XIX Gara Nazionale a Squadre

olimpiadi.dm.unibo.it
www.oliforum.it

Finale Nazionale – 5 Maggio 3018

Istruzioni Generali

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- **Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.**
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o due stelle [$\star$].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2361 \qquad \sqrt{7} = 2.6458 \qquad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio**: termine per rivolgere domande sul testo.
- **120 minuti dall'inizio**: termine della gara.

FUTURMATH

1. Benvenuto nel futuro!

"Philip J. Frege, ti trovi nel futuro!" esclama Liela Turinga con aria drammatica dopo aver risvegliato dall'ibernazione il nostro eroe. "In che anno sono?" "Poco prima dell'anno 9613. Anzi, è proprio l'ultimo anno x prima del 9613 tale che $9613^2 - x^2$ sia un quadrato perfetto". In che anno si trova il povero pony-pizza?

2. Direttamente nella tua casella

Il prof. Fredholm mostra a Frege una mappa dell'universo, a forma di scacchiera infinita bidimensionale; ogni casella rappresenta un settore del piano galattico. Indica col dito il centro del settore corrispondente alla Terra, e spiega: "La nostra astronave per le consegne ha un motore di mia invenzione che utilizza materia oscura come carburante. Con due palline di materia oscura, prodotte dal nostro Mordaglia, può spostarsi di un settore in orizzontale o in verticale; con tre può spostarsi di un settore in diagonale. Partendo dalla nostra base sulla Terra, possiamo fare consegne in qualunque settore raggiungibile con 60 palline di carburante o meno. Incluso quello di partenza, ovviamente", aggiunge ridacchiando. In quanti settori diversi può fare consegne la Planar Express?

3. Beuler dà i numeri [$\star$]

Il robot Beuler è andato in tilt per colpa di un magnete, ed ha cominciato letteralmente a dare i numeri! Il prof. Fredholm si accorge che i numeri elencati da Beuler sono tutti e soli gli interi positivi N per i quali esiste una sequenza di interi non negativi $a_0, a_1, \dots, a_{2019}$ tali che $N^{a_0} = N^{a_1} + N^{a_2} + \cdots + N^{a_{2019}}$ Quanto vale la somma di tutti i numeri elencati da Beuler?

4. Un gioco di equilibrio

Halbert Conway, il burocrate della Planar Express, è un ex-campione di limbo. In questo gioco, ogni singola partita può terminare con la vittoria di uno dei giocatori o un pareggio; però due partite successive non possono concludersi con vittorie di due giocatori diversi. L'ultima sfida di Halbert con Barbaros Schur fu memorabile. La sfida terminò subito dopo il quarto pareggio, e fu equilibratissima: la differenza in valore assoluto tra il numero di vittorie di Halbert e quelle di Barbaros non superò mai 3. Quanti sono i possibili modi (cioè sequenze di risultati di partite successive) in cui può essersi svolta la sfida, in base a queste informazioni?

5. La passeggiata del robo-ubriaco

Il robot Beuler, di nuovo, ha bevuto un po' troppo. Si trova di fronte all'enorme parete del complesso di robo-appartamenti in cui abita, a dodici metri di distanza da esso. Con ognuno dei suoi lunghi passi robot può spostarsi in tre direzioni diverse: o di due metri andando diritto verso la parete perpendicolarmente ad essa, oppure di un metro diritto verso la parete e contemporaneamente di uno verso destra oppure verso sinistra. Con sei passi diritti raggiungerebbe l'ingresso, per esempio, oppure con due passi verso sinistra, quattro diritti, e poi due verso destra. Quanti sono i possibili percorsi che lo portano all'ingresso?

6. Esportare democrazia [⋆⋆]

Il generale Brouwergan ha deciso di bombardare a tappeto una certa zona del pianeta Even 7, che ha la forma di un quadrilatero $ABCD$. Il suo vice Kief Kroneker fornisce le informazioni necessarie per completare l'operazione: valgono le uguaglianze $\angle BAD + \angle CBD = \angle BCA + 2\angle ADB = 90°$ e $\angle BCD = 2\angle BAD$. Inoltre, detto X il punto di intersezione delle diagonali, si ha che $CX = 33$, $AX = 65$. Quanto misura BC?

