथा अन्य बीजीय (algebraic) हो सकते हैं (अर्थात् इनमें चर होते हैं)। इस संख्यात्मक गुणनखंड को **पद का संख्यात्मक गुणांक (numerical coefficient)** या केवल **गुणांक** कहते हैं। इसे शेष पद (जो स्पष्टत: बीजीय गुणनखंडों का गुणनफल है) का गुणांक भी कहते हैं। इस प्रकार, पद $5xy$ में, xy का गुणांक 5 है। इसी प्रकार, पद $10xyz$, में xyz का गुणांक 10 है तथा पद $-7x^2y^2$ में x^2y^2 का गुणांक -7 है।

जब किसी पद का गुणांक $+1$ होता है, प्राय: उसे लिखते समय छोड़ दिया जाता है। उदाहरणार्थ, $1x$ को x लिखा जाता है, $1x^2y^2$ को x^2y^2 लिखा जाता है, इत्यादि। साथ ही, गुणांक (-1) को केवल ऋण चिह्न $(-)$ से दर्शाया जाता है। इस प्रकार, $(-1)x$ को $-x$ लिखा जाता है, $(-1)x^2y^2$ को $-x^2y^2$ लिखा जाता है, इत्यादि।

कभी-कभी शब्द गुणांक का प्रयोग एक अधिक व्यापक रूप में प्रयोग किया जाता है। इस रूप में, हम कहते हैं कि पद $5xy$ में, xy का गुणांक 5 है, $5y$ का गुणांक x है तथा $5x$ का गुणांक y है। $10xy^2$ में, xy^2 का गुणांक 10 है, $10y^2$ का गुणांक x है तथा $10x$ का गुणांक y^2 है। इस प्रकार, इसे अधिक व्यापक रूप में, गुणांक एक संख्यात्मक गुणनखंड हो सकता है या एक बीजीय गुणनखंड हो सकता है या दो या अधिक गुणनखंडों का गुणनफल भी हो सकता है। इसे शेष गुणनखंडों के गुणनफल का गुणांक कहा जाता है।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित व्यंजकों के पदों के गुणांकों की पहचान कीजिए :

$4x - 3y$, $a + b + 5$, $2y + 5$, $2xy$

उदाहरण 1 निम्नलिखित व्यंजकों में, वे पद छाँटिए जो अचर नहीं हैं। उनके संख्यात्मक गुणांक भी लिखिए :

$xy + 4$, $13 - y^2$, $13 - y + 5y^2$, $4p^2q - 3pq^2 + 5$

हल

क्रम संख्या	व्यंजक	पद (जो अचर नहीं है)	संख्यात्मक गुणांक
(i)	$xy + 4$	xy	1
(ii)	$13 - y^2$	$-y^2$	-1
(iii)	$13 - y + 5y^2$	$-y$ $5y^2$	-1 5
(iv)	$4p^2q - 3pq^2 + 5$	$4p^2q$ $-3pq^2$	4 -3

उदाहरण 2

(a) निम्नलिखित व्यंजकों में x के क्या गुणांक हैं ?

$$4x - 3y,\ 8 - x + y,\ y^2x - y,\ 2z - 5xz$$

(b) निम्नलिखित व्यंजकों में y के क्या गुणांक हैं ?

$$4x - 3y,\ 8 + yz,\ yz^2 + 5,\ my + m$$

हल

(a) प्रत्येक व्यंजक में, हम गुणनखंड x वाले पद को देखते हैं। उस पद का शेष भाग x का वांछित गुणांक होगा।

क्रम संख्या	व्यंजक	गुणनखंड x वाला पद	x का गुणांक
(i)	$4x - 3y$	$4x$	4
(ii)	$8 - x + y$	$-x$	-1
(iii)	$y^2x - y$	y^2x	y^2
(iv)	$2z - 5xz$	$-5xz$	$-5z$

(b) इसकी विधि उपरोक्त (a) की विधि जैसी ही है।

क्रम संख्या	व्यंजक	गुणनखंड y वाला पद	y का गुणांक
(i)	$4x - 3y$	$-3y$	-3
(ii)	$8 + yz$	yz	z
(iii)	$yz^2 + 5$	yz^2	z^2
(iv)	$my + m$	my	m

10.4 समान और असमान पद

जब पदों के बीजीय गुणनखंड एक जैसे ही हों, तो वे पद **समान पद (like terms)** कहलाते हैं। जब पदों के बीजीय गुणनखंड भिन्न-भिन्न हों, तो वे **असमान पद** (unlike terms) कहलाते हैं। उदाहरणार्थ व्यंजक $2xy - 3x + 5xy - 4$, में पदों $2xy$ और $5xy$ को देखिए। $2xy$ के गुणनखंड $2, x$ और y है। $5xy$ के गुणनखंड $5, x$ और y हैं। इस प्रकार, इनके बीजीय (अर्थात् वे जिनमें चर हैं) गुणनखंड एक ही हैं और इसीलिए ये **समान पद** हैं। इसके विपरीत, पदों $2xy$ और $-3x$ में भिन्न-भिन्न बीजीय गुणनखंड हैं। ये **असमान पद** हैं। इसी प्रकार, पद $2xy$ और 4 असमान पद हैं। साथ ही, $-3x$ और 4 भी असमान पद हैं।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित में, समान पदों के समूह बनाइए :

$12x, 12, -25x, -25, -25y, 1, x, 12y, y$

10.5 एकपदी, द्विपद, त्रिपद और बहुपद

वह बीजीय व्यंजक जिसमें केवल एक पद हो, **एकपदी** (monomial) कहलाता है, जैसे $7xy, -5m, 3z^2, 4$ इत्यादि।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित व्यंजकों को एकपदी, द्विपद और त्रिपद के रूप में वर्गीकृत कीजिए : a, $a + b$, $ab + a + b$, $ab + a + b - 5$, xy, $xy + 5$, $5x^2 - x + 2$, $4pq - 3q + 5p$, 7, $4m - 7n + 10$, $4mn + 7$.

एक व्यंजक जिसमें केवल दो पद हों और वे असमान पद हों वह **द्विपद** (binomial) कहलाता है, उदाहरणार्थ $x + y$, $m - 5$, $mn + 4m$, $a^2 - b^2$ द्विपद हैं। व्यंजक $10pq$ एक द्विपद नहीं है यह एक एकपदी है। व्यंजक $(a + b + 5)$ एक द्विपद नहीं है। इसमें तीन पद हैं।

एक व्यंजक जिसमें तीन पद हों, **एक त्रिपद** (trinomial) कहलाता है, उदाहरणार्थ $x + y + 7$, $ab + a + b$, $3x^2 - 5x + 2$, $m + n + 10$ त्रिपद हैं। परंतु व्यंजक $ab + a + b + 5$ एक त्रिपद नहीं है इसमें तीन पद न होकर चार पद हैं। व्यंजक $x + y + 5x$ एक त्रिपद नहीं है क्योंकि पद x और $5x$ समान पद हैं।

व्यापक रूप में, एक या, अधिक पदों वाला व्यंजक **एक बहुपद** (Polynomial) कहलाता है। इस प्रकार, एकपदी, द्विपदी और त्रिपदी भी बहुपद हैं।

उदाहरण 3 कारण सहित बताइए कि पदों के निम्नलिखित युग्मों में कौन-कौन से युग्म समान पदों के हैं तथा कौन-कौन से युग्म असमान पदों के हैं :

(i) $7x$, $12y$ (ii) $15x$, $-21x$ (iii) $-4ab$, $7ba$ (iv) $3xy$, $3x$

(v) $6xy^2$, $9x^2y$ (vi) pq^2, $-4pq^2$ (vii) mn^2, $10mn$

हल

क्रम संख्या	युग्म	गुणनखंड	बीजीय गुणनखंड एक ही हैं या भिन्न-भिन्न हैं	समान/असमान पद	टिप्पणी
(i)	$7x$ $12y$	$7, x$ $12, y$	भिन्न-भिन्न	असमान	पदों में चर भिन्न-भिन्न हैं
(ii)	$15x$ $-21x$	$15, x$ $-21, x$	एक ही हैं	समान	
(iii)	$-4ab$ $7ba$	$-4, a, b$ $7, b, a$	एक ही हैं	समान	याद रखिए $ab = ba$
(iv)	$3xy$ $3x$	$3, x, y$ $3, x$	भिन्न-भिन्न	असमान	चर y केवल पहले पद में है
(v)	$6xy^2$ $9x^2y$	$6, x, y, y$ $9, x, x, y$	भिन्न-भिन्न	असमान	दोनों पदों में चर तो एक जैसे हैं; परंतु इनकी घातें अलग अलग हैं
(vi)	pq^2 $-4pq^2$	$1, p, q, q$ $-4, p, q, q$	एक ही हैं	समान	ध्यान दीजिए संख्यात्मक गुणांक 1 दिखाया नहीं जाता है

निम्नलिखित सरल चरण आपको यह निर्णय लेने में सहायक होंगे कि दिए हुए पद **समान** पद हैं या **असमान** पद हैं :

(i) संख्यात्मक गुणांकों पर ध्यान न दीजिए। पदों के बीजीय भाग पर अपना ध्यान केंद्रित कीजिए।

(ii) पदों में चरों की जाँच कीजिए। ये एक ही होने चाहिए।

(iii) अब, पदों में प्रत्येक चर की घातों की जाँच कीजिए। ये एक ही होनी चाहिए।

ध्यान दीजिए कि समान पदों के बारे मे निर्णय लेते समय, इन दो बातों से कोई प्रभाव नहीं पड़ता है : (1) पदों के संख्यात्मक गुणांक तथा (2) पदों में चरों के गुणा करने का क्रम।

प्रश्नावली 10.1

1. निम्नलिखित स्थितियों में, चरों, अचरों और अंक गणितीय संक्रियाओं का प्रयोग करते हुए, बीजीय व्यंजक प्राप्त कीजिए :

(i) संख्या y में से z को घटाना।

(ii) संख्याओं x और y के योग का आधा।

(iii) संख्या z को स्वयं उससे गुणा किया जाता है।

(iv) संख्याओं p और q के गुणनफल का एक-चौथाई।

(v) दोनों संख्याओं x और y के वर्गों को जोड़ा जाता है।

(vi) संख्याओं m और n के गुणनफल के तीन गुने में संख्या 5 जोड़ना।

(vii) 10 में से संख्याओं y और z गुणनफल को घटाना।

(viii) संख्याओं a और b के गुणनफल में से उनके योग को घटाना।

2. (i) निम्नलिखित व्यंजकों में पदों ओर उनके गुणनखंडों को छाँटिए। पदों और उनके गुणनखंडों को पेड़ आरेखों द्वारा भी दर्शाइए।

(a) $x - 3$ (b) $1 + x + x^2$ (c) $y - y^3$

(d) $5xy^2 + 7x^2y$ (e) $- ab + 2b^2 - 3a^2$

(ii) नीचे दिए व्यंजकों में, पदों और उनके गुणनखंडों को छाँटिए।

(a) $- 4x + 5$ (b) $- 4x + 5y$ (c) $5y + 3y^2$

(d) $xy + 2x^2y^2$ (e) $pq + q$ (f) $1.2\, ab - 2.4\, b + 3.6\, a$

(g) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ (h) $0.1\, p^2 + 0.2\, q^2$

3. निम्नलिखित व्यंजकों में पदों के संख्यात्मक गुणांकों, जो अचर न हों, की पहचान कीजिए।

(i) $5 - 3t^2$ (ii) $1 + t + t^2 + t^3$ (iii) $x + 2xy + 3y$

(iv) $100m + 1000n$ (v) $- p^2q^2 + 7pq$ (vi) $1.2\, a + 0.8\, b$

(vii) $3.14\, r^2$ (viii) $2\,(l + b)$ (ix) $0.1\, y + 0.01\, y^2$

4. (a) वे पद पहचानिए जिनमें x है और फिर इनमें x का गुणांक लिखिए।

(i) $y^2x + y$ (ii) $13y^2 - 8yx$ (iii) $x + y + 2$

(iv) $5 + z + zx$ (v) $1 + x + xy$ (vi) $12xy^2 + 25$

(vii) $7 + xy^2$

(b) वे पद पहचानिए जिनमें y^2 है और फिर इनमें y^2 का गुणांक लिखिए।

(i) $8 - xy^2$ (ii) $5y^2 + 7x$ (iii) $2x^2y - 15xy^2 + 7y^2$

5. निम्नलिखित व्यंजकों को एकपदी, द्विपद और त्रिपद के रूप में वर्गीकृत कीजिए :
(i) $4y - 7z$ (ii) y^2 (iii) $x + y - xy$ (iv) 100
(v) $ab - a - b$ (vi) $5 - 3t$ (vii) $4p^2q - 4pq^2$ (viii) $7mn$
(ix) $z^2 - 3z + 8$ (x) $a^2 + b^2$ (xi) $z^2 + z$ (xii) $1 + x + x^2$

6. बताइए कि दिए हुए पदों के युग्म समान पदों के हैं या असमान पदों के हैं :
(i) $1, 100$ (ii) $-7x, \frac{5}{2}x$ (iii) $-29x, -29y$
(iv) $14xy, 42yx$ (v) $4m^2p, 4mp^2$ (vi) $12xz, 12x^2z^2$

7. निम्नलिखित में समान पदों को छाँटिए :
(a) $-xy^2, -4yx^2, 8x^2, 2xy^2, 7y, -11x^2, -100x, -11yx, 20x^2y, -6x^2, y, 2xy, 3x$
(b) $10pq, 7p, 8q, -p^2q^2, -7qp, -100q, -23, 12q^2p^2, -5p^2, 41, 2405p, 78qp, 13p^2q, qp^2, 701p^2$

10.7 किसी व्यंजक का मान ज्ञात करना

हम जानते हैं कि एक बीजीय व्यंजक का मान उस व्यंजक को बनाने वाले चरों के मानों पर निर्भर करता है। ऐसी अनेक स्थितियाँ हैं, जहाँ हमें व्यंजकों के मान ज्ञात करने होते हैं, जैसे कि हम यह जाँच करना चाहते हैं कि चर का एक विशेष मान एक दिए हुए समीकरण को संतुष्ट करता है या नहीं।

जब हम ज्यामिति और प्रतिदिन की गणित के सूत्रों का प्रयोग करते हैं, तो भी हम व्यंजकों के मान ज्ञात करते हैं। उदाहरणार्थ, भुजा l वाले वर्ग का क्षेत्रफल l^2 होता है। यदि $l = 5$ cm है, तो क्षेत्रफल 5^2 cm^2 = 25 cm^2 है। यदि भुजा = 10 cm है, तो क्षेत्रफल 10^2 cm^2 या 100 cm^2 है, इत्यादि। ऐसे कुछ और उदाहरणों को हम अगले अनुच्छेद में देखेंगे।

उदाहरण 7 निम्नलिखित व्यंजकों के मान $x = 2$ के लिए ज्ञात कीजिए :
(i) $x + 4$ (ii) $4x - 3$ (iii) $19 - 5x^2$ (iv) $100 - 10x^3$

हल

(i) $x + 4$ में, $x = 2$ रखने पर, हमें $x + 4$ का निम्नलिखित मान प्राप्त होता है:
$x + 4 = 2 + 4 = 6$

(ii) $4x - 3$ में, $x = 2$ रखने पर, हमें प्राप्त होता है:
$4x - 3 = (4 \times 2) - 3 = 8 - 3 = 5$

(iii) $19 - 5x^2$ में, $x = 2$ रखने पर, हमें प्राप्त होता है:
$19 - 5x^2 = 19 - (5 \times 2^2) = 19 - (5 \times 4) = 19 - 20 = -1$

(v) $100 - 10x^3$ में, $x = 2$ रखने पर, हमें प्राप्त होता है :
$100 - 10x^3 = 100 - (10 \times 2^3) = 100 - (10 \times 8)$ [ध्यान दीजिए कि $2^3 = 8$ है]
$= 100 - 80 = 20$

उदाहरण 8 निम्नलिखित व्यंजकों के मान ज्ञात कीजिए, जब $n = -2$
(i) $5n - 2$ (ii) $5n^2 + 5n - 2$ (iii) $n^3 + 5n^2 + 5n - 2$ है :

हल

(i) $5n - 2$ में, $n = -2$ रखने पर, हमें प्राप्त होता है:

$5(-2) - 2 = -10 - 2 = -12$

(ii) $5n^2 + 5n - 2$ में $n = -2$ के लिए, $5n - 2 = -12$ है,

और, $5n^2 = 5 \times (-2)^2 = 5 \times 4 = 20$ [चूँकि $(-2)^2 = 4$]

दोनों को मिलाने पर, हमें प्राप्त होता है :

$5n^2 + 5n - 2 = 20 - 12 = 8$

(iii) अब, $n = -2$ के लिए

$5n^2 + 5n - 2 = 8$ है तथा

$n^3 = (-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$ है।

दोनों के मिलाने पर,

$n^3 + 5n^2 + 5n - 2 = -8 + 8 = 0$

अब हम दो चरों के व्यंजकों, जैसे $x + y$, xy इत्यादि पर विचार करेंगे। दो चरों वाले एक व्यंजक का संख्यात्मक मान ज्ञात करने के लिए, हमें इसमें दोनों चरों के मान रखने की आवश्यकता होती है। उदाहरणार्थ, $x = 3$ और $y = 5$ के लिए $(x + y)$ का मान $3 + 5 = 8$ है।

उदाहरण 6 $a = 3$ और $b = 2$ के लिए, निम्नलिखित व्यंजकों के मान ज्ञात कीजिए:

(i) $a + b$ (ii) $7a - 4b$ (iii) $a^2 + 2ab + b^2$ (iv) $a^3 - b^3$

हल दिए हुए व्यंजकों में, $a = 3$ और $b = 2$ रखने पर, हमें प्राप्त होता है :

(i) $a + b = 3 + 2 = 5$

(ii) $7a - 4b = 7 \times 3 - 4 \times 2 = 21 - 8 = 13.$

(iii) $a^2 + 2ab + b^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times 2 + 2^2 = 9 + 12 + 4 = 25$

(iv) $a^3 - b^3 = 3^3 - 2^3 = 3 \times 3 \times 3 - 2 \times 2 \times 2 = 9 \times 3 - 4 \times 2 = 27 - 8 = 19$

प्रश्नावली 10.2

1. यदि $m = 2$ है, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $m - 2$ (ii) $3m - 5$ (iii) $9 - 5m$

(iv) $3m^2 - 2m - 7$ (v) $\frac{5m}{2}$ 4

2. यदि $p = -2$ है, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $4p + 7$ (ii) $-3p^2 + 4p + 7$ (iii) $-2p^3 - 3p^2 + 4p + 7$

3. निम्नलिखित व्यंजकों के मान ज्ञात कीजिए, जब $x = -1$ है :

(i) $2x - 7$ (ii) $-x + 2$ (iii) $x^2 + 2x + 1$

(iv) $2x^2 - x - 2$

4. यदि $a = 2$ और $b = -2$ है, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $a^2 + b^2$ (ii) $a^2 + ab + b^2$ (iii) $a^2 - b^2$

5. जब $a = 0$ और $b = -1$ है, तो दिए हुए व्यंजकों के मान ज्ञात कीजिए :
   (i) $2a + 2b$ (ii) $2a^2 + b^2 + 1$ (iii) $2a^2b + 2ab^2 + ab$
   (iv) $a^2 + ab + 2$

6. इन व्यंजकों को सरल कीजिए तथा इनके मान ज्ञात कीजिए, जब x का मान 2 है :
   (i) $x + 7 + 4(x - 5)$ (ii) $3(x + 2) + 5x - 7$
   (iii) $6x + 5(x - 2)$ (iv) $4(2x - 1) + 3x + 11$

7. इन व्यंजकों को सरल कीजिए तथा इनके मान ज्ञात कीजिए, जब $x = 3$, $a = -1$और $b = -2$ है:
   (i) $3x - 5 - x + 9$ (ii) $2 - 8x + 4x + 4$
   (iii) $3a + 5 - 8a + 1$ (iv) $10 - 3b - 4 - 5b$
   (v) $2a - 2b - 4 - 5 + a$

8. (i) यदि $z = 10$ है, तो $z^3 - 3(z - 10)$ का मान ज्ञात कीजिए :
   (ii) यदि $p = -10$ है, तो $p^2 - 2p - 100$ का मान ज्ञात कीजिए।

9. यदि $x = 0$ पर $2x^2 + x - a$ का मान 5 के बराबर है, तो a का मान क्या होना चाहिए ?

10. व्यंजक $2(a^2 + ab) + 3 - ab$ को सरल कीजिए और इसका मान ज्ञात कीजिए, जब $a = 5$ और $b = -3$ है।

हमने क्या चर्चा की ?

1. **चरों** और **अचरों** से **बीजीय व्यंजक** बनते हैं। व्यंजकों को बनाने के लिए, हम चरों और अचरों पर योग, व्यवकलन, गुणन और विभाजन की संक्रियाएँ करते हैं। उदाहरणार्थ, व्यंजक $4xy + 7$ चरों x और y तथा अचरों 4 और 7 से बनाया गया है। अचर 4 तथा चरों x और y को गुणा करके $4xy$ बनाकर उसमें 7 जोड़ कर $4xy + 7$ बनाया जाता है।
2. व्यंजक **पदों** से मिलकर बनते हैं। पदों को जोड़ कर व्यंजक बनाया जाता है। उदाहरणार्थ, पदों $4xy$ और 7 को जोड़ने से व्यंजक $4xy + 7$ बन जाता है।
3. एक **पद**, **गुणनखंडों** का एक **गुणनफल** होता है। व्यंजक $4xy + 7$ में पद $4xy$ गुणनखंडों x, y और 4 का एक गुणनफल है। चरों वाले गुणनखंड **बीजीय गुणनखंड** कहलाते हैं।
4. पद का **गुणांक** उसका संख्यात्मक गुणनखंड होता है। कभी-कभी पद का कोई भी एक गुणनखंड पद के शेष भाग का गुणांक कहलाता है।

5. एक या अधिक पदों से बना व्यंजक एक **बहुपद** कहलाता है। विशिष्ट रूप से, एक पद वाला व्यंजक **एकपदी**, दो पदों वाला व्यंजक **द्विपद** तथा तीन पदों वाला व्यंजक **त्रिपद** कहलाता है।
6. वे पद जिनमें बीजीय गुणनखंड एक जैसे हों, **समान पद** कहलाते हैं तथा भिन्न-भिन्न बीजीय गुणनखंडों वाले पद **असमान पद** कहलाते हैं। इस प्रकार $4xy$ और $-3xy$ समान पद हैं, परंतु $4xy$ और $-3x$ समान पद नहीं हैं।
7. एक समीकरण को हल करने और किसी सूत्र का प्रयोग करने जैसी स्थितियों में, हमें एक **व्यंजक का मान** ज्ञात करने की आवश्यकता होती है। बीजीय व्यंजक का मान उन चरों के मानों पर निर्भर करता है, जिनसे वह बनाया गया है। इस प्रकार, $x = 5$ के लिए $7x - 3$ का मान 32, है क्योंकि $7 \times 5 - 3 = 32$ है।

अध्याय 11

घातांक और घात

0757CH13

11.1 भूमिका

क्या आप जानते हैं कि पृथ्वी का द्रव्यमान (mass) क्या है? यह 5,970,000,000,000,000,000,000,000 kg है!

क्या आप इस संख्या को पढ़ सकते हैं?

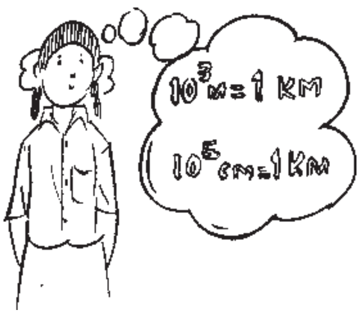
यूरेनस ग्रह (Uranus) का द्रव्यमान 86,800,000,000,000,000,000,000,000 kg है।

किसका द्रव्यमान अधिक है–पृथ्वी या यूरेनस ग्रह?

सूर्य (Sun) और शनि (Saturn) के बीच की दूरी 1,433,500,000,000 m है तथा शनि और यूरेनस ग्रह के बीच की दूरी 1,439,000,000,000 m है। क्या आप इन संख्याओं को पढ़ सकते हैं? इनमें कौन-सी दूरी कम है?

ऐसी बहुत बड़ी संख्याओं का पढ़ना, समझना और इनकी तुलना करना कठिन होता है। इन संख्याओं को सरलता से पढ़ने, समझने और इनकी तुलना करने के लिए, हम घातांकों (exponents) का प्रयोग करते हैं। इस अध्याय में, हम घातांकों के बारे में सीखेंगे तथा यह भी सीखेंगे कि इनका प्रयोग किस प्रकार किया जाता है।

11.2 घातांक



हम बड़ी संख्याओं को घातांकों का प्रयोग करके संक्षिप्त रूप में लिख सकते हैं। निम्नलिखित को देखिए : $10,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$

संक्षिप्त संकेतन 10^4 गुणनफल $10 \times 10 \times 10 \times 10$ को व्यक्त करता है। यहाँ, '10' **आधार (base)** और '4' **घातांक** कहलाता है। **10^4** को **10 के ऊपर घात (power) 4 या केवल 10 की चौथी घात पढ़ा जाता है। 10^4** को 10000 का **घातांकीय रूप (exponential form)** कहा जाता है।

हम इसी प्रकार 1000 को भी 10 की घात के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। ध्यान दीजिए कि

$1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$ है।

यहाँ, पुनः 10^3 संख्या 1000 का घातांकीय रूप है।

इसी प्रकार, $1,00,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$ है।

अर्थात्, 10^5 संख्या 1,00,000 का घातांकीय रूप है।

इन दोनों उदाहरणों में, आधार 10 है। 10^3 में घातांक 3 है तथा 10^5 में घातांक 5 है।

हम संख्याओं को विस्तारित या प्रसारित रूप (expanded form) में लिखने के लिए 10, 100, 1000 इत्यादि जैसी संख्याओं का प्रयोग कर चुके हैं।

उदाहरणार्थ, $47561 = 4 \times 10000 + 7 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 1$ है।

इसे $4 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10 + 1$ के रूप में लिखा जा सकता है।

निम्नलिखित संख्याओं को इसी प्रकार लिखने का प्रयत्न कीजिए :

172, 5642, 6374

उपरोक्त सभी उदाहरणों में, हमने वे संख्याएँ देखी हैं जिनके आधार 10 हैं। परंतु आधार कोई भी संख्या हो सकती है। उदाहरणार्थ,

$81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$ के रूप में लिखा जा सकता है। यहाँ आधार 3 है और घातांक 4 है।

कुछ घातों के विशिष्ट नाम हैं। उदाहरणार्थ :

10^2, जो 10 के ऊपर घात 2 है, इसे 10 का वर्ग (10 squared) भी पढ़ा जाता है।

10^3, जो 10 के ऊपर घात 3 है, इसे 10 का घन (10 cubed) भी पढ़ा जाता है।

क्या आप बता सकते हैं कि 5^3 (5 के घन) का क्या अर्थ है?

$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$

अतः हम कह सकते हैं कि 125 संख्या 5 की तीसरी घात (third power) है।

5^3 में आधार तथा घातांक क्या हैं?

इसी प्रकार $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ है, जो 2 की पाँचवीं घात है।

2^5 में, 2 आधार है तथा घातांक 5 है।

इसी विधि के अनुसार, $243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$,

$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$

$625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$

प्रयास कीजिए

ऐसे पाँच और उदाहरण दीजिए, जहाँ एक संख्या को घातांकीय रूप में व्यक्त किया जाता है। प्रत्येक स्थिति में, घातांक व आधार की पहचान भी कीजिए।

आप संक्षिप्त रूप में लिखने की इस विधि को तब भी लागू कर सकते हैं, जब आधार एक ऋणात्मक पूर्णांक हो।

$(-2)^3$ का क्या अर्थ है?

यह $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$ है।

क्या $(-2)^4 = 16$ है? इसकी जाँच कीजिए।

कोई निश्चित संख्या लेने के स्थान पर, आइए किसी भी संख्या a को आधार लें तथा संख्याओं को निम्नलिखित रूप में लिखें :

$a \times a = a^2$ (इसे 'a का वर्ग' या 'a के ऊपर घात 2' पढ़ा जाता है)

$a \times a \times a = a^3$ (इसे 'a का घन' या 'a के ऊपर घात 3' पढ़ा जाता है)

$a \times a \times a \times a = a^4$ (इसे a के ऊपर घात 4 या 'a की चौथी घात' पढ़ा जाता है)

$a \times a \times a \times a \times a \times a \times a = a^7$ (इसे 'a के ऊपर घात 7' या 'a की सातवीं घात' पढ़ा जाता है)

इत्यादि।

$a \times a \times a \times b \times b$ को a^3b^2 के रूप में व्यक्त किया जा सकता है (इसे a का घन गुणा b का वर्ग पढ़ा जाता है)।

$a \times a \times b \times b \times b \times b$ को a^2b^4 के रूप में व्यक्त किया जा सकता है (इसे a का वर्ग गुणा b पर 4 घात पढ़ा जाता है)।

प्रयास कीजिए

व्यक्त कीजिए :

(i) 729 को 3 की घात के रूप में

(ii) 128 को 2 की घात के रूप में

(iii) 343 को 7 की घात के रूप में

उदाहरण 1 256 को 2 की घात के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल हमें प्राप्त है $256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

अत: हम कह सकते हैं कि $256 = 2^8$

उदाहरण 2 2^3 और 3^2 में कौन बड़ा है?

हल हमें प्राप्त है कि $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ है तथा $3^2 = 3 \times 3 = 9$ है।

चूँकि $9 > 8$ है, इसलिए 3^2 संख्या 2^3 से बड़ा है।

उदाहरण 3 8^2 और 2^8 में कौन बड़ा है?

हल $8^2 = 8 \times 8 = 64$ है।

$2^8 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$ है।

स्पष्टतया, $2^8 > 8^2$

उदाहरण 4 $a^3 b^2$, $a^2 b^3$, $b^2 a^3$, और $b^3 a^2$ को प्रसारित रूप में लिखिए। क्या ये सभी बराबर हैं?

हल

$$a^3 b^2 = a^3 \times b^2$$
$$= (a \times a \times a) \times (b \times b)$$
$$= a \times a \times a \times b \times b$$
$$a^2 b^3 = a^2 \times b^3$$
$$= a \times a \times b \times b \times b$$
$$b^2 a^3 = b^2 \times a^3$$
$$= b \times b \times a \times a \times a$$
$$b^3 a^2 = b^3 \times a^2$$
$$= b \times b \times b \times a \times a$$

ध्यान दीजिए कि पद $a^3\, b^2$ और $a^2\, b^3$ की स्थिति में, a और b की घातें भिन्न-भिन्न हैं। इस प्रकार, $a^3\, b^2$ और $a^2\, b^3$ भिन्न-भिन्न हैं।

इसके विपरीत, $a^3\, b^2$ और $b^2\, a^3$ बराबर (एक ही) हैं, चूँकि इनमें a और b की घातें एक ही हैं। गुणनखंडों के क्रम से कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।
इस प्रकार, $a^3\, b^2 = a^3 \times b^2 = b^2 \times a^3 = b^2\, a^3$ है।
इसी प्रकार $a^2\, b^3$ और $b^3\, a^2$ भी बराबर हैं।

उदाहरण 5 निम्नलिखित संख्याओं को अभाज्य गुणनखंडों की घातों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) 72 (ii) 432 (iii) 1000 (iv) 16000

2	72
2	36
2	18
3	9
	3

हल

(i) $72 = 2 \times 36 = 2 \times 2 \times 18$
$= 2 \times 2 \times 2 \times 9$
$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$

इस प्रकार $72 = 2^3 \times 3^2$ (वांछित अभाज्य गुणनखंडों की घातों के गुणनफल वाला रूप)

(ii) $432 = 2 \times 216 = 2 \times 2 \times 108 = 2 \times 2 \times 2 \times 54$
$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 27 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 9$
$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

या $432 = 2^4 \times 3^3$ (वांछित रूप)

(iii) $1000 = 2 \times 500 = 2 \times 2 \times 250 = 2 \times 2 \times 2 \times 125$
$= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 25 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$

या $1000 = 2^3 \times 5^3$

अतुल इस उदाहरण को निम्नलिखित विधि से हल करना चाहता है :

$1000 = 10 \times 100 = 10 \times 10 \times 10$
$= (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5)$ (चूँकि $10 = 2 \times 5$ है)
$= 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$

या $1000 = 2^3 \times 5^3$

क्या अतुल की विधि सही है?

(iv) $16000 = 16 \times 1000 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 1000$ (चूँकि $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$ है।)
$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5)$
(चूँकि $1000 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$ है।)
$= (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5)$

या, $16000 = 2^7 \times 5^3$

उदाहरण 6 निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।
$(1)^5, (-1)^3, (-1)^4, (-10)^3$ और $(-5)^4$:

हल

(i) हमें प्राप्त है, $(1)^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$
वास्तव में, 1 की कोई भी घात 1 के बराबर होती है।

(ii) $(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1) = 1 \times (-1) = -1$

(iii) $(-1)^4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1 \times 1 = 1$

आप इसकी जाँच कर सकते हैं कि (–1) की कोई भी **विषम** घात (–1) के बराबर होती है तथा (–1) की कोई भी **सम** घात (+1) के बराबर होती है।

$(-1)^{\text{विषम संख्या}}$	$= -1$
$(-1)^{\text{सम संख्या}}$	$= +1$

(iv) $(-10)^3 = (-10) \times (-10) \times (-10) = 100 \times (-10) = -1000$

(v) $(-5)^4 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = 25 \times 25 = 625$

प्रश्नावली 11.1

1. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :
(i) 2^6 (ii) 9^3 (iii) 11^2 (iv) 5^4

2. निम्नलिखित को घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए :
(i) $6 \times 6 \times 6 \times 6$ (ii) $t \times t$ (iii) $b \times b \times b \times b$
(iv) $5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$ (v) $2 \times 2 \times a \times a$ (vi) $a \times a \times a \times c \times c \times c \times c \times d$

3. निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक को घातांकीय संकेतन में व्यक्त कीजिए :
(i) 512 (ii) 343 (iii) 729 (iv) 3125

4. निम्नलिखित में से प्रत्येक भाग में, जहाँ भी संभव हो, बड़ी संख्या को पहचानिए:
(i) 4^3 या 3^4 (ii) 5^3 या 3^5 (iii) 2^8 या 8^2
(iv) 100^2 या 2^{100} (v) 2^{10} या 10^2

5. निम्नलिखित में से प्रत्येक को उनके अभाज्य गुणनखंडों की घातों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए।
(i) 648 (ii) 405 (iii) 540 (iv) 3600

6. सरल कीजिए :
(i) 2×10^3 (ii) $7^2 \times 2^2$ (iii) $2^3 \times 5$ (iv) 3×4^4
(v) 0×10^2 (vi) $5^2 \times 3^3$ (vii) $2^4 \times 3^2$ (viii) $3^2 \times 10^4$

7. सरल कीजिए :
(i) $(-4)^3$ (ii) $(-3) \times (-2)^3$ (iii) $(-3)^2 \times (-5)^2$
(iv) $(-2)^3 \times (-10)^3$

8. निम्नलिखित संख्याओं की तुलना कीजिए :
(i) 2.7×10^{12} ; 1.5×10^8 (ii) 4×10^{14} ; 3×10^{17}

11.3 घातांकों के नियम

11.3.1 एक ही आधार वाली घातों का गुणन

(i) आइए $2^2 \times 2^3$ को परिकलित करें।

$$2^2 \times 2^3 = (2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 2^{2+3}$$

ध्यान दीजिए कि 2^2 और 2^3 में आधार एक ही (समान) है तथा घातांकों का योग, अर्थात् 2 और 3 का योग 5 है।

(ii) $(-3)^4 \times (-3)^3 = [(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)] \times [(-3) \times (-3) \times (-3)]$

$= (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$

$= (-3)^7$

$= (-3)^{4+3}$

पुनः ध्यान दीजिए कि आधार एक ही है तथा घातांकों का योग $4 + 3 = 7$ है।

(iii) $a^2 \times a^4 = (a \times a) \times (a \times a \times a \times a)$

$= a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6$

(टिप्पणी: आधार एक ही है तथा घातांकों का योग $2 + 4 = 6$ है)

इसी प्रकार, सत्यापित कीजिए कि

$4^2 \times 4^2 = 4^{2+2}$

तथा $3^2 \times 3^3 = 3^{2+3}$ है।

प्रयास कीजिए

सरल करके घातांकीय रूप में लिखिए :

(i) $2^5 \times 2^3$

(ii) $p^3 \times p^2$

(iii) $4^3 \times 4^2$

(iv) $a^3 \times a^2 \times a^7$

(v) $5^3 \times 5^7 \times 5^{12}$

(vi) $(-4)^{100} \times (-4)^{20}$

क्या आप बॉक्स में उपयुक्त संख्या लिख सकते हैं?

$(-11)^2 \times (-11)^6 = 11^{\square}$

$b^2 \times b^3 = b^{\square}$

(याद रखिए, आधार एक ही है, b कोई भी शून्येतर पूर्णांक है)।

$c^3 \times c^4 = c^{\square}$ (c कोई भी शून्येतर पूर्णांक है)।

$d^{10} \times d^{20} = d^{\square}$

यहाँ से हम व्यापक रूप से यह कह सकते हैं कि एक शून्येतर पूर्णांक a, के लिए, $a^m \times a^n = a^{m+n}$

होता है, जहाँ m और n पूर्ण संख्याएँ हैं।

सावधानी!

$2^3 \times 3^2$ पर विचार कीजिए।

क्या आप घातांकों को जोड़ सकते हैं? नहीं! क्या आप बता सकते हैं 'क्यों'? 2^3 का आधार 2 है और 3^2 का आधार 3 है। आधार एक समान नहीं हैं।

11.3.2 एक ही आधार वाली घातों का विभाजन

आइए $3^7 \div 3^4$ को सरल करें।

$$3^7 \div 3^4 = \frac{3^7}{3^4} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3}$$

$$= 3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 3^{7-4}$$

इस प्रकार, $3^7 \div 3^4 = 3^{7-4}$ है।

[ध्यान दीजिए कि 3^7 और 3^4 के आधार एक ही हैं और $3^7 \div 3^4 = 3^{7-4}$ हो जाता है।]

इस प्रकार, $$5^6 \div 5^2 = \frac{5^6}{5^2} = \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}{5 \times 5}$$

$$= 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4 = 5^{6-2}$$

या, $5^6 \div 5^2 = 5^{6-2}$ है।

मान लीजिए कि a कोई शून्येतर पूर्णांक है। तब,

$$a^4 \div a^2 = \frac{a^4}{a^2} = \frac{a \times a \times a \times a}{a \times a} = a \times a = a^2 = a^{4\ \ 2}$$

या $\qquad a^4 \div a^2 = a^{4-2}$ है।

क्या अब आप तुरंत उत्तर दे सकते हैं?

$$10^8 \div 10^3 = 10^{8-3} = 10^5$$

$$7^9 \div 7^6 = 7^{\square}$$

$$a^8 \div a^5 = a^{\square}$$

शून्येतर पूर्णांक b और c के लिए

$$b^{10} \div b^5 = b^{\square}$$

$$c^{100} \div c^{90} = c^{\square}$$

व्यापक रूप में, किसी भी शून्येतर पूर्णांक a के लिए,

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

होता है, जहाँ m और n पूर्ण संख्याएँ हैं तथा $m > n$ है।

प्रयास कीजिए

सरल करके घातांकीय रूप में लिखिए:
(उदाहरण के लिए, $11^6 \div 11^2 = 11^4$)

(i) $2^9 \div 2^3$ (ii) $10^8 \div 10^4$

(iii) $9^{11} \div 9^7$ (iv) $20^{15} \div 20^{13}$

(v) $7^{13} \div 7^{10}$

11.3.3 एक घात की घात लेना

निम्नलिखित पर विचार कीजिए :

$\left(2^3\right)^2$ और $\left(3^2\right)^4$ को सरल कीजिए।

अब, $\left(2^3\right)^2$ का अर्थ है 2^3 का स्वयं से दो बार गुणा किया गया है।

$$\left(2^3\right)^2 = 2^3 \times 2^3$$

$$= 2^{3+3} \qquad (\text{चूँकि } a^m \times a^n = a^{m+n} \text{ है।})$$

$$= 2^6 = 2^{3 \times 2}$$

अर्थात् $\qquad \left(2^3\right)^2 = 2^{3\times2}$

इसी प्रकार, $\qquad \left(3^2\right)^4 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2$

$$= 3^{2+2+2+2}$$

$$= 3^8 \qquad (\text{देखिए कि 2 और 4 का गुणनफल 8 है।})$$

$$= 3^{2 \times 4}$$

क्या आप बता सकते हैं कि $\left(7^2\right)^{10}$ किसके बराबर है?

अतः, $\qquad \left(2^3\right)^2 = 2^{3 \times 2} = 2^6$

$$\left(3^2\right)^4 = 3^{2 \times 4} = 3^8$$

प्रयास कीजिए

सरल करके, उत्तर को घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $\left(6^2\right)^4$ (ii) $\left(2^2\right)^{100}$

(iii) $\left(7^{50}\right)^2$ (iv) $\left(5^3\right)^7$

$$\left(7^2\right)^{10} = 7^{2\times 10} = 7^{20}$$

$$\left(a^2\right)^3 = a^{2\times 3} = a^6$$

$$(a^m)^3 = a^{m\times 3} = a^{3m}$$

उपरोक्त से, हम व्यापक रूप से कह सकते हैं कि किसी शून्येतर पूर्णांक 'a' के लिए,

$$\boxed{\left(a^m\right)^n = a^{mn}}$$

होता है, जहाँ m और n पूर्ण संख्याएँ हैं।

उदाहरण 7 क्या आप बता सकते हैं कि $(5^2) \times 3$ और $\left(5^2\right)^3$ में से कौन बड़ा है?

हल $(5^2) \times 3$ का अर्थ है कि 5^2 को 3 से गुणा किया गया है, अर्थात् यह $5 \times 5 \times 3 = 75$

परंतु $\left(5^2\right)^3$ का अर्थ है कि 5^2 का स्वयं से तीन बार गुणा किया गया है, अर्थात् यह

$$5^2 \times 5^2 \times 5^2 = 5^6 = 15625 \text{ है।}$$

अतः, $(5^2)^3 > (5^2) \times 3$ है।

11.3.4 समान घातांकों वाली घातों का गुणन

क्या आप $2^3 \times 3^3$ को सरल कर सकते हैं? ध्यान दीजिए कि यहाँ दोनों पदों 2^3 और 3^3 के आधार भिन्न-भिन्न हैं। परंतु इनके घातांक समान हैं।

अब $2^3 \times 3^3 = (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3)$

$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$

$= 6 \times 6 \times 6$

$= 6^3$ (देखिए 6 आधारों 2 और 3 का गुणनफल है)

देखिए $4^4 \times 3^4 = (4 \times 4 \times 4 \times 4) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3)$

$= (4 \times 3) \times (4 \times 3) \times (4 \times 3) \times (4 \times 3)$

$= 12 \times 12 \times 12 \times 12$

$= 12^4$

साथ ही, देखिए $3^2 \times a^2 = (3 \times 3) \times (a \times a)$

$= (3 \times a) \times (3 \times a)$

$= (3 \times a)^2$

$= (3a)^2$ (ध्यान दीजिए : $3\times a = 3a$)

इसी प्रकार $a^4 \times b^4 = (a \times a \times a \times a) \times (b \times b \times b \times b)$

$= (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b)$

$= (a \times b)^4$

$= (ab)^4$ (ध्यान दीजिए कि $a \times b = ab$ है)

व्यापक रूप में, किसी भी शून्येतर पूर्णांक के लिए,

$a^m \times b^m = (ab)^m$ होता है जहाँ, m एक पूर्ण संख्या है

उदाहरण 8 निम्नलिखित पदों को घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) $(2 \times 3)^5$ (ii) $(2a)^4$ (iii) $(-4m)^3$

हल

(i) $(2 \times 3)^5 = (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)$

$= 2^5 \times 3^5$

(ii) $(2a)^4 = 2a \times 2a \times 2a \times 2a$

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (a \times a \times a \times a)$

$= 2^4 \times a^4$

(iii) $(-4m)^3 = (-4 \times m)^3$

$= (-4 \times m) \times (-4 \times m) \times (-4 \times m)$

$= (-4) \times (-4) \times (-4) \times (m \times m \times m) = (-4)^3 \times (m)^3$

प्रयास कीजिए

$a^m \times b^m = (ab)^m$ का प्रयोग करके, अन्य रूप में बदलिए :

(i) $4^3 \times 2^3$ (ii) $2^5 \times b^5$

(iii) $a^2 \times t^2$ (iv) $5^6 \times (-2)^6$

(v) $(-2)^4 \times (-3)^4$

11.3.5 समान घातांकों वाली घातों से विभाजन

निम्नलिखित सरलीकरणों को देखिए :

(i) $\dfrac{2^4}{3^4} = \dfrac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^4$

(ii) $\dfrac{a^3}{b^3} = \dfrac{a \times a \times a}{b \times b \times b} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{a}{b} \times \dfrac{a}{b} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^3$

इन उदाहरणों से, हम कह सकते हैं कि व्यापक रूप में,

$a^m \div b^m = \dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$ जहाँ, a और b कोई दो शून्येतर पूर्णांक हैं तथा m एक पूर्ण संख्या है।

प्रयास कीजिए

$a^m \div b^m = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$ का प्रयोग करके, अन्य रूप में बदलिए:

(i) $4^5 \div 3^5$

(ii) $2^5 \div b^5$

(iii) $(-2)^3 \div b^3$

(iv) $p^4 \div q^4$

(v) $5^6 \div (-2)^6$

उदाहरण 9 प्रसार कीजिए: (i) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^4$ (ii) $\left(\dfrac{-4}{7}\right)^5$

हल

(i) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^4 = \dfrac{3^4}{5^4} = \dfrac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{5 \times 5 \times 5 \times 5}$

(ii) $\left(\dfrac{-4}{7}\right)^5 = \dfrac{(-4)^5}{7^5} = \dfrac{(-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4)}{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7}$

● शून्य घातांक वाली संख्याएँ

क्या आप बता सकते हैं कि $\frac{3^5}{3^5}$ किसके बराबर है?

$$\frac{3^5}{3^5} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} = 1 \text{ है।}$$

घातांकों के नियमों का प्रयोग करते हुए,

$$3^5 \div 3^5 = 3^{5-5} = 3^0 \text{ है।}$$

अत: $3^0 = 1$ है।

क्या आप बता सकते हैं कि 7^0 किसके बराबर है?

$$7^3 \div 7^3 = 7^{3-3} = 7^0$$

साथ ही, $\frac{7^3}{7^3} = \frac{7 \times 7 \times 7}{7 \times 7 \times 7} = 1$ है।

अत: $7^0 = 1$

इसी प्रकार, $a^3 \div a^3 = a^{3-3} = a^0$ है।

साथ ही $a^3 \div a^3 = \frac{a^3}{a^3} = \frac{a \times a \times a}{a \times a \times a} = 1$ है।

अत:, $a^0 = 1$ (किसी भी शून्येतर पूर्णांक a के लिए)

अत:, हम कह सकते हैं कि किसी भी संख्या (शून्य के अतिरिक्त) पर घात (या घातांक) 0 का मान 1 होता है।

> a^0 क्या है?
> निम्नलिखित पैटर्न को देखिए :
> $2^6 = 64$
> $2^5 = 32$
> $2^4 = 16$
> $2^3 = 8$
> $2^2 = ?$
> $2^1 = ?$
> $2^0 = ?$
> आप केवल पैटर्न देख कर ही 2^0 के मान का अनुमान लगा सकते हैं।
> आप देख सकते हैं कि $2^0 = 1$ है।
> यदि $3^6 = 729$, से प्रारंभ करें, तो ऊपर दर्शाई विधि से $3^5, 3^4, 3^3, \ldots$ इत्यादि ज्ञात करते हुए, क्या आप 3^0 का मान बता सकते हैं?

11.4 घातांकों के नियमों का विविध उदाहरणों में प्रयोग

आइए ऊपर विकसित किए गए घातांकों के नियमों का प्रयोग करके, कुछ उदाहरण हल करें।

उदाहरण 10 $8 \times 8 \times 8 \times 8$ के लिए, आधार 2 लेते हुए, इसे घातांकीय रूप में लिखिए।

हल ज्ञात है कि, $8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^4$

परंतु हम जानते हैं कि $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$ है।

अत:, $8^4 = (2^3)^4 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3$

$= 2^{3 \times 4}$ (आप $(a^m)^n = a^{mn}$ का भी प्रयोग कर सकते हैं।)

$= 2^{12}$

उदाहरण 11 सरल कीजिए और उत्तर को घातांकीय रूप में लिखिए :

(i) $\left(\frac{3^7}{3^2}\right) \times 3^5$ (ii) $2^3 \times 2^2 \times 5^5$ (iii) $(6^2 \times 6^4) \div 6^3$

(iv) $((2^2)^3 \times 3^6) \times 5^6$ (v) $8^2 \div 2^3$

हल (i) $\left(\frac{3^7}{3^2}\right) \times 3^5 = \left(3^{7-2}\right) \times 3^5$

$= 3^5 \times 3^5 = 3^{5+5} = 3^{10}$

(ii) $2^3 \times 2^2 \times 5^5 = 2^{3+2} \times 5^5$
$= 2^5 \times 5^5 = (2 \times 5)^5 = 10^5$

(iii) $\left(6^2 \times 6^4\right) \div 6^3 = 6^{2+4} \div 6^3$
$= \dfrac{6^6}{6^3} = 6^{6-3} = 6^3$

(iv) $\left[\left(2^2\right)^3 \times 3^6\right] \times 5^6 = [2^6 \times 3^6] \times 5^6$
$= \left(2 \times 3\right)^6 \times 5^6$
$= \left(2 \times 3 \times 5\right)^6 = 30^6$

(v) $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

अतः, $8^2 \div 2^3 = (2^3)^2 \div 2^3$
$= 2^6 \div 2^3 = 2^{6-3} = 2^3$

उदाहरण 12 सरल कीजिए :

(i) $\dfrac{12^4 \times 9^3 \times 4}{6^3 \times 8^2 \times 27}$ (ii) $2^3 \times a^3 \times 5a^4$ (iii) $\dfrac{2 \times 3^4 \times 2^5}{9 \times 4^2}$

हल (i) यहाँ

$$\frac{12^4 \times 9^3 \times 4}{6^3 \times 8^2 \times 27} = \frac{(2^2 \times 3)^4 \times (3^2)^3 \times 2^2}{(2 \times 3)^3 \times (2^3)^2 \times 3^3}$$

$$= \frac{\left(2^2\right)^4 \times (3)^4 \times 3^{2\times3} \times 2^2}{2^3 \times 3^3 \times 2^{2\times3} \times 3^3} = \frac{2^8 \times 2^2 \times 3^4 \times 3^6}{2^3 \times 2^6 \times 3^3 \times 3^3}$$

$$= \frac{2^{8+2} \times 3^{4+6}}{2^{3+6} \times 3^{3+3}} = \frac{2^{10} \times 3^{10}}{2^9 \times 3^6}$$

$= 2^{10-9} \times 3^{10-6} = 2^1 \times 3^4$
$= 2 \times 81 = 162$

(ii) $2^3 \times a^3 \times 5a^4 = 2^3 \times a^3 \times 5 \times a^4$
$= 2^3 \times 5 \times a^3 \times a^4 = 8 \times 5 \times a^{3+4}$
$= 40\ a^7$

(ii) $\dfrac{2 \times 3^4 \times 2^5}{9 \times 4^2} = \dfrac{2 \times 3^4 \times 2^5}{3^2 \times \left(2^2\right)^2} = \dfrac{2 \times 2^5 \times 3^4}{3^2 \times 2^{2\times2}}$

$= \dfrac{2^{1+5} \times 3^4}{2^4 \times 3^2} = \dfrac{2^6 \times 3^4}{2^4 \times 3^2} = 2^{6-4} \times 3^{4-2}$

$= 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$

टिप्पणीः इस अध्याय में, हमने अधिकांशतः ऐसे उदाहरण लिए हैं जिनमें आधार पूर्णांक हैं। परंतु इस अध्याय के सभी परिणाम उन स्थितियों के लिए भी सत्य हैं, जहाँ आधार परिमेय संख्याएँ हैं।

प्रश्नावली 11.2

1. घातांकों के नियमों का प्रयोग करते हुए, सरल कीजिए और उत्तर को घातांकीय रूप में लिखिए :

(i) $3^2 \times 3^4 \times 3^8$ (ii) $6^{15} \div 6^{10}$ (iii) $a^3 \times a^2$

(iv) $7^x \times 7^2$ (v) $\left(5^2\right)^3 \div 5^3$ (vi) $2^5 \times 5^5$

(vii) $a^4 \times b^4$ (viii) $\left(3^4\right)^3$ (ix) $\left(2^{20} \div 2^{15}\right) \times 2^3$

(x) $8^t \div 8^2$

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक को सरल करके घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) $\dfrac{2^3 \times 3^4 \times 4}{3 \times 32}$ (ii) $\left[\left(5^2\right)^3 \times 5^4\right] \div 5^7$ (iii) $25^4 \div 5^3$

(iv) $\dfrac{3 \times 7^2 \times 11^8}{21 \times 11^3}$ (v) $\dfrac{3^7}{3^4 \times 3^3}$ (vi) $2^0 + 3^0 + 4^0$

(vii) $2^0 \times 3^0 \times 4^0$ (viii) $(3^0 + 2^0) \times 5^0$ (ix) $\dfrac{2^8 \times a^5}{4^3 \times a^3}$

(x) $\left(\dfrac{a^5}{a^3}\right) \times a^8$ (xi) $\dfrac{4^5 \times a^8 b^3}{4^5 \times a^5 b^2}$ (xii) $\left(2^3 \times 2\right)^2$

3. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है या असत्य तथा अपने उत्तर का कारण भी दीजिए :

(i) $10 \times 10^{11} = 100^{11}$ (ii) $2^3 > 5^2$ (iii) $2^3 \times 3^2 = 6^5$

(iv) $3^0 = (1000)^0$

4. निम्नलिखित में से प्रत्येक को केवल अभाज्य गुणनखंडों की घातों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) 108×192 (ii) 270 (iii) 729×64

(iv) 768

5. सरल कीजिए :

(i) $\dfrac{\left(2^5\right)^2 \times 7^3}{8^3 \times 7}$ (ii) $\dfrac{25 \times 5^2 \times t^8}{10^3 \times t^4}$ (iii) $\dfrac{3^5 \times 10^5 \times 25}{5^7 \times 6^5}$

11.5 दशमलव संख्या पद्धति

आइए 47561 के निम्नलिखित प्रसार को देखें, जिससे हम पहले से ही परिचित हैं :

$$47561 = 4 \times 10000 + 7 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 1$$

हम इसे 10 की घातों का प्रयोग करते हुए, घातांकीय रूप में निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं :

$$47561 = 4 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 1 \times 10^0$$

[ध्यान दीजिए : $10000 = 10^4$, $1000 = 10^3$, $100 = 10^2$, $10 = 10^1$ और $1 = 10^0$ है।]

आइए एक और संख्या को प्रसारित रूप में लिखें :

$$104278 = 1 \times 100{,}000 + 0 \times 10000 + 4 \times 1000 + 2 \times 100 + 7 \times 10 + 8 \times 1$$
$$= 1 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 8 \times 10^0$$
$$= 1 \times 10^5 + 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 8 \times 10^0$$

ध्यान दीजिए कि किस प्रकार 10 के घातांक अधिकतम मान 5 से प्रारंभ होते हुए एक-एक करके घटते हुए, 0 तक आ जाते हैं।

11.6 बड़ी संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त करना

आइए, इस अध्याय की प्रारंभिक स्थिति पर वापस आ जाएँ। हमने कहा था कि बड़ी संख्याओं को, घातांकों का प्रयोग करके सुविधाजनक रूप से व्यक्त किया जा सकता है। इसे अभी तक हमने दिखाया नहीं है। अब हम ऐसा करेंगे।

1. सूर्य हमारी आकाशगंगा (Milky Way Galaxy) के केंद्र से 300,000,000,000,000,000,000 m की दूरी पर स्थित है।
2. हमारी आकाशगंगा में 100,000,000,000 तारे हैं।
3. पृथ्वी का द्रव्यमान 5,976,000,000,000,000,000,000,000 kg है।

प्रयास कीजिए

10 की घातों का प्रयोग करते हुए, घातांकीय रूप में प्रसारित कीजिए :

(i) 172
(ii) 5643
(iii) 56439
(iv) 176428

ये संख्याएँ पढ़ने और लिखने की दृष्टि से सुविधाजनक नहीं हैं। इनको सुविधाजनक बनाने के लिए, हम घातों (या घातांकों) का प्रयोग करते हैं।

निम्नलिखित को देखिए :

$$59 = 5.9 \times 10 = 5.9 \times 10^1$$
$$590 = 5.9 \times 100 = 5.9 \times 10^2$$
$$5900 = 5.9 \times 1000 = 5.9 \times 10^3$$
$$59000 = 5.9 \times 10000 = 5.9 \times 10^4 \text{ इत्यादि।}$$

हमने इन सभी संख्याओं को **मानक रूप (standard form)** में व्यक्त कर दिया है। किसी भी संख्या को 1.0 और 10.0 के बीच की एक दशमलव संख्या (जिसमें 1.0 सम्मिलित है) और 10 की किसी घात के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। संख्या के इस रूप को उसका **मानक रूप** कहते हैं। इस प्रकार,

$5985 = 5.985 \times 1000 = 5.985 \times 10^3$ संख्या 5985 का मानक रूप है।

ध्यान दीजिए कि 5985 को 59.85×100 या 59.85×10^2 के रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है। परंतु यह 5985 का मानक रूप नहीं है। इसी प्रकार

$5985 = 0.5985 \times 10000 = 0.5985 \times 10^4$ भी 5985 का मानक रूप नहीं है।

अब हम इस अध्याय के प्रारंभ में आई हुई संख्याओं को इस मानक रूप में व्यक्त करने में सक्षम हो गए हैं।

हमारी आकाशगंगा के केंद्र से सूर्य की दूरी अर्थात्,

300,000,000,000,000,000,000 m को

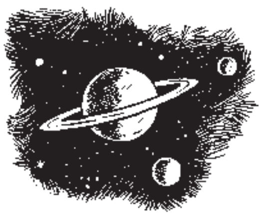
$3.0 \times 100,000,000,000,000,000,000$ m $= 3.0 \times 10^{20}$ m

के रूप में लिखा जा सकता है। अब, क्या आप 40,000,000,000 को इसी रूप में व्यक्त कर सकते हैं? इसमें शून्यों की संख्या को गिनिए। यह 10 है।

अत: $40,000,000,000 = 4.0 \times 10^{10}$ है।

पृथ्वी का द्रव्यमान = 5,976,000,000,000,000,000,000,000 kg

$= 5.976 \times 10^{24}$ kg है।



क्या आप इस बात से सहमत हैं कि पढ़ने, समझने और तुलना करने की दृष्टि से मानक रूप में लिखी यह संख्या उस 25 अंकों की संख्या की अपेक्षा बहुत अधिक सरल या सुविधाजनक है?

अब, यूरेनस ग्रह का द्रव्यमान = 86,800,000,000,000,000,000,000,000 kg

$= 8.68 \times 10^{25}$ kg है।

अब, उपरोक्त दोनों व्यंजकों में केवल 10 की घातों की तुलना करके ही, आप यह कह सकते हैं कि यूरेनस ग्रह का द्रव्यमान पृथ्वी से अधिक है।

सूर्य और शनि के बीच की दूरी 1,433,500,000,000 m या 1.4335×10^{12} m है। शनि और यूरेनस के बीच की दूरी 1,439,000,000,000 m या 1.439×10^{12} m हैं। सूर्य और पृथ्वी के बीच की दूरी 149, 600,000,000 m या 1.496×10^{11} m है।

क्या आप बता सकते हैं कि इन तीनों दूरियों में कौन-सी दूरी न्यूनतम है?

