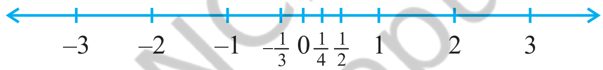
अध्याय 1

संख्या पद्धति

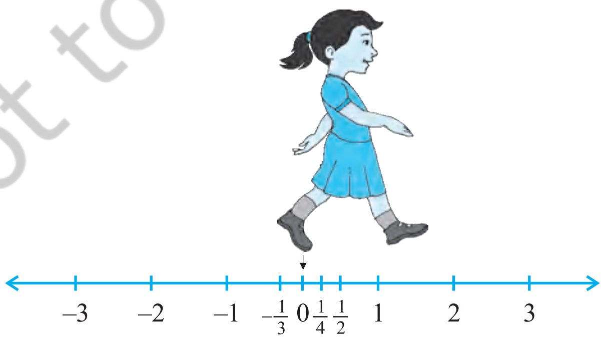
1.1 भूमिका

पिछली कक्षाओं में, आप संख्या रेखा के बारे में पढ़ चुके हैं और वहाँ आप यह भी पढ़ चुके हैं कि विभिन्न प्रकार की संख्याओं को संख्या रेखा पर किस प्रकार निरूपित किया जाता है (देखिए आकृति 1.1)।



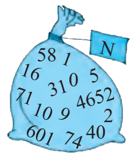
आकृति 1.1 : संख्या रेखा

कल्पना कीजिए कि आप शून्य से चलना प्रारंभ करते हैं और इस रेखा पर धनात्मक दिशा में चलते जा रहे हैं। जहाँ तक आप देख सकते हैं; वहाँ तक आपको संख्याएँ, संख्याएँ और संख्याएँ ही दिखाई पड़ती हैं।

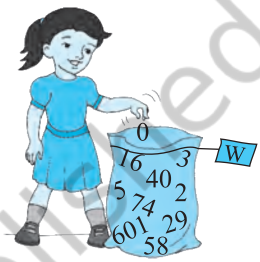


आकृति 1.2

अब मान लीजिए आप संख्या रेखा पर चलना प्रारंभ करते हैं और कुछ संख्याओं को एकत्रित करते जा रहे हैं। इस संख्याओं को रखने के लिए एक थैला तैयार रखिए!

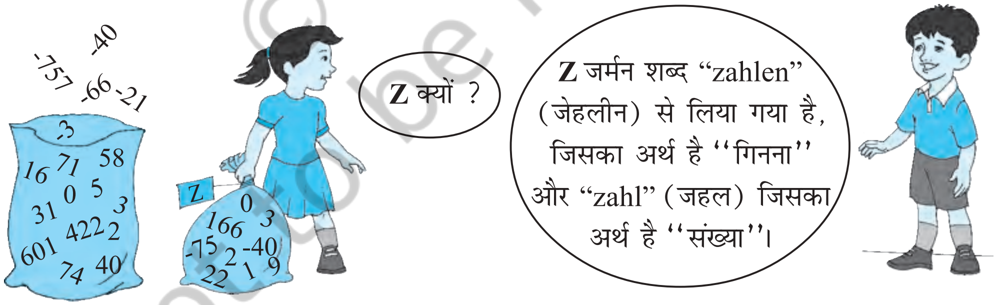


संभव है कि आप 1, 2, 3 आदि जैसी केवल प्राकृत संख्याओं को उठाना प्रारंभ कर रहे हों। आप जानते हैं कि यह सूची सदैव बढ़ती ही जाती है। (क्या आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों है?) अतः अब आप के थैले में अपरिमित रूप से अनेक प्राकृत संख्याएँ भर जाती हैं! आपको याद होगा कि हम इस संग्रह को प्रतीक **N** से प्रकट करते हैं।

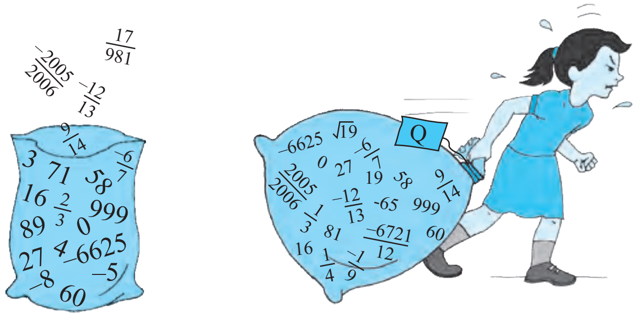


अब आप घूम जाइए और विपरीत दिशा में चलते हुए शून्य को उठाइए और उसे भी थैले में रख दीजिए। अब आपको **पूर्ण संख्याओं (whole numbers)** का एक संग्रह प्राप्त हो जाता है। जिसे प्रतीक **W** से प्रकट किया जाता है।

अब, आपको अनेक-अनेक ऋणात्मक पूर्णांक दिखाई देते हैं। आप इन सभी ऋणात्मक पूर्णांकों को अपने थैले में डाल दीजिए। क्या आप बता सकते हैं कि आपका यह नया संग्रह क्या है? आपको याद होगा कि यह सभी **पूर्णांकों (integers)** का संग्रह है और इसे प्रतीक **Z** से प्रकट किया जाता है।



क्या अभी भी रेखा पर संख्याएँ बची रहती हैं? निश्चित रूप से ही, रेखा पर संख्याएँ बची रहती हैं। ये संख्याएँ $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$, या $\frac{-2005}{2006}$ जैसी संख्याएँ भी हैं। यदि आप इस प्रकार की सभी संख्याओं को भी थैले में डाल दें, तब यह **परिमेय संख्याओं (rational numbers)**



का संग्रह हो जाएगा। परिमेय संख्याओं के संग्रह को **Q** से प्रकट किया जाता है। अंग्रेजी शब्द "rational" की व्युत्पत्ति अंग्रेजी शब्द "ratio" से हुई है और अक्षर **Q** अंग्रेजी शब्द 'quotient' से लिया गया है।

अब आपको याद होगा कि परिमेय संख्याओं की परिभाषा इस प्रकार दी जाती है :

संख्या 'r' को परिमेय संख्या कहा जाता है, यदि इसे $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता हो, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है (यहाँ हम इस बात पर बल क्यों देते हैं कि $q \neq 0$ होना चाहिए)।

अब आप इस बात की ओर ध्यान दीजिए कि थैले में रखी सभी संख्याओं को $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है। उदाहरण के लिए, -25 को $\frac{-25}{1}$ के रूप में लिखा जा सकता है; यहाँ $p = -25$ और $q = 1$ है। इस तरह हम यह पाते हैं कि परिमेय संख्याओं के अंतर्गत प्राकृत संख्याएँ, पूर्ण संख्याएँ और पूर्णांक भी आते हैं।

आप यह भी जानते हैं कि परिमेय संख्याओं का $\frac{p}{q}$ के रूप में अद्वितीय (unique) निरूपण नहीं होता है, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है। उदाहरण के लिए, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{10}{20} = \frac{25}{50} = \frac{47}{94}$, आदि। ये परिमेय संख्याएँ **तुल्य परिमेय संख्याएँ (या भिन्न)** हैं। फिर भी, जब हम यह कहते हैं कि $\frac{p}{q}$ एक परिमेय संख्या है या जब हम $\frac{p}{q}$ को एक संख्या

रेखा पर निरूपित करते हैं, तब हम यह मान लेते हैं कि $q \neq 0$ और p और q का 1 के अतिरिक्त अन्य कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है [अर्थात् p और q असहभाज्य संख्याएँ (coprime numbers) हैं]। अत: संख्या रेखा पर $\frac{1}{2}$ के तुल्य अपरिमित रूप से अनेक भिन्नों में से हम $\frac{1}{2}$ लेते हैं जो सभी को निरूपित करती है।

आइए अब हम विभिन्न प्रकार की संख्याओं, जिनका अध्ययन आप पिछली कक्षाओं मे कर चुके हैं, से संबंधित कुछ उदाहरण हल करें।

उदाहरण 1 : नीचे दिए गए कथन सत्य हैं या असत्य? कारण के साथ अपने उत्तर दीजिए।

(i) प्रत्येक पूर्ण संख्या एक प्राकृत संख्या होती है।

(ii) प्रत्येक पूर्णांक एक परिमेय संख्या होता है।

(iii) प्रत्येक परिमेय संख्या एक पूर्णांक होती है।

हल : (i) असत्य है, क्योंकि शून्य एक पूर्ण संख्या है परन्तु प्राकृत संख्या नहीं है।

(ii) सत्य है, क्योंकि प्रत्येक पूर्णांक m को $\frac{m}{1}$ के रूप में लिखा जा सकता है और इसलिए यह एक परिमेय संख्या है।

(iii) असत्य है, क्योंकि $\frac{3}{5}$ एक पूर्णांक नहीं है।

उदाहरण 2 : 1 और 2 के बीच की पाँच परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

इस प्रश्न को हम कम से कम दो विधियों से हल कर सकते हैं।

हल 1 : आपको याद होगा कि r और s के बीच की एक परिमेय संख्या ज्ञात करने के लिए आप r और s को जोड़ते हैं और उसे दो से भाग दे देते हैं, अर्थात् $\frac{r+s}{2}$, r और s के बीच स्थित होती है। अत: $\frac{3}{2}$, 1 और 2 के बीच की एक संख्या है। इसी प्रक्रिया में आप 1 और 2 के बीच चार और परिमेय संख्याएँ ज्ञात कर सकते हैं। ये चार संख्याएँ हैं : $\frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{13}{8}$ और $\frac{7}{4}$।

हल 2 : एक अन्य विकल्प है कि एक ही चरण में सभी पाँच परिमेय संख्याओं को ज्ञात कर लें। क्योंकि हम पाँच संख्याएँ ज्ञात करना चाहते हैं, इसलिए हम 5 + 1 अर्थात्, 6 को हर लेकर 1 और 2 को परिमेय संख्याओं के रूप में लिखते हैं। अर्थात् $1 = \frac{6}{6}$ और $2 = \frac{12}{6}$ हैं। तब आप यह देख सकते हैं कि $\frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6}$ और $\frac{11}{6}$ सभी 1 और 2 के बीच स्थित परिमेय संख्याएँ हैं। अतः 1 और 2 के बीच स्थित संख्याएँ हैं : $\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ और $\frac{11}{6}$।

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि उदाहरण 2 में 1 और 2 के बीच स्थित केवल पाँच परिमेय संख्याएँ ही ज्ञात करने के लिए कहा गया था। परन्तु आपने यह अवश्य अनुभव किया होगा कि वस्तुतः 1 और 2 के बीच अपरिमित रूप से अनेक परिमेय संख्याएँ होती हैं। व्यापक रूप में, **किन्हीं दो दी हुई परिमेय संख्याओं के बीच अपरिमित रूप से अनेक परिमेय संख्याएँ होती हैं।**

आइए हम संख्या रेखा को पुनः देखें। क्या आपने इस रेखा पर स्थित सभी संख्याओं को ले लिया है? अभी तक तो नहीं। ऐसा होने का कारण यह है कि संख्या रेखा पर अपरिमित रूप से अनेक और संख्याएँ बची रहती हैं। आप द्वारा उठायी गई संख्याओं के स्थानों के बीच रिक्त स्थान हैं और रिक्त स्थान न केवल एक या दो हैं, बल्कि अपरिमित रूप से अनेक हैं। आश्चर्यजनक बात तो यह है कि किन्ही दो रिक्त स्थानों के बीच अपरिमित रूप से अनेक संख्याएँ स्थित होती हैं।

अतः, हमारे सामने निम्नलिखित प्रश्न बचे रह जाते हैं:

1. संख्या रेखा पर बची हुई संख्याओं को क्या कहा जाता है?
2. इन्हें हम किस प्रकार पहचानते हैं? अर्थात् इन संख्याओं और परिमेय संख्याओं के बीच हम किस प्रकार भेद करते हैं?

इन प्रश्नों के उत्तर अगले अनुच्छेद में दिए जाएँगे।

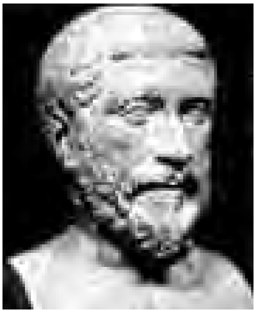
प्रश्नावली 1.1

1. क्या शून्य एक परिमेय संख्या है? क्या इसे आप $\frac{p}{q}$ के रूप में लिख सकते हैं, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है?
2. 3 और 4 के बीच में छः परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
3. $\frac{3}{5}$ और $\frac{4}{5}$ के बीच पाँच परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
4. नीचे दिए गए कथन सत्य हैं या असत्य? कारण के साथ अपने उत्तर दीजिए।
   (i) प्रत्येक प्राकृत संख्या एक पूर्ण संख्या होती है।
   (ii) प्रत्येक पूर्णांक एक पूर्ण संख्या होती है।
   (iii) प्रत्येक परिमेय संख्या एक पूर्ण संख्या होती है।

1.2 अपरिमेय संख्याएँ

पिछले अनुच्छेद में, हमने यह देखा है कि संख्या रेखा पर ऐसी संख्याएँ भी हो सकती हैं जो परिमेय संख्याएँ नहीं हैं। इस अनुच्छेद में, अब हम इन संख्याओं पर चर्चा करेंगे। अभी तक हमने जिन संख्याओं पर चर्चा की है, वे $\frac{p}{q}$ के रूप की रही हैं, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है। अतः आप यह प्रश्न कर सकते हैं कि क्या ऐसी भी संख्याएँ हैं जो इस रूप की नहीं होती हैं? वस्तुतः ऐसी संख्याएँ होती हैं।

लगभग 400 सा०यु०पू०, ग्रीस के प्रसिद्ध गणितज्ञ और दार्शनिक पाइथागोरस के अनुयायियों ने इन संख्याओं का सबसे पहले पता लगाया था। इन संख्याओं को **अपरिमेय संख्याएँ (irrational numbers)** कहा जाता है, क्योंकि इन्हें पूर्णांकों के अनुपात के रूप में नहीं लिखा जा सकता है। पाइथागोरस के एक अनुयायी, क्रोटोन के हिपाक्स द्वारा पता लगायी गई अपरिमेय संख्याओं के संबंध में अनेक किंवदंतियाँ हैं। हिपाक्स का एक दुर्भाग्यपूर्ण अंत रहा, चाहे इसका कारण इस बात की खोज हो कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है या इस खोज के बारे में बाहरी दुनिया को उजागर करना हो।



पाइथागोरस
(569 सा॰ यु॰ पू॰ – 479 सा॰ यु॰ पू॰)
आकृति 1.3

आइए अब हम इन संख्याओं की औपचारिक परिभाषा दें।

संख्या 's' को **अपरिमेय संख्या (irrational number)** कहा जाता है, यदि इसे $\frac{p}{q}$ के रूप में न लिखा जा सकता हो, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।

आप यह जानते हैं कि अपरिमित रूप से अनेक परिमेय संख्याएँ होती हैं। इसी प्रकार, अपरिमेय संख्याएँ भी अपरिमित रूप से अनेक होती हैं। इनके कुछ उदाहरण हैं:

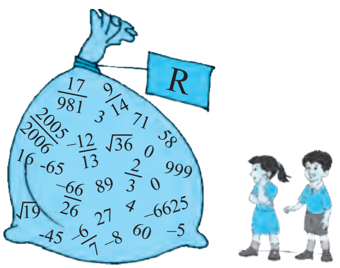
$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, 0.10110111011110...$

टिप्पणी : आपको याद होगा कि जब कभी हम प्रतीक "$\sqrt{\ }$" का प्रयोग करते हैं, तब हम यह मानकर चलते हैं कि यह संख्या का धनात्मक वर्गमूल है। अतः $\sqrt{4} = 2$ है, यद्यपि 2 और −2 दोनों ही संख्या 4 के वर्गमूल हैं।

ऊपर दी गई कुछ अपरिमेय संख्याओं के बारे में आप जानते हैं। उदाहरण के लिए, ऊपर दिए गए अनेक वर्गमूलों और संख्या π से आप परिचित हो चुके हैं।

पाइथागोरस के अनुयायियों ने यह सिद्ध किया है कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है। बाद में 425 ई.पू. के आस-पास साइरीन के थियोडोरस ने यह दर्शाया था कि $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$ और $\sqrt{17}$ भी अपरिमेय संख्याएँ हैं। $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, आदि की अपरिमेयता (irrationality) की उपपत्तियों पर चर्चा कक्षा 10 में की जाएगी। जहाँ तक π का संबंध है, हजारों वर्षों से विभिन्न संस्कृतियाँ इससे परिचित रही हैं, परन्तु 1700 ई. के अंत में ही लैम्बर्ट और लेजान्ड्रे ने सिद्ध किया था कि यह एक अपरिमेय संख्या है। अगले अनुच्छेद में हम इस बात पर चर्चा करेंगे कि 0.10110111011110... और π अपरिमेय क्यों हैं।

आइए हम पिछले अनुच्छेद के अंत में उठाए गए प्रश्नों पर पुनः विचार करें। इसके लिए परिमेय संख्याओं वाला थैला लीजिए। अब यदि हम थैले में सभी अपरिमेय संख्याएँ भी डाल दें, तो क्या अब भी संख्या रेखा पर कोई संख्या बची रहेगी? इसका उत्तर है "नहीं"। अतः, एक साथ ली गई सभी परिमेय संख्याओं और अपरिमेय संख्याओं के संग्रह से जो प्राप्त होता है, उसे **वास्तविक संख्याओं (real numbers)** का नाम दिया जाता



है, जिसे **R** से प्रकट किया जाता है। **अत: वास्तविक संख्या या तो परिमेय या अपरिमेय संख्या हो सकती है। अत: हम यह कह सकते हैं कि प्रत्येक वास्तविक संख्या को संख्या रेखा के एक अद्वितीय बिन्दु से निरूपित किया जाता है। साथ ही, संख्या रेखा का प्रत्येक बिन्दु एक अद्वितीय वास्तविक संख्या को निरूपित करता है।** यही कारण है कि संख्या रेखा को **वास्तविक संख्या रेखा (real number line) कहा जाता है।**

जी. कैन्टर (1845–1918)

आकृति 1.4

1870 में दो जर्मन गणितज्ञ कैन्टर और डेडेकिंड ने इसे भिन्न-भिन्न विधियों से सिद्ध किया था। उन्होंने यह दिखाया था कि प्रत्येक वास्तविक संख्या के संगत वास्तविक संख्या रेखा पर एक बिन्दु होता है और संख्या रेखा के प्रत्येक बिन्दु के संगत एक अद्वितीय वास्तविक संख्या होती है।

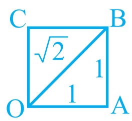
आर. डेडेकिंड (1831–1916)

आकृति 1.5

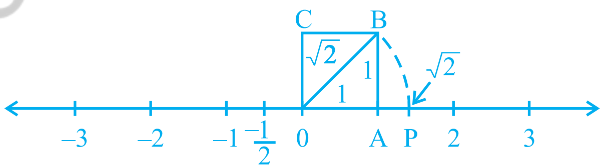
आइए देखें कि संख्या रेखा पर हम कुछ अपरिमेय संख्याओं का स्थान निर्धारण किस प्रकार कर सकते हैं।

उदाहरण 3 : संख्या रेखा पर $\sqrt{2}$ का स्थान निर्धारण (को निरूपित) कीजिए।

हल : यह सरलता से देखा जा सकता है कि किस प्रकार यूनानियों ने $\sqrt{2}$ का पता लगाया होगा। एक एकक (मात्रक) की लंबाई की भुजा वाला वर्ग OABC लीजिए (देखिए आकृति 1.6)। तब आप पाइथागोरस प्रमेय लागू करके यह देख सकते हैं कि OB = $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ है। संख्या रेखा पर हम $\sqrt{2}$ को किस प्रकार निरूपित करते हैं? ऐसा सरलता से किया जा सकता है। इस बात का ध्यान रखते हुए कि शीर्ष O शून्य के साथ संपाती बना रहे, आकृति 1.6 को संख्या रेखा पर स्थानांतरित कीजिए (देखिए आकृति 1.7)।



आकृति 1.6

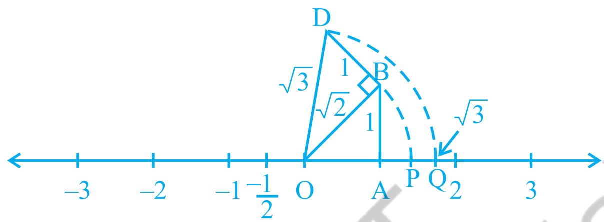


आकृति 1.7

अभी आपने देखा है कि OB = $\sqrt{2}$ है। एक परकार की सहायता से O को केन्द्र और OB को त्रिज्या मानकर एक चाप (arc) खींचिए जो संख्या रेखा को बिन्दु P पर काटता है। तब बिन्दु P संख्या रेखा पर $\sqrt{2}$ के संगत होता है।

उदाहरण 4 : वास्तविक संख्या रेखा पर $\sqrt{3}$ का स्थान निर्धारण कीजिए।

हल : आइए हम आकृति 1.7 को पुनः लें।



आकृति 1.8

OB पर एकक लंबाई वाले लंब BD की रचना कीजिए (जैसा कि आकृति 1.8 में दिखाया गया है)। तब पाइथागोरस प्रमेय लागू करने पर, हमें OD = $\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ प्राप्त होता है। एक परकार की सहायता से O को केन्द्र और OD को त्रिज्या मानकर एक चाप खींचिए जो संख्या रेखा को बिन्दु Q पर काटता है। तब Q, $\sqrt{3}$ के संगत है।

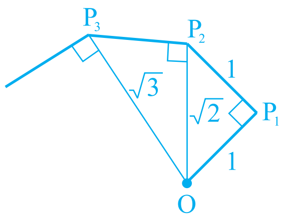
इसी प्रकार $\sqrt{n-1}$ का स्थान निर्धारण हो जाने के बाद आप $\sqrt{n}$ का स्थान निर्धारण कर सकते हैं, जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है।

प्रश्नावली 1.2

1. नीचे दिए गए कथन सत्य हैं या असत्य हैं। कारण के साथ अपने उत्तर दीजिए।
   (i) प्रत्येक अपरिमेय संख्या एक वास्तविक संख्या होती है।
   (ii) संख्या रेखा का प्रत्येक बिन्दु $\sqrt{m}$ के रूप का होता है, जहाँ m एक प्राकृत संख्या है।
   (iii) प्रत्येक वास्तविक संख्या एक अपरिमेय संख्या होती है।
2. क्या सभी धनात्मक पूर्णांकों के वर्गमूल अपरिमेय होते हैं? यदि नहीं, तो एक ऐसी संख्या के वर्गमूल का उदाहरण दीजिए जो एक परिमेय संख्या है।

3. दिखाइए कि संख्या रेखा पर $\sqrt{5}$ को किस प्रकार निरूपित किया जा सकता है।

4. **कक्षा के लिए क्रियाकलाप (वर्गमूल सर्पिल की रचना) :** कागज की एक बड़ी शीट लीजिए और नीचे दी गई विधि से "वर्गमूल सर्पिल" (square root spiral) की रचना कीजिए। सबसे पहले एक बिन्दु O लीजिए और एकक लंबाई का रेखाखंड (line segment) OP खींचिए। एकक लंबाई वाले OP_1 पर लंब रेखाखंड P_1P_2 खींचिए (देखिए आकृति 1.9)। अब OP_2 पर लंब रेखाखंड P_2P_3 खींचिए। तब OP_3 पर लंब रेखाखंड P_3P_4 खींचिए।



आकृति 1.9 : **वर्गमूल सर्पिल की रचना**

इस प्रक्रिया को जारी रखते हुए OP_{n-1} पर एकक लंबाई वाला लंब रेखाखंड खींचकर आप रेखाखंड $P_{n-1}P_n$ प्राप्त कर सकते हैं। इस प्रकार आप बिन्दु O, P_1, P_2, P_3,..., P_n,... प्राप्त कर लेंगे और उन्हें मिलाकर $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots$ को दर्शाने वाला एक सुंदर सर्पिल प्राप्त कर लेंगे।

1.3 वास्तविक संख्याएँ और उनके दशमलव प्रसार

इस अनुच्छेद में, हम एक अलग दृष्टिकोण से परिमेय और अपरिमेय संख्याओं का अध्ययन करेंगे। इसके लिए हम वास्तविक संख्याओं के दशमलव प्रसार (expansions) पर विचार करेंगे और देखेंगे कि क्या हम परिमेय संख्याओं और अपरिमेय संख्याओं में भेद करने के लिए इन प्रसारों का प्रयोग कर सकते हैं या नहीं। यहाँ हम इस बात की भी व्याख्या करेंगे कि वास्तविक संख्याओं के दशमलव प्रसार का प्रयोग करके किस प्रकार संख्या रेखा पर वास्तविक संख्याओं को प्रदर्शित किया जाता है। क्योंकि हम अपरिमेय संख्याओं की तुलना में परिमेय संख्याओं से अधिक परिचित हैं, इसलिए हम अपनी चर्चा इन्हीं संख्याओं से प्रारंभ करेंगे। यहाँ इनके तीन उदाहरण दिए गए हैं : $\frac{10}{3}, \frac{7}{8}, \frac{1}{7}$। शेषफलों पर विशेष ध्यान दीजिए और देखिए कि क्या आप कोई प्रतिरूप (pattern) प्राप्त कर सकते हैं।

उदाहरण 5 : $\frac{10}{3}, \frac{7}{8}$ और $\frac{1}{7}$ के दशमलव प्रसार ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\begin{array}{r|l} & 3.333... \\ \hline 3 & 10 \\ & 9 \\ \hline & 10 \\ & 9 \\ \hline & 10 \\ & 9 \\ \hline & 10 \\ & 9 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 0.875 \\ \hline 8 & 7.0 \\ & 64 \\ \hline & 60 \\ & 56 \\ \hline & 40 \\ & 40 \\ \hline & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 0.142857... \\ \hline 7 & 1.0 \\ & 7 \\ \hline & 30 \\ & 28 \\ \hline & 20 \\ & 14 \\ \hline & 60 \\ & 56 \\ \hline & 40 \\ & 35 \\ \hline & 50 \\ & 49 \\ \hline & 1 \end{array}$$

शेष : 1, 1, 1, 1, 1...
भाजक : 3

शेष : 6, 4, 0
भाजक : 8

शेष : 3, 2, 6, 4, 5, 1,
3, 2, 6, 4, 5, 1,...
भाजक : 7

यहाँ आपने किन-किन बातों पर ध्यान दिया है? आपको कम से कम तीन बातों पर ध्यान देना चाहिए।

(i) कुछ चरण के बाद शेष या तो 0 हो जाते हैं या स्वयं की पुनरावृत्ति करना प्रारंभ कर देते हैं।

(ii) शेषों की पुनरावृत्ति शृंखला में प्रविष्टियों (entries) की संख्या भाजक से कम होती है ($\frac{1}{3}$ में एक संख्या की पुनरावृत्ति होती है और भाजक 3 है, $\frac{1}{7}$ में शेषों की पुनरावृत्ति शृंखला में छः प्रविष्टियाँ 326451 हैं और भाजक 7 है)।

(iii) यदि शेषों की पुनरावृत्ति होती हो, तो भागफल (quotient) में अंकों का एक पुनरावृत्ति खंड प्राप्त होता है ($\frac{1}{3}$ के लिए भागफल में 3 की पुनरावृत्ति होती है और $\frac{1}{7}$ के लिए भागफल में पुनरावृत्ति खंड 142857 प्राप्त होता है)।

यद्यपि केवल ऊपर दिए गए उदाहरणों से हमने यह प्रतिरूप प्राप्त किया है, परन्तु यह $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ के रूप की सभी परिमेय संख्याओं पर लागू होता है। q से p को भाग देने पर दो मुख्य बातें घटती हैं – या तो शेष शून्य हो जाता है या कभी भी शून्य नहीं होता है और तब हमें शेषफलों की एक पुनरावृत्ति शृंखला प्राप्त होती है। आइए हम प्रत्येक स्थिति पर अलग-अलग विचार करें।

स्थिति (i) : शेष शून्य हो जाता है।

$\frac{7}{8}$ वाले उदाहरण में हमने यह देखा है कि कुछ चरणों के बाद शेष शून्य हो जाता है और $\frac{7}{8}$ का दशमलव प्रसार 0.875 है। अन्य उदाहरण हैं : $\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{639}{250} = 2.556$ है। इन सभी स्थितियों में कुछ परिमित चरणों के बाद दशमलव प्रसार का अंत हो जाता है। हम ऐसी संख्याओं के दशमलव प्रसार को **सांत (terminating)** दशमलव कहते हैं।

स्थिति (ii) : शेष कभी भी शून्य नहीं होता है।

$\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{7}$ वाले उदाहरणों में, हम यह पाते हैं कि कुछ चरणों के बाद शेष की पुनरावृत्ति होने लगती है, जिससे दशमलव प्रसार निरंतर जारी रहता है। दूसरे शब्दों में, हमें भागफल में अंकों का एक पुनरावृत्ति खंड प्राप्त होता है। तब हम यह कहते हैं कि यह प्रसार **अनवसानी आवर्ती (non-terminating recurring)** है। उदाहरण के लिए, $\frac{1}{3} = 0.3333...$ और $\frac{1}{7} = 0.142857142857142857...$ है।

यह दिखाने के लिए कि $\frac{1}{3}$ के भागफल में 3 की पुनरावृत्ति होती है, हम इसे $0.\bar{3}$ के रूप में लिखते हैं। इसी प्रकार, क्योंकि $\frac{1}{7}$ के भागफल में अंकों के खंड 142857 की पुनरावृत्ति होती है, इसलिए हम $\frac{1}{7}$ को $0.\overline{142857}$ के रूप में लिखते हैं, जहाँ अंकों के ऊपर लगाया गया दंड, अंकों के उस खंड को प्रकट करता है जिसकी पुनरावृत्ति होती है। साथ ही, 3.57272 . . . को $3.5\overline{72}$ के रूप में लिखा जा सकता है। अत: इन सभी उदाहरणों से अनवसानी आवर्त (पुनरावृत्ति) दशमलव प्रसार प्राप्त होते हैं। इस तरह हम यह देखते हैं कि परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार के केवल दो विकल्प होते हैं या तो वे सांत होते हैं या अनवसानी (असांत) आवर्ती होते हैं।

इसके विपरीत अब आप यह मान लीजिए कि संख्या रेखा पर चलने पर आपको 3.142678 जैसी संख्याएँ प्राप्त होती हैं जिसका दशमलव प्रसार सांत होता है या 1.272727..., अर्थात् $1.\overline{27}$ जैसी संख्या प्राप्त होती है, जिसका दशमलव प्रसार अनवसानी आवर्ती है। इससे क्या आप यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि यह एक परिमेय संख्या है? इसका उत्तर है, हाँ! इसे हम सिद्ध नहीं करेंगे, परन्तु कुछ उदाहरण लेकर इस तथ्य को प्रदर्शित करेंगे। सांत स्थितियाँ तो सरल हैं।

उदाहरण 6 : दिखाइए कि 3.142678 एक परिमेय संख्या है। दूसरे शब्दों, में 3.142678 को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।

हल : यहाँ $3.142678 = \frac{3142678}{1000000}$ है। अतः यह एक परिमेय संख्या है।

आइए अब हम उस स्थिति पर विचार करें, जबकि दशमलव प्रसार अनवसानी आवर्ती हो।

उदाहरण 7 : दिखाइए कि $0.3333... = 0.\overline{3}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।

हल : क्योंकि हम यह नहीं जानते हैं कि $0.\overline{3}$ क्या है, अतः आइए इसे हम 'x' मान लें।

$$x = 0.3333...$$

अब, यही वह स्थिति है जहाँ हमें कुछ युक्ति लगानी पड़ेगी।

यहाँ, $\qquad 10x = 10 \times (0.333...) = 3.333...$

अब, $\qquad 3.3333... = 3 + x$, चूँकि $x = 0.3333...$ है।

इसलिए, $\qquad 10x = 3 + x$

x के लिए हल करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$9x = 3$$

अर्थात्, $\qquad x = \frac{1}{3}$

उदाहरण 8 : दिखाइए कि $1.272727... = 1.\overline{27}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।

हल : मान लीजिए $x = 1.272727...$ है। क्योंकि यहाँ दो अंकों की पुनरावृत्ति है, इसलिए हम x को 100 से गुणा करते हैं। ऐसा करने पर, हमें यह प्राप्त होता है :

$$100\,x = 127.2727...$$

अतः, $$100\,x = 126 + 1.272727... = 126 + x$$

इसलिए, $$100\,x - x = 126, \text{ अर्थात् } 99\,x = 126$$

अर्थात्, $$x = \frac{126}{99} = \frac{14}{11}$$

आप इसके इस विलोम की जाँच कर सकते हैं कि $\frac{14}{11} = 1.\overline{27}$ है।

उदाहरण 9 : दिखाइए कि $0.2353535... = 0.2\overline{35}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।

हल : मान लीजिए $x = 0.2\overline{35}$ है। यहाँ यह देखिए कि 2 की पुनरावृत्ति नहीं होती है, परन्तु खंड 35 की पुनरावृत्ति होती है। क्योंकि दो अंकों की पुनरावृत्ति हो रही है, इसलिए हम x को 100 से गुणा करते हैं। ऐसा करने पर, हमें यह प्राप्त होता है :

$$100\,x = 23.53535...$$

इसलिए, $$100\,x = 23.3 + 0.23535... = 23.3 + x$$

अतः, $$99\,x = 23.3$$

अर्थात्, $$99\,x = \frac{233}{10}, \text{ जिससे } x = \frac{233}{990} \text{ हुआ।}$$

आप इसके विलोम, अर्थात् $\frac{233}{990} = 0.2\overline{35}$ की भी जाँच कर सकते हैं।

अतः अनवसानी आवर्ती दशमलव प्रसार वाली प्रत्येक संख्या को $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ p और q पूर्णांक हैं। आइए हम अपने परिणामों को संक्षेप में इस प्रकार व्यक्त करें:

एक परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार या तो सांत होता है या अनवसानी आवर्ती होता है। साथ ही, वह संख्या, जिसका दशमलव प्रसार सांत या अनवसानी आवर्ती है, एक परिमेय संख्या होती है।

अब हम यह जानते हैं कि परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार क्या हो सकता है। अब प्रश्न उठता हैं कि अपरिमेय संख्याओं का दशमलव प्रसार क्या होता है? ऊपर बताए गए गुण के अनुसार हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि इन संख्याओं के दशमलव प्रसार **अनवसानी अनावर्ती (non-terminating non-recurring)** हैं। अतः ऊपर परिमेय संख्याओं के लिए बताए गए गुण के समान अपरिमेय संख्याओं का गुण यह होता है:

एक अपरिमेय संख्या का दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती होता है। विलोमतः वह संख्या जिसका दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती होता है, अपरिमेय होती है।

पिछले अनुच्छेद में हमने एक अपरिमेय संख्या 0.10110111011110... की चर्चा की थी। मान लीजिए कि $s = 0.10110111011110...$ है। ध्यान दीजिए कि यह अनवसानी अनावर्ती है। अतः ऊपर बताए गए गुण के अनुसार यह अपरिमेय है। साथ ही, यह भी ध्यान दीजिए कि आप s के समरूप अपरिमित रूप से अनेक अपरिमेय संख्याएँ जनित कर सकते हैं।

सुप्रसिद्ध अपरिमेय संख्याओं $\sqrt{2}$ और π के संबंध में आप क्या जानते हैं? यहाँ कुछ चरण तक उनके दशमलव प्रसार दिए गए हैं:

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096...$$

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950...$$

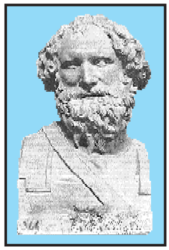
(ध्यान दीजिए कि हम प्रायः $\frac{22}{7}$ को π का एक सन्निकट मान मानते हैं, जबकि $\pi \neq \frac{22}{7}$ है।)

वर्षों से गणितज्ञों ने अपरिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार में अधिक से अधिक अंकों को उत्पन्न करने की विभिन्न तकनीक विकसित की हैं। उदाहरण के लिए, संभवतः आपने विभाजन विधि (division method) से $\sqrt{2}$ के दशमलव प्रसार में अंकों को ज्ञात करना अवश्य ही सीखा होगा। यह एक रोचक बात है कि सुल्बसूत्रों (जीवा-नियमों) में, जो वैदिक युग (800 ई.पू. – 500 ई.पू.) के गणितीय ग्रंथ हैं, हमें $\sqrt{2}$ का एक सन्निकट मान प्राप्त होता है, जो यह है:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{34} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = 1.4142156$$

ध्यान दीजिए कि यह वही है जो कि ऊपर प्रथम पाँच दशमलव स्थानों तक के लिए दिया गया है। π के दशमलव प्रसार में अधिक से अधिक अंक प्राप्त करने का इतिहास काफी रोचक रहा है।

यूनान का प्रबुद्ध व्यक्ति आर्कमिडीज ही वह पहला व्यक्ति था जिसने π के दशमलव प्रसार में अंकों को अभिकलित किया था। उसने यह दिखाया कि $3.140845 < \pi < 3.142857$ होता है। आर्यभट्ट (476 – 550 ई॰) ने जो एक महान भारतीय गणितज्ञ और खगोलविद थे, चार दशमलव स्थानों तक शुद्ध π का मान (3.1416) ज्ञात किया था। उच्च चाल कंप्यूटरों और उन्नत कलन विधियों (algorithms) का प्रयोग करके 1.24 ट्रिलियन से भी अधिक दशमलव स्थानों तक π का मान अभिकलित किया जा चुका है।



आर्कमिडीज
(287 सा॰ यु॰ पू॰ –212 सा॰ यु॰ पू॰)
आकृति 1.10

आइए अब हम देखें कि किस प्रकार अपरिमेय संख्याएँ प्राप्त की जाती हैं।

उदाहरण 10 : $\frac{1}{7}$ और $\frac{2}{7}$ के बीच की एक अपरिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : हमने देखा है कि $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ है।

अतः हम सरलता से यह परिकलित कर सकते हैं कि $\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$ है।

$\frac{1}{7}$ और $\frac{2}{7}$ के बीच की एक अपरिमेय संख्या ज्ञात करने के लिए, हम एक ऐसी संख्या ज्ञात करते हैं जो इन दोनों के बीच स्थित अनवसानी अनावर्ती होती है। इस प्रकार की आप अपरिमित रूप से अनेक संख्याएँ ज्ञात कर सकते हैं। इस प्रकार की संख्या का एक उदाहरण 0.150150015000150000. . . है।

प्रश्नावली 1.3

1. निम्नलिखित भिन्नों को दशमलव रूप में लिखिए और बताइए कि प्रत्येक का दशमलव प्रसार किस प्रकार का है :

   (i) $\frac{36}{100}$ (ii) $\frac{1}{11}$ (iii) $4\frac{1}{8}$

   (iv) $\frac{3}{13}$ (v) $\frac{2}{11}$ (vi) $\frac{329}{400}$

2. आप जानते हैं कि $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ है। वास्तव में, लंबा भाग दिए बिना क्या आप यह बता सकते

हैं कि $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ के दशमलव प्रसार क्या हैं? यदि हाँ, तो कैसे?

[**संकेत :** $\frac{1}{7}$ का मान ज्ञात करते समय शेषफलों का अध्ययन सावधानी से कीजिए।]

3. निम्नलिखित को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए, जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ है:

(i) $0.\overline{6}$ (ii) $0.4\overline{7}$ (iii) $0.\overline{001}$

4. 0.99999... को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए। क्या आप अपने उत्तर से आश्चर्यचकित है? अपने अध्यापक और कक्षा के सहयोगियों के साथ उत्तर की सार्थकता पर चर्चा कीजिए।

5. $\frac{1}{17}$ के दशमलव प्रसार में अंकों के पुनरावृत्ति खंड में अंकों की अधिकतम संख्या क्या हो सकती है? अपने उत्तर की जाँच करने के लिए विभाजन-क्रिया कीजिए।

6. $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ के रूप की परिमेय संख्याओं के अनेक उदाहरण लीजिए, जहाँ p और q पूर्णांक हैं, जिनका 1 के अतिरिक्त अन्य कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है और जिसका सांत दशमलव निरूपण (प्रसार) है। क्या आप यह अनुमान लगा सकते हैं कि q को कौन-सा गुण अवश्य संतुष्ट करना चाहिए?

7. ऐसी तीन संख्याएँ लिखिए जिनके दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती हों।

8. परिमेय संख्याओं $\frac{5}{7}$ और $\frac{9}{11}$ के बीच की तीन अलग-अलग अपरिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

9. बताइए कि निम्नलिखित संख्याओं में कौन-कौन संख्याएँ परिमेय और कौन-कौन संख्याएँ अपरिमेय हैं:

(i) $\sqrt{23}$ (ii) $\sqrt{225}$ (iii) 0.3796

(iv) 7.478478... (v) 1.101001000100001...

1.4 वास्तविक संख्याओं पर संक्रियाएँ

पिछली कक्षाओं में, आप यह पढ़ चुके हैं कि परिमेय संख्याएँ योग और गुणन के क्रमविनिमेय (commutative), साहचर्य (associative) और बंटन (distributive) नियमों को संतुष्ट करती हैं और हम यह भी पढ़ चुके हैं कि यदि हम दो परिमेय संख्याओं को जोड़ें, घटाएँ, गुणा करें या (शून्य छोड़कर) भाग दें, तब भी हमें एक परिमेय संख्या प्राप्त होती है [अर्थात् जोड़, घटाना, गुणा और भाग के सापेक्ष परिमेय संख्याएँ संवृत (closed) होती हैं]। यहाँ

हम यह भी देखते हैं कि अपरिमेय संख्याएँ भी योग और गुणन के क्रमविनिमेय, साहचर्य और बंटन-नियमों को संतुष्ट करती हैं। परन्तु, अपरिमेय संख्याओं के योग, अंतर, भागफल और गुणनफल सदा अपरिमेय नहीं होते हैं। उदाहरण के लिए, $\left(\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}\right), \left(\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}\right)$ और $\dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}}$ परिमेय संख्याएँ हैं।

आइए अब यह देखें कि जब एक परिमेय संख्या में अपरिमेय संख्या जोड़ते हैं और एक परिमेय संख्या को एक अपरिमेय संख्या से गुणा करते हैं, तो क्या होता है।

उदाहरण के लिए, $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है। तब $2+\sqrt{3}$ और $2\sqrt{3}$ क्या हैं? क्योंकि $\sqrt{3}$ एक अनवसानी अनावर्ती दशमलव प्रसार है, इसलिए यही बात $2+\sqrt{3}$ और $2\sqrt{3}$ के लिए भी सत्य है। अतः $2+\sqrt{3}$ और $2\sqrt{3}$ भी अपरिमेय संख्याएँ हैं।

उदाहरण 11 : जाँच कीजिए कि $7\sqrt{5}$, $\dfrac{7}{\sqrt{5}}$, $\sqrt{2}+21$, $\pi-2$ अपरिमेय संख्याएँ हैं या नहीं।

हल : $\sqrt{5} = 2.236...$, $\sqrt{2} = 1.4142...$, $\pi = 3.1415...$ हैं।

तब $7\sqrt{5} = 15.652...$, $\dfrac{7}{\sqrt{5}} = \dfrac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \dfrac{7\sqrt{5}}{5} = 3.1304...$ हैं।

$\sqrt{2} + 21 = 22.4142...$, $\pi - 2 = 1.1415...$

ये सभी अनवसानी अनावर्ती दशमलव हैं। अतः ये सभी अपरिमेय संख्याएँ हैं।

उदाहरण 12 : $2\sqrt{2}+5\sqrt{3}$ और $\sqrt{2}-3\sqrt{3}$ को जोड़िए।

हल : $\left(2\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right) = \left(2\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)+\left(5\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right)$

$$= (2+1)\sqrt{2}+(5-3)\sqrt{3} = 3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$$

उदाहरण 13 : $6\sqrt{5}$ को $2\sqrt{5}$ से गुणा कीजिए।

हल : $6\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 6 \times 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 12 \times 5 = 60$

उदाहरण 14 : $8\sqrt{15}$ को $2\sqrt{3}$ से भाग दीजिए।

हल : $8\sqrt{15} \div 2\sqrt{3} = \dfrac{8\sqrt{3 \times 5}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{8\sqrt{3} \times \sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = 4\sqrt{5}$

इन उदाहरणों से आप निम्नलिखित तथ्यों के होने की आशा कर सकते हैं जो सत्य हैं:

(i) एक परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का जोड़ या घटाना अपरिमेय होता है।

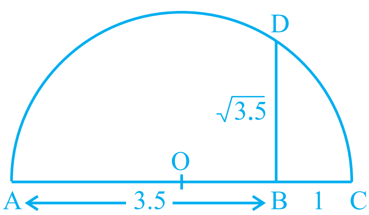
(ii) एक अपरिमेय संख्या के साथ एक शून्येतर (non-zero) परिमेय संख्या का गुणनफल या भागफल अपरिमेय होता है।

(iii) यदि हम दो अपरिमेय संख्याओं को जोड़ें, घटायें, गुणा करें या एक अपरिमेय संख्या को दूसरी अपरिमेय संख्या से भाग दें, तो परिणाम परिमेय या अपरिमेय कुछ भी हो सकता है।

अब हम अपनी चर्चा वास्तविक संख्याओं के वर्गमूल निकालने की संक्रिया (operation) पर करेंगे। आपको याद होगा कि यदि a एक प्राकृत संख्या है, तब $\sqrt{a} = b$ का अर्थ है $b^2 = a$ और $b > 0$। यही परिभाषा धनात्मक वास्तविक संख्याओं पर भी लागू की जा सकती है।

मान लीजिए $a > 0$ एक वास्तविक संख्या है। तब $\sqrt{a} = b$ का अर्थ है $b^2 = a$ और $b > 0$ है।

अनुच्छेद 1.2 में, हमने यह देखा है कि किस प्रकार संख्या रेखा पर $\sqrt{n}$ को, जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है, निरूपित किया जाता है। अब हम यह दिखाएँगे कि किस प्रकार $\sqrt{x}$ को, जहाँ x एक दी हुई धनात्मक वास्तविक संख्या है, ज्यामितीय (geometrically) रूप से ज्ञात किया जाता है। उदाहरण के लिए, आइए हम इसे $x = 3.5$ के लिए प्राप्त करें। अर्थात् हम $\sqrt{3.5}$ को ज्यामीतीय रूप से प्राप्त करेंगे।

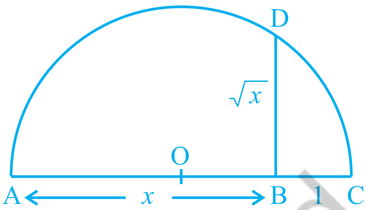


आकृति 1.11

एक दी हुई रेखा पर एक स्थिर बिन्दु A से 3.5 एकक की दूरी पर चिह्न लगाने पर एक ऐसा बिन्दु B प्राप्त होता है, जिससे कि AB = 3.5 एकक (देखिए आकृति 1.11)। B से 1 एकक की दूरी पर चिह्न लगाइए और इस नए बिन्दु को C मान लीजिए। AC का मध्य-बिन्दु ज्ञात

कीजिए और उस बिंदु को O मान लीजिए। O को केन्द्र और OC को त्रिज्या मानकर एक अर्धवृत्त बनाइए। AC पर लंब एक ऐसी रेखा खींचिए जो B से होकर जाती हो और अर्धवृत्त को D पर काटती हो। तब BD = $\sqrt{3.5}$ है।

अधिक व्यापक रूप में, $\sqrt{x}$ का मान ज्ञात करने के लिए, जहाँ x एक धनात्मक वास्तविक संख्या है, एक ऐसा बिंदु B लेते हैं, जिससे कि AB = x एकक हो और जैसा कि आकृति 1.16 में दिखाया गया है, एक ऐसा बिंदु C लीजिए जिससे कि BC = 1 एकक हो। तब, जैसा कि हमने स्थिति $x = 3.5$ के लिए किया है, हमें BD = $\sqrt{x}$ प्राप्त होगा (आकृति 1.12)।



आकृति 1.12

हम इस परिणाम को पाइथागोरस प्रमेय की सहायता से सिद्ध कर सकते हैं।

ध्यान दीजिए कि आकृति 1.12 में, Δ OBD एक समकोण त्रिभुज है। वृत्त की त्रिज्या $\frac{x+1}{2}$ एकक है।

अतः, OC = OD = OA = $\frac{x+1}{2}$ एकक

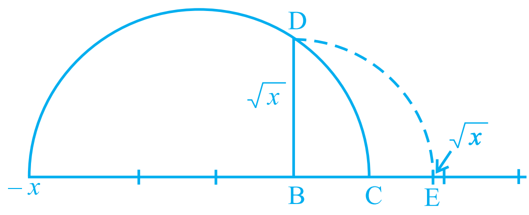
अब, OB = $x - \left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x-1}{2}$.

अतः, पाइथागोरस प्रमेय लागू करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$BD^2 = OD^2 - OB^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = \frac{4x}{4} = x$$

इससे यह पता चलता है कि BD = $\sqrt{x}$ है।

इस रचना से यह दर्शाने की एक चित्रीय और ज्यामितीय विधि प्राप्त हो जाती है कि सभी वास्तविक संख्याओं $x > 0$ के लिए, $\sqrt{x}$ का अस्तित्व है। यदि हम संख्या रेखा पर $\sqrt{x}$ की स्थिति जानना चाहते हैं, तो आइए हम रेखा BC को संख्या रेखा मान लें, B को शून्य मान लें और C को 1 मान लें, आदि-आदि। B को केन्द्र और BD को त्रिज्या मानकर एक चाप खींचिए जो संख्या रेखा को E पर काटता है (देखिए आकृति 1.13)। तब E, $\sqrt{x}$ निरूपित करता है।



आकृति 1.13

अब हम वर्गमूल की अवधारणा को घनमूलों, चतुर्थमूलों और व्यापक रूप से nवें मूलों, जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है, पर लागू करना चाहेंगे। आपको याद होगा कि पिछली कक्षाओं में आप वर्गमूलों और घनमूलों का अध्ययन कर चुके हैं।

$\sqrt[3]{8}$ क्या है? हम जानते हैं कि यह एक धनात्मक संख्या है जिसका घन 8 है, और आपने यह अवश्य अनुमान लगा लिया होगा कि $\sqrt[3]{8} = 2$ है। आइए हम $\sqrt[5]{243}$ का मान ज्ञात करें। क्या आप एक ऐसी संख्या b जानते हैं जिससे कि $b^5 = 243$ हो? उत्तर है 3, अतः, $\sqrt[5]{243} = 3$ हुआ।

इन उदाहरणों से क्या आप $\sqrt[n]{a}$ परिभाषित कर सकते हैं, जहाँ $a > 0$ एक वास्तविक संख्या है और n एक धनात्मक पूर्णांक है?

मान लीजिए $a > 0$ एक वास्तविक संख्या है और n एक धनात्मक पूर्णांक है। तब $\sqrt[n]{a} = b$, जबकि $b^n = a$ और $b > 0$। ध्यान दीजिए कि $\sqrt{2}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[n]{a}$ आदि में प्रयुक्त प्रतीक "$\sqrt{\ }$" को करणी चिह्न (radical sign) कहा जाता है।

अब हम यहाँ वर्गमूलों से संबंधित कुछ सर्वसमिकाएँ (identities) दे रहे हैं जो विभिन्न विधियों से उपयोगी होती हैं। पिछली कक्षाओं में आप इनमें से कुछ सर्वसमिकाओं से परिचित हो चुके हैं। शेष सर्वसमिकाएँ वास्तविक संख्याओं के योग पर गुणन के बंटन नियम से और सर्वसमिका $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ से, जहाँ x और y वास्तविक संख्याएँ हैं, प्राप्त होती हैं।

मान लीजिए a और b धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं। तब,

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

(ii) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = a - b$

(iv) $\left(a + \sqrt{b}\right)\left(a - \sqrt{b}\right) = a^2 - b$

(v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)=\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}$

(vi) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=a+2\sqrt{ab}+b$

आइए हम इन सर्वसमिकाओं की कुछ विशेष स्थितियों पर विचार करें।

उदाहरण 15 : निम्नलिखित व्यंजकों को सरल कीजिए:

(i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)$ (ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)$

हल : (i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)=10+5\sqrt{5}+2\sqrt{7}+\sqrt{35}$

(ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)=5^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=25-5=20$

(iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\sqrt{7}+\left(\sqrt{7}\right)^2=3+2\sqrt{21}+7=10+2\sqrt{21}$

(iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)=\left(\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2=11-7=4$

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि ऊपर के उदाहरण में दिए गए शब्द "सरल करना" का अर्थ यह है कि व्यंजक को परिमेय संख्याओं और अपरिमेय संख्याओं के योग के रूप में लिखना चाहिए।

हम इस समस्या पर विचार करते हुए कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ संख्या रेखा पर कहाँ स्थित है, इस अनुच्छेद को यहीं समाप्त करते हैं। हम जानते हैं कि यह एक अपरिमेय है। यदि हर एक परिमेय संख्या हो, तो इसे सरलता से हल किया जा सकता है। आइए हम देखें कि क्या हम इसके हर का परिमेयकरण (rationalise) कर सकते हैं, अर्थात् क्या हर को एक परिमेय संख्या में परिवर्तित कर सकते हैं। इसके लिए हमें वर्गमूलों से संबंधित सर्वसमिकाओं की आवश्यकता होती है। आइए हम देखें कि इसे कैसे किया जा सकता है।

उदाहरण 16 : $\frac{1}{\sqrt{2}}$ के हर का परिमेयकरण कीजिए।

हल : हम $\frac{1}{\sqrt{2}}$ को एक ऐसे तुल्य व्यंजक के रूप में लिखना चाहते हैं, जिसमें हर एक परिमेय संख्या

हो। हम जानते हैं कि $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ परिमेय है। हम यह भी जानते हैं कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ को $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ से गुणा करने पर हमें एक तुल्य व्यंजक प्राप्त होता है, क्योंकि $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$ है। अतः इन दो तथ्यों को एक साथ लेने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

इस रूप में $\frac{1}{\sqrt{2}}$ को संख्या रेखा पर स्थान निर्धारण सरल हो जाता है। यह 0 और $\sqrt{2}$ के मध्य स्थित है।

उदाहरण 17 : $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ के हर का परिमेयकरण कीजिए।

हल : इसके लिए हम ऊपर दी गई सर्वसमिका (iv) का प्रयोग करते हैं। $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ को $2-\sqrt{3}$ से गुणा करने और भाग देने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3}$$

उदाहरण 18 : $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ के हर का परिमेयकरण कीजिए।

हल : यहाँ हम ऊपर दी गई सर्वसमिका (iii) का प्रयोग करते हैं।

अतः, $$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3-5} = \left(\frac{-5}{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$$

उदाहरण 19 : $\frac{1}{7+3\sqrt{2}}$ के हर का परिमेयकरण कीजिए।

हल : $$\frac{1}{7+3\sqrt{2}} = \frac{1}{7+3\sqrt{2}} \times \left(\frac{7-3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}\right) = \frac{7-3\sqrt{2}}{49-18} = \frac{7-3\sqrt{2}}{31}$$

अत: जब एक व्यंजक के हर में वर्गमूल वाला एक पद होता है (या कोई संख्या करणी चिह्न के अंदर हो), तब इसे एक ऐसे तुल्य व्यंजक में, जिसका हर एक परिमेय संख्या है, रूपांतरित करने की क्रियाविधि को *हर का परिमेयकरण* (*rationalising the denominator*) कहा जाता है।

प्रश्नावली 1.4

1. बताइए नीचे दी गई संख्याओं में कौन-कौन परिमेय हैं और कौन-कौन अपरिमेय हैं:

(i) $2-\sqrt{5}$ (ii) $\left(3+\sqrt{23}\right)-\sqrt{23}$ (iii) $\dfrac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$

(iv) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (v) 2π

2. निम्नलिखित व्यंजकों में से प्रत्येक व्यंजक को सरल कीजिए:

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$ (ii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

3. आपको याद होगा कि π को एक वृत्त की परिधि (मान लीजिए c) और उसके व्यास (मान लीजिए d) के अनुपात से परिभाषित किया जाता है, अर्थात् $\pi=\dfrac{c}{d}$ है। यह इस तथ्य का अंतर्विरोध करता हुआ प्रतीत होता है कि π अपरिमेय है। इस अंतर्विरोध का निराकरण आप किस प्रकार करेंगे?

4. संख्या रेखा पर $\sqrt{9.3}$ को निरूपित कीजिए।

5. निम्नलिखित के हरों का परिमेयकरण कीजिए:

(i) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$ (iii) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ (iv) $\dfrac{1}{\sqrt{7}-2}$

1.5 वास्तविक संख्याओं के लिए घातांक-नियम

क्या आपको याद है कि निम्नलिखित का सरलीकरण किस प्रकार करते हैं?

(i) $17^2 \cdot 17^5 =$ (ii) $(5^2)^7 =$

(iii) $\dfrac{23^{10}}{23^7} =$ (iv) $7^3 \cdot 9^3 =$

क्या आपने निम्नलिखित उत्तर प्राप्त किए थे?

(i) $17^2 . 17^5 = 17^7$ (ii) $(5^2)^7 = 5^{14}$

(iii) $\dfrac{23^{10}}{23^7} = 23^3$ (iv) $7^3 . 9^3 = 63^3$

इन उत्तरों को प्राप्त करने के लिए, आपने निम्नलिखित घातांक-नियमों (laws of exponents) का प्रयोग अवश्य किया होगा, [यहाँ a, n और m प्राकृत संख्याएँ हैं। आपको याद होगा कि a को आधार (base) और m और n को घातांक (exponents) कहा जाता है।] जिनका अध्ययन आप पिछली कक्षाओं में कर चुके हैं:

(i) $a^m . a^n = a^{m+n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iii) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, m > n$ (iv) $a^m b^m = (ab)^m$

$(a)^0$ क्या है? इसका मान 1 है। आप यह अध्ययन पहले ही कर चुके हैं कि $(a)^0 = 1$ होता है। अतः, (iii) को लागू करके, आप $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$ प्राप्त कर सकते हैं। अब हम इन नियमों को ऋणात्मक घातांकों पर भी लागू कर सकते हैं।

अतः, उदाहरण के लिए :

(i) $17^2 \cdot 17^{-5} = 17^{-3} = \dfrac{1}{17^3}$ (ii) $(5^2)^{-7} = 5^{-14}$

(iii) $\dfrac{23^{-10}}{23^7} = 23^{-17}$ (iv) $(7)^{-3} \cdot (9)^{-3} = (63)^{-3}$

मान लीजिए हम निम्नलिखित अभिकलन करना चाहते हैं :

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(\dfrac{1}{3^5}\right)^4$

(iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

हम ये अभिकलन किस प्रकार करेंगे? यह देखा गया है कि वे घातांक-नियम, जिनका अध्ययन हम पहले कर चुके हैं, उस स्थिति में भी लागू हो सकते हैं, जबकि आधार धनात्मक वास्तविक संख्या हो और घातांक परिमेय संख्या हो (आगे अध्ययन करने पर हम यह देखेंगे

कि ये नियम वहाँ भी लागू हो सकते हैं, जहाँ घातांक वास्तविक संख्या हो।)। परन्तु, इन नियमों का कथन देने से पहले और इन नियमों को लागू करने से पहले, यह समझ लेना आवश्यक है कि, उदाहरण के लिए, $4^{\frac{3}{2}}$ क्या है। अत:, इस संबंध में हमें कुछ करना होगा।

$\sqrt[n]{a}$ को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है, जहाँ $a > 0$ एक वास्तविक संख्या है:

मान लीजिए $a > 0$ एक वास्तविक संख्या है और n एक धनात्मक पूर्णांक है। तब $\sqrt[n]{a} = b$ होता है, जबकि $b^n = a$ और $b > 0$ हो।

घातांकों की भाषा में, हम $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ के रूप में परिभाषित करते हैं। उदाहरण के लिए, $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$ है। अब हम $4^{\frac{3}{2}}$ को दो विधियों से देख सकते हैं।

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^3\right)^{\frac{1}{2}} = (64)^{\frac{1}{2}} = 8$$

अत:, हमें यह परिभाषा प्राप्त होती है:

मान लीजिए $a > 0$ एक वास्तविक संख्या है तथा m और n ऐसे पूर्णांक हैं कि 1 के अतिरिक्त इनका कोई अन्य उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है और $n > 0$ है। तब,

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

अत: वांछित विस्तृत घातांक नियम ये हैं:

मान लीजिए $a > 0$ एक वास्तविक संख्या है और p और q परिमेय संख्याएँ हैं। तब,

(i) $a^p \,.\, a^q = a^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

(iii) $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

अब आप पहले पूछे गए प्रश्नों का उत्तर ज्ञात करने के लिए इन नियमों का प्रयोग कर सकते हैं।

उदाहरण 20 : सरल कीजिए: (i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(\dfrac{1}{3^5}\right)^4$

(iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

हल :

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4 = 3^{\frac{4}{5}}$

(iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}} = 7^{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)} = 7^{\frac{3-5}{15}} = 7^{\frac{-2}{15}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}} = (13 \times 17)^{\frac{1}{5}} = 221^{\frac{1}{5}}$

प्रश्नावली 1.5

1. ज्ञात कीजिए: (i) $64^{\frac{1}{2}}$ (ii) $32^{\frac{1}{5}}$ (iii) $125^{\frac{1}{3}}$
2. ज्ञात कीजिए: (i) $9^{\frac{3}{2}}$ (ii) $32^{\frac{2}{5}}$ (iii) $16^{\frac{3}{4}}$ (iv) $125^{\frac{-1}{3}}$
3. सरल कीजिए:(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{5}}$ (ii) $\left(\dfrac{1}{3^3}\right)^7$ (iii) $\dfrac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$ (iv) $7^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}$

1.6 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिन्दुओं का अध्ययन किया है:

1. संख्या r को परिमेय संख्या कहा जाता है, यदि इसे $\dfrac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता हो, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।
2. संख्या s को अपरिमेय संख्या कहा जाता है, यदि इसे $\dfrac{p}{q}$ के रूप में न लिखा जा सकता हो, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।
3. एक परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार या तो सांत होता है या अनवसानी आवर्ती होता है। साथ ही, वह संख्या, जिसका दशमलव प्रसार सांत या अनवसानी आवर्ती है, परिमेय होती है।
4. एक अपरिमेय संख्या का दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती होता है। साथ ही, वह संख्या जिसका दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती है, अपरिमेय होती है।
5. सभी परिमेय और अपरिमेय संख्याओं को एक साथ लेने पर वास्तविक संख्याओं का संग्रह प्राप्त होता है।

6. यदि r परिमेय है और s अपरिमेय है, तब $r+s$ और $r-s$ अपरिमेय संख्याएँ होती हैं तथा rs और $\frac{r}{s}$ अपरिमेय संख्याएँ होती हैं यदि $r \neq 0$ है।

7. धनात्मक वास्तविक संख्याओं a और b के संबंध में निम्नलिखित सर्वसमिकाएँ लागू होती हैं:

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = a - b$ (iv) $\left(a + \sqrt{b}\right)\left(a - \sqrt{b}\right) = a^2 - b$

(v) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

8. $\frac{1}{\sqrt{a} + b}$ के हर का परिमेयकरण करने के लिए, इसे हम $\frac{\sqrt{a} - b}{\sqrt{a} - b}$ से गुणा करते हैं, जहाँ a और b पूर्णांक हैं।

9. मान लीजिए $a > 0$ एक वास्तविक संख्या है और p और q परिमेय संख्याएँ हैं। तब,

(i) $a^p . a^q = a^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

(iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

0963CH02

अध्याय 2

बहुपद

2.1 भूमिका

पिछली कक्षाओं में, आप बीजीय व्यंजकों और उनके जोड़, घटाना, गुणा और भाग का अध्ययन कर चुके हैं। वहाँ आप यह भी अध्ययन कर चुके हैं कि किस प्रकार कुछ बीजीय व्यंजकों का गुणनखंडन किया जाता है। आप निम्न बीजीय सर्वसमिकाओं और उनका गुणनखंडन में उपयोग का पुनःस्मरण कर सकते हैं:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

और, $$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

इस अध्याय में, सबसे पहले एक विशेष प्रकार के बीजीय व्यंजक का, जिसे *बहुपद* (*polynomial*) कहा जाता है, और उससे संबद्ध शब्दावली (terminology) का अध्ययन करेंगे। यहाँ हम *शेषफल प्रमेय* (*Remainder Theorem*), *गुणनखंड प्रमेय* (Factor Theorem) और बहुपदों के गुणनखंडन में इनके उपयोग का भी अध्ययन करेंगे। इनके अतिरिक्त, हम कुछ और बीजीय सर्वसमिकाओं का और कुछ दिए हुए व्यंजकों का गुणनखंडन करने तथा मान निकालने के बारे में भी अध्ययन करेंगे।

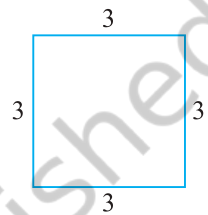
2.2 एक चर वाले बहुपद

सबसे पहले हम याद करेंगे कि चर को एक प्रतीक से प्रकट किया जाता है जो कोई भी वास्तविक मान धारण कर सकता है। हम चरों को अक्षरों $x, y, z,$ आदि से प्रकट करते हैं। ध्यान रहे कि $2x, 3x, -x, -\frac{1}{2}x$ बीजीय व्यंजक हैं। ये सभी व्यंजक, (एक अचर) $\times\, x$ के रूप के

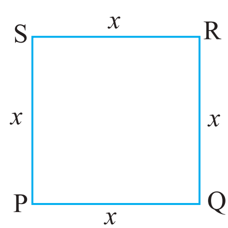
हैं। अब मान लीजिए कि हम एक ऐसा व्यंजक लिखना चाहते हैं जो कि (एक अचर) $\times$ (एक चर) है और हम यह नहीं जानते कि अचर क्या है। ऐसी स्थितियों में, हम अचर को a, b, c आदि से प्रकट करते हैं। अतः व्यंजक, मान लीजिए, ax होगा।

फिर भी, अचर को प्रकट करने वाले अक्षर और चर को प्रकट करने वाले अक्षर में अंतर होता है। एक विशेष स्थिति में अचरों के मान सदा समान बने रहते हैं। अर्थात् एक दी हुई समस्या में अचर के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता। परन्तु चर के मान में परिवर्तन होता रहता है।

अब 3 एकक की भुजा वाला एक वर्ग लीजिए (देखिए आकृति 2.1)। इसका परिमाप (perimeter) क्या है? आप जानते हैं कि वर्ग का परिमाप चारों भुजाओं की लंबाइयों का जोड़ होता है। यहाँ प्रत्येक भुजा की लंबाई 3 एकक है। अतः इसका परिमाप 4×3 अर्थात् 12 एकक है। यदि वर्ग की प्रत्येक भुजा 10 एकक हो, तो परिमाप क्या होगा? परिमाप 4×10 अर्थात् 40 एकक होगा। यदि प्रत्येक भुजा की लंबाई x एकक हो (देखिए आकृति 2.2), तो परिमाप $4x$ एकक होता है। अतः हम यह पाते हैं कि भुजा की लंबाई में परिवर्तन होने पर परिमाप बदल जाता है।



आकृति 2.1



आकृति 2.2

क्या आप वर्ग PQRS का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं? यह $x \times x = x^2$ वर्ग एकक (मात्रक) है। x^2 एक बीजीय व्यंजक है। आप $2x, x^2 + 2x, x^3 - x^2 + 4x + 7$ जैसे अन्य बीजीय व्यंजकों से भी परिचित हैं। ध्यान दीजिए कि अभी तक लिए गए सभी बीजीय व्यंजकों में चर के घातांक पूर्ण संख्या ही रहे हैं। इस रूप के व्यंजकों को *एक चर वाला बहुपद* (*polynomials in one variable*) कहा जाता है। ऊपर दिए गए उदाहरणों में चर x है। उदाहरण के लिए, $x^3 - x^2 + 4x + 7$, चर x में एक बहुपद है। इसी प्रकार $3y^2 + 5y$, चर y में एक बहुपद है और $t^2 + 4$, चर t में एक बहुपद है।

बहुपद $x^2 + 2x$ में व्यंजक x^2 और $2x$ बहुपद के *पद* (*terms*) कहे जाते हैं। इसी प्रकार, बहुपद $3y^2 + 5y + 7$ में तीन पद अर्थात् $3y^2$, $5y$ और 7 हैं। क्या आप बहुपद $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ के पद लिख सकते हैं? इस बहुपद के चार पद अर्थात् $-x^3, 4x^2, 7x$ और -2 हैं।

बहुपद के प्रत्येक पद का एक गुणांक (coefficient) होता है। अतः, $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ में x^3 का गुणांक -1 है, x^2 का गुणांक 4 है, x का गुणांक 7 है और x^0 का गुणांक -2 है

(स्मरण रहे कि $x^0 = 1$ है)। क्या आप जानते हैं कि $x^2 - x + 7$ में x का गुणांक क्या है? x का गुणांक -1 है।

ध्यान रहे कि 2 भी एक बहुपद है। वस्तुतः 2, –5, 7 आदि *अचर बहुपदों* (*constant polynomials*) के उदाहरण हैं। अचर बहुपद 0 को ***शून्य बहुपद*** कहा जाता है। साथ ही, जैसा कि उच्च कक्षाओं में आप देखेंगे, सभी बहुपदों के संग्रह में शून्य बहुपद एक अति महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है।

अब आप $x + \frac{1}{x}$, $\sqrt{x} + 3$ और $\sqrt[3]{y} + y^2$ जैसे बीजीय व्यंजक लीजिए। क्या आप जानते हैं कि आप $x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$ लिख सकते हैं? यहाँ दूसरे पद अर्थात् x^{-1} का घातांक -1 है जो एक पूर्ण संख्या नहीं है। अतः यह बीजीय व्यंजक एक बहुपद नहीं है। साथ ही, $\sqrt{x} + 3$ को $x^{\frac{1}{2}} + 3$ के रूप में लिखा जा सकता है। यहाँ x का घातांक $\frac{1}{2}$ है, जो कि एक पूर्ण संख्या नहीं है। तो क्या आप यह समझते हैं कि $\sqrt{x} + 3$ एक बहुपद है? नहीं, यह एक बहुपद नहीं है। क्या $\sqrt[3]{y} + y^2$ एक बहुपद है? यह भी एक बहुपद नहीं है। (क्यों?)

यदि एक बहुपद में चर x हो, तो हम बहुपद को $p(x)$ या $q(x)$ या $r(x)$, आदि से प्रकट कर सकते हैं, उदाहरण के लिए, हम यह लिख सकते हैं:

$$p(x) = 2x^2 + 5x - 3$$
$$q(x) = x^3 - 1$$
$$r(y) = y^3 + y + 1$$
$$s(u) = 2 - u - u^2 + 6u^5$$

बहुपद में परिमित संख्या में कितने भी पद हो सकते हैं। उदाहरण के लिए, $x^{150} + x^{149} + ... + x^2 + x + 1$ एक बहुपद है, जिसमें 151 पद हैं।

अब बहुपद $2x$, 2, $5x^3$, $-5x^2$, y और u^4 लीजिए। क्या आप देखते हैं कि इन बहुपदों में से प्रत्येक बहुपद का केवल एक पद है। केवल एक पद वाले बहुपद को *एकपदी* (*monomial*) कहा जाता है। (अंग्रेजी शब्द 'mono' का अर्थ है "एक")।

अब नीचे दिए गए बहुपदों में से प्रत्येक पर ध्यान दीजिए:

$p(x) = x + 1$, $\quad q(x) = x^2 - x$, $\quad r(y) = y^{30} + 1$, $\quad t(u) = u^{43} - u^2$

यहाँ प्रत्येक बहुपद में कितने पद हैं? इनमें से प्रत्येक बहुपद में केवल दो पद हैं। केवल दो पदों वाले बहुपदों को *द्विपद* (binomials) कहा जाता है। (अंग्रेजी शब्द 'bi' का अर्थ है "दो")।

इसी प्रकार, केवल तीन पदों वाले बहुपदों को *त्रिपद* (*trinomials*) कहा जाता है। (अंग्रेजी शब्द 'tri' का अर्थ है "तीन")। त्रिपद के कुछ उदाहरण ये हैं:

$p(x) = x + x^2 + \pi$, $\quad q(x) = \sqrt{2} + x - x^2$,

$r(u) = u + u^2 - 2$, $\quad t(y) = y^4 + y + 5$

अब बहुपद $p(x) = 3x^7 - 4x^6 + x + 9$ को देखिए। इसमें x की अधिकतम घात वाला पद कौन-सा है? यह पद $3x^7$ है। इस पद में x का घातांक 7 है। इसी प्रकार, बहुपद $q(y) = 5y^6 - 4y^2 - 6$ में y की अधिकतम घात वाला पद $5y^6$ है और इस पद में y का घातांक 6 है। एक बहुपद में चर की अधिकतम घात वाले पद के घातांक को *बहुपद की घात* (*degree of the polynomial*) कहा जाता है। अतः बहुपद $3x^7 - 4x^6 + x + 9$ की घात 7 है और बहुपद $5y^6 - 4y^2 - 6$ की घात 6 है। **एक शून्येतर अचर बहुपद की घात शून्य होती है।**

उदाहरण 1 : नीचे दिए गए प्रत्येक बहुपद की घात ज्ञात कीजिए:

(i) $x^5 - x^4 + 3$ $\quad$ (ii) $2 - y^2 - y^3 + 2y^8$ $\quad$ (iii) 2

हल : (i) चर का अधिकतम घातांक 5 है। अतः बहुपद की घात 5 है।

(ii) चर का अधिकतम घातांक 8 है। अतः बहुपद की घात 8 है।

(iii) यहाँ केवल एक पद 2 है जिसे $2x^0$ के रूप में लिखा जा सकता है। अतः x का घातांक 0 है। इसलिए, बहुपद की घात 0 है।

अब बहुपदों $p(x) = 4x + 5$, $q(y) = 2y$, $r(t) = t + \sqrt{2}$ और $s(u) = 3 - u$ को लीजिए। क्या इनमें कोई सर्वनिष्ठ तथ्य देखने को मिलता है? इनमें प्रत्येक बहुपद की घात एक है। एक घात वाले बहुपद को *रैखिक बहुपद* (*linear polynomial*) कहा जाता है। एक चर में कुछ और रैखिक बहुपद $2x - 1$, $\sqrt{2}\,y + 1$ और $2 - u$ हैं। अब क्या x में तीन पदों वाला एक रैखिक बहुपद हम ज्ञात कर सकते हैं? हम एक ऐसा रैखिक बहुपद ज्ञात नहीं कर सकते, क्योंकि x में एक रैखिक बहुपद में अधिक से अधिक दो पद हो सकते हैं। अतः x में कोई भी रैखिक बहुपद $ax + b$ के रूप का होगा, जहाँ a और b अचर हैं और $a \neq 0$ है। (क्यों?) इसी प्रकार $ay + b$, y में एक रैखिक बहुपद है।

अब आप निम्नलिखित बहुपदों को लीजिए:

$$2x^2 + 5,\ 5x^2 + 3x + \pi,\ x^2 \text{ और } x^2 + \frac{2}{5}x$$

क्या आप इस बात से सहमत हैं कि ऊपर दिए गए सभी बहुपद घात 2 वाले हैं? घात 2 वाले बहुपद को *द्विघाती* या *द्विघात बहुपद* (*quadratic polynomial*) कहा जाता है।

द्विघाती बहुपद के कुछ उदाहरण $5 - y^2$, $4y + 5y^2$ और $6 - y - y^2$ हैं। क्या आप एक चर में चार अलग-अलग पदों वाले एक द्विघाती बहुपद को लिख सकते हैं? आप देखेंगे कि एक चर में एक द्विघाती बहुपद के अधिक से अधिक 3 पद होंगे। यदि आप कुछ और द्विघाती पद बना सकें तो आप पाएँगे कि x में कोई भी द्विघाती बहुपद $ax^2 + bx + c$ के रूप का होगा, जहाँ $a \neq 0$ और a, b, c अचर हैं। इसी प्रकार, y में द्विघाती बहुपद $ay^2 + by + c$ के रूप का होगा, जबकि $a \neq 0$ और a, b, c अचर हों।

तीन घात वाले बहुपद को *त्रिघाती बहुपद* (*cubic polynomial*) कहा जाता है। x में एक त्रिघाती बहुपद के कुछ उदाहरण $4x^3$, $2x^3 + 1$, $5x^3 + x^2$, $6x^3 - x$, $6 - x^3$ और $2x^3 + 4x^2 + 6x + 7$ हैं। आपके विचार से एक चर में त्रिघाती बहुपद में कितने पद हो सकते हैं? अधिक से अधिक 4 पद हो सकते हैं। इन्हें $ax^3 + bx^2 + cx + d$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ $a \neq 0$ और a, b, c और d अचर हैं।

अभी आपने देखा है कि घात 1, घात 2 या घात 3 वाले बहुपद देखने में लगभग समान ही लगते हैं, तो क्या आप एक चर में, घात n वाला एक बहुपद लिख सकते हैं, जहाँ n कोई प्राकृत संख्या है? एक चर x में, घात n वाला बहुपद निम्न रूप का एक व्यंजक होता है:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

जहाँ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ अचर हैं और $a_n \neq 0$ है।

विशेष रूप में, यदि $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$ हो (सभी अचर शून्य हों), तो हमें **शून्य बहुपद (zero polynomial)** प्राप्त होता है, जिसे **0** से प्रकट किया जाता है। शून्य बहुपद की घात क्या होती है? शून्य बहुपद की घात *परिभाषित नहीं* है।

अभी तक हमने केवल एक चर वाले बहुपदों के बारे में अध्ययन किया है। हम एक से अधिक चरों वाले बहुपद भी प्राप्त कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, $x^2 + y^2 + xyz$ (जहाँ चर x, y और z हैं) तीन चरों में एक बहुपद है। इसी प्रकार, $p^2 + q^{10} + r$ (जहाँ चर p, q और r हैं), $u^3 + v^2$ (जहाँ चर u और v हैं) क्रमशः तीन चरों और दो चरों में (वाले) बहुपद हैं। इस प्रकार के बहुपदों का विस्तार से अध्ययन हम बाद में करेंगे।

प्रश्नावली 2.1

1. निम्नलिखित व्यंजकों में कौन-कौन एक चर में बहुपद हैं और कौन-कौन नहीं हैं? कारण के साथ अपने उत्तर दीजिए :

(i) $4x^2 - 3x + 7$ (ii) $y^2 + \sqrt{2}$ (iii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$

(iv) $y + \dfrac{2}{y}$ (v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक में x^2 का गुणांक लिखिए:

(i) $2+x^2+x$ (ii) $2-x^2+x^3$ (iii) $\frac{\pi}{2}x^2+x$ (iv) $\sqrt{2}x-1$

3. 35 घात के द्विपद का और 100 घात के एकपदी का एक-एक उदाहरण दीजिए।

4. निम्नलिखित बहुपदों में से प्रत्येक बहुपद की घात लिखिए :

(i) $5x^3+4x^2+7x$ (ii) $4-y^2$

(iii) $5t-\sqrt{7}$ (iv) 3

5. बताइए कि निम्नलिखित बहुपदों में कौन-कौन बहुपद रैखिक हैं, कौन-कौन द्विघाती हैं और कौन-कौन त्रिघाती हैं:

(i) x^2+x (ii) $x-x^3$ (iii) $y+y^2+4$ (iv) $1+x$

(v) $3t$ (vi) r^2 (vii) $7x^3$

2.3 बहुपद के शून्यक

निम्नलिखित बहुपद लीजिए:

$$p(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 2$$

यदि $p(x)$ में सर्वत्र x के स्थान पर 1 प्रतिस्थापित करें, तो हमें यह प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned} p(1) &= 5 \times (1)^3 - 2 \times (1)^2 + 3 \times (1) - 2 \\ &= 5 - 2 + 3 - 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

अत:, हम यह कह सकते हैं कि $x = 1$ पर $p(x)$ का मान 4 है।

इसी प्रकार, $p(0) = 5(0)^3 - 2(0)^2 + 3(0) - 2$

$= -2$

क्या आप $p(-1)$ ज्ञात कर सकते हैं?

उदाहरण 2 : चरों के दिए गए मान पर नीचे दिए गए प्रत्येक बहुपद का मान ज्ञात कीजिए:

(i) $x = 1$ पर $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$ का मान

(ii) $y = 2$ पर $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$ का मान

(iii) $t = a$ पर $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$ का मान

हल : (i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$

$x = 1$ पर बहुपद $p(x)$ का मान यह होता है:

$$p(1) = 5(1)^2 - 3(1) + 7$$
$$= 5 - 3 + 7 = 9$$

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$

$y = 2$ पर बहुपद $q(y)$ का मान यह होता है:

$$q(2) = 3(2)^3 - 4(2) + \sqrt{11} = 24 - 8 + \sqrt{11} = 16 + \sqrt{11}$$

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$

$t = a$ पर बहुपद $p(t)$ का मान यह होता है:

$$p(a) = 4a^4 + 5a^3 - a^2 + 6$$

अब बहुपद $p(x) = x - 1$ लीजिए।

$p(1)$ क्या है? ध्यान दीजिए कि $p(1) = 1 - 1 = 0$ है।

क्योंकि $p(1) = 0$ है, इसलिए हम यह कहते हैं कि 1, बहुपद $p(x)$ का एक *शून्यक* (*zero*) है।

इसी प्रकार, आप यह देख सकते हैं कि 2, $q(x)$ का एक *शून्यक* है, जहाँ $q(x) = x - 2$ है।

व्यापक रूप में, हम यह कहते हैं कि बहुपद $p(x)$ का शून्यक एक ऐसी संख्या c है कि $p(c) = 0$ हो।

इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि बहुपद $(x - 1)$ का शून्यक इस बहुपद को 0 के समीकृत करके प्राप्त किया जाता है। अर्थात् $x - 1 = 0$, जिससे $x = 1$ प्राप्त होता है। तब हम कहते हैं कि $p(x) = 0$ एक बहुपद समीकरण है और 1 इस बहुपद समीकरण $p(x) = 0$ का एक मूल है। अतः हम यह कहते हैं कि 1, बहुपद $x - 1$ का शून्यक है या यह बहुपद समीकरण $x - 1 = 0$ का एक *मूल* (*root*) है।

अब अचर बहुपद 5 लीजिए। क्या आप बता सकते हैं कि इसका शून्यक क्या है? इस बहुपद का कोई शून्यक नहीं है, क्योंकि $5x^0$ में x के स्थान पर किसी भी संख्या को प्रतिस्थापित करने पर हमें 5 ही प्राप्त होता है। वस्तुतः, *एक शून्येतर अचर बहुपद का कोई शून्यक नहीं होता।* अब प्रश्न उठता है कि शून्य बहुपद के शून्यकों के बारे में क्या कहा जाए। परंपरा के अनुसार *प्रत्येक वास्तविक संख्या शून्य बहुपद का एक शून्यक होती है।*

उदाहरण 3 : जाँच कीजिए कि -2 और 2 बहुपद $x + 2$ के शून्यक हैं या नहीं।

हल : मान लीजिए $\qquad p(x) = x + 2$

तब $p(2) = 2 + 2 = 4$, $p(-2) = -2 + 2 = 0$

अतः -2 बहुपद $x + 2$ का एक शून्यक है, परन्तु 2 बहुपद $x + 2$ का शून्यक नहीं है।

उदाहरण 4 : बहुपद $p(x) = 2x + 1$ का एक शून्यक ज्ञात कीजिए।

हल : $p(x)$ का शून्यक ज्ञात करना वैसा ही है जैसा कि समीकरण

$$p(x) = 0$$

को हल करना।

अब $\qquad 2x + 1 = 0$ से हमें $x = -\dfrac{1}{2}$ प्राप्त होता है।

अतः, $-\dfrac{1}{2}$ बहुपद $2x + 1$ का एक शून्यक है।

अब, यदि $p(x) = ax + b, a \neq 0$ एक रैखिक बहुपद हो, तो हम इस $p(x)$ का शून्यक किस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं? उदाहरण 4 से आपको इसका कुछ संकेत मिल सकता है। बहुपद $p(x)$ का शून्यक ज्ञात करने का अर्थ है बहुपद समीकरण $p(x) = 0$ को हल करना।

अब $p(x) = 0$ का अर्थ है $\qquad ax + b = 0, a \neq 0$

अतः, $\qquad ax = -b$

अर्थात् $\qquad x = -\dfrac{b}{a}$

अतः, $x = -\dfrac{b}{a}$ ही केवल $p(x)$ का शून्यक है, अर्थात् *रैखिक बहुपद का एक और केवल एक शून्यक होता है।*

अब हम यह कह सकते हैं कि 1, $x - 1$ का केवल एक शून्यक है और -2, $x + 2$ का केवल एक शून्यक है।

उदाहरण 5 : सत्यापित कीजिए कि 2 और 0 बहुपद $x^2 - 2x$ के शून्यक हैं।

हल : मान लीजिए $\qquad p(x) = x^2 - 2x$

तब $\qquad p(2) = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$

और $\qquad p(0) = 0 - 0 = 0$

अत:, 2 और 0 दोनों ही बहुपद $x^2 - 2x$ के शून्यक हैं।

आइए अब हम अपने प्रेक्षणों की सूची बनाएँ:

1. आवश्यक नहीं है कि बहुपद का शून्यक शून्य ही हो।
2. 0, बहुपद का एक शून्यक हो सकता है।
3. प्रत्येक रैखिक बहुपद का एक और केवल एक शून्यक होता है।
4. एक बहुपद के एक से अधिक शून्यक हो सकते हैं।

प्रश्नावली 2.2

1. निम्नलिखित पर बहुपद $5x - 4x^2 + 3$ के मान ज्ञात कीजिए:

(i) $x = 0$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 2$

2. निम्नलिखित बहुपदों में से प्रत्येक बहुपद के लिए $p(0), p(1)$ और $p(2)$ ज्ञात कीजिए:

(i) $p(y) = y^2 - y + 1$ (ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$

(iii) $p(x) = x^3$ (iv) $p(x) = (x-1)(x+1)$

3. सत्यापित कीजिए कि दिखाए गए मान निम्नलिखित स्थितियों में संगत बहुपद के शून्यक हैं:

(i) $p(x) = 3x + 1;\ x = -\dfrac{1}{3}$ (ii) $p(x) = 5x - \pi;\ x = \dfrac{4}{5}$

(iii) $p(x) = x^2 - 1;\ x = 1, -1$ (iv) $p(x) = (x+1)(x-2);\ x = -1, 2$

(v) $p(x) = x^2;\ x = 0$ (vi) $p(x) = lx + m;\ x = -\dfrac{m}{l}$

(vii) $p(x) = 3x^2 - 1;\ x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (viii) $p(x) = 2x + 1;\ x = \dfrac{1}{2}$

4. निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में बहुपद का शून्यक ज्ञात कीजिए :

(i) $p(x) = x + 5$ (ii) $p(x) = x - 5$ (iii) $p(x) = 2x + 5$

(iv) $p(x) = 3x - 2$ (v) $p(x) = 3x$ (vi) $p(x) = ax;\ a \neq 0$

(vii) $p(x) = cx + d;\ c \neq 0,\ c, d$ वास्तविक संख्याएँ हैं।

2.4 बहुपदों का गुणनखंडन

आइए अब हम ऊपर के उदाहरण 10 की स्थिति पर ध्यानपूर्वक विचार करें। इसके अनुसार, क्योंकि शेषफल $q\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$ है, इसलिए $2t + 1$, $q(t)$ का एक गुणनखंड है। अर्थात् किसी बहुपद $g(t)$ के लिए,

$$q(t) = (2t + 1)\, g(t) \text{ होता है।}$$

यह नीचे दिए हुए प्रमेय की एक विशेष स्थिति है:

गुणनखंड प्रमेय : यदि $p(x)$ घात $n \geq 1$ वाला एक बहुपद हो और a कोई वास्तविक संख्या हो, तो

(i) $x - a$, $p(x)$ का एक गुणनखंड होता है, यदि $p(a) = 0$ हो, और

(ii) $p(a) = 0$ होता है, यदि $x - a$, $p(x)$ का एक गुणनखंड हो।

उपपत्ति : शेषफल प्रमेय द्वारा, $p(x) = (x - a)\, q(x) + p(a)$.

(i) यदि $p(a) = 0$, तब $p(x) = (x - a)\, q(x)$, जो दर्शाता है कि $x - a$, $p(x)$ का एक गुणनखंड है।

(ii) चूंकि $x - a$, $p(x)$ का एक गुण $x - a$, $p(x)$ का एक गुणनखंड है, तो किसी बहुपद $g(x)$ के लिए $p(x) = (x - a)\, g(x)$ होगा। इस स्थिति में, $p(a) = (a - a)\, g(a) = 0$.

उदाहरण 6 : जाँच कीजिए कि $x + 2$ बहुपदों $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ और $2x + 4$ का एक गुणनखंड है या नहीं।

हल : $x + 2$ का शून्यक -2 है। मान लीजिए

$$p(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 6 \text{ और } s(x) = 2x + 4$$

तब,
$$p(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 5(-2) + 6$$
$$= -8 + 12 - 10 + 6$$
$$= 0$$

अतः गुणनखंड प्रमेय (Factor Theorem) के अनुसार $x + 2$, $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ का एक गुणनखंड है।

पुनः,
$$s(-2) = 2(-2) + 4 = 0$$

अतः $x + 2$, $2x + 4$ का एक गुणनखंड है। वास्तव में, गुणनखंड प्रमेय लागू किए बिना ही आप इसकी जाँच कर सकते हैं, क्योंकि $2x + 4 = 2(x + 2)$ है।

उदाहरण 7 : यदि $x - 1$, $4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ का एक गुणनखंड है, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल : क्योंकि $x - 1$, $p(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ का एक गुणनखंड है, इसलिए

$$p(1) = 0 \text{ होगा।}$$

अब,
$$p(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 - 4(1) + k$$

इसलिए $4 + 3 - 4 + k = 0$

अर्थात् $k = -3$

अब हम घात 2 और घात 3 के कुछ बहुपदों के गुणनखंड ज्ञात करने के लिए गुणनखंड प्रमेय का प्रयोग करेंगे।

आप $x^2 + lx + m$ जैसे द्विघाती बहुपद के गुणनखंडन से परिचित हैं। आपने मध्य पद lx को $ax + bx$ में इस प्रकार विभक्त करके कि $ab = m$ हो, गुणनखंडन किया था। तब $x^2 + lx + m = (x + a)(x + b)$ प्राप्त हुआ था। अब हम $ax^2 + bx + c$, जहाँ $a \neq 0$ और a, b, c अचर हैं, के प्रकार के द्विघाती बहुपदों का गुणनखंडन करने का प्रयास करेंगे।

मध्य पद को विभक्त करके बहुपद $ax^2 + bx + c$ का गुणनखंडन निम्न प्रकार से होता है:

मान लीजिए इसके गुणनखंड $(px + q)$ और $(rx + s)$ हैं। तब,

$$ax^2 + bx + c = (px + q)(rx + s) = pr\,x^2 + (ps + qr)\,x + qs$$

x^2 के गुणांकों की तुलना करने पर, हमें $a = pr$ प्राप्त होता है।

इसी प्रकार, x के गुणांकों की तुलना करने पर, हमें $b = ps + qr$ प्राप्त होता है।

साथ ही, अचर पदों की तुलना करने पर, हमें $c = qs$ प्राप्त होता है।

इससे यह पता चलता है कि b दो संख्याओं ps और qr का योगफल है, जिनका गुणनफल $(ps)(qr) = (pr)(qs) = ac$ है। अतः $ax^2 + bx + c$ का गुणनखंडन करने के लिए, हम b को ऐसी दो संख्याओं के योगफल के रूप में लिखते हैं जिनका गुणनफल ac हो। यह तथ्य नीचे दिए गए उदाहरण 13 से स्पष्ट हो जाएगा।

उदाहरण 8 : मध्य पद को विभक्त करके तथा गुणनखंड प्रमेय का प्रयोग करके $6x^2 + 17x + 5$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल 1 : (मध्य पद को विभक्त करके) : यदि हम ऐसी दो संख्याएँ p और q ज्ञात कर सकते हों जिससे कि

$p + q = 17$ और $pq = 6 \times 5 = 30$ हो, तो हम गुणनखंड प्राप्त कर सकते हैं।

अतः आइए हम 30 के गुणनखंड-युग्मों को ढूढ़ें। कुछ युग्म 1 और 30, 2 और 15, 3 और 10, 5 और 6 हैं।

इन युग्मों में, हमें 2 और 15 के युग्म से $p + q = 17$ प्राप्त होगा।

अतः $6x^2 + 17x + 5 = 6x^2 + (2 + 15)x + 5$

$$= 6x^2 + 2x + 15x + 5$$

$$= 2x(3x + 1) + 5(3x + 1)$$

$$= (3x + 1)(2x + 5)$$

हल 2 : (गुणनखंड प्रमेय की सहायता से):

$6x^2 + 17x + 5 = 6\left(x^2 + \frac{17}{6}x + \frac{5}{6}\right) = 6\,p(x)$, मान लीजिए। यदि a और b, $p(x)$ के शून्यक हों, तो $6x^2 + 17x + 5 = 6(x - a)(x - b)$ है। अतः $ab = \frac{5}{6}$ होगा। आइए हम a और b के लिए कुछ संभावनाएँ देखें। ये $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{5}{2}, \pm 1$ हो सकते हैं। अब, $p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{17}{6}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{6} \neq 0$ है। परन्तु $p\left(\frac{-1}{3}\right) = 0$ है। अतः $\left(x + \frac{1}{3}\right)$, $p(x)$ का एक गुणनखंड है। इसी प्रकार, जाँच करके आप यह ज्ञात कर सकते हैं कि $\left(x + \frac{5}{2}\right)$, $p(x)$ का एक गुणनखंड है।

अतः,
$$6x^2 + 17x + 5 = 6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right)$$

$$= 6\left(\frac{3x + 1}{3}\right)\left(\frac{2x + 5}{2}\right)$$

$$= (3x + 1)(2x + 5)$$

इस उदाहरण के लिए, विभक्त करने की विधि का प्रयोग अधिक प्रभावशाली है। फिर भी, आइए हम एक और उदाहरण लें।

उदाहरण 9 : गुणनखंड प्रमेय की सहायता से $y^2 - 5y + 6$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल : मान लीजिए $p(y) = y^2 - 5y + 6$ है। अब, यदि $p(y) = (y - a)(y - b)$ हो, तो हम जानते हैं कि इसका अचर पद ab होगा। अतः $ab = 6$ है। इसलिए, $p(y)$ के गुणनखंड प्राप्त करने के लिए हम 6 के गुणनखंड ज्ञात करते हैं।

6 के गुणनखंड 1, 2 और 3 हैं।

अब, $p(2) = 2^2 - (5 \times 2) + 6 = 0$

इसलिए $y - 2$, $p(y)$ का एक गुणनखंड है।

साथ ही, $p(3) = 3^2 - (5 \times 3) + 6 = 0$

इसलिए, $y - 3$ भी $y^2 - 5y + 6$ का एक गुणनखंड है।

अत:, $y^2 - 5y + 6 = (y - 2)(y - 3)$

ध्यान दीजिए कि मध्य पद $-5y$ को विभक्त करके भी $y^2 - 5y + 6$ का गुणनखंडन किया जा सकता है।

आइए अब हम त्रिघाती बहुपदों का गुणनखंडन करें। यहाँ प्रारंभ में विभक्त-विधि अधिक उपयोगी सिद्ध नहीं होगी। हमें पहले कम से कम एक गुणनखंड ज्ञात करना आवश्यक होता है, जैसा कि आप नीचे के उदाहरण में देखेंगे।

उदाहरण 10 : $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल : मान लीजिए $p(x) = x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ है।

अब हम -120 के सभी गुणनखंडों का पता लगाएँगे। इनमें कुछ गुणनखंड हैं:

$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 8, \pm 10, \pm 12, \pm 15, \pm 20, \pm 24, \pm 30, \pm 60$

जाँच करने पर, हम यह पाते हैं कि $p(1) = 0$ है। अत: $(x - 1)$, $p(x)$ का एक गुणनखंड है।

अब हम देखते हैं कि $x^3 - 23x^2 + 142x - 120 = x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120$

$= x^2(x - 1) - 22x(x - 1) + 120(x - 1)$ (क्यों?)

$= (x - 1)(x^2 - 22x + 120)$ [$(x - 1)$ को सर्वनिष्ठ लेकर]

इसे $p(x)$ को $(x - 1)$ से भाग देकर भी प्राप्त किया जा सकता था।

अब $x^2 - 22x + 120$ का गुणनखंडन या तो मध्य पद को विभक्त करके या गुणनखंड प्रमेय की सहायता से किया जा सकता है। मध्य पद को विभक्त करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$x^2 - 22x + 120 = x^2 - 12x - 10x + 120$$

$$= x(x - 12) - 10(x - 12)$$

$$= (x - 12)(x - 10)$$

अत:, $x^3 - 23x^2 - 142x - 120 = (x - 1)(x - 10)(x - 12)$

प्रश्नावली 2.3

1. बताइए कि निम्नलिखित बहुपदों में से किस बहुपद का एक गुणनखंड $x + 1$ है।

(i) $x^3 + x^2 + x + 1$ (ii) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

(iii) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$ (iv) $x^3 - x^2 - \left(2 + \sqrt{2}\right)x + \sqrt{2}$

2. गुणनखंड प्रमेय लागू करके बताइए कि निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में $g(x)$, $p(x)$ का एक गुणनखंड है या नहीं:

(i) $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1, g(x) = x + 1$

(ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, g(x) = x + 2$

(iii) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6, g(x) = x - 3$

3. k का मान ज्ञात कीजिए जबकि निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में $(x - 1)$, $p(x)$ का एक गुणनखंड हो :

(i) $p(x) = x^2 + x + k$ (ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

(iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$ (iv) $p(x) = kx^2 - 3x + k$

4. गुणनखंड ज्ञात कीजिए:

(i) $12x^2 - 7x + 1$ (ii) $2x^2 + 7x + 3$

(iii) $6x^2 + 5x - 6$ (iv) $3x^2 - x - 4$

5. गुणनखंड ज्ञात कीजिए:

(i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ (ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

(iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ (iv) $2y^3 + y^2 - 2y - 1$

2.5 बीजीय सर्वसमिकाएँ

पिछली कक्षाओं में, आप यह पढ़ चुके हैं कि बीजीय सर्वसमिका (algebraic identity) एक बीजीय समीकरण होती है जो कि चरों के सभी मानों के लिए सत्य होती है। पिछली कक्षाओं में, आप निम्नलिखित बीजीय सर्वसमिकाओं का अध्ययन कर चुके हैं:

सर्वसमिका I : $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

सर्वसमिका II : $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

सर्वसमिका III : $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

सर्वसमिका IV : $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

इन बीजीय सर्वसमिकाओं में से कुछ का प्रयोग आपने बीजीय व्यंजकों के गुणनखंड ज्ञात करने में अवश्य किया होगा। आप इनकी उपयोगिता अभिकलनों (computations) में भी देख सकते हैं।

उदाहरण 11 : उपयुक्त सर्वसमिकाओं का उपयोग करके निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए:

(i) $(x + 3)(x + 3)$ (ii) $(x – 3)(x + 5)$

हल : (i) यहाँ हम सर्वसमिका I $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ का प्रयोग कर सकते हैं। इस सर्वसमिका में $y = 3$ रखने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$(x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2 = x^2 + 2(x)(3) + (3)^2$$
$$= x^2 + 6x + 9$$

(ii) सर्वसमिका IV अर्थात् $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ को लागू करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$(x – 3)(x + 5) = x^2 + (–3 + 5)x + (–3)(5)$$
$$= x^2 + 2x – 15$$

उदाहरण 12 : सीधे गुणा न करके 105×106 का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $105 \times 106 = (100 + 5) \times (100 + 6)$

$= (100)^2 + (5 + 6)(100) + (5 \times 6)$ (सर्वसमिका IV लागू करके)

$= 10000 + 1100 + 30$

$= 11130$

कुछ दिए हुए व्यंजकों का गुणनफल ज्ञात करने के लिए, हमने ऊपर बतायी गई कुछ सर्वसमिकाओं का प्रयोग किया है। ये सर्वसमिकाएँ बीजीय व्यंजकों का गुणनखंडन करने में भी उपयोगी होती हैं, जैसा कि आप नीचे दिए गए उदाहरण में देख सकते हैं।

उदाहरण 13 : गुणनखंड ज्ञात कीजिए:

(i) $49a^2 + 70ab + 25b^2$ (ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9}$

हल : (i) यहाँ आप यह देख सकते हैं कि

$$49a^2 = (7a)^2, 25b^2 = (5b)^2, 70ab = 2(7a)(5b)$$

$x^2 + 2xy + y^2$ के साथ दिए हुए व्यंजक की तुलना करने पर, हम यह पाते हैं कि $x = 7a$ और $y = 5b$ है।

सर्वसमिका I लागू करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$49a^2 + 70ab + 25b^2 = (7a + 5b)^2 = (7a + 5b)(7a + 5b)$$

(ii) यहाँ $\dfrac{25}{4}x^2 - \dfrac{y^2}{9} = \left(\dfrac{5}{2}x\right)^2 - \left(\dfrac{y}{3}\right)^2$

सर्वसमिका III के साथ इसकी तुलना करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$$

$$= \left(\frac{5}{2}x + \frac{y}{3}\right)\left(\frac{5}{2}x - \frac{y}{3}\right)$$

अभी तक हमारी सभी सर्वसमिकाएँ द्विपदों के गुणनफलों से संबंधित रही हैं। आइए अब हम सर्वसमिका I को त्रिपद $x + y + z$ पर लागू करें। हम सर्वसमिका I लागू करके, $(x + y + z)^2$ का अभिकलन करेंगे।

मान लीजिए $x + y = t$ है। तब,

$$(x + y + z)^2 = (t + z)^2$$

$= t^2 + 2tz + t^2$ (सर्वसमिका I लागू करने पर)

$= (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2$ (t का मान प्रतिस्थापित करने पर)

$= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2$ (सर्वसमिका I लागू करने पर)

$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ (पदों को विन्यासित करने पर)

अतः हमें निम्नलिखित सर्वसमिका प्राप्त होती है:

सर्वसमिका V : $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

टिप्पणी : हम दाएँ पक्ष के व्यंजक को बाएँ पक्ष के व्यंजक का प्रसारित रूप मानते हैं। ध्यान दीजिए कि $(x + y + z)^2$ के प्रसार में तीन वर्ग पद और तीन गुणनफल पद हैं।

उदाहरण 14 : $(3a + 4b + 5c)^2$ को प्रसारित रूप में लिखिए।

हल : दिए हुए व्यंजक की $(x + y + z)^2$ के साथ तुलना करने पर, हम यह पाते हैं कि

$$x = 3a,\ y = 4b \text{ और } z = 5c$$

अतः सर्वसमिका V लागू करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$(3a + 4b + 5c)^2 = (3a)^2 + (4b)^2 + (5c)^2 + 2(3a)(4b) + 2(4b)(5c) + 2(5c)(3a)$$
$$= 9a^2 + 16b^2 + 25c^2 + 24ab + 40bc + 30ac$$

उदाहरण 15 : $(4a - 2b - 3c)^2$ का प्रसार कीजिए।

हल : सर्वसमिका V लागू करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$(4a - 2b - 3c)^2 = [4a + (-2b) + (-3c)]^2$$
$$= (4a)^2 + (-2b)^2 + (-3c)^2 + 2(4a)(-2b) + 2(-2b)(-3c) + 2(-3c)(4a)$$
$$= 16a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 16ab + 12bc - 24ac$$

उदाहरण 16 : $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल : यहाँ $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz = (2x)^2 + (-y)^2 + (z)^2 + 2(2x)(-y)$
$+ 2(-y)(z) + 2(2x)(z)$

$= [2x + (-y) + z]^2$ (सर्वसमिका V लागू करने पर)

$= (2x - y + z)^2 = (2x - y + z)\ (2x - y + z)$

अभी तक हमने द्विघात पदों से संबंधित सर्वसमिकाओं का ही अध्ययन किया है। आइए अब हम सर्वसमिका I को $(x + y)^3$ अभिकलित करने में लागू करें। यहाँ,

$$(x + y)^3 = (x + y)\ (x + y)^2$$
$$= (x + y)(x^2 + 2xy + y^2)$$
$$= x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy + y^2)$$
$$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3$$
$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$= x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

अत:, हमें निम्नलिखित सर्वसमिका प्राप्त होती है:

सर्वसमिका VI : $\boldsymbol{(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy\ (x + y)}$

सर्वसमिका VI में y के स्थान पर $-y$ रखने पर, हमें प्राप्त होता है:

सर्वसमिका VII : $\boldsymbol{(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)}$

$$\boldsymbol{= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}$$

उदाहरण 17 : निम्नलिखित घनों को प्रसारित रूप में लिखिए:

(i) $(3a + 4b)^3$ (ii) $(5p - 3q)^3$

हल : (i) $(x + y)^3$ के साथ दिए गए व्यंजक की तुलना करने पर हम, यह पाते हैं कि

$x = 3a$ और $y = 4b$

अतः सर्वसमिका VI का प्रयोग करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned}(3a + 4b)^3 &= (3a)^3 + (4b)^3 + 3(3a)(4b)(3a + 4b)\\ &= 27a^3 + 64b^3 + 108a^2b + 144ab^2\end{aligned}$$

(ii) $(x - y)^3$ के साथ दिए हुए व्यंजक की तुलना करने पर, हम यह पाते हैं कि

$$x = 5p \text{ और } y = 3q$$

सर्वसमिका VII लागू करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned}(5p - 3q)^3 &= (5p)^3 - (3q)^3 - 3(5p)(3q)(5p - 3q)\\ &= 125p^3 - 27q^3 - 225p^2q + 135pq^2\end{aligned}$$

उदाहरण 18 : उपयुक्त सर्वसमिकाएँ प्रयोग करके, निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए:

(i) $(104)^3$ (ii) $(999)^3$

हल : (i) यहाँ

$$\begin{aligned}(104)^3 &= (100 + 4)^3\\ &= (100)^3 + (4)^3 + 3(100)(4)(100 + 4)\end{aligned}$$

(सर्वसमिका VI का प्रयोग करने पर)

$$\begin{aligned}&= 1000000 + 64 + 124800\\ &= 1124864\end{aligned}$$

(ii) यहाँ

$$\begin{aligned}(999)^3 &= (1000 - 1)^3\\ &= (1000)^3 - (1)^3 - 3(1000)(1)(1000 - 1)\end{aligned}$$

(सर्वसमिका VII का प्रयोग करने पर)

$$\begin{aligned}&= 1000000000 - 1 - 2997000\\ &= 997002999\end{aligned}$$

उदाहरण 19 : $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल : दिए हुए व्यंजक को इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$\begin{aligned}&(2x)^3 + (3y)^3 + 3(4x^2)(3y) + 3(2x)(9y^2)\\ &= (2x)^3 + (3y)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2\\ &= (2x + 3y)^3 \quad \text{(सर्वसमिका VI का प्रयोग करने पर)}\\ &= (2x + 3y)\,(2x + 3y)\,(2x + 3y)\end{aligned}$$

अब $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ का प्रसार करने पर, हमें गुणनफल इस रूप में प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned} & x(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + y(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\ & \quad + z(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\ & = x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2y - xyz - zx^2 + x^2y + y^3 + yz^2 - xy^2 - y^2z - xyz \\ & \quad + x^2z + y^2z + z^3 - xyz - yz^2 - xz^2 \\ & = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \qquad \text{(सरल करने पर)} \end{aligned}$$

अत:, हमें निम्नलिखित सर्वसमिका प्राप्त होती है:

सर्वसमिका VIII : $\mathbf{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)}$

उदाहरण 20 : $8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल : यहाँ,

$$\begin{aligned} & 8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz \\ & = (2x)^3 + y^3 + (3z)^3 - 3(2x)(y)(3z) \\ & = (2x + y + 3z)[(2x)^2 + y^2 + (3z)^2 - (2x)(y) - (y)(3z) - (2x)(3z)] \\ & = (2x + y + 3z)(4x^2 + y^2 + 9z^2 - 2xy - 3yz - 6xz) \end{aligned}$$

प्रश्नावली 2.4

1. उपयुक्त सर्वसमिकाओं को प्रयोग करके निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए:

(i) $(x+4)(x+10)$ (ii) $(x+8)(x-10)$ (iii) $(3x+4)(3x-5)$

(iv) $(y^2+\frac{3}{2})(y^2-\frac{3}{2})$ (v) $(3-2x)(3+2x)$

2. सीधे गुणा किए बिना निम्नलिखित गुणनफलों के मान ज्ञात कीजिए:

(i) 103×107 (ii) 95×96 (iii) 104×96

3. उपयुक्त सर्वसमिकाएँ प्रयोग करके निम्नलिखित का गुणनखंडन कीजिए:

(i) $9x^2+6xy+y^2$ (ii) $4y^2-4y+1$ (iii) $x^2-\frac{y^2}{100}$

4. उपयुक्त सर्वसमिकाओं का प्रयोग करके निम्नलिखित में से प्रत्येक का प्रसार कीजिए:

(i) $(x+2y+4z)^2$ (ii) $(2x-y+z)^2$ (iii) $(-2x+3y+2z)^2$

(iv) $(3a-7b-c)^2$ (v) $(-2x+5y-3z)^2$ (vi) $\left[\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b+1\right]^2$

5. गुणनखंडन कीजिए:

(i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

(ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}\,xy + 4\sqrt{2}\,yz - 8xz$

6. निम्नलिखित घनों को प्रसारित रूप में लिखिए:

(i) $(2x+1)^3$ (ii) $(2a-3b)^3$

(iii) $\left[\frac{3}{2}x+1\right]^3$ (iv) $\left[x-\frac{2}{3}y\right]^3$

7. उपयुक्त सर्वसमिकाएँ प्रयोग करके निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए:

(i) $(99)^3$ (ii) $(102)^3$ (iii) $(998)^3$

8. निम्नलिखित में से प्रत्येक का गुणनखंडन कीजिए:

(i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$ (ii) $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

(iii) $27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$ (iv) $64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$

(v) $27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$

9. सत्यापित कीजिए: (i) $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$ (ii) $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

10. निम्नलिखित में से प्रत्येक का गुणनखंडन कीजिए:

(i) $27y^3 + 125z^3$ (ii) $64m^3 - 343n^3$

[**संकेत:** देखिए प्रश्न 9]

11. गुणनखंडन कीजिए: $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$

12. सत्यापित कीजिए: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)\left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right]$

13. यदि $x + y + z = 0$ हो, तो दिखाइए कि $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ है।

14. वास्तव में घनों का परिकलन किए बिना निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए:

(i) $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$ (ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

15. नीचे दिए गए आयतों, जिनमें उनके क्षेत्रफल दिए गए हैं, में से प्रत्येक की लंबाई और चौड़ाई के लिए संभव व्यंजक दीजिए:

क्षेत्रफल : $25a^2 - 35a + 12$	क्षेत्रफल : $35y^2 + 13y - 12$
(i)	(ii)

16. घनाभों (cuboids), जिनके आयतन नीचे दिए गए हैं कि, विमाओं के लिए संभव व्यंजक क्या हैं?

(i)	(ii)
आयतन : $3x^2 - 12x$	आयतन : $12ky^2 + 6ky - 20k$

2.6 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है:

1. एक चर वाला बहुपद $p(x)$ निम्न रूप का x में एक बीजीय व्यंजक है:
$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$,
जहाँ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ अचर हैं और $a_n \neq 0$ है। $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ क्रमशः $x^0, x, x^2, \ldots, x^n$ के गुणांक हैं और n को बहुपद की घात कहा जाता है। प्रत्येक $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \ldots, a_0$, जहाँ $a_n \neq 0$, को बहुपद $p(x)$ का पद कहा जाता है।

2. एक पद वाले बहुपद को एकपदी कहा जाता है।

3. दो पदों वाले बहुपद को द्विपद कहा जाता है।

4. तीन पदों वाले बहुपद को त्रिपद कहा जाता है।

5. एक घात वाले बहुपद को रैखिक बहुपद कहा जाता है।

6. दो घात वाले बहुपद को द्विघाती बहुपद कहा जाता है।

7. तीन घात वाले बहुपद को त्रिघाती बहुपद कहा जाता है।

8. वास्तविक संख्या 'a', बहुपद $p(x)$ का एक शून्यक होती है, यदि $p(a) = 0$ हो।

9. एक चर में प्रत्येक रैखिक बहुपद का एक अद्वितीय शून्यक होता है। एक शून्येतर अचर बहुपद का कोई शून्यक नहीं है और प्रत्येक वास्तविक संख्या शून्य बहुपद का एक शून्यक होती है।

10. यदि $p(a) = 0$ हो, तो $x - a$ बहुपद $p(x)$ का एक गुणनखंड होता है और यदि $x - a, p(x)$ का एक गुणनखंड हो, तो $p(a) = 0$ होता है।

11. $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

12. $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

13. $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$

14. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

अध्याय 3

निर्देशांक ज्यामिति

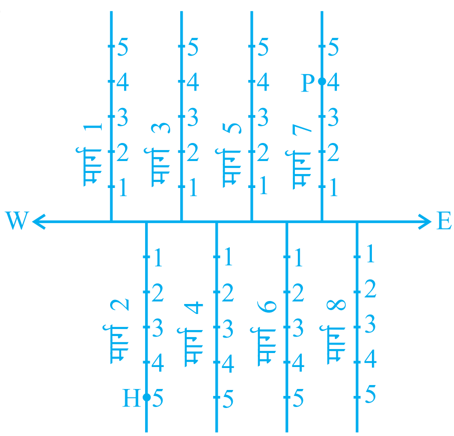
What's the good of Mercator's North Poles and Equators, Tropics, Zones and Meridian Lines? So the Bellman would cry; and crew would reply ' They are merely conventional signs!'

(मरकेटर के उत्तरी ध्रुवों और विषुवत वृत्तों, उष्ण कटिबंधों, मंडलों और यामोत्तर रेखाओं में क्या अच्छाई है? इसलिए बेलमैन ने शोर मचाया होगा और नाविक दल ने उत्तर दिया होगा, ''ये केवल परंपरागत चिह्न हैं''।)

LEWIS CARROLL, *The Hunting of the Snark*

3.1 भूमिका

आप यह पढ़ चुके हैं कि एक संख्या रेखा पर एक बिन्दु का स्थान निर्धारण किस प्रकार किया जाता है। आप यह भी पढ़ चुके हैं कि एक रेखा पर एक बिन्दु की स्थिति की व्याख्या किस प्रकार की जाती है। ऐसी अनेक स्थितियाँ हैं जिनमें एक बिन्दु ज्ञात करने के लिए हमें एक से अधिक रेखाओं के संदर्भ में उसकी स्थिति की व्याख्या करनी होती है। उदाहरण के लिए, निम्नलिखित स्थितियों पर विचार कीजिए:

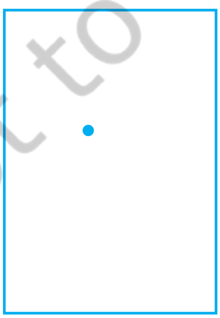


आकृति 3.1

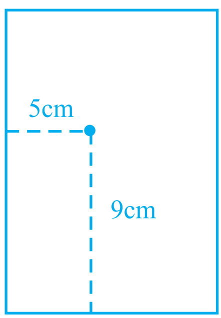
I. आकृति 3.1 में एक मुख्य मार्ग है जो पूर्व से पश्चिम की ओर जाता है और इस पर कुछ सड़कें बनी हैं, इनकी सड़क (मार्ग) संख्याएँ पश्चिम से पूर्व की ओर दी गई हैं।

प्रत्येक सड़क (मार्ग) पर बने मकानों पर संख्याएँ अंकित कर दी गई हैं। आपको यहाँ अपनी सहेली के मकान का पता लगाना है। क्या इसके लिए केवल एक निर्देश-बिन्दु का ज्ञात होना पर्याप्त होगा? उदाहरण के लिए, यदि हमें केवल यह ज्ञात हो कि वह सड़क 2 पर रहती है तो क्या हम उसके घर का पता सरलता से लगा सकते हैं? उतनी सरलता से नहीं जितनी सरलता से तब जबकि हमें दो जानकारियाँ अर्थात् सड़क की वह संख्या जिस पर उसका मकान है और मकान की संख्या ज्ञात होने पर होती है। यदि आप उस मकान पर जाना चाहते हैं जो सड़क 2 पर स्थित है और जिसकी संख्या 5 है, तो सबसे पहले आपको यह पता लगाना होगा कि सड़क 2 कौन-सी है और तब उस मकान का पता लगाना होता है जिसकी संख्या 5 है। आकृति 3.1 में H इसी मकान का स्थान दर्शाता है। इसी प्रकार, P उस मकान को दर्शाता है जो सड़क संख्या 7 पर है और जिसकी संख्या 4 है।

II. मान लीजिए आप एक कागज की शीट पर एक बिन्दु लगा देते हैं [आकृति 3.2 (a)]। यदि हम आपसे कागज़ पर लगे बिन्दु की स्थिति के बारे में पूछें, तो आप इसे कैसे बताएँगे? संभवत: आप इस प्रश्न का उत्तर इस प्रकार दें : "बिन्दु कागज़ के आधे के ऊपरी भाग में स्थित है" या "यह भी कह सकते हैं कि यह बिन्दु कागज़ की बायीं कोर के निकट स्थित है" या "यह बिन्दु कागज़ की बायीं ओर के ऊपरी कोने के काफी निकट स्थित है।" क्या ऊपर दिए गए कथनों में से किसी भी कथन के आधार पर आप बिन्दु की ठीक-ठीक स्थिति बता सकते हैं? स्पष्ट है कि उत्तर "नहीं" है। परन्तु, यदि आप यह कहें कि "बिन्दु कागज़ की बायीं कोर से लगभग 5 cm दूर है, तो इससे आपको बिन्दु की स्थिति का आभास तो हो जाता है फिर भी ठीक-ठाक स्थिति का पता नहीं चलता। थोड़ा बहुत सोच-विचार के बाद आप यह कह सकते हैं कि सबसे नीचे वाली रेखा से बिन्दु 9 cm की दूरी पर है। अब हम बिन्दु की स्थिति ठीक-ठाक बता सकते हैं।



(a)



(b)

आकृति 3.2

इसके लिए हम दो नियत रेखाओं अर्थात् कागज की बायीं कोर और कागज़ की सबसे नीचे वाली रेखा से बिन्दु की स्थिति नियत करते हैं [आकृति 3.2 (b)]। दूसरे शब्दों में, हम यह कह सकते हैं कि बिन्दु की स्थिति ज्ञात करने के लिए दो स्वतंत्र सूचनाओं का होना आवश्यक होता है।

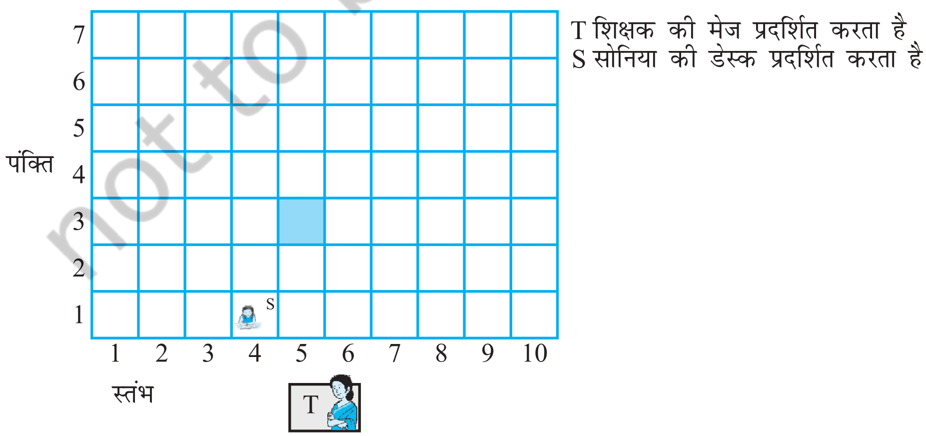
अब आप कक्षा में "बैठने की योजना" नामक निम्नलिखित क्रियाकलाप कीजिए:

क्रियाकलाप 1 (बैठने की योजना) : सभी मेज़ों को एक साथ खींचकर अपनी कक्षा में बैठने की एक योजना बनाइए। प्रत्येक मेज़ को एक वर्ग से निरूपित कीजिए। प्रत्येक वर्ग में उस विद्यार्थी का नाम लिखिए जिस पर वह बैठता है और जिसे वह वर्ग निरूपित करता है। कक्षा में प्रत्येक विद्यार्थी की स्थिति का ठीक–ठीक निर्धारण निम्नलिखित दो सूचनाओं की सहायता से किया जाता है।

(i) वह स्तंभ जिसमें वह बैठता / बैठती है।

(ii) वह पंक्ति जिसमें वह बैठता / बैठती है।

यदि आप उस मेज़ पर बैठते हैं जो 5वें स्तंभ और तीसरी पंक्ति में है, जिसे आकृति 3.3 में छायित वर्ग से दिखाया गया है, तो आपकी स्थिति को (5, 3) के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ पहली संख्या स्तंभ संख्या को प्रकट करती है और दूसरी संख्या पंक्ति संख्या को प्रकट करती है। क्या यह वही है जो कि (3, 5) है? आप अपनी कक्षा के अन्य विद्यार्थियों के नाम और उनके बैठने की स्थितियाँ लिखें। उदाहरण के लिए, यदि सोनिया चौथे स्तंभ और पहली पंक्ति में बैठती है, तो उसके लिए S(4, 1) लिखिए। शिक्षक की मेज़ आपके बैठने की योजना के अंतर्गत नहीं आती है। यहाँ हम शिक्षक को केवल एक प्रेक्षक ही मानते हैं।



आकृति 3.3

ऊपर की चर्चा में आपने यह देखा है कि एक तल पर रखी हुई किसी वस्तु की स्थिति दो लंब रेखाओं की सहायता से निरूपित की जा सकती है। यदि वस्तु एक बिन्दु है, तो हमें सबसे नीचे वाली रेखा से और कागज की बायीं कोर से बिन्दु की दूरी ज्ञात होना आवश्यक होता है। ''बैठने की योजना'' के संबंध में हमें स्तंभ की संख्या और पंक्ति की संख्या का जानना आवश्यक होता है। इस सरल विचारधारा के दूरगामी परिणाम होते हैं और इससे गणित की **निर्देशांक ज्यामिति** (Coordinate Geometry) नामक एक अति महत्वपूर्ण शाखा की व्युत्पत्ति हुई। इस अध्याय में, हमारा लक्ष्य निर्देशांक ज्यामिति की कुछ आधारभूत संकल्पनाओं से आपको परिचित कराना है। इसके बारे में आप विस्तार से अध्ययन उच्च कक्षाओं में करेंगे। प्रारंभ में फ्रांसीसी दार्शनिक और गणितज्ञ **रेने दकार्ते** ने इस अध्ययन को विकसित किया था।

कुछ लोग प्रात:काल में बिस्तर पर लेटे रहना पसंद करते हैं। यही आदत सत्रहवीं शताब्दी के महान फ्रांसीसी गणितज्ञ **रेने दकार्ते** की थी। परन्तु वह आलसी व्यक्ति नहीं था, वह यह समझता था कि बिस्तर पर पड़े-पड़े ही अधिक चिंतन किया जा सकता है। एक दिन जबकि वह अपने बिस्तर पर लेटे-लेटे आराम कर रहा था, उसने एक तल में एक बिन्दु की स्थिति का निर्धारण करने से संबंधित समस्या का हल ढूँढ़ निकाला। जैसाकि आप देखेंगे उसकी विधि अक्षांश और देशांतर की पुरानी विचारधारा की ही एक विकसित रूप थी। एक तल की एक बिन्दु की स्थिति का निर्धारण करने में प्रयुक्त पद्धति को दकार्ते के सम्मान में **कार्तीय पद्धति (Cartesian System)** भी कहा जाता है।

रेने दकार्ते (1596 -1650)

आकृति 3.4

प्रश्नावली 3.1

1. एक अन्य व्यक्ति को आप अपने अध्ययन मेज पर रखे टेबल लैंप की स्थिति किस तरह बताएँगे?

2. **(सड़क योजना) :** एक नगर में दो मुख्य सड़कें हैं, जो नगर के केन्द्र पर मिलती हैं। ये दो सड़कें उत्तर-दक्षिण की दिशा और पूर्व-पश्चिम की दिशा में हैं। नगर की अन्य सभी सड़कें इन मुख्य सड़कों के समांतर परस्पर 200 मीटर की दूरी पर हैं। प्रत्येक दिशा में लगभग पाँच सड़कें हैं। 1 सेंटीमीटर = 200 मीटर का पैमाना लेकर अपनी नोट बुक में नगर का एक मॉडल बनाइए। सड़कों को एकल रेखाओं से निरूपित कीजिए।

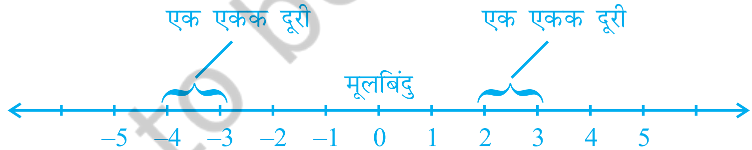
आपके मॉडल में एक-दूसरे को काटती हुई अनेक क्रॉस-स्ट्रीट (चौराहे) हो सकती हैं। एक विशेष क्रॉस-स्ट्रीट दो सड़कों से बनी है, जिनमें से एक उत्तर-दक्षिण दिशा में जाती है और दूसरी पूर्व-पश्चिम की दिशा में। प्रत्येक क्रॉस-स्ट्रीट का निर्देशन इस प्रकार किया जाता है: यदि दूसरी सड़क उत्तर-दक्षिण दिशा में जाती है और पाँचवीं सड़क पूर्व-पश्चिम दिशा में जाती है और ये एक क्रॉसिंग पर मिलती हैं, तब इसे हम क्रॉस-स्ट्रीट (2, 5) कहेंगे। इसी परंपरा से यह ज्ञात कीजिए कि

(i) कितनी क्रॉस-स्ट्रीटों को (4, 3) माना जा सकता है।

(ii) कितनी क्रॉस-स्ट्रीटों को (3, 4) माना जा सकता है।

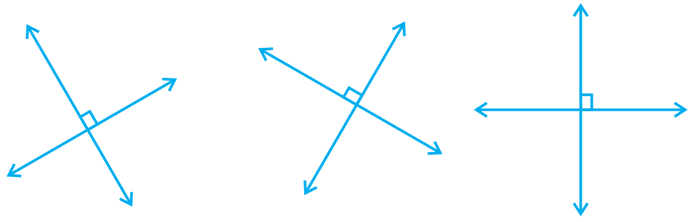
3.2 कार्तीय पद्धति

'संख्या पद्धति' के अध्याय में आप **संख्या रेखा** के बारे में पढ़ चुके हैं। संख्या रेखा पर एक नियत बिन्दु से दूरियों को बराबर एककों में एक दिशा में धनात्मक और दूसरी दिशा में ऋणात्मक अंकित किया जाता है। उस बिन्दु को, जहाँ से दूरियाँ अंकित की जाती हैं, **मूल-बिन्दु (origin)** कहा जाता है। एक रेखा पर समान दूरियों पर बिन्दुओं को अंकित करके, हम संख्या रेखा का प्रयोग संख्याओं को निरूपित करने के लिए करते हैं। यदि एक एकक दूरी संख्या '1' को निरूपित करती हो, तो 3 एकक दूरी संख्या '3' को निरूपित करेगी, जहाँ 'O' मूलबिन्दु है। मूलबिन्दु से धनात्मक दिशा में दूरी r पर स्थित बिन्दु संख्या r को निरूपित करती है। मूलबिन्दु से ऋणात्मक दिशा में दूरी r पर स्थित बिन्दु संख्या r को निरूपित करती है। संख्या रेखा पर विभिन्न संख्याओं के स्थान आकृति 3.5 में दिखाए गए हैं।



आकृति 3.5

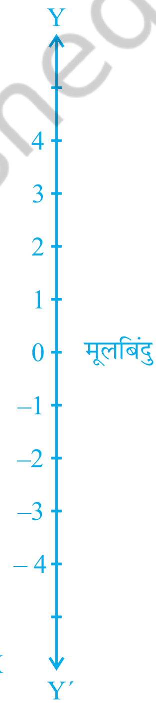
दकार्ते ने एक तल पर एक दूसरे पर लंब दो रेखाओं को खींचने और इन रेखाओं के सापेक्ष तल पर बिन्दुओं का स्थान निर्धारण करने का विचार प्रस्तुत किया। लंब रेखाएँ किसी भी दिशा में हो सकती हैं, जैसा कि आकृति 3.6 में दिखाया गया है। लेकिन जब हम इस *अध्याय में* एक तल में स्थित एक बिन्दु का स्थान निर्धारण करने के लिए दो रेखाएँ लेंगे, तो एक रेखा क्षैतिज होगी और दूसरी रेखा ऊर्ध्वाधर, जैसा कि आकृति 3.6 (c) में दिखाया गया है।



(a) (b) (c)

आकृति 3.6

वास्तव में ये रेखाएँ इस प्रकार प्राप्त की जाती हैं : दो संख्या रेखाएँ लीजिए और उन्हें X′X और Y′Y का नाम दे दीजिए। X′X को क्षैतिज रखिए [जैसा कि आकृति 3.7(a) में दिखाया गया है] और इस पर ठीक उसी प्रकार संख्याएँ लिखिए जैसा कि संख्या रेखा पर लिखी जाती हैं। ये ही सभी क्रियाएँ आप Y′Y के साथ कीजिए। अंतर केवल यही है कि Y′Y क्षैतिज नहीं है, अपितु ऊर्ध्वाधर है [देखिए आकृति 3.7 (b)]।



(b)

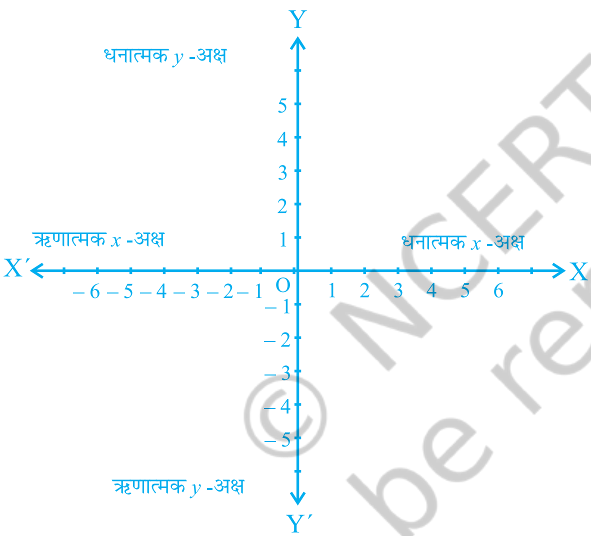
(a)

आकृति 3.7

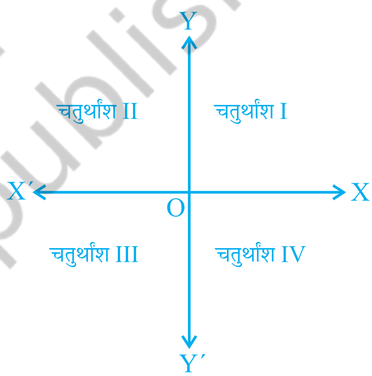
दोनों रेखाओं का संयोजन इस प्रकार कीजिए कि ये दो रेखाएँ एक-दूसरे को मूलबिन्दु पर काटती हों (आकृति 3.8)। क्षैतिज रेखा X′X को x - अक्ष कहा जाता है और ऊर्ध्वाधर रेखा Y′Y को y - अक्ष कहा जाता है। वह बिन्दु, जहाँ X′X और Y′Y एक-दूसरे को काटती हैं, उसे **मूलबिन्दु (origin)** कहा जाता है और इसे O से प्रकट किया जाता है। क्योंकि धनात्मक संख्याएँ OX और OY की दिशाओं में स्थित हैं, इसलिए OX और OY को क्रमशः

x-अक्ष और y-अक्ष की धनात्मक दिशाएँ कहा जाता है। इसी प्रकार, OX′ और OY′ को x-अक्ष और y-अक्ष की क्रमशः ऋणात्मक दिशाएँ कहा जाता है।

यहाँ आप यह देखते हैं कि ये दोनों अक्ष तल को चार भागों में विभाजित करती हैं। इन चार भागों को **चतुर्थांश (quadrants)** (एक–चौथाई) कहा जाता है। OX से वामावर्त दिशा में इन्हें I, II, III और IV चतुर्थांश कहा जाता है (देखिए आकृति 3.9)। इस प्रकार, इस तल में दोनों अक्ष और चारों चतुर्थांश सम्मिलित हैं। हम इस तल को *कार्तीय तल* (*Cartesian plane*) या *निर्देशांक तल* (*Coordinate plane*) या *xy-तल* (*xy-plane*) कहते हैं। अक्षों को *निर्देशांक अक्ष* (*coordinate axes*) कहा जाता है।

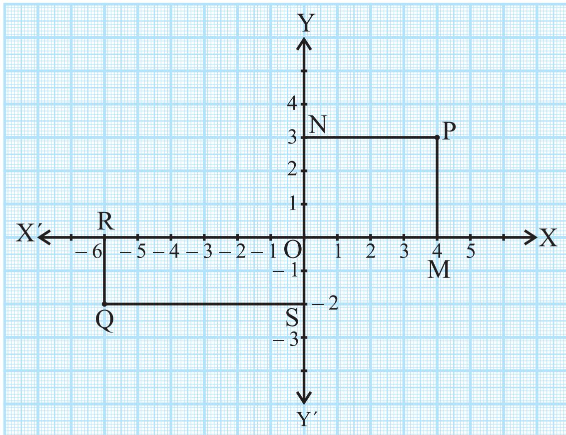


आकृति 3.8



आकृति 3.9

आइए अब हम यह देखें कि गणित में इस पद्धति का इतना महत्व क्यों है और यह किस प्रकार उपयोगी होती है। आगे दिया गया आरेख लीजिए, जहाँ अक्षों को आलेख कागज (graph paper) पर खींचा गया है। आइए हम अक्षों से बिन्दुओं P और Q की दूरियाँ ज्ञात करें। इसके लिए x-अक्ष पर लंब PM और y-अक्ष पर लंब PN डालिए। इसी प्रकार, हम लंब QR और QS डालते हैं, जैसा कि आकृति 3.10 में दिखाया गया है।



आकृति 3.10

आप पाते हैं कि

(i) y-अक्ष से बिन्दु P की लांबिक दूरी, जिसे x-अक्ष की धनात्मक दिशा में मापा गया है, PN = OM = 4 एकक है।

(ii) x-अक्ष से बिन्दु P की लांबिक दूरी, जिसे y-अक्ष की धनात्मक दिशा में मापा गया है, PM = ON = 3 एकक है।

(iii) y-अक्ष से बिन्दु Q की लांबिक दूरी, जिसे x-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में मापा गया है, OR = SQ = 6 एकक है।

(iv) x-अक्ष से बिन्दु Q की लांबिक दूरी, जिसे y-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में मापा गया है, OS = RQ = 2 एकक है।

इन दूरियों की सहायता से हम बिन्दुओं का निर्धारण किस प्रकार करें कि कोई भ्रम न रह जाए?

हम निम्नलिखित परंपराओं को ध्यान में रखकर एक बिन्दु के निर्देशांक लिखते हैं:

(i) एक बिन्दु का x - निर्देशांक (x-coordinate), y-अक्ष से इस बिन्दु की लांबिक दूरी है, जिसे x -अक्ष पर मापा जाता है (जो कि x-अक्ष की धनात्मक दिशा में धनात्मक और x-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में ऋणात्मक होती है)। बिन्दु P के लिए यह + 4 है और Q के लिए यह – 6 है। x - निर्देशांक को **भुज** (**abscissa**) भी कहा जाता है।

(ii) एक बिन्दु का y-निर्देशांक, x-अक्ष से उसकी लांबिक दूरी होती है जिसे y-अक्ष पर मापा जाता है (जो y-अक्ष की धनात्मक दिशा में धनात्मक और y-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में ऋणात्मक होती है)। बिन्दु P के लिए यह + 3 है और Q के लिए –2 है। y-निर्देशांक को **कोटि (ordinate)** भी कहा जाता है।

(iii) निर्देशांक तल में एक बिन्दु के निर्देशांक लिखते समय पहले x-निर्देशांक लिखते हैं और उसके बाद y-निर्देशांक लिखते हैं। हम निर्देशांकों को कोष्ठक के अंदर लिखते हैं।

अत: P के निर्देशांक (4, 3) हैं और Q के निर्देशांक (– 6, – 2) हैं।

ध्यान दीजिए कि तल में एक बिन्दु के निर्देशांक अद्वितीय होते हैं। इसके अनुसार निर्देशांक (3, 4) और निर्देशांक (4, 3) समान नहीं हैं।

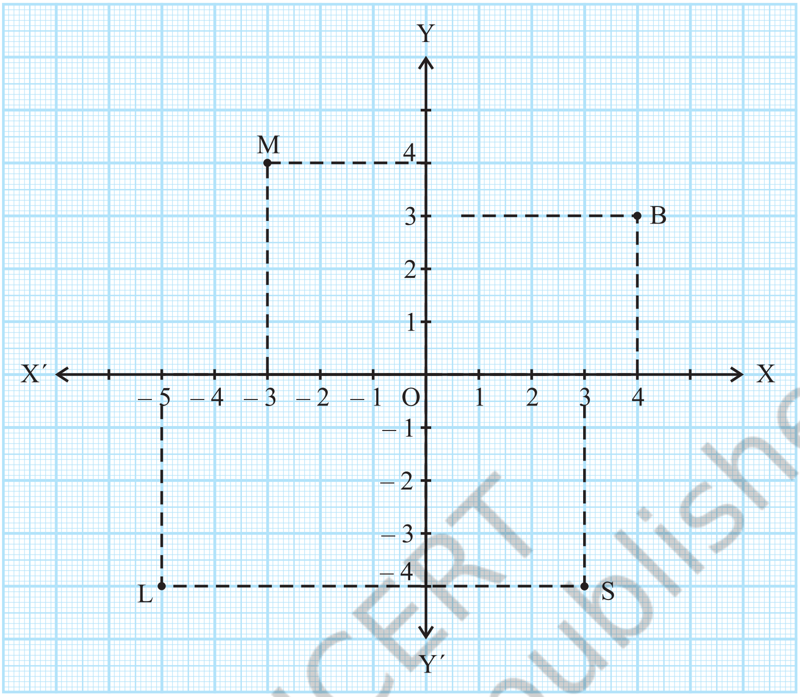
उदाहरण 1 : आकृति 3.11 को देखकर निम्नलिखित कथनों को पूरा कीजिए:

(i) बिन्दु B का भुज और कोटि क्रमश: _ _ _ _ और _ _ _ _ हैं। अत: B के निर्देशांक (_ _ _, _ _ _) हैं।

(ii) बिन्दु M के x-निर्देशांक और y-निर्देशांक क्रमश: _ _ _ और _ _ _ हैं। अत: M के निर्देशांक (_ _, _ _) हैं।

(iii) बिन्दु L के x-निर्देशांक और y-निर्देशांक क्रमश: _ _ _ और _ _ _ हैं। अत: L के निर्देशांक (_ _, _ _) हैं।

(iv) बिन्दु S के x-निर्देशांक और y-निर्देशांक क्रमश: _ _ _ और _ _ _ हैं। अत: S के निर्देशांक (_ _, _ _) हैं।



आकृति 3.11

हल : (i) क्योंकि y-अक्ष से बिन्दु B की दूरी 4 एकक है, इसलिए बिन्दु B का x-निर्देशांक या भुज 4 होगा। x-अक्ष से बिन्दु B की दूरी 3 एकक है, इसलिए बिन्दु B का y-निर्देशांक अर्थात् कोटि 3 होगी। अत: बिन्दु B के निर्देशांक (4, 3) हैं।

ऊपर (i) की भांति:

(ii) बिन्दु M के x-निर्देशांक और y-निर्देशांक क्रमश: –3 और 4 हैं। अत: बिन्दु M के निर्देशांक (–3, 4) हैं।

(iii) बिन्दु L के x-निर्देशांक और y - निर्देशांक क्रमश: –5 और – 4 हैं। अत: बिन्दु L के निर्देशांक (–5, – 4) हैं।

(iv) बिन्दु S के x-निर्देशांक और y- निर्देशांक क्रमश: 3 और – 4 है। अत: बिन्दु S के निर्देशांक (3, – 4) हैं।

उदाहरण 2 : आकृति 3.12 में अक्षों पर अंकित बिन्दुओं के निर्देशांक लिखिए:

हल : आप यहाँ देख सकते हैं कि :

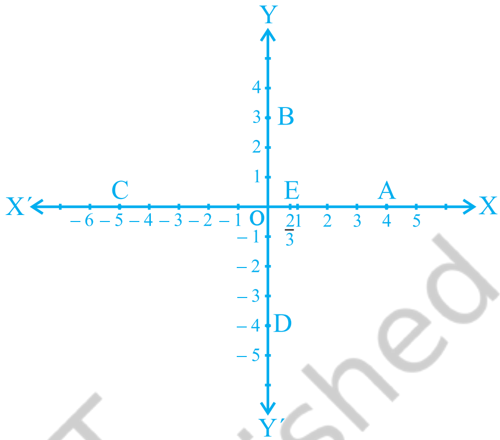
(i) बिन्दु A, y-अक्ष से + 4 एकक की दूरी पर है और x-अक्ष से दूरी 0 पर है। अत: बिन्दु A का x-निर्देशांक 4 है और y-निर्देशांक 0 है। इसलिए A के निर्देशांक (4, 0) हैं।

(ii) B के निर्देशांक (0, 3) हैं। क्यों?

(iii) C के निर्देशांक (– 5, 0) हैं। क्यों?

(iv) D के निर्देशांक (0, – 4) हैं। क्यों?

(v) E के निर्देशांक $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ हैं। क्यों?



आकृति 3.12

क्योंकि x-अक्ष का प्रत्येक बिन्दु x-अक्ष से शून्य दूरी पर है, इसलिए x-अक्ष पर स्थित प्रत्येक बिन्दु का y-निर्देशांक सदा ही शून्य होगा। इस तरह, x-अक्ष पर स्थित किसी भी बिन्दु के निर्देशांक $(x, 0)$ के रूप के होंगे, जहाँ y-अक्ष से बिन्दु की दूरी x है। इसी प्रकार, y-अक्ष पर स्थित किसी भी बिन्दु के निर्देशांक $(0, y)$ के रूप के होंगे, जहाँ x-अक्ष से बिन्दु की दूरी y है। क्यों?

मूलबिन्दु O के निर्देशांक क्या हैं? क्योंकि दोनों अक्षों से इसकी दूरी शून्य है, इसलिए इसके भुज और कोटि दोनों ही शून्य होंगे। अत: मूलबिन्दु के निर्देशांक **(0, 0)** होते हैं।

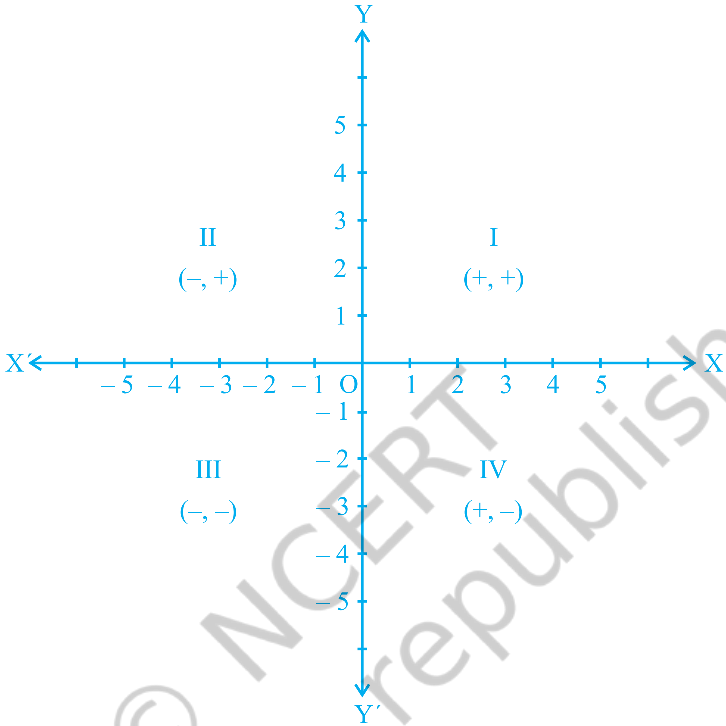
ऊपर के उदाहरणों में, आपने एक बिन्दु के निर्देशांकों में लगे चिह्नों और उस बिन्दु के चतुर्थांश, जिसमें वह स्थित है, के बीच के निम्नलिखित संबंधों की ओर अवश्य ध्यान दिया होगा:

(i) यदि बिन्दु पहले चतुर्थांश में है, तो बिन्दु (+, +) के रूप का होगा, क्योंकि पहला चतुर्थांश धनात्मक x-अक्ष और धनात्मक y-अक्ष से परिबद्ध है।

(ii) यदि बिन्दु दूसरे चतुर्थांश में है, तो बिन्दु (–, +) के रूप का होगा, क्योंकि दूसरा चतुर्थांश ऋणात्मक x-अक्ष और धनात्मक y-अक्ष से परिबद्ध है।

(iii) यदि बिन्दु तीसरे चतुर्थांश में है, तो बिन्दु (–, –) के रूप में होगा, क्योंकि तीसरा चतुर्थांश ऋणात्मक x-अक्ष और ऋणात्मक y-अक्ष से परिबद्ध है।

(iv) यदि बिन्दु चौथे चतुर्थांश में है, तो बिन्दु (+, –) के रूप में होगा, क्योंकि चौथा चतुर्थांश धनात्मक x-अक्ष और ऋणात्मक y-अक्ष से परिबद्ध है (देखिए आकृति 3.13)।



आकृति 3.13

टिप्पणी : एक तल में स्थित एक बिन्दु की व्याख्या करने के संबंध में ऊपर हमने जिस पद्धति के बारे में चर्चा की है, वह केवल एक परंपरा है जिसको पूरे विश्व में स्वीकार किया जाता है। उदाहरण के लिए, पद्धति में ऐसा भी हो सकता है कि पहले कोटि लिखी जाए और उसके बाद भुज लिखा जाए। फिर भी, जिस पद्धति का उल्लेख हमने किया है उसे पूरा विश्व बिना किसी भ्रम के स्वीकार करता है।

प्रश्नावली 3.2

1. निम्नलिखित प्रश्नों में से प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दीजिए:

   (i) कार्तीय तल में किसी बिन्दु की स्थिति निर्धारित करने वाली क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर रेखाओं के क्या नाम हैं?

(ii) इन दो रेखाओं से बने तल के प्रत्येक भाग के नाम बताइए।

(iii) उस बिन्दु का नाम बताइए जहाँ ये दो रेखाएँ प्रतिच्छेदित होती हैं।

2. आकृति 3.14 देखकर निम्नलिखित को लिखिए:

(i) B के निर्देशांक

(ii) C के निर्देशांक

(iii) निर्देशांक (–3, –5) द्वारा पहचाना गया बिन्दु

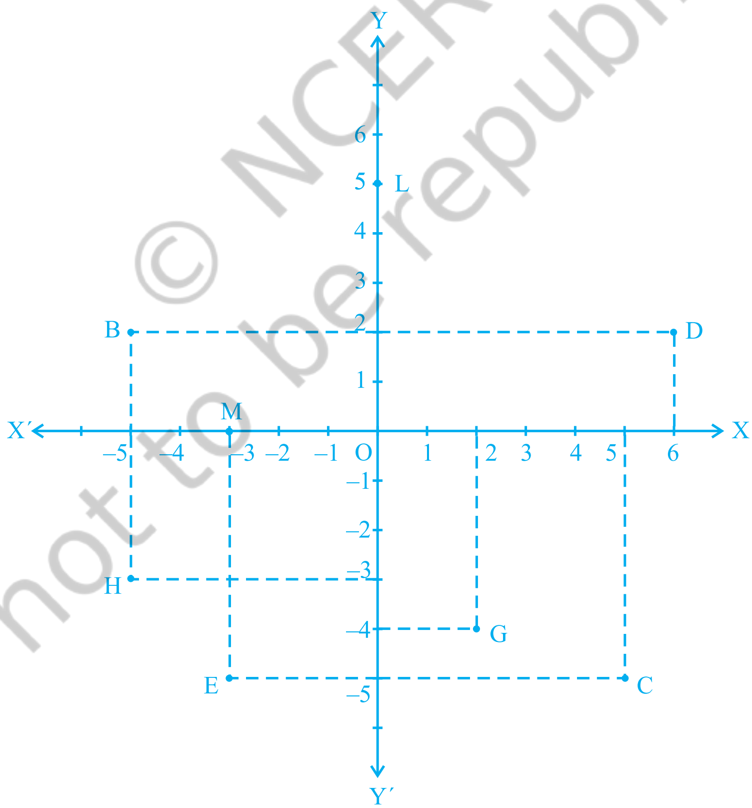
(iv) निर्देशांक (2, – 4) द्वारा पहचाना गया बिन्दु

(v) D का भुज

(vi) बिन्दु H की कोटि

(vii) बिन्दु L के निर्देशांक

(viii) बिन्दु M के निर्देशांक



आकृति 3.14

3.3 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिन्दुओं का अध्ययन किया है:

1. एक तल में एक वस्तु या एक बिन्दु का स्थान निर्धारण करने के लिए दो लांबिक रेखाओं की आवश्यकता होती है जिसमें एक क्षैतिज होती है और दूसरी ऊर्ध्वाधर होती है।
2. तल को कार्तीय या निर्देशांक तल कहा जाता है और रेखाओं को निर्देशांक अक्ष कहा जाता है।
3. क्षैतिज रेखा को x-अक्ष और ऊर्ध्वाधर रेखा को y-अक्ष कहा जाता है।
4. निर्देशांक अक्ष तल को चार भागों में बाँट देते हैं, जिन्हें चतुर्थांश कहा जाता है।
5. अक्षों के प्रतिच्छेद बिन्दु को मूलबिन्दु कहा जाता है।
6. y-अक्ष से किसी बिन्दु की दूरी को उसका x-निर्देशांक या भुज कहा जाता है। साथ ही, x-अक्ष से बिन्दु की दूरी को y-निर्देशांक या कोटि कहा जाता है।
7. यदि एक बिन्दु का भुज x हो और कोटि y हो, तो (x, y) को बिन्दु के निर्देशांक कहा जाता है।
8. x-अक्ष पर एक बिन्दु के निर्देशांक $(x, 0)$ के रूप के होते हैं और y-अक्ष पर बिन्दु के निर्देशांक $(0, y)$ के रूप के होते हैं।
9. मूलबिन्दु के निर्देशांक $(0, 0)$ होते हैं।
10. एक बिन्दु के निर्देशांक पहले चतुर्थांश में $(+, +)$ के रूप के दूसरे चतुर्थांश में $(-, +)$ के रूप के, तीसरे चतुर्थांश में $(-, -)$ के रूप के और चौथे चतुर्थांश में $(+, -)$ के रूप के होते हैं, जहाँ $+$ एक धनात्मक वास्तविक संख्या को और $-$ एक ऋणात्मक वास्तविक संख्या को प्रकट करते हैं।
11. यदि $x \neq y$ हो, तो $(x, y) \neq (y, x)$ होगा और यदि $x = y$ हो, तो $(x, y) = (y, x)$ होगा।

0963CH04

अध्याय 4

दो चरों वाले रैखिक समीकरण

The principal use of the Analytic Art is to bring Mathematical Problems to Equations and to exhibit those Equations in the most simple terms that can be.

(वैश्लेषिक कला का मुख्य प्रयोग गणितीय समस्याओं को समीकरण में लाना है और इन समीकरणों को यथासंभव सरल पदों में प्रस्तुत करना है)।

—***Edmund Halley***

4.1 भूमिका

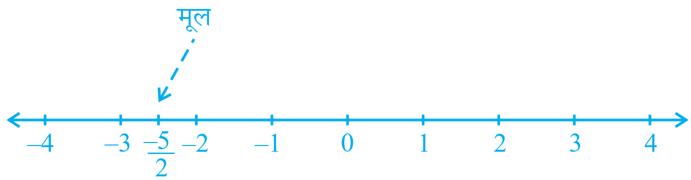
पिछली कक्षाओं में, आप एक चर वाले रैखिक समीकरणों का अध्ययन कर चुके हैं। क्या आप एक चर वाला कोई रैखिक समीकरण लिख सकते हैं? आप कह सकते हैं कि $x + 1 = 0, x + \sqrt{2} = 0$ और $\sqrt{2}y + \sqrt{3} = 0$ एक चर वाले रैखिक समीकरणों के उदाहरण हैं। आप यह भी जानते हैं कि ऐसे समीकरणों का एक अद्वितीय (अर्थात् एक और केवल एक) हल होता है। आपको संभवत: यह भी याद होगा कि एक संख्या रेखा पर हल को किस प्रकार निरूपित किया जाता है। इस अध्याय में, हम एक चर वाले रैखिक समीकरणों पर पुन: विचार करेंगे और उनसे संबंधित ज्ञान को दो चरों वाले रैखिक समीकरणों पर लागू करेंगे। यहाँ हम इस प्रकार के प्रश्नों पर विचार करेंगे: क्या दो चरों वाले रैखिक समीकरण का एक हल होता है? यदि हाँ, तो क्या यह अद्वितीय होता है? कार्तीय तल पर हल किस प्रकार दिखाई पड़ता है? इस प्रकार के प्रश्नों का अध्ययन करने के लिए, हम अध्याय 3 में बताई गई संकल्पनाओं का भी प्रयोग करेंगे।

4.2 रैखिक समीकरण

आइए पहले हम यह देखें कि अभी तक आपने क्या-क्या अध्ययन किया है। आइए हम निम्नलिखित समीकरण लें :

$$2x + 5 = 0$$

इसका हल, अर्थात् समीकरण का मूल $-\frac{5}{2}$ है। इसे संख्या रेखा पर इस प्रकार निरूपित किया जा सकता है, जैसा कि नीचे की आकृति में दिखाया गया है :



आकृति 4.1

एक समीकरण को हल करते समय निम्नलिखित बातों को ध्यान में रखना होता है।

एक रैखिक समीकरण पर तब कोई प्रभाव नहीं पड़ता जबकि:

(i) समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ी या घटाई जाती है।

(ii) समीकरण के दोनों पक्षों को समान शून्येतर संख्या से गुणा या भाग दिया जाता है।

आइए अब हम निम्नलिखित स्थिति पर विचार करें:

नागपुर में भारत और श्रीलंका के बीच खेले गए एक एकदिवसीय अंतर्राष्ट्रीय क्रिकेट मैच में दो भारतीय बल्लेबाजों ने एक साथ मिलकर 176 रन बनाए। इस जानकारी को एक समीकरण के रूप में व्यक्त कीजिए।

यहाँ आप यह देख सकते हैं कि दोनों बल्लेबाजों में से किसी भी बल्लेबाज द्वारा बनाए गए रन ज्ञात नहीं हैं, अर्थात् यहाँ दो अज्ञात राशियाँ हैं। आइए हम इन अज्ञात राशियों को x और y से प्रकट करें। इस तरह एक बल्लेबाज द्वारा बनाए गए रनों की संख्या x है और दूसरे बल्लेबाज द्वारा बनाए गए रनों की संख्या y है। हम जानते हैं कि

$$x + y = 176$$

है, जो कि अभीष्ट समीकरण है।

यह दो चरों वाले एक रैखिक समीकरण का एक उदाहरण है। यह परंपरा रही है कि इस प्रकार के समीकरणों के चरों को x और y से प्रकट किया जाता है, परंतु अन्य अक्षरों का भी प्रयोग किया जा सकता है। दो चरों वाले रैखिक समीकरणों के कुछ उदाहरण ये हैं:

$$1.2s + 3t = 5,\ p + 4q = 7,\ \pi u + 5v = 9 \text{ और } 3 = \sqrt{2}\,x - 7y$$

क्या आप कुछ और उदाहरण दे सकते हैं? ध्यान दीजिए कि आप इन समीकरणों को क्रमशः $1.2s + 3t - 5 = 0$, $p + 4q - 7 = 0$, $\pi u + 5v - 9 = 0$ और $\sqrt{2}\,x - 7y - 3 = 0$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

अतः उस समीकरण को, जिसे $ax + by + c = 0$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता हो, जहाँ a, b और c वास्तविक संख्याएँ हैं और a और b दोनों शून्य नहीं हैं, *दो चरों वाला रैखिक समीकरण* (*linear equation in two variables*) कहा जाता है।

उदाहरण 1 : नीचे दिए गए समीकरणों को $ax + by + c = 0$ के रूप में लिखिए और प्रत्येक स्थिति में a, b और c के मान बताइए :

(i) $2x + 3y = 4.37$ (ii) $x - 4 = \sqrt{3}\,y$ (iii) $4 = 5x - 3y$ (iv) $2x = y$

हल : (i) $2x + 3y = 4.37$ को $2x + 3y - 4.37 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है। यहाँ $a = 2$, $b = 3$ और $c = -4.37$ है।

(ii) समीकरण $x - 4 = \sqrt{3}\,y$ को $x - \sqrt{3}\,y - 4 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है। यहाँ $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$ और $c = -4$ है।

(iii) समीकरण $4 = 5x - 3y$ को $5x - 3y - 4 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है। यहाँ $a = 5$, $b = -3$ और $c = -4$ है। क्या आप इस बात से सहमत हैं कि इसे $-5x + 3y + 4 = 0$ के रूप में भी लिखा जा सकता है? इस स्थिति में, $a = -5$, $b = 3$ और $c = 4$ है।

(iv) समीकरण $2x = y$ को $2x - y + 0 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है। यहाँ $a = 2$, $b = -1$ और $c = 0$ है।

समीकरण $ax + b = 0$ भी दो चरों वाले रैखिक समीकरणों का ही एक उदाहरण है, क्योंकि इसे $ax + 0.y + b = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है।

उदाहरण के लिए, $4 - 3x = 0$ को $-3x + 0.y + 4 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है।

उदाहरण 2 : निम्नलिखित में से प्रत्येक को दो चरों वाले समीकरणों के रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) $x = -5$ (ii) $y = 2$ (iii) $2x = 3$ (iv) $5y = 2$

हल : (i) $x = -5$ को $1.x + 0.y = -5$, या $1.x + 0.y + 5 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है।

(ii) $y = 2$ को $0.x + 1.y = 2$, या $0.x + 1.y - 2 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है।

(iii) $2x = 3$ को $2.x + 0.y - 3 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है।

(iv) $5y = 2$ को $0.x + 5.y - 2 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है।

प्रश्नावली 4.1

1. एक नोटबुक की कीमत एक कलम की कीमत से दो गुनी है। इस कथन को निरूपित करने के लिए दो चरों वाला एक रैखिक समीकरण लिखिए।

   (संकेत : मान लीजिए, नोटबुक की कीमत x रु है और कलम की कीमत y रु है)।

2. निम्नलिखित रैखिक समीकरणों को $ax + by + c = 0$ के रूप में व्यक्त कीजिए और प्रत्येक स्थिति में a, b और c के मान बताइए:

   (i) $2x + 3y = 9.3\overline{5}$ (ii) $x - \frac{y}{5} - 10 = 0$ (iii) $-2x + 3y = 6$ (iv) $x = 3y$

   (v) $2x = -5y$ (vi) $3x + 2 = 0$ (vii) $y - 2 = 0$ (viii) $5 = 2x$

4.3 रैखिक समीकरण का हल

आपने देखा है कि एक चर वाले प्रत्येक रैखिक समीकरण का एक अद्वितीय हल होता है। दो चरों वाले रैखिक समीकरण के हल के बारे में आप क्या कह सकते हैं? क्योंकि समीकरण में दो चर हैं, इसलिए हल का अर्थ होता है x तथा y के उन मानों का युग्म जो दिए हुए समीकरण को संतुष्ट करते हैं। आइए, हम समीकरण $2x + 3y = 12$ लें। यहाँ $x = 3$ और $y = 2$ एक हल है, क्योंकि जब हम ऊपर के समीकरण में $x = 3$ और $y = 2$ प्रतिस्थापित करते हैं तब हमें यह प्राप्त होता है:

$$2x + 3y = (2 \times 3) + (3 \times 2) = 12$$

इस हल को एक क्रमित युग्म $(3, 2)$ के रूप में लिखा जाता है, जिसमें पहले x का और उसके बाद y का मान लिखा जाता है। इसी प्रकार, $(0, 4)$ भी ऊपर दिए गए समीकरण का एक हल है।

इसके विपरीत, $(1, 4)$ ऊपर दिए गए समीकरण का एक हल नहीं है, क्योंकि $x = 1$ और $y = 4$ प्रतिस्थापित करने पर हमें $2x + 3y = 14$ प्राप्त होता है जो 12 नहीं है। ध्यान दीजिए कि $(0, 4)$ तो एक हल है परंतु $(4, 0)$ एक हल नहीं है। इस तरह आपने $2x + 3y = 12$ के कम से कम दो हल $(3, 2)$ और $(0, 4)$ प्राप्त कर लिए हैं।

क्या आप कोई अन्य हल प्राप्त कर सकते हैं? क्या आप इस बात से सहमत हैं कि $(6, 0)$ एक अन्य हल है? यदि हाँ, तो आप इसे सत्यापित कीजिए। वस्तुत: निम्न विधि से हम कई हल प्राप्त कर सकते हैं:

आप $2x + 3y = 12$ में अपनी इच्छानुसार x का एक मान (मान लीजिए $x = 2$) ले सकते हैं। तब समीकरण $4 + 3y = 12$ हो जाता है, जो कि एक चर वाला रैखिक समीकरण

है। इसे हल करने पर हमें $y = \frac{8}{3}$ प्राप्त होता है। अतः $\left(2, \frac{8}{3}\right)$, $2x + 3y = 12$ का एक अन्य हल है। इसी प्रकार, $x = -5$ लेने पर हम पाते हैं कि समीकरण $-10 + 3y = 12$ हो जाता है। इससे $y = \frac{22}{3}$ प्राप्त होता है। अतः $\left(-5, \frac{22}{3}\right)$, $2x + 3y = 12$ का एक अन्य हल है। इसलिए दो चरों वाले रैखिक समीकरण के विभिन्न हलों का कोई अंत नहीं है। कहने का अर्थ है कि *दो चरों वाले रैखिक समीकरण के अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं।*

उदाहरण 3 : समीकरण $x + 2y = 6$ के चार अलग-अलग हल ज्ञात कीजिए।

हल : देखने पर $x = 2, y = 2$ एक हल है, क्योंकि $x = 2, y = 2$ पर

$$x + 2y = 2 + 4 = 6$$

है। आइए, अब हम $x = 0$ लें। x के इस मान पर दिया हुआ समीकरण $2y = 6$ हो जाता है, जिसका कि एक अद्वितीय हल $y = 3$ होता है। अतः $x = 0, y = 3$ भी $x + 2y = 6$ का एक हल है। इसी प्रकार, $y = 0$ लेने पर दिया हुआ समीकरण $x = 6$ हो जाता है। अतः $x = 6, y = 0$ भी $x + 2y = 6$ का एक हल है। अंत में, आइए हम $y = 1$ लें। अब दिया हुआ समीकरण $x + 2 = 6$ हो जाता है, जिसका हल $x = 4$ है। इसलिए, $(4, 1)$ भी दिए हुए समीकरण का एक हल है। अतः, दिए हुए समीकरण के अपरिमित रूप से अनेक हलों में चार हल ये हैं:

$$(2, 2), (0, 3), (6, 0) \text{ और } (4, 1)$$

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि एक हल प्राप्त करने की सरल विधि $x = 0$ लेना है और y का संगत मान प्राप्त करना है। इसी प्रकार, हम $y = 0$ ले सकते हैं और तब x का संगत मान प्राप्त कर लेते हैं।

उदाहरण 4 : निम्नलिखित समीकरणों में से प्रत्येक समीकरण के दो हल ज्ञात कीजिए:

(i) $4x + 3y = 12$

(ii) $2x + 5y = 0$

(iii) $3y + 4 = 0$

हल : (i) $x = 0$ लेने पर, हमें $3y = 12$, अर्थात् $y = 4$ प्राप्त होता है। अतः $(0, 4)$ भी दिए हुए समीकरण का एक हल है। इसी प्रकार, $y = 0$ लेने पर हमें $x = 3$ प्राप्त होता है। इस तरह, $(3, 0)$ भी एक हल है।

(ii) $x = 0$ लेने पर, हमें $5y = 0$, अर्थात् $y = 0$ प्राप्त होता है। इसलिए $(0, 0)$ दिए हुए समीकरण का एक हल है।

अब, यदि हम $y = 0$ लें, तो हमें एक हल के रूप में पुनः $(0, 0)$ प्राप्त होता है; जो कि वही है जिसे हमने पहले प्राप्त किया था। एक अन्य हल प्राप्त करने के लिए $x = 1$ लीजिए। तब आप देख सकते हैं कि y का संगत मान $-\frac{2}{5}$ है। अतः $\left(1, -\frac{2}{5}\right)$, $2x + 5y = 0$ का एक अन्य हल है।

(iii) समीकरण $3y + 4 = 0$ को $0.x + 3y + 4 = 0$ के रूप में लिखने पर, x के किसी भी मान पर हमें $y = -\frac{4}{3}$ प्राप्त होगा। अतः हमें दो हल $0, -\frac{4}{3}$ और $1, -\frac{4}{3}$ प्राप्त हो सकते हैं।

प्रश्नावली 4.2

1. निम्नलिखित विकल्पों में कौन-सा विकल्प सत्य है, और क्यों?

   $y = 3x + 5$ का

   (i) एक अद्वितीय हल है (ii) केवल दो हल हैं (iii) अपरिमित रूप से अनेक हल हैं

2. निम्नलिखित समीकरणों में से प्रत्येक समीकरण के चार हल लिखिए:

   (i) $2x + y = 7$ (ii) $\pi x + y = 9$ (iii) $x = 4y$

3. बताइए कि निम्नलिखित हलों में कौन-कौन समीकरण $x - 2y = 4$ के हल हैं और कौन-कौन हल नहीं हैं :

   (i) $(0, 2)$ (ii) $(2, 0)$ (iii) $(4, 0)$ (iv) $\left(\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right)$ (v) $(1, 1)$

4. k का मान ज्ञात कीजिए जबकि $x = 2, y = 1$ समीकरण $2x + 3y = k$ का एक हल हो।

4.4 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है:

1. $ax + by + c = 0$ के रूप के समीकरण को जहाँ, a, b और c वास्तविक संख्याएँ हैं और a और b दोनों शून्य नहीं हैं, दो चरों वाला रैखिक समीकरण कहा जाता है।
2. दो चरों वाले रैखिक समीकरण के अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं।
3. दो चरों वाले रैखिक समीकरण के आलेख पर स्थित प्रत्येक बिंदु रैखिक समीकरण का एक हल होता है। साथ ही, रैखिक समीकरण का प्रत्येक हल रैखिक समीकरण के आलेख पर स्थित एक बिंदु होता है।

0963CH05

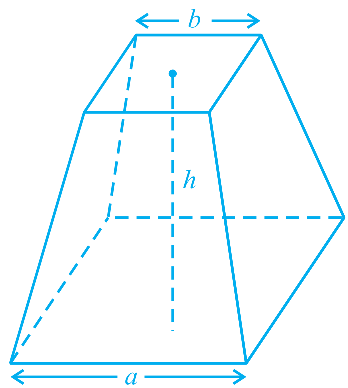
अध्याय 5

यूक्लिड की ज्यामिति का परिचय

5.1 भूमिका

शब्द 'ज्यामिति' (geometry) यूनानी भाषा के शब्दों 'जियो' (geo) और 'मीट्रीन' (metrein) से मिल कर बना है। जियो का अर्थ है 'पृथ्वी' या 'भूमि' और मीट्रीन का अर्थ है 'मापना'। इससे ऐसा प्रतीत होता है कि ज्यामिति का उद्गम भूमि मापने की आवश्यकता के कारण हुआ है। गणित की इस शाखा का अध्ययन विभिन्न रूपों में प्रत्येक प्राचीन सभ्यताओं द्वारा किया गया, चाहे वह मिस्र हो, बेबीलोन हो, चीन हो, भारत हो, यूनान हो या इनकास (incas), इत्यादि। इन सभ्यताओं के लोगों को अनेक व्यावहारिक समस्याओं का सामना करना पड़ा जिनमें ज्यामिति के विकास की विभिन्न प्रकार से आवश्यकता पड़ी।

उदाहरण के तौर पर, जब भी नील नदी में बाढ़ आती थी, तो विभिन्न भूमि स्वामियों के संलग्न खेतों के बीच की परिसीमाओं (boundaries) को अपने साथ बहा ले जाती थी। इन बाढ़ों के बाद, इन परिसीमाओं को पुनः बनाया जाता था। इस कार्य के लिए, मिस्रवासियों ने सरल क्षेत्रफल परिकलित करने के साथ ही सरल रचनाएँ करने के लिए, अनेक ज्यामितीय तकनीकें और नियम विकसित किए। उन्होंने ज्यामिति के ज्ञान का उपयोग अन्नभण्डारों के आयतन निकालने तथा नहरों और पिरामिडों (pyramids) के निर्माण करने में किया। वे एक कटे हुए पिरामिड (truncated pyramid) (देखिए आकृति 5.1) का आयतन ज्ञात करने का सही



आकृति 5.1 : **कटा हुआ पिरामिड**

सूत्र भी जानते थे। आप जानते हैं कि पिरामिड एक ऐसी ठोस आकृति होती है, जिसका आधार एक त्रिभुज या वर्ग या कोई अन्य बहुभुज होता है और जिसके पार्श्व फलक (side faces या lateral faces), ऊपर एक ही बिंदु पर मिलने वाले त्रिभुज होते हैं।

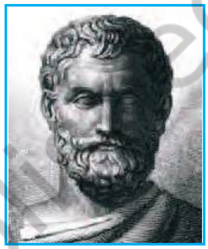
भारतीय उप-महाद्वीप में, हड़प्पा और मोहनजोदड़ो, इत्यादि की खुदाइयों से यह पता लगता है कि सिन्धु घाटी की सभ्यता (लगभग 3000 ई॰पू॰) ने ज्यामिति का प्रचुर मात्रा में उपयोग किया। वह एक उच्च कोटि का संगठित समाज था। शहर अत्याधिक रूप से विकसित थे और बड़े योजनाबद्ध ढंग से निर्मित किए गए थे। उदाहरणार्थ, सड़कें परस्पर समांतर होती थीं और भूमिगत नालियों की व्यवस्था थी। घरों में विभिन्न प्रकार के अनेक कमरे हुआ करते थे। ये बातें दर्शाती हैं कि नगरवासी क्षेत्रमिति (mensuration) और व्यावहारिक अंकगणित में पूर्ण रूप से निपुण थे। निर्माण कार्य में प्रयोग की जाने वाली ईंटें भट्टों पर पकाई (बनाई) जाती थीं और इन ईंटों के लिए अनुपात लम्बाई : चौड़ाई : मोटाई, 4 : 2 : 1 होता था।

प्राचीन भारत में, सुल्बासूत्र (800 ई॰पू॰-500 ई॰पू॰) ज्यामितीय रचनाओं के लिए महत्वपूर्ण ग्रंथ थे। वैदिक काल की ज्यामिति का उद्गम वैदिक पूजा के लिए आवश्यक भिन्न-भिन्न प्रकार की वेदियों और अग्नि-कुण्डों के निर्माण कार्य से हुआ। पवित्र अग्नियों को अधिक प्रभावशाली साधक होने के लिए, उनके स्थान, उनके आकारों और क्षेत्रफलों के बारे में स्पष्ट रूप से निर्धारित अनुदेशों के अनुसार, होते थे। घरेलू धार्मिक क्रियाओं के लिए, वर्गाकार और वृत्ताकार वेदियों का प्रयोग किया जाता था, जबकि सार्वजनिक पूजा स्थलों के लिए आयतों, त्रिभुजों और समलंबों के संयोजनों (मिले जुले) से बने आकारों का प्रयोग आवश्यक होता था। (अथर्ववेद में दिए) 'श्रीयंत्र' में एक दूसरे के साथ जुड़े नौ समद्विबाहु त्रिभुज अंतर्निहित हैं। ये त्रिभुज इस प्रकार व्यवस्थित किए गए हैं कि इनसे 43 छोटे (या गौण) त्रिभुजों का निर्माण होता है। यद्यपि वेदियों की रचना करने में परिशुद्ध ज्यामितीय विधियों का उपयोग किया गया था, फिर भी इनसे संबंधित सिद्धांतों की कोई चर्चा नहीं की गई।

उपरोक्त उदाहरण यह दर्शाते हैं कि ज्यामिति का विकास और अनुप्रयोग विश्व के सभी स्थानों पर होता रहा। परन्तु यह बड़े अव्यवस्थित प्रकार से हो रहा था। प्राचीन विश्व में, ज्यामिति के विकास की इन गतिविधियों की एक रोचक बात यह है कि इनका ज्ञान एक पीढ़ी से दूसरी पीढ़ी को या तो मौखिक रूप से या ताड़ के वृक्ष की पत्तियों पर लिखे संदेशों या कुछ अन्य विधियों द्वारा दिया जाता रहा। साथ ही, हम यह भी पाते हैं कि कुछ सभ्यताओं, जैसे कि बेबीलोनिया में, ज्यामिति एक अत्याधिक व्यावहारिक दृष्टिकोण वाले विषय तक

सीमित रही तथा ऐसा ही भारत और रोम में रहा। मिस्रवासियों द्वारा विकसित की गई ज्यामिति में मुख्यत: परिणामों के कथन ही निहित थे। इनमें प्रक्रियाओं (अथवा विधियों) के कोई व्यापक नियम नहीं दिए गए। वस्तुत: बेबीलोन और मिस्रवासियों दोनों ही ने ज्यामिति का उपयोग अधिकांशत: व्यावहारिक कार्यों के लिए ही किया तथा उसको एक क्रमबद्ध विज्ञान के रूप में विकसित करने के लिए बहुत कम काम किया। परन्तु यूनान जैसी सभ्यताओं में इस तर्क पर बल दिया जाता था कि कुछ रचनाएँ किस प्रकार हो जाती हैं। यूनानियों की अभिरुचि उन कथनों, जिनको उन्होंने स्थापित किया था, की सत्यता निगमनिक तर्कण (deductive reasoning) का उपयोग करके जाँचने में थी (देखिए परिशिष्ट 1)।

एक यूनानी गणितज्ञ थेल्स (Thales) को श्रेय जाता है कि उन्होंने सबसे पहली ज्ञात उपपत्ति (proof) प्रदान की। यह उपपत्ति इस कथन की थी कि वृत्त का व्यास वृत्त को समद्विभाजित (अर्थात् दो बराबर भागों में विभाजित) करता है। थेल्स का एक सबसे प्रसिद्ध शिष्य पाइथागोरस (572 ई॰पू॰) था, जिसका नाम आपने अवश्य सुना होगा। पाइथागोरस और उसके साथियों ने अनेक ज्यामितीय गुणों की खोज की और ज्यामिति के सिद्धांतों का अत्याधिक विकास किया। यह प्रक्रिया 300 ई॰पू॰ तक जारी रही। इसी समय मिस्र में अलेक्जेंड्रिया के एक गणित के शिक्षक यूक्लिड (Euclid) ने उस समय तक ज्ञात गणित के सभी ज्ञान को एकत्रित किया और **एलीमेंट्स (Elements)** नामक अपने प्रसिद्ध ग्रंथ के रूप में उसे व्यवस्थित किया। उन्होंने एलीमेंट्स को 13 अध्यायों में विभाजित किया, जिनमें से प्रत्येक को 'पुस्तिका' माना जाता है। इन पुस्तिकाओं ने समस्त विश्व की ज्यामिति संबंधी समझ को आने वाली पीढ़ियों तक प्रभावित किया।



थेल्स
(640 सा॰यु॰पू॰–546 सा॰यु॰पू॰)
आकृति 5.2

यूक्लिड
(325 सा॰यु॰पू॰–265 सा॰यु॰पू॰)
आकृति 5.3

इस अध्याय में, हम ज्यामिति के प्रति यूक्लिड के दृष्टिकोण की चर्चा करेंगे और ज्यामिति के वर्तमान स्वरूप से इसे जोड़ने का प्रयत्न करेंगे।

5.2 यूक्लिड की परिभाषाएँ, अभिगृहीत और अभिधारणाएँ

यूक्लिड के समय के यूनानी गणितज्ञों ने ज्यामिति को उस विश्व का एक सिद्धांतीय प्रतिमान (model) सोचा जिसमें वे रहते थे। बिंदु (point), रेखा (line), तल (plane) [या पृष्ठ (surface)],

इत्यादि की अवधारणाएँ उन वस्तुओं से स्थापित की गईं जो उनके आस-पास थीं। आकाश (space) और उनके आस-पास के ठोसों के अध्ययनों के आधार पर, एक ठोस वस्तु की सिद्धांतीय ज्यामितीय अवधारणा विकसित की गई। एक ठोस (solid) का आकार होता है, माप और स्थिति होती है तथा उसे एक स्थान से दूसरे स्थान तक ले जाया जा सकता है। इसकी परिसीमाएँ **पृष्ठ (surface)** कहलाती हैं। ये आकाश के एक भाग को दूसरे भाग से पृथक करती हैं और इनकी कोई मोटाई नहीं होती। पृष्ठों की परिसीमाएँ **वक्र (curves)** या सीधी **रेखाएँ (lines)** होती हैं। इन रेखाओं के सिरे बिंदु **(points)** होते हैं।

ठोसों से बिंदुओं (ठोस-पृष्ठ-रेखाएँ-बिंदु) तक के तीन चरणों पर विचार कीजिए। प्रत्येक चरण में, हम एक विस्तार, जिसे हम विमा (dimension) भी कहते हैं, से वंचित होते हैं। इसलिए, यह कहा जाता है कि एक ठोस की तीन विमाएँ होती हैं, एक पृष्ठ की दो विमाएँ, एक रेखा की एक विमा होती है और एक बिंदु की कोई विमा नहीं होती। यूक्लिड ने इन कथनों को संक्षिप्त रूप से परिभाषाओं के रूप में प्रस्तुत किया। उन्होंने अपने इन रहस्योदघाटनों का प्रारम्भ 'एलीमेंट्स' की पुस्तक 1 में 23 परिभाषाएँ (definitions) देकर किया। इनमें से कुछ परिभाषाएँ नीचे दी जा रही हैं:

1. एक **बिंदु (point)** वह है जिसका कोई भाग नहीं होता।
2. एक **रेखा (line)** चौड़ाई रहित लम्बाई होती है।
3. एक रेखा के सिरे बिंदु होते हैं।
4. एक **सीधी रेखा** ऐसी रेखा है जो स्वयं पर बिंदुओं के साथ सपाट रूप से स्थित होती है।
5. एक **पृष्ठ (surface)** वह है जिसकी केवल लम्बाई और चौड़ाई होती है।
6. पृष्ठ के **किनारे (edges)** रेखाएँ होती हैं।
7. एक समतल पृष्ठ **(plane surface)** ऐसा पृष्ठ है जो स्वयं पर सीधी रेखाओं के साथ सपाट रूप से स्थित होता है।

यदि आप ध्यानपूर्वक इन परिभाषाओं को देखें, तो आप पाएँगे कि कुछ पदों जैसे भाग, चौड़ाई, लम्बाई, सपाट रूप से, इत्यादि को स्पष्ट रूप से आगे और अधिक समझाने की आवश्यकता है। उदाहरणार्थ, बिंदु की परिभाषा पर विचार कीजिए जो यूक्लिड ने दी है। इस परिभाषा में, 'एक भाग' को परिभाषित करने की आवश्यकता है। मान लीजिए कि हम यह परिभाषित करें कि एक भाग वह है जो 'क्षेत्र' घेरता है, तो हमें पुन: 'क्षेत्र' को परिभाषित करने की आवश्यकता होगी। अत: एक वस्तु को परिभाषित करने के लिए, आपको अनेक वस्तुओं

को परिभाषित करने की आवश्यकता होती है और बिना किसी अंत के परिभाषाओं की एक लम्बी शृंखला प्राप्त हो सकती है। इन्हीं कारणवश, गणितज्ञों द्वारा यह सुविधाजनक पाया गया कि कुछ ज्यामितीय पदों को *अपरिभाषित* (*undefined*) मान लिया जाए। इस विधि से, हम एक बिंदु की ज्यामितीय संकल्पना का ऊपर दी हुई 'परिभाषा' की तुलना में एक बेहतर अंतर्ज्ञानात्मक आभास प्राप्त करेंगे। इसलिए, हम बिंदु को एक सूक्ष्म बिंदी (dot) से निरूपित करते हैं, परन्तु इस सूक्ष्म बिंदी की कुछ न कुछ विमा अवश्य होती है।

इसी प्रकार की समस्या उपरोक्त परिभाषा 2 में भी आती है। इसमें चौड़ाई और लम्बाई का संदर्भ आता है और इनमें से किसी को भी पहले परिभाषित नहीं किया गया है। इसी कारण, किसी भी विषय के अध्ययन के लिए कुछ पदों को अपरिभाषित रखा गया है। इसलिए, ज्यामिति में हम बिंदु, रेखा और तल (यूक्लिड के शब्दों में समतल पृष्ठ) को अपरिभाषित शब्दों के रूप में मान कर चलते हैं। केवल यह बात अवश्य है कि हम इन्हें अंतर्ज्ञानात्मक रूप से निरूपित कर सकते हैं अथवा 'भौतिक प्रतिमानों' (वस्तुओं) की सहायता से स्पष्ट कर सकते हैं।

अपनी इन परिभाषाओं से प्रारम्भ करते हुए, यूक्लिड ने कुछ गुणों को बिना सिद्ध किए सत्य कथन मानने की कल्पना की। ये कल्पनाएँ वास्तव में 'स्पष्टत: सर्वव्यापी सत्य' थे। उन्होंने इनको दो वर्गों में विभाजित किया। ये वर्ग थे : **अभिगृहीत (axioms)** और **अभिधारणाएँ (postulates)**। उन्होंने **अभिधारणा** शब्द का प्रयोग उन कल्पनाओं के लिए किया जो विशिष्ट रूप से ज्यामिति से संबंधित थीं। दूसरी ओर, सामान्य अवधारणाएँ [जिन्हें प्राय: **अभिगृहीत (axioms)** कहा गया] वे कल्पनाएँ थीं जिन्हें निरंतर गणित में प्रयोग किया गया और जिनका केवल ज्यामिति से ही विशेष संबंध नहीं था। अभिगृहीत और अभिधारणाओं की और अधिक जानकारी के लिए परिशिष्ट 1 को देखिए।

यूक्लिड के कुछ अभिगृहीतों को, बिना उनके द्वारा दिए क्रम के, नीचे दिया जा रहा है:

(1) वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर हों एक दूसरे के बराबर होती हैं।

(2) यदि बराबरों को बराबरों में जोड़ा जाए, तो पूर्ण भी बराबर होते हैं।

(3) यदि बराबरों को बराबरों में से घटाया जाए, तो शेषफल भी बराबर होते हैं।

(4) वे वस्तुएँ जो परस्पर संपाती हों, एक दूसरे के बराबर होती हैं।

(5) पूर्ण अपने भाग से बड़ा होता है।

(6) एक ही वस्तुओं के दुगुने परस्पर बराबर होते हैं।

(7) एक ही वस्तुओं के आधे परस्पर बराबर होते हैं।

ये सामान्य अवधारणाएँ किसी प्रकार के परिमाणों (magnitudes) के संदर्भ में कही गई हैं। पहली सामान्य अवधारणा को समतलीय आकृतियों के लिए प्रयोग किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, यदि एक त्रिभुज का क्षेत्रफल एक आयत के क्षेत्रफल के बराबर हो और इस आयत का क्षेत्रफल एक वर्ग के क्षेत्रफल के बराबर हो, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल भी वर्ग के क्षेत्रफल के बराबर होगा।

एक ही प्रकार के परिमाणों की तुलना की जा सकती है और उन्हें जोड़ा भी जा सकता है, परंतु भिन्न-भिन्न प्रकार के परिमाणों की तुलना नहीं की जा सकती है। उदाहरणार्थ, एक रेखा को एक आयत में जोड़ा नहीं जा सकता और न ही एक कोण की एक पंचभुज (pentagon) से तुलना की जा सकती है।

ऊपर दिया हुआ चौथा अभिगृहीत यह बताता हुआ प्रतीत होता है कि यदि दो वस्तुएँ सर्वसम (identical) हों (अर्थात् वे एक ही हों), तो वे बराबर होती हैं। दूसरे शब्दों में, कोई भी वस्तु स्वयं के बराबर होती है। यह अध्यारोपण (superposition) के सिद्धांत की तर्कसंगतता प्रकट करता है। अभिगृहीत (5) 'से बड़ा है (greater than)' की परिभाषा देता है। उदाहरणार्थ, यदि कोई राशि B, किसी अन्य राशि A का एक भाग हो, तो A को राशि B और एक अन्य राशि C के योग के रूप में लिखा जा सकता है। सांकेतिक रूप से, $A > B$ का अर्थ है कि कोई C ऐसा है कि $A = B + C$ है।

आइए अब यूक्लिड की पाँच अभिधारणाओं (postulates) की चर्चा करें। ये इस प्रकार हैं:

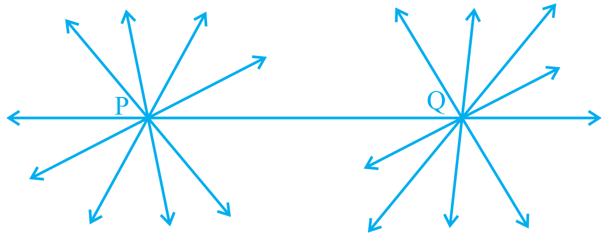
अभिधारणा 1 : *एक बिंदु से एक अन्य बिंदु तक एक सीधी रेखा खींची जा सकती है।*

ध्यान दीजिए कि यह अभिधारणा हमें बताती है कि दो भिन्न (distinct) बिंदुओं से होकर कम से कम एक रेखा अवश्य खींची जा सकती है, परन्तु इससे यह नहीं ज्ञात होता कि ऐसी एक से अधिक सीधी रेखाएँ नहीं हो सकतीं। परन्तु अपने समस्त कार्यों में यूक्लिड ने, बिना कुछ बताए, यह बार-बार कल्पना की है कि दो भिन्न बिंदुओं से एक अद्वितीय (unique) रेखा ही खींची जा सकती है। हम इस परिणाम को एक अभिगृहीत के रूप में नीचे दे रहे हैं:

अभिगृहीत 5.1 : *दिए हुए दो भिन्न बिंदुओं से होकर एक अद्वितीय रेखा खींची जा सकती है।*

बिंदु P से होकर कितनी रेखाएँ खींची जा सकती हैं जो बिंदु Q से होकर भी जाती हों (देखिए आकृति 5.4)? केवल एक। यह रेखा PQ है। बिंदु Q से होकर जाने वाली ऐसी

कितनी रेखाएँ हैं जो बिंदु P से होकर भी जाती है? केवल एक, अर्थात् रेखा PQ। इस प्रकार, उपरोक्त कथन एक स्वयं सिद्ध (self evident) सत्य है और इसीलिए हम इसे एक अभिगृहीत के रूप में मान लेते हैं।



आकृति 5.4

अभिधारणा 2 : *एक सांत रेखा (terminated line) को अनिश्चित रूप से बढ़ाया जा सकता है।*

ध्यान दीजिए जिसको हम आजकल रेखाखंड (line segment) कहते हैं, उसे यूक्लिड ने सांत रेखा कहा था। अत:, वर्तमान की भाषा में, दूसरी अभिधारणा यह कहती है कि एक रेखाखंड को दोनों ओर विस्तृत करके एक रेखा बनाई जा सकती है (देखिए आकृति 5.5)।

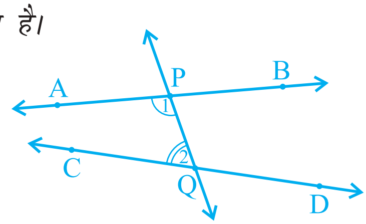
आकृति 5.5

अभिधारणा 3 : *किसी को केन्द्र मान कर और किसी त्रिज्या से एक वृत्त खींचा जा सकता है।*

अभिधारणा 4 : *सभी समकोण एक दूसरे के बराबर होते हैं।*

अभिधारणा 5 : *यदि एक सीधी रेखा दो सीधी रेखाओं पर गिर कर अपने एक ही ओर दो अंत: कोण (interior angles) इस प्रकार बनाए कि इन दोनों कोणों का योग मिल कर दो समकोणों से कम हो, तो वे दोनों सीधी रेखाएँ अनिश्चित रूप से बढ़ाए जाने पर उसी ओर मिलती हैं जिस ओर यह योग दो समकोणों से कम होता है।*

उदाहरणार्थ, आकृति 5.6 में, रेखा PQ रेखाओं AB और CD पर इस प्रकार गिरती है कि अंत: कोणों 1 और 2 का योग, जो PQ के बाईं ओर स्थित हैं, 180° से कम है। अत:, रेखाएँ AB और CD अंतत: PQ के बाईं ओर प्रतिच्छेद करेंगी।



आकृति 5.6

उपरोक्त पाँचों अभिधारणाओं को केवल देखने मात्र से, हमें यह स्पष्टतः पता चल जाएगा कि अन्य अभिधारणाओं की तुलना में अभिधारणा 5 कुछ अधिक जटिल है। दूसरी ओर, अभिधारणाएँ 1 से 4 इतनी सरल और स्पष्ट हैं कि उन्हें स्वयं सिद्ध सत्य के रूप में मान लिया जाता है। परन्तु, इन्हें सिद्ध करना संभव नहीं है। इसलिए, इन कथनों को बिना उपपत्ति (proof) के स्वीकृत कर लिया गया है (देखिए परिशिष्ट 1)। इस जटिलता के कारण, पाँचवीं अभिधारणा पर अगले अनुच्छेद में अधिक ध्यान दिया जाएगा।

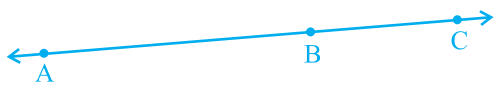
आजकल, 'अभिधारणा' और 'अभिगृहीत' दोनों पदों को एक दूसरे के लिए एक ही अर्थ में प्रयोग किया जाता है। वास्तव में, अभिधारणा एक क्रिया (verb) है। जब हम कहते हैं कि 'आइए अभिधारणा करें', तो इसका अर्थ है कि 'आइए विश्व में प्रेक्षित परिघटनाओं (phenomena) के आधार पर कुछ कथन कहें।' इसकी सत्यता/मान्यता की जाँच बाद में की जाती है। यदि वह सत्य है, तो उसे 'अभिधारणा' के रूप में स्वीकृत कर लिया जाता है।

कुछ अभिगृहीतों का एक निकाय (system) *अविरोधी* (*consistent*) कहलाता है (देखिए परिशिष्ट 1), यदि इन अभिगृहीतों से ऐसा कथन निर्मित करना असंभव हो, जो किसी अन्य अभिगृहीत या पहले सिद्ध किए गए किसी कथन के विरोधी (contradictory) हो। अतः, यदि अभिगृहीतों का कोई निकाय दिया हो, तो यह सुनिश्चित करना आवश्यक है कि यह निकाय अविरोधी हो।

यूक्लिड ने अपनी अभिधारणाएँ और अभिगृहीतों को देने के बाद, इनका प्रयोग अन्य परिणामों को सिद्ध करने में किया। फिर इन परिणामों का प्रयोग करके, उन्होंने निगमनिक तर्कण (deductive reasoning) द्वारा कुछ और परिणामों को सिद्ध किया। जिन कथनों को सिद्ध किया वे **साध्य (propositions)** या **प्रमेय (theorems)** कहलाती थीं। यूक्लिड ने अपनी अभिगृहीतों, अभिधारणाओं, परिभाषाओं और पहले सिद्ध की गई प्रमेयों का प्रयोग करके, एक तार्किक शृंखला में 465 साध्य निगमित (deduce) किए। ज्यामिति के कुछ अगले अध्यायों में आप इन अभिगृहीतों का प्रयोग करके कुछ प्रमेयों को सिद्ध करेंगे।

आइए आगे आने वाले उदाहरणों में देखें कि यूक्लिड ने कुछ परिणामों को सिद्ध करने के लिए अपनी अभिगृहीतों और अभिधारणाओं का किस प्रकार प्रयोग किया।

उदाहरण 1 : यदि A, B और C एक रेखा पर स्थित तीन बिंदु हैं और B बिंदुओं A और C के बीच में स्थित है (देखिए आकृति 5.7), तो सिद्ध कीजिए कि AB + BC = AC है।



आकृति 5.7

हल : उपरोक्त आकृति में, AB + BC के साथ AC संपाती है।

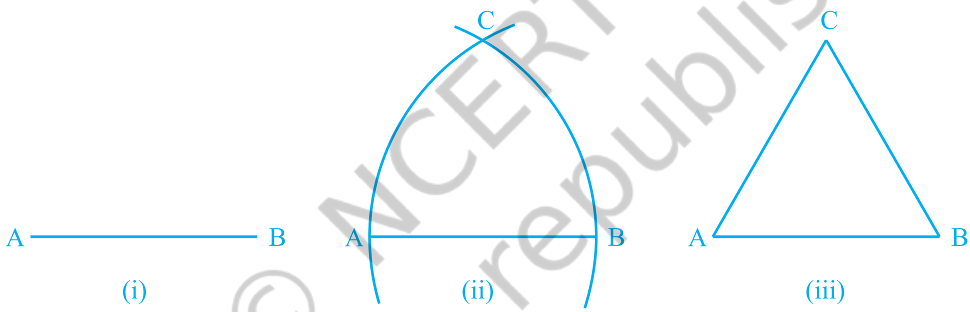
साथ ही, यूक्लिड का अभिगृहीत (4) कहता है कि वे वस्तुएँ जो परस्पर संपाती हों एक दूसरे के बराबर होती हैं। अत:, यह सिद्ध किया जा सकता है कि

$$AB + BC = AC$$

है। ध्यान दीजिए कि इस हल में यह मान लिया गया है कि दो बिंदुओं से होकर एक अद्वितीय रेखा खींची जा सकती है।

उदाहरण 2 : सिद्ध कीजिए कि एक दिए हुए रेखाखंड पर एक समबाहु त्रिभुज की रचना की जा सकती है।

हल : उपरोक्त कथन में, एक दी हुई लम्बाई का एक रेखाखंड, मान लीजिए, AB दिया है [देखिए आकृति 5.8 (i)]।



आकृति 5.8

यहाँ आपको कुछ रचना करने की आवश्यकता है। यूक्लिड की अभिधारणा (3) का प्रयोग करके, आप बिंदु A को केन्द्र और AB त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींच सकते हैं [देखिए आकृति 5.8 (ii)]। इसी प्रकार, B को केन्द्र मानकर और BA त्रिज्या लेकर एक अन्य वृत्त खींचा जा सकता है। ये दोनों वृत्त मान लीजिए बिंदु C पर मिलते हैं। अब रेखाखंडों AC और BC खींच कर Δ ABC बनाइए [देखिए आकृति 5.8 (iii)]।

इसलिए, आपको सिद्ध करना है कि यह त्रिभुज एक समबाहु त्रिभुज है; अर्थात् AB = AC = BC है।

अब, AB = AC है, क्योंकि ये एक वृत्त की त्रिज्याएँ हैं। (1)

इसी प्रकार, AB = BC (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ) (2)

उपरोक्त दोनों तथ्यों और यूक्लिड के पहले अभिगृहीत (वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर होती हैं एक दूसरे के बराबर होती हैं) से आप निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि AB = BC = AC है।

अत:, Δ ABC एक समबाहु त्रिभुज है।

ध्यान दीजिए कि यहाँ यूक्लिड ने, बिना कहीं बताए, यह मान लिया है कि केन्द्रों A और B को लेकर खींचे गए वृत्त परस्पर एक बिंदु पर मिलेंगे।

अब हम एक प्रमेय सिद्ध करेंगे जो विभिन्न परिणामों में अनेक बार अधिकांशत: प्रयोग की जाती है:

प्रमेय 5.1 : *दो भिन्न रेखाओं में एक से अधिक बिंदु उभयनिष्ठ नहीं हो सकता।*

उपपत्ति : यहाँ, हमें दो रेखाएँ l और m दी हुई हैं। हमें यह सिद्ध करना है कि l और m में केवल एक बिंदु उभयनिष्ठ है।

थोड़े समय के लिए, यह मान लीजिए कि ये दो रेखाएँ दो भिन्न बिंदुओं P और Q पर प्रतिच्छेद करती हैं।

इस प्रकार, दो भिन्न बिंदुओं P और Q से होकर जाने वाली आपके पास दो रेखाएँ l और m हो जाती हैं। परन्तु यह कथन अभिगृहीत 5.1 के विरुद्ध है, जिसके अनुसार दो भिन्न बिंदुओं से होकर एक अद्वितीय रेखा खींची जा सकती है। अत:, हम जिस कल्पना से चले थे कि दो रेखाएँ दो भिन्न बिंदुओं से होकर जाती हैं गलत है।

इससे हम क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं? हम निष्कर्ष निकालने पर बाध्य हो जाते हैं कि दो भिन्न रेखाओं में एक से अधिक बिंदु उभयनिष्ठ नहीं होगा।

प्रश्नावली 5.1

1. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से कथन असत्य हैं? अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए।

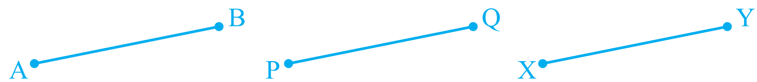
   (i) एक बिंदु से होकर केवल एक ही रेखा खींची जा सकती है।

   (ii) दो भिन्न बिंदुओं से होकर जाने वाली असंख्य रेखाएँ हैं।

   (iii) एक सांत रेखा दोनों ओर अनिश्चित रूप से बढ़ाई जा सकती है।

   (iv) यदि दो वृत्त बराबर हैं, तो उनकी त्रिज्याएँ बराबर होती हैं।

   (v) आकृति 5.9 में, यदि AB = PQ और PQ = XY है, तो AB = XY होगा।



आकृति 5.9

2. निम्नलिखित पदों में से प्रत्येक की परिभाषा दीजिए। क्या इनके लिए कुछ ऐसे पद हैं, जिन्हें परिभाषित करने की आवश्यकता है? वे क्या हैं और आप इन्हें कैसे परिभाषित कर पाएँगे?

   (i) समांतर रेखाएँ (ii) लम्ब रेखाएँ (iii) रेखाखंड

   (iv) वृत्त की त्रिज्या (v) वर्ग

3. नीचे दी हुई दो अभिधारणाओं पर विचार कीजिए :

   (i) दो भिन्न बिंदु A और B दिए रहने पर, एक तीसरा बिंदु C ऐसा विद्यमान है जो A और B के बीच स्थित होता है।

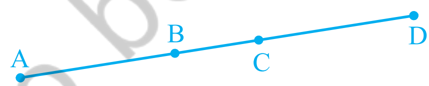
   (ii) यहाँ कम से कम ऐसे तीन बिंदु विद्यमान हैं कि वे एक रेखा पर स्थित नहीं हैं।

   क्या इन अभिधारणाओं में कोई अपरिभाषित शब्द हैं? क्या ये अभिधारणाएँ अविरोधी हैं? क्या ये यूक्लिड की अभिधारणाओं से प्राप्त होती हैं? स्पष्ट कीजिए।

4. यदि दो बिंदुओं A और B के बीच एक बिंदु C ऐसा स्थित है कि $AC = BC$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $AC = \frac{1}{2}AB$ है। एक आकृति खींच कर इसे स्पष्ट कीजिए।

5. प्रश्न 4 में, C रेखाखंड AB का एक मध्य-बिंदु कहलाता है। सिद्ध कीजिए कि एक रेखाखंड का एक और केवल एक ही मध्य-बिंदु होता है।

6. आकृति 5.10 में, यदि $AC = BD$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $AB = CD$ है।



आकृति 5.10

7. यूक्लिड की अभिगृहीतों की सूची में दिया हुआ अभिगृहीत 5 एक सर्वव्यापी सत्य क्यों माना जाता है? (ध्यान दीजिए कि यह प्रश्न पाँचवीं अभिधारणा से संबंधित नहीं है।)

5.3 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है:

1. यद्यपि यूक्लिड ने बिंदु, रेखा और तल को परिभाषित किया है, परन्तु गणितज्ञों ने इन परिभाषाओं को स्वीकार नहीं किया है। इसलिए ज्यामिति में इन्हें अब अपरिभाषित पदों के रूप में लिया जाता है।

2. अभिगृहीत और अभिधारणाएँ ऐसी कल्पनाएँ हैं जो स्पष्टत: सर्वव्यापी सत्य होती हैं। इन्हें सिद्ध नहीं किया जाता है।

3. प्रमेय वे कथन हैं जिन्हें परिभाषाओं, अभिगृहीतों, पहले सिद्ध किए गए कथनों और निगमनिक तर्कण द्वारा सिद्ध किया जाता है।

4. यूक्लिड के कुछ अभिगृहीत थे :

(1) वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर हों, एक दूसरे के बराबर होती हैं।

(2) यदि बराबरों को बराबरों में जोड़ा जाए, तो पूर्ण भी बराबर होते हैं।

(3) यदि बराबरों को बराबरों में से घटाया जाए, तो शेषफल भी बराबर होते हैं।

(4) वे वस्तुएँ जो परस्पर संपाती हों एक दूसरे के बराबर होती हैं।

(5) पूर्ण अपने भाग से बड़ा होता है।

(6) एक ही वस्तुओं के दुगुने परस्पर बराबर होते हैं।

(7) एक ही वस्तुओं के आधे परस्पर बराबर होते हैं।

5. यूक्लिड की अभिधारणाएँ निम्न थीं :

अभिधारणा 1 : एक बिंदु से एक अन्य बिंदु तक एक सीधी रेखा खींची जा सकती है।

अभिधारणा 2 : एक सांत रेखा को अनिश्चित रूप से बढ़ाया जा सकता है।

अभिधारणा 3 : किसी को केन्द्र मान कर और किसी त्रिज्या से एक वृत्त खींचा जा सकता है।

अभिधारणा 4 : सभी समकोण एक दूसरे के बराबर होते हैं।

0963CH06

अध्याय 6

रेखाएँ और कोण

6.1 भूमिका

अध्याय 5 में, आप पढ़ चुके हैं कि एक रेखा को खींचने के लिए न्यूनतम दो बिंदुओं की आवश्यकता होती है। आपने कुछ अभिगृहीतों (axioms) का भी अध्ययन किया है और उनकी सहायता से कुछ अन्य कथनों को सिद्ध किया है। इस अध्याय में, आप कोणों के उन गुणों का अध्ययन करेंगे जब दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं और कोणों के उन गुणों का भी अध्ययन करेंगे जब एक रेखा दो या अधिक समांतर रेखाओं को भिन्न-भिन्न बिंदुओं पर काटती है। साथ ही, आप इन गुणों का निगमनिक तर्कण (deductive reasoning) द्वारा कुछ कथनों को सिद्ध करने में भी प्रयोग करेंगे (देखिए परिशिष्ट 1)। आप पिछली कक्षाओं में इन कथनों की कुछ क्रियाकलापों द्वारा जाँच (पुष्टि) कर चुके हैं।

आप अपने दैनिक जीवन में समतल पृष्ठों के किनारों (edges) के बीच बने अनेक प्रकार के कोण देखते हैं। समतल पृष्ठों का प्रयोग करके, एक ही प्रकार के मॉडल बनाने के लिए, आपको कोणों के बारे में विस्तृत जानकारी की आवश्यकता होती है। उदाहरणार्थ, आप अपने विद्यालय की प्रदर्शिनी के लिए बाँसों का प्रयोग करके एक झोंपड़ी का मॉडल बनाना चाहते हैं। सोचिए, आप इसे कैसे बनाएँगे। कुछ बाँसों को आप परस्पर समांतर रखेंगे और कुछ को तिरछा रखेंगे। जब एक आर्किटेक्ट (architect) एक बहुतलीय भवन के लिए एक रेखाचित्र खींचता है, तो उसे विभिन्न कोणों पर प्रतिच्छेदी और समांतर रेखाएँ खींचनी पड़ती हैं। क्या आप सोचते हैं कि वह रेखाओं और कोणों के ज्ञान के बिना इस भवन की रूपरेखा खींच सकता है?

विज्ञान में, आप प्रकाश के गुणों का किरण आरेख (ray diagrams) खींच कर अध्ययन करते हैं। उदाहरणार्थ, प्रकाश के अपवर्तन (refraction) गुण का अध्ययन करने के लिए, जब

प्रकाश की किरणें एक माध्यम (medium) से दूसरे माध्यम में प्रवेश करती हैं, आप प्रतिच्छेदी रेखाओं और समांतर रेखाओं के गुणों का प्रयोग करते हैं। जब एक पिंड पर दो या अधिक बल कार्य कर रहे हों, तो आप इन बलों का उस पिंड पर परिणामी बल ज्ञात करने के लिए, एक ऐसा आरेख खींचते हैं जिसमें बलों को दिष्ट रेखाखंडों (directed line segments) द्वारा निरूपित किया जाता है। उस समय, आपको उन कोणों के बीच संबंध जानने की आवश्यकता होगी जिनकी किरणें (अथवा रेखाखंड) परस्पर समांतर या प्रतिच्छेदी होंगी। एक मीनार की ऊँचाई ज्ञात करने अथवा किसी जहाज की एक प्रकाश पुंज (light house) से दूरी ज्ञात करने के लिए, हमें क्षैतिज और दृष्टि रेखा (line of sight) के बीच बने कोण की जानकारी की आवश्यकता होगी। प्रचुर मात्रा में ऐसे उदाहरण दिए जा सकते हैं जहाँ रेखाओं और कोणों का प्रयोग किया जाता है। ज्यामिति के आने वाले अध्यायों में, आप रेखाओं और कोणों के इन गुणों का अन्य उपयोगी गुणों को निगमित (निकालने) करने में प्रयोग करेंगे।

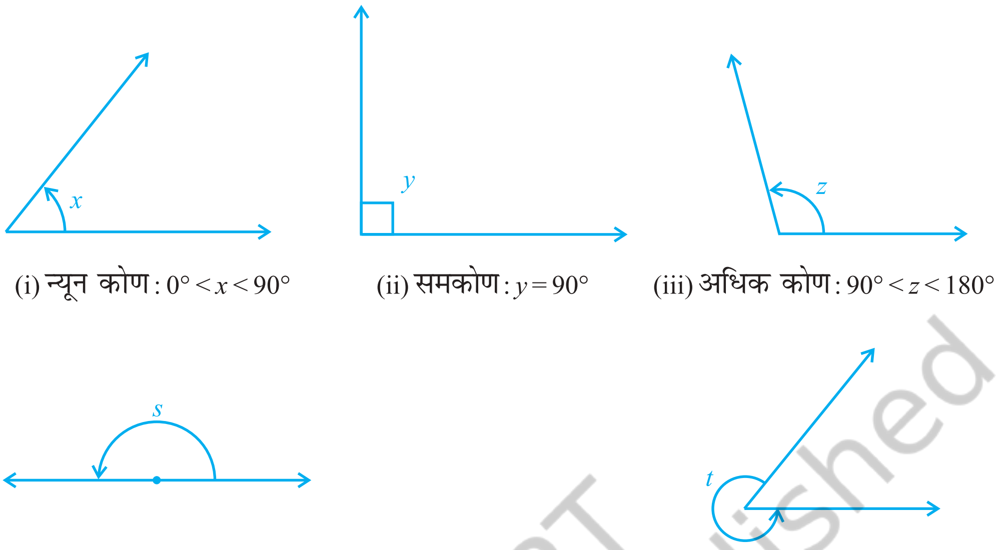
आइए पहले हम पिछली कक्षाओं में रेखाओं और कोणों से संबंधित पढ़े गए पदों और परिभाषाओं का पुनर्विलोकन करें।

6.2 आधारभूत पद और परिभाषाएँ

याद कीजिए कि एक रेखा का वह भाग जिसके दो अंत बिंदु हों एक **रेखाखंड** कहलाता है और रेखा का वह भाग जिसका एक अंत बिंदु हो एक **किरण** कहलाता है। ध्यान दीजिए कि रेखाखंड AB को $\overline{AB}$ से व्यक्त किया जाता है और उसकी लंबाई को AB से व्यक्त किया जाता है। किरण AB को $\overrightarrow{AB}$ से और रेखा AB को $\overleftrightarrow{AB}$ से व्यक्त किया जाता है। परन्तु हम इन संकेतनों का प्रयोग नहीं करेंगे तथा रेखा AB, किरण AB, रेखाखंड AB और उसकी लंबाई को एक ही संकेत AB से व्यक्त करेंगे। इनका अर्थ संदर्भ से स्पष्ट हो जाएगा। कभी-कभी छोटे अक्षर जैसे l, m, n इत्यादि का प्रयोग रेखाओं को व्यक्त करने में किया जाएगा।

यदि तीन या अधिक बिंदु एक ही रेखा पर स्थित हों, तो वे **संरेख बिंदु (collinear points)** कहलाते हैं, अन्यथा वे **असंरेख बिंदु (non-collinear points)** कहलाते हैं।

याद कीजिए कि जब दो किरणें एक ही अंत बिंदु से प्रारम्भ होती हैं, तो एक **कोण (angle)** बनता है। कोण को बनाने वाली दोनों किरणें कोण की **भुजाएँ (arms** या **sides)** कहलाती हैं और वह उभयनिष्ठ अंत बिंदु कोण का **शीर्ष (vertex)** कहलाता है। आप पिछली कक्षाओं में, विभिन्न प्रकार के कोणों जैसे न्यून कोण (acute angle), समकोण (right angle), अधिक कोण (obtuse angle), ऋजु कोण (straight angle) और प्रतिवर्ती कोण (reflex angle) के बारे में पढ़ चुके हैं (देखिए आकृति 6.1)।



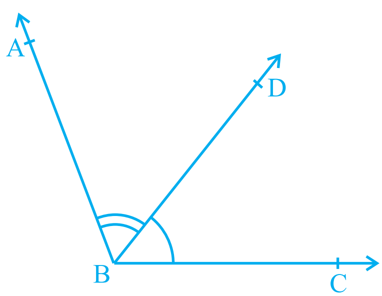
(i) न्यून कोण : $0° < x < 90°$ (ii) समकोण : $y = 90°$ (iii) अधिक कोण : $90° < z < 180°$

(iv) ऋजु कोण : $s = 180°$ (v) प्रतिवर्ती कोण : $180° < t < 360°$

आकृति 6.1 : **कोणों के प्रकार**

एक **न्यून कोण** का माप 0° और 90° के बीच होता है, जबकि एक **समकोण** का माप ठीक 90° होता है। 90° से अधिक परन्तु 180° से कम माप वाला कोण **अधिक कोण** कहलाता है। साथ ही, याद कीजिए कि एक **ऋजु कोण** 180° के बराबर होता है। वह कोण जो 180° से अधिक, परन्तु 360° से कम माप का होता है एक **प्रतिवर्ती कोण** कहलाता है। इसके अतिरिक्त, यदि दो कोणों का योग एक समकोण के बराबर हो, तो ऐसे कोण **पूरक कोण (complementary angles)** कहलाते हैं और वे दो कोण, जिनका योग 180° हो, **संपूरक कोण (supplementary angles)** कहलाते हैं।

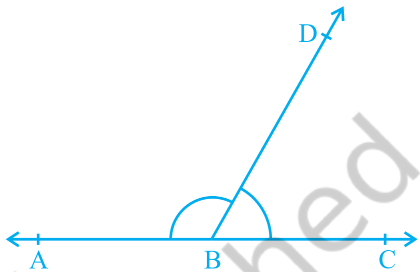
आप पिछली कक्षाओं में आसन्न कोणों (adjacent angles) के बारे में भी पढ़ चुके हैं (देखिए आकृति 6.2)। दो कोण **आसन्न कोण (adjacent angles)** कहलाते हैं, यदि उनमें एक उभयनिष्ठ शीर्ष हो, एक उभयनिष्ठ भुजा हो और उनकी वे भुजाएँ जो उभयनिष्ठ नहीं हैं, उभयनिष्ठ भुजा के विपरीत ओर स्थित हों। आकृति 6.2 में, $\angle$ ABD और $\angle$ DBC आसन्न कोण हैं। किरण BD इनकी उभयनिष्ठ भुजा है और B इनका उभयनिष्ठ



आकृति 6.2 : **आसन्न कोण**

शीर्ष है। किरण BA और किरण BC वे भुजाएँ हैं जो उभयनिष्ठ नहीं हैं। इसके अतिरिक्त, जब दो कोण आसन्न कोण होते हैं, तो उनका योग उस कोण के बराबर होता है जो इनकी उन भुजाओं से बनता है, जो उभयनिष्ठ नहीं हैं। अत: हम लिख सकते हैं कि $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$ है।

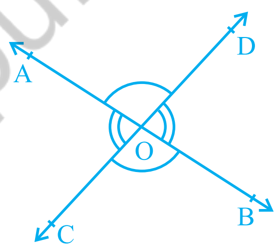
ध्यान दीजिए कि $\angle ABC$ और $\angle ABD$ आसन्न कोण नहीं हैं। क्यों? इसका कारण यह है कि अउभयनिष्ठ भुजाएँ (अर्थात् वे भुजाएँ जो उभयनिष्ठ नहीं हैं) BD और BC उभयनिष्ठ भुजा BA के एक ही ओर स्थित है।



आकृति 6.3 : **कोणों का रैखिक युग्म**

यदि आकृति 6.2 में, अउभयनिष्ठ भुजाएँ BA और BC एक रेखा बनाएँ, तो यह आकृति 6.3 जैसा लगेगा। इस स्थिति में, $\angle ABD$ और $\angle DBC$ **कोणों का एक रैखिक युग्म (linear pair of angles)** बनाते हैं।

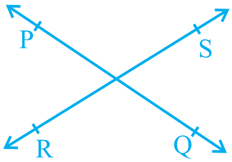
आप **शीर्षाभिमुख कोणों (vertically opposite angles)** को भी याद कर सकते हैं, जो दो रेखाओं, मान लीजिए, AB और CD को परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करने पर बनते हैं (देखिए आकृति 6.4)। यहाँ शीर्षाभिमुख कोणों के दो युग्म हैं। इनमें से एक युग्म $\angle AOD$ और $\angle BOC$ का है। क्या आप दूसरा युग्म ज्ञात कर सकते हैं?

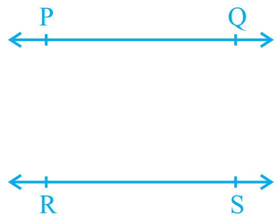


आकृति 6.4 : **शीर्षाभिमुख कोण**

6.3 प्रतिच्छेदी रेखाएँ और अप्रतिच्छेदी रेखाएँ

एक कागज़ पर दो भिन्न रेखाएँ PQ और RS खींचिए। आप देखेंगे कि आप इन रेखाओं को दो प्रकार से खींच सकते हैं, जैसा कि आकृति 6.5 (i) और आकृति 6.5 (ii) में दर्शाया गया है।





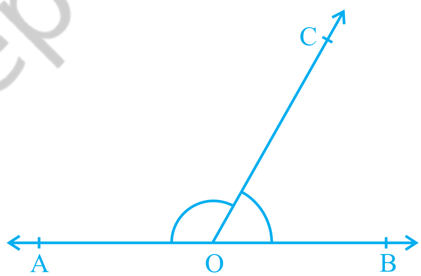
(i) प्रतिच्छेदी रेखाएँ (ii) अप्रतिच्छेदी (समांतर) रेखाएँ

आकृति 6.5 : दो रेखाएँ खींचने के विभिन्न प्रकार

रेखा की इस अवधारणा को भी याद कीजिए कि वह दोनों दिशाओं में अनिश्चित रूप से विस्तृत होती है। रेखाएँ PQ और RS आकृति 6.5 (i) में प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं और आकृति 6.5 (ii) में ये समांतर रेखाएँ हैं। ध्यान दीजिए कि इन दोनों समांतर रेखाओं के विभिन्न बिंदुओं पर उनके उभयनिष्ठ लम्बों की लंबाइयाँ समान रहेंगी। *यह समान लंबाई दोनों समांतर रेखाओं के बीच की दूरी कहलाती है।*

6.4 कोणों के युग्म

अनुच्छेद 6.2 में, आप कोणों के कुछ युग्मों जैसे पूरक कोण, संपूरक कोण, आसन्न कोण, कोणों का रैखिक युग्म, इत्यादि की परिभाषाओं के बारे में पढ़ चुके हैं। क्या आप इन कोणों में किसी संबंध के बारे में सोच सकते हैं? आइए अब उन कोणों में संबंध पर विचार करें जिन्हें कोई किरण किसी रेखा पर स्थित होकर बनाती है, जैसा कि आकृति 6.6 में दर्शाया गया है। रेखा को AB और किरण को OC कहिए। बिंदु O पर बनने वाले कोण क्या हैं? ये $\angle$ AOC, $\angle$ BOC और $\angle$ AOB हैं।



आकृति 6.6 : कोणों का रैखिक युग्म

क्या हम $\angle \text{AOC} + \angle \text{BOC} = \angle \text{AOB}$ लिख सकते हैं? (1)

हाँ! (क्यों? अनुच्छेद 6.2 में दिए आसन्न कोणों को देखिए।)

$\angle$ AOB का माप क्या है? यह 180° है। (क्यों?) (2)

क्या (1) ओर (2) से, आप कह सकते हैं कि $\angle \text{AOC} + \angle \text{BOC} = 180°$ है? हाँ! (क्यों?)

उपरोक्त चर्चा के आधार पर, हम निम्न अभिगृहीत को लिख सकते हैं:

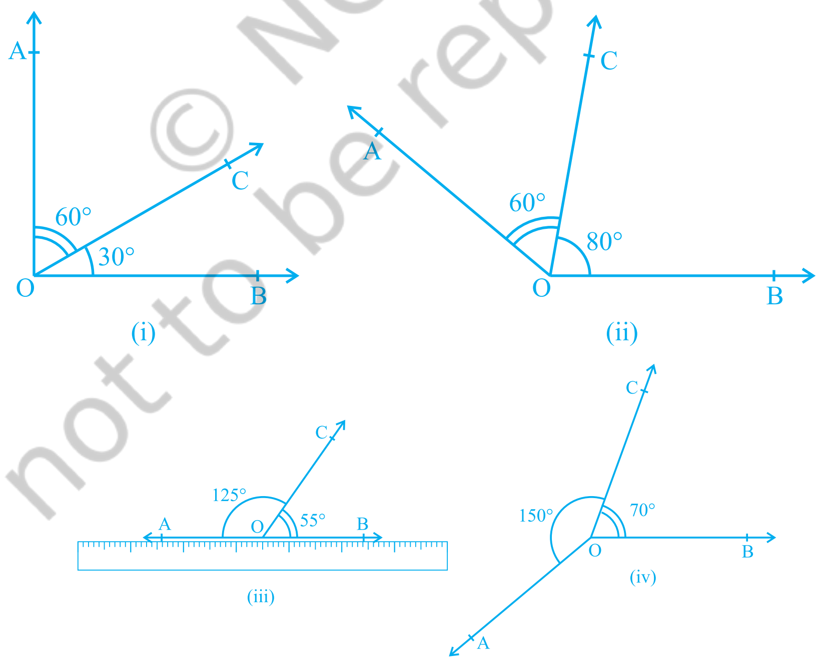
अभिगृहीत 6.1 : *यदि एक किरण एक रेखा पर खड़ी हो, तो इस प्रकार बने दोनों आसन्न कोणों का योग 180° होता है।*

याद कीजिए कि जब दो आसन्न कोणों का योग 180° हो, तो वे कोणों का एक **रैखिक युग्म** बनाते हैं।

अभिगृहीत 6.1 में यह दिया है कि 'एक किरण एक रेखा पर खड़ी हो'। इस दिए हुए से, हमने निष्कर्ष निकाला कि इस प्रकार बने दोनों आसन्न कोणों का योग 180° होता है। क्या हम अभिगृहीत 6.1 को एक विपरीत प्रकार से लिख सकते हैं? अर्थात् अभिगृहीत 6.1 के निष्कर्ष को दिया हुआ मानें और उसके दिए हुए को निष्कर्ष मानें। तब हमें यह प्राप्त होगा:

(A) यदि दो आसन्न कोणों का योग 180° है, तो एक किरण एक रेखा पर खड़ी होती है (अर्थात् अउभयनिष्ठ भुजाएँ एक ही रेखा में हैं)।

अब आप देखते हैं कि अभिगृहीत 6.1 और कथन (A) एक दूसरे के विपरीत हैं। हम इनमें से प्रत्येक को दूसरे का **विलोम (converse)** कहते हैं। हम यह नहीं जानते कि कथन (A) सत्य है या नहीं। आइए इसकी जाँच करें। विभिन्न मापों के, आकृति 6.7 में दर्शाए अनुसार, आसन्न कोण खींचिए। प्रत्येक स्थिति में, अउभयनिष्ठ भुजाओं में से एक भुजा के अनुदिश एक पटरी (ruler) रखिए। क्या दूसरी भुजा भी इस पटरी के अनुदिश स्थित है?



आकृति 6.7 : विभिन्न मापों के आसन्न कोण

आप पाएँगे कि केवल आकृति 6.7 (iii) में ही दोनों अउभयनिष्ठ भुजाएँ पटरी के अनुदिश हैं, अर्थात् A, O और B एक ही रेखा पर स्थित हैं और किरण OC इस रेखा पर खड़ी है। साथ ही, यह भी देखिए कि $\angle$ AOC + $\angle$ COB = 125° + 55° = 180° है। इससे आप निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि कथन (A) सत्य है। अतः, आप इसे एक अभिगृहीत के रूप में निम्न प्रकार लिख सकते हैं :

अभिगृहीत 6.2 : *यदि दो आसन्न कोणों का योग 180° है, तो उनकी अउभयनिष्ठ भुजाएँ एक रेखा बनाती हैं।*

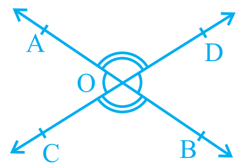
स्पष्ट कारणों से, उपरोक्त दोनों अभिगृहीतों को मिला कर **रैखिक युग्म अभिगृहीत (Linear Pair Axiom)** कहते हैं।

आइए अब उस स्थिति की जाँच करें जब दो रेखाएँ प्रतिच्छेद करती हैं।

पिछली कक्षाओं से आपको याद होगा कि यदि दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करें, तो शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते हैं। आइए अब इस परिणाम को सिद्ध करें। एक उपपत्ति (proof) में निहित अवयवों के लिए, परिशिष्ट 1 को देखिए और नीचे दी हुई उपपत्ति को पढ़ते समय इन्हें ध्यान में रखिए।

प्रमेय 6.1 : *यदि दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं, तो शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते हैं।*

उपपत्ति : उपरोक्त कथन में यह दिया है कि दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं। अतः मान लीजिए कि AB और CD दो रेखाएँ हैं जो परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं, जैसा कि आकृति 6.8 में दर्शाया गया है। इससे हमें शीर्षाभिमुख कोणों के निम्न दो युग्म प्राप्त होते हैं:



आकृति 6.8 : शीर्षाभिमुख कोण

(i) $\angle$ AOC और $\angle$ BOD (ii) $\angle$ AOD और $\angle$ BOC

हमें सिद्ध करना है कि $\angle$ AOC = $\angle$ BOD है और $\angle$ AOD = $\angle$ BOC है।

अब किरण OA रेखा CD पर खड़ी है।

अतः, $\angle$ AOC + $\angle$ AOD = 180° (रैखिक युग्म अभिगृहीत) (1)

क्या हम $\angle$ AOD + $\angle$ BOD = 180° लिख सकते हैं? हाँ। (क्यों?) (2)

(1) और (2) से, हम लिख सकते हैं कि:

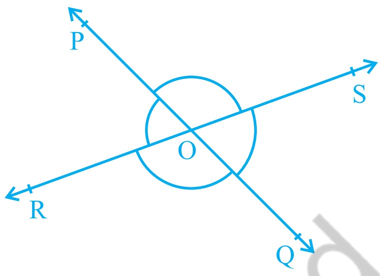
$$\angle AOC + \angle AOD = \angle AOD + \angle BOD$$

इससे निष्कर्ष निकलता है कि $\angle$ AOC = $\angle$ BOD (अनुच्छेद 5.2 का अभिगृहीत 3 देखिए)

इसी प्रकार, सिद्ध किया जा सकता है कि $\angle AOD = \angle BOC$ है।

आइए अब रैखिक युग्म अभिगृहीत और प्रमेय 6.1 पर आधारित कुछ उदाहरण हल करें।

उदाहरण 1 : आकृति 6.9 में, रेखाएँ PQ और RS परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$ है, तो सभी कोण ज्ञात कीजिए।



आकृति 6.9

हल : $\angle POR + \angle ROQ = 180^\circ$ (रैखिक युग्म के कोण)

परन्तु, $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$ (दिया है)

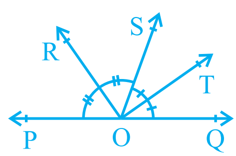
अतः, $\angle POR = \frac{5}{12} \times 180^\circ = 75^\circ$

इसी प्रकार, $\angle ROQ = \frac{7}{12} \times 180^\circ = 105^\circ$

अब $\angle POS = \angle ROQ = 105^\circ$ (शीर्षाभिमुख कोण)

और $\angle SOQ = \angle POR = 75^\circ$ (शीर्षाभिमुख कोण)

उदाहरण 2 : आकृति 6.10 में, किरण OS रेखा POQ पर खड़ी है। किरण OR और OT क्रमशः $\angle POS$ और $\angle SOQ$ के समद्विभाजक हैं। यदि $\angle POS = x$ है, तो $\angle ROT$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 6.10

हल : किरण OS रेखा POQ पर खड़ी है।

अतः, $\angle POS + \angle SOQ = 180^\circ$

परन्तु, $\angle POS = x$

अतः, $x + \angle SOQ = 180^\circ$

इसलिए, $\angle SOQ = 180^\circ - x$

अब किरण OR, $\angle POS$ को समद्विभाजित करती है।

इसलिए, $\angle ROS = \frac{1}{2} \times \angle POS$

$$= \frac{1}{2} \times x = \frac{x}{2}$$

इसी प्रकार, $\angle \text{SOT} = \frac{1}{2} \times \angle \text{SOQ}$

$= \frac{1}{2} \times (180° - x)$

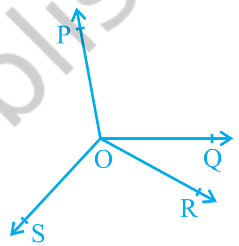
$= 90° - \frac{x}{2}$

अब, $\angle \text{ROT} = \angle \text{ROS} + \angle \text{SOT}$

$= \frac{x}{2} + 90° - \frac{x}{2}$

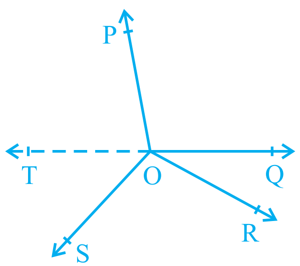
$= 90°$

उदाहरण 3 : आकृति 6.11 में, OP, OQ, OR और OS चार किरणें हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle \text{POQ} + \angle \text{QOR} + \angle \text{SOR} + \angle \text{POS} = 360°$ है।



आकृति 6.11

हल : आकृति 6.11 में, आपको किरणों OP, OQ, OR और OS में से किसी एक को पीछे एक बिंदु तक बढ़ाए जाने की आवश्यकता है। आइए किरण OQ को एक बिंदु T तक पीछे बढ़ा दें ताकि TOQ एक रेखा हो (देखिए आकृति 6.12)।



आकृति 6.12

अब किरण OP रेखा TOQ पर खड़ी है।

अतः, $\angle \text{TOP} + \angle \text{POQ} = 180°$ (1)

(रैखिक युग्म अभिगृहीत)

इसी प्रकार, किरण OS रेखा TOQ पर खड़ी है।

अतः, $\angle \text{TOS} + \angle \text{SOQ} = 180°$ (2)

परन्तु $\angle \text{SOQ} = \angle \text{SOR} + \angle \text{QOR}$ है।

अतः, (2) निम्न हो जाती है :

$\angle \text{TOS} + \angle \text{SOR} + \angle \text{QOR} = 180°$ (3)

अब, (1) और (3) को जोड़ने पर, आपको प्राप्त होगा:

$$\angle TOP + \angle POQ + \angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 360° \quad (4)$$

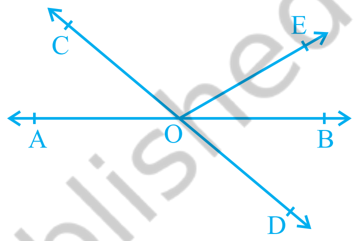
परन्तु $\angle TOP + \angle TOS = \angle POS$ है।

अत:, (4) निम्न हो जाती है :

$$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360°$$

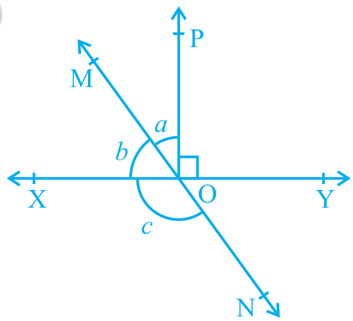
प्रश्नावली 6.1

1. आकृति 6.13 में, रेखाएँ AB और CD बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि $\angle AOC + \angle BOE = 70°$ है और $\angle BOD = 40°$ है, तो $\angle BOE$ और प्रतिवर्ती $\angle COE$ ज्ञात कीजिए।



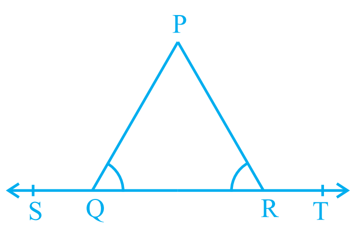
आकृति 6.13

2. आकृति 6.14 में, रेखाएँ XY और MN बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि $\angle POY = 90°$ और $a : b = 2 : 3$ है, तो c ज्ञात कीजिए।



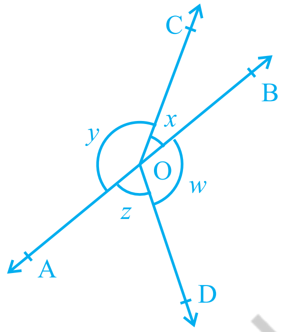
आकृति 6.14

3. आकृति 6.15 में, यदि $\angle PQR = \angle PRQ$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\angle PQS = \angle PRT$ है।



आकृति 6.15

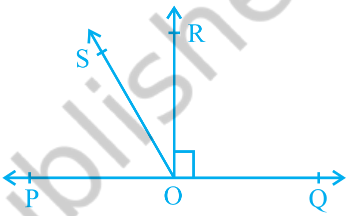
4. आकृति 6.16 में, यदि $x + y = w + z$ है, तो सिद्ध कीजिए कि AOB एक रेखा है।



आकृति 6.16

5. आकृति 6.17 में, POQ एक रेखा है। किरण OR रेखा PQ पर लम्ब है। किरणों OP और OR के बीच में OS एक अन्य किरण है। सिद्ध कीजिए:

$$\angle \text{ROS} = \frac{1}{2}(\angle \text{QOS} - \angle \text{POS})$$

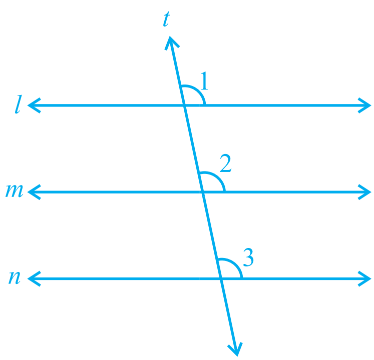


आकृति 6.17

6. यह दिया है कि $\angle$XYZ = 64° है और XY को बिंदु P तक बढ़ाया गया है। दी हुई सूचना से एक आकृति खींचिए। यदि किरण YQ, $\angle$ZYP को समद्विभाजित करती है, तो $\angle$XYQ और प्रतिवर्ती $\angle$QYP के मान ज्ञात कीजिए।

6.5 एक ही रेखा के समांतर रेखाएँ

यदि दो रेखाएँ एक ही रेखा के समांतर हों, तो क्या वे परस्पर समांतर होंगी? आइए इसकी जाँच करें। आकृति 6.18 को देखिए, जिसमें $m \parallel l$ है और $n \parallel l$ है। आइए रेखाओं l, m और n के लिए एक तिर्यक रेखा t खींचें। यह दिया है कि $m \parallel l$ है और $n \parallel l$ है।



आकृति 6.18

अत:, $\angle 1 = \angle 2$ और $\angle 1 = \angle 3$ है।

(संगत कोण अभिगृहीत)

इसलिए, $\angle 2 = \angle 3$ (क्यों?)

