$$\det\begin{pmatrix} t-1 & -1 & 2 \\ -1 & t-1 & 2 \\ 2 & 2 & t-4 \end{pmatrix} \overset{z_2 = z_2 - z_1}{=\!=} \det\begin{pmatrix} t-1 & -1 & 2 \\ -t & t & 0 \\ 2 & 2 & t-4 \end{pmatrix}$$

$$= t \det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & t-4 \end{pmatrix} + t \det\begin{pmatrix} t-1 & 2 \\ 2 & t-4 \end{pmatrix}$$

$$= t \Big[\cdot - - - -$$

(1) $\sigma = (1\,2\,3)(4\,5)$

$= (1\,2)(2\,3)\cancel{(3\,1)}(4\,5)$

Signum $\sigma = (-1)^3 = -1$

(2) kgV darf man in der Klausur nicht verwenden, um die $\operatorname{Ord}(\sigma)$ z. berechnen

(3) $f = \underbrace{(t-1)(t+1)(t^2+1)}_{\text{irr.}}$ $\qquad \mathbb{Z}_3[t]$

$= (t+2)(t+1)(t^2+1)$ alle sind irr.

$0^2+1 \neq 0$
$1^2+1 \neq 0$
$2^2+1 \neq 0$

(4) UR: $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y=2 \right\}$

$\underset{u}{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}, \underset{v}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \notin U$ aber $u+v = \dots \notin U$

Falsch!

(5) $f = (t+1)(t^2+1) \qquad \mathbb{R}[t]$

irr. ✓ in $\mathbb{R}[t]$ irr $\cancel{\Rightarrow}$ f ist irr.

6 ATS: $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ $u_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, u_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$u_1 = 1\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 0\cdot e_3$

$u_2 = 0\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 1\cdot e_3$

Nach ATS ....

Nach ATS .... $B=\{u_1, e_2, u_2\}$

* $u_1 = 1\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 0\cdot e_3$

Nach ATS kann e_1 durch u_1 ....

$B' = \{u_1, e_2, e_3\}$

* $u_2 = 0\cdot u_1 + 1\cdot e_2 + 1\cdot e_3$

Nach ATS kann e_3 durch u_2 ...

$B'' = \{u_1, e_2, u_2\}$

7 $B=\{e_1,e_2,e_3\}$, $B=(e_1,e_2,e_3)$

* ATS
* ~~koord.~~ vektor
* lin. unabh.

* ATS
* koord. vektor
* Matrixdar.
* Trans.mat.
* lin. unabh.

⑧ $\det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \dots \neq 0 \Rightarrow$ lin. unabh.

u_1, u_2, u_3 sind lin. unabh.

⑨ $(A|0): \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \cancel{=} \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

$\text{Lin}\cancel{(}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})$

$\Rightarrow \text{Lös}(A, 0) = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

* $B = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

Lösung
- Kern
- LGS

Basis von
- VR
- $U_1 \cap U_2$
- ....

⑩ Basis: z.z. $\{v_1, v_2, v_3\}$ Basis der $\mathbb{R}^3$

1) z.z. v_1, v_2, v_3 lin unabh.

2) $\dim B = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ ✓ 1P

$\Rightarrow$ B ist eine Basis der $\mathbb{R}^3$

(11) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{z_2 \dots}{\equiv} \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \xrightarrow{z_1 \dots}$ nicht verg.

(12) $f = t^2 + 2$, $g = t^2 + 1$. Basis best.

$\longrightarrow$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{z_2 = 2z_2 - z_1}{\leadsto} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Basis : $B = (t^2 + 2, -t^2)$

Koord.vektor bzgl. $E = (t^0, t^1, t^2)$

$M_E(f) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $M_E(g) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(13) $f = t^2 + 2$ ATS $B = \{t^0, t^1, t^2\}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cancel{=} 2 \cdot t^0 + 0 \cdot t^1 + 1 \cdot t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Nach ATS . . . .

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Nach . - - - - - - - -

$B = \{t^2 + 2, t, t^2\}$

(14)

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \rightarrow x + z = 0 \Rightarrow x = -z \\ \rightarrow y = 0 \end{array}$$

Bitte nicht verwenden

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} z \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\}$$

Algo-(-1) ✓

(15)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\cancel{\text{Algo.}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$z_1 = z_1 - z_2$

$z_2 \leftrightarrow z_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Algo.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\text{Lös}(A, 0) = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Rang

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

OK

$\text{rang}(A) = 3$

$\rightarrow$ Matrix $\rightarrow$ LGS

$\cancel{\text{Lös}(A(0)}$ $\text{Lös}(A, 0)$

16

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\cancel{z_1 = z_1 - z_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ (\cdot -1) \end{array}$$

17

$f(v) = Av \Rightarrow f = f_A$ (linear)