उदाहरण 13 निम्नलिखित संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) 5985.3 (ii) 65950

(iii) 3,430,000 (iv) 70,040,000,000

हल

(i) $5985.3 = 5.9853 \times 1000 = 5.9853 \times 10^3$

(ii) $65950 = 6.595 \times 10000 = 6.595 \times 10^4$

(iii) $3,430,000 = 3.43 \times 1000,000 = 3.43 \times 10^6$

(iv) $70,040,000,000 = 7.004 \times 10,000,000,000 = 7.004 \times 10^{10}$

यहाँ ध्यान रखने योग्य बात यह है कि दशमलव बिंदु से बाईं ओर के (अंकों की संख्या) गिनकर, उसमें से 1 घटा कर जो प्राप्त होता है, वही 10 का घातांक होता है, जिसे मानक रूप में प्रयोग किया जाता है। हम इस बिंदु की कल्पना, संख्या के (दाएँ) सिरे पर कर लेते हैं। यहाँ से बाईं ओर अंकों की (संख्या) 11 है। इसलिए, मानक रूप में व्यक्त करने के लिए, 10 का घातांक 11 – 1 = 10 है। इसलिए इसके मानक रूप में 10 का घातांक 4 – 1 = 3 है।

प्रश्नावली 11.3

1. निम्नलिखित संख्याओं को प्रसारित रूप में लिखिए :

279404, 3006194, 2806196, 120719, 20068

2. निम्नलिखित प्रसारित रूपों में से प्रत्येक के लिए संख्या ज्ञात कीजिए :

(a) $8 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 0\times10^2 + 4\times10^1 + 5\times10^0$

(b) $4 \times 10^5 + 5\times10^3 + 3\times10^2 + 2\times10^0$

(c) $3 \times 10^4 + 7\times10^2 + 5\times10^0$

(d) $9 \times 10^5 + 2\times10^2 + 3\times10^1$

3. निम्नलिखित संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) 5,00,00,000 (ii) 70,00,000 (iii) 3,18,65,00,000

(iv) 3,90,878 (v) 39087.8 (vi) 3908.78

4. निम्नलिखित कथनों में प्रकट होने वाली (आने वाली) संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए।

(a) पृथ्वी और चंद्रमा के बीच की दूरी 384,000,000 m है।

(b) निर्वात स्थान में प्रकाश की चाल (या वेग) 300,000,000 m/sec. है।

(c) पृथ्वी का व्यास 12756000 m है।

(d) सूर्य का व्यास 1,400,000,000 m है।

(e) एक आकाशगंगा में औसतन 100,000,000,000 तारे हैं।

(f) विश्व मंडल (या सौर मंडल) 12,000,000,000 वर्ष पुराना आकलित किया गया है।

(g) आकाशगंगा के मध्य से सूर्य की दूरी 300,000,000,000,000,000,000 m आकलित की गई है।

(h) 1.8 g भार वाली पानी की एक बूंद में 60,230,000,000,000,000,000,000 अणु (molecules) होते हैं।

(i) पृथ्वी में 1,353,000,000 km^3 समुद्र जल है।

(j) मार्च 2001 में भारत की जनसंख्या 1,027,000,000 थी।

हमने क्या चर्चा की?

1. बहुत बड़ी संख्याएँ पढ़ने, समझने, तुलना करने और उन पर संक्रियाएँ करने की दृष्टि से कठिन होती हैं। इनको सरल बनाने के लिए, हम इन अधिकांश बड़ी संख्याओं को घातांकों का प्रयोग करके संक्षिप्त रूप में लिखते हैं।
2. कुछ संख्याओं के घातांकीय रूप निम्नलिखित हैं :

   $10000 = 10^4$ (इसे 10 के ऊपर घात 4 पढ़ा जाता है)

   $243 = 3^5$, $\quad 128 = 2^7$.

   यहाँ, 10, 3 और 2 आधार हैं तथा 4, 5 और 7 क्रमशः इनके घातांक हैं। हम यह भी कहते हैं कि 10 की चौथी घात 10000 है, 3 की पाँचवीं घात 243 है, इत्यादि।
3. घातांकीय रूप में संख्याएँ कुछ नियमों का पालन करती हैं, जो इस प्रकार हैं :

   किन्हीं शून्येतर पूर्णांकों a और b तथा पूर्ण संख्याओं m और n के लिए,

   (a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

   (b) $a^m \div a^n = a^{m-n}$, $\quad m > n$

   (c) $(a^m)^n = a^{mn}$

   (d) $a^m \times b^m = (ab)^m$

   (e) $a^m \div b^m = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$

   (f) $a^\circ = 1$

   (g) $(-1)^{\text{सम संख्या}} = 1$

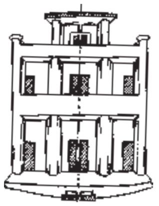
   $(-1)^{\text{विषम संख्या}} = -1$

अध्याय 12

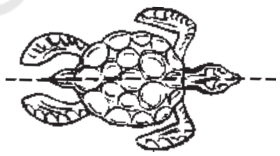
सममिति

12.1 भूमिका

सममिति (Symmetry) एक महत्वपूर्ण ज्यामितीय अवधारणा है, जो सामान्यत: प्रकृति में प्रदर्शित होती है तथा क्रियाकलाप के लगभग सभी क्षेत्रों में इसका प्रयोग होता है। कलाकार, व्यवसायी, कपड़े या ज्वैलरी डिज़ाइन करने वाले, कार निर्माता, आर्किटेक्ट तथा अनेक अन्य सममिति की संकल्पना का प्रयोग करते हैं। मधुमक्खियों के छत्तों, फूलों, पेड़ की पत्तियों, धार्मिक चिह्नों, कंबलों और रूमालों, इन सभी स्थानों पर आपको सममित डिज़ाइन दिखाई देंगे।


आर्किटेक्चर

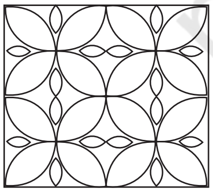

इंजीनियरिंग

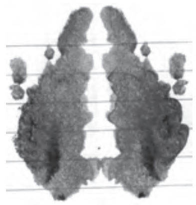

प्रकृति

आप पिछली कक्षा में, **रैखिक सममिति** का कुछ 'अनुभव' कर चुके हैं।

एक आकृति मे रैखिक सममिति होती है, यदि उसमें एक रेखा ऐसी हो जिसके अनुदिश उस आकृति को मोड़ने पर, आकृति के दोनों भाग परस्पर संपाती हो जाते हों ।

इन अवधारणाओं को आप याद कर सकते हैं। आपकी सहायता के लिए यहाँ कुछ क्रियाकलाप दिए जा रहे हैं।

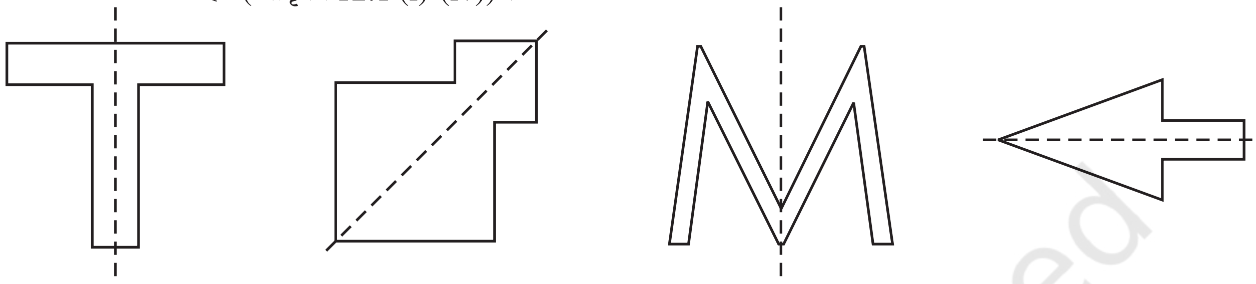

सममिति दर्शाने वाली एक पिक्चर एलबम बनाइए


कुछ रंगीन आकर्षक इंक-डाट डेविल्स बनाइए


कागज़ के कटे हुए कुछ सममिति डिज़ाइन बनाइए

आपके द्वारा एकत्रित किए गए डिज़ाइन में सममित रेखाओं (या अक्षों) को पहचानने का आनंद लीजिए ।

आइए अब सममिति पर अपनी अवधारणाओं को और अधिक प्रबल बनाएँ। निम्नलिखित आकृतियों का अध्ययन कीजिए, जिनमें सममित रेखाओं को बिंदुकित रेखाओं से अंकित किया गया है (आकृति 12.1 (i)-(iv)) ।



(i) (ii) (iii) (iv)

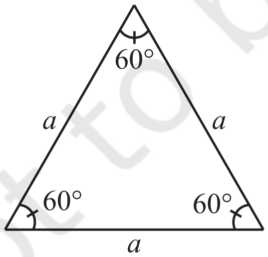
आकृति 12.1

12.2 सम बहुभुजों के लिए सममित रेखाएँ

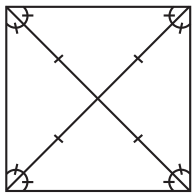
आप जानते हैं कि बहुभुज (polygon) एक ऐसी बंद आकृति है, जो अनेक रेखाखंडों से बनी होती है। सबसे कम रेखाखंडों से बना बहुभुज एक त्रिभुज है। (क्या आप इन रेखाखंडों से कम रेखाखंडों वाला कोई अन्य बहुभुज बना सकते हैं ? इसके बारे में सोचिए ।)

एक बहुभुज, सम बहुभुज (regular polygon) कहलाता है, यदि इसकी सभी भुजाओं की लंबाइयाँ बराबर हों तथा सभी कोणों के माप बराबर हों। इस प्रकार, एक समबाहु त्रिभुज, तीन भुजाओं वाला एक सम बहुभुज होता है। क्या चार भुजाओं वाला एक सम बहुभुज होता है ? क्या आप चार भुजाओं वाले एक सम बहुभुज का नाम बता सकते हैं ?

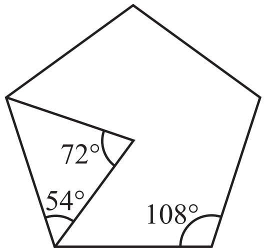
एक समबाहु त्रिभुज एक सम बहुभुज है, क्योंकि इसकी प्रत्येक भुजा की लंबाई समान होती है तथा इसके प्रत्येक कोण की माप 60° होती है (आकृति 12.2)।



आकृति 12.2



आकृति 12.3

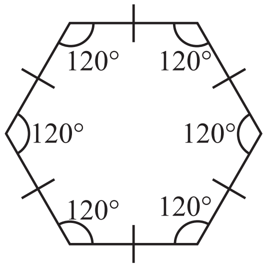


आकृति 12.4

वर्ग भी एक सम बहुभुज है, क्योंकि इसकी सभी भुजाएँ समान लंबाइयों की होती हैं तथा इसका प्रत्येक कोण एक समकोण (अर्थात् 90°) होता है। इसके विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित होते हैं (आकृति 12.3)।

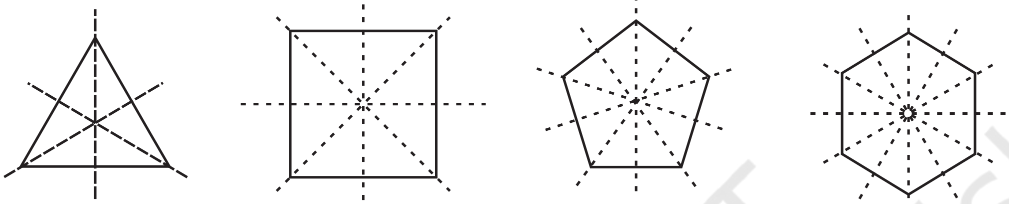
यदि एक पंचभुज (pentagon) एक सम बहुभुज है, तो स्वाभाविक है कि इसकी भुजाएँ बराबर लंबाइयों की होनी चाहिए तथा इसके कोणों के माप बराबर होने चाहिए। बाद में आप पढ़ेंगे कि इसके प्रत्येक कोण की माप 108° होती है (आकृति 12.4) ।

एक सम षड्भुज (regular hexagon) की सभी भुजाएँ बराबर होती हैं तथा इसके प्रत्येक कोण की माप 120° होती है। इस आकृति के बारे में आप और अधिक बाद में पढ़ेंगे (आकृति 12.5)।



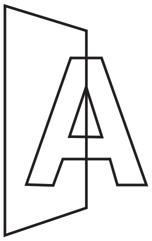
आकृति 12.5

सम बहुभुज सममित आकृतियाँ होती हैं और इसीलिए इनकी सममित रेखाएँ बहुत रोचक हैं। प्रत्येक समबहुभुज की उतनी ही सममित रेखाएँ होती हैं, जितनी उसकी भुजाएँ हैं [आकृति 12.6 (i) से (iv)]।



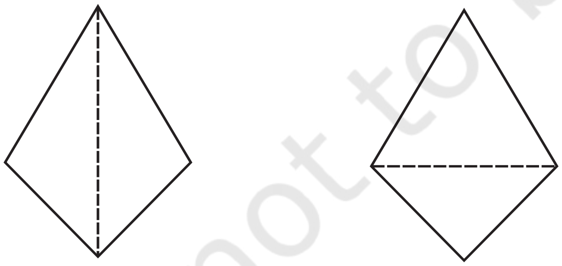
आकृति 12.6

संभवतः, आप कागज़ मोड़ने के क्रियाकलापों द्वारा इसकी खोज करना चाहेंगे। कोई बात नहीं, आगे बढ़िए!

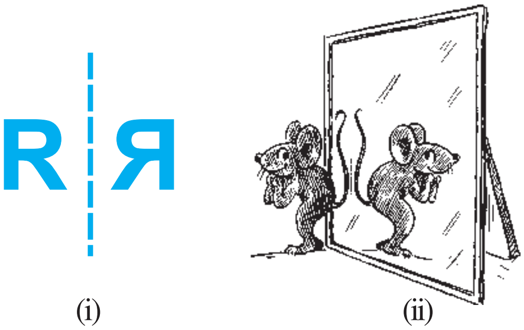


आकृति 12.7

रैखिक सममिति की अवधारण का दर्पण परावर्तन (mirror reflection) से निकट का संबंध है। एक आकार (shape) में रैखिक सममिति तब होती है, जब उसका एक आधा भाग दूसरे आधे भाग का दर्पण प्रतिबिंब (mirror image) हो (आकृति 12.7)। इस प्रकार एक दर्पण रेखा हमें एक सममित रेखा देखने या ज्ञात करने में सहायता करती है (आकृति 12.8)।



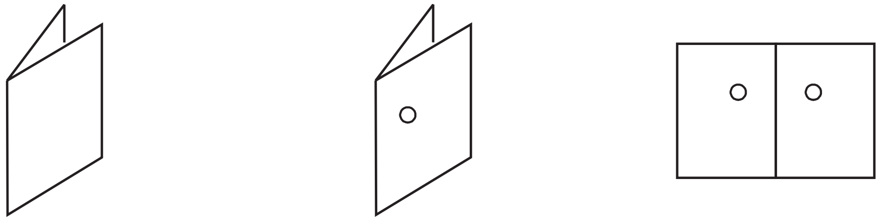
आकृति 12.8



आकृति 12.9

दर्पण परावर्तन के साथ कार्य करते समय, यह ध्यान रखना चाहिए कि एक आकृति के अभिमुखों (orientations) में दाएँ-बाएँ (left-right) परिवर्तन हो जाता है (आकृति 12.9)।

छेद करने वाला यह खेल खेलिए !



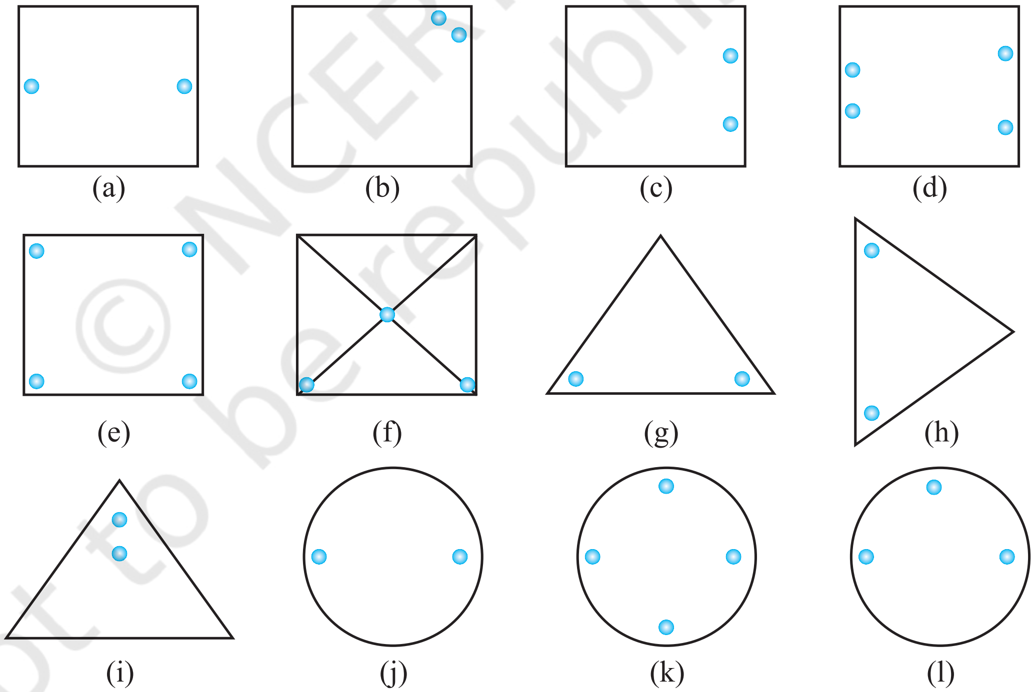
एक कागज़ को 2 आधों में मोड़िए   एक छेद करिए   मोड़ के निशान के अनुदिश दो छेद

आकृति 12.10

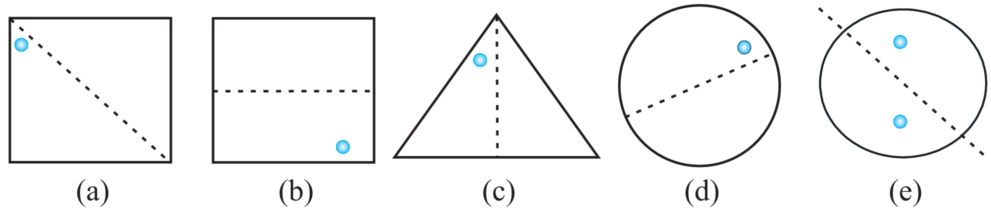
मोड़ का निशान एक सममित रेखा (या अक्ष) है। मोड़े हुए कागज़ पर विभिन्न स्थानों पर बनाए गए छेदों तथा संगत सममित रेखाओं का अध्ययन कीजिए (आकृति 12.10)।

प्रश्नावली 12.1

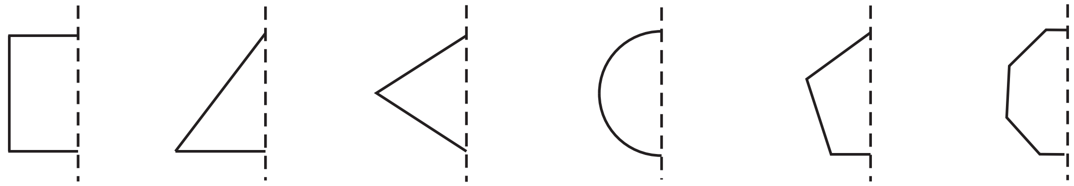
1. निम्नलिखित छेद की हुई आकृतियों की प्रतिलिपियाँ बनाकर (खींच कर) उनमें से प्रत्येक की सममित रेखाएँ ज्ञात कीजिए :



2. नीचे सममित रेखा (रेखाएँ) दी हुई हैं। अन्य छेद ज्ञात कीजिए।

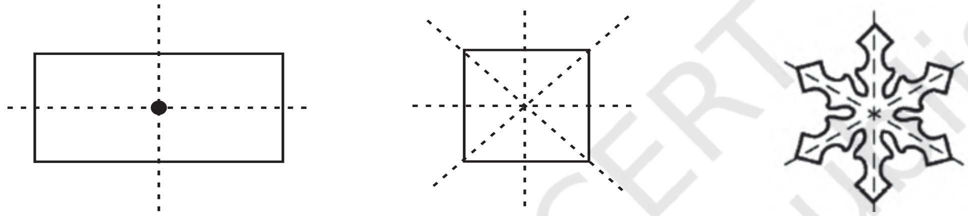


3. निम्नलिखित आकृतियों में, दर्पण रेखा (अर्थात् सममित रेखा) बिंदुकित रेखा के रूप में दी गई है। बिंदुकित (दर्पण) रेखा में प्रत्येक आकृति का परावर्तन करके, प्रत्येक आकृति को पूरा कीजिए। (आप बिंदुकित रेखा के अनुदिश एक दर्पण रख सकते हैं और फिर प्रतिबिंब (image) के लिए दर्पण में देख सकते हैं)। क्या आपको पूरी की गई आकृति का नाम याद है?