परन्तु $\angle 2$ और $\angle 3$ संगत कोण हैं और बराबर हैं।

अतः, आप कह सकते हैं कि

$m \parallel n$ (संगत कोण अभिगृहीत का विलोम)

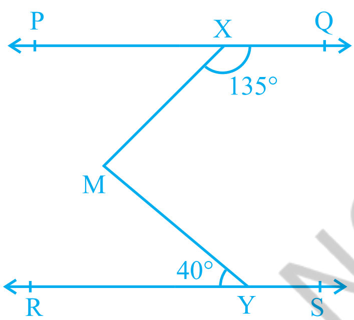
इस परिणाम को एक प्रमेय के रूप में निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है:

प्रमेय 6.2 : *वे रेखाएँ जो एक ही रेखा के समांतर हों, परस्पर समांतर होती हैं।*

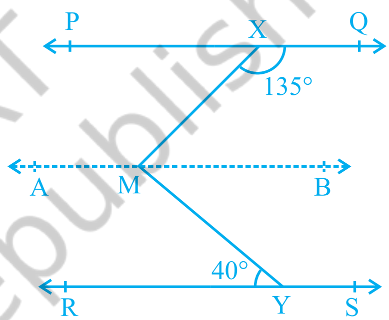
टिप्पणी : उपरोक्त गुण को दो से अधिक रेखाओं के लिए भी लागू किया जा सकता है।

आइए अब समांतर रेखाओं से संबंधित कुछ प्रश्न हल करें:

उदाहरण 4 : आकृति 6.19 में, यदि PQ || RS, $\angle$ MXQ = 135° और $\angle$ MYR = 40° है, तो $\angle$ XMY ज्ञात कीजिए।



आकृति 6.19



आकृति 6.20

हल : यहाँ हमें m से होकर, रेखा PQ के समांतर एक रेखा AB खींचने की आवश्यकता है, जैसा कि आकृति 6.20 में दिखाया गया है। अब, AB || PQ और PQ || RS है।

अतः, AB || RS है। (क्यों?)

अब, $\angle$ QXM + $\angle$ XMB = 180°

(AB || PQ, तिर्यक रेखा XM के एक ही ओर के अंतः कोण)

परन्तु, $\angle$ QXM = 135° है। इसलिए,

135° + $\angle$ XMB = 180°

अतः, $\angle$ XMB = 45° (1)

अब, $\angle$ BMY = $\angle$ MYR (AB || RS, एकांतर कोण)

अतः, $\angle$ BMY = 40° (2)

(1) और (2) को जोड़ने पर, आपको प्राप्त होगा :

$$\angle XMB + \angle BMY = 45° + 40°$$

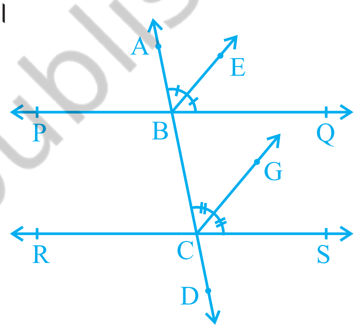
अर्थात, $\angle XMY = 85°$

उदाहरण 5 : यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार प्रतिच्छेद करे कि संगत कोणों के एक युग्म के समद्विभाजक परस्पर समांतर हों, तो सिद्ध कीजिए कि दोनों रेखाएँ भी परस्पर समांतर होती हैं।

हल : आकृति 6.21 में, एक तिर्यक रेखा AD दो रेखाओं PQ और RS को क्रमशः बिंदुओं B और C पर प्रतिच्छेद करती है। किरण BE, $\angle ABQ$ की समद्विभाजक है और किरण CG, $\angle BCS$ की समद्विभाजक है तथा BE || CG है।

हमें सिद्ध करना है कि PQ || RS है।

यह दिया है कि किरण BE, $\angle ABQ$ की समद्विभाजक है।



आकृति 6.21

अतः, $\angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABQ$ (1)

इसी प्रकार किरण CG, $\angle BCS$ की समद्विभाजक है।

अतः, $\angle BCG = \frac{1}{2} \angle BCS$ (2)

परन्तु, BE || CG है और AD एक तिर्यक रेखा है।

अतः, $\angle ABE = \angle BCG$

(संगत कोण अभिगृहीत) (3)

(3) में, (1) और (2) को प्रतिस्थापित करने पर, आपको प्राप्त होगा:

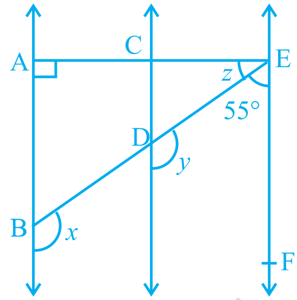
$$\frac{1}{2} \angle ABQ = \frac{1}{2} \angle BCS$$

अर्थात्, $\angle ABQ = \angle BCS$

परन्तु, ये तिर्यक रेखा AD द्वारा रेखाओं PQ और RS के साथ बनाए गए संगत कोण हैं और ये बराबर हैं।

अत:, $PQ \parallel RS$

(संगत कोण अभिगृहीत का विलोम)



आकृति 6.22

उदाहरण 6 : आकृति 6.22 में, $AB \parallel CD$ और $CD \parallel EF$ है। साथ ही, $EA \perp AB$ है। यदि $\angle BEF = 55°$ है, तो x, y और z के मान ज्ञात कीजिए।

हल : $y + 55° = 180°$ ($CD \parallel EF$, तिर्यक रेखा ED के एक ही ओर के अंत: कोण)

अत:, $y = 180° - 55° = 125°$

पुन:, $x = y$ ($AB \parallel CD$, संगत कोण अभिगृहीत)

इसलिए, $x = 125°$

अब चूँकि $AB \parallel CD$ और $CD \parallel EF$ है, इसलिए $AB \parallel EF$ है।

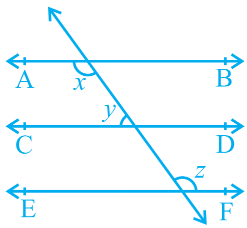
अत:, $\angle EAB + \angle FEA = 180°$

(तिर्यक रेखा EA के एक ही ओर के अंत: कोण)

इसलिए, $90° + z + 55° = 180°$

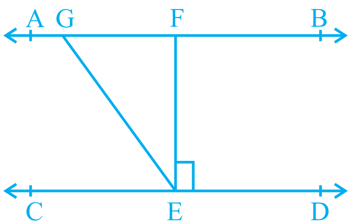
जिससे, $z = 35°$ प्राप्त होता है।

प्रश्नावली 6.2



आकृति 6.23

1. आकृति 6.23 में, यदि $AB \parallel CD$, $CD \parallel EF$ और $y : z = 3 : 7$ है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

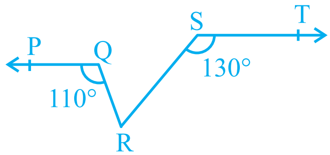


आकृति 6.24

2. आकृति 6.24 में, यदि $AB \parallel CD$, $EF \perp CD$ और $\angle GED = 126°$ है, तो $\angle AGE$, $\angle GEF$ और $\angle FGE$ ज्ञात कीजिए।

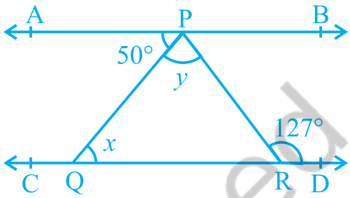
3. आकृति 6.25 में, यदि PQ || ST, $\angle$ PQR = 110° और $\angle$ RST = 130° है, तो $\angle$ QRS ज्ञात कीजिए।

[**संकेत :** बिंदु R से होकर ST के समांतर एक रेखा खींचिए।]



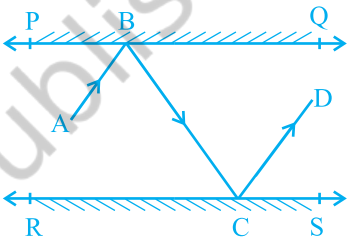
आकृति 6.25

4. आकृति 6.26 में, यदि AB || CD, $\angle$ APQ = 50° और $\angle$ PRD = 127° है, तो x और y ज्ञात कीजिए।



आकृति 6.26

5. आकृति 6.27 में, PQ और RS दो दर्पण हैं जो एक दूसरे के समांतर रखे गए हैं। एक आपतन किरण (incident ray) AB, दर्पण PQ से B पर टकराती है और परावर्तित किरण (reflected ray) पथ BC पर चलकर दर्पण RS से C पर टकराती है तथा पुनः CD के अनुदिश परावर्तित हो जाती है। सिद्ध कीजिए कि AB || CD है।



आकृति 6.27

6.6 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्न बिंदुओं का अध्ययन किया है:

1. यदि एक किरण एक रेखा पर खड़ी हो, तो इस प्रकार बने दोनों आसन्न कोणों का योग 180° होता है और विलोमतः यदि दो आसन्न कोणों का योग 180° है, तो उनकी अउभयनिष्ठ भुजाएँ एक रेखा बनाती हैं। इन गुणों को मिलाकर रैखिक युग्म अभिगृहीत कहते हैं।
2. यदि दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करें, तो शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते हैं।
3. वे रेखाएँ जो एक ही रेखा के समांतर होती हैं परस्पर समांतर होती हैं।

0963CH07

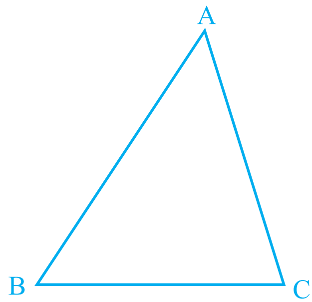
अध्याय 7

त्रिभुज

7.1 भूमिका

आप पिछली कक्षाओं में, त्रिभुजों और उनके विभिन्न गुणों के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। आप जानते हैं कि तीन प्रतिच्छेदी रेखाओं द्वारा बनाई गई एक बंद आकृति (closed figure) एक *त्रिभुज* (*triangle*) कहलाती है ('त्रि' का अर्थ है 'तीन')। एक त्रिभुज की तीन भुजाएँ, तीन कोण और तीन शीर्ष होते हैं। उदाहरणार्थ, आकृति 7.1 में दिए त्रिभुज ABC, जिसे Δ ABC से व्यक्त करते हैं, की तीन भुजाएँ AB, BC और CA हैं, $\angle$ A, $\angle$ B और $\angle$ C इसके तीन कोण हैं तथा A, B और C इसके तीन शीर्ष हैं।

अध्याय 6 में, आप त्रिभुजों के कुछ गुणों का भी अध्ययन कर चुके हैं। इस अध्याय में, आप त्रिभुजों की सर्वांगसमता (congruence), सर्वांगसमता के नियमों, त्रिभुजों के कुछ अन्य गुणों और त्रिभुजों में असमिकाओं (inequalities) के बारे में विस्तृत रूप से अध्ययन करेंगे। आप पिछली कक्षाओं के इन गुणों में से अधिकतर गुणों की सत्यता की जाँच क्रियाकलापों द्वारा कर चुके हैं। यहाँ हम इनमें से कुछ गुणों को सिद्ध भी करेंगे।



आकृति 7.1

7.2 त्रिभुजों की सर्वांगसमता

आपने यह अवश्य ही देखा होगा कि आपकी फोटो की एक ही साइज की दो प्रतियाँ सर्वसम (identical) होती हैं। इसी प्रकार, एक ही माप की दो चूड़ियाँ और एक ही बैंक द्वारा जारी किए गए दो एटीएम (ATM) कार्ड सर्वसम होते हैं। आपने देखा होगा कि यदि एक ही वर्ष

में ढले (बने) दो एक रुपए के सिक्कों में से एक को दूसरे पर रखें, तो वे एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेते हैं।

क्या आपको याद है कि ऐसी आकृतियों को कैसी आकृतियाँ कहते हैं? नि:संदेह ये **सर्वांगसम आकृतियाँ (congruent figures)** कहलाती हैं ('सर्वांगसम' का अर्थ है 'सभी प्रकार से बराबर', अर्थात् वे आकृतियाँ जिनके समान आकार और समान माप हैं)।

अब एक ही त्रिज्या के दो वृत्त खींचिए और एक को दूसरे पर रखिए। आप क्या देखते हैं? ये एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेते हैं और हम इन्हें *सर्वांगसम वृत्त* कहते हैं।

इसी क्रियाकलाप की एक ही माप की भुजाओं वाले दो वर्गों को खींच कर और फिर एक वर्ग को दूसरे वर्ग पर रखकर (देखिए आकृति 7.2) अथवा बराबर भुजाओं वाले दो समबाहु त्रिभुजों को एक दूसरे पर रखकर, पुनरावृत्ति कीजिए। आप देखेंगे कि वर्ग सर्वांगसम हैं और समबाहु त्रिभुज भी सर्वांगसम हैं।

आकृति 7.2

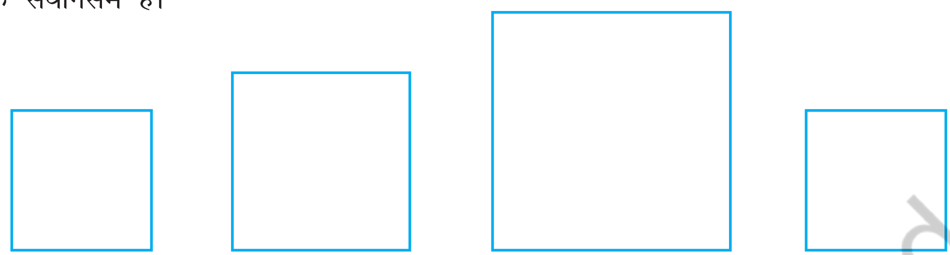
आप सोच सकते हैं कि हम सर्वांगसमता का अध्ययन क्यों कर रहे हैं। आपने अपने रेफ्रीजरेटर में बर्फ की ट्रे (ice tray) अवश्य ही देखी होगी। ध्यान दीजिए कि बर्फ जमाने के लिए बने सभी खाँचे सर्वांगसम हैं। ट्रे में (खाँचों के लिए प्रयोग किए गए साँचों की गहराइयाँ भी सर्वांगसम होती हैं (ये सभी आयताकार या सभी वृत्ताकार या सभी त्रिभुजाकार हो सकते हैं)। अत:, जब भी सर्वसम (एक जैसी) वस्तुएँ बनानी होती हैं, तो साँचे बनाने के लिए सर्वांगसमता की संकल्पना का प्रयोग किया जाता है।

कभी-कभी आपको अपने पेन के रिफिल (refill) बदलने में भी कठिनाई हो सकती है, यदि नया रिफिल आपके पेन के साइज का न हो। स्पष्टत: रिफिल तभी पेन में लग पाएगा, जबकि पुरानी रिफिल और नया रिफिल सर्वांगसम होंगे। इस प्रकार, आप दैनिक जीवन की स्थितियों में ऐसे अनेक उदाहरण ज्ञात कर सकते हैं, जहाँ वस्तुओं की सर्वांगसमता का उपयोग होता है।

क्या आप सर्वांगसम आकृतियों के कुछ और उदाहरण सोच सकते हैं?

अब, निम्न में से कौन-कौन सी आकृतियाँ आकृति 7.3 (i) में दिए गए वर्ग के सर्वांगसम नहीं हैं?

आकृति 7.3 (ii) और आकृति 7.3 (iii) में दिए बड़े वर्ग स्पष्टत: आकृति 7.3 (i) के वर्ग के सर्वांगसम नहीं हैं। परन्तु आकृति 7.3 (iv) में दिया हुआ वर्ग आकृति 7.3 (i) में दिए वर्ग के सर्वांगसम है।

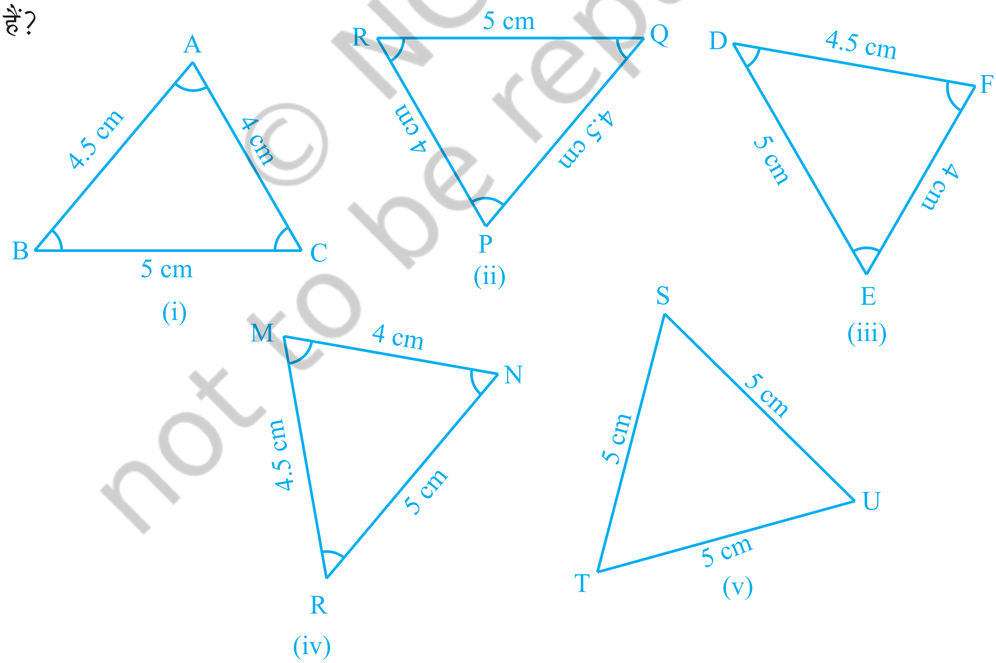


आकृति 7.3

आइए अब दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता की चर्चा करें।

आप पहले से यह जानते हैं कि दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि एक त्रिभुज की भुजाएँ और कोण दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं और कोणों के बराबर हों।

अब, निम्न में से कौन-कौन से त्रिभुज आकृति 7.4 (i) में दिए त्रिभुज ABC के सर्वांगसम हैं?



आकृति 7.4

आकृति 7.4 (ii) से आकृति 7.4 (v) तक के प्रत्येक त्रिभुज को काट कर उसे पलट कर Δ ABC पर रखने का प्रयत्न कीजिए। देखिए कि आकृतियों 7.4 (ii), (iii) और (iv) में दिए त्रिभुज Δ ABC के सर्वांगसम हैं, जबकि 7.4 (v) का Δ TSU, Δ ABC के सर्वांगसम नहीं है।

यदि Δ PQR, Δ ABC के सर्वांगसम है, तो हम $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ लिखते हैं।

ध्यान दीजिए कि जब $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ हो, तो Δ PQR की भुजाएँ Δ ABC की संगत बराबर भुजाओं पर पड़ेंगी और ऐसा ही कोणों के लिए भी होगा।

अर्थात् भुजा PQ भुजा AB को ढकती है, भुजा QR भुजा BC को ढकती है और भुजा RP भुजा CA को ढकती है; कोण P कोण A को ढकता है, कोण Q कोण B को ढकता है और कोण R कोण C को ढकता है। साथ ही, दोनों त्रिभुजों के शीर्षों में एक-एक संगतता (one-one correspondence) है। अर्थात् शीर्ष P शीर्ष A के संगत है, शीर्ष Q शीर्ष B के संगत है और शीर्ष R शीर्ष C के संगत है। इसे निम्न रूप में लिखा जाता है :

$$P \leftrightarrow A,\ Q \leftrightarrow B,\ R \leftrightarrow C$$

ध्यान दीजिए कि इस संगतता के अंतर्गत, $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ है। परन्तु इसे $\Delta QRP \cong \Delta ABC$ लिखना गलत होगा।

इसी प्रकार, आकृति 7.4 (iii) के लिए,

$$FD \leftrightarrow AB,\ DE \leftrightarrow BC \text{ और } EF \leftrightarrow CA$$

तथा $$F \leftrightarrow A,\ D \leftrightarrow B \text{ और } E \leftrightarrow C \text{ है।}$$

इसलिए, $\Delta FDE \cong \Delta ABC$ लिखना सही है, परन्तु $\Delta DEF \cong \Delta ABC$ लिखना गलत होगा।

आकृति 7.4 (iv) के त्रिभुज और Δ ABC के बीच संगतता लिखिए।

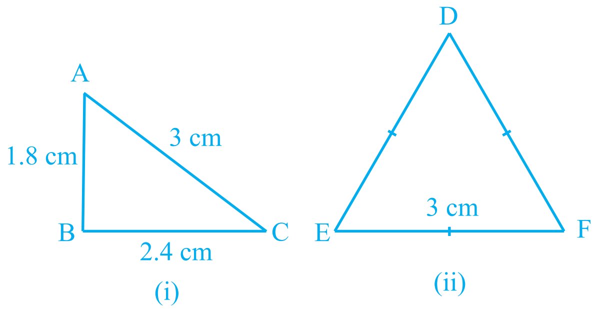
अतः, त्रिभुजों की सर्वांगसमता को सांकेतिक रूप में लिखने के लिए, उनके शीर्षों की संगतता को सही प्रकार से लिखना आवश्यक है।

ध्यान दीजिए कि **सर्वांगसम त्रिभुजों में संगत भाग बराबर होते हैं** और *'सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भागों* के लिए' हम संक्षेप में 'CPCT' लिखते हैं।

7.3 त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए कसौटियाँ

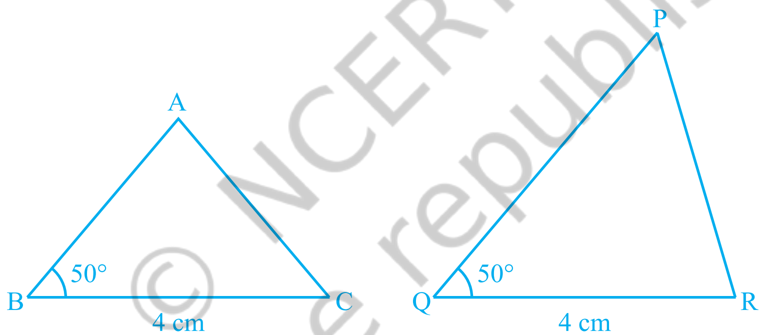
पिछली कक्षाओं में, आप त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए चार कसौटियाँ (criteria) या नियम (rules) पढ़ चुके हैं। आइए इनका पुनर्विलोकन करें।

एक भुजा 3 cm लेकर दो त्रिभुज खींचिए (देखिए आकृति 7.5)। क्या ये त्रिभुज सर्वांगसम हैं? ध्यान दीजिए कि ये त्रिभुज सर्वांगसम नहीं हैं।



आकृति 7.5

अब दो त्रिभुज खींचिए जिनमें एक भुजा 4 cm है और एक कोण 50° है (देखिए आकृति 7.6)। क्या ये त्रिभुज सर्वांगसम हैं?



आकृति 7.6

देखिए कि ये दोनों त्रिभुज सर्वांगसम नहीं हैं।

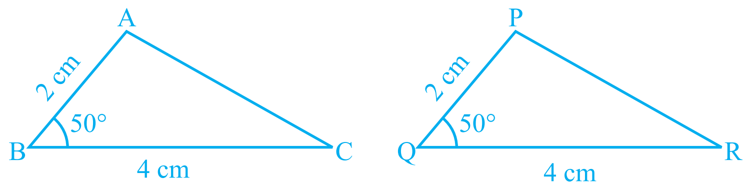
इस क्रियाकलाप को त्रिभुजों के कुछ और युग्म खींच कर दोहराइए।

अत:, भुजाओं के एक युग्म की समता अथवा भुजाओं के एक युग्म और कोणों के एक युग्म की समता हमें सर्वांगसम त्रिभुज देने के लिए पर्याप्त नहीं है।

उस स्थिति में क्या होगा जब बराबर कोणों की भुजाओं का अन्य युग्म भी बराबर हो जाए?

आकृति 7.7 में $BC = QR$, $\angle B = \angle Q$ और साथ ही $AB = PQ$ है। अब आप ΔABC और ΔPQR की सर्वांगसमता के बारे में क्या कह सकते हैं?

पिछली कक्षाओं से याद कीजिए कि इस स्थिति में, दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। आप इसका सत्यापन, Δ ABC को काट कर और उसे Δ PQR पर रख कर कर सकते हैं। इस क्रियाकलाप को त्रिभुजों के अन्य युग्म लेकर दोहराइए। क्या आप देखते हैं कि दो भुजाओं और अंतर्गत कोण की समता त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए पर्याप्त है? हाँ, यह पर्याप्त है।



आकृति 7.7

यह त्रिभुजों की सर्वांगसमता की पहली कसौटी (criterion) है।

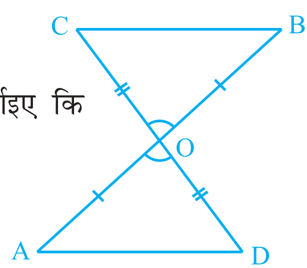
अभिगृहीत 7.1 (SAS सर्वांगसमता नियम) : *दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनका अंतर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और उनके अंतर्गत कोण के बराबर हों।*

इस परिणाम को इससे पहले ज्ञात परिणामों की सहायता से सिद्ध नहीं किया जा सकता है और इसीलिए इसे एक अभिगृहीत के रूप में सत्य मान लिया गया है (देखिए परिशिष्ट 1)।

आइए अब कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : आकृति 7.8 में OA = OB और OD = OC है। दर्शाइए कि

(i) Δ AOD $\cong$ Δ BOC और (ii) AD $\parallel$ BC है।



आकृति 7.8

हल : (i) Δ AOD और Δ BOC में,

$$\left.\begin{aligned} OA &= OB \\ OD &= OC \end{aligned}\right\} \text{(दिया है)}$$

साथ ही, क्योंकि $\angle$ AOD और $\angle$ BOC शीर्षाभिमुख कोणों का एक युग्म है, अत:

$$\angle AOD = \angle BOC$$

इसलिए, Δ AOD $\cong$ Δ BOC (SAS सर्वांगसमता नियम द्वारा)

(ii) सर्वांगसम त्रिभुजों AOD और BOC में, अन्य संगत भाग भी बराबर होंगे।

अतः, $\angle OAD = \angle OBC$ है। परन्तु ये रेखाखंडों AD और BC के लिए एकांतर कोणों का एक युग्म बनाते हैं।

अतः, $AD \parallel BC$ है।

उदाहरण 2 : AB एक रेखाखंड है और रेखा l इसका लम्ब समद्विभाजक है। यदि l पर स्थित P कोई बिंदु है, तो दर्शाइए कि P बिंदुओं A और B से समदूरस्थ (equidistant) है।

हल : $l \perp AB$ है और AB के मध्य-बिंदु C से होकर जाती है (देखिए आकृति 7.9)। आपको दर्शाना है कि PA = PB है। इसके लिए Δ PCA और Δ PCB पर विचार कीजिए। हमें प्राप्त है :

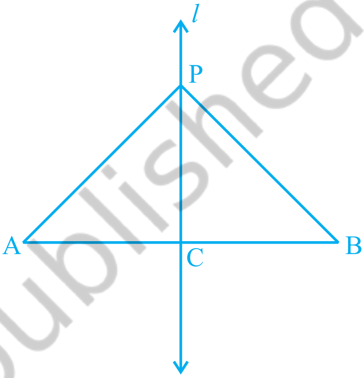
AC = BC (C, AB का मध्य-बिंदु है)

$\angle PCA = \angle PCB = 90°$ (दिया है)

PC = PC (उभयनिष्ठ)

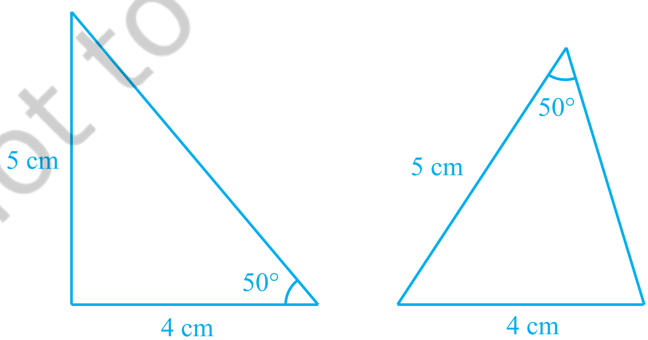
अतः, $\Delta PCA \cong \Delta PCB$ (SAS नियम)

इसलिए, PA = PB (सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ)



आकृति 7.9

आइए अब दो त्रिभुजों की रचना करें जिनकी दो भुजाएँ 4 cm और 5 cm हैं और एक कोण 50° है तथा साथ ही यह कोण बराबर भुजाओं के बीच अंतर्गत कोण नहीं है (देखिए आकृति 7.10)। क्या ये त्रिभुज सर्वांगसम हैं?



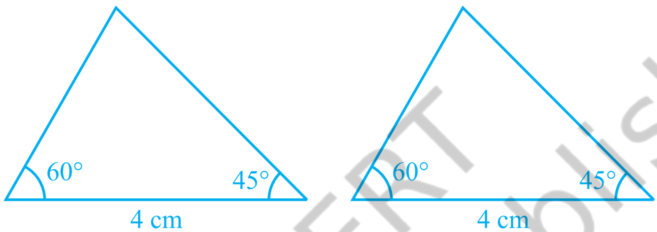
आकृति 7.10

ध्यान दीजिए कि ये दोनों त्रिभुज सर्वांगसम नहीं हैं।

त्रिभुजों के कुछ अन्य युग्म लेकर इस क्रियाकलाप को दोहराइए। आप देखेंगे कि दोनों त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए यह आवश्यक है कि बराबर कोण बराबर भुजाओं के अंतर्गत कोण हो।

अत:, SAS *नियम तो सत्य है, परन्तु* ASS या SSA नियम सत्य नहीं है।

अब, ऐसे दो त्रिभुजों की रचना करने का प्रयत्न करिए, जिनमें दो कोण 60° और 45° हों तथा इन कोणों की अंतर्गत भुजा 4 cm हो (देखिए आकृति 7.11)।



आकृति 7.11

इन दोनों त्रिभुजों को काटिए और एक त्रिभुज को दूसरे के ऊपर रखिए। आप क्या देखते हैं? देखिए कि एक त्रिभुज दूसरे त्रिभुज को पूर्णतया ढक लेता है, अर्थात् दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं। कुछ और त्रिभुजों को लेकर इस क्रियाकलाप को दोहराइए। आप देखेंगे कि त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए, दो कोणों और उनकी अंतर्गत भुजा की समता पर्याप्त है।

यह परिणाम **कोण-भुजा-कोण** (Angle-Side-Angle) कसौटी है और इसे **ASA सर्वांगसमता कसौटी** लिखा जाता है। आप पिछली कक्षाओं में, इसकी सत्यता की जाँच कर चुके हैं। आइए इस परिणाम को सिद्ध करें।

चूँकि इस परिणाम को सिद्ध किया जा सकता है, इसलिए इसे एक **प्रमेय (theorem)** कहा जाता है। इसे सिद्ध करने के लिए, हम SAS सर्वांगसमता नियम का प्रयोग करेंगे।

प्रमेय 7.1 (ASA सर्वांगसमता नियम) : *दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि एक त्रिभुज के दो कोण और उनकी अंतर्गत भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और उनकी अंतर्गत भुजा के बराबर हों।*

उपपत्ति : हमें दो त्रिभुज ABC और DEF दिए हैं, जिनमें $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ और $BC = EF$ है। हमें $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ सिद्ध करना है।

दोनों त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए देखिए कि यहाँ तीन स्थितियाँ संभव हैं।

स्थिति (i) : मान लीजिए $AB = DE$ है(देखिए आकृति 7.12)।

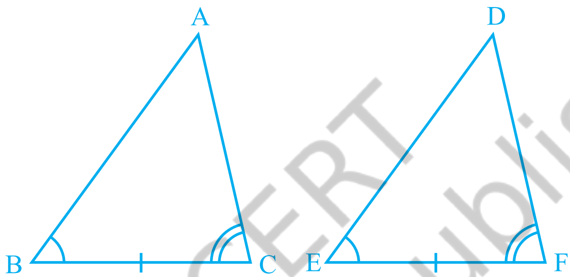
अब आप क्या देखते हैं? आप देख सकते हैं कि

$AB = DE$ (कल्पना की है)

$\angle B = \angle E$ (दिया है)

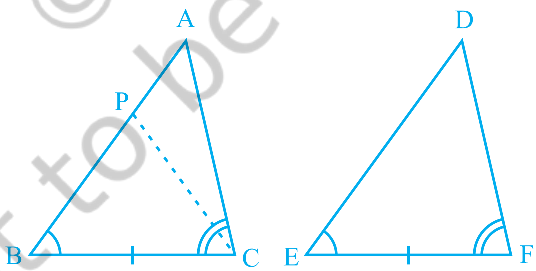
$BC = EF$ (दिया है)

अतः, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (SAS नियम द्वारा)



आकृति 7.12

स्थिति (ii) : मान लीजिए, यदि संभव है तो, $AB > DE$ है। इसलिए, हम AB पर एक बिंदु P ऐसा ले सकते हैं कि $PB = DE$ हो (देखिए आकृति 7.13)।



आकृति 7.13

अब ΔPBC और ΔDEF में,

$PB = DE$ (रचना से)

$\angle B = \angle E$ (दिया है)

$BC = EF$ (दिया है)

अतः, हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि

$$\Delta\, PBC \cong \Delta\, DEF \quad \text{(SAS सर्वांगसमता अभिगृहीत द्वारा)}$$

चूँकि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं, इसलिए इनके संगत भाग बराबर होने चाहिए।

अतः, $\angle PCB = \angle DFE$

परन्तु हमें दिया है कि

$$\angle ACB = \angle DFE$$

अतः, $\angle ACB = \angle PCB$

परन्तु क्या यह संभव है?

यह तभी संभव है, जब P बिंदु A के साथ संपाती हो।

या $BA = ED$

अतः, $\Delta\, ABC \cong \Delta\, DEF$ (SAS अभिगृहीत द्वारा)

स्थिति (iii) : यदि $AB < DE$ हो, तो हम DE पर एक बिंदु M इस प्रकार ले सकते हैं कि $ME = AB$ हो। अब स्थिति (ii) वाले तर्कण को दोहराते हुए, हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $AB = DE$ है और इसीलिए $\Delta\, ABC \cong \Delta\, DEF$ है।

अब मान लीजिए कि दो त्रिभुजों में दो कोणों के युग्म और संगत भुजाओं का एक युग्म बराबर हैं, परन्तु ये भुजाएँ बराबर कोणों के युग्मों की अंतर्गत भुजाएँ नहीं हैं। क्या ये त्रिभुज अभी भी सर्वांगसम हैं? आप देखेंगे कि ये त्रिभुज सर्वांगसम हैं। क्या आप इसका कारण बता सकते हैं?

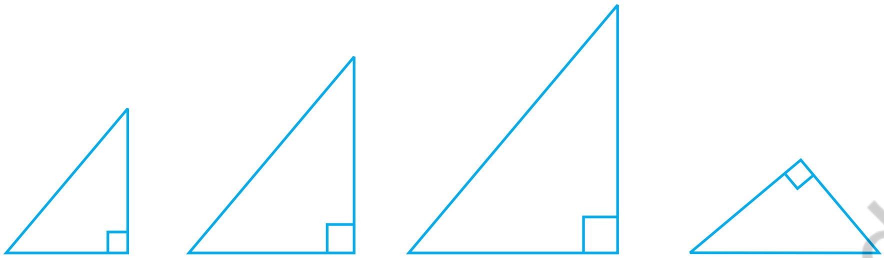
आप जानते हैं कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग $180°$ होता है। अतः त्रिभुजों के कोणों के दो युग्म बराबर होने पर उनके तीसरे कोण भी बराबर होंगे ($180°$ – दोनों बराबर कोणों का योग)।

अतः, *दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि इन त्रिभुजों के दो कोणों के युग्म बराबर हों और संगत भुजाओं का एक युग्म बराबर हो।* हम इसे **AAS सर्वांगसमता नियम** कह सकते हैं।

आइए अब निम्नलिखित क्रियाकलाप करें :

$40°$, $50°$ और $90°$ वाले कुछ त्रिभुज खींचिए।

आप ऐसे कितने त्रिभुज खींच सकते हें? वास्तव में, भुजाओं की विभिन्न लंबाइयाँ लेकर हम ऐसे जितने चाहे उतने त्रिभुज खींच सकते हैं (देखिए आकृति 7.14)।



आकृति 7.14

देखिए कि ये त्रिभुज सर्वांगसम हो भी सकते हैं और नहीं भी हो सकते हैं।

अतः, तीन कोणों की समता त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए पर्याप्त नहीं है। इसलिए, त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए, तीन बराबर भागों में से एक बराबर भाग भुजा अवश्य होना चाहिए।

आइए अब कुछ और उदाहरण लें।

उदाहरण 3 : रेखाखंड AB एक अन्य रेखाखंड CD के समांतर है और O रेखाखंड AD का मध्य-बिंदु है (देखिए आकृति 7.15)। दर्शाइए कि (i) $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (ii) O रेखाखंड BC का भी मध्य-बिंदु है।

हल : (i) Δ AOB और Δ DOC पर विचार कीजिए।

$\angle$ ABO = $\angle$ DCO (एकांतर कोण और तिर्यक रेखा BC के साथ AB || CD)

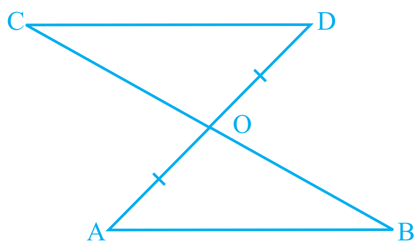
$\angle$ AOB = $\angle$ DOC (शीर्षाभिमुख कोण)

OA = OD (दिया है)

अतः, $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (AAS नियम)

(ii) OB = OC (CPCT)

अर्थात् O, रेखाखंड BC का भी मध्य-बिंदु है।

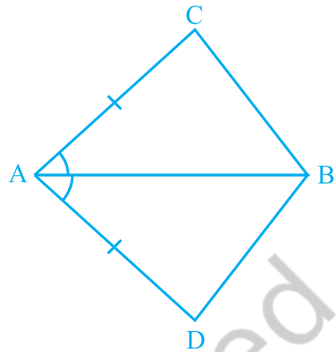


आकृति 7.15

प्रश्नावली 7.1

1. चतुर्भुज ACBD में, AC = AD है और AB कोण A को समद्विभाजित करता है (देखिए आकृति 7.16)। दर्शाइए कि $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ है।

BC और BD के बारे में आप क्या कह सकते हैं?



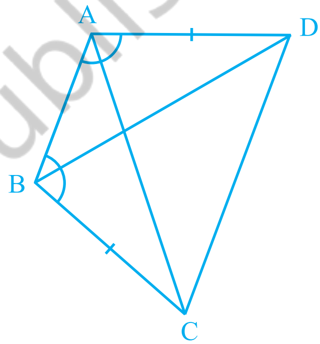
आकृति 7.16

2. ABCD एक चतुर्भुज है, जिसमें AD = BC और $\angle DAB = \angle CBA$ है (देखिए आकृति 7.17)। सिद्ध कीजिए कि

(i) $\Delta ABD \cong \Delta BAC$

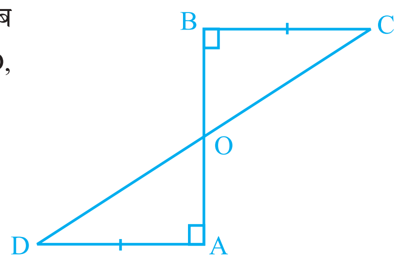
(ii) $BD = AC$

(iii) $\angle ABD = \angle BAC$



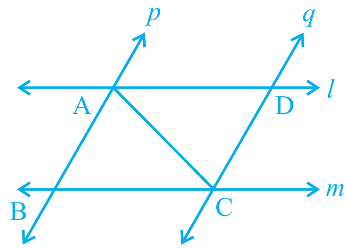
आकृति 7.17

3. एक रेखाखंड AB पर AD और BC दो बराबर लंब रेखाखंड हैं (देखिए आकृति 7.18)। दर्शाइए कि CD, रेखाखंड AB को समद्विभाजित करता है।



आकृति 7.18

4. l और m दो समांतर रेखाएँ हैं जिन्हें समांतर रेखाओं p और q का एक अन्य युग्म प्रतिच्छेदित करता है (देखिए आकृति 7.19)। दर्शाइए कि $\Delta\, ABC \cong \Delta\, CDA$ है।

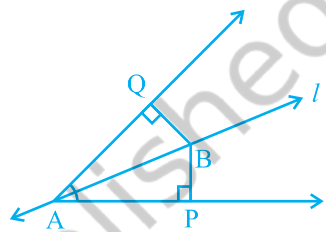


आकृति 7.19

5. रेखा l कोण A को समद्विभाजित करती है और B रेखा l पर स्थित कोई बिंदु है। BP और BQ कोण A की भुजाओं पर B से डाले गए लम्ब हैं (देखिए आकृति 7.20)। दर्शाइए कि

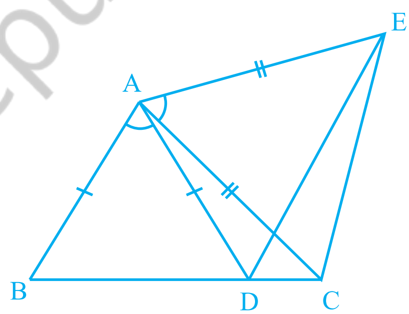
(i) $\Delta\, APB \cong \Delta\, AQB$

(ii) $BP = BQ$ है, अर्थात् बिंदु B कोण की भुजाओं से समदूरस्थ है



आकृति 7.20

6. आकृति 7.21 में, $AC = AE$, $AB = AD$ और $\angle BAD = \angle EAC$ है। दर्शाइए कि $BC = DE$ है।

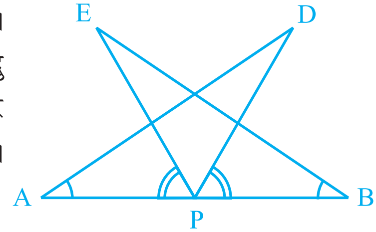


आकृति 7.21

7. AB एक रेखाखंड है और P इसका मध्य-बिंदु है। D और E रेखाखंड AB के एक ही ओर स्थित दो बिंदु इस प्रकार हैं कि $\angle BAD = \angle ABE$ और $\angle EPA = \angle DPB$ है। (देखिए आकृति 7.22)। दर्शाइए कि

(i) $\Delta\, DAP \cong \Delta\, EBP$

(ii) $AD = BE$



आकृति 7.22

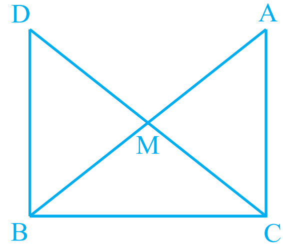
8. एक समकोण त्रिभुज ABC में, जिसमें कोण C समकोण है, M कर्ण AB का मध्य-बिंदु है। C को M से मिलाकर D तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि DM = CM है। बिंदु D को बिंदु B से मिला दिया जाता है (देखिए आकृति 7.23)। दर्शाइए कि

(i) Δ AMC $\cong$ Δ BMD

(ii) $\angle$ DBC एक समकोण है

(iii) Δ DBC $\cong$ Δ ACB

(iv) CM = $\frac{1}{2}$ AB



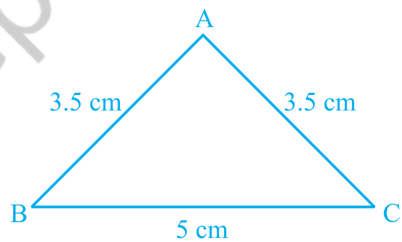
आकृति 7.23

7.4 एक त्रिभुज के कुछ गुण

पिछले अनुच्छेद में, आपने त्रिभुजों की सर्वांगसमता की दो कसौटियों का अध्ययन किया है। आइए इन परिणामों का एक ऐसे त्रिभुज के कुछ गुणों का अध्ययन करने में प्रयोग करें जिसकी दो भुजाएँ बराबर होती हैं।

नीचे दिया गया क्रियाकलाप कीजिए:

एक त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी दो भुजाएँ बराबर हों। मान लीजिए दो भुजाएँ 3.5 cm लंबाई की हैं और एक भुजा 5 cm लंबाई की है (देखिए आकृति 7.24)। आप पिछली कक्षाओं में, ऐसी रचनाएँ कर चुके हैं।



आकृति 7.24

क्या आपको याद है कि इस त्रिभुज को क्या कहते हैं?

एक त्रिभुज जिसकी दो भुजाएँ बराबर हों **समद्विबाहु त्रिभुज (isosceles triangle)** कहलाता है। अतः, आकृति 7.24 का Δ ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें AB = AC है।

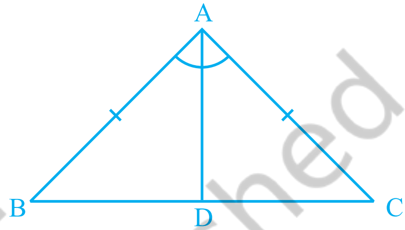
अब $\angle$ B और $\angle$ C को मापिए। आप क्या देखते हैं?

विभिन्न भुजाओं वाले अन्य समद्विबाहु त्रिभुज लेकर इस क्रियाकलाप को दोहराइए। आप देख सकते हैं कि ऐसे प्रत्येक त्रिभुज में बराबर भुजाओं के सम्मुख (सामने के) कोण बराबर हैं।

यह एक अति महत्वपूर्ण परिणाम है और प्रत्येक समद्विबाहु त्रिभुज के लिए सत्य है। इसे नीचे दशाई विधि के अनुसार सिद्ध किया जा सकता है:

प्रमेय 7.2 : *एक समद्विबाहु त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।*

इस परिणाम को कई विधियों से सिद्ध किया जा सकता है। इनमें से एक उपपत्ति नीचे दी जा रही है।



आकृति 7.25

उपपत्ति : हमें एक समद्विबाहु ΔABC दिया है, जिसमें $AB = AC$ है। हमें $\angle B = \angle C$ सिद्ध करना है।

आइए $\angle A$ का समद्विभाजक खींचे। मान लीजिए यह BC से D पर मिलता है (देखिए आकृति 7.25)।

अब, ΔBAD और ΔCAD में,

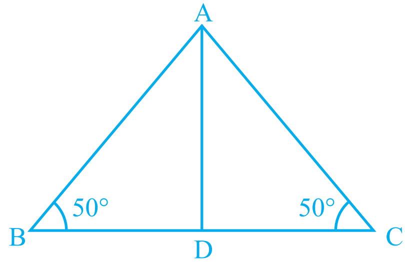
	$AB = AC$	(दिया है)
	$\angle BAD = \angle CAD$	(रचना से)
	$AD = AD$	(उभयनिष्ठ)
अतः,	$\Delta BAD \cong \Delta CAD$	(SAS नियम द्वारा)
इसलिए,	$\angle ABD = \angle ACD$	(CPCT)
अर्थात्	$\angle B = \angle C$	

क्या इसका विलोम भी सत्य है? अर्थात्

यदि किसी त्रिभुज के दो कोण बराबर हों, तो क्या हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि उनकी सम्मुख भुजाएँ भी बराबर होंगी?

नीचे दिया क्रियाकलाप कीजिए :

एक ΔABC की रचना कीजिए जिसमें BC किसी भी लंबाई वाली एक भुजा है और $\angle B = \angle C = 50^\circ$ है। $\angle A$ का समद्विभाजक खींचिए और मान लीजिए कि यह BC को D पर प्रतिच्छेद करता है (देखिए आकृति 7.26)।



आकृति 7.26

त्रिभुज ABC को कागज में से काट लीजिए और इसे AD के अनुदिश मोड़िए ताकि शीर्ष C शीर्ष B पर गिरे (पड़े)।

AC और AB के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

देखिए कि AC, AB को पूर्णतया ढक लेती है।

अतः, AC = AB

इसी क्रियाकलाप को ऐसे ही कुछ अन्य त्रिभुज लेकर दोहराइए। प्रत्येक बार आप देखेंगे कि एक त्रिभुज के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ बराबर हैं। अतः, हम निम्न प्रमेय प्राप्त करते हैं :

प्रमेय 7.3 : *किसी त्रिभुज के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।*

यह प्रमेय 7.2 का विलोम है।

आप इस प्रमेय को ASA सर्वांगसमता नियम का प्रयोग करके सिद्ध कर सकते हैं।

आइए इन परिणामों को स्पष्ट करने के लिए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 4 : Δ ABC में, $\angle$ A का समद्विभाजक AD भुजा BC पर लम्ब है (देखिए आकृति 7.27)। दर्शाइए कि AB = AC है और Δ ABC समद्विबाहु है।

हल : Δ ABD और Δ ACD में,

$\angle$ BAD = $\angle$ CAD (दिया है)

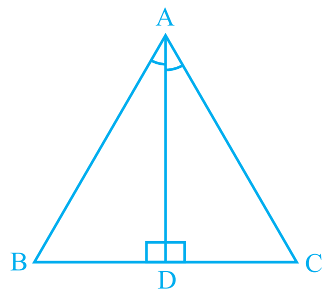
AD = AD (उभयनिष्ठ)

$\angle$ ADB = $\angle$ ADC = 90° (दिया है)

अतः, Δ ABD $\cong$ Δ ACD (ASA नियम)

इसलिए, AB = AC (CPCT)

इसी कारण Δ ABC समद्विबाहु है।



आकृति 7.27

उदाहरण 5 : E और F क्रमशः त्रिभुज ABC की बराबर भुजाओं AB और AC के मध्य-बिंदु हैं (देखिए आकृति 7.28)। दर्शाइए कि BF = CE है।

हल : Δ ABF और Δ ACE में,

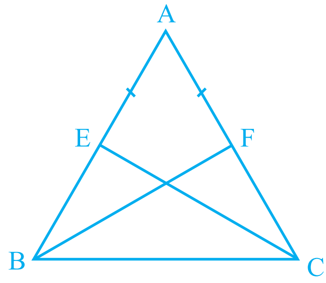
AB = AC (दिया है)

$\angle$ A = $\angle$ A (उभयनिष्ठ)

AF = AE (बराबर भुजाओं के आधे)

अत:, Δ ABF $\cong$ Δ ACE (SAS नियम)

इसलिए, BF = CE (CPCT)



आकृति 7.28

उदाहरण 6 : एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC जिसमें AB = AC है, की भुजा BC पर दो बिंदु D और E इस प्रकार हैं कि BE = CD है (देखिए आकृति 7.29)। दर्शाइए कि AD = AE है।

हल : Δ ABD और Δ ACE में,

AB = AC (दिया है) (1)

$\angle$ B = $\angle$ C (2)

(बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण)

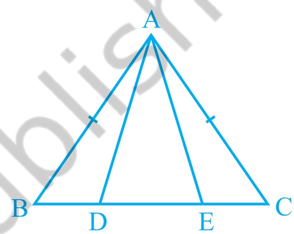
साथ ही, BE = CD (दिया है)

इसलिए, BE – DE = CD – DE

अर्थात्, BD = CE (3)

अत:, Δ ABD $\cong$ Δ ACE [(1), (2), (3) और SAS नियम द्वारा]

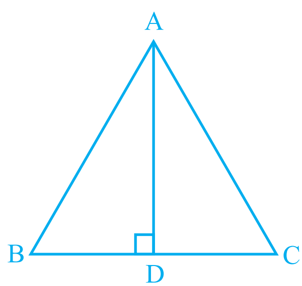
इससे प्राप्त होता है: AD = AE (CPCT)



आकृति 7.29

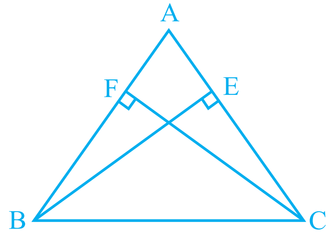
प्रश्नावली 7.2

1. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC में जिसमें AB = AC है, $\angle$B और $\angle$C के समद्विभाजक परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। A और O को जोड़िए। दर्शाइए कि
   (i) OB = OC
   (ii) AO कोण A को समद्विभाजित करता है
2. Δ ABC में AD भुजा BC का लम्ब समद्विभाजक है (देखिए आकृति 7.30)। दर्शाइए कि Δ ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें AB = AC है।



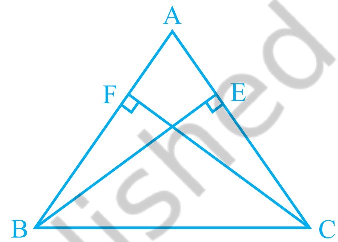
आकृति 7.30

3. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें बराबर भुजाओं AC और AB पर क्रमश: शीर्षलम्ब BE और CF खींचे गए हैं (देखिए आकृति 7.31)। दर्शाइए कि ये शीर्षलम्ब बराबर हैं।



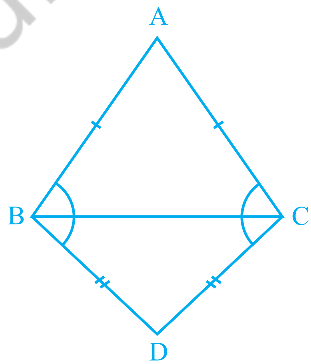
आकृति 7.31

4. ABC एक त्रिभुज है जिसमें AC और AB पर खींचे गए शीर्षलम्ब BE और CF बराबर हैं (देखिए आकृति 7.32)। दर्शाइए कि
   (i) $\Delta ABE \cong \Delta ACF$
   (ii) AB = AC, अर्थात् ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।



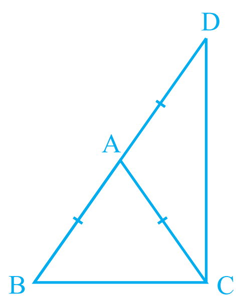
आकृति 7.32

5. ABC और DBC समान आधार BC पर स्थित दो समद्विबाहु त्रिभुज हैं (देखिए आकृति 7.33)। दर्शाइए कि $\angle ABD = \angle ACD$ है।



आकृति 7.33

6. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें AB = AC है। भुजा BA बिंदु D तक इस प्रकार बढ़ाई गई है कि AD = AB है (देखिए आकृति 7.34)। दर्शाइए कि $\angle BCD$ एक समकोण है।



आकृति 7.34

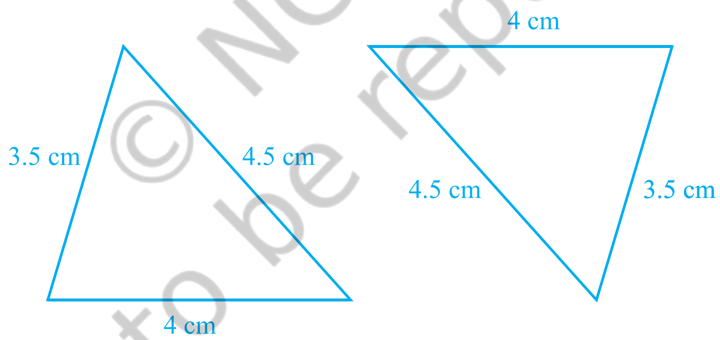
7. ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें $\angle A = 90°$ और $AB = AC$ है। $\angle B$ और $\angle C$ ज्ञात कीजिए।

8. दर्शाइए कि किसी समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण $60°$ होता है।

7.5 त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए कुछ और कसौटियाँ

आप इस अध्याय में, पहले यह देख चुके हैं कि एक त्रिभुज के तीनों कोणों के दूसरे त्रिभुज के तीनों कोणों के बराबर होने पर दोनों त्रिभुजों का सर्वांगसम होना आवश्यक नहीं है। आप सोच सकते हैं कि संभवतः एक त्रिभुज की तीनों भुजाओं के दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर होने पर त्रिभुज सर्वांगसम हो जाएँ। आप यह पिछली कक्षाओं में पढ़ चुके हैं कि ऐसी स्थिति में त्रिभुज निःसंदेह सर्वांगसम होते हैं।

इस धारणा को निश्चित करने के लिए, 4cm, 3.5cm और 4.5cm के दो त्रिभुज खींचिए (देखिए आकृति 7.35)। इन्हें काटकर, एक दूसरे पर रखिए। आप क्या देखते हैं? यदि बराबर भुजाओं को एक दूसरे पर रखा जाए। ये एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेते हैं अतः, दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं।



आकृति 7.35

इस क्रियाकलाप को कुछ अन्य त्रिभुज खींचकर दोहराइए। इस प्रकार, हम सर्वांगसमता के एक और नियम पर पहुँच जाते हैं:

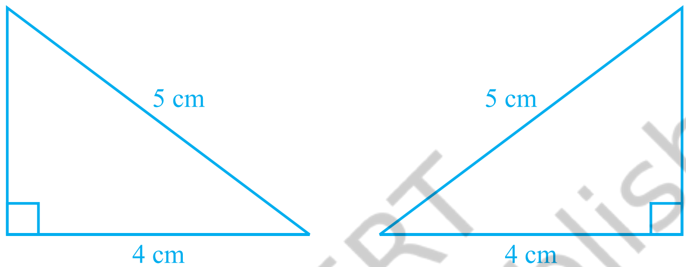
प्रमेय 7.4 (SSS सर्वांगसमता नियम) : *यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ एक अन्य त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।*

एक उपयुक्त रचना करके, इस प्रमेय को सिद्ध किया जा सकता है।

आप SAS सर्वांगसमता नियम में पहले ही देख चुके हैं कि बराबर कोणों के युग्म संगत बराबर भुजाओं के युग्मों के बीच में (अंतर्गत) होने चाहिए और यदि ऐसा नहीं हो, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम नहीं भी हो सकते हैं।

इस क्रियाकलाप को कीजिए :

दो समकोण त्रिभुज ऐसे खींचिए जिनमें प्रत्येक का कर्ण 5 सेमी और एक भुजा 4 cm की हो (देखिए आकृति 7.36)।



आकृति 7.36

इन्हें काटिए और एक दूसरे पर इस प्रकार रखिए कि इनकी बराबर भुजाएँ एक दूसरे पर आएँ। यदि आवश्यक हो, तो त्रिभुजों को घुमाइए। आप क्या देखते हैं?