7. Opportunità di pace intergalattica [⋆⋆]

Gli abitanti del sistema Otto Persei hanno l'abitudine di scrivere i numeri al contrario rispetto a quelli del sistema solare, vale a dire, leggendoli da destra a sinistra anziché da sinistra a destra. Questo è fonte di numerose incomprensioni, anche a causa della loro bellicosità, ma capita occasionalmente che sia noi che loro siamo d'accordo su un'affermazione del tipo "il numero Y è il quadrato del numero X" (ognuno leggendo i numeri alla sua maniera), per esempio per $X = 12, Y = 144$. Per quanti interi positivi X *che non contengono la cifra zero* le due civiltà si trovano d'accordo?

8. Cerchi nel grano

Nell'anno 3018, è ormai conoscenza comune il fatto che i cerchi nel grano sono messaggi degli alieni del pianeta Otto Persei, grossi esperti della cultura terrestre. In un messaggio particolarmente elaborato, l'alieno Mrrr tracciò un triangolo ABC con $AB = 2017$ e $BC = 2076$. Il cerchio inscritto nel triangolo incontrava AC e AB in B_1 e C_1 rispettivamente. Il cerchio tangente al lato AB e ai prolungamenti dei lati CA e CB (dai lati di A e B rispettivamente) incontrava la retta AC in B_2. Il cerchio tangente al lato AC e ai prolungamenti dei lati BA e BC (dai lati di A e C rispettivamente) incontrava la retta AB in C_2. Sapendo che i quattro punti $B_1C_1B_2C_2$ stavano su una stessa circonferenza, trovare il minimo valore possibile per AC.

9. Sgominare il piano [⋆]

Dopo un acceso diverbio, gli abitanti del sistema Otto Persei hanno deciso di invadere la Terra. Il loro pianeta, per l'appunto, si trova nella posizione $(8,6)$ del piano cartesiano galattico. La loro astronave si muove facendo passi di lunghezza 1 nel piano, sempre verso il basso o verso sinistra, e sta cercando di atterrare nel punto $(0,0)$. Il generale Brouwergan cerca di colpirla con il suo cannone positronico, ma questa cambia direzione esattamente 7 volte e lo disorienta, riuscendo ad atterrare. Quanti sono i diversi percorsi possibili per l'astronave?

10. I presidenti dell'UMI

Nella sala dei presidenti del museo delle teste di Nuova Nuova York si trovano 2017 teste in fila: però alcuni presidenti mentono sempre, altri dicono sempre la verità. Per scovare i bugiardi, Liela chiede a ciascuno di loro (eccetto l'ultimo) se il presidente nel posto successivo sia sincero. Come risposte, in ordine, ottiene un sì, poi un sì e un no, poi un sì e due no, poi un sì e tre no e così via fino al 2016-esimo. Quanti bugiardi ci sono al massimo?

11. Merito della bombetta [⋆]

La scimmia Goentel, diventata intelligentissima grazie al cappello inventato dal prof. Fredholm, si diletta di problemi di geometria. Nell'aula magna dell'università di Marte, pondera di fronte a un trapezio $ABCD$, rettangolo in B, con base maggiore AB e base minore DC. Ha indicato le lunghezze di alcuni suoi lati: $AB = a$, $BC = 1000$, $DC = b$. Chiama poi D' il simmetrico di D rispetto alla retta AC, ed E l'intersezione di AC e BD. Goentel sa che esiste un valore di a tale per cui $AD'ED$ è inscrivibile in una circonferenza per uno e un solo valore positivo di b. Sapreste aiutarla a scoprire quanto vale $a + b$?

12. Mi faccia un'altra domanda [⋆]

Quando insegnava all'Università di Marte, il prof. Fredholm era solito dare questo problema ai suoi studenti più promettenti, o a quelli che gli stavano più antipatici. Sia f un polinomio a coefficienti reali che non ha radici multiple. Quante radici multiple può avere, al massimo, il polinomio $g(x) