# XIX Gara Nazionale a Squadre

Semifinale A – 4 Maggio 3018

olimpiadi.dm.unibo.it
www.oliforum.it

**Istruzioni Generali**

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- **Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.**
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o due stelle [$\star$].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2}=1.4142 \qquad \sqrt{3}=1.7321 \qquad \sqrt{5}=2.2361 \qquad \sqrt{7}=2.6458 \qquad \pi=3.1416.$$

**Scadenze importanti**

- **10 minuti dall'inizio**: termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio**: termine per rivolgere domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio**: termine della gara.

## 1. Il telefono di DOC

Sull'elenco telefonico Matryx HOMFLY trova il numero di $\widehat{DOC}$: esso è pari a $(1)+(1+2)+\cdots+(1+2+\cdots+1918)$. Quante cifre ha?

## 2. Fuga dalla piazza

Matryx deve fuggire sullo skateboard da Biff e dai suoi scagnozzi! Ora si trova al centro della piazza di Hill Valley, che è una scacchiera quadrata di 13 caselle per lato, e deve raggiungerne una qualunque casella del bordo nel modo più rapido possibile, cioè ad ogni passo deve spostarsi su una casella che si trova su una corona quadrata (centrata nel punto di partenza) più grande. Inoltre, non avendo il suo skateboard volante, può spostarsi solo tra caselle con almeno un vertice in comune. Con quanti percorsi distinti può scappare da Biff?

## 3. Paradosso!

Sulla lavagna di $\widehat{DOC}$ sta scritto un insieme $A$ di 100 interi distinti. Tra i suoi appunti per costruire la macchina del tempo, egli annota "ci sono esattamente $N$ interi diversi che si possono scrivere come $b+c$, dove $b,c \in A$". Matryx, però, è andato nel passato e ha modificato alcuni di questi numeri, cambiando il continuum spazio-temporale. Di conseguenza, anche il valore di $N$ è cambiato! Se $N_{\max}$ e $N_{\min}$ sono, rispettivamente, il massimo e il minimo valore di $N$ ottenibile in questo modo, quanto vale $N_{\max}-2N_{\min}$? *Nota: $b$ e $c$ possono anche essere lo stesso numero.*

## 4. Cruscotto complicato

Sul cruscotto della DeuLerean c'è uno schermo digitale che è in grado di raffigurare una sequenza di interi non negativi. Non appena $\widehat{DOC}$ ha terminato la sua costruzione, compare una sequenza costituita dal solo numero 100. Ad ogni viaggio nel tempo, questa sequenza viene sostituita da una nuova, secondo questa regola: per ogni $k \geq 0$, il $(k+1)$-esimo termine della nuova sequenza è pari al numero di volte che il numero $k$ compare nella vecchia. La nuova sequenza ha lunghezza pari al massimo numero che compare nella vecchia sequenza, più uno. Per esempio, se la vecchia sequenza fosse $(10,2,0,2)$, la nuova sarebbe $(1,0,2,0,0,0,0,0,0,0,1)$. Dopo 2018 viaggi nel tempo, quanto vale il terzo numero (da sinistra) della sequenza visualizzata?

## 5. Flusso geometrizzatore [$\star$]

"Grande Gauss! I raggi nel flusso geometrizzatore creano sempre figure strane, Matryx!" dice $\widehat{DOC}$. "Oggi formano due triangoli $T_1$ e $T_2$, con i lati a due a due paralleli, parzialmente sovrapposti in modo da intersecarsi in un esagono $ABCDEF$, la cui area è la metà di quella di $T_1$, e anche i $\frac{49}{72}$ di quella di $T_2$. Inoltre $AB=4DE$. Ora, Matryx, sai dirmi quanto vale $\frac{AB\cdot CD\cdot EF}{BC\cdot DE\cdot FA}$?" *Si scriva il risultato come una frazione ridotta ai minimi termini, e si risponda indicando la somma tra numeratore e denominatore.*

## 6. Coppie al ballo

Al cerimoniale ritmico "Incentro isogonale" ci sono 2430 ragazzi, numerati da 1 a 2430, e alcune ragazze, numerate con degli interi positivi tutti distinti. Se un ragazzo e una ragazza hanno i numeri rispettivamente $a$ e $b$ tali che $\mathrm{mcm}(a,b) > \mathrm{mcm}(a,2431)$, allora i due danzeranno insieme sulle note di Johnny B. Goodel. "Che bello —commenta la giovane Lorraine Bayes— il mio numero è il più piccolo tra quelli che permettono ad una ragazza di ballare!"

Che numero ha?

### 7. Indovinelli dal passato [⋆⋆]

Nel 1955 Matryx riceve la lettera di $\widehat{DOC}$ dal vecchio West, la quale recita così "Ci sono tante miniere, ognuna indicata da un intero. La DeuLerean si trova in quella che corrisponde al numero di coppie *non ordinate* di polinomi $p(x), q(x)$ a coefficienti interi *strettamente positivi*, di grado 4, tali che $p(1)+q(1)=26$ e che il polinomio $(p(x)q(x))^7$ abbia esattamente un coefficiente dispari". Di quale miniera si tratta?