आप देखते हैं कि दोनों त्रिभुज एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेते हैं और इसीलिए ये सर्वांगसम हैं। यही क्रियाकलाप समकोण त्रिभुजों के अन्य युग्म लेकर दोहराइए। आप क्या देखते हैं?

आप पाएँगे कि दोनों समकोण त्रिभुज सर्वांगसम होंगे, यदि उनके कर्ण बराबर हों और भुजाओं का एक युग्म बराबर हो। आप इस तथ्य की जाँच पिछली कक्षाओं में कर चुके हैं।

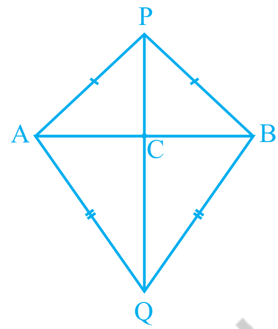
ध्यान दीजिए कि इस स्थिति में समकोण अंतर्गत कोण **नहीं** है।

इस प्रकार, आप निम्नलिखित सर्वांगसमता नियम पर पहुँच गए हैं:

प्रमेय 7.5 (RHS सर्वांगसमता नियम) : *यदि दो समकोण त्रिभुजों में, एक त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा क्रमशः दूसरे त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।*

ध्यान दीजिए कि यहाँ RHS **समकोण (Right angle) - कर्ण (Hypotenuse) - भुजा (Side)** को दर्शाता है।

आइए अब कुछ उदाहरण लें।



आकृति 7.37

उदाहरण 7 : AB एक रेखाखंड है तथा बिंदु P और Q इस रेखाखंड AB के विपरीत ओर इस प्रकार स्थित हैं कि इनमें से प्रत्येक A और B से समदूरस्थ है (देखिए आकृति 7.37)। दर्शाइए कि रेखा PQ रेखाखंड AB का लम्ब समद्विभाजक है।

हल : आपको PA = PB और QA = QB दिया हुआ है। आपको दर्शाना है कि $PQ \perp AB$ है और PQ रेखाखंड AB को समद्विभाजित करती है। मान लीजिए रेखा PQ रेखाखंड AB को C पर प्रतिच्छेद करती है। क्या आप इस आकृति में दो सर्वांगसम त्रिभुजों को देख सकते हैं?

आइए Δ PAQ और Δ PBQ लें।

इन त्रिभुजों में,

$AP = BP$ (दिया है)

$AQ = BQ$ (दिया है)

$PQ = PQ$ (उभयनिष्ठ)

अतः, $\Delta PAQ \cong \Delta PBQ$ (SSS नियम)

इसलिए, $\angle APQ = \angle BPQ$ (CPCT)

अब Δ PAC और Δ PBC को लीजिए। आपको प्राप्त है :

$AP = BP$ (दिया है)

$\angle APC = \angle BPC$ ($\angle APQ = \angle BPQ$ ऊपर सिद्ध किया है)

$PC = PC$ (उभयनिष्ठ)

अतः, $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ (SAS नियम)

इसलिए, $AC = BC$ (CPCT) (1)

और $\angle ACP = \angle BCP$ (CPCT)

साथ ही, $\angle ACP + \angle BCP = 180°$ (रैखिक युग्म)

इसलिए, $2\angle ACP = 180°$

या, $\angle ACP = 90°$ (2)

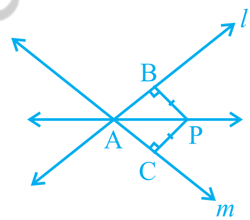
(1) और (2) से, आप निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि रेखा PQ रेखाखंड AB का लम्ब समद्विभाजक है।

[ध्यान दीजिए कि Δ PAQ और Δ PBQ की सर्वांगसमता दर्शाए बिना, आप यह नहीं दिखा सकते कि Δ PAC $\cong$ Δ PBC है, यद्यपि AP = BP (दिया है), PC =PC (उभयनिष्ठ) और $\angle$ PAC = $\angle$ PBC (Δ APB में बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण) है। यह इस कारण है कि इनसे हमें SSA नियम प्राप्त होता है, जो त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए सदैव मान्य नहीं है। साथ ही, कोण बराबर भुजाओं के अंतर्गत नहीं है।]

आइए कुछ और उदाहरण लें।

उदाहरण 8 : बिंदु A पर प्रतिच्छेद करने वाली दो रेखाओं l और m से समदूरस्थ एक बिंदु P है (देखिए आकृति 7.38)। दर्शाइए कि रेखा AP दोनों रेखाओं के बीच के कोण को समद्विभाजित करती है।

हल : आपको दिया है कि रेखाएँ l और m परस्पर A पर प्रतिच्छेद करती हैं। मान लीजिए PB $\perp$ l और PC $\perp$ m है। यह दिया है कि PB = PC है।



आकृति 7.38

आपको दर्शाना है कि $\angle$ PAB = $\angle$ PAC है।

अब, Δ PAB और Δ PAC में,

PB = PC (दिया है)

$\angle$ PBA = $\angle$ PCA = 90° (दिया है)

PA = PA (उभयनिष्ठ)

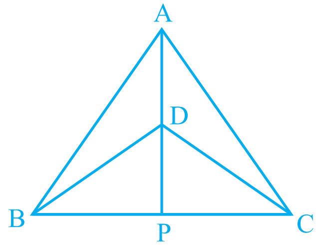
अतः, Δ PAB $\cong$ Δ PAC (RHS नियम)

इसलिए, $\angle$ PAB = $\angle$ PAC (CPCT)

ध्यान दीजिए कि यह परिणाम प्रश्नावली 7.1 के प्रश्न 5 में सिद्ध किए गए परिणाम का विलोम है।

प्रश्नावली 7.3

1. Δ ABC और Δ DBC एक ही आधार BC पर बने दो समद्विबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कि A और D भुजा BC के एक ही ओर स्थित हैं (देखिए आकृति 7.39)। यदि AD बढ़ाने पर BC को P पर प्रतिच्छेद करे, तो दर्शाइए कि



आकृति 7.39

(i) $\Delta ABD \cong \Delta ACD$

(ii) $\Delta ABP \cong \Delta ACP$

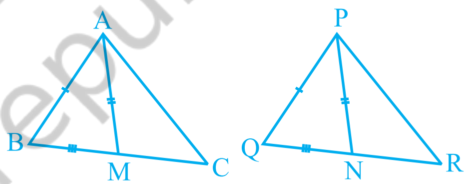
(iii) AP कोण A और कोण D दोनों को समद्विभाजित करता है।

(iv) AP रेखाखंड BC का लम्ब समद्विभाजक है।

2. AD एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC का एक शीर्षलम्ब है, जिसमें AB = AC है। दर्शाइए कि

(i) AD रेखाखंड BC को समद्विभाजित करता है। (ii) AD कोण A को समद्विभाजित करता है।

3. एक त्रिभुज ABC की दो भुजाएँ AB और BC तथा माध्यिका AM क्रमशः एक दूसरे त्रिभुज की भुजाओं PQ और QR तथा माध्यिका PN के बराबर हैं (देखिए आकृति 7.40)। दर्शाइए कि



आकृति 7.40

(i) $\Delta ABM \cong \Delta PQN$

(ii) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

4. BE और CF एक त्रिभुज ABC के दो बराबर शीर्षलम्ब हैं। RHS सर्वांगसमता नियम का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि Δ ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

5. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC है। AP $\perp$ BC खींच कर दर्शाइए कि $\angle B = \angle C$ है।

7.6 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्न बिंदुओं का अध्ययन किया है:

1. दो आकृतियाँ सर्वांगसम होती हैं, यदि उनका एक ही आकार हो और एक ही माप हो।

2. समान त्रिज्याओं वाले दो वृत्त सर्वांगसम होते हैं।

3. समान भुजाओं वाले दो वर्ग सर्वांगसम होते हैं।

4. यदि त्रिभुज ABC और PQR संगतता $A \leftrightarrow P$, $B \leftrightarrow Q$ और $C \leftrightarrow R$, के अंतर्गत सर्वांगसम हों, तो उन्हें सांकेतिक रूप में $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ लिखते हैं।

5. यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और अंतर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और अंतर्गत कोण के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं (SAS सर्वांगसमता नियम)।

6. यदि एक त्रिभुज के दो कोण और अंतर्गत भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और अंतर्गत भुजा के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं (ASA सर्वांगसमता नियम)।

7. यदि एक त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और संगत भुजा के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं (AAS सर्वांगसमता नियम)।

8. त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

9. त्रिभुज के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।

10. किसी समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60° का होता है।

11. यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं (SSS सर्वांगसमता नियम)।

12. यदि दो समकोण त्रिभुजों में, एक त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा क्रमश: दूसरे त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं (RHS सर्वांगसमता नियम)।

0963CH08

अध्याय 8

चतुर्भुज

8.1 समांतर चतुर्भुज के गुण

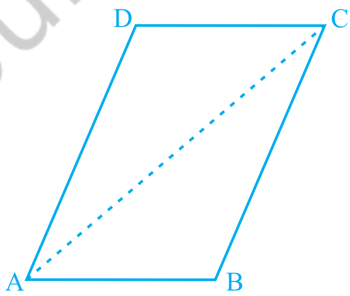
आप कक्षा आठ में चतुर्भुजों और उनके प्रकारों का अध्ययन कर चुके हैं। एक चतुर्भुज चार भुजाएँ, चार कोण और चार शीर्ष हैं। एक समांतर चतुर्भुज एक चतुर्भुज है जिसमें सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्म समांतर हैं

आइए एक क्रियाकलाप करें।

कागज पर एक समांतर चतुर्भुज खींच कर उसे काट लीजिए। अब इसे विकर्ण के अनुदिश काट लीजिए (देखिए आकृति 8.1)। आप दो त्रिभुज प्राप्त करते हैं। इन त्रिभुजों के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

एक त्रिभुज को दूसरे त्रिभुज पर रखिए। यदि आवश्यक हो, तो त्रिभुज को घुमाइए भी। आप क्या देखते हैं?

देखिए कि दोनों त्रिभुज परस्पर सर्वांगसम हैं।



आकृति 8.1

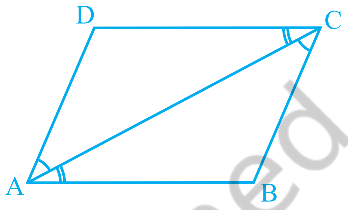
कुछ और समांतर चतुर्भुज खींच कर इस क्रियाकलाप को दोहराइए। प्रत्येक बार आप पाएँगे कि समांतर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।

अब आइए इस परिणाम को सिद्ध करें।

प्रमेय 8.1 : *किसी समांतर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।*

उपपत्ति : मान लीजिए ABCD एक समांतर चतुर्भुज है और AC उसका एक विकर्ण है (देखिए आकृति 8.2)। देखिए कि विकर्ण AC समांतर चतुर्भुज ABCD को दो त्रिभुजों ABC और CDA में विभाजित करता है। हमें सिद्ध करना है कि ये दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

Δ ABC और Δ CDA के लिए ध्यान दीजिए कि BC $\parallel$ AD है और AC एक तिर्यक रेखा है।



आकृति 8.2

इसलिए, $\angle$ BCA = $\angle$ DAC (एकांतर कोणों का युग्म)

साथ ही, AB $\parallel$ DC और AC एक तिर्यक रेखा है।

इसलिए, $\angle$ BAC = $\angle$ DCA (एकांतर कोणों का युग्म)

और AC = CA (उभयनिष्ठ)

अत:, Δ ABC $\cong$ Δ CDA (ASA नियम)

अर्थात् विकर्ण AC समांतर चतुर्भुज ABCD को दो सर्वांगसम त्रिभुजों ABC और CDA में विभाजित करता है।

अब समांतर चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाओं को मापिए। आप क्या देखते हैं?

आप पाएँगे कि AB = DC और AD = BC है।

यह समांतर चतुर्भुज का एक अन्य गुण है, जिसे नीचे दिया जा रहा है :

प्रमेय 8.2 : *एक समांतर चतुर्भुज में सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।*

आप पहले ही सिद्ध कर चुके हैं कि समांतर चतुर्भुज का विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है। अत:, आप इनके संगत भागों, मान लीजिए भुजाओं, के बारे में क्या कह सकते हैं? ये बराबर हैं।

इसलिए, AB = DC और AD = BC है।

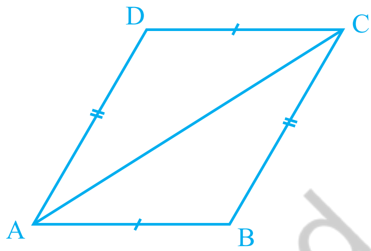
अब इस परिणाम का विलोम क्या है? आप जानते हैं कि जो प्रमेय (किसी कथन) में दिया हो, तो उसके विलोम में उसे सिद्ध करना होता है और जो प्रमेय में दिया गया है उसे विलोम में दिया हुआ माना जाता है। ध्यान दीजिए कि प्रमेय 8.2 को निम्न रूप में भी लिखा जा सकता है :

यदि एक चतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज है, तो उसकी सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म बराबर होता है। इसलिए, इसका विलोम निम्न होगा :

प्रमेय 8.3 : *यदि एक चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म बराबर हो, तो वह एक समांतर चतुर्भुज होता है।*

क्या आप इसके कारण दे सकते हैं?

मान लीजिए चतुर्भुज ABCD की भुजाएँ AB और CD बराबर हैं और साथ ही AD = BC है (देखिए आकृति 8.3)। विकर्ण AC खींचिए।



आकृति 8.3

स्पष्टत:, Δ ABC $\cong$ Δ CDA (क्यों?)

अत:, $\angle$ BAC = $\angle$ DCA

और $\angle$ BCA = $\angle$ DAC (क्यों?)

क्या अब आप कह सकते हैं कि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है? (क्यों?)

आपने अभी देखा है कि एक समांतर चतुर्भुज में सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म बराबर होता है और विलोमत: यदि किसी चतुर्भुज में सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म बराबर हो, तो वह एक समांतर चतुर्भुज होता है। क्या हम यही परिणाम सम्मुख कोणों के युग्मों के बारे में भी निकाल सकते हैं?

एक समांतर चतुर्भुज खींचिए और उसके कोणों को मापिए। आप क्या देखते हैं?

सम्मुख कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर है।

इसे कुछ और समांतर चतुर्भुज लेकर दोहराइए। इससे हम एक अन्य परिणाम पर पहुँचते हैं, जो निम्न है :

प्रमेय 8.4 : *एक समांतर चतुर्भुज में सम्मुख कोण बराबर होते हैं।*

अब, क्या इस परिणाम का विलोम भी सत्य है? हाँ, ऐसा ही है। चतुर्भुज के कोण योग गुण और तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित समांतर रेखाओं के गुणों का प्रयोग करके, हम देख सकते हैं कि उपरोक्त का विलोम भी सत्य है। इस प्रकार, हमें निम्न प्रमेय प्राप्त होती है:

प्रमेय 8.5 : *यदि एक चतुर्भुज में सम्मुख कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर हो, तो वह एक समांतर चतुर्भुज होता है।*

समांतर चतुर्भुज का एक गुण और भी है। आइए इसका अध्ययन करें। एक समांतर चतुर्भुज ABCD खींचिए और उसके दोनों विकर्ण AC और BD खींचिए, जो परस्पर O पर

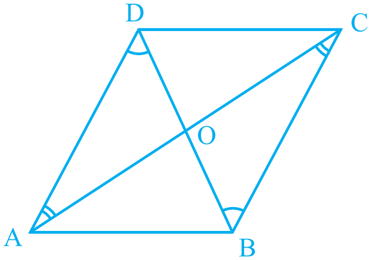
प्रतिच्छेद करते हैं (देखिए आकृति 8.4)।

OA, OB, OC और OD की लम्बाइयाँ मापिए।

आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि

$$OA = OC \quad \text{और} \quad OB = OD$$

है। अर्थात् O दोनों विकर्णों का मध्य-बिंदु है।



आकृति 8.4

कुछ और समांतर चतुर्भुज लेकर इस क्रियाकलाप को दोहराइए।

प्रत्येक बार, आप प्राप्त करेंगे कि O दोनों विकर्णों का मध्य-बिंदु है।

इस प्रकार, हम निम्न प्रमेय प्राप्त करते हैं :

प्रमेय 8.6 : *समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को (परस्पर) समद्विभाजित करते हैं।*

अब, यदि एक चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करें, तो क्या होगा? क्या यह एक समांतर चतुर्भुज होगा? वास्तव में, यह सत्य है।

यह प्रमेय 8.6 के परिणाम का विलोम है। इसे नीचे दिया जा रहा है :

प्रमेय 8.7 : *यदि एक चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करें, तो वह एक समांतर चतुर्भुज होता है।*

आप इस परिणाम के लिए तर्क निम्न प्रकार दे सकते हैं :

ध्यान दीजिए कि आकृति 8.5 में, यह दिया है कि $OA = OC$ और $OB = OD$ है।

अतः, $\Delta\, AOB \cong \Delta\, COD$ (क्यों?)

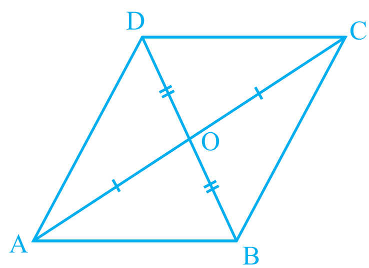
इसलिए, $\angle\, ABO = \angle\, CDO$ (क्यों?)

इससे हमें $AB \parallel CD$ प्राप्त होता है।

इसी प्रकार, $BC \parallel AD$ है।

अतः, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

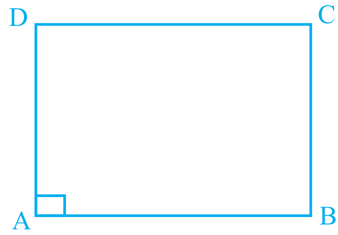
आइए अब कुछ उदाहरण लें।



आकृति 8.5

उदाहरण 1 : दर्शाइए कि एक आयत का प्रत्येक कोण एक समकोण होता है।

हल : याद कीजिए कि एक आयत क्या होता है।



आकृति 8.6

एक आयत वह समांतर चतुर्भुज होता है जिसका एक कोण समकोण हो।

मान लीजिए ABCD एक आयत है, जिसमें $\angle A = 90°$ है।

हमें दर्शाना है कि $\angle B = \angle C = \angle D = 90°$ है।

AD || BC और AB एक तिर्यक रेखा है (देखिए आकृति 8.6)।

इसलिए, $\angle A + \angle B = 180°$ (तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतः कोण)

परन्तु, $\angle A = 90°$ है।

इसलिए, $\angle B = 180° - \angle A = 180° - 90° = 90°$

अब $\angle C = \angle A$ और $\angle D = \angle B$ (समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

इसलिए, $\angle C = 90°$ और $\angle D = 90°$

अतः, आयत का प्रत्येक कोण $90°$ है।

उदाहरण 2 : दर्शाइए कि एक समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्ब होते हैं।

हल : समचतुर्भुज ABCD पर विचार कीजिए (देखिए आकृति 8.7)।

आप जानते हैं कि AB = BC = CD = DA (क्यों?)

अब, Δ AOD और Δ COD में,

OA = OC (समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं)

OD = OD (उभयनिष्ठ)

AD = CD (दिया है)

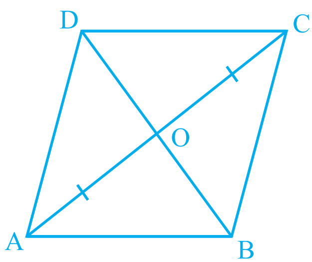
अतः, $\Delta AOD \cong \Delta COD$ (SSS सर्वांगसमता नियम)

इसलिए, $\angle AOD = \angle COD$ (CPCT)

परन्तु, $\angle AOD + \angle COD = 180°$ (रैखिक युग्म)

इसलिए, $2\angle AOD = 180°$

या, $\angle AOD = 90°$



आकृति 8.7

अतः, समचर्तुभुज के विकर्ण परस्पर लम्ब हैं।

उदाहरण 3 : ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें AB = AC है। AD बहिष्कोण PAC को समद्विभाजित करता है और CD || BA है (देखिए आकृति 8.8)। दर्शाइए कि

(i) $\angle$ DAC = $\angle$ BCA और (ii) ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

हल : (i) ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें AB = AC है। (दिया है)

इसलिए, $\angle$ ABC = $\angle$ ACB (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण)

साथ ही, $\angle$ PAC = $\angle$ ABC + $\angle$ ACB

(त्रिभुज का बहिष्कोण)

या, $\angle$ PAC = 2$\angle$ ACB (1)

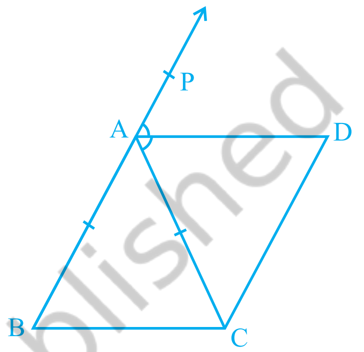
अब, AD कोण PAC को समद्विभाजित करती है।

इसलिए, $\angle$ PAC = 2$\angle$ DAC (2)

अतः,

2$\angle$ DAC = 2$\angle$ ACB [(1) और (2) से]

या, $\angle$ DAC = $\angle$ ACB



आकृति 8.8

(ii) अब ये दोनों बराबर कोण वे एकांतर कोण हैं जो रेखाखंडों BC और AD को तिर्यक रेखा AC द्वारा प्रतिच्छेद करने से बनते हैं।

इसलिए, BC || AD

साथ ही, BA || CD है।

इस प्रकार, चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्म समांतर हैं।

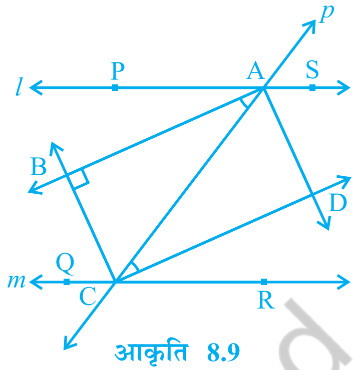
अतः, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

उदाहरण 4 : दो समांतर रेखाओं l और m को एक तिर्यक रेखा p प्रतिच्छेद करती है (देखिए आकृति 8.9)। दर्शाइए कि अंतः कोणों के समद्विभाजकों से बना चतुर्भुज एक आयत है।

हल : यह दिया है कि $l \parallel m$ है और तिर्यक रेखा p इन्हें क्रमशः बिंदुओं A और C पर प्रतिच्छेद करती है।

$\angle$ PAC और $\angle$ ACQ के समद्विभाजक B पर प्रतिच्छेद करते हैं और $\angle$ ACR और $\angle$ SAC के समद्विभाजक D पर प्रतिच्छेद करते हैं।

हमें दर्शाना है कि चतुर्भुज ABCD एक आयत है।



आकृति 8.9

अब, $\angle PAC = \angle ACR$

($l \parallel m$ और तिर्यक रेखा p से बने एकांतर कोण)

इसलिए, $\frac{1}{2}\angle PAC = \frac{1}{2}\angle ACR$

अर्थात्, $\angle BAC = \angle ACD$

ये बराबर कोण रेखाओं AB और DC के तिर्यक रेखा AC द्वारा प्रतिच्छेदित करने से बनते हैं और ये एकांतर कोण हैं।

इसलिए, $AB \parallel DC$

इसी प्रकार, $BC \parallel AD$ ($\angle ACB$ और $\angle CAD$ लेने पर)

अत:, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

साथ ही, $\angle PAC + \angle CAS = 180°$ (रैखिक युग्म)

इसलिए, $\frac{1}{2}\angle PAC + \frac{1}{2}\angle CAS = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$

या, $\angle BAC + \angle CAD = 90°$

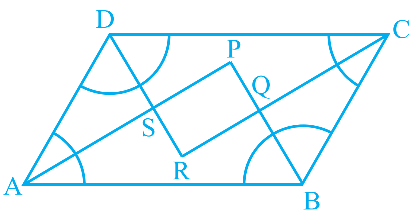
या, $\angle BAD = 90°$

इसलिए, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसका एक कोण समकोण है।

अत: ABCD एक आयत है।

उदाहरण 5 : दर्शाइए कि एक समांतर चतुर्भुज के कोणों के समद्विभाजक एक आयत बनाते हैं।

हल : मान लीजिए P, Q, R और S क्रमश: समांतर चतुर्भुज ABCD के $\angle A$ और $\angle B$, $\angle B$ और $\angle C$, $\angle C$ और $\angle D$ तथा $\angle D$ और $\angle A$ के समद्विभाजकों के प्रतिच्छेद बिंदु हैं (देखिए आकृति 8.10)।



आकृति 8.10

Δ ASD में आप क्या देख सकते हैं?

चूँकि DS कोण D को और AS कोण A को समद्विभाजित करते हैं, इसलिए

$$\angle DAS + \angle ADS = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle D$$

$$= \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$$

$$= \frac{1}{2} \times 180°$$

($\angle A$ और $\angle D$ तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतः कोण हैं)

$$= 90°$$

साथ ही, $\angle DAS + \angle ADS + \angle DSA = 180°$ (त्रिभुज का कोण योग गुण)

या, $90° + \angle DSA = 180°$

या, $\angle DSA = 90°$

अतः, $\angle PSR = 90°$ ($\angle DSA$ का शीर्षाभिमुख कोण)

इसी प्रकार, यह दर्शाया जा सकता है कि $\angle APB = 90°$ या $\angle SPQ = 90°$ (जैसा कि $\angle DSA$ के लिए किया था)। इसी प्रकार, $\angle PQR = 90°$ और $\angle SRQ = 90°$ है।

इसलिए, PQRS एक ऐसा चतुर्भुज है जिसके सभी कोण समकोण हैं।

क्या हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि यह एक आयत है? आइए इसकी जाँच करें। हम दर्शा चुके हैं कि $\angle PSR = \angle PQR = 90°$ और $\angle SPQ = \angle SRQ = 90°$ है, अर्थात् सम्मुख कोणों के दोनों युग्म बराबर हैं।

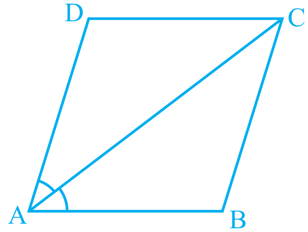
अतः PQRS एक समांतर चतुर्भुज है, जिसमें एक कोण (वास्तव में सभी कोण) समकोण हैं। इसलिए, PQRS एक आयत है।

प्रश्नावली 8.1

1. यदि एक समांतर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों, तो दर्शाइए कि वह एक आयत है।
2. दर्शाइए कि एक वर्ग के विकर्ण बराबर होते हैं और परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।
3. समांतर चतुर्भुज ABCD का विकर्ण AC कोण A को समद्विभाजित करता है (देखिए आकृति 8.11)। दर्शाइए कि

   (i) यह $\angle C$ को भी समद्विभाजित करता है।

   (ii) ABCD एक समचतुर्भुज है।



आकृति 8.11

4. ABCD एक आयत है जिसमें विकर्ण AC दोनों कोणों A और C को समद्विभाजित करता है। दर्शाइए कि (i) ABCD एक वर्ग है (ii) विकर्ण BD दोनों कोणों B और D को समद्विभाजित करता है

5. समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण BD पर दो बिंदु P और Q इस प्रकार स्थित हैं कि DP = BQ है (देखिए आकृति 8.12)। दर्शाइए कि

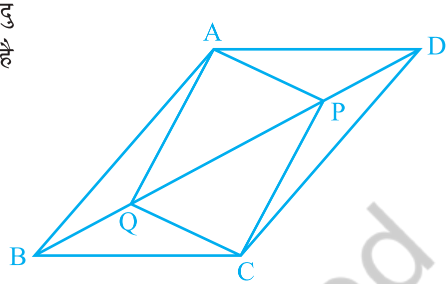
(i) $\Delta\, APD \cong \Delta\, CQB$

(ii) $AP = CQ$

(iii) $\Delta\, AQB \cong \Delta\, CPD$

(iv) $AQ = CP$

(v) APCQ एक समांतर चतुर्भुज है।

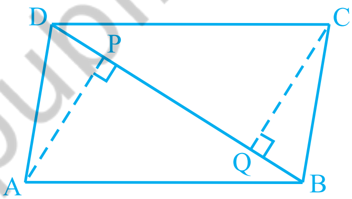


आकृति 8.12

6. ABCD एक समांतर चतुर्भज है तथा AP और CQ शीर्षों A और C से विकर्ण BD पर क्रमश: लम्ब हैं (देखिए आकृति 8.13)। दर्शाइए कि

(i) $\Delta\, APB \cong \Delta\, CQD$

(ii) $AP = CQ$



आकृति 8.13

7. ABCD एक समलंब है, जिसमें $AB \parallel DC$ और $AD = BC$ है (देखिए आकृति 8.14)। दर्शाइए कि

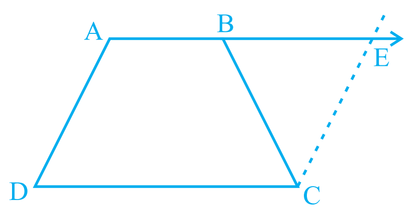
(i) $\angle A = \angle B$

(ii) $\angle C = \angle D$

(iii) $\Delta\, ABC \cong \Delta\, BAD$

(iv) विकर्ण AC = विकर्ण BD है।

[**संकेत**: AB को बढ़ाइए और C से होकर DA के समांतर एक रेखा खींचिए जो बढ़ी हुई भुजा AB को E पर प्रतिच्छेद करे।]



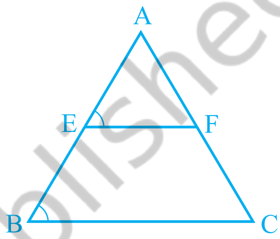
आकृति 8.14

8.2 मध्य-बिंदु प्रमेय

आप एक त्रिभुज और एक चतुर्भुज के अनेक गुणों का अध्ययन कर चुके हैं। आइए त्रिभुज के एक अन्य गुण का अध्ययन करें, जो एक त्रिभुज की भुजाओं के मध्य-बिंदुओं से संबंधित है। इसके लिए, निम्नलिखित क्रियाकलाप कीजिए :

एक त्रिभुज ABC खींचिए और उसकी दो भुजाओं AB और AC के मध्य-बिंदु E और F अंकित कीजिए। E और F को मिलाइए (देखिए आकृति 8.15)।

EF और BC को मापिए। साथ ही, $\angle$ AEF और $\angle$ ABC को भी मापिए। आप क्या देखते हैं?



आकृति 8.15

आप पाएँगे कि

$$EF = \frac{1}{2} BC \text{ और } \angle AEF = \angle ABC$$

है। अतः, EF || BC है।

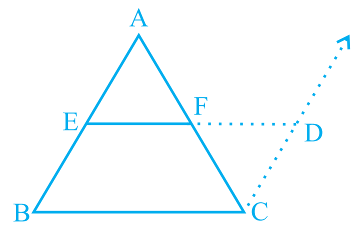
कुछ अन्य त्रिभुज लेकर, इस क्रियाकलाप को दोहराइए।

इस प्रकार, आप सरलता से निम्न प्रमेय पर पहुँच सकते हैं:

प्रमेय 8.8 : *किसी त्रिभुज की किन्ही दो भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड तीसरी भुजा के समांतर होता है।*

आप इस प्रमेय को निम्नलिखित संकेत की सहायता से सिद्ध कर सकते हैं।

आकृति 8.16 को देखिए, जिसमें E और F क्रमशः ΔABC की भुजाओं AB और AC के मध्य-बिंदु हैं तथा CD || BA है।



आकृति 8.16

$$\Delta\, AEF \cong \Delta\, CDF \qquad \text{(ASA नियम)}$$

इसलिए, EF = DF और BE = AE = DC (क्यों?)

अतः, BCDE एक समांतर चतुर्भुज है। (क्यों?)

इससे EF || BC प्राप्त होता है।

ध्यान दीजिए कि $EF = \frac{1}{2}\ ED = \frac{1}{2} BC$ है।

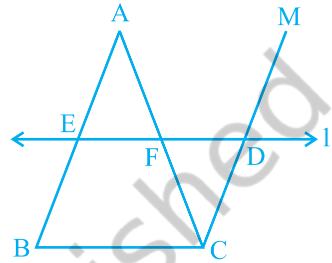
क्या आप प्रमेय 8.8 का विलोम लिख सकते हैं? क्या यह विलोम सत्य है?

आप देखेंगे कि ऊपर दिए गए प्रमेय का विलोम भी सत्य है। इसे नीचे दिया जा रहा है :

प्रमेय 8.9 : *किसी त्रिभुज की एक भुजा के मध्य-बिंदु से दूसरी भुजा के समांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है।*

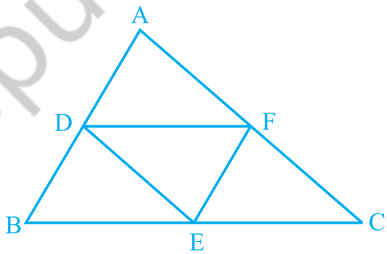
आकृति 8.17 में देखिए कि भुजा AB का मध्य-बिंदु E है और E से होकर जाने वाली रेखा l भुजा BC के समांतर है। साथ ही, CM || BA है।

Δ AEF और Δ CDF की सर्वांगसमता का प्रयोग करके, AF = CF सिद्ध कीजिए।



आकृति 8.17

उदाहरण 6 : Δ ABC में, D, E और F क्रमशः भुजाओं AB, BC और CA के मध्य-बिंदु हैं (देखिए आकृति 8.18)। दर्शाइए कि बिन्दुओं D, E और F को मिलाने पर Δ ABC चार सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित हो जाता है।



आकृति 8.18

हल : चूँकि D और E क्रमशः भुजाओं AB और BC के मध्य-बिंदु हैं, इसलिए प्रमेय 8.9 द्वारा

DE || AC

इसी प्रकार, DF || BC और EF || AB है।

इसलिए, ADEF, BDFE और DFCE में से प्रत्येक एक समांतर चतुर्भुज है।

अब, DE समांतर चतुर्भुज BDFE का एक विकर्ण है।

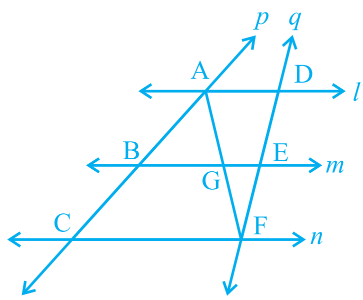
इसलिए, Δ BDE $\cong$ Δ FED

इसी प्रकार, Δ DAF $\cong$ Δ FED

और Δ EFC $\cong$ Δ FED

अतः, चारों त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

उदाहरण 7 : l, m और n तीन समांतर रेखाएँ हैं, जो तिर्यक रेखाओं p और q द्वारा इस प्रकार प्रतिच्छेदित हैं कि l, m और n रेखा p पर समान अंतः खंड AB और BC काटती हैं (देखिए आकृति 8.19)। दर्शाइए कि l, m और n रेखा q पर भी समान अंतः खंड DE और EF काटती हैं।



आकृति 8.19

हल : हमें AB = BC दिया है और हमें DE = EF सिद्ध करना है।

आइए A को F से मिलाएँ और इससे AF रेखा m को G पर प्रतिच्छेद करती है।

समलंब ACFD दो त्रिभुजों ACF और AFD में विभाजित हो जाता है।

Δ ACF में यह दिया है कि B, भुजा AC का मध्य-बिंदु है। (AB = BC)

साथ ही, BG || CF (चूँकि $m \parallel n$ है)

अतः, G भुजा AF का मध्य-बिंदु है। (प्रमेय 8.9 द्वारा)

अब, Δ AFD में भी हम इसी तर्क का प्रयोग कर सकते हैं। क्योंकि G भुजा AF का मध्य-बिंदु है और GE || AD है, इसलिए प्रमेय 8.9 से E भुजा DF का मध्य-बिंदु है।

अर्थात् DE = EF है।

दूसरे शब्दों में, l, m और n तिर्यक रेखा q पर भी बराबर अंतः खंड काटती हैं।

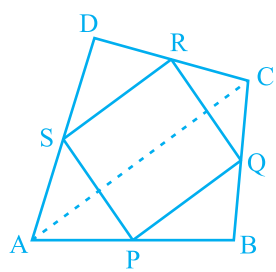
प्रश्नावली 8.2

1. ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु हैं (देखिए आकृति 8.20)। AC उसका एक विकर्ण है। दर्शाइए कि

   (i) SR || AC और SR = $\frac{1}{2}$ AC है।

   (ii) PQ = SR है।

   (iii) PQRS एक समांतर चतुर्भुज है।

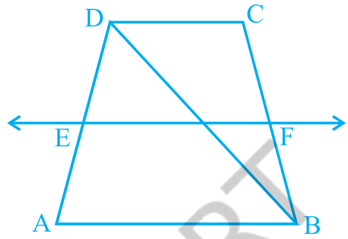


आकृति 8.20

2. ABCD एक समचतुर्भुज है और P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु है। दर्शाइए कि चतुर्भुज PQRS एक आयत है।

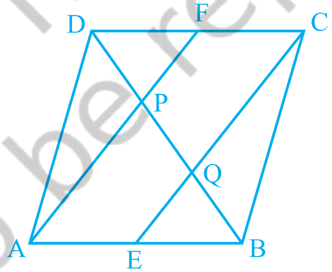
3. ABCD एक आयत है, जिसमें P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु हैं। दर्शाइए कि चतुर्भुज PQRS एक समचतुर्भुज है।

4. ABCD एक समलंब है, जिसमें AB || DC है। साथ ही, BD एक विकर्ण है और E भुजा AD का मध्य-बिंदु है। E से होकर एक रेखा AB के समांतर खींची गई है, जो BC को F पर प्रतिच्छेद करती है (देखिए आकृति 8.21)। दर्शाइए कि F भुजा BC का मध्य-बिंदु है।



आकृति 8.21

5. एक समांतर चतुर्भुज ABCD में E और F क्रमशः भुजाओं AB और CD के मध्य-बिंदु हैं (देखिए आकृति 8.22)। दर्शाइए कि रेखाखंड AF और EC विकर्ण BD को समत्रिभाजित करते हैं।



आकृति 8.22

6. ABC एक त्रिभुज है जिसका कोण C समकोण है। कर्ण AB के मध्य-बिंदु M से होकर BC के समांतर खींची गई रेखा AC को D पर प्रतिच्छेद करती है। दर्शाइए कि

(i) D भुजा AC का मध्य-बिंदु है। (ii) $MD \perp AC$ है।

(iii) $CM = MA = \frac{1}{2} AB$ है।

8.3 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है :

1. समांतर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।

2. एक समांतर चतुर्भुज में,

(i) सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं। (ii) सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

(iii) विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

3. आयत के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं और बराबर होते हैं। इसका विलोम भी सत्य है।

4. समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं। इसका विलोम भी सत्य है।

5. वर्ग के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं और बराबर होते हैं। इसका विलोम भी सत्य है।

6. किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड तीसरी भुजा के समांतर होता है और उसका आधा होता है।

7. किसी त्रिभुज की एक भुजा के मध्य-बिंदु से दूसरी भुजा के समांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है।

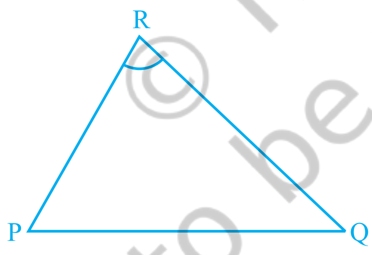
0963CH10

अध्याय 9

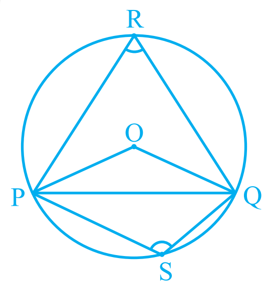
वृत्त

9.1 जीवा द्वारा एक बिन्दु पर अंतरित कोण

एक रेखाखंड PQ तथा एक बिन्दु R, जो रेखा PQ पर स्थित न हो, लीजिए। PR तथा QR को मिलाइए (देखिए आकृति 9.1)। तब कोण PRQ, रेखाखंड PQ द्वारा बिन्दु R पर *अंतरित कोण* कहलाता है। आकृति 9.2 में कोण POQ, PRQ तथा PSQ क्या कहलाते हैं? $\angle$ POQ जीवा PQ द्वारा केन्द्र O पर अंतरित कोण है, $\angle$ PRQ तथा $\angle$ PSQ क्रमशः PQ द्वारा दीर्घ चाप PQ तथा लघु चाप PQ पर स्थित बिन्दुओं R और S पर अंतरित कोण हैं।



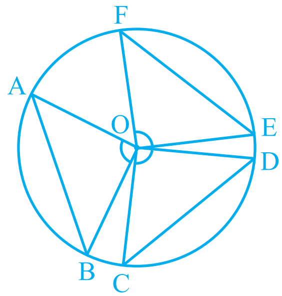
आकृति 9.1



आकृति 9.2

आइए हम जीवा की माप तथा उसके द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण में संबंध की जाँच करें। आप एक वृत्त में विभिन्न जीवाएँ खींचकर तथा उनके द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोणों को बनाकर देख सकते हैं कि जीवा यदि बड़ी होगी, तो उसके द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण भी बड़ा होगा। क्या होगा यदि आप दो बराबर जीवाएँ लेंगे? क्या केन्द्र पर अंतरित कोण समान होंगे या नहीं?

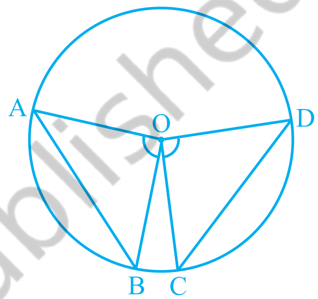
एक वृत्त की दो या अधिक बराबर जीवाएँ खींचिए तथा केन्द्र पर उनके द्वारा अंतरित कोणों को मापिए (देखिए आकृति 9.3)। आप पाएँगे कि उनके द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण बराबर हैं। आइए इस तथ्य की हम उपपत्ति दें।



आकृति 9.3

प्रमेय 9.1 : *वृत्त की बराबर जीवाएँ केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।*

उपपत्ति : आपको एक वृत्त, जिसका केन्द्र O है, की दो बराबर जीवाएँ AB और CD दी हुई हैं (देखिए आकृति 9.4) तथा आप सिद्ध करना चाहते हैं कि $\angle$ AOB = $\angle$ COD है।



त्रिभुजों AOB तथा COD में,

OA = OC (एक वृत्त की त्रिज्याएँ)

OB = OD (एक वृत्त की त्रिज्याएँ)

AB = CD (दिया है)

अतः, Δ AOB $\cong$ Δ COD (SSS नियम)

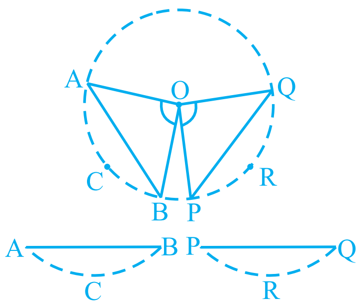
आकृति 9.4

इस प्रकार, हम पाते हैं कि $\angle$ AOB = $\angle$ COD (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

टिप्पणी : सुविधा के लिए 'सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग' के स्थान पर संक्षेप में CPCT का प्रयोग किया जाएगा, क्योंकि जैसा कि आप देखेंगे कि इसका हम बहुधा प्रयोग करते हैं।

अब यदि एक वृत्त की दो जीवाएँ केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करें, तो उन जीवाओं के बारे में आप क्या कह सकते हैं? क्या वे बराबर हैं अथवा नहीं? आइए हम इसकी निम्न क्रियाकलाप द्वारा जाँच करें।

एक अक्स कागज़ (tracing paper) लीजिए और इस पर एक वृत्त खींचिए। इसे वृत्त के अनुदिश काटकर एक चकती (disc) प्राप्त कीजिए। इसके केन्द्र O पर एक कोण AOB बनाइए, जहाँ A, B वृत्त पर स्थित बिन्दु हैं। केन्द्र पर, एक दूसरा कोण POQ कोण AOB के बराबर बनाइए। चकती को इन कोणों के सिरों को मिलाने वाली जीवाओं के अनुदिश काटें (देखिए आकृति 9.5)। आप



आकृति 9.5

दो वृत्तखंड ACB तथा PRQ प्राप्त करेंगे। यदि आप एक को दूसरे के ऊपर रखेंगे, तो आप क्या अनुभव करेंगे? वे एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेंगे, अर्थात् वे सर्वांगसम होंगे। इसलिए AB = PQ है।

यद्यपि आपने इसे एक विशेष दशा में ही देखा है, इसे आप अन्य समान कोणों के लिए दोहराइए। निम्न प्रमेय के कारण सभी जीवाएँ बराबर होंगी:

प्रमेय 9.2 : *यदि एक वृत्त की जीवाओं द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण बराबर हों, तो वे जीवाएँ बराबर होती हैं।*

उपर्युक्त प्रमेय, प्रमेय 9.1 का विलोम है। ध्यान दीजिए कि आकृति 9.4 में यदि आप $\angle AOB = \angle COD$ लें, तो

$$\Delta AOB \cong \Delta COD \text{ (क्यों?)}$$

क्या अब आप देख सकते हैं कि AB = CD है?

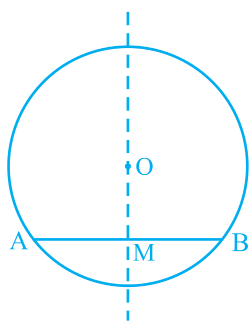
प्रश्नावली 9.1

1. याद कीजिए कि दो वृत्त सर्वांगसम होते हैं, यदि उनकी त्रिज्याएँ बराबर हों। सिद्ध कीजिए कि सर्वांगसम वृत्तों की बराबर जीवाएँ उनके केन्द्रों पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।
2. सिद्ध कीजिए कि यदि सर्वांगसम वृत्तों की जीवाएँ उनके केन्द्रों पर बराबर कोण अंतरित करें, तो जीवाएँ बराबर होती हैं।

9.2 केन्द्र से जीवा पर लम्ब

क्रियाकलाप : एक अक्स कागज पर एक वृत्त खींचिए। माना इसका केन्द्र O है। एक जीवा AB खींचिए। कागज को O से जाने वाली एक रेखा के अनुदिश इस प्रकार मोड़िए कि जीवा का एक भाग दूसरे भाग पर पड़े। मान लीजिए कि मोड़ का निशान AB को M पर काटता है। तब $\angle OMA = \angle OMB = 90°$ अथवा OM, AB पर लम्ब है (देखिए आकृति 9.6)। क्या बिन्दु B, A के संपाती होता है?

हाँ, यह होगा। इसलिए MA = MB है।



आकृति 9.6

OA और OB को मिलाकर तथा समकोण त्रिभुजों OMA और OMB को सर्वांगसम सिद्ध कर इसकी उपपत्ति स्वयं दीजिए। यह उदाहरण निम्न परिणाम का विशेष दृष्टांत है:

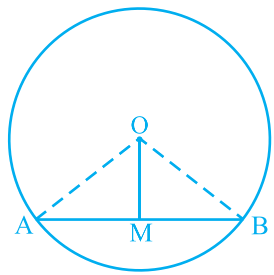
प्रमेय 9.3 : *एक वृत्त के केन्द्र से एक जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है।*

इस प्रमेय का विलोम क्या है? इसको लिखने के लिए, सर्वप्रथम हमें स्पष्ट होना है कि प्रमेय 9.3 में क्या दिया गया है और क्या सिद्ध करना है। दिया है कि केन्द्र से जीवा पर लंब खींचा गया है और सिद्ध करना है कि वह जीवा को समद्विभाजित करता है। अत: विलोम में परिकल्पना है 'यदि एक केन्द्र से जाने वाली रेखा वृत्त की एक जीवा को समद्विभाजित करे' और सिद्ध करना है 'रेखा जीवा पर लम्ब है'। इस प्रकार, विलोम है :

प्रमेय 9.4 : *एक वृत्त के केन्द्र से एक जीवा को समद्विभाजित करने के लिए खींची गई रेखा जीवा पर लंब होती है।*

क्या यह सत्य है? इसको कुछ स्थितियों में प्रयत्न करके देखिए। आप देखेंगे कि यह इन सभी स्थितियों में सत्य है। निम्न अभ्यास करके देखिए कि क्या यह कथन व्यापक रूप में सत्य है। हम इसके कुछ कथन देंगे और आप इनके कारण दीजिए।

मान लीजिए कि एक वृत्त, जिसका केन्द्र O है, की AB एक जीवा है और O को AB के मध्य-बिन्दु M से मिलाया गया है। आपको सिद्ध करना है कि $OM \perp AB$ है। OA और OB को मिलाइए (देखिए आकृति 9.7)। त्रिभुजों OAM तथा OBM में,



आकृति 9.7

$OA = OB$ (क्यों?)

$AM = BM$ (क्यों?)

$OM = OM$ (उभयनिष्ठ)

अत:, $\Delta OAM \cong \Delta OBM$ (क्यों?)

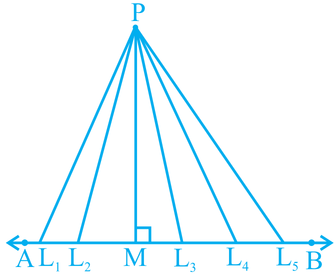
इससे प्राप्त होता है: $\angle OMA = \angle OMB = 90°$ (क्यों?)

9.3 समान जीवाएँ और उनकी केन्द्र से दूरियाँ

मान लीजिए AB एक रेखा है और P कोई बिन्दु है। क्योंकि एक रेखा पर असंख्य बिन्दु होते हैं, इसलिए यदि आप इन सभी को P से मिलाएँ तो आपको असंख्य रेखाखंड PL_1, PL_2, PM, PL_3, PL_4, आदि मिलेंगे। इनमें से कौन सी बिन्दु P से AB की दूरी है? आप थोड़ा

सोचकर इसका उत्तर प्राप्त कर सकते हैं। इन रेखाखंडों, में से P से AB पर लम्ब रेखाखंड अर्थात् आकृति 9.8 में PM सबसे छोटा होगा। गणित में इस सबसे छोटी लम्बाई PM को **P से AB की दूरी** के रूप में परिभाषित करते हैं। अत:, आप कह सकते हैं कि :

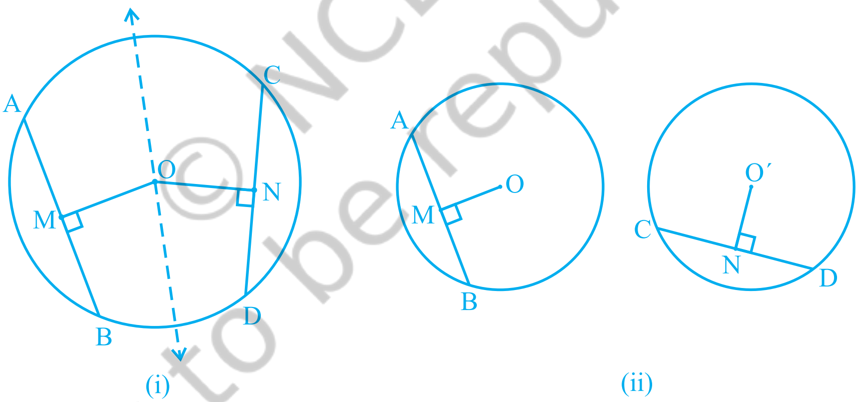
एक बिन्दु से एक रेखा पर लम्ब की लम्बाई रेखा की बिन्दु से दूरी होती है।



आकृति 9.8

ध्यान दीजिए कि यदि बिन्दु रेखा पर स्थित है, तो रेखा की इससे दूरी शून्य है।

एक वृत्त में असंख्य जीवाएँ हो सकती हैं। आप एक वृत्त में जीवाएँ खींचकर जाँच कर सकते हैं कि लंबी जीवा, छोटी जीवा की तुलना में केन्द्र के निकट होती है। इसकी आप विभिन्न लम्बाई की कई जीवाएँ की खींचकर तथा उनकी केन्द्र से दूरियाँ मापकर जाँच कर सकते हैं। व्यास, जो वृत्त की सबसे बड़ी जीवा है, की केन्द्र से क्या दूरी है? क्योंकि केन्द्र इस पर स्थित है, अत: इसकी दूरी शून्य है। क्या आप सोचते हैं कि जीवा की लम्बाई और उसकी केन्द्र से दूरी में कोई संबंध है? आइए देखें कि क्या ऐसा है।



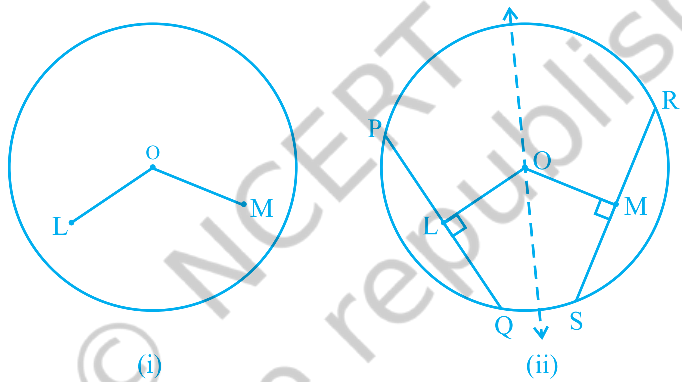
आकृति 9.9

क्रियाकलाप : किसी त्रिज्या का अक्स कागज पर एक वृत्त खींचिए। इसकी दो बराबर जीवाएँ AB तथा CD खींचिए तथा इन पर केन्द्र O से लम्ब OM तथा ON भी बनाइए। आकृति को इस प्रकार मोड़िए कि D, B पर तथा C, A पर पड़े [देखिए आकृति 9.9 (i)]। आप पाएँगे कि O मोड़ के निशान पर पड़ता है और N, M पर पड़ता है। अत:, OM = ON है। इस क्रियाकलाप को केन्द्रों O तथा O′ के सर्वांगसम वृत्त खींचकर और अलग-अलग बराबर जीवाएँ AB तथा CD लेकर दोहराएँ। उन पर लम्ब OM तथा O′N खींचिए [देखिए आकृति 9.9(ii)]। इनमें से एक वृत्ताकार चकती को काटकर दूसरे वृत्त पर इस प्रकार

रखें कि AB, CD को पूर्ण रूप से ढक ले। तब आप पाएँगे कि O, O′ पर पड़ता है तथा M, N पर पड़ता है। इस प्रकार, आपने निम्न को सत्यापित किया है:

प्रमेय 9.5 : *एक वृत्त की (या सर्वांगसम वृत्तों की) बराबर जीवाएँ केन्द्र से (या केन्द्रों से) समान दूरी पर होती है।*

अब यह देखा जाए कि क्या इसका विलोम सत्य है अथवा नहीं। इसके लिए केन्द्र O वाला एक वृत्त खींचिए। केन्द्र O से वृत्त के भीतर रहने वाले दो बराबर लम्बाई के रेखाखंड OL तथा OM खींचिए [देखिए आकृति 9.10 (i)]। अब क्रमशः दो जीवाएँ PQ और RS खींचिए जो OL और OM पर लम्ब हों [देखिए आकृति 9.10(ii)]। PQ और RS की लम्बाइयाँ मापिए। क्या ये असमान हैं? नहीं, दोनों बराबर हैं। क्रियाकलाप को और अधिक समान रेखाखंडों तथा उन पर लम्ब जीवाएँ खींचकर दोहराइए। इस प्रकार, प्रमेय 9.5 का विलोम



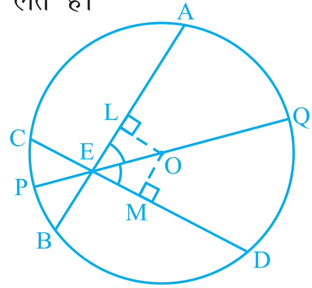
आकृति 9.10

सत्यापित हो जाता है, जिसका कथन नीचे दिया गया है:

प्रमेय 9.6 : *एक वृत्त के केन्द्र से समदूरस्थ जीवाएँ लम्बाई में समान होती हैं।*

अब हम उपर्युक्त परिणामों पर आधारित एक उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : यदि एक वृत्त की दो प्रतिच्छेदी जीवाएँ प्रतिच्छेद बिन्दु से जाने वाले व्यास से समान कोण बनाएँ, तो सिद्ध कीजिए कि वे जीवाएँ बराबर हैं।



आकृति 9.11

हल : दिया है कि एक वृत्त, जिसका केन्द्र O है, की दो जीवाएँ AB और CD बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करती हैं। E से जाने वाला PQ एक ऐसा व्यास है कि $\angle AEQ = \angle DEQ$ है (देखिए आकृति 9.11)।

आपको सिद्ध करना है कि $AB = CD$ है। जीवाओं AB और CD पर क्रमशः OL तथा OM लम्ब खींचिए। अब,

$\angle LOE = 180° - 90° - \angle LEO = 90° - \angle LEO$ (त्रिभुज के कोणों के योग का गुण)

$= 90° - \angle AEQ = 90° - \angle DEQ$

$= 90° - \angle MEO = \angle MOE$

त्रिभुजों OLE तथा OME में,

$\angle LEO = \angle MEO$ (दिया है)

$\angle LOE = \angle MOE$ (ऊपर सिद्ध किया है)

$EO = EO$ (उभयनिष्ठ)

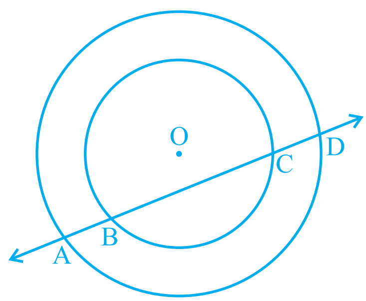
अतः, $\Delta\, OLE \cong \Delta\, OME$ (क्यों?)

