פתרון מועד Y

שאלה 1

(א)

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = 20\ \frac{m}{s} \qquad ; \qquad Z = \sqrt{T \cdot \rho} = 2\ \frac{kg}{s}$$

(ב) כוח המנוע מייצר מהירות בנקודה קצה המיתר על פי:

$$F_D(t) = Z\frac{\partial y(0,t)}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial y(0,t)}{\partial t} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 0.1t - 0.15t^2 & 0 \le t \le 1\ s \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

נעשה אינטגרציה לפי הזמן:

$$y(0,t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 0.05t^2 - 0.05t^3 & 0 \le t \le 1\ s \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

התוצאה נכונה עד כדי קבוע אינטגרציה שתמיד ניתן לבחור כאפס.

הגל שיוצר מנוע בקצה מיתר הוא בהכרח חד כיווני, ומתפשט בכיוון שניתן לבחור ככיוון החיובי של ציר x. לכן פונקציית הגל תלויה רק בצירוף $u = x - vt$. ברגע t = 0, מתקיים הקשר $t = -\frac{u}{v}$ ולכן ניתן לרשום:

$$y(x,t) = y(u) = \begin{cases} 0 & -\frac{u}{v} < 0 \\ 0.05\left(-\frac{u}{v}\right)^2 - 0.05\left(-\frac{u}{v}\right)^3 & 0 \le -\frac{u}{v} \le 1\ s \\ 0 & t - \frac{u}{v} > 1 \end{cases}$$

נציב שוב $u = x - vt$. צריך להבחין בין שני תחומי זמן.

$$y(x,t) = \begin{cases} 0 & x > 20t \\ 1.25 \cdot 10^{-4}(x - 20t)^2 + 6.25 \cdot 10^{-6}(x - 20t)^3 & 20t \ge x \ge 20t - 20 \\ 0 & 0 \le x < 20t - 20 \end{cases}$$

למעשה צריך עכשיו להבחין בין שני תחומי זמן. הפתרון שרשום כאן הוא נכון לתחום הזמנים $t \ge 1s$. אולם כאשר $t < 1\ s$, הביטוי $20t - 20$ הוא שלילי, ולכן התנאי ש x יהיה חיובי דורש לכתוב את הפתרון כך:

$$y(x,t) = \begin{cases} 0 & x > 20t \\ 1.25 \cdot 10^{-4}(x - 20t)^2 + 6.25 \cdot 10^{-6}(x - 20t)^3 & 20t \ge x \ge 0 \end{cases}$$

(ג) הספק המנוע הוא לפי הגדרה:

$$P = F_D(t)v_y(0,t) = \frac{1}{Z}F_D^2(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \frac{1}{2}[0.2t - 0.3t^2]^2 & 0 \le t \le 1\ s \\ 0 & t>1 \end{cases}$$

(ד) האנרגיה האגורה במיתר שווה לעבודה הכוללת שעשה המנוע במשך הזמן הנתון, כלומר:

$$U = W_D = \int_0^1 P(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{2}[0.2t - 0.3t^2]^2\, dt$$

$$U = \int_0^1 0.02t^2 - 0.06t^3 + 0.045t^4\, dt = \frac{0.02}{3}t^3 - \frac{0.06}{4}t^4 + \frac{0.045}{5}t^5\Big|_0^1 = 6.67\cdot 10^{-4}\ J$$

שאלה 2

(א) מתקיים הקשר:

$$v = \frac{Z_A}{\rho_0} = 400\ \frac{m}{s}$$

(ב) מכיוון שהצינור חסום במכסים שאינם יכולים לנוע, מתקיימים תנאי הריתום במהירות הזרימה.

פונקציית מהירות הזרימה היא לכן מהצורה:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left(n\frac{\pi v}{L}t + \phi_n\right)$$

מהפיתוח בהרצאה ידוע כי:

$$A_n\cos(\phi_n) = \frac{2}{L}\int_0^L u(x,0)\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx = \frac{2}{L}\int_0^L 3\cdot 10^{-5}\sin\left(\frac{3\pi}{8.82}x\right)\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx$$

ידוע שאינטגרל מסוג זה מתאפס אלא אם הארגומנטים בסינוסים זהים, כלומר אלא אם:

$$\frac{\pi}{2.94} = n\frac{\pi}{L} \quad \Rightarrow \quad n = 3$$

$$A_n\cos(\phi_n) = \begin{cases} 0 & n \ne 3 \\ 3\cdot 10^{-5} & n = 3 \end{cases}$$

אנו זקוקים עתה לנגזרת של מהירות הזרימה ברגע ההתחלתי. ממשוואת אוילר, נמצא כי

$$\rho_0\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -\frac{\partial p_1(x,0)}{\partial x} = 0$$

מכיוון שנאמר שברגע ההתחלתי, הלחץ שווה לערך שווי המשקל שלו. מכאן נקבל:

$$A_n\sin(\phi_n) = \frac{-2}{n\pi v_s}\int_0^L \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx = 0$$

משתי המשוואות שקיבלנו נסיק ש:

$$\phi_n = 0 \qquad \text{לכל } n$$

$$A_n = \begin{cases} 0 & n \ne 3 \\ 3\cdot 10^{-5} & n = 3 \end{cases}$$

$$u(x,t) = 3\cdot 10^{-5}\sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{1200\pi}{L}t\right)$$

(ג) נחשב את הלחץ ממשוואות הזורם:

$$\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial x} = -\rho_0\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{0.0468\pi}{L}\sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{1200\pi}{L}t\right)$$

נעשה אינטגרל לפי x:

$$p_1(x,t) = -0.0156\cos\left(\frac{3\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{1200\pi}{L}t\right) \quad Pa$$

התוצאה נכונה עד כדי קבוע אינטגרציה שיכול להיות פונקציה כלשהי של הזמן, אולם שימוש במשוואת הרצף יראה שהקבוע אינו תלוי בזמן למעשה. מכיוון שנתון שברגע t = 0 הלחץ העודף הוא אפס בכל מקום, קבוע האינטגרציה חייב להיות אפס זהותית.

(ד) בנקודות בהן הלחץ העודף מתאפס מתקיים:

$$p_1(x,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \cos\left(\frac{3\pi}{L}x\right)$$

מכאן נקבל שצריך להתקיים:

$$\frac{3\pi}{L}x = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{L}{6} + n\frac{L}{3}$$

הערכים הנמצאים בטווח בין 0 לבין L הם:

$$x = 1.47, 4.41, 7.35 \ \ m$$

שאלה 3

(א) מהירות הגלים היא:

$$v_W = \frac{Z}{L} = 2.5\cdot 10^8 \ \ \frac{m}{s}$$

(ב) יש דרכים שונות לפתור. הכי קצרה היא לשים לב שעבור גל חד כיווני המתקדם בכיוון השלילי, מתקיימת הפרופורציה

$$V(x,t) = -ZI(x,t)$$

אם נציב את הרגע t = 0, נקבל:

$$V_0\cos(40x) = -Z\cdot 0.5\cos(40x) \quad \rightarrow \quad V_0 = -25 \ \ Volt$$

(ג) גל המתח הוא חד כיווני, ולכן ניתן לקבלו מהמצב ברגע ההתחלתי על ידי החלפת x בצירוף $u = x + v_W t$. נקבל:

$$V(x,t) = -25\cos\big((40(x+v_W t)\big)$$

$$I(x,t) = \frac{V(x,t)}{-Z} = 0.5\cos\big((40(x+v_W t)\big)$$

(ד) בגל חד כיווני, צפיפות האנרגיה החשמלי שווה לזו של האנרגיה המגנטית. לכן:

$$\rho_E = \frac{1}{2}CV^2 + \frac{1}{2}LI^2 = LI^2 = 5\cdot 10^{-8}\ \cos^2(40x + 10^{10}\cdot t)$$

(ד) בקו תמסורת, ההספק הוא:

$$p(x,t) = V(x,t)\cdot I(x,t) = -12.5\cos^2(40x + 10^{10}\cdot t) = -\rho_E(x,t)\cdot v_w$$
$$\langle p(x,t)\rangle = -12.5\,\langle\cos^2(40x + 10^{10}\cdot t)\rangle = -6.25\ W$$

שאלה 4

חלק I.

(א) ידוע שיחס הזרמים הוא:

$$\frac{0.2}{-0.1} = \frac{I_t}{I_r} = \frac{\left(\frac{2Z_1}{Z_2+Z_1}\right)I_i}{\left(\frac{Z_1-Z_2}{Z_2+Z_1}\right)I_i} = \frac{2Z_1}{Z_1-Z_2} \quad\Rightarrow\quad Z_2 = 2Z_1 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{\frac{L}{C_2}} = 2\sqrt{\frac{L}{C_1}}$$

$$\Longrightarrow\quad C_2 = \frac{C_1}{4} = 1.875\cdot 10^{-11}\ \frac{F}{m}$$

(ב) נחשב את האימפדנסים:

$$Z_1 = \sqrt{\frac{L}{C_1}} = 80\ \Omega \quad\Rightarrow\quad Z_2 = 2Z_1 = 160\ \Omega$$

אמפליטודת הגל הפוגע היא:

$$I_t = \frac{2Z_1}{Z_2+Z_1}I_i \quad\Rightarrow\quad I_i = 0.3\ A$$

(ג) ההספקים הם:

$$88 = P_t = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_2+Z_1)^2}P_i \quad\Rightarrow\quad P_i = 99\ W$$
$$P_r = -\frac{(Z_1-Z_2)^2}{(Z_1+Z_2)^2}P_i = -11\ W$$

חלק II.

(ד) הלחץ העודף הכללי הוא:

$$p_1 = p_A + p_B = 2C\cos\left(\frac{k(x-y)}{2}\right)\cos\left(\frac{k(x+y)}{2} - \omega t\right)$$

כדי שהלחץ המקסימלי יהיה C, צריך:

$$2C\cos\left(\frac{k(x-y)}{2}\right) = C \quad\Rightarrow\quad \frac{k(x-y)}{2} = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi \quad\Rightarrow\quad y = x + \left(2n \pm \frac{1}{3}\right)\lambda$$

זוהי המשוואה של משפחה של מישורים מקבילים, כולם מקבילים לציר z, ונטויים בזווית 45^0 ביחס לציר x החיובי. נקודות החיתוך שלהן עם ציר y הן $y = \left(2n \pm \frac{1}{3}\right)\lambda$.

(ה) וקטור שטף האנרגיה הוא $\vec{F}_E = p_1\vec{u}$. כיוונו יהיה כיוון מהירות הזרימה. ידוע ש:

$$\vec{u} = \vec{u}_A + \vec{u}_B = \left(\frac{p_A}{Z}, \frac{p_B}{Z}, 0\right) = \frac{C}{Z}\left(\cos(kx - \omega t), \cos(ky - \omega t), 0\right)$$

אם נציב את התנאי שמצאנו בסעיף הקודם, נמצא ש :

$$\vec{u} = \left(u_x, u_y, 0\right) = \frac{C}{Z}\left(\cos(kx - \omega t), \cos\left(kx - \omega t \pm \frac{\pi}{3}\right), 0\right)$$

היחס בין רכיבי x ו y אינו קבוע, אלא תלוי בערך של x, ולכן כיוון מהירות הזרימה אינו קבוע על המישורים הללו, וכך גם כיוון וקטור שטף האנרגיה.