בינה מלאכותית | מטלה 4 | 206118754

שאלה 1 – פורמליזציה של משחקים :

1. <u>אסטרטגיה דומיננטית</u>

תחילה נצייר את מטריצת המצבים של המשחק :

		Player 2				
		Rock	Paper	Scissors	Lizard	Spock
Player 1	Rock	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)	(1,-1)	(-1,1)
	Paper	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)	(-1,1)	(1,-1)
	Scissors	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
	Lizard	(-1,1)	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
	Spock	(1,-1)	(-1,1)	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)

ניתן לזהות פה מצב של "הוגנות" בין השחקנים, כלומר כל שחקן במשחק יכול לנצח פעמיים ולהפסיד פעמיים. בעצם נבחר לשחק עבור כל שחקן באותה ההסתברות (ללא העדפה מסוימת) ולכן אין במשחק זה אסטרטגיה אחת שולטת.

נבצע שינוי בתועלת אחד השחקנים במשחק בבדי להפוך את אחד השחקים לשחק דומיננטי:

		Player 2				
		Rock	Paper	Scissors	Lizard	Spock
Player 1	Rock	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)	(1,-1)	(-1,1)
	Paper	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)	(-1,1)	(1,-1)
	Scissors	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
	Lizard	(-1,1)	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
	Spock	(1,-1)	(-1,1)	(1,-1)	(3,1)	(0,0)

בעבור מצב זה, ניתן לראות שעבור שחקן 1 הבחירה ב "Spock" עדיפה על הבחירה ב "Rock" .

2. <u>שיווי משקל באסטרטגיה דומיננטית</u>

		Player 2				
		Rock	Paper	Scissors	Lizard	Spock
Player 1	Rock	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)	(1,-1)	(-1,1)
	Paper	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)	(-1,1)	(1,-1)
	Scissors	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
	Lizard	(-1,1)	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
	Spock	(1,-1)	(-1,1)	(1,-1)	(3,1)	(0,0)

- עבור שחקן 1 – ישנה עדיפות לשחק Spock על פני Rock .

		Player 2				
		Rock	Paper	Scissors	Lizard	Spock
Player 1	Rock	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)	(1,-1)	(-1,1)
	Paper	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)	(-1,1)	(1,-1)
	Scissors	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
	Lizard	(-1,1)	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
	Spock	(1,-1)	(-1,1)	(1,-1)	(3,1)	(0,0)

- עבור שחקן 2 – ישנה עדיפות לשחק ב Lizard על פני Paper .

		Player 2				
		Rock	Paper	Scissors	Lizard	Spock
Player 1	Rock	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)	(1,-1)	(-1,1)
	Paper	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)	(-1,1)	(1,-1)
	Scissors	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
	Lizard	(-1,1)	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
	Spock	(1,-1)	(-1,1)	(1,-1)	(3,1)	(0,0)

- עבור שחקן 1 – ישנה עדיפות לשחק Spock על פני Scissors.

		Player 2				
		Rock	Paper	Scissors	Lizard	Spock
Player 1	Rock	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)	(1,-1)	(-1,1)
	Paper	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)	(-1,1)	(1,-1)
	Scissors	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
	Lizard	(-1,1)	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
	Spock	(1,-1)	(-1,1)	(1,-1)	(3,1)	(0,0)

- עבור שחקן 2 – ישנה עדיפות לשחק Scissors על פני Rock.

		Player 2				
		Rock	Paper	Scissors	Lizard	Spock
Player 1	Rock	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)	(1,-1)	(-1,1)
	Paper	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)	(-1,1)	(1,-1)
	Scissors	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
	Lizard	(-1,1)	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
	Spock	(1,-1)	(-1,1)	(1,-1)	(3,1)	(0,0)

- עבור שחקן 1 – ישנה עדיפות לשחק Lizard על פני Paper.

		Player 2				
		Rock	Paper	Scissors	Lizard	Spock
Player 1	Rock	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)	(1,-1)	(-1,1)
	Paper	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)	(-1,1)	(1,-1)
	Scissors	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
	Lizard	(-1,1)	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
	Spock	(1,-1)	(-1,1)	(1,-1)	(3,1)	(0,0)

- עבור שחקן 2 – ישנה עדיפות לשחק Lizard על פני Spock.

		Player 2				
		Rock	Paper	Scissors	Lizard	Spock
Player 1	Rock	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)	(1,-1)	(-1,1)
	Paper	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)	(-1,1)	(1,-1)
	Scissors	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
	Lizard	(-1,1)	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
	Spock	(1,-1)	(-1,1)	(1,-1)	(3,1)	(0,0)

- עבור שחקן 1 – ישנה עדיפות לשחק Spock על פני Lizard.

		Player 2				
		Rock	Paper	Scissors	Lizard	Spock
Player 1	Rock	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)	(1,-1)	(-1,1)
	Paper	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)	(-1,1)	(1,-1)
	Scissors	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
	Lizard	(-1,1)	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
	Spock	(1,-1)	(-1,1)	(1,-1)	(3,1)	(0,0)

- עבור שחקן 2 – ישנה עדיפות לשחק Lizard על פני Scissors.

		Player 2				
		Rock	Paper	Scissors	Lizard	Spock
Player 1	Rock	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)	(1,-1)	(-1,1)
	Paper	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)	(-1,1)	(1,-1)
	Scissors	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
	Lizard	(-1,1)	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
	Spock	(1,-1)	(-1,1)	(1,-1)	(3,1)	(0,0)

- קיבלנו שיווי משקל של אסטרטגיה דומיננטית כאשר שחקן 1 משחק ב Spock ושחקן 2 משחק ב Lizard .

3. <u>שיווי משקל נאש</u>

נבצע שינויים נוספים בתועלות בכדי למצוא שיווי משקל נאש.

		Player 2				
		Rock	Paper	Scissors	Lizard	Spock
Player 1	Rock	(0,0)	(-1,1)	(-3,-1)	(1,-1)	(-1,1)
	Paper	(1,-3)	(0,-3)	**(-1,-1)**	(-1,-3)	(1,-3)
	Scissors	(-1,1)	(1,-1)	(-3,0)	(1,-1)	(-1,1)
	Lizard	(-1,1)	(1,-1)	(-3,1)	(0,0)	(1,-1)
	Spock	(1,-1)	(-1,1)	(-3,-1)	(3,1)	(0,0)

- ניתן לראות שלאחר השינויים שבצענו (כל המשבצות הצהובות) נקודת השיווי משקל נאש תהיה נקודת (-1,-1) כשאר שחקן 1 ישחק Paper ושחקן 2 ישחק Scissors . כלומר, לא ישתלם לאף שחקן לשנות את מיקומו הנוכחי בתנאי וכל אחד מהם יזוז צעד אחד בלבד.

4. <u>מצב פארטו</u>

נמצא מצב פארטו, מצב בו אין דרך לשפר מצב של שחקן אחד מבלי לפגוע בשחקן אחר ואינו שיווי משקל נאש.

		Player 2				
		Rock	Paper	Scissors	Lizard	Spock
Player 1	Rock	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)	(1,-1)	(-1,1)
	Paper	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)	(-1,1)	(1,-1)
	Scissors	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
	Lizard	(-1,1)	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
	Spock	(1,-1)	(-1,1)	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)

נפרט את המצבים הבאים :

- (-1 ,1) – במצב זה נראה שאם נעבור למצב (0,0) שחקן 2 יפגע ואילו שחקן 1 ישפר את מצבו. בנוסף, אם נעבור למצב (1,-1) שחקן 2 יפגע עוד יותר.
- (1,-1) – במצב זה נראה שאם נעבור למצב (0,0) שחקן 1 יפגע ואילו שחקן 2 ישפר את מצבו. בנוסף, אם נעבור למצב (-1,1) שחקן 1 יפגע עוד יותר.
- (0,0) – במצב זה נראה שאם נעבור למצב (1,-1) שחקן 2 יפגע ואילו שחקן 1 ישפר את מצבו. בנוסף, אם נעבור למצב (-1,1) שחקן 1 יפגע ושחקן 2 ישפר את מצבו.

לסיכום, ניתן לראות שעבור שלושת המצבים הללו, לא ניתן לשפר מצב של שחקן אחד מבלי לפגוע בשחקן השני, ולכן מצבים אלו הם מצבי פארטו.

<u>מצב פארטו עם שיווי משקל נאש</u>

		Player 2				
		Rock	Paper	Scissors	Lizard	Spock
Player 1	Rock	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)	(1,-1)	(-1,1)
	Paper	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)	(-1,1)	(1,-1)
	Scissors	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
	Lizard	(-1,1)	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
	Spock	(1,-1)	(-1,1)	(2,2)	(-1,1)	(0,0)

לאחר ביצוע השינויים קיבלנו מצב שהוא מצב פארטו עם שיווי משקל נאש, כלומר אם נבחר להזיז את המצב הנוכחי למצב אחר, אנחנו נפגע בשני השחקנים. אין אפשרות לשחקן מסוים לשחק (לעבור מצב) מבלי לפגוע בשחקן השני במשחק.

שאלה 2 – $Voting$

הוכחה לטענה ששום כלל בחירות אינו יכול להיות "$Condorcet\ consistent$".

יהי F כלל בחירות כלשהו בו המצביעים נדרשים לדרג את המועמדים באופן הבא:

- $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ כך ש : $(\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \cdots > \alpha_n)$

נשתמש בדוגמא שניתנה במאמר על מנת להציג את הטענה.
ניקח את קבוצה המועמדים $A = \{w, a, b\}$ ו שבעה מצביעים.

פילוג ההצבעה יראה כך:

1. $w > a > b$
2. $w > a > b$
3. $w > a > b$
4. $a > b > w$
5. $a > b > w$
6. $a > w > b$
7. $b > w > a$

עבור מצב זה, w יהיה מנח הקונדרסה מכיוון שהוא ניצח כל אחד מהמועמדים יותר משאר הם ניצחו אותו.
w דורג מעל a 4 פעמים (עבור ההצבעות : 1, 2, 3, 7) לכן יש לו יחס של $\frac{4}{7}$ בהתמודדות מול a.
בנוסף, ניתן לראות ש w ניצח את b גם 4 פעמים (עבור ההצבעות : 1, 2, 3, 6) עם יחס זהה של $\frac{4}{7}$ בהתמודדות מול b.
כעת, נוכל לראות שהמועמדw דורג 3 פעמים במקום הראשון ואילו פעמיים במקום השני ופעמיים נוספות במקום השלישי, ואילו עבור המועמד a דורג 3 פעמים במקום הראשון , 3 פעמים במקום השני ופעם אחת בלבד במקום השלישי.
נראה את ניקוד המועמדים a ו w :

- ניקוד מועמד w הוא $3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3$.
- ניקוד מועמד a הוא $3\alpha_1 + 3\alpha_2 + 1\alpha_3$.

עבור כלל ההצבעה $(\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \cdots > \alpha_n)$ נוכל לראות שהמנצח הינו מועמד a ולוו דווקא מועמד w .
במקרה הכללי, נאמר שעבור כל כלל הצבעה מבוסס נקודות בו וקטור הניקוד מהצורה $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ כאשר מתקיים הכלל $\alpha_i > \alpha_{i+1}$ ומספר המועמדים (n) גדול או שווה ל3, יכולים להיות לפחות $m - 2$ מועמדים עם ציון גבוה יותר ממנצח הקונדרסה. ולכן כלל הבחירות F אינו "$Condorcet\ consistent$" מכיוון שיש מנצח קונדרסה שאינו מנצח בכל הבחירות.

שאלה 3 – *Cake Cutting*

תיאור האלגוריתם:

- הסכין מתחילה לזוז מקצה העוגה , מנקודה 0 לנקודה 1.
- ברגע שהסכין מגיעה לנקודה v בעוגה, חלק העוגה $[0,v]$ תהיה שווה ל $\frac{1}{n}$ עבור שחקן כלשהו, אותו השחקן שעבורו החתיכה שווה $\frac{1}{n}$ "קורא" והוא מקבל את העוגה ועוזב את המשחק.
- חוזרים לשלב 1 עם עוגה בגדול $[v,1]$ ועם $n-1$ משתתפים.

1. <u>האם מנגנון האלגוריתם פרופורציונלי ?</u>

האלגוריתם אכן פרופורציונלי מכיוון שעבור שחקן שמחשק ועוזב את המשחק, הוא מקבל חתיכה ששווה עבורו בדיוק $\frac{1}{n}$ ומפני שכל פעם שחקן אחר עוזב, עבור שאר השחקנים החתיכה שווה או קטנה מ $\frac{1}{n}$ כי אחרת הם היו עוצרים את התקדמות הסכין.

לאחר שהסרנו את החתיכה, ונשארנו עם $[v,1]$ מהעוגה ועם שחקן אחד פחות , ע"פ האלגוריתם נחזור על כך עד שלא יישארו יותר שחקנים.

בסוף המשחק , כל שחקן קיבל חתיכה ששווה עבורו בדיוק $\frac{1}{n}$. והשחק האחרון (שאין לו ברירה מכיוון שהוא יקבל את מה שנשאר) בוודאות יזכה בחתיכה ששווה לו לפחות $\frac{1}{n}$ כי הוא לא עצר את החיתוך הסכין עד כה.

2. <u>האם האלגוריתם הינו "*envy free*" ?</u>

האלגוריתם אינו "*envy free*" (במידה והתיעדוף של כל אחד שונה) מפני שהתועלת מכל חתיכה של עוגה שונה בעבור כל שחקן (לפי ההעדפות האישיות שלו). ייתכן מצב שבו שחקן יקבל חתיכה שהתועלת שלו ממנה תהייה בדיוק $\frac{1}{n}$, ושחקן אחר אשר יקבל חתיכה שהתועלת שלו ממנה תהיה גדולה יותר וכך בעצם השחקן הראשון יקנא בשחקן השני כי הוא "הרוויח" יותר ממנו.

3. <u>סיבוכיות זמן :</u>

ע"פ האלגוריתם, כל איטרציה מוגדת ע"י הסכין הבודקת את תועלת חתיכת העוגה עבור כל משתתף. בהנחה שכל איטרציה מתבצעת לאחר מרחק קבוע ברזולוציה מסוימת, כלומר עבור כל איטרציה יכולה להיות 0.01 ס"מ מתוך 1 ס"מ של עוגה , כלומר סה"כ 100 איטרציות. עבור רזולוציה זו מספר החיתוכים של העוגה יהיה $n-1$.לכן בסופו של דבר יהיו $n-1$ חיתוכים אשר ישאלו n משתתפים בכל פעם כך שעבור כל שאלה כזו סיבוכיות הזמן שלה תהיה $O(1)$.

ובסך הכל עבור n משתתפים ו $n-1$ חיתוכים אנחנו נקבל :

$$O\big(n(n-1)\big) = O(n^2)$$