इससे प्राप्त होता है: $OL = OM$ (CPCT)

इसलिए, $AB = CD$ (क्यों?)

प्रश्नावली 9.2

1. 5 cm तथा 3 cm त्रिज्या वाले दो वृत्त दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं तथा उनके केन्द्रों के बीच की दूरी 4 cm है। उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
2. यदि एक वृत्त की दो समान जीवाएँ वृत्त के अन्दर प्रतिच्छेद करें, तो सिद्ध कीजिए कि एक जीवा के खंड दूसरी जीवा के संगत खंडों के बराबर हैं।
3. यदि एक वृत्त की दो समान जीवाएँ वृत्त के अन्दर प्रतिच्छेद करें, तो सिद्ध कीजिए कि प्रतिच्छेद बिन्दु को केन्द्र से मिलाने वाली रेखा जीवाओं से बराबर कोण बनाती है।
4. यदि एक रेखा दो संकेन्द्री वृत्तों (एक ही केन्द्र वाले वृत्त) को, जिनका केन्द्र O है, A, B, C और D पर प्रतिच्छेद करे, तो सिद्ध कीजिए $AB = CD$ है (देखिए आकृति 9.12)।



आकृति 9.12

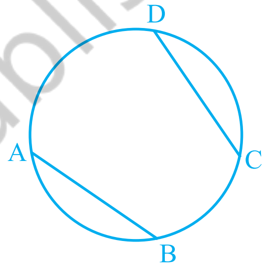
5. एक पार्क में बने 5 m त्रिज्या वाले वृत्त पर खड़ी तीन लड़कियाँ रेशमा, सलमा एवं मनदीप खेल रही हैं। रेशमा एक गेंद को सलमा के पास, सलमा मनदीप के पास तथा मनदीप रेशमा के पास फेंकती है। यदि रेशमा तथा सलमा के बीच और सलमा तथा मनदीप के बीच की प्रत्येक दूरी 6 m हो, तो रेशमा और मनदीप के बीच की दूरी क्या है?

6. 20 m त्रिज्या का एक गोल पार्क (वृत्ताकार) एक कालोनी में स्थित है। तीन लड़के अंकुर, सैय्यद तथा डेविड इसकी परिसीमा पर बराबर दूरी पर बैठे हैं और प्रत्येक के हाथ में एक खिलौना टेलीफोन आपस में बात करने के लिए है। प्रत्येक फोन की डोरी की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

9.4 एक वृत्त के चाप द्वारा अंतरित कोण

आपने देखा है कि एक जीवा के अंत बिन्दु (व्यास के अतिरिक्त) वृत्त को दो चापों में एक (दीर्घ तथा दूसरा लघु) विभाजित करते हैं। यदि आप बराबर जीवाएँ लें, तो आप उन चापों की मापों के बारे में क्या कह सकते हैं? क्या एक जीवा द्वारा बना चाप दूसरी जीवा के द्वारा बने चाप के बराबर है? वास्तव में, ये बराबर लम्बाई से भी कुछ अधिक है। यह इस अर्थ में, कि यदि एक चाप को दूसरे चाप के ऊपर रखा जाए, तो बिना ऐंठे या मोड़े वे एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेंगे।

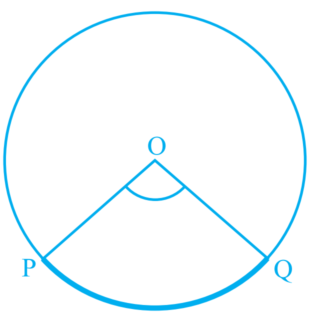
इस तथ्य को आप जीवा CD के संगत चाप को वृत्त से CD के अनुदिश काटकर तथा उसे बराबर जीवा AB के संगत चाप पर रखकर सत्यापित कर सकते हैं। आप पाएँगे कि चाप CD, चाप AB को पूर्णरूप से ढक लेता है (देखिए आकृति 9.13)। यह दर्शाता है कि बराबर जीवाएँ सर्वांगसम चाप बनाती हैं तथा विलोमतः सर्वांगसम चाप वृत्त की बराबर जीवाएँ बनाते हैं। इसका निम्न प्रकार से कथन दे सकते हैं:



आकृति 9.13

यदि किसी वृत्त की दो जीवाएँ बराबर हों, तो उनके संगत चाप सर्वांगसम होते हैं तथा विलोमतः यदि दो चाप सर्वांगसम हों, तो उनके संगत जीवाएँ बराबर होती हैं।

चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण भी संगत जीवा द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण से इस अर्थ में परिभाषित किया जाता है कि लघु चाप कोण को अंतरित करता है और दीर्घ चाप संगत प्रतिवर्ती कोण अंतरित करता है। अतः आकृति 9.14 में, लघु चाप PQ द्वारा O पर अंतरित कोण POQ है तथा दीर्घ चाप PQ द्वारा O पर अंतरित संगत प्रतिवर्ती कोण POQ है।



आकृति 9.14

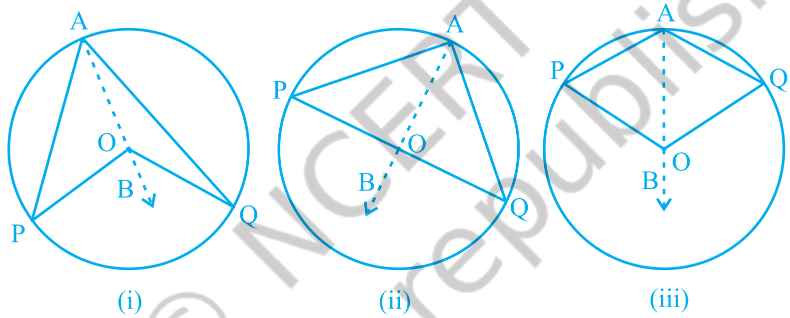
उपरोक्त गुण एवं प्रमेय 9.1 के संदर्भ में निम्न परिणाम सत्य है :

किसी वृत्त के सर्वांगसम चाप (या बराबर चाप) केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करते हैं।

अतः, किसी वृत्त की जीवा द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण संगत (लघु) चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण के बराबर होता है। निम्न प्रमेय एक चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण तथा वृत्त के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण में संबंध देती है।

प्रमेय 9.7 : *एक चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण का दुगुना होता है।*

उपपत्ति : एक वृत्त का चाप PQ दिया है, जो केन्द्र O पर $\angle POQ$ तथा वृत्त के शेष भाग के एक बिन्दु A पर $\angle PAQ$ अंतरित करता है। हमें सिद्ध करना है कि $\angle POQ = 2 \angle PAQ$ है।



आकृति 9.15

आकृति 9.15 में दी गई तीन विभिन्न स्थितियों पर विचार कीजिए।

(i) में चाप PQ लघु है, (ii) में चाप PQ अर्धवृत्त है तथा (iii) में चाप PQ दीर्घ है।

आइए हम AO को मिलाकर एक बिन्दु B तक बढ़ाएँ।

सभी स्थितियों में,

$$\angle BOQ = \angle OAQ + \angle AQO$$

(क्योंकि त्रिभुज का बहिष्कोण उसके दो अभिमुख अंतः कोणों के योग के बराबर होता है।)

साथ ही Δ OAQ में,

$$OA = OQ \qquad \text{(एक वृत्त की त्रिज्याएँ)}$$

अतः, $$\angle OAQ = \angle AQO \qquad \text{(प्रमेय 7.2)}$$

इससे प्राप्त होता है: $\angle BOQ = 2 \angle OAQ$ (1)

इसी प्रकार, $\angle BOP = 2 \angle OAP$ (2)

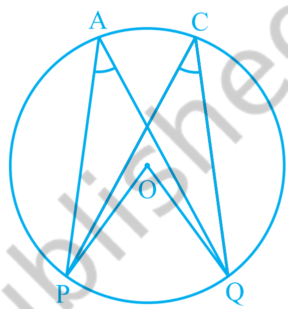
(1) और (2) से, $\angle BOP + \angle BOQ = 2(\angle OAP + \angle OAQ)$

अर्थात्, $\angle POQ = 2 \angle PAQ$ (3)

स्थिति (iii) के लिए, जहाँ PQ दीर्घ चाप है, (3) के स्थान पर

प्रतिवर्ती कोण $POQ = 2 \angle PAQ$ होगा।

टिप्पणी : मान लीजिए कि उपर्युक्त आकृतियों में हम P और Q को मिलाकर जीवा PQ बनाते हैं। तब, $\angle PAQ$ *को वृत्तखंड* PAQP *में बना कोण भी कहते हैं।*



आकृति 9.16

प्रमेय 9.7 में वृत्त के शेष भाग पर कोई भी बिन्दु A हो सकता है। इसलिए यदि आप वृत्त के शेष भाग पर एक और बिन्दु C लें (देखिए आकृति 9.16), तो आप पाएँगे:

$$\angle POQ = 2 \angle PCQ = 2 \angle PAQ$$

अतः, $\angle PCQ = \angle PAQ$

यह निम्न को सिद्ध करता है :

प्रमेय 9.8 : *एक ही वृत्तखंड के कोण बराबर होते हैं।*

आइए अब प्रमेय 9.8 की स्थिति (ii) की अलग से विवेचना करें। यहाँ $\angle PAQ$ उस वृत्तखंड में एक कोण है जो अर्धवृत्त है। साथ ही, $\angle PAQ = \frac{1}{2} \angle POQ = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$ है। यदि आप कोई और बिन्दु C अर्धवृत्त पर लें, तो भी आप पाते हैं कि

$$\angle PCQ = 90°$$

इस प्रकार, आप वृत्त का एक और गुण पाते हैं जो निम्न है:

अर्धवृत्त का कोण समकोण होता है।

प्रमेय 9.8 का विलोम भी सत्य है, जिसका इस प्रकार कथन दिया जा सकता है:

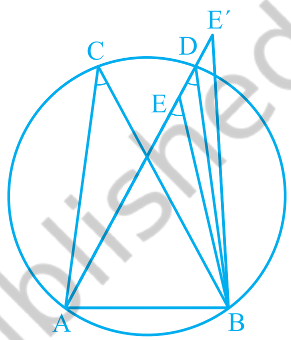
प्रमेय 9.9 : *यदि दो बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखंड, उसको अंतर्विष्ट करने वाली रेखा के एक ही ओर स्थित दो अन्य बिन्दुओं पर समान कोण अंतरित करे, तो चारों बिन्दु एक वृत्त पर स्थित होते हैं (अर्थात् वे चक्रीय होते हैं)।*

आप इस कथन की सत्यता निम्न प्रकार से देख सकते हैं :

आकृति 9.17 में AB एक रेखाखंड है, जो दो बिन्दुओं C और D पर समान कोण अंतरित करता है। अर्थात्

$$\angle ACB = \angle ADB$$

यह दर्शाने के लिए कि बिन्दु A, B, C और D एक वृत्त पर स्थित हैं, बिन्दुओं A, C और B से जाने वाला एक वृत्त खींचिए। मान लीजिए कि वह D से होकर नहीं जाता है। तब, वह AD (अथवा बढ़ी हुई AD) को एक बिन्दु E (अथवा E′) पर काटेगा।



आकृति 9.17

यदि बिन्दु A, C, E और B एक वृत्त पर स्थित हैं, तो

$\angle ACB = \angle AEB$ (क्यों?)

परन्तु दिया है कि $\angle ACB = \angle ADB$

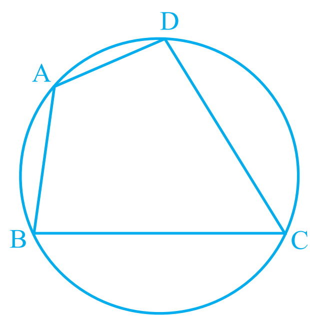
अतः, $\angle AEB = \angle ADB$

यह तब तक संभव नहीं है जब तक E, D के संपाती न हो। (क्यों?)

इसी प्रकार, E′ भी D के संपाती होना चाहिए।

9.5 चक्रीय चतुर्भुज

एक चतुर्भुज ABCD *चक्रीय* कहलाता है, यदि इसके चारों शीर्ष एक वृत्त पर स्थित होते हैं (देखिए आकृति 9.18)। इन चतुर्भुजों में आप एक विशेष गुण पाएँगे। अलग-अलग भुजाओं वाले कई चक्रीय चतुर्भुज खींचिए और प्रत्येक का नाम ABCD रखिए (इसको विभिन्न त्रिज्याओं के कई वृत्त खींचकर तथा प्रत्येक पर चार बिन्दु लेकर किया जा सकता है)। सम्मुख कोणों को मापिए और आप अपने प्रेक्षण आगे दी गई सारणी में लिखिए :



आकृति 9.18

चतुर्भुज की क्रम संख्या	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$	$\angle A + \angle C$	$\angle B + \angle D$
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						

इस सारणी से आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं?

यदि मापने में कोई त्रुटि न हुई हो, तो यह निम्न को सत्यापित करता है:

प्रमेय 9.10 : *चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के प्रत्येक युग्म का योग* 180° *होता है।*

वास्तव में इस प्रमेय का विलोम, जिसका कथन निम्न प्रकार से है, भी सत्य है:

प्रमेय 9.11 : *यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के एक युग्म का योग* 180° *हो, तो चतुर्भुज चक्रीय होता है।*

इस प्रमेय की सत्यता आप प्रमेय 9.9 में दी गई विधि की तरह से जाँच सकते हैं।

उदाहरण 2 : आकृति 9.19 में, AB वृत्त का एक व्यास है और CD त्रिज्या के बराबर एक जीवा है। AC और BD बढ़ाए जाने पर एक बिन्दु E पर मिलती हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle AEB = 60^\circ$ है।

हल : OC, OD और BC को मिलाइए।

त्रिभुज ODC एक समबाहु त्रिभुज है। (क्यों?)

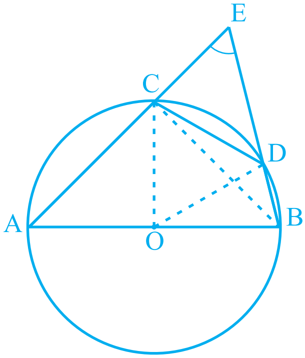
अतः, $\angle COD = 60^\circ$

अब, $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD$ (प्रमेय 10.8)

इससे प्राप्त होता है: $\angle CBD = 30^\circ$

पुनः, $\angle ACB = 90^\circ$ (क्यों?)

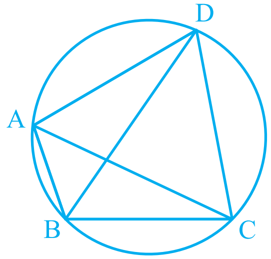
इसलिए, $\angle BCE = 180^\circ - \angle ACB = 90^\circ$



आकृति 9.19

जिससे $\angle CEB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, अर्थात् $\angle AEB = 60^\circ$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 3 : आकृति 9.20 में, ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है, जिसमें AC और BD विकर्ण हैं। यदि $\angle DBC = 55°$ तथा $\angle BAC = 45°$ हो, तो $\angle BCD$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 9.20

हल : $\angle CAD = \angle DBC = 55°$ (एक वृत्तखंड के कोण)

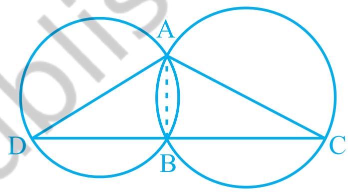
अतः, $\angle DAB = \angle CAD + \angle BAC$

$= 55° + 45° = 100°$

परन्तु, $\angle DAB + \angle BCD = 180°$ (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

इसलिए, $\angle BCD = 180° - 100° = 80°$

उदाहरण 4 : दो वृत्त दो बिन्दुओं A और B पर प्रतिच्छेद करते हैं। AD और AC दोनों वृत्तों के व्यास हैं (देखिए आकृति 9.21)। सिद्ध कीजिए कि B रेखाखंड DC पर स्थित हैं।



आकृति 9.21

हल : AB को मिलाइए। अब,

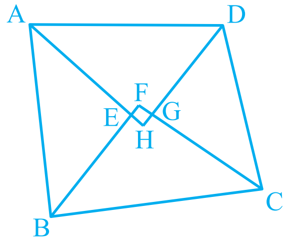
$\angle ABD = 90°$ (अर्धवृत्त का कोण)

$\angle ABC = 90°$ (अर्धवृत्त का कोण)

इसलिए, $\angle ABD + \angle ABC = 90° + 90° = 180°$

अतः, DBC एक रेखा है। अर्थात् B रेखाखंड DC पर स्थित है।

उदाहरण 5 : सिद्ध कीजिए कि किसी चतुर्भुज के अंतः कोणों के समद्विभाजकों से बना चतुर्भुज (यदि संभव हो) चक्रीय होता है।



आकृति 9.22

हल : आकृति 9.22 में, ABCD एक चतुर्भुज है जिसके अंतःकोणों A, B, C और D के क्रमशः कोण समद्विभाजक AH, BF, CF और DH एक चतुर्भुज EFGH बनाते हैं।

अब, $\angle FEH = \angle AEB = 180° - \angle EAB - \angle EBA$ (क्यों?)

$$= 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$$

तथा $\angle FGH = \angle CGD = 180° - \angle GCD - \angle GDC$ (क्यों?)

$$= 180° - \frac{1}{2}\ (\angle C + \angle D)$$

अतः, $\angle FEH + \angle FGH = 180° - \frac{1}{2}\ (\angle A + \angle B) + 180° - \frac{1}{2}\ (\angle C + \angle D)$

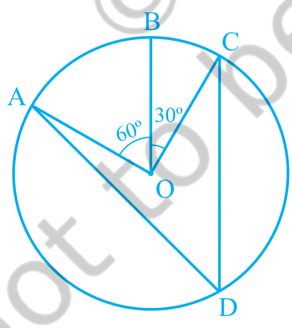
$$= 360° - \frac{1}{2}\ (\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = 360° - \frac{1}{2} \times 360°$$

$$= 360° - 180° = 180°$$

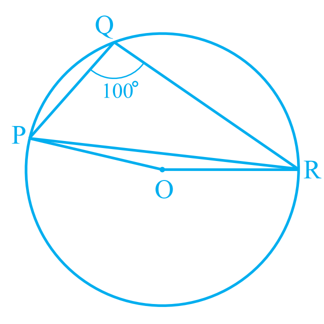
इसलिए, प्रमेय 9.11 से चतुर्भुज EFGH चक्रीय है।

प्रश्नावली 9.3

1. आकृति 9.23 में, केन्द्र O वाले एक वृत्त पर तीन बिन्दु A,B और C इस प्रकार हैं कि $\angle BOC = 30°$ तथा $\angle AOB = 60°$ है। यदि चाप ABC के अतिरिक्त वृत्त पर D एक बिन्दु है, तो $\angle ADC$ ज्ञात कीजिए।
2. किसी वृत्त की एक जीवा वृत्त की त्रिज्या के बराबर है। जीवा द्वारा लघु चाप के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण ज्ञात कीजिए तथा दीर्घ चाप के किसी बिन्दु पर भी अंतरित कोण ज्ञात कीजिए।
3. आकृति 9.24 में, $\angle PQR = 100°$ है, जहाँ P, Q तथा R, केन्द्र O वाले एक वृत्त पर स्थित बिन्दु हैं। $\angle OPR$ ज्ञात कीजिए।

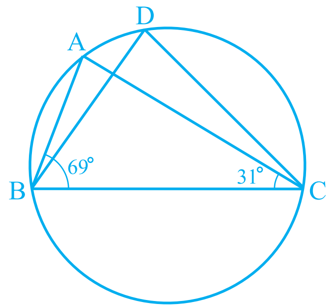


आकृति 9.23



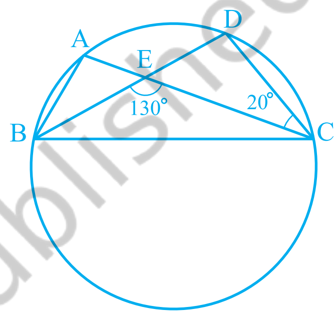
आकृति 9.24

4. आकृति 9.25 में, $\angle ABC = 69°$ और $\angle ACB = 31°$ हो, तो $\angle BDC$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 9.25

5. आकृति 9.26 में, एक वृत्त पर A, B, C और D चार बिन्दु हैं। AC और BD एक बिन्दु E पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि $\angle BEC = 130°$ तथा $\angle ECD = 20°$ है। $\angle BAC$ ज्ञात कीजिए।



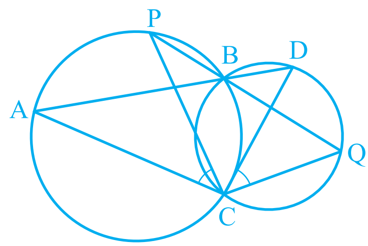
आकृति 9.26

6. ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसके विकर्ण एक बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $\angle DBC = 70°$ और $\angle BAC = 30°$ हो, तो $\angle BCD$ ज्ञात कीजिए। पुन: यदि AB = BC हो, तो $\angle ECD$ ज्ञात कीजिए।

7. यदि एक चक्रीय चतुर्भुज के विकर्ण उसके शीर्षों से जाने वाले वृत्त के व्यास हों, तो सिद्ध कीजिए कि वह एक आयत है।

8. यदि एक समलंब की असमांतर भुजाएँ बराबर हों, तो सिद्ध कीजिए कि वह चक्रीय है।

9. दो वृत्त दो बिन्दुओं B और C पर प्रतिच्छेद करते हैं। B से जाने वाले दो रेखाखंड ABD और PBQ वृत्तों को A, D और P, Q पर क्रमश: प्रतिच्छेद करते हुए खींचे गए हैं (देखिए आकृति 9.27)। सिद्ध कीजिए कि $\angle ACP = \angle QCD$ है।



आकृति 9.27

10. यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को व्यास मानकर वृत्त खींचे जाएँ, तो सिद्ध कीजिए कि इन वृत्तों का प्रतिच्छेद बिन्दु तीसरी भुजा पर स्थित है।

11. उभयनिष्ठ कर्ण AC वाले दो समकोण त्रिभुज ABC और ADC हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle CAD = \angle CBD$ है।

12. सिद्ध कीजिए कि चक्रीय समांतर चतुर्भुज आयत होता है।

9.6 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्न बिन्दुओं का अध्ययन किया है :

1. एक वृत्त किसी तल के उन सभी बिन्दुओं का समूह होता है, जो तल के एक स्थिर बिन्दु से समान दूरी पर हों।

2. एक वृत्त की (या सर्वांगसम वृत्तों की) बराबर जीवाएँ केन्द्र (या संगत केन्द्रों) पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।

3. यदि किसी वृत्त की (या सर्वांगसम वृत्तों की) दो जीवाएँ केन्द्र पर (या संगत केन्द्रों पर) बराबर कोण अंतरित करें, तो जीवाएँ बराबर होती हैं।

4. किसी वृत्त के केन्द्र से किसी जीवा पर डाला गया लम्ब उसे समद्विभाजित करता है।

5. केन्द्र से होकर जाने वाली और किसी जीवा को समद्विभाजित करने वाली रेखा जीवा पर लम्ब होती है।

6. एक वृत्त की (या सर्वांगसम वृत्तों की) बराबर जीवाएँ केन्द्र से (या संगत केन्द्रों से) समान दूरी पर होती हैं।

7. एक वृत्त के केन्द्र (या सर्वांगसम वृत्तों के केन्द्रों) से समान दूरी पर स्थित जीवाएं बराबर होती हैं।

8. यदि किसी वृत्त के दो चाप सर्वांगसम हों, तो उनकी संगत जीवाएँ बराबर होती हैं और विलोमत: यदि किसी वृत्त की दो जीवाएँ बराबर हों, तो उनके संगत चाप (लघु, दीर्घ) सर्वांगसम होते हैं।

9. किसी वृत्त की सर्वांगसम चाप केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करते हैं।

10. किसी चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण उसके द्वारा वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण का दुगुना होता है।

11. एक वृत्तखंड में बने कोण बराबर होते हैं।

12. अर्धवृत्त का कोण समकोण होता है।

13. यदि दो बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखंड उसको अंतर्विष्ट करने वाली रेखा के एक ही ओर स्थित दो अन्य बिन्दुओं पर समान कोण अंतरित करे, तो चारों बिन्दु एक वृत्त पर स्थित होते हैं।

14. चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के प्रत्येक युग्म का योग 180^0 होता है।

15. यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के किसी एक युग्म का योग 180^0 हो, तो चतुर्भुज चक्रीय होता है।

अध्याय 10

हीरोन का सूत्र

10.1 त्रिभुज का क्षेत्रफल – हीरोन के सूत्र द्वारा

हीरोन का जन्म संभवत: मिस्र में अलेक्जेंड्रिया नामक स्थान पर हुआ। उन्होंने अनुप्रायोगिक गणित (applied mathematics) पर कार्य किया। उनका गणितीय और भौतिकीय विषयों पर कार्य इतना अधिक और विभिन्न प्रकार का था कि उन्हें इन क्षेत्रों का एक विश्वकोण संबंधी (encyclopedic) लेखक समझा जाता था। उनका ज्यामितीय कार्य मुख्यत: मेन्सुरेशन (क्षेत्रमिति) की समस्याओं से संबंधित था। यह कार्य तीन पुस्तकों में लिखा गया है। पुस्तक 1 में, वर्गों, आयतों, त्रिभुजों, समलंबों, अनेक प्रकार के विशिष्ट चतुर्भुजों, सम बहुभुजों, वृत्तों के क्षेत्रफलों, बेलनों, शंकुओं, गोलों, इत्यादि के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का वर्णन है। इसी पुस्तक में, हीरोन ने त्रिभुज की तीनों भुजाओं के पदों में उसके क्षेत्रफल का प्रसिद्ध (या सुपरिचित) सूत्र प्रतिपादित किया है।

हीरोन
(10 सा०यू०पू०–75 सा०यू०पू०)
आकृति 10.1

हीरोन के इस सूत्र को *हीरो का सूत्र* (*Hero's formula*) भी कहा जाता है। इसे नीचे दिया जा रहा है:

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

जहाँ a, b और c त्रिभुज की भुजाएँ हैं तथा

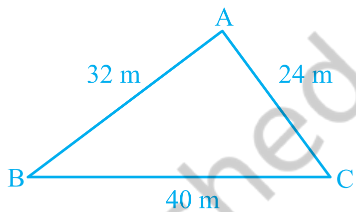
$$s = \text{त्रिभुज का अर्धपरिमाप (semi-perimeter)} = \frac{a+b+c}{2} \text{ है।}$$

यह सूत्र उस स्थिति में सहायक होता है, जब त्रिभुज की ऊँचाई सरलता से ज्ञात न हो सकती हो। आइए ऊपर बताए गए त्रिभुजाकार पार्क ABC का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए, इस सूत्र का प्रयोग करें (देखिए आकृति 10.2)।

आइए $a = 40$ m, $b = 24$ m, $c = 32$ m लें ताकि हमें

$$s = \frac{40+24+32}{2} \text{ m} = 48 \text{ m}$$

प्राप्त होगा।



आकृति 10.2

अब, $s - a = (48 - 40)$ m $= 8$ m,

$s - b = (48 - 24)$ m $= 24$ m,

और $s - c = (48 - 32)$ m $= 16$ m

हैं।

अतः, पार्क ABC का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{48 \times 8 \times 24 \times 16} \text{ m}^2 = 384 \text{ m}^2$

हम यह भी देखते हैं कि $32^2 + 24^2 = 1024 + 576 = 1600 = 40^2$ है। अतः, इस पार्क की भुजाएँ एक समकोण त्रिभुज बनाती हैं। सबसे बड़ी, अर्थात् BC, जिसकी लम्बाई 40 m है, इस त्रिभुज का कर्ण है तथा AB और AC के बीच का कोण 90° होगा।

इसलिए, सूत्र I से हम जाँच कर सकते हैं कि पार्क का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 32 \times 24 \text{ m}^2$

$= 384 \text{ m}^2$

हम पाते हैं कि यह क्षेत्रफल वही है जो हमें हीरोन के सूत्र से प्राप्त हुआ था।

अब आप पहले चर्चित किए गए अन्य त्रिभुजों के क्षेत्रफलों को हीरोन के सूत्र से ज्ञात करके जाँच कीजिए कि क्षेत्रफल पहले जैसे ही प्राप्त होते हैं। ये त्रिभुज हैं :

(i) 10 cm भुजा वाला समबाहु त्रिभुज

और (ii) असमान भुजा 8 cm और बराबर भुजाएँ 5 cm वाला समद्विबाहु त्रिभुज।

आप देखेंगे कि

(i) के लिए, $s = \frac{10+10+10}{2}$ cm = 15 cm

इसलिए, त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{15(15-10)(15-10)(15-10)}\ \text{cm}^2$

$$= \sqrt{15 \times 5 \times 5 \times 5}\ \text{cm}^2 = 25\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

(ii) के लिए, $s = \frac{8+5+5}{2}$ cm = 9 cm

इसलिए, त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{9(9-8)\,(9-5)\,(9-5)}\ \text{cm}^2$

$$= \sqrt{9 \times 1 \times 4 \times 4}\ \text{cm}^2 = 12\ \text{cm}^2$$

आइए अब कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी दो भुजाएँ 8 cm और 11 cm हैं और जिसका परिमाप 32 cm है (देखिए आकृति 10.3)।

हल : यहाँ, परिमाप = 32 cm, a = 8 cm और b = 11 cm है।

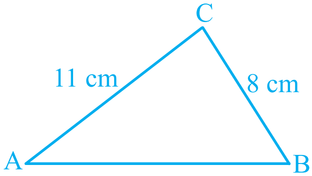
इसलिए, तीसरी भुजा c = 32 cm – (8 + 11) cm = 13 cm

अब, $2s = 32$ है। इसलिए s = 16 cm,

$s - a$ = (16 – 8) cm = 8 cm,

$s - b$ = (16 – 11) cm = 5 cm,

$s - c$ = (16 – 13) cm = 3 cm



आकृति 10.3

इसलिए, त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$

$$= \sqrt{16 \times 8 \times 5 \times 3}\ \text{cm}^2 = 8\sqrt{30}\ \text{cm}^2$$

उदाहरण 2 : एक त्रिभुजाकार पार्क ABC की भुजाएँ 120 m, 80 m और 50 m हैं (देखिए आकृति 10.4)। एक मालिन *धनिया* को इसके चारों ओर एक बाड़ लगानी है और इसके अंदर घास उगानी है। उसे कितने क्षेत्रफल में घास उगानी है? एक ओर 3 m चौड़े एक फाटक के लिए स्थान छोड़ते हुए इसके चारों ओर ₹ 20 प्रति मीटर की दर से काँटेदार बाड़ लगाने का व्यय भी ज्ञात कीजिए।

हल : पार्क का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए, हमें प्राप्त है :

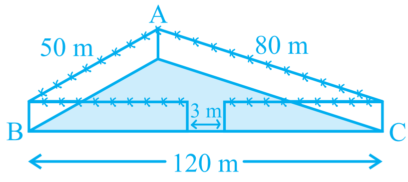
$$2s = 50 \text{ m} + 80 \text{ m} + 120 \text{ m} = 250 \text{ m}$$

अर्थात् $s = 125 \text{ m}$

इसलिए, $s - a = (125 - 120) \text{ m} = 5 \text{ m}$,

$s - b = (125 - 80) \text{ m} = 45 \text{ m}$,

$s - c = (125 - 50) \text{ m} = 75 \text{ m}$



आकृति 10.4

अतः, घास उगाने के लिए क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{125 \times 5 \times 45 \times 75} \text{ m}^2$

$= 375\sqrt{15} \text{ m}^2$

साथ ही, पार्क का परिमाप $= AB + BC + CA = 250 \text{ m}$

अतः, बाड़ लगाने के लिए आवश्यक तार की लम्बाई $= 250 \text{ m} - 3 \text{ m}$ (फाटक के लिए)

$= 247 \text{ m}$

इसलिए, बाड़ लगाने का व्यय = ₹ 20×247 = ₹ 4940

उदाहरण 3 : एक त्रिभुजाकार भूखंड (plot) की भुजाओं का अनुपात $3 : 5 : 7$ है और उसका परिमाप 300 m है। इस भूखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए भुजाएँ (मीटरों में) $3x$, $5x$ और $7x$ हैं (देखिए आकृति 10.5)।

तब, हम जानते हैं कि $3x + 5x + 7x = 300$ (त्रिभुज का परिमाप)

इसलिए, $15x = 300$ है, जिससे $x = 20$ प्राप्त होता है।

इसलिए, त्रिभुज की भुजाएँ $3 \times 20 \text{ m}$, $5 \times 20 \text{ m}$ और $7 \times 20 \text{ m}$ हैं।

अर्थात् ये भुजाएँ 60 m, 100 m और 140 m हैं।

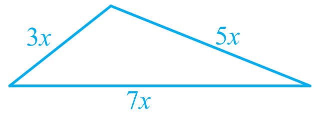
क्या आप अब (हीरोन का सूत्र प्रयोग करके) क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं?

अब, $s = \dfrac{60 + 100 + 140}{2} \text{ m} = 150 \text{ m}$

इसलिए, क्षेत्रफल $= \sqrt{150(150-60)(150-100)(150-140)} \text{ m}^2$

$$= \sqrt{150 \times 90 \times 50 \times 10}\ \text{m}^2$$

$$= 1500\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

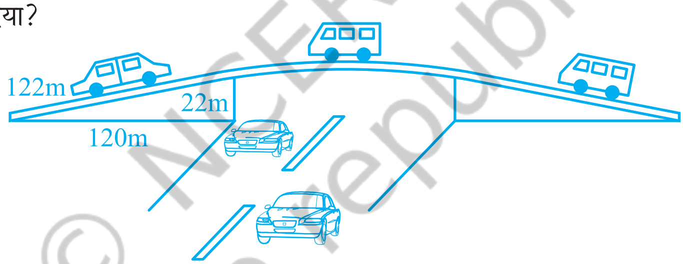


आकृति 10.5

प्रश्नावली 10.1

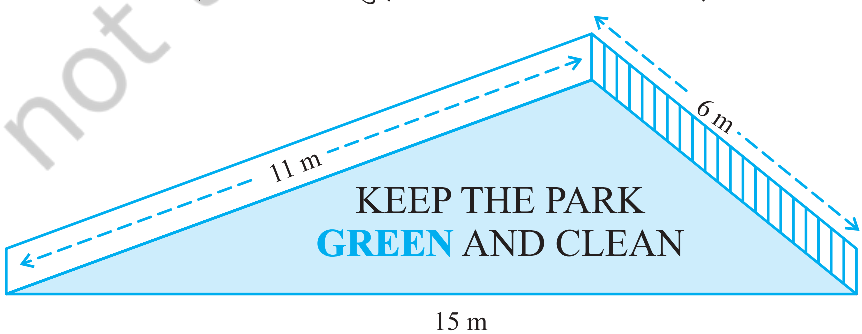
1. एक यातायात संकेत बोर्ड पर 'आगे स्कूल है' लिखा है और यह भुजा 'a' वाले एक समबाहु त्रिभुज के आकार का है। हीरोन के सूत्र का प्रयोग करके इस बोर्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। यदि संकेत बोर्ड का परिमाप 180 cm है, तो इसका क्षेत्रफल क्या होगा?

2. किसी फ्लाईओवर (flyover) की त्रिभुजाकार दीवार को विज्ञापनों के लिए प्रयोग किया जाता है। दीवार की भुजाओं की लंबाइयाँ 122 m, 22 m और 120 m हैं (देखिए आकृति 10.6)। इस विज्ञापन से प्रति वर्ष ₹5000 प्रति m^2 की प्राप्ति होती है। एक कम्पनी ने एक दीवार को विज्ञापन देने के लिए 3 महीने के लिए किराए पर लिया। उसने कुल कितना किराया दिया?



आकृति 10.6

3. किसी पार्क में एक फिसल पट्टी (slide) बनी हुई है। इसकी पार्श्वीय दीवारों (side walls) में से एक दीवार पर किसी रंग से पेंट किया गया है और उस पर "पार्क को हरा-भरा और साफ रखिए" लिखा हुआ है (देखिए आकृति 10.7)। यदि इस दीवार की विमाएँ 15 m, 11 m और 6 m हैं, तो रंग से पेंट हुए भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 10.7

4. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी दो भुजाएँ 18 cm और 10 cm हैं तथा उसका परिमाप 42 cm है।

5. एक त्रिभुज की भुजाओं का अनुपात 12 : 17 : 25 है और उसका परिमाप 540 cm है। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

6. एक समद्विबाहु त्रिभुज का परिमाप 30 cm है और उसकी बराबर भुजाएँ 12 cm लम्बाई की हैं। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

10.2 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिंदु का अध्ययन किया है :

1. यदि त्रिभुज की भुजाएँ a, b और c हों, तो हीरोन के सूत्र द्वारा त्रिभुज का क्षेत्रफल $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ होता है जहाँ $s = \frac{a+b+c}{2}$ है।

0963CH13

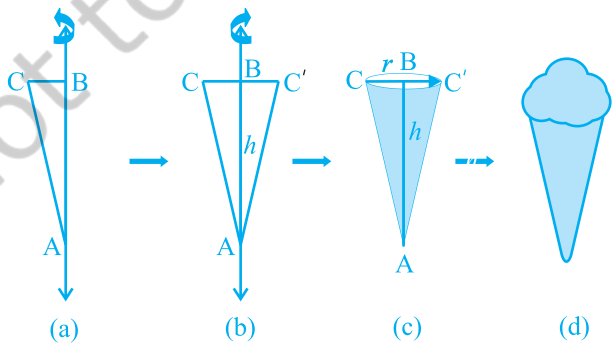
अध्याय 11

पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

11.1 एक लंब वृत्तीय शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल

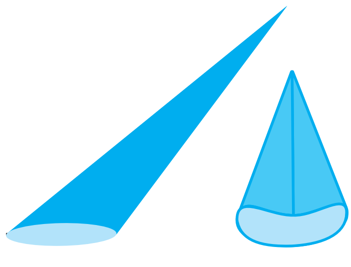
अभी तक हम सर्वांगसम आकृतियों को एक के ऊपर एक रख कर ठोस जनित कर रहे थे। संयोग से इन आकृतियों को *प्रिज्म* (*prism*) कहते हैं। अब एक अन्य प्रकार के ठोसों को देखें जो प्रिज्म नहीं हैं। (इस प्रकार के ठोस पिरामिड (pyramids) कहलाते हैं।) आइए देखें कि इनको किस प्रकार जनित किया (बनाया) जाता है।

क्रियाकलाप : एक समकोण त्रिभुज ABC जिसका कोण B समकोण हो, काट लीजिए। दोनों लंब भुजाओं में से किसी एक, मान लीजिए AB, के अनुदिश एक लंबी और मोटी डोरी चिपका दीजिए [देखिए आकृति 11.1(a)]। डोरी को दोनों हाथों से त्रिभुज के दोनों ओर से पकड़े हुए, त्रिभुज को डोरी के अनुदिश कई बार घुमाइए। आप क्या देखते हैं? जब त्रिभुज डोरी के अनुदिश घूम रहा है, तो जो वह आकृति बना रहा है, क्या आप उसे पहचानते हैं [देखिए आकृति 11.1(b)]? क्या आपको इस बात की याद दिलाती है कि इसी आकार के एक छोटे बर्तन (पात्र) में भरी आपने कभी आइसक्रीम खाई थी [देखिए आकृति 11.1 (c) और (d)]?



आकृति 11.1

यह आकृति एक *लंब वृत्तीय शंकु* (*right circular cone*) कहलाती है। आकृति 11.1(c) में बिन्दु A इस लम्ब वृत्तीय शंकु का *शीर्ष* (*vertex*) कहलाता है, AB इसकी *ऊँचाई* कहलाती है और BC आधार की *त्रिज्या* कहलाती है। AC इस शंकु की *तिर्यक ऊँचाई* (*slant height*) कहलाती है। यहाँ B वृत्तीय आधार का केंद्र (centre) है। शंकु की ऊँचाई, त्रिज्या और तिर्यक ऊँचाई को प्राय: क्रमश: h, r और l से व्यक्त किया जाता है। एक बार पुन: देखें कि किस प्रकार के शंकु को हम लंब वृत्तीय शंकु *नहीं* कह सकते हैं। आप आकृति 11.2 को देखिए। इनमें जो आप शंकु देख रहे हैं वे लंब वृत्तीय शंकु नहीं हैं। (a) में, शीर्ष को आधार के केंद्र से मिलाने वाली रेखा आधार पर लंब नहीं है और (b) में, आधार वृत्तीय नहीं है।

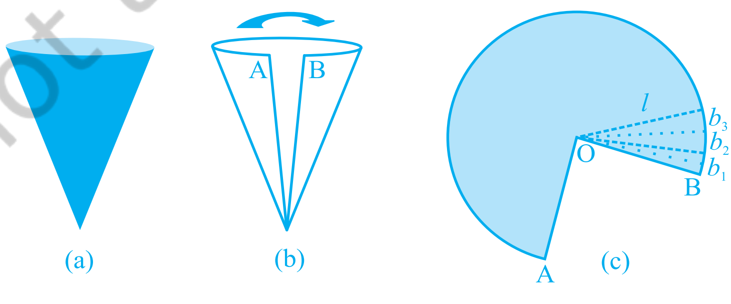


आकृति 11.2

जैसा कि बेलन की स्थिति में था, जब तक अन्यथा न कहा जाए, 'शंकु' से हमारा तात्पर्य लंब वृत्तीय 'शंकु' से ही होगा।

क्रियाकलाप : (i) एक साफ बने हुए कागज़ के शंकु को उसके शीर्ष से जाने वाली किसी भुजा या किनारे के अनुदिश काटिए जिसमें कोई अतिव्यापिकता न हो तथा खोल कर देखिए कि किस आकार के कागज़ से शंकु का पृष्ठ बना था। (जिस भुजा या किनारे के अनुदिश आप शंकु को काटेंगे वह उसकी *तिर्यक ऊँचाई* होगी जिसे l से व्यक्त किया जाता है।) खोला हुआ कागज़ आपको एक गोल केक के भाग की तरह दिखाई देगा।

(ii) यदि आप उन भुजाओं, जिनके सिरों पर A और B अंकित है, को मोड़ कर मिला लें, तो आप देखेंगे कि आकृति 11.3 (c) का वक्रित भाग शंकु का वृत्तीय आधार बनाता है।



आकृति 11.3

(iii) यदि आकृति 11.3 (c) में दिए कागज़ को O से जाती हुई रेखाओं द्वारा सैकड़ों छोटे-छोटे टुकड़ों में विभाजित कर लिया जाए, तो ये कटे हुए भाग लगभग त्रिभुज के आकारों के हैं और इनमें से प्रत्येक की ऊँचाई शंकु की तिर्यक ऊँचाई l के बराबर है।

(iv) अब प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ × प्रत्येक त्रिभुज का आधार × l

अतः, पूरे कागज़ का क्षेत्रफल

= सभी त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का योग

$$= \frac{1}{2}b_1 l + \frac{1}{2}b_2 l + \frac{1}{2}b_3 l + \quad = \frac{1}{2} l\left(b_1 + b_2 + b_3 + \quad\right)$$

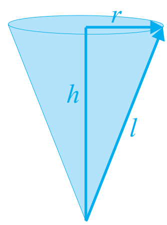
$= \frac{1}{2} \times l \times$ [आकृति 11.3(c) की पूरी वक्रित परिसीमा की लंबाई]

(चूँकि $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$ मिलकर इस आकृति के वक्रित भाग को बनाते हैं)

परन्तु इस वक्रित भाग से शंकु का आधार बनता है।

साथ ही, इस आधार की परिधि $= 2\pi r$, जहाँ r आधार की त्रिज्या है।

इसलिए, $\boxed{\textbf{शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times l \times 2\pi r = \pi r l}$



आकृति 11.4

जहाँ r आधार की त्रिज्या है और l तिर्यक ऊँचाई हैं।

ध्यान दीजिए कि $l^2 = r^2 + h^2$ होता है, जिसे हम आकृति 11.4 से देख सकते हैं (पाइथागोरस प्रमेय से)। यहाँ h शंकु की ऊँचाई है।

अतः, $l = \sqrt{r^2 + h^2}$ होगा।

अब यदि शंकु के आधार को बंद रखा जाता है, तो ढकने के लिए r त्रिज्या वाले एक वृत्ताकार कागज के टुकड़े की आवश्यकता और होगी। इसका क्षेत्रफल स्पष्टतः πr^2 है।

इसलिए, $\boxed{\textbf{शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r)}$

उदाहरण 1 : एक लंब वृत्तीय शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी तिर्यक ऊँचाई 10 cm है और आधार की त्रिज्या 7 cm है।

हल : वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r l$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 10 \text{ cm}^2$$

$$= 220 \text{ cm}^2$$

उदाहरण 2 : एक शंकु की ऊँचाई 16 cm है और आधार की त्रिज्या 12 cm है। इस शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)

हल : यहाँ, $h = 16$ cm और $r = 12$cm है।

इसलिए, $l^2 = h^2 + r^2$ से हमें प्राप्त होता है :

$$l = \sqrt{16^2 + 12^2} \text{ cm} = 20 \text{ cm}$$

अतः, वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl$

$$= 3.14 \times 12 \times 20 \text{ cm}^2$$

$$= 753.6 \text{ cm}^2$$

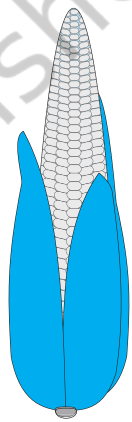
साथ ही, कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl + \pi r^2$

$$= (753.6 + 3.14 \times 12 \times 12) \text{ cm}^2$$

$$= (753.6 + 452.16) \text{ cm}^2$$

$$= 1205.76 \text{ cm}^2$$

उदाहरण 3 : एक भुट्टा कुछ–कुछ शंकु जैसे आकार का है (देखिए आकृति 11.5) जिसके सबसे चौड़े सिरे की त्रिज्या 2.1 cm है और इसकी लम्बाई (ऊँचाई) 20 cm है। यदि भुट्टे के प्रत्येक 1 cm^2 पृष्ठ पर औसतन चार दानें हों, तो ज्ञात कीजिए कि पूरे भुट्टे पर कुल कितने दानें होंगे?.



आकृति 11.5

हल : चूँकि भुट्टे के दानें उसके वक्र पृष्ठ पर ही होते हैं, इसलिए हमें दानों की संख्या ज्ञात करने के लिए भुट्टे के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल को ज्ञात करना होगा। यहाँ हमें शंकु की ऊँचाई दी है। इसलिए, हमें पहले शंकु की तिर्यक ऊँचाई ज्ञात करनी पड़ेगी।

अब, $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(2.1)^2 + 20^2}$ cm

$$= \sqrt{404.41} \text{ cm} = 20.11 \text{ cm}$$

अतः, भुट्टे का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl$

$$= \frac{22}{7} \times 2.1 \times 20.11 \text{ cm}^2 = 132.726 \text{ cm}^2 = 132.73 \text{ cm}^2 \text{ (लगभग)}$$

अतः 1 cm^2 क्षेत्रफल पर दानों की संख्या $= 4$

इसलिए, पूरे भुट्टे पर कुल दानों की संख्या $= 132.73 \times 4 = 530.92 = 531$ (लगभग)
अतः, इस भुट्टे पर लगभग 531 दानें होंगे।

प्रश्नावली 11.1

जब तक अन्यथा न कहा जाए, $\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।

1. एक शंकु के आधार का व्यास 10.5 cm है और इसकी तिर्यक ऊँचाई 10 cm है। इसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

2. एक शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी तिर्यक ऊँचाई 21 m है और आधार का व्यास 24 m है।

3. एक शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 308 cm^2 है और इसकी तिर्यक ऊँचाई 14 cm है। ज्ञात कीजिए :

(i) आधार की त्रिज्या (ii) शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

4. शंकु के आकार का एक तंबू 10 m ऊँचा है और उसके आधार की त्रिज्या 24 m है। ज्ञात कीजिए :

(i) तंबू की तिर्यक ऊँचाई

(ii) तंबू में लगे केनवास (canvas) की लागत, यदि 1 m^2 केनवास की लागत 70 रुपए है।

5. 8 m ऊँचाई और आधार की त्रिज्या 6 m वाले एक शंकु के आकार का तंबू बनाने में 3 m चौड़े तिरपाल की कितनी लंबाई लगेगी? यह मान कर चलिए कि इसकी सिलाई और कटाई में 20 cm तिरपाल अतिरिक्त लगेगा। ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए।)

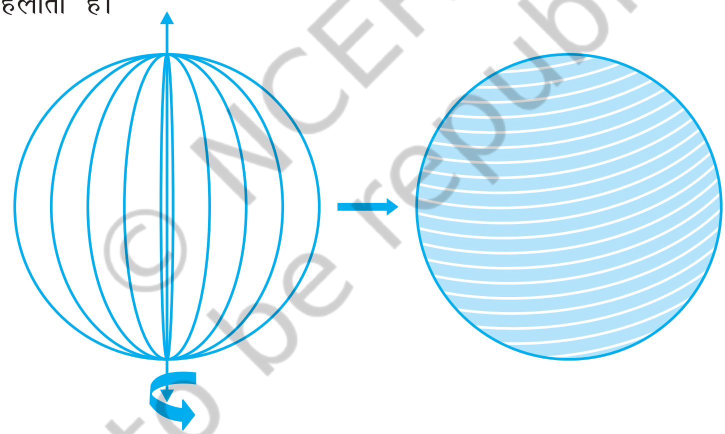
6. शंकु के आधार की एक गुंबज की तिर्यक ऊँचाई और आधार व्यास क्रमश: 25 m और 14 m हैं। इसकी वक्र पृष्ठ पर ₹ 210 प्रति 100 m^2 की दर से सफेदी कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

7. एक जोकर की टोपी एक शंकु के आकार की है, जिसके आधार की त्रिज्या 7 cm और ऊँचाई 24 cm है। इसी प्रकार की 10 टोपियाँ बनाने के लिए आवश्यक गत्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

8. किसी बस स्टाप को पुराने गत्ते से बने 50 खोखले शंकुओं द्वारा सड़क से अलग किया हुआ है। प्रत्येक शंकु के आधार का व्यास 40 cm है और ऊँचाई 1 m है। यदि इन शंकुओं की बाहरी पृष्ठों को पेंट करवाना है और पेंट की दर ₹ 12 प्रति m^2 है, तो इनको पेंट कराने में कितनी लागत आएगी? ($\pi = 3.14$ और $\sqrt{1.04} = 1.02$ का प्रयोग कीजिए।)

11.2 गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

एक गोला (sphere) क्या होता है? क्या यह एक वृत्त की तरह ही है? क्या आप एक कागज पर वृत्त खींच सकते हैं? हाँ, आप खींच सकते हैं, क्योंकि यह एक बंद समतल आकृति है जिसका प्रत्येक बिंदु एक निश्चित बिंदु (जिसे वृत्त का केंद्र कहते हैं) से एक निश्चित दूरी पर रहता है (जिसे वृत्त की *त्रिज्या* कहते हैं)। अब यदि आप एक वृत्ताकार चकती (disc) के एक व्यास के अनुदिश एक डोरी चिपका दें और इसे वैसे ही घुमाएँ जैसे आपने पिछले अनुच्छेद में त्रिभुज को घुमाया था, तो आप एक नया ठोस देखेंगे (देखिए आकृति 11.6)। यह किस वस्तु से मिलता-जुलता लगता है? एक गेंद? हाँ, ऐसा ही है। यह एक **गोला (sphere)** कहलाता है।

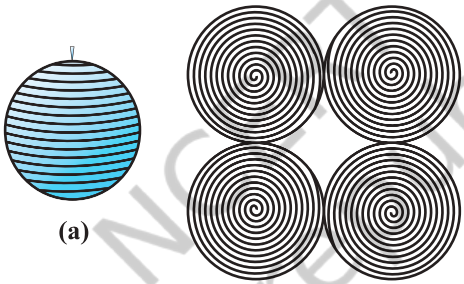


आकृति 11.6

क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि उस वृत्त के केंद्र का क्या होता है जिसे आपने घुमाया है। नि:संदेह, यह गोले का केंद्र भी हो जाता है। इस प्रकार, *गोला एक त्रिविमीय आकृति (three dimensional figure) (ठोस आकृति) है, जो आकाश (स्पेस) (space) में स्थित उन सभी बिंदुओं से मिल कर बनी है जो एक निश्चित बिंदु से (जो गोले का केन्द्र कहलाता है) से एक **अचर** या निश्चित दूरी पर होते हैं (जो गोले की **त्रिज्या** कहलाती है)।*

टिप्पणी : गोला एक गेंद की पृष्ठ की तरह होता है। *ठोस गोला* उस ठोस के लिए प्रयोग होता है जिसका पृष्ठ एक गोला हो।

क्रियाकलाप : क्या आप कभी लट्टू के साथ खेले हैं या कभी आपने किसी व्यक्ति को लट्टू के साथ खेलते देखा है? आप यह जानते होंगे कि उस पर डोरी किस प्रकार लपेटी जाती है। अब आइए एक रबर की गेंद लें और उसके ऊपर एक कील लगा दें। कील की सहायता लेते हुए, गेंद पर डोरी लपेटना प्रारम्भ कर दीजिए। जब आप ऐसा कर रहे हों, तो डोरी को थामे रखने के लिए, बीच-बीच में पिन लगाते रहिए और डोरी लपेटना तब तक जारी रखिए जब तक कि पूरी गेंद पर डोरी न लिपट जाए [देखिए आकृति 11.7(a)]। डोरी पर प्रारम्भिक और अंतिम बिंदु अंकित कर लीजिए और धीरे-धीरे गेंद से डोरी को हटा लीजिए। अब अपने शिक्षक से गेंद का व्यास मापने के लिए सहायता देने के लिए कहिए। इससे आपको गेंद की त्रिज्या ज्ञात हो जाएगी। इसके बाद, कागज पर गेंद की त्रिज्या के बराबर चार वृत्त खींच लीजिए। अब जो डोरी आपने गेंद पर लपेटी थी उसी को एक-एक करके इन वृत्तों पर रखकर वृत्तों को भरिए [देखिए आकृति 11.7(b)]।



आकृति 11.7

इन सबसे आपको क्या प्राप्त होता है?

वह डोरी जिसने एक गोले के पृष्ठ को पूरा-पूरा ढक दिया था अब उसी गोले की त्रिज्या वाले चार वृत्तों के क्षेत्रों को भर रही है। इसका क्या अर्थ हुआ? इससे यह सुझाव मिलता है कि त्रिज्या r वाले एक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

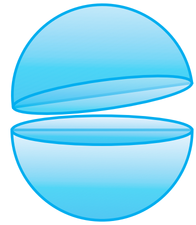
= त्रिज्या r वाले चार वृत्तों का क्षेत्रफल $= 4 \times (\pi r^2)$

इसलिए, **गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4 \pi r^2$**

जहाँ r गोले की त्रिज्या है।

गोले के पृष्ठ पर आप कितने फलक देखते हैं? केवल एक। यह वक्रीय है।

आइए एक ठोस गोला लें और इसे बीच से इसके केंद्र से जाते हुए एक तल द्वारा दो भागों में काट लें। गोले का क्या होता है?



आकृति 11.8

यह दो बराबर भागों में विभाजित हो गया है (देखिए आकृति 11.8)। प्रत्येक आधा भाग क्या कहलाता है यह एक **अर्धगोला (hemisphere)** कहलाता है (क्योंकि hemi का अर्थ आधा है))।

अर्धगोले के पृष्ठ के बारे में आप क्या कह सकते हैं? इसके कितने फलक हैं?

दो!, इनमें एक वक्रीय है और एक समतल फलक है (आधार)।

अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफल का आधा, अर्थात् $\frac{1}{2} \times 4\pi r^2$ है।

अतः, $\boxed{\textbf{अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 2\pi r^2}$

जहाँ r उस गोले की त्रिज्या है जिसका अर्धगोला एक भाग है।

अब दोनों फलकों को लेने पर, इसका कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi r^2 + \pi r^2$ है।

अतः, $\boxed{\textbf{अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 3\pi r^2}$

उदाहरण 4 : 7 cm त्रिज्या वाले एक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : 7 cm त्रिज्या वाले गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \text{ cm}^2 = 616 \text{ cm}^2$$

उदाहरण 5 : त्रिज्या 21 cm वाले एक अर्धगोले के लिए, ज्ञात कीजिए:

(i) वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल (ii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

हल : (i) त्रिज्या 21 cm वाले अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 2\pi r^2 = 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ cm}^2 = 2772 \text{ cm}^2$$

(ii) अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 3\pi r^2 = 3 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ cm}^2 = 4158 \text{ cm}^2$$

उदाहरण 6 : सर्कस का एक मोटरसाइकिल सवार जिस खोखले गोले के अंदर अपने करतब (खेल) दिखाता है उसका व्यास 7 m है। मोटरसाइकिल सवार के पास ये करतब दिखाने के लिए कितना क्षेत्रफल उपलब्ध है?