### 8. La teoria dei futuri astronauti [⋆⋆]

Matryx e $\widehat{DOC}$ sono finiti nell'antico Egitto, dove per nascondere la DeuLerean costruiscono un'enorme piramide retta con base un quadrato $ABCD$ e vertice $V$. Sugli spigoli $VB$ e $VD$ prendono rispettivamente due punti $P$ e $Q$ con $\frac{BP}{PV}=\frac{DQ}{QV}$ tali che il piano $APQ$ divide la piramide in due stanze di egual volume. Quanto vale $\frac{BP}{PV}$? *Si risponda indicando $a+b+2c$, dove $a,b,c$ sono interi tali che $\frac{BP}{PV}=\frac{a+\sqrt{b}}{c}$, e $b$ non ha quadrati perfetti tra i suoi divisori.*

### 9. Banditi matematici [⋆]

"Whisky per i miei $n$ uomini!" tuona Bu4 Kampen nel saloon. "E quanti sono?" chiede il barista. "Ti dirò solo che $n$ è un intero positivo con esattamente 12 divisori positivi $1=d_1<d_2<\cdots<d_{12}=n$, e che $d_{d_4-1}=d_8(d_1+d_2+d_4)$". Non volendo fare altre domande, per ogni possibile $n$ il barista prepara un vassoio con $n$ bicchieri. Quanti bicchieri riempie?

### 10. Occhio al cappello [⋆]

Nel selvaggio West, gli indiani hanno infilzato di frecce il cappello da cowboy di $\widehat{DOC}$. Le frecce hanno tutte la punta nello stesso punto al centro del cappello, e hanno la forma di segmenti tutti della stessa lunghezza. Matryx nota che esistono tre frecce $a,b,c$ tali che l'angolo tra $a$ e $b$ è di $60°$, quello tra $b$ e $c$ è di $60°$, quello $c$ e $a$ è di $90°$. Invece $\widehat{DOC}$, matematico più abile, nota che per ogni coppia di frecce $s$ e $t$ c'è anche una freccia che è la simmetrica di $t$ rispetto al piano perpendicolare a $s$. Quante frecce ci sono nel cappello, al minimo?

### 11. Il Grande Almanacco delle Olimpiadi di Matematica [⋆]

Ad ogni edizione delle Olimpiadi di Matematica, a partire dalla numero zero, Biff Tauber scommette sul vincitore grazie al Grande Almanacco. La vincita che ottiene all'edizione $n$ è di $a_n$ dollari, dove $a_0=0$, e per ogni intero $n$ valgono le relazioni $a_{3n}=a_n$, $a_{3n+1}=a_n-1$, e $a_{3n+2}=a_n+2$. Finita l'edizione numero 2018, Biff realizza che, dall'inizio delle scommesse, ha guadagnato una montagna di dollari. Quanti, di preciso?

### 12. Circuiti difettosi

I circuiti del tempo sono stati danneggiati da un fulmine: ora la DeuLerean può raggiungere solo gli anni di quattro cifre tali che la cifra delle migliaia sia maggiore o uguale alla somma delle altre tre. "Poco male" dice $\widehat{DOC}$, e calcola rapidamente in quanti anni diversi può viaggiare. Che numero trova? *Si intende che un numero di quattro cifre ha la cifra delle migliaia non nulla.*

### 13. Salviamo l'orologio della torre [⋆]

Nel 2018 l'orologio di Hill Valley è stato finalmente ricostruito: ora consiste di un triangolo isoscele $ABC$ rettangolo in $C$. I punti $D$ ed $E$, rispettivamente sui lati $AC$ e $CB$, sono congiunti da un segmento parallelo ad $AB$. Ci sono ora ben due orologi circolari, uno inscritto al triangolo $ADE$ e uno inscritto ad $ABE$, che si toccano in un punto sul segmento $AE$. Quanto vale $2000\cdot\dfrac{CE}{CB}$?

### 14. Apertura quasi automatica

Per sbloccare la porta della sua futura abitazione, Jensenfer Paerther deve trovare tre naturali $a,b,c$ di rispettivamente tre, due e una cifra, con $b=\dfrac{a}{c}$. Inoltre le cifre di $b$ sono contenute in quelle di $a$, che è il massimo possibile. Quanto vale $a$? *Il contenimento delle cifre è inteso con molteplicità, cioè ad esempio 32 è contenuto in 243 ma 33 non lo è.*

### 15. Un fisico bestiale

$\widehat{DOC}$ ha lasciato il fedele EisEinstein in un recinto extratemporale, che nelle dimensioni spaziali è un triangolo $ABC$ con gli angoli in $A,B,C$ di rispettivamente 50, 60, 70 gradi. Detti $H$ il piede dell'altezza uscente da $B$ e $K$ il punto su $AB$ con $AH=AK$, una recinzione rettilinea perpendicolare ad $AB$ congiunge $K$ al segmento $BH$, che interseca in $P$. EisEinstein, dotato di grande senso fisico, stima immediatamente l'ampiezza in gradi di $\widehat{PAK}$: che valore trova?

### 16. Una chitarra particolare

Per provare il nuovo amplificatore di $\widehat{DOC}$ Matryx suona una strana chitarra: essa è formata da un rettangolo $ABCD$ con $AB>BC$ e da un triangolo $ABP$, con $P$ che si trova sia nella striscia individuata dalle rette $BC$ e $DA$ sia nel semipiano individuato da $AB$ che non contiene il lato $CD$. Chiamando $X$ e $Y$ le intersezioni di $AB$ con rispettivamente $PD$ e $PC$, la somma delle aree dei triangoli $PAX$ e $PBY$ è di $71\,\text{cm}^2$, mentre l'area di $ABCD$ è $354\,\text{cm}^2$. Quanti $\text{cm}^2$ vale l'area di $CYXD$?