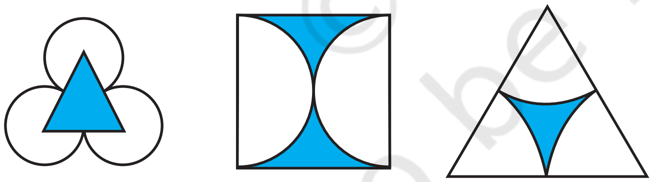
(a) (b) (c) (d) (e) (f)

4. निम्नलिखित आकृतियों की एक से अधिक सममित रेखाएँ हैं। ऐसी आकृतियों के लिए यह कहा जाता है कि इनकी अनेक सममित रेखाएँ हैं।

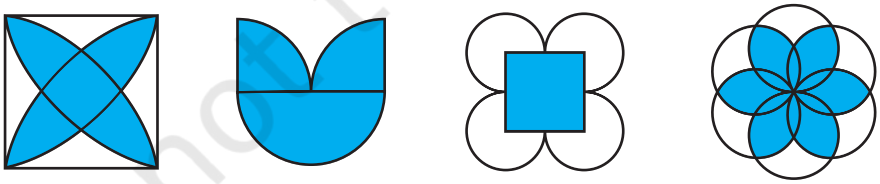


(a) (b) (c)

निम्नलिखित आकृतियों में से प्रत्येक में विविध सममित रेखाओं (यदि हों तो), की पहचान कीजिए :

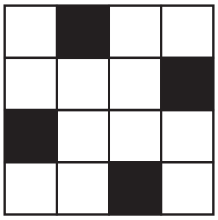


(a) (b) (c) (d)



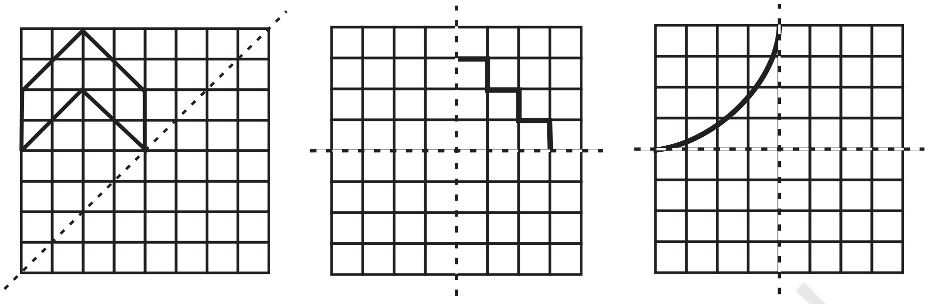
(e) (f) (g) (h)

5. यहाँ दी हुई आकृति की प्रतिलिपि बनाइए।



किसी एक विकर्ण की सममित रेखा लीजिए तथा कुछ और वर्गों को इस तरह छायांकित कीजिए, कि यह आकृति इस विकर्ण के अनुदिश सममित हो जाए। क्या ऐसा करने की एक से अधिक विधियाँ हैं? क्या यह आकृति दोनों विकर्णों के अनुदिश सममित होगी?

6. निम्नलिखित आरेखों की प्रतिलिपियाँ बनाइए तथा प्रत्येक आकार को इस तरह पूरा कीजिए ताकि वह आकार दर्पण रेखा (या रेखाओं) के अनुदिश सममित हो :



(a) (b) (c)

7. निम्नलिखित आकृतियों के लिए सममित रेखाओं की संख्याएँ बताइए :

(a) एक समबाहु त्रिभुज (b) एक समद्विबाहु त्रिभुज (c) एक विषमबाहु त्रिभुज

(d) एक वर्ग (e) एक आयत (f) एक समचतुर्भुज

(g) एक समांतर चतुर्भुज (h) एक चतुर्भुज (i) एक सम षड्भुज

(j) एक वृत्त

8. अंग्रेजी वर्णमाला के किन अक्षरों में निम्नलिखित के अनुदिश परावर्तन सममिति (दर्पण परावर्तन से संबंधित सममिति) है :

(a) एक ऊर्ध्वाधर दर्पण (b) एक क्षैतिज दर्पण

(c) ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज दर्पण दोनों

9. ऐसे आकारों के तीन उदाहरण दीजिए, जिनमें कोई सममित रेखा न हो।

10. आप निम्नलिखित आकृतियों की सममित रेखा के लिए अन्य क्या नाम दे सकते हैं ?

(a) एक समद्विबाहु त्रिभुज (b) एक वृत्त

12.3 घूर्णन सममिति

जब घड़ी की सुइयाँ घूमती हैं, तो आप क्या कहते हैं? आप कहते हैं कि ये घूर्णन (Rotate) कर रही हैं।

घड़ी की सुइयाँ केवल एक ही दिशा में घूमती हैं। यह घूमना एक बिंदु के चारों ओर होता है, जो घड़ी के पटल (face) का केंद्र है।

घड़ियों की सुइयाँ जिस दिशा में घूमती हैं, वह घूर्णन (rotation) दक्षिणावर्त (clockwise) घूर्णन कहलाता है, अन्यथा घूर्णन वामावर्त (anticlockwise rotation) कहलाता है।

छत के पंखे की पँखुड़ियों के घूर्णन के बारे में आप क्या कह सकते हैं ? क्या ये दक्षिणावर्त दिशा में घूमती हैं या वामावर्त दिशा में घूमती हैं ? अथवा क्या ये दोनों दिशाओं में घूमती हैं ?

यदि आप साइकिल के एक पहिए को घुमाते हैं, तो वह घूर्णन करता है। यह दोनों ही दिशाओं, अर्थात् दक्षिणावर्त और वामावर्त दिशाओं में घूर्णन कर सकता है। (i) दक्षिणावर्त घूर्णन और (ii) वामावर्त घूर्णन में से प्रत्येक के लिए तीन उदाहरण दीजिए।

जब कोई वस्तु घूर्णन करती है, तो उसके आकार और माप में कोई परिवर्तन नहीं होता है। घूर्णन उस वस्तु को एक निश्चित बिंदु के चारों तरफ घुमाता है। यह निश्चित बिंदु **घूर्णन का**

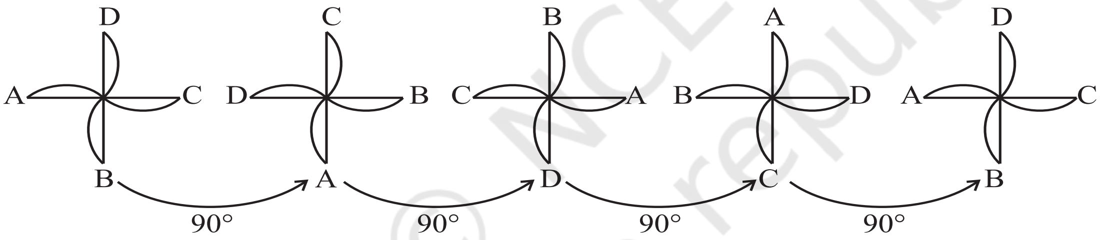
केंद्र (centre of rotation) कहलाता है। घड़ी की सुईयों के घूर्णन का केंद्र क्या है ? इसके बारे में सोचिए।

घूर्णन के दौरान घूमे गए कोण को **घूर्णन कोण (angle of rotation)** कहते हैं। आप जानते हैं कि एक पूरे चक्कर में $360°$ का घूर्णन होता है। (i) एक आधे या अर्ध चक्कर और (ii) एक चौथाई चक्कर के घूर्णन कोणों के क्रमश: क्या माप हैं ? एक अर्ध चक्र का अर्थ $180°$ का घूर्णन है तथा एक-चौथाई चक्कर का अर्थ $90°$ का घूर्णन है।

आकृति 12.11

जब 12 बजते हैं, तो घड़ी की दोनों सुइयाँ एक साथ होती हैं। 3 बजने तक मिनट की सुई तो तीन पूरे चक्कर लगा लेती है, परंतु घंटे की सुई केवल एक-चौथाई चक्कर ही लगा पाती है। 6 बजे की उनकी स्थितियों के बारे में आप क्या कह सकते हैं ?

क्या आपने कभी कागज़ की हवाई चकरी (या फिरकी) (paper windmill) बनाई है ? आकृति में दिखाई गई कागज़ की हवाई चकरी सममित दिखाई देती है (आकृति 12.11), परंतु आपको इसकी कोई सममिति रेखा प्राप्त नहीं होती है। इसको किसी प्रकार से मोड़ने पर भी दोनों आधे भाग संपाती नहीं होंगे। यदि आप इसके केंद्र (बीच) वाले स्थिर (या निश्चत) बिंदु के परित $90°$ के कोण पर घुमाएँ, तो आप देखेंगे की हवाई चकरी का आकार, आकृति 12.11 की स्थिति के अनुसार, पहले जैसा ही है। हम कहते हैं कि चकरी में एक घूर्णन सममिति (rotational symmetry) है।

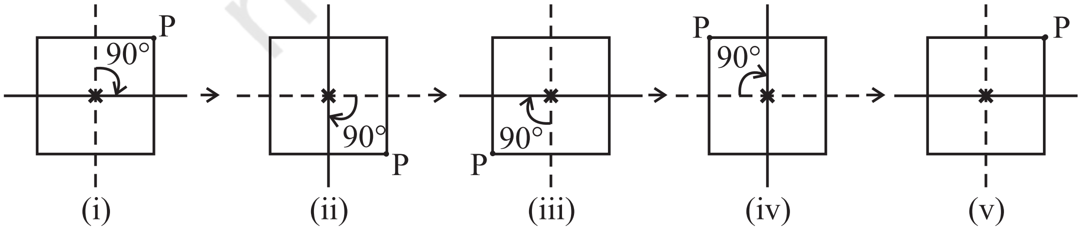


आकृति 12.12

एक पूरे चक्कर में, ऐसी **चार स्थितियाँ** हैं ($90°$, $180°$, $270°$ और $360°$ के कोणों पर घुमाने या घूर्णन करने पर), जब चकरी पहली जैसी ही दिखती है। (आकृति 12.12)। इसी कारण, हम कहते हैं कि चकरी में **क्रम 4 (order 4)** की घूर्णन सममिति है।

घूर्णन सममिति का एक और उदाहरण देखिए। एक वर्ग पर विचार कीजिए, जिसका एक कोना (या शीर्ष) P है (आकृति 12.13)।

आइए इस वर्ग के केंद्र को **×** से अंकित करके इसके परित इस वर्ग को एक-चौथाई चक्कर पर घुमाएँ।



आकृति 12.13

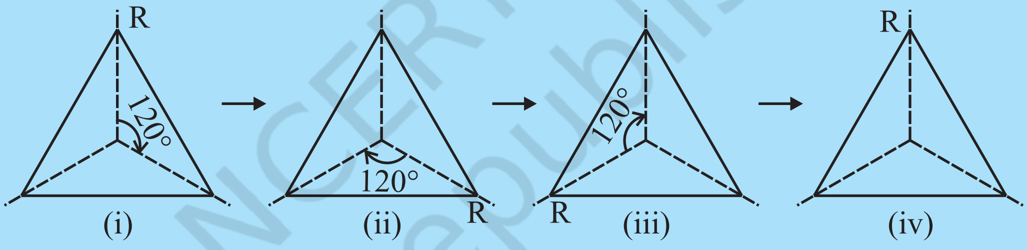
आकृति 12.13 (i) इसकी प्रारंभिक स्थिति है। केंद्र के चारों ओर 90° घूमाने पर आकृति 12.13 (ii) प्राप्त होती है। अब बिंदु P की स्थिति को देखिए। वर्ग को पुन: 90° के कोण पर घुमाइए (घूर्णन दीजिए)। आपको आकृति 12.13(iii) प्राप्त होती है। इस प्रकार, जब आप वर्ग को चार एक-चौथाई चक्कर घुमा देते हैं, तो वह अपनी प्रारंभिक स्थिति पर आ जाती है। अब यह आकृति 12.13 (i) जैसी ही दिखती है। इसे P द्वारा ली गई विभिन्न स्थितियों से देखा जा सकता है।

इस प्रकार, एक वर्ग में उसके केंद्र के चारों ओर **क्रम 4 की घूर्णन सममिति** होती है। ध्यान दीजिए कि इस स्थिति में,

(i) घूर्णन का केंद्र वर्ग का केंद्र है। (ii) घूर्णन का कोण 90° है।
(iii) घूर्णन की दिशा दक्षिणावर्त है। (iv) घूर्णन सममिति का क्रम 4 है।

प्रयास कीजिए

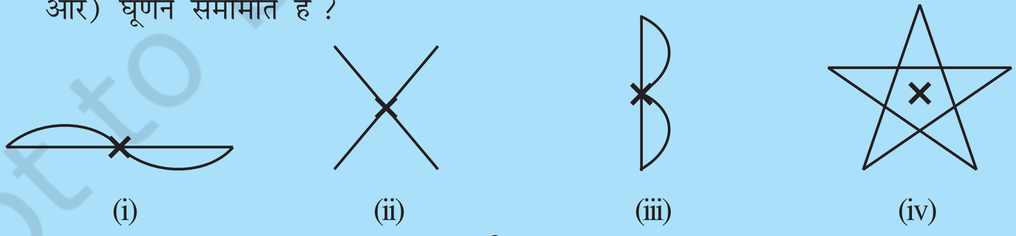
1. (a) क्या अब आप एक समबाहु त्रिभुज के लिए, घूर्णन सममिति के क्रम को बता सकते हैं (आकृति 12.14)?



आकृति 12.14

(b) जब उपरोक्त त्रिभुज को उसके केंद्र के परित (चारों ओर) 120° के कोण पर घुमाया जाता है, तो कितनी स्थितियों में त्रिभुज (स्थिति के अनुसार) पहले जैसा ही लगता है?

2. निम्नलिखित में से कौन-से आकारों (आकृति 12.15) में अंकित बिंदु के परित (चारों ओर) घूर्णन सममिति है?



आकृति 12.15

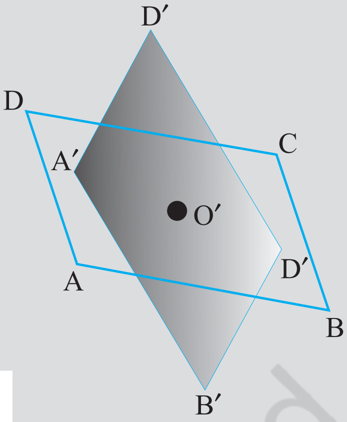
इन्हें कीजिए

दो एक जैसे (सर्वासम समांतर चतुर्भुज खींचिए, एक समांतर चतुर्भुज ABCD एक कागज़ पर तथा दूसरा समांतर चतुर्भुज A'B'C'D' एक पारदर्शक शीट (transparent sheet) पर। उनके विकर्णों के प्रतिच्छेद बिंदुओं को क्रमश: O और O' से अंकित (या व्यक्त) कीजिए (आकृति 12.16)।

समांतर चतुर्भुजों को इस प्रकार रखिए कि A' शीर्ष A पर रहे, B' शीर्ष B पर रहे, इत्यादि ।

इन आकारों में, अब बिंदु O पर एक पिन को लगाइए । अब पारदर्शक शीट को दक्षिणावर्त दिशा में घुमाइए । एक पूरे चक्कर में पारदर्शक शीट पर बना आकार कागज़ पर बने आकार से कितनी बार संपाती होता है ? इसमें घूर्णन सममिति का क्या क्रम है ?

वह बिंदु, जहाँ हमने पिन लगाई है, घूर्णन का केंद्र है । इस स्थिति में, यह विकर्णों का प्रतिच्छेद बिंदु है ।

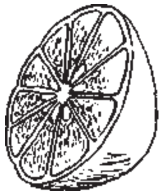


आकृति 12.16

प्रत्येक वस्तु (या आकृति) में, क्रम 1 की घूर्णन सममिति होती है, क्योंकि 360° के घूर्णन के बाद (अर्थात् पूरे एक चक्कर के बाद) वह अपनी प्रारंभिक स्थिति में आ जाता है । ऐसी स्थितियों में हमारी कोई रूचि नहीं होगी ।

आपके परिवेश में अनेक ऐसे आकार हैं जिनमें घूर्णन सममिति होती है (आकृति 12.17)।

उदाहरणार्थ, जब कुछ फलों को काटते हैं, तो उनके अनुप्रस्थ काट (**cross-section**) ऐसे आकारों के होते हैं, जिनमें घूर्णन सममिति होती है । जब आप इन्हें देखेंगे तो आप आश्चर्यचकित हो सकते हैं [आकृति 12.17 (i)] ।



फल
(i)

सड़क संकेत
(ii)

पहिया
(iii)

आकृति 12.17

ऐसे कई सड़क संकेत (road signs) भी हैं, जो घूर्णन सममिति प्रदर्शित करते हैं । अगली बार जब आप किसी व्यस्त सड़क पर घूमने निकलें, तो ऐसे सड़क संकेतों को पहचानिए और उनकी घूर्णन सममिति के क्रमों को ज्ञात कीजिए [आकृति 14.17(ii)] ।

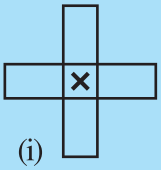
घूर्णन सममिति के कुछ अन्य उदाहरणों के बारे में सोचिए । प्रत्येक स्थिति में, निम्नलिखित की चर्चा कीजिए :

(i) घूर्णन का केंद्र (ii) घूर्णन का कोण

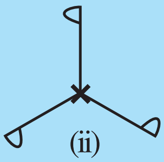
(iii) घूर्णन किस दिशा में किया गया है (iv) घूर्णन सममिति का क्रम

प्रयास कीजिए

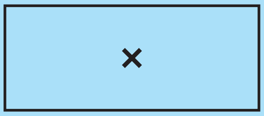
दी हुई आकृतियों के लिए × से अंकित बिंदु के परित घूर्णन सममिति का क्रम बताइए (आकृति 12.18)।



(i)



(ii)

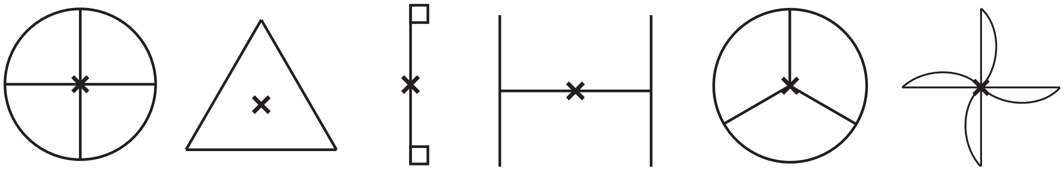


(iii)

आकृति 12.18

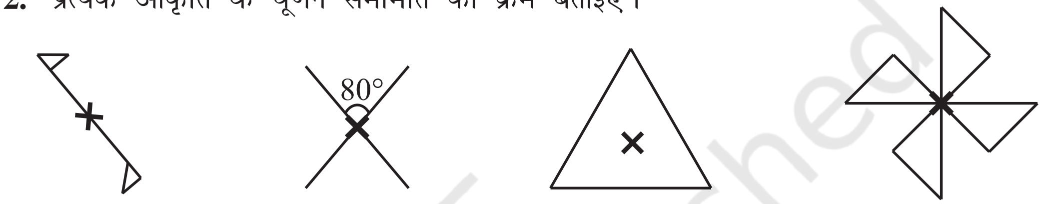
प्रश्नावली 12.2

1. निम्नलिखित आकृतियों में से किन आकृतियों में 1 से अधिक क्रम की घूर्णन सममिति है?



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

2. प्रत्येक आकृति के घूर्णन सममिति का क्रम बताइए।

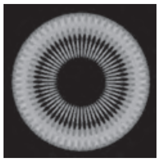


(a) (b) (c) (d)

(e) (f) (g) (h)

12.4 रैखिक सममिति और घूर्णन सममिति

आप अभी तक अनेक आकारों और उनकी सममितियों को देखते आ रहे हैं। अब तक आपने यह समझ लिया होगा कि कुछ आकारों में केवल रैखिक सममिति होती है, कुछ में केवल घूर्णन सममिति होती है तथा कुछ आकारों में रैखिक तथा घूर्णन दोनों प्रकार की सममितियाँ होती हैं।



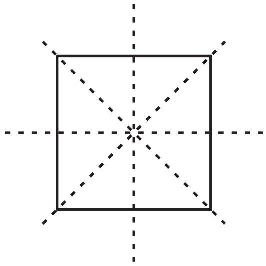
उदाहरणार्थ, एक वर्ग के आकार को देखिए (आकृति 12.19)।

इसकी कितनी सममित रेखाएँ हैं?

क्या इसमें कोई घूर्णन सममिति है?

यदि उत्तर 'हाँ' है, तो इस घूर्णन सममिति का क्रम क्या है?

इसके बारे में सोचिए।



आकृति 12.19

एक वृत्त सबसे अधिक पूर्ण सममित आकृति है, क्योंकि इसको इसके केंद्र के परित किसी भी कोण पर घुमा कर वही आकृति प्राप्त की जा सकती है, अर्थात् इसमें अपरिमित रूप से अनेक क्रम की घूर्णन सममिति है तथा साथ ही इसकी अपरिमित सममित रेखाएँ हैं। वृत्त के किसी भी प्रतिरूप को देखिए। केंद्र से होकर जाने वाली प्रत्येक रेखा (अर्थात् प्रत्येक व्यास) परावर्तन सममिति की एक सममिति रेखा है तथा केंद्र के परित प्रत्येक कोण के लिए इसकी एक घूर्णन सममिति है।

इन्हें कीजिए

अंग्रेज़ी वर्णमाला के कुछ अक्षरों में अद्‌भुत एवं आकर्षक सममितीय संरचनाएँ (structures) हैं। किन बड़े अक्षरों में केवल एक ही सममित रेखा है (जैसे **E**)? किन बड़े अक्षरों में क्रम 2 की घूर्णन सममिति है (जैसे **I**)?