हल : गोले का व्यास = 7 m है। इसलिए त्रिज्या 3.5m हुई। अब, करतब दिखाने के लिए, मोटरसाइकिल सवार को उपलब्ध स्थान इस गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल है।

गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \text{ m}^2 = 154 \text{ m}^2$

उदाहरण 7 : किसी भवन का ऊपरी भाग अर्धगोलाकार है और इस पर पेंट किया जाना है (देखिए आकृति 11.9)। यदि इस अर्धगोले के आधार की परिधि 17.6 m है, तो ₹5 प्रति 100 cm^2 की दर से इसे पेंट कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हल : चूँकि केवल गोलाकार पृष्ठ पर ही पेंट होगा, इसलिए हमें अर्धगोले के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल को ज्ञात करने की आवश्यकता है।

अब, आधार की परिधि = 17.6 m है।

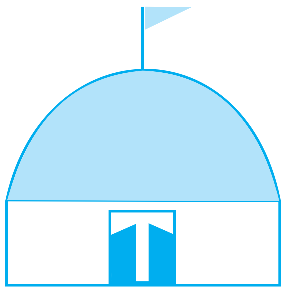
इसलिए, $2\pi r = 17.6$

अर्थात्, $r = \frac{17.6 \times 7}{2 \times 22}$ m = 2.8 m

इसलिए, भवन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8 \text{ m}^2$$

$$= 49.28 \text{ m}^2$$



आकृति 11.9

अब, 100 cm^2 पेंटिंग की लागत = ₹5

इसलिए, 1 m^2 पेंटिंग की लागत = ₹500

अतः, 49.28 m^2 पेंटिंग की लागत = ₹500 × 49.28 = ₹24640

प्रश्नावली 11.2

जब तक अन्यथा न कहा जाए, $\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।

1. निम्न त्रिज्या वाले गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :
(i) 10.5 cm (ii) 5.6 cm (iii) 14 cm

2. निम्न व्यास वाले गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :
(i) 14 cm (ii) 21 cm (iii) 3.5 m

3. 10 cm त्रिज्या वाले एक अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए।)

4. एक गोलाकार गुब्बारे में हवा भरने पर, उसकी त्रिज्या 7 cm से 14 cm हो जाती है। इन दोनों स्थितियों में, गुब्बारे के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

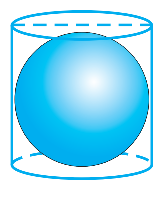
5. पीतल से बने एक अर्धगोलाकार कटोरे का आंतरिक व्यास 10.5 cm है। ₹16 प्रति 100 cm^2 की दर से इसके आंतरिक पृष्ठ पर कलई कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

6. उस गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल 154 cm^2 है।

7. चन्द्रमा का व्यास पृथ्वी के व्यास का लगभग एक-चौथाई है। इन दोनों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

8. एक अर्धगोलाकार कटोरा 0.25 cm मोटी स्टील से बना है। इस कटोरे की आंतरिक त्रिज्या 5 cm है। कटोरे का बाहरी वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

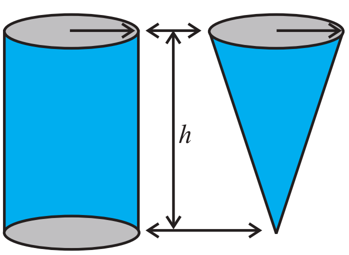
9. एक लंब वृत्तीय बेलन त्रिज्या r वाले एक गोले को पूर्णतया घेरे हुए है (देखिए आकृति 11.10)। ज्ञात कीजिए:
(i) गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल
(ii) बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल
(iii) ऊपर (i) और (ii) में प्राप्त क्षेत्रफलों का अनुपात



आकृति 11.10

11.3 लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन

आकृति 11.11 में, आप देखते हैं कि इसमें एक ही आधार त्रिज्या वाले और एक ही ऊँचाई वाले बेलन और शंकु दिए हुए हैं।



आकृति 11.11

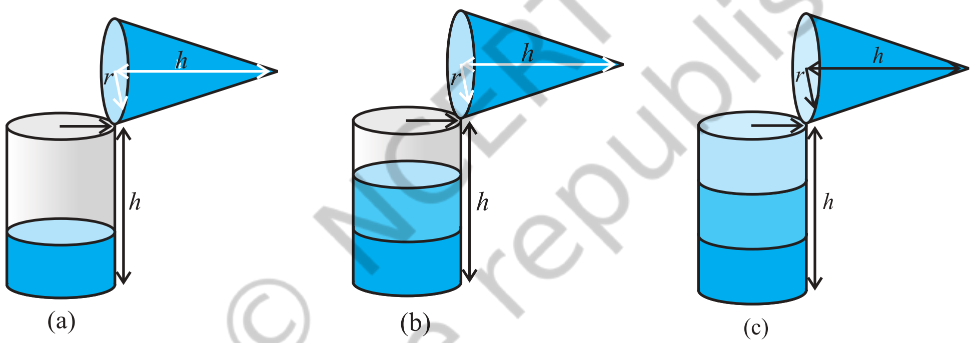
क्रियाकलाप : उपरोक्त आकृतियों की ही तरह, एक ही आधार त्रिज्या और एक ही ऊँचाई वाला एक खोखला बेलन और एक खोखला शंकु बनाने का प्रयत्न कीजिए (देखिए आकृति 11.11)। फिर हम एक प्रयोग द्वारा यह ज्ञात करेंगे कि एक शंकु का आयतन क्या है।

आइए इस प्रयोग को प्रारम्भ करें।

शंकु को रेत से एक बार ऊपर तक भरिए और इस रेत को बेलन में डाल दीजिए। हम देखते हैं कि इससे बेलन का कुछ भाग भर गया है [देखिए आकृति 11.12 (a)]।

फिर हम दुबारा शंकु को रेत से भर कर बेलन में रेत को डाल देते हैं। हम देखते हैं कि बेलन अभी भी पूरा नहीं भरा है [देखिए आकृति 11.12(b)]।

अब शंकु को तीसरी बार रेत से भर कर बेलन में डालिए। हम देखते हैं कि बेलन पूरा रेत से भर गया है [देखिए आकृति 11.12(c)]।



आकृति 11.12

इस प्रयोग से, हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि तीन शंकुओं का आयतन बेलन के आयतन के बराबर है। इसका अर्थ है कि यदि शंकु और बेलन की आधार त्रिज्या एक ही हो और ऊँचाई भी एक ही हो, तो शंकु का आयतन बेलन के आयतन का एक-तिहाई होता है।

अतः, $\boxed{\textbf{शंकु का आयतन} = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$

जहाँ r आधार त्रिज्या है और h शंकु की ऊँचाई है।

उदाहरण 8 : किसी शंकु की ऊँचाई और तिर्यक ऊँचाई क्रमशः 21 cm और 28 cm हैं। इसका आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : $l^2 = r^2 + h^2$ से हमें प्राप्त होता है :

$$r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{28^2 - 21^2} \text{ cm} = 7\sqrt{7} \text{ cm}$$

अतः, शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7\sqrt{7} \times 7\sqrt{7} \times 21 \text{ cm}^3$

$= 7546 \text{ cm}^3$

उदाहरण 9 : मोनिका के पास केनवास का एक टुकड़ा है जिसका क्षेत्रफल 551 m^2 है। वह इससे 7 m आधार त्रिज्या वाला एक शंकु का आपतन का तंबू बनवाती है। यह मानते हुए कि सिलाई और कटाई में लगभग 1 m^2 केनवास नष्ट हुआ होगा, इससे बनाए जाने वाले शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : केनवास का क्षेत्रफल = 551 m^2 है और 1 m^2 केनवास सिलाई, इत्यादि में नष्ट हो जाता है।

अतः, तंबू के लिए उपलब्ध केनवास = (551 – 1) m^2 = 550 m^2

इसलिए, तंबू का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 550 m^2

अब, तंबू के आधार की त्रिज्या = 7 m

ध्यान दीजिए कि तंबू की केवल वक्र पृष्ठ ही होती है (तंबू के फर्श को ढका नहीं जाता है)।

अतः, तंबू का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = 550 m^2

अर्थात्, $\pi r l = 550$

या, $\frac{22}{7} \times 7 \times l = 550$

या, $l = \frac{550}{22} \text{ m} = 25 \text{ m}$

अब, $l^2 = r^2 + h^2$

इसलिए, $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} \text{ m} = \sqrt{625 - 49} \text{ m} = \sqrt{576} \text{ m}$

$= 24 \text{ m}$

अतः, तंबू का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24 \text{ m}^3 = 1232 \text{ m}^3$

प्रश्नावली 11.3

जब तक अन्यथा न कहा जाए, $\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।

1. उस लंब वृत्तीय शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए, जिसकी
(i) त्रिज्या 6 cm और ऊँचाई 7 cm है। (ii) त्रिज्या 3.5 cm और ऊँचाई 12 cm है।

2. शंकु के आकार के उस बर्तन की लीटरों में धारिता ज्ञात कीजिए जिसकी
(i) त्रिज्या 7 cm और तिर्यक ऊँचाई 25 cm है।
(ii) ऊँचाई 12 cm और तिर्यक ऊँचाई 13 cm है।

3. एक शंकु की ऊँचाई 15 cm है। यदि इसका आयतन 1570 cm^3 है, तो इसके आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ प्रयोग कीजिए।)

4. यदि 9 cm ऊँचाई वाले एक लंब वृत्तीय शंकु का आयतन $48\pi \text{ cm}^3$ है, तो इसके आधार का व्यास ज्ञात कीजिए।

5. ऊपरी व्यास 3.5 m वाले शंकु के आकार का एक गढ्ढा 12 m गहरा है। इसकी धारिता किलोलीटरों में कितनी है?

6. एक लंब वृत्तीय शंकु का आयतन 9856 cm^3 है। यदि इसके आधार का व्यास 28 cm है, तो ज्ञात कीजिए :
(i) शंकु की ऊँचाई (ii) शंकु की तिर्यक ऊँचाई
(iii) शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

7. भुजाओं 5 cm, 12 cm और 13 cm वाले एक समकोण त्रिभुज ABC को भुजा 12 cm के परित घुमाया जाता है। इस प्रकार प्राप्त ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

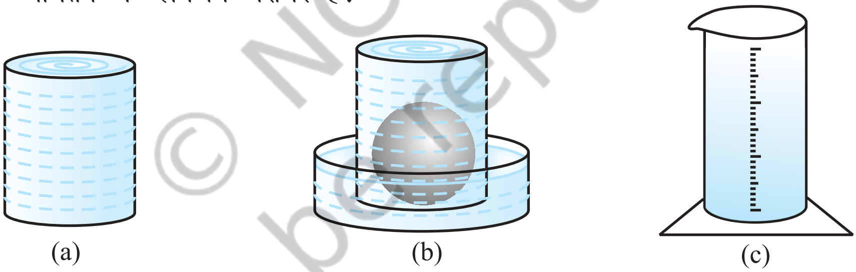
8. यदि प्रश्न 7 के त्रिभुज ABC को यदि भुजा 5 cm के परित घुमाया जाए, तो इस प्रकार प्राप्त ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए। प्रश्नों 7 और 8 में प्राप्त किए गए दोनों ठोसों के आयतनों का अनुपात भी ज्ञात कीजिए।

9. गेहूँ की एक ढेरी 10.5 m व्यास और ऊँचाई 3 m वाले एक शंकु के आकार की है। इसका आयतन ज्ञात कीजिए। इस ढेरी को वर्षा से बचाने के लिए केनवास से ढका जाना है। वाँछित केनवास का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

11.4 गोले का आयतन

आइए अब देखें कि एक गोले का आयतन कैसे मापा जाए। पहले विभिन्न त्रिज्याओं वाले दो या तीन गोले लीजिए। फिर एक बर्तन लीजिए, जिसके अंदर इन गोलों को (केवल एक बार में एक) रखा जा सके। साथ ही, एक बड़ी नाँद (trough) लीजिए जिसमें इस बर्तन को रखा जा सके। अब बर्तन को पूरा ऊपर तक पानी से भरिए [देखिए आकृति 11.13(a)]।

अब लिए गए गोलों में से एक को बर्तन में सावधानीपूर्वक डालिए। बर्तन में से कुछ पानी बाहर निकल कर उस नाँद में जाएगा जिसमें वह बर्तन रखा हुआ है [देखिए आकृति 11.13(b)]। अब नाँद में आए इस पानी को सावधानीपूर्वक एक नापने वाले बेलन [अर्थात् अशांकित बेलनाकार गिलास (graduated cylindrical jar)] में डालिए। मान लीजिए पानी में डुबाए गए गोले की त्रिज्या r है (आप गोले का व्यास माप कर उसकी त्रिज्या ज्ञात कर सकते हैं)। अब $\frac{4}{3}\pi r^3$ का मान निकालिए। क्या आप यह पाते हैं कि यह मान बर्तन से बाहर निकले पानी के आयतन के लगभग बराबर है?



आकृति 11.13

एक बार फिर इसी प्रक्रिया को एक अन्य माप का गोला लेकर दोहराइए। इस गोले की त्रिज्या R ज्ञात करके $\frac{4}{3}\pi R^3$ का मान निकालिए। एक बार फिर यह मान बर्तन से बाहर निकले पानी के आयतन के लगभग बराबर है। यह हमें क्या बताता है? हम जानते हैं कि गोले का आयतन उसके द्वारा हटाए गए पानी के आयतन के बराबर है। इस प्रयोग को बार-बार करने पर, हम प्राप्त करते हैं कि एक गोले का आयतन गोले की त्रिज्या के घन का $\frac{4}{3}\pi$ गुना है। इससे हमें निम्न सुझाव प्राप्त होता है :

गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

जहाँ r गोले की त्रिज्या है।

उच्चतर कक्षाओं में इसे सिद्ध भी किया जा सकता है। परन्तु इस समय तो हम इसे सत्य मान लेते हैं।.

अब अर्धगोले के आयतन के बारे में आप क्या अनुमान लगा सकते हैं? हाँ, यह $\frac{4}{3}\pi r^3$ का $\frac{1}{2} = \frac{2}{3}\pi r^3$ है।

अतः, अर्धगोले का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$

जहाँ r अर्धगोले की त्रिज्या है।

आइए इन सूत्रों का प्रयोग दर्शाने के लिए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 10 : 11.2 cm त्रिज्या वाले गोले का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : वाँछित आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 11.2 \times 11.2 \times 11.2 \text{ cm}^3 = 5887.32 \text{ cm}^3$$

उदाहरण 11 : एक शॉट-पट्ट (shot-putt) 4.9 cm त्रिज्या वाला एक धातु का गोला है। यदि इस धातु का घनत्व (density) 7.8 ग्राम प्रति cm^3 है, तो शॉट-पट्ट का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए।

हल : चूँकि शॉट-पट्ट (shot-putt) धातु का एक ठोस गोला है तथा द्रव्यमान आयतन और घनत्व के गुणनफल के बराबर होता है, इसलिए पहले हमें शॉट-पट्ट का आयतन ज्ञात करना चाहिए।

अब, गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9 \times 4.9 \text{ cm}^3$$

$= 493 \text{ cm}^3$ (लगभग)

साथ ही, 1 cm^3 धातु का द्रव्यमान = 7.8 ग्राम

अतः, शॉट-पट्ट का द्रव्यमान = 7.8 × 493 ग्राम

= 3845.44 ग्राम = 3.85 किलोग्राम (लगभग)

उदाहरण 12 : एक अर्धगोलाकार कटोरे की त्रिज्या 3.5 cm है। इसके अंदर भरे जा सकने वाले पानी का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : कटोरे में भरे जा सकने वाले पानी का आयतन

$$= \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 3.5 \ \ cm^3 = 89.8 \ cm^3$$

प्रश्नावली 11.4

जब अन्यथा न कहा जाए, $\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।

1. उस गोले का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या निम्न है :

   (i) 7 cm (ii) 0.63 m

2. उस ठोस गोलाकार गेंद द्वारा हटाए गए (विस्थापित) पानी का आयतन ज्ञात कीजिए, जिसका व्यास निम्न है :

   (i) 28 cm (ii) 0.21 m

3. धातु की एक गेंद का व्यास 4.2 cm है। यदि इस धातु का घनत्व 8.9 ग्राम प्रति cm^3 है, तो इस गेंद का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए।

4. चंद्रमा का व्यास पृथ्वी के व्यास का लगभग एक-चौथाई है। चंद्रमा का आयतन पृथ्वी के आयतन की कौन-सी भिन्न है?

5. व्यास 10.5 cm वाले एक अर्धगोलाकार कटोरे में कितने लीटर दूध आ सकता है?

6. एक अर्धगोलाकार टंकी 1 cm मोटी एक लोहे की चादर (sheet) से बनी है। यदि इसकी आंतरिक त्रिज्या 1 m है, तो इस टंकी के बनाने में लगे लोहे का आयतन ज्ञात कीजिए।

7. उस गोले का आयतन ज्ञात कीजिए जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल 154 cm^2 है।

8. किसी भवन का गुंबद एक अर्धगोले के आकार का है। अंदर से, इसमें सफेदी कराने में ₹498.96 व्यय हुए। यदि सफेदी कराने की दर ₹2 प्रति वर्ग मीटर है, तो ज्ञात कीजिए:

(i) गुंबद का आंतरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल (ii) गुंबद के अंदर की हवा का आयतन

9. लोहे के सत्ताइस ठोस गोलों को पिघलाकर, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या r है और पृष्ठीय क्षेत्रफल S है, एक बड़ा गोला बनाया जाता है जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल S′ है। ज्ञात कीजिए:

(i) नए गोले की त्रिज्या r' (ii) S और S′ का अनुपात

10. दवाई का एक कैपसूल (capsule) 3.5 mm व्यास का एक गोला (गोली) है। इस कैपसूल को भरने के लिए कितनी दवाई (mm^3 में) की आवश्यकता होगी?

11.5 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है:

1. **शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल** $= \pi rl$
2. **शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल** $= \pi rl + \pi r^2$, **अर्थात्** $\pi r (l + r)$
3. **गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल** $= 4 \pi r^2$
4. **अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल** $= 2\pi r^2$
5. **अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल** $= 3\pi r^2$
6. **शंकु का आयतन** $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$
7. **गोले का आयतन** $= \frac{4}{3}\pi r^3$
8. **अर्धगोले का आयतन** $= \frac{2}{3}\pi r^3$

[यहाँ अक्षरों l, b, h, a, r, इत्यादि का प्रयोग, अपने संदर्भ के अनुसार, सामान्य अर्थों में प्रयोग किया गया है।]

0963CH14

अध्याय 12

सांख्यिकी

12.1 आंकड़ों का आलेखीय निरुपण

सारणियों से आंकड़ों का निरूपण करने के बारे में हम चर्चा कर चुके हैं। आइए अब हम आंकड़ों के अन्य निरूपण, अर्थात् आलेखीय निरूपण (graphical representation) की ओर अपना ध्यान केंद्रित करें। इस संबंध में एक कहावत यह रही है कि एक चित्र हजार शब्द से भी उत्तम होता है। प्रायः अलग-अलग मदों की तुलनाओं को आलेखों (graphs) की सहायता से अच्छी तरह से दर्शाया जाता है। तब वास्तविक आंकड़ों की तुलना में इस निरूपण को समझना अधिक सरल हो जाता है। इस अनुच्छेद में, हम निम्नलिखित आलेखीय निरूपणों का अध्ययन करेंगे।

(A) दंड आलेख (Bar Graph)

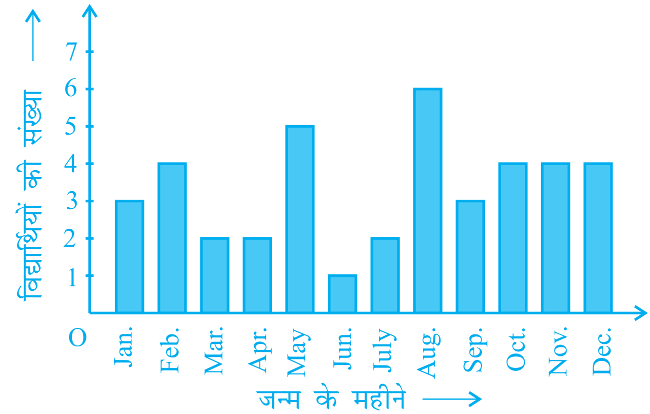
(B) एकसमान चौड़ाई और परिवर्ती चौड़ाइयों वाले आयतचित्र (Histograms)

(C) बारंबारता बहुभुज (Frequency Polygons)

(A) दंड आलेख

पिछली कक्षाओं में, आप दंड आलेख का अध्ययन कर चुके हैं और उन्हें बना भी चुके हैं। यहाँ हम कुछ अधिक औपचारिक दृष्टिकोण से इन पर चर्चा करेंगे। आपको याद होगा कि दंड आलेख आंकड़ों का एक चित्रीय निरूपण होता है जिसमें प्रायः एक अक्ष (मान लीजिए x-अक्ष) पर एक चर को प्रकट करने वाले एक समान चौड़ाई के दंड खींचे जाते हैं जिनके बीच में बराबर-बराबर दूरियाँ छोड़ी जाती हैं। चर के मान दूसरे अक्ष (मान लीजिए y-अक्ष) पर दिखाए जाते हैं और दंडों की ऊँचाइयाँ चर के मानों पर निर्भर करती हैं।

उदाहरण 1 : नवीं कक्षा के 40 विद्यार्थियों से उनके जन्म का महीना बताने के लिए कहा गया। इस प्रकार प्राप्त आंकड़ों से निम्नलिखित आलेख बनाया गया:



आकृति 12.1

ऊपर दिए गए आलेख को देखकर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) नवंबर के महीने में कितने विद्यार्थियों का जन्म हुआ?

(ii) किस महीने में सबसे अधिक विद्यार्थियों का जन्म हुआ?

हल : ध्यान दीजिए कि यहाँ चर 'जन्म दिन का महीना' है और चर का मान 'जन्म लेने वाले विद्यार्थियों की संख्या' है।

(i) नवंबर के महीने में 4 विद्यार्थियों का जन्म हुआ।

(ii) अगस्त के महीने में सबसे अधिक विद्यार्थियों का जन्म हुआ।

आइए अब हम निम्नलिखित उदाहरण लेकर इनका पुनर्विलोकन करें कि एक दंड आलेख किस प्रकार बनाया जाता है।

उदाहरण 2 : एक परिवार ने जिसकी मासिक आय ₹ 20000 है, विभिन्न मदों के अंतर्गत हर महीने होने वाले खर्च की योजना बनाई थी:

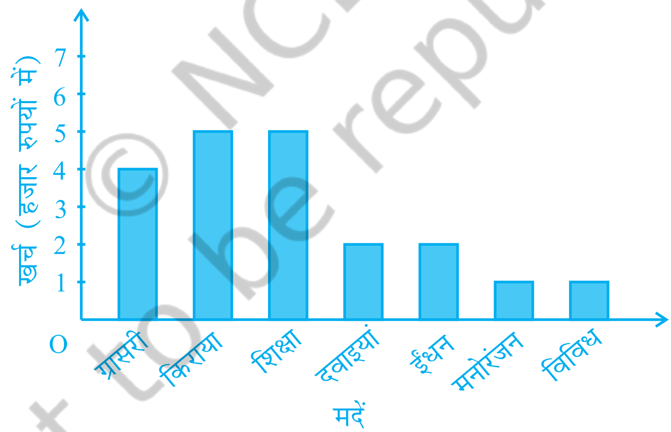
सारणी 12.1

मद	खर्च (हजार रुपयों में)
ग्रॉसरी (परचून का सामान)	4
किराया	5
बच्चों की शिक्षा	5
दवाइयाँ	2
ईंधन	2
मनोरंजन	1
विविध	1

ऊपर दिए गए आंकड़ों का एक दंड आलेख बनाइए।

हल : हम इन आंकड़ों का दंड आलेख निम्नलिखित चरणों में बनाते हैं। ध्यान दीजिए कि दूसरे स्तंभ में दिया गया मात्रक (unit) 'हजार रुपयों में' है। अत:, ग्रॉसरी (परचून का सामान) के सामने लिखा अंक 4 का अर्थ ₹ 4000 है।

1. कोई भी पैमाना (scale) लेकर हम क्षैतिज अक्ष पर मदों (चर) को निरूपित करते हैं, क्योंकि यहाँ दंड की चौड़ाई का कोई महत्व नहीं होता। परन्तु स्पष्टता के लिए हम सभी दंड समान चौड़ाई के लेते हैं और उनके बीच समान दूरी बनाए रखते हैं। मान लीजिए एक मद को एक सेंटीमीटर से निरूपित किया गया है।
2. हम खर्च (मूल्य) को ऊर्ध्वाधर अक्ष पर निरूपित करते हैं। क्योंकि अधिकतम खर्च ₹ 5000 है, इसलिए हम पैमाना 1 मात्रक = ₹ 1000 ले सकते हैं।
3. अपने पहले मद अर्थात् ग्रॉसरी को निरूपित करने के लिए, हम 1 मात्रक की चौड़ाई 4 मात्रक की ऊँचाई वाला एक आयताकार दंड बनाते हैं।
4. इसी प्रकार, दो क्रमागत दंडों के बीच 1 मात्रक का खाली स्थान छोड़कर अन्य मदों को निरूपित किया जाता है (देखिये आकृति 12.2)।



आकृति 12.2

यहाँ आप एक दृष्टि में ही आंकड़ों के सापेक्ष अभिलक्षणों को सरलता से देख सकते हैं। उदाहरण के लिए, आप यह सरलता से देख सकते हैं कि ग्रॉसरी पर किया गया खर्च दवाइयों पर किए गए खर्च का दो गुना है। अत:, कुछ अर्थों में सारणी रूप की अपेक्षा यह आंकड़ों का एक उत्तम निरूपण है।

क्रियाकलाप 1 : अपनी कक्षा के विद्यार्थियों को चार समूहों में बाँट दीजिए। प्रत्येक समूह को निम्न प्रकार के आंकड़ों में से एक प्रकार के आंकड़ों को संग्रह करने का काम दे दीजिए।

(i) अपनी कक्षा के 20 विद्यार्थियों की लंबाई।

(ii) अपनी कक्षा में किसी एक महीने के प्रत्येक दिन अनुपस्थित रहे विद्यार्थियों की संख्या।

(iii) आपके कक्षा मित्रों के परिवारों के सदस्यों की संख्या।

(iv) आपके विद्यालय में या उसके आस-पास के 15 पौधों की लंबाइयाँ।

इन चार समूहों द्वारा प्राप्त आंकड़ों को उपयुक्त दंड आलेखों से निरूपित कीजिए।

आइए अब हम देखें कि किस प्रकार संतत वर्ग अंतरालों की बारंबारता बंटन सारणी को आलेखीय रूप में निरूपित किया जाता है।

(B) आयतचित्र

यह संतत वर्ग अंतरालों के लिए प्रयुक्त दंड आलेख की भाँति निरूपण का एक रूप है। उदाहरण के लिए, बारंबारता बंटन सारणी 12.2 लीजिए, जिसमें एक कक्षा के 36 विद्यार्थियों के भार दिए गए हैं:

सारणी 12.2

भार (kg में)	विद्यार्थियों की संख्या
30.5 - 35.5	9
35.5 - 40.5	6
40.5 - 45.5	15
45.5 - 50.5	3
50.5 - 55.5	1
55.5 - 60.5	2
कुल योग	36

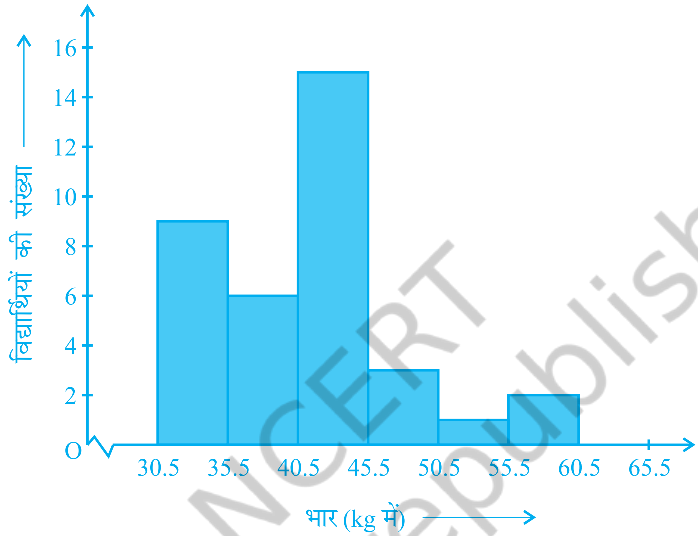
आइए हम ऊपर दिए गए आंकड़ों को आलेखीय रूप में इस प्रकार निरूपित करें:

(i) हम एक उपयुक्त पैमाना लेकर भार को क्षैतिज अक्ष पर निरूपित करें। हम पैमाना 1 सेंटीमीटर = 5 kg ले सकते हैं। साथ ही, क्योंकि पहला वर्ग अंतराल 30.5 से प्रारंभ हो रहा है न कि शून्य से, इसलिए एक निकुंच (kink) का चिह्न बनाकर या अक्ष में एक विच्छेद दिखा कर, इसे हम आलेख पर दर्शा सकते हैं।

(ii) हम एक उपयुक्त पैमाने के अनुसार विद्यार्थियों की संख्या (बारंबारता) को ऊर्ध्वाधर अक्ष पर निरूपित करते हैं। साथ ही, क्योंकि अधिकतम बारंबारता 15 है, इसलिए हमें एक ऐसे पैमाने का चयन करना होता है जिससे कि उसमें यह अधिकतम बारंबारता आ सके।

(iii) अब हम वर्ग अंतराल के अनुसार समान चौड़ाई और संगत वर्ग अंतरालों की बारंबारताओं को लंबाइयाँ मानकर आयत (या आयताकार दंड) बनाते हैं। उदाहरण के लिए, वर्ग अंतराल 30.5–35.5 का आयत 1 सेंटीमीटर की चौड़ाई और 4.5 सेंटीमीटर की लंबाई वाला आयत होगा।

(iv) इस प्रकार हमें जो आलेख प्राप्त होता है, उसे आकृति 12.3 में दिखाया गया है।



आकृति 12.3

ध्यान दीजिए कि क्योंकि क्रमागत आयतों के बीच कोई रिक्त स्थान नहीं है, इसलिए परिणामी आलेख एक ठोस आकृति के समान दिखाई पड़ेगा। इस आलेख को *आयतचित्र* (histogram) कहा जाता है, जो कि संतत वर्गों वाले वर्गीकृत बारंबारता बंटन का एक आलेखीय निरूपण होता है। साथ ही, दंड आलेख के विपरीत, इसकी रचना में दंड की चौड़ाई की एक महत्वपूर्ण भूमिका होती है।

वास्तव में, यहाँ खड़े किए गए आयतों के क्षेत्रफल संगत बारंबारताओं के समानुपाती होते हैं। फिर भी, क्योंकि सभी आयतों की चौड़ाईयाँ समान हैं, इसलिए आयतों की लंबाइयाँ बारंबारताओं के समानुपाती होती हैं। यही कारण है कि हम लंबाइयाँ ऊपर (iii) के अनुसार ही लेते हैं।

अब, हम पीछे दिखाई गई स्थिति से अलग एक स्थिति लेते हैं।

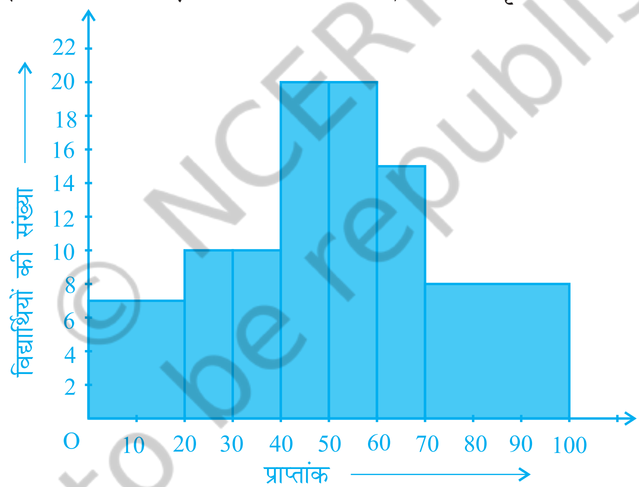
उदाहरण 3: एक अध्यापिका दो सेक्शनों के विद्यार्थियों के प्रदर्शनों का विश्लेषण 100 अंक की गणित की परीक्षा लेकर करना चाहती है। उनके प्रदर्शनों को देखने पर वह यह पाती है कि केवल कुछ ही विद्यार्थियों के प्राप्तांक 20 से कम है और कुछ विद्यार्थियों के प्राप्तांक 70 या उससे

अधिक हैं। अत:, उसने विद्यार्थियों को 0 - 20, 20 - 30, . . ., 60 - 70, 70 - 100 जैसे विभिन्न माप वाले अंतरालों में वर्गीकृत करने का निर्णय लिया। तब उसने निम्नलिखित सारणी बनाई।

सारणी 12.3

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
0 - 20	7
20 - 30	10
30 - 40	10
40 - 50	20
50 - 60	20
60 - 70	15
70 - और उससे अधिक	8
कुल योग	90

किसी विद्यार्थी ने इस सारणी का एक आयतचित्र बनाया, जिसे आकृति 12.4 में दिखाया गया है।



आकृति 12.4

इस आलेखीय निरूपण की जाँच सावधानी से कीजिए। क्या आप समझते हैं कि यह आलेख आंकड़ों का सही-सही निरूपण करता है? इसका उत्तर है: नहीं। यह आलेख आंकड़ों का एक गलत चित्र प्रस्तुत कर रहा है। जैसा कि हम पहले बता चुके हैं आयतों के क्षेत्रफल आयतचित्र की बारंबारताओं के समानुपाती होते हैं। पहले इस प्रकार के प्रश्न हमारे सामने नहीं उठे थे, क्योंकि सभी आयतों की चौड़ाइयाँ समान थीं। परन्तु, क्योंकि यहाँ आयतों की चौड़ाइयाँ बदल रही हैं, इसलिए ऊपर दिया गया आयतचित्र आंकड़ों का एक सही-सही चित्र प्रस्तुत नहीं करता। उदाहरण के लिए, यहाँ अंतराल 60–70 की तुलना में अंतराल 70–100 की बारंबारता अधिक है।

अतः, आयतों की लंबाइयों में कुछ परिवर्तन (modifications) करने की आवश्यकता होती है, जिससे कि क्षेत्रफल पुनः बारंबारताओं के समानुपाती हो जाए।

इसके लिए निम्नलिखित चरण लागू करने होते हैं :

1. न्यूनतम वर्ग चौड़ाई वाला एक वर्ग अंतराल लीजिए। ऊपर के उदाहरण में, न्यूनतम वर्ग चौड़ाई 10 है।
2. तब आयतों की लंबाइयों में इस प्रकार परिवर्तन कीजिए जिससे कि वह वर्ग चौड़ाई 10 के समानुपाती हो जाए।

उदाहरण के लिए, जब वर्ग चौड़ाई 20 होती है, तब आयत की लंबाई 7 होती है। अतः जब वर्ग चौड़ाई 10 हो, तो आयत की लंबाई $\frac{7}{20} \times 10 = 3.5$ होगी।

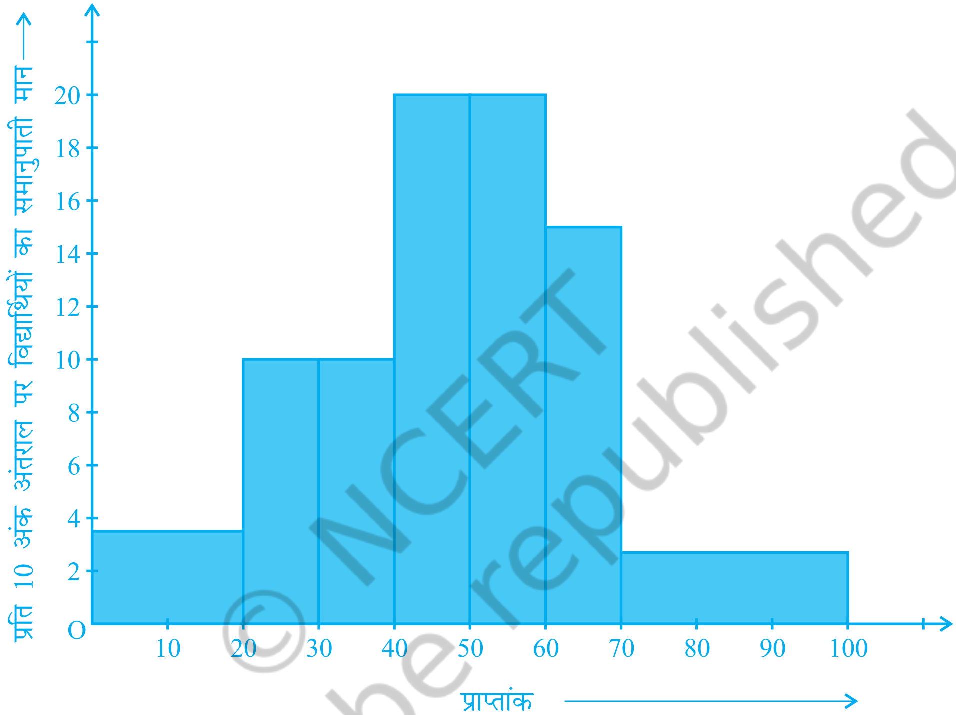
इस प्रक्रिया को लागू करते रहने पर, हमें निम्नलिखित सारणी प्राप्त होती है :

सारणी 12.4

अंक	बारंबारता	वर्ग की चौड़ाई	आयत की लंबाई
0 - 20	7	20	$\frac{7}{20} \times 10 = 3.5$
20 - 30	10	10	$\frac{10}{10} \times 10 = 10$
30 - 40	10	10	$\frac{10}{10} \times 10 = 10$
40 - 50	20	10	$\frac{20}{10} \times 10 = 20$
50 - 60	20	10	$\frac{20}{10} \times 10 = 20$
60 - 70	15	10	$\frac{15}{10} \times 10 = 15$
70 -100	8	30	$\frac{8}{30} \times 10 = 2.67$

क्योंकि हमने प्रत्येक स्थिति में 10 अंकों के अंतराल पर ये लंबाइयाँ परिकलित की हैं, इसलिए आप यह देख सकते हैं कि हम इन लंबाइयों को 'प्रति 10 अंक अंतराल पर विद्यार्थियों के समानुपाती मान' सकते हैं।

परिवर्ती चौड़ाई वाला सही आयतचित्र आकृति 12.5 में दिखाया गया है।

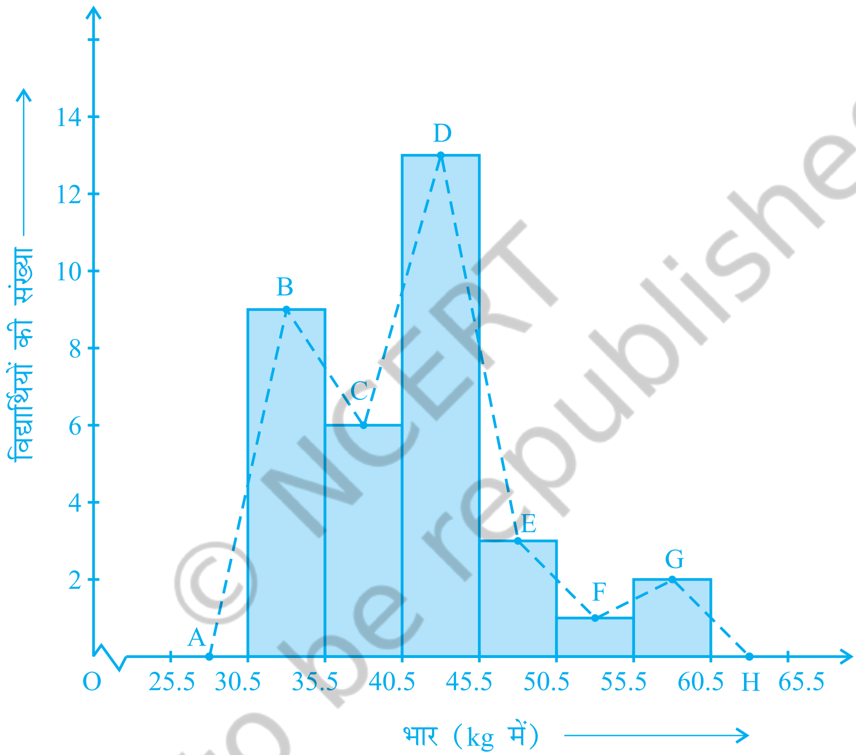


आकृति 12.5

(C) बारंबारता बहुभुज

मात्रात्मक आंकड़ों (quantitative data) और उनकी बारंबारताओं को निरूपित करने की एक अन्य विधि भी है। वह है एक बहुभुज (polygon)। बहुभुज का अर्थ समझने के लिए, आइए हम आकृति 12.3 में निरूपित आयतचित्र लें। आइए हम इस आयतचित्र के संगत आयतों की ऊपरी भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को रेखाखंडों से जोड़ दें। आइए हम इन मध्य-बिंदुओं को B, C, D, E, F और G से प्रकट करें। जब इन मध्य-बिंदुओं को हम रेखाखंडों से जोड़ देते

हैं, तो हमें आकृति BCDEFG (देखिए आकृति 12.6) प्राप्त होती है। बहुभुज को पूरा करने के लिए यहाँ हम यह मान लेते हैं कि 30.5–35.5 के पहले और 55.5–60.5 के बाद शून्य बारंबारता वाले एक एक वर्ग अंतराल हैं और इनके मध्य-बिंदु क्रमशः A और H हैं। आकृति 12.3 में दर्शाए गए आंकड़ों का संगत बारंबारता बहुभुज ABCDEFGH (frequency polygon) है। इसे हमने आकृति 12.6 में दर्शाया है।



आकृति 12.6

यद्यपि न्यूनतम वर्ग के पहले और उच्चतम वर्ग के बाद कोई वर्ग नहीं है, फिर भी शून्य बारंबारता वाले दो वर्ग अंतरालों को बढ़ा देने से बारंबारता बहुभुज का क्षेत्रफल वही रहता है, जो आयतचित्र का क्षेत्रफल है। क्या आप बता सकते हैं कि क्यों बारंबारता बहुभुज का क्षेत्रफल वही रहता है जो कि आयतचित्र का क्षेत्रफल है? (**संकेत :** सर्वांगसम त्रिभुजों वाले गुणों का प्रयोग कीजिए।)

अब प्रश्न यह उठता है कि जब प्रथम वर्ग अंतराल के पहले कोई वर्ग अंतराल नहीं होता, तब बहुभुज को हम कैसे पूरा करेंगे? आइए हम ऐसी ही एक स्थिति लें और देखें कि किस प्रकार हम बारंबारता बहुभुज बनाते हैं।

उदाहरण 4 : एक परीक्षा में एक कक्षा के 51 विद्यार्थियों द्वारा 100 में से प्राप्त किए अंक सारणी 12.5 में दिए गए हैं :

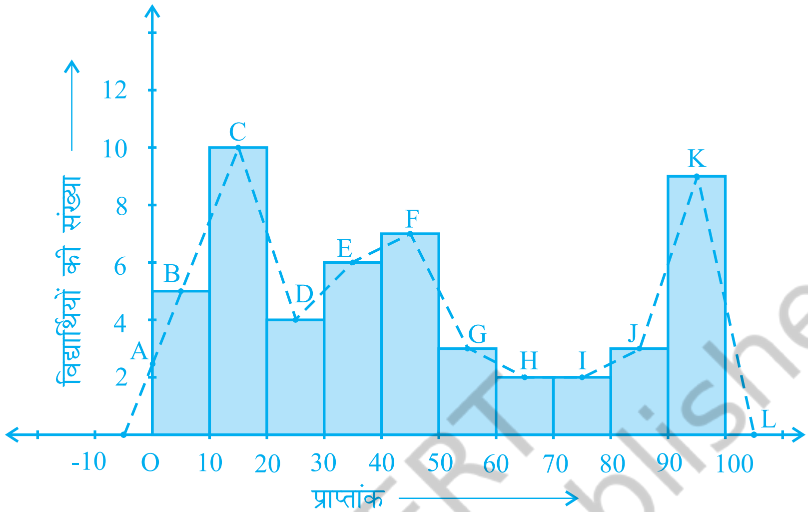
सारणी 12.5

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
0 - 10	5
10 - 20	10
20 - 30	4
30 - 40	6
40 - 50	7
50 - 60	3
60 - 70	2
70 - 80	2
80 - 90	3
90 - 100	9
कुल योग	51

इस बारंबारता बंटन सारणी के संगत बारंबारता बहुभुज बनाइए।

हल : आइए पहले हम इन आंकड़ों से एक आयतचित्र बनाएँ और आयतों की ऊपरी भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को क्रमशः B, C, D, E, F, G, H, I, J, K से प्रकट करें। यहाँ पहला वर्ग 0–10 है। अतः 0–10 से ठीक पहले का वर्ग ज्ञात करने के लिए, हम क्षैतिज अक्ष को ऋणात्मक दिशा में बढ़ाते हैं और काल्पनिक वर्ग अंतराल (–10)–0 का मध्य-बिंदु ज्ञात करते हैं। प्रथम अंत बिंदु (end point), अर्थात् B को क्षैतिज अक्ष की ऋणात्मक दिशा में शून्य बारंबारता वाले इस मध्य-बिंदु से मिला दिया जाता है। वह बिंदु जहाँ यह रेखाखंड ऊर्ध्वाधर अक्ष से मिलता है, उसे A से प्रकट करते हैं। मान लीजिए दिए हुए आंकड़ों के अंतिम वर्ग के ठीक

बाद वाले वर्ग का मध्य-बिंदु L है। तब OABCDEFGHIJKL वाँछित बारंबारता बहुभुज है, जिसे आकृति 12.7 में दिखाया गया है।



आकृति 12.7

आयतचित्र बनाए बिना ही बारंबारता बहुभुजों को स्वतंत्र रूप से भी बनाया जा सकता है। इसके लिए हमें आंकड़ों में प्रयुक्त वर्ग अंतरालों के मध्य-बिन्दुओं की आवश्यकता होती है। वर्ग अंतरालों के इन मध्य-बिंदुओं को **वर्ग-चिह्न** (**class-marks**) कहा जाता है।

किसी वर्ग अंतराल का वर्ग-चिह्न ज्ञात करने के लिए, हम उस वर्ग अंतराल की उपरि सीमा (upper limit) और निम्न सीमा (lower limit) का योग ज्ञात करते हैं और इस योग को 2 से भाग दे देते हैं। इस तरह,

$$\textbf{वर्ग-चिह्न} = \frac{\textbf{उपरि सीमा + निम्न सीमा}}{\mathbf{2}}$$

आइए अब हम एक उदाहरण लें।

उदाहरण 5 : एक नगर में निर्वाह खर्च सूचकांक (cost of living index) का अध्ययन करने के लिए निम्नलिखित साप्ताहिक प्रेक्षण किए गए :

सारणी 12.6

निर्वाह खर्च सूचकांक	सप्ताहों की संख्या
140 - 150	5
150 - 160	10
160 - 170	20
170 - 180	9
180 - 190	6
190 - 200	2
कुल योग	52

ऊपर दिए गए आंकड़ों का एक बारंबारता बहुभुज (आयतचित्र बनाए बिना) खींचए।

हल : क्योंकि आयतचित्र बनाए बिना हम एक बारंबारता बहुभुज खींचना चाहते हैं, इसलिए आइए हम ऊपर दिए हुए वर्ग अंतरालों, अर्थात् 140 - 150, 150 - 160,.... के वर्ग-चिह्न ज्ञात करें।

वर्ग अंतराल 140 - 150 की उपरि सीमा = 150 और निम्न सीमा = 140 है।

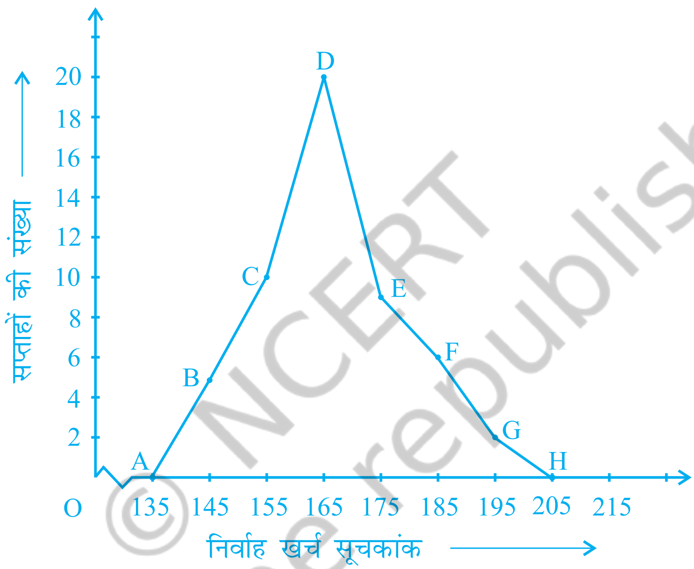
अतः, वर्ग-चिह्न $= \dfrac{150 + 140}{2} = \dfrac{290}{2} = 145$

इसी प्रकार, हम अन्य वर्ग अंतरालों के वर्ग-चिह्न ज्ञात कर सकते हैं। इस प्रकार प्राप्त नई सारणी नीचे दिखाई गई है:

सारणी 12.7

वर्ग	वर्ग-चिह्न	बारंबारता
140 - 150	145	5
150 - 160	155	10
160 - 170	165	20
170 - 180	175	9
180 - 190	185	6
190 - 200	195	2
कुल योग		52

अब क्षैतिज अक्ष पर वर्ग-हचह्न आलेखित करके, ऊर्ध्वाधर अक्ष पर बारंबारताएँ आलेखित करके और फिर बिन्दुओं B(145, 5), C(155, 10), D(165, 20), E(175, 9), F(185, 6) और G(195, 2) को आलेखित करके और उन्हें रेखाखंडों से मिलाकर हम बारंबारता बहुभुज खींच सकते हैं। हमें शून्य बारंबारता के साथ वर्ग 130–140 (जो निम्नतम वर्ग 140–150 के ठीक पहले है) के वर्ग चिह्न के संगत बिंदु A(135, 0) को और G(195, 2) के तुरन्त बाद में आने वाले बिंदु H(205, 0) को आलेखित करना भूलना नहीं चाहिए। इसलिए परिणामी बारंबारता बहुभुज ABCDEFGH होगा (देखिए आकृति 12.8)।



आकृति 12.8

बारंबारता बहुभुज का प्रयोग तब किया जाता है जबकि आंकड़ें संतत और बहुत अधिक होते हैं। यह समान प्रकृति के दो अलग-अलग आंकड़ों की तुलना करने में, अर्थात् एक ही कक्षा के दो अलग-अलग सेक्शनों के प्रदर्शनों की तुलना करने में अधिक उपयोगी होता है।

प्रश्नावली 12.1

1. एक संगठन ने पूरे विश्व में 15-44 (वर्षों में) की आयु वाली महिलाओं में बीमारी और मृत्यु के कारणों का पता लगाने के लिए किए गए सर्वेक्षण से निम्नलिखित आंकड़े (% में) प्राप्त किए:

क्र. सं.	कारण	महिला मृत्यु दर (%)
1.	जनन स्वास्थ्य अवस्था	31.8
2.	तंत्रिका मनोविकारी अवस्था	25.4
3.	क्षति	12.4
4.	हृदय वाहिका अवस्था	4.3
5.	श्वसन अवस्था	4.1
6.	अन्य कारण	22.0

(i) ऊपर दी गई सूचनाओं को आलेखीय रूप में निरूपित कीजिए।

(ii) कौन-सी अवस्था पूरे विश्व की महिलाओं के खराब स्वास्थ्य और मृत्यु का बड़ा कारण है?

(iii) अपनी अध्यापिका की सहायता से ऐसे दो कारणों का पता लगाने का प्रयास कीजिए जिनकी ऊपर (ii) में मुख्य भूमिका रही हो।

2. भारतीय समाज के विभिन्न क्षेत्रों में प्रति हजार लड़कों पर लड़कियों की (निकटतम दस तक की) संख्या के आंकड़े नीचे दिए गए हैं:

क्षेत्र	प्रति हजार लड़कों पर लड़कियों की संख्या
अनुसूचित जाति	940
अनुसूचित जनजाति	970
गैर अनुसूचित जाति/जनजाति	920
पिछड़े जिले	950
गैर पिछड़े जिले	920
ग्रामीण	930
शहरी	910

(i) ऊपर दी गई सूचनाओं को एक दंड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए।

(ii) कक्षा में चर्चा करके, बताइए कि आप इस आलेख से कौन-कौन से निष्कर्ष निकाल सकते हैं।

3. एक राज्य के विधान सभा के चुनाव में विभिन्न राजनैतिक पार्टियों द्वारा जीती गई सीटों के परिणाम नीचे दिए गए हैं :

राजनैतिक पार्टी	A	B	C	D	E	F
जीती गई सीटें	75	55	37	29	10	37

(i) मतदान के परिणामों को निरूपित करने वाला एक दंड आलेख खींचिए।

(ii) किस राजनैतिक पार्टी ने अधिकतम सीटें जीती हैं?

4. एक पौधे की 40 पत्तियों की लंबाइयाँ एक मिलीमीटर तक शुद्ध मापी गई हैं और प्राप्त आंकड़ों को निम्नलिखित सारणी में निरूपित किया गया है :

लंबाई (मिलीमीटर में)	पत्तियों की संख्या
118 - 126	3
127 - 135	5
136 - 144	9
145 - 153	12
154 - 162	5
163 - 171	4
172 - 180	2

(i) दिए हुए आंकड़ों को निरूपित करने वाला एक आयतचित्र खींचिए।

(ii) क्या इन्हीं आंकड़ों को निरूपित करने वाला कोई अन्य उपयुक्त आलेख है?

(iii) क्या यह सही निष्कर्ष है कि 153 मिलीमीटर लम्बाई वाली पत्तियों की संख्या सबसे अधिक है? क्यों?

5. नीचे की सारणी में 400 नियॉन लैम्पों के जीवन काल दिए गए हैं :

जीवन काल (घंटों में)	लैम्पों की संख्या
300 - 400	14
400 - 500	56
500 - 600	60
600 - 700	86
700 - 800	74
800 - 900	62
900 - 1000	48

(i) एक आयतचित्र की सहायता से दी हुई सूचनाओं को निरूपित कीजिए।

(ii) कितने लैम्पों के जीवन काल 700 घंटों से अधिक हैं?

6. नीचे की दो सारणियों में प्राप्त किए गए अंकों के अनुसार दो सेक्शनों के विद्यार्थियों का बंटन दिया गया है :

सेक्शन A		**सेक्शन B**	
अंक	**बारंबारता**	**अंक**	**बारंबारता**
0 - 10	3	0 - 10	5
10 - 20	9	10 - 20	19
20 - 30	17	20 - 30	15
30 - 40	12	30 - 40	10
40 - 50	9	40 - 50	1

दो बारंबारता बहुभुजों की सहायता से एक ही आलेख पर दोनों सेक्शनों के विद्यार्थियों के प्राप्तांक निरूपित कीजिए। दोनों बहुभुजों का अध्ययन करके दोनों सेक्शनों के निष्पादनों की तुलना कीजिए।

7. एक क्रिकेट मैच में दो टीमों A और B द्वारा प्रथम 60 गेंदों मे बनाए गए रन नीचे दिए गए हैं:

गेदों की संख्या	**टीम A**	**टीम B**
1 - 6	2	5
7 - 12	1	6
13 - 18	8	2
19 - 24	9	10
25 - 30	4	5
31 - 36	5	6
37 - 42	6	3
43 - 48	10	4
49 - 54	6	8
55 - 60	2	10

बारंबारता बहुभुजों की सहायता से एक ही आलेख पर दोनों टीमों के आंकड़े निरूपित कीजिए।

(**संकेत** : पहले वर्ग अंतरालों को संतत बनाइए)

8. एक पार्क में खेल रहे विभिन्न आयु वर्गों के बच्चों की संख्या का एक यादृच्छिक सर्वेक्षण (random survey) करने पर निम्नलिखित आंकड़े प्राप्त हुए :

आयु (वर्षों में)	बच्चों की संख्या
1 - 2	5
2 - 3	3
3 - 5	6
5 - 7	12
7 - 10	9
10 - 15	10
15 - 17	4

ऊपर दिए आंकड़ों को निरूपित करने वाला एक आयतचित्र खींचिए।

9. एक स्थानीय टेलीफोन निर्देशिका से 100 कुलनाम (surname) यदृच्छया लिए गए और उनसें अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षरों की संख्या का निम्न बारंबारता बंटन प्राप्त किया गया :

वर्णमाला के अक्षरों की संख्या	कुलनामों की संख्या
1 - 4	6
4 - 6	30
6 - 8	44
8 - 12	16
12 - 20	4

(i) दी हुई सूचनाओं को निरूपित करने वाला एक आयतचित्र खींचिए।

(ii) वह वर्ग अंतराल बताइए जिसमें अधिकतम संख्या में कुलनाम हैं।

12.2 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिंदु का अध्ययन किया है:

1. किस प्रकार आंकड़ों को आलेखों, आयतचित्रों तथा बारंबारता बहुभुजों द्वारा आलेखीय रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है।