उपरोक्त प्रकार से सोचते हुए, आप निम्नलिखित सारणी को भरने में समर्थ हो पाएँगे:

वर्णमाला का अक्षर	रैखिक सममिति	सममित रेखाओं की संख्या	घूर्णन सममित	घूर्णन सममिति का क्रम
Z	नहीं	0	हाँ	2
S				
H	हाँ		हाँ	
O	हाँ		हाँ	
E	हाँ			
N			हाँ	
C				

प्रश्नावली 12.3

1. किन्हीं दो आकृतियों के नाम बताइए, जिनमें रैखिक सममिति और क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति दोनों ही हों।

2. जहाँ संभव हो, निम्नलिखित की एक रफ़ आकृति खींचिए :

(i) एक त्रिभुज, जिसमें रैखिक सममिति और क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति दोनों ही हों।

(ii) एक त्रिभुज, जिसमें केवल रैखिक सममिति और क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति न हो।

(iii) एक चतुर्भुज जिसमें क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति हो, परंतु रैखिक सममिति न हो।

(iv) एक चतुर्भुज जिसमें केवल रैखिक सममिति हो और क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति न हो।

3. यदि किसी आकृति की दो या अधिक सममित रेखाएँ हों, तो क्या यह आवश्यक है कि उसमें क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति होगी ?

4. रिक्त स्थानों को भरिए :

आकार	वर्ग	आयत	समचतुर्भुज	समबाहु त्रिभुज	समषड्‌भुज	वृत्त	अर्धवृत्त
घूर्णन का केंद्र							
घूर्णन सममिति का क्रम							
घूर्णन का कोण							

5. ऐसे चतुर्भुजों के नाम बताइए, जिनमें रैखिक सममिति और क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति दोनों ही हों।
6. किसी आकृति को उसके केंद्र के परित $60°$ के कोण पर घुमाने पर, वह उसकी प्रारंभिक स्थिति जैसी ही दिखाई देती है। इस आकृति के लिए ऐसे कौन-से अन्य कोणों के लिए भी हो सकता है ?
7. क्या हमें कोई ऐसी क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति प्राप्त हो सकती है, जिसके घूर्णन के कोण निम्नलिखित हों ?
   (i) $45°$ (ii) $17°$

हमने क्या चर्चा की ?

1. एक आकृति मे **रैखिक सममिति** तब होती है, जब कोई ऐसी रेखा प्राप्त की जा सके जिसके अनुदिश उस आकृति को मोड़ने पर, उसके दोनों भाग परस्पर संपाती हो जाएँ।
2. सम बहुभुजों में बराबर भुजाएँ और बराबर कोण होते हैं। उनकी अनेक अर्थात् एक से अधिक, सममित रेखाएँ होती हैं।
3. प्रत्येक सम बहुभुज की उतनी ही सममित रेखाएँ होती हैं, जितनी उसकी भुजाएँ होती हैं।

समबहुभुज	समषड्भुज	समपंचभुज	वर्ग	समबाहु त्रिभुज
सममित रेखाओं की संख्या	6	5	4	3

4. दर्पण परावर्तन से ऐसी सममिति प्राप्त होती है, जिसमें बाएँ-दाएँ अभिमुखों का ध्यान रखना होता है।
5. घूर्णन में एक वस्तु को एक निश्चित बिंदु के परित घुमाया जाता है। यह निश्चित बिंदु **घूर्णन का केंद्र** कहलाता है। जिस कोण पर वस्तु घूमती है, उसे **घूर्णन का कोण** कहते हैं। आधे या अर्ध चक्कर का अर्थ $180°$ का घूर्णन है तथा एक-चौथाई चक्कर का अर्थ $90°$ का घूर्णन है। घूर्णन दक्षिणावर्त और वामावर्त दोनों ही दिशाओं में हो सकता है।
6. यदि घूर्णन के बाद, वस्तु, स्थिति के अनुसार, पहले जैसी ही दिखाई देती है, तो हम कहते हैं कि उसमें **घूर्णन सममिति** है।
7. एक पूरे चक्कर ($360°$ के) में, एक वस्तु जितनी बार स्थिति के अनुसार, पहले जैसी ही दिखाई देती है, वह संख्या उस घूर्णन **सममिति का क्रम** कहलाती है। उदाहरणार्थ, एक वर्ग की घूर्णन सममिति का क्रम 4 है तथा एक समबाहु त्रिभुज की घूर्णन सममिति का क्रम 3 है।
8. कुछ आकारों में केवल एक ही सममिति रेखा होती है, जैसे अक्षर E; कुछ में केवल घूर्णन सममिति ही होती है, जैसे अक्षर S तथा कुछ में दोनों प्रकार की सममितियाँ होती हैं, जैसे अक्षर H है। सममिति का अध्ययन इसलिए महत्वपूर्ण है, क्योंकि इसका दैनिक जीवन में अधिकांशत: प्रयोग होता है तथा इससे भी अधिक महत्व इस कारण है कि यह हमें सुंदर एवं आकर्षक डिज़ाइन प्रदान कर सकती है।

ठोस आकारों का चित्रण

0757CH15

13.1 भूमिकाः तल-आकृतियाँ और ठोस आकार

इस अध्याय में, आप अब तक देखी गई आकृतियों को उनकी विमाओं के रूप में (dimensions) वर्गीकृत करेंगे।

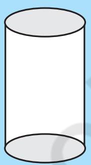
अपने दैनिक जीवन में, हम अपने परिवेश से विभिन्न आकारों की अनेक वस्तुएँ देखते हैं, जैसे पुस्तकें, गेंदें, आइसक्रीम शंकु, इत्यादि। अधिकांशतः, इन सभी वस्तुओं में एक बात सर्वनिष्ठ (common) है, वह यह है कि इनमें से प्रत्येक की कुछ लंबाई, चौड़ाई, ऊँचाई या गहराई है।

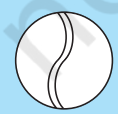
इसी कारण, ये सभी स्थान घेरते हैं और इनकी तीन विमाएँ हैं। इसीलिए, ये **त्रिविमीय आकार** (three dimensional shapes) कहलाते हैं

क्या आपको पिछली कक्षाओं में देखे गए कुछ त्रिविमीय आकारों (ठोस आकारों) के बारे में याद है ?

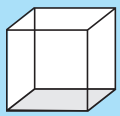
प्रयास कीजिए

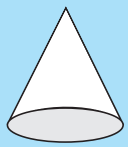
आकारों का नामों से मिलान (match) कीजिए :

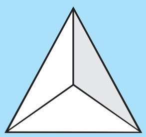
(i)  (a) घनाभ

(ii)  (b) बेलन

(iii)  (c) घन

(iv)  (d) गोला

(v)  (e) पिरामिड

(vi)  (f) शंकु

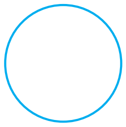
आकृति 13.1

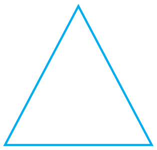
उपरोक्त में से प्रत्येक आकार जैसी कुछ वस्तुओं की पहचान करने का प्रयत्न कीजिए।

इसी प्रकार के तर्क द्वारा, हम कह सकते हैं कि एक कागज़ पर खींची जा सकने वाली आकृतियों (जिनकी केवल लंबाई और चौड़ाई होती है) को द्विविमीय (two dimensional) (या तल) कहना चाहिए। हम दो विमाओं की कुछ आकृतियों को पिछली कक्षाओं में भी देख चुके हैं।

द्विविमीय आकृतियों का नामों के साथ मिलान कीजिए (आकृति 13.2):

(i)  (a) वृत्त

(ii)  (b) आयत

(iii)  (c) वर्ग

(iv)  (d) चतुर्भुज

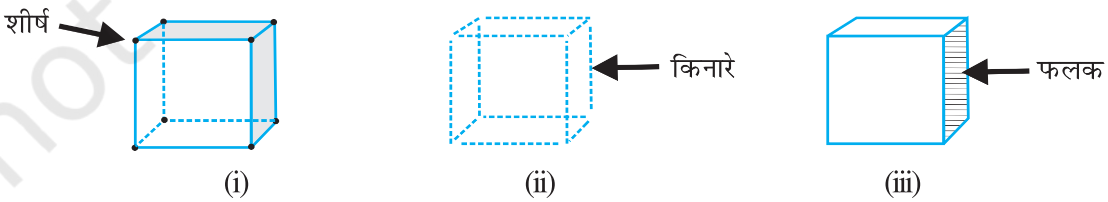
(v)  (e) त्रिभुज

आकृति 13.2

टिप्पणी: हम संक्षेप में, द्विविमीय को 2-D और त्रिविमीय को 3-D लिख सकते हैं।

13.2 फलक, किनारे और शीर्ष

क्या आपको पहले पढ़े हुए ठोस आकारों के फलकों, शीर्षों और किनारों के बारे में कुछ याद है? यहाँ, एक घन के लिए, इन्हें दिखाया गया है :



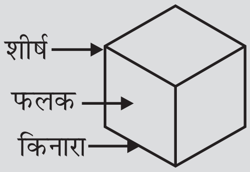
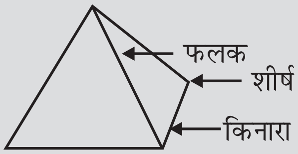
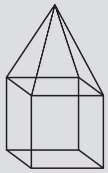
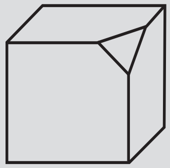
आकृति 13.3

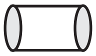
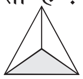
घन के 8 कोने उसके **शीर्ष (vertices)** हैं। घन के ढाँचे को बनाने वाले 12 रेखाखंड उसके किनारे या **कोर (edges)** कहलाते हैं। 6 सपाट वर्गाकार पृष्ठ, जो घन की खाल या त्वचा हैं, उसके **फलक (faces)** कहलाते हैं।

इन्हें कीजिए

निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए :

सारणी 13.1

				
फलक (F)	6	4		
किनारे (E)	12			
शीर्ष (V)	8	4		

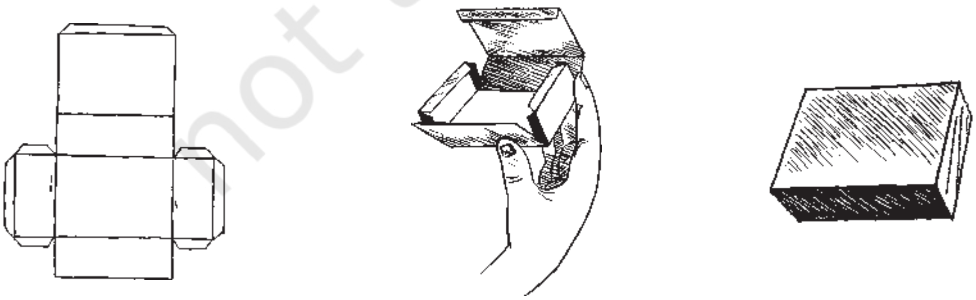
क्या आप देख सकते हैं कि द्विविमीय आकृतियों के रूप में त्रिविमीय आकारों के फलकों की पहचान की जा सकती है ? उदाहरणार्थ, एक बेलन  के दो फलक ऐसे हैं जो वृत्त हैं, तथा दर्शाए गए पिरामिड  के फलक त्रिभुज हैं।

अब हम यह देखने का प्रयत्न करेंगे कि किस प्रकार कुछ 3-D आकारों को 2-D आकृतियों (अर्थात् कागज़ पर) को चित्रीय रूप से निरूपित किया जा सकता है।

ऐसा करने के लिए, हम त्रिविमीय वस्तुओं से निकटतम रूप से परिचित होना चाहेंगे। आइए इन वस्तुओं को उनसे बनाने का प्रयास करें, जो इनके जाल (net) कहलाते हैं।

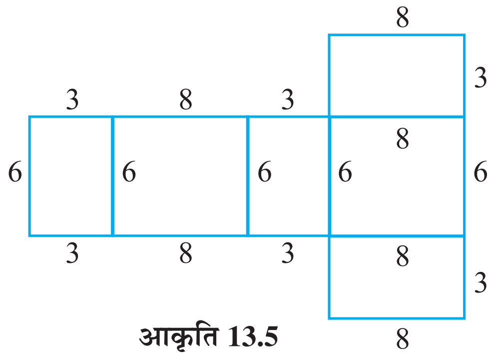
13.3 3-D आकार बनाने के लिए जाल (नेट)

एक गत्ते का बक्सा (box) लीजिए। इसको कुछ किनारों के अनुदिश काट कर सपाट (flat) बना लीजिए। अब आपके पास इस बक्से का जाल है। जाल 2-D में एक प्रकार का ऐसा ढाँचा (या रूपरेखा) होता है (आकृति 13.4 (i)) जिसे मोड़ने पर (आकृति 13.4 (ii))। परिणामस्वरूप एक 3-D आकार प्राप्त हो जाता है (आकृति 13.4 (iii))।



(i) (ii) (iii)

आकृति 13.4

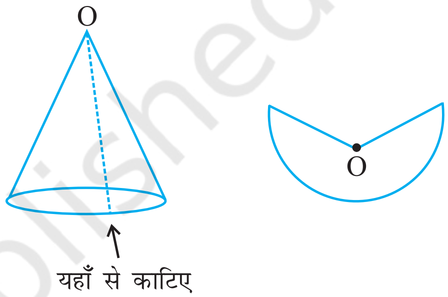


आकृति 13.5

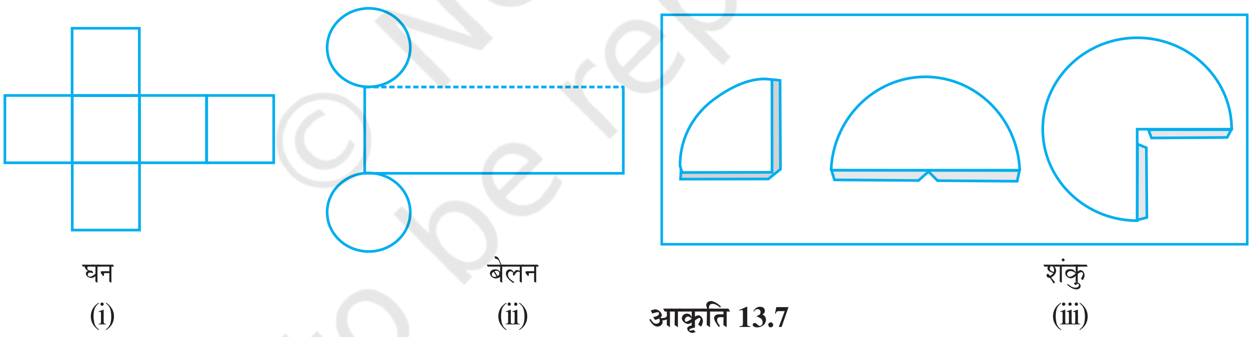
यहाँ आपने किनारों को उपयुक्त रूप से पृथक् करके, एक **जाल** प्राप्त किया है। क्या इसकी विपरीत प्रक्रिया संभव है? यहाँ, एक बक्से के जाल का प्रतिरूप दिया है (आकृति 13.5)। इसका प्रतिरूप बनाकर उसका विस्तार (enlarge) कर लीजिए। फिर इसे उपयुक्त प्रकार से मोड़ कर और चिपका कर एक बक्सा बनाइए।

आप उपयुक्त इकाइयों या मात्रकों (units) का प्रयोग कर सकते हैं। प्राप्त बक्सा एक ठोस है। यह घनाभ (cuboid) के आकार की एक 3-D वस्तु है। इसी प्रकार, आप एक शंकु को उसके तिर्यक पृष्ठ के अनुदिश एक पतली पट्टी (या झिरी) काट कर, इसका जाल प्राप्त कर सकते हैं (आकृति 13.6)।

भिन्न-भिन्न आकारों के लिए, भिन्न-भिन्न जाल होते हैं। दिए हुए जालों के प्रतिरूप बनाइए और उनका विस्तार कीजिए, अथवा दिए हुए जालों के विस्तारित रूपों के प्रतिरूप बनाइए (आकृति 13.7) फिर इनके नीचे लिखें 3-D आकारों को बनाने का प्रयास कीजिए। आप गत्ते की पतली पट्टियाँ लेकर और उन्हें कागज़ के क्लिपों (clips) से बाँध कर आकारों के ढाँचे भी बनाना चाह सकते हैं।

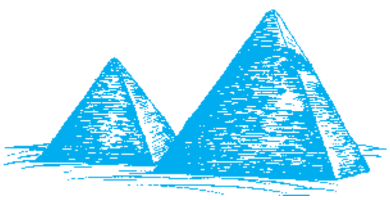


आकृति 13.6

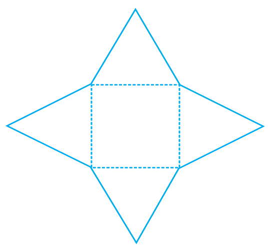


आकृति 13.7

हम गिज़ा (मिस्त्र में हैं) के ग्रेट पिरामिड (Great Pyramid) (आकृति 13.8) के प्रकार के पिरामिड के लिए भी जाल बनाने का प्रयास कर सकते हैं। इस पिरामिड का आधार एक वर्ग है तथा चारों भुजाओं पर त्रिभुज बने हुए हैं। देखिए कि क्या आप दिए हुए जाल (आकृति 13.9) से इस पिरामिड को बना सकते हैं।



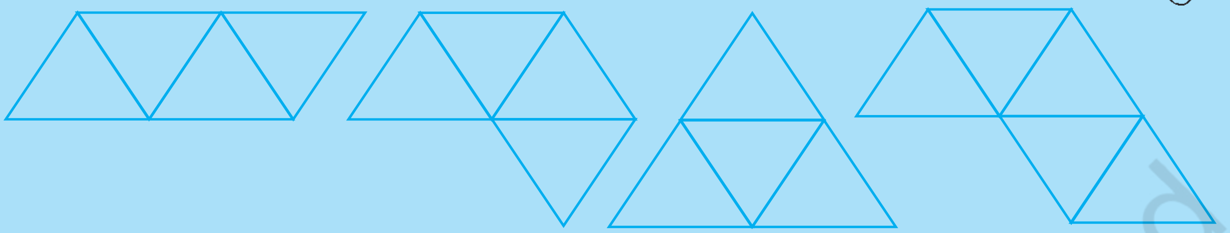
आकृति 13.8



आकृति 13.9

प्रयास कीजिए

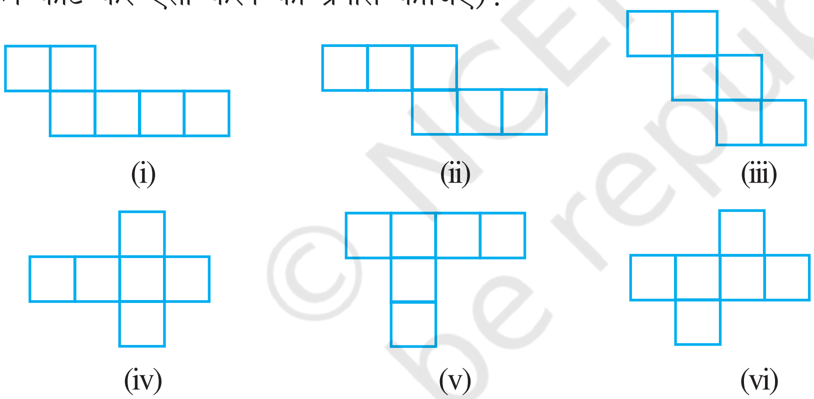
यहाँ आप चार जालों को देख रहे हैं (आकृति 13.10)। एक चतुष्फलक (tetrahedron) बनाने के लिए, इनमें से दो जाल सही हैं। देखिए कि क्या आप यह ज्ञात कर सकते हैं कि किन-किन जालों से चतुष्फलक बन सकता है।



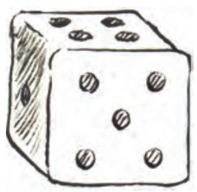
आकृति 13.10

प्रश्नावली 13.1

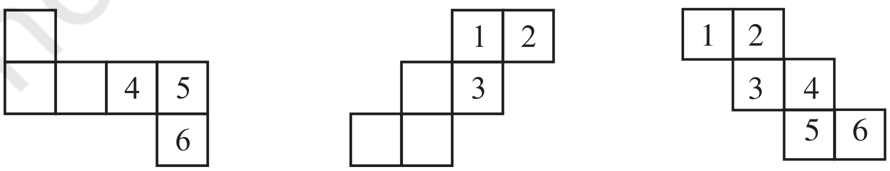
1. उन जालों को पहचानिए,जिनका प्रयोग करके आप घनों को बना सकते हैं (इन जालों के प्रतिरूप काट कर ऐसा करने का प्रयास कीजिए):



2. पासे (dice) ऐसे घन होते हैं, जिनके प्रत्येक फलक पर बिंदु (dots) अंकित होते हैं। एक पासे के सम्मुख फलकों पर अंकित बिंदुओं की संख्याओं का योग सदैव 7 होता है।



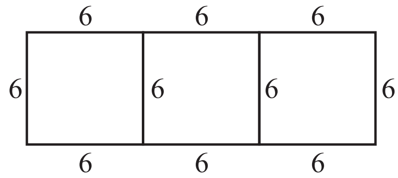
यहाँ, पासे (घनों) को बनाने के लिए, दो जाल दिए जा रहे हैं। प्रत्येक वर्ग में लिखी संख्या उस बक्से के बिंदुओं को दर्शाती है।



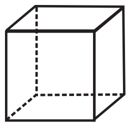
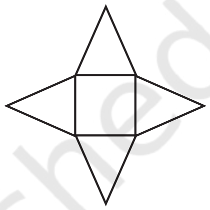
यह याद रखते हुए कि पासे के सम्मुख फलकों की संख्याओं का योग सदैव 7 होता है, रिक्त स्थानों पर उपयुक्त संख्याएँ लिखिए।

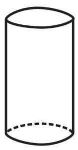
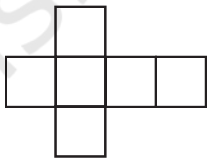
3. क्या यह पासे कि लिए एक जाल हो सकता है ? अपने उत्तर को स्पष्ट कीजिए।

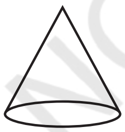
4. यहाँ एक घन बनाने के लिए, एक अधूरा जाल दिया गया है। इसको कम-से-कम दो विभिन्न विधियों से पूरा कीजिए। याद रखिए कि घन के 6 फलक होते हैं। यहाँ इस जाल में कितने फलक दिए हुए हैं। (दो पृथक्-पृथक् चित्र दीजिए। कार्य को सरल बनाने के लिए, आप वर्गांकित कागज़ का प्रयोग कर सकते हैं।)

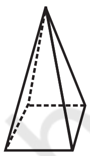
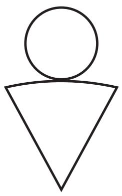


5. जालों को उपयुक्त ठोसों से मिलान कीजिए :

(a)  (i) 

(b)  (ii) 

(c)  (iii) 

(d)  (iv) 

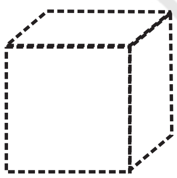
यह खेल खेलिए :

आप और आपका मित्र परस्पर पीठ-से-पीठ मिलाकर बैठे हैं। आप में से एक व्यक्ति कोई 3-D आकार बनाने के लिए एक जाल पढ़ता है, जबकि दूसरा व्यक्ति इसका प्रतिरूप बना कर, बोले गए 3-D आकार को खींचने या बनाने का प्रयत्न करता है।

13.4 एक सपाट पृष्ठ पर ठोसों को खींचना

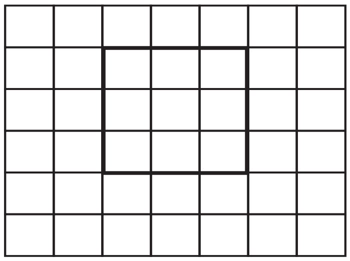
आपका यह सपाट पृष्ठ एक कागज़ है। जब आप एक ठोस आकार को खींचते हैं, तो प्रतिबिंबों को कुछ विकृत (टेढ़ा) कर दिया जाता है, ताकि वे त्रिविमीय दिखाई दें। यह एक दृष्टिभ्रम है। यहाँ आपकी सहायता के लिए, दो तकनीकें दी जा रही हैं।

13.4.1 तिर्यक या अनियमित चित्र

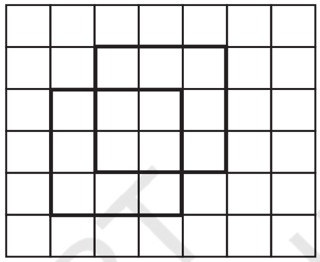

आकृति 13.11

यहाँ एक घन का चित्र दिया है (आकृति 13.11)। जब इसे सामने से देखा जाए तो इससे यह स्पष्ट पता चलता है कि एक घन कैसा दिखता है। आप इसके कुछ फलकों को देख नहीं पाते हैं।

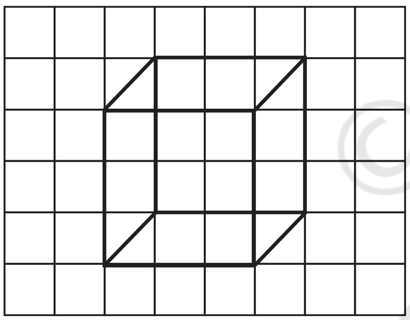
खींचे गए इस चित्र में लंबाई बराबर नहीं है। जबकि घन में यह बराबर होनी चाहिए। फिर भी आप यह पहचान कर लेते हैं कि यह एक घन है। किसी ठोस का ऐसा चित्र **एक तिर्यक** (या अनियमित) चित्र (oblique sketch) कहलाता है। आप ऐसे चित्र किस प्रकार खींच सकते हैं ? आइए इसकी तकनीक को सीखने का प्रयत्न करें। आपको एक वर्गांकित (रेखांकित या बिंदुकित) कागज़ की आवश्यकता है। प्रारंभ में इस प्रकार के कागज़ पर चित्र खींचने का अभ्यास करने के बाद, आप बिना इस प्रकार के कागज़ की सहायता के सादे कागज़ पर ये चित्र सरलता से खींच सकते हैं। आइए एक $3 \times 3 \times 3$ का एक तिर्यक चित्र (एक ऐसा घन जिसका प्रत्येक किनारा 3 इकाई है) खींचने का प्रयत्न करें (आकृति 13.12)।



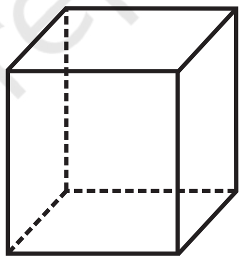
चरण 1
सामने का फलक खींचिए



चरण 2
सामने के फलक का सम्मुख फलक खींचिए। फलकों के माप बराबर होने चाहिए। परंतु यह चित्र चरण 1 के चित्र को कुछ खिसका कर ही बनाया गया है



चरण 3
संगत कोनों को मिलाइए



चरण 4
छिपे हुए किनारों के लिए, चित्र को बिंदुकित रेखाओं का प्रयोग करते हुए पुनः खींचिए (यह एक परंपरा या परिपाटी है) अब अभीष्ट चित्र तैयार है

आकृति 13.12

उपरोक्त तिर्यक चित्र में, क्या आप निम्नलिखित बातों को देख रहें हैं ?

(i) सामने के फलक और उसके सम्मुख फलक के माप समान हैं; तथा

(ii) घन के किनारे जो बराबर होते हैं, चित्र में भी बराबर-बराबर प्रतीत होते हैं यद्यपि इनको बराबर नहीं लिया गया है।

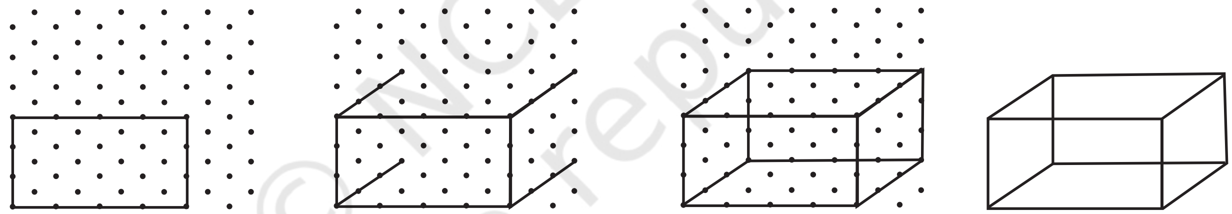
अब आप एक घनाभ का तिर्यक चित्र बनाने का प्रयास कर सकते हैं (याद रखिए इस स्थिति में, फलक आयत है।

टिप्पणी : आप ऐसे चित्र भी खींच सकते हैं, जिनमें माप (या मापन), दिए हुए ठोस के मापों के अनुसार (अनुकूल) ही हो। ऐसा करने के लिए हमें एक ऐसे कागज़ की आवश्यकता होगी, जिसे समदूरीक शीट (isometric sheet) अर्थात् समान दूरियों वाली शीट) कहते हैं। आइए हम एक समदूरीक शीट पर ऐसा घनाभ बनाने का प्रयास करते हैं जिसकी लंबाई 4 cm, चौड़ाई 3 cm और ऊँचाई 3 cm है।

13.4.2 समदूरीक चित्र

क्या आपने एक समदूरीक बिंदुकित शीट देखी है ? (इसका एक प्रतिदर्श (sample) इस पुस्तक के अंत में दिया है।) इस प्रकार की शीट में, पूरा कागज़ (अर्थात् स्वयं यह शीट) बिंदुकित रेखाओं से बने छोटे-छोटे समबाहु त्रिभुजों में बँट जाता है। ऐसे चित्र खींचने के लिए जिनके माप दिए हुए ठोस की मापों के अनुसार हों, हम इन बिंदुकित समदूरीक शीटों का प्रयोग कर सकते हैं।

आइए विमाओं $4 \times 3 \times 3$ वाले एक घनाभ (जिसका अर्थ है कि इसकी लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 4, 3 और 3 इकाइयों की हैं) का एक समदूरीक चित्र बनाने का प्रयत्न करें (आकृति 13.13)।



चरण 1
सामने वाला फलक दर्शाने के लिए 4×3 मापों का एक आयत खींचिए।

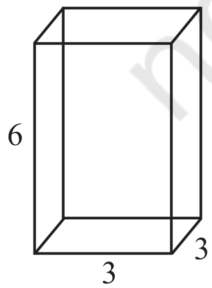
चरण 2
आयत के चारों कोनों से लंबाई 3 इकाई वाले 4 रेखाखंड खींचिए।

चरण 3
सुमेलित कोनों को उपयुक्त रेखाखंडों से मिलाइए।

चरण 4
यह घनाभ का एक समदूरीक चित्र है।

आकृति 13.13

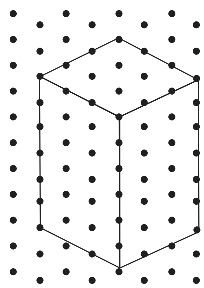
ध्यान दीजिए कि एक समदूरीक चित्र में, मापन ठीक (यथार्थ में) ठोस की दी हुई मापों के होते हैं, जबकि तिर्यक चित्र की स्थिति में ऐसा नहीं होता है।



आकृति 13.14 (i)

उदाहरण 1 यहाँ किसी घनाभ का एक तिर्यक चित्र दिया है (आकृति 13.14 (i))। इस चित्र से मिलान करने वाला एक समदूरीक चित्र खींचिए।

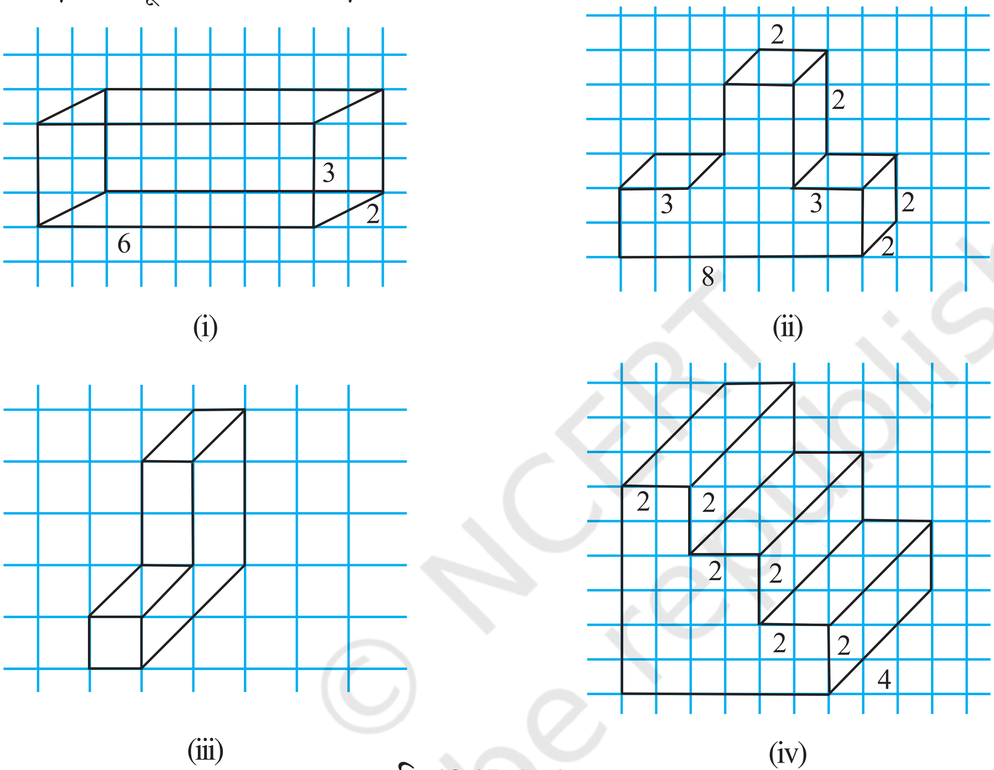
हल इसका हल आकृति 13.14 (ii) में चित्र खींच कर दर्शाया गया है। ध्यान दीजिए कि किस प्रकार मापों के अनुसार चित्र खींचा गया है।


आकृति 13.14 (ii)

आपने (i) लंबाई (ii) चौड़ाई और (iii) ऊँचाई में से प्रत्येक के अनुदिश कितनी-कितनी इकाइयाँ ली हैं ? क्या ये तिर्यक चित्र में दर्शाई गई इकाइयों से सुमेलित हैं ?

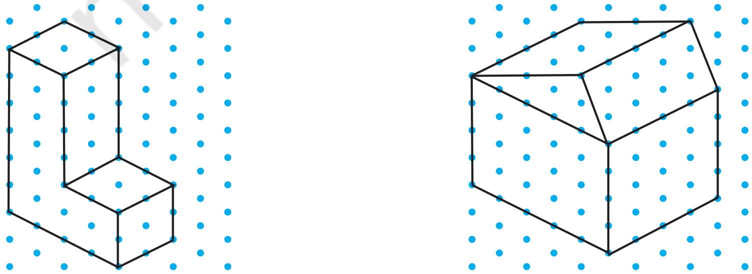
प्रश्नावली 13.2

1. एक समदूरीक बिंदुकित कागज़ का प्रयोग करते हुए, निम्नलिखित आकृतियों में से प्रत्येक का एक समदूरीक चित्र खींचिए :



आकृति 13.15 (i)-(iv)

2. किसी घनाभ की विमाएँ 5 cm 3 cm और 2 cm हैं। इस घनाभ के तीन भिन्न-भिन्न समदूरीक चित्र खींचिए।
3. 2 cm किनारों वाले तीन घनों को परस्पर सटा कर रखते हुए एक घनाभ बनाया गया है। इस घनाभ का एक तिर्यक अथवा एक समदूरीक चित्र खींचिए।
4. निम्नलिखित समदूरीक आकारों में से प्रत्येक के लिए, एक तिर्यक चित्र खींचिए :



5. निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए, (i) एक तिर्यक चित्र और (ii) एक समदूरीक चित्र खींचिए :

(a) 5 cm, 3 cm और 2 cm विमाओं वाला एक घनाभ (क्या आपका चित्र अद्वितीय है ?)

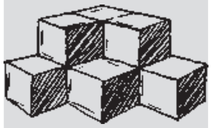
(b) 4 cm लंबे किनारे वाला एक घन।

इस पुस्तक के अंत में, एक समदूरीक शीट लगी है। आप इस पर अपने मित्र द्वारा निर्दिष्ट विमाओं के घन या घनाभ खींच सकते हैं।

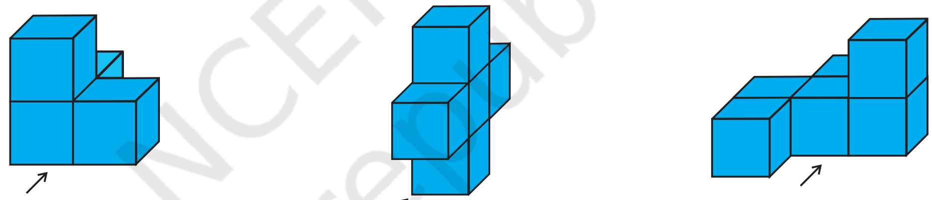
13.4.3 ठोस वस्तुओं का चित्रण

इन्हें कीजिए

कभी-कभी जब आप संयोजित या जुड़े हुए आकारों को देखते हैं, तो इनमें से कुछ आपकी दृष्टि से छिप जाते हैं, अर्थात् आपको दिखाई नहीं देते हैं।



यहाँ कुछ क्रियाकलाप दिए जा रहे हैं, जिन्हें आप अपने खाली समय में करने का प्रयास कर सकते हैं। इनसे आपको कुछ ठोस वस्तुओं के चित्रण या उनके बारे में यह कल्पना करने में सहायता मिलेगी कि वे कैसे दिखाई देते हैं।



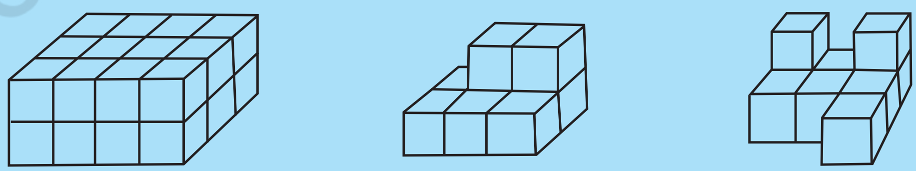
(i) (ii) (iii)

आकृति 13.16

कुछ घन लीजिए तथा उन्हें आकृति 13.16 में दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए। अब अपने मित्र से पूछिए कि वह इसका अनुमान लगाए कि तीर के चिह्न के अनुसार इसको देखने पर कितने घन दिखाई देते हैं ?

प्रयास कीजिए

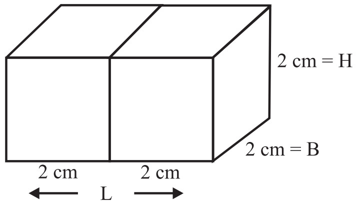
यह अनुमान लगाने का प्रयत्न कीजिए कि निम्नलिखित व्यवस्थाओं में घनों की संख्या कितनी है (आकृति 13.17)।



(i) (ii) (iii)

आकृति 13.17

इस प्रकार का चित्रीयकरण बहुत सहायक होता है। मान लीजिए आप ऐसे घनों को जोड़ कर एक घनाभ बनाते हैं। इस स्थिति में, आप यह अनुमान लगा सकते हैं कि उस घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्या होगी ?



आकृति 13.18

उदाहरण 2 यदि 2 cm × 2 cm × 2 cm विमाओं वाले दो घनों को परस्पर सटा कर रखा जाए, तो परिणामी घनाभ की विमाएँ क्या होंगी ?

हल जैसाकि आप देख सकते हैं (आकृति 13.18) जब घनों को सटा कर रखा जाता है, तो केवल लंबाई ही एक ऐसा मापन है जिसमें वृद्धि हुई है। यह 2 + 2 = 4 cm हो जाती है। घनाभ की चौड़ाई = 2 cm है और ऊँचाई भी = 2 cm है।

प्रयास कीजिए

1. दो पासों को आकृति में दर्शाए अनुसार, परस्पर सटा कर रखा गया है। क्या आप बता सकते हैं कि निम्नलिखित फलकों के विपरीत फलकों पर अंकित बिंदुओं का योग क्या होगा ?

(a) 5 + 6 (b) 4 + 3

(याद रखिए कि एक पासे पर सम्मुख फलकों पर अंकित संख्याओं का योग सदैव 7 होता है।)


आकृति 13.19

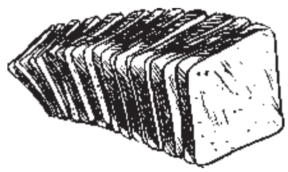
2. 2 cm किनारों वाले तीन घनों को परस्पर सटा कर रखते हुए, एक घनाभ बनाया गया है। इस घनाभ का एक तिर्यक चित्र बनाने का प्रयास कीजिए और बताइए कि इसकी लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्या हो सकती है ?

13.5 किसी ठोस के विभिन्न भागों को देखना

आइए अब इस पर चर्चा करें कि एक 3-D वस्तु को किस प्रकार विभिन्न विधियों से देखा जा सकता है।

13.5.1 किसी वस्तु को देखने की एक विधि है उसे काटना या उसके पतले टुकड़े करना

टुकड़े करने वाला खेल


आकृति 13.20

यहाँ एक डबल रोटी (bread) दी हुई है (आकृति 13.20)। यह वर्गाकार आधार वाले एक घनाभ जैसा है। आप चाकू से इसके टुकड़े कीजिए।

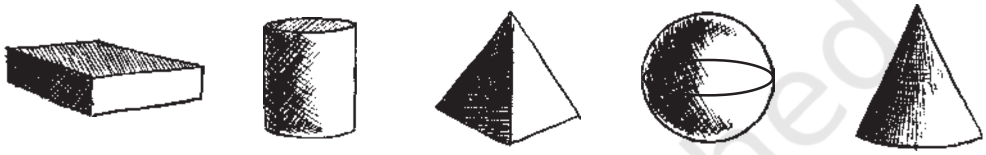
जब आप इसे ऊर्ध्वाधर रूप से काटते हैं, तो आपको अनेक टुकड़े प्राप्त हो जाते हैं, जैसा आकृति 13.20 में दर्शाया गया है। एक टुकड़े का प्रत्येक फलक एक वर्ग है। हम इस फलक को डबल रोटी की एक अनुप्रस्थ-काट (cross section) कहते हैं। वस्तुतः, इस स्थिति में, अनुप्रस्थ काट लगभग एक वर्ग है। ध्यान रखिए! यदि आपका यह काटना या कटाव 'ऊर्ध्वाधर' नहीं होगा, तो आपको एक भिन्न अनुप्रस्थ-काट प्राप्त हो सकती है। इसके बारे में सोचिए! आपके द्वारा प्राप्त अनुप्रस्थ-काट की परिसीमा एक तल-आकृति है। क्या आप इसे देख रहे हैं ?

एक रसोई खेल

क्या आपने सब्जियों के अनुप्रस्थ-काट के आकारों पर ध्यान दिया है, जब उन्हें रसोई में पकाने के लिए काटा जाता है? विभिन्न टुकड़ों को देखिए तथा सब्जियों को काटने से प्राप्त अनुप्रस्थ-काट के आकारों से परिचित हो जाइए।

इसे खेलिए

निम्नलिखित ठोसों के मिट्टी (या प्लास्टिक की मिट्टी) के मॉडल (models) बनाइए तथा इनको ऊर्ध्वाधर या क्षैतिज रूप से काटिए। अपने द्वारा प्राप्त अनुप्रस्थ-काटों के रफ़ (rough) चित्र खींजिए। जहाँ भी संभव हो, इनके नाम भी लिखिए।



आकृति 13.21

प्रश्नावली 13.3

1. आपको कौनसा अनुप्रस्थ-काट प्राप्त होती है, जब आप निम्नलिखित ठोसों को
   (i) ऊर्ध्वाधर रूप से और (ii) क्षैतिज रूप से काटते हैं?
   (a) एक ईंट (b) एक गोल सेब (c) एक पासा
   (d) एक बेलनाकार पाइप (e) एक आइसक्रीम शंकु

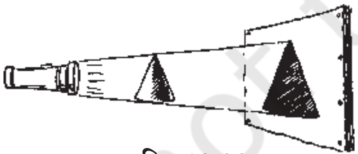
आकृति 13.22

13.5.2 एक अन्य विधि छाया खेल वाली है

एक छाया खेल

यह समझाने के लिए कि किस प्रकार त्रिविमीय वस्तुओं को द्विविमीय आकारों के रूप में देखा जा सकता है, छायाएँ इनके अच्छे (या सुंदर) उदाहरण हैं।

क्या आपने कभी एक छाया खेल (shadow play) देखा है? यह एक प्रकार का मनोरंजन है जिसमें सुस्पष्ट ठोस आकृतियों को एक प्रकाशमय स्रोत के सामने रखकर उनके गतिमान प्रतिबिंबों के भ्रम उत्पन्न किए जाते हैं। इसमें गणित की अवधारणाओं का कुछ अप्रत्यक्ष रूप से प्रयोग होता है।



आकृति 13.23

आपको इस क्रियाकलाप के लिए, एक प्रकाश के स्रोत तथा कुछ ठोस आकारों की आवश्यकता होगी। (यदि आपके पास एक ओवरहैड प्रोजेक्टर (overhead projector) है, तो ठोस को बल्ब के अंतर्गत रखिए और इनकी खोज कीजिए।) एक शंकु के ठीक सामने एक टार्च का प्रकाश डालिए। यह पर्दे पर किस प्रकार की छाया दर्शाता है (आकृति 13.23)? ठोस तीन विमाओं वाला है। इसकी छाया की कितनी विमाएँ हैं?

यदि आप इस खेल में, शंकु के स्थान पर एक घन को टार्च के सामने रखें, तो आपको किस प्रकार की छाया प्राप्त होगी?

(i)

प्रकाश के स्रोत की विभिन्न स्थितियों तथा ठोस वस्तु की विभिन्न स्थितियों को लेकर प्रयोग कीजिए। प्राप्त की गई छायाओं के आकारों तथा मापों पर इनके प्रभावों का अध्ययन कीजिए। यहाँ एक और मनोरंजक प्रयोग दिया जा रहा है,

जिसे संभवत: आप पहले ही कर चुके होंगे। एक वृत्ताकार चाय के प्याले को खुले में रख दीजिए, जब दोपहर 12 बजे के समय सूर्य उसके ठीक ऊपर हो। इसे आकृति 13.24 में दिखाया गया है। आपको उसकी छाया कैसी दिखाई देती है?

क्या यह छाया एक ही प्रकार की रहती है?


(a) प्रातःकाल और (b) सायंकाल


(ii)

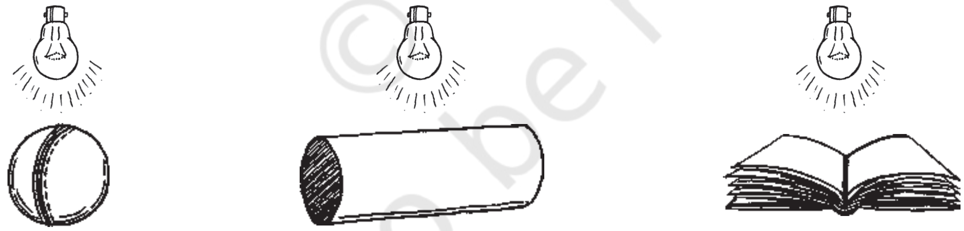

(iii)

आकृति 13.24 (i) - (iii)

सूर्य की स्थितियों और प्रेक्षण के समयों के अनुसार, छायाओं का अध्ययन कीजिए।

प्रश्नावली 13.4

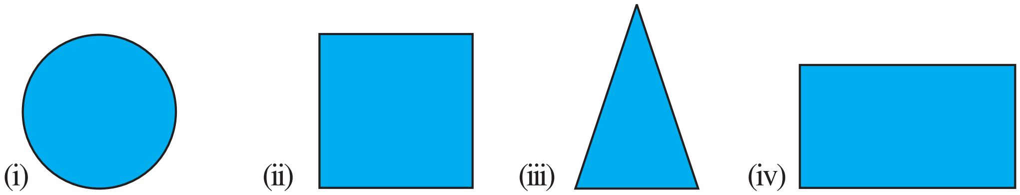
1. निम्नलिखित ठोसों के ठीक ऊपर एक जलता हुआ बल्ब रखा गया है। प्रत्येक स्थिति में प्राप्त छाया के आकार का नाम बताइए। इस छाया का एक रफ़ चित्र बनाने का प्रयास कीजिए। (पहले आप प्रयोग करने का प्रयास करें और फिर उत्तर दें।)



एक गेंद (i) एक बेलनाकार पाइप (ii) एक पुस्तक (iii)

2. यहाँ कुछ 3-D वस्तुओं की छायाएँ दी गई हैं जो उन्हें एक ओवरहैड प्रोजेक्टर के लैंप (बल्ब) के अंतर्गत या नीचे रख कर प्राप्त की गई हैं। प्रत्येक छाया से मिलान वाले ठोस की पहचान कीजिए। (इनमें एक से अधिक उत्तर हो सकते हैं!)

एक वृत्त एक वर्ग एक त्रिभुज एक आयत



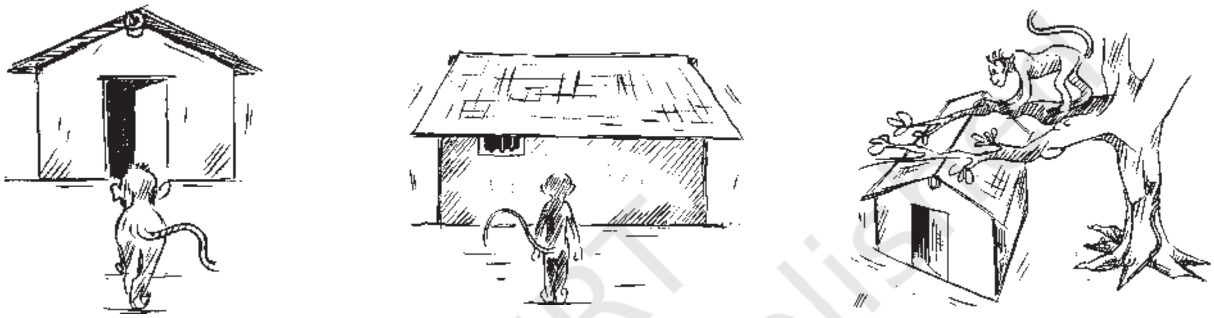
3. जाँच कीजिए कि क्या ये कथन सत्य हैं।

(i) एक घन एक आयत के आकार की छाया दे सकता है।

(ii) एक घन एक षड्भुज के आकार की छाया दे सकता है।

13.5.3 एक तीसरी विधि यह है कि इसके विभिन्न दृश्य देखने के लिए इसे कुछ विशेष कोणों से देखा जाए

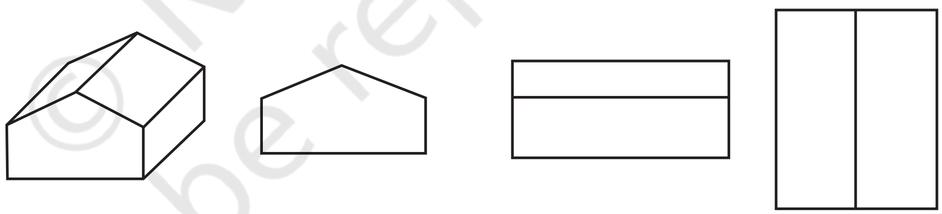
कोई भी व्यक्ति किसी वस्तु को उसके सामने से या उसकी एक ओर (पार्श्व) से या उसके ऊपर से देख सकता है। प्रत्येक बार उसे एक भिन्न दृश्य मिलेगा (आकृति 13.25)।



सामने से दृश्य पार्श्व दृश्य ऊपर से दृश्य

आकृति 13.25

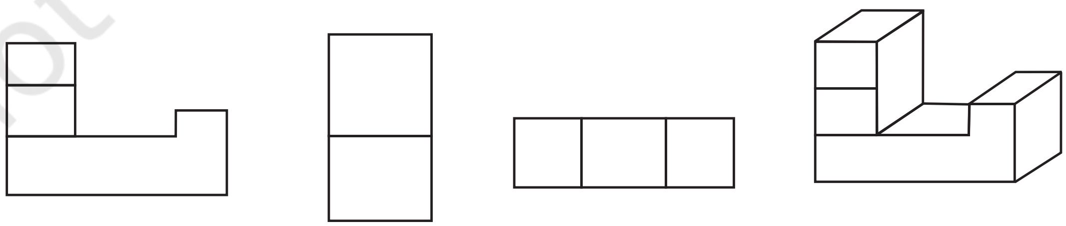
यहाँ, एक उदाहरण दिया जा रहा है, जिसमें कोई व्यक्ति एक भवन के विभिन्न दृश्य प्राप्त कर सकता है (आकृति 13.26)।



भवन सामने का दृश्य पार्श्व दृश्य ऊपर का दृश्य

आकृति 13.26

आप इन्हें, घनों को जोड़ने से बनी आकृतियों के लिए भी कर सकते हैं।

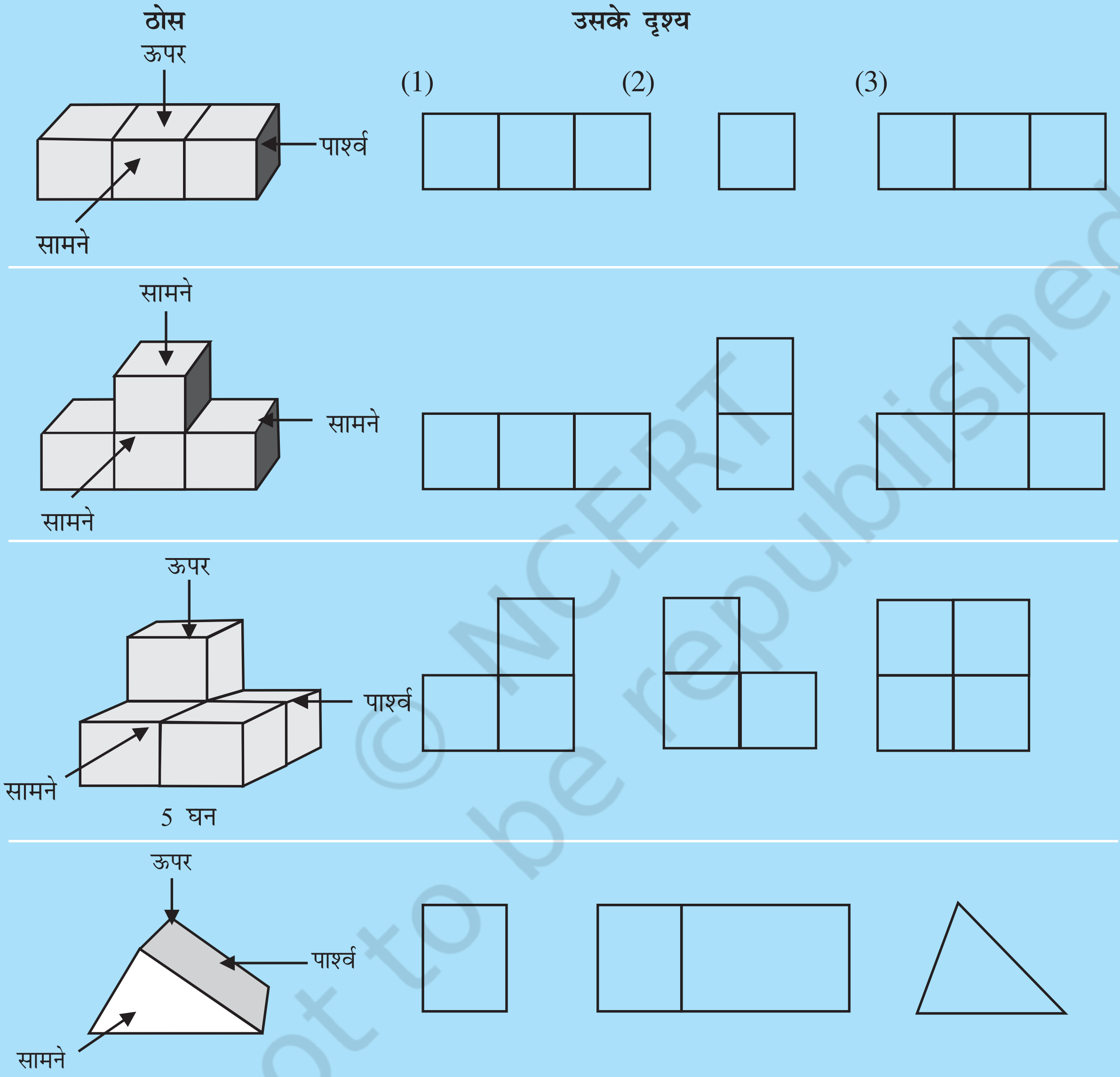


आकृति 13.27

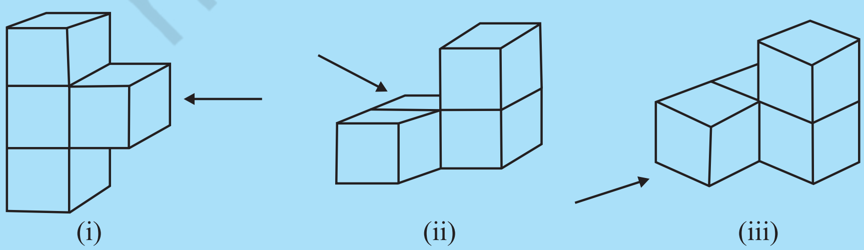
घनों को एक साथ रखकर ठोस बनाइए और फिर उन्हें विभिन्न दिशाओं से देखकर उनके ऊपर बताए अनुसार चित्र बनाने का प्रयत्न कीजिए।

प्रयास कीजिए

1. प्रत्येक ठोस के लिए, तीन दृश्य (1), (2) और (3) दिए हैं। प्रत्येक ठोस के लिए संगत ऊपर के, सामने के और पार्श्व दृश्यों की पहचान कीजिए।



2. नीचे दिए प्रत्येक ठोस का, तीर द्वारा सूचित दिशा से उसे देखने पर, एक दृश्य खींचिए।



हमने क्या चर्चा की ?

1. वृत्त, वर्ग, आयत, चतुर्भज और त्रिभुज **समतल** आकृतियों के उदाहरण हैं तथा घन, घनाभ, गोला, बेलन, शंकु और पिरामिड **ठोस आकारों** के उदाहरण हैं।

2. समतल आकृतियों की दो विमाएँ (संक्षिप्त में **2-D**) होती हैं तथा ठोस आकारों की तीन विमाएँ (संक्षिप्त में **3-D**) होती हैं।

3. ठोस आकार के कोने उसके **शीर्ष**, उसके ढाँचें के रेखाखंड उसके **किनारे** (या कोर) तथा उसके सपाट पृष्ठ उसके **फलक** कहलाते हैं।

4. ठोस का एक **जाल** दो विमाओं में एक ऐसा ढाँचा (या रूप रेखा) है, जिसे मोड़कर वह ठोस प्राप्त हो जाता है। एक ही ठोस के अनेक प्रकार के जाल हो सकते हैं।

5. वास्तविक रूप से, ठोस आकारों को सपाट पृष्ठों (जैसे कागज़) पर खींचा जा सकता है। हम इसे **3-D ठोस का 2-D निरूपण कहते** हैं।

6. एक ठोस के दो प्रकार के चित्र बनाना संभव है :

(a) एक **तिर्यक चित्र,** जिसमें लंबाइयाँ समानुपाती नहीं होती हैं। फिर भी यह ठोस के रुप के बारे में सभी महत्वपूर्ण जानकारी प्रदान कर देता है।

(b) एक **समदूरीक चित्र** को एक समदूरीक बिंदुकित कागज़ पर खींचा जाता है, जिसका एक प्रतिदर्श इस पुस्तक के अंत में दिया गया है। किसी ठोस के एक समदूरीक चित्र में लंबाइयों को समानुपाती रखा जाता है।

7. **ठोस आकारों का चित्रण** एक बहुत ही उपयोगी कौशल है। आपको ठोस आकार के छिपे हुए भाग दिखाई दे जाने चाहिए।

8. एक ठोस के विभिन्न भागों को अनेक विधियों से देखा जा सकता है।

(a) एक विधि यह है कि दिए हुए आकार को काट लिया जाए। इससे हमें ठोस का एक **अनुप्रस्थ-काट** प्राप्त हो जाती है।

(b) एक अन्य विधि यह है कि एक 3-D आकार की एक 2-D छाया देखी जाए।

(c) तीसरी विधि यह है कि ठोस आकार को विभिन्न कोणों से देखा जाए। देखे गए आकार का **सामने का दृश्य, पार्श्व दृश्य** और **ऊपर का दृश्य** हमें उस आकार के बारे में बहुत अधिक जानकारी प्रदान कर सकते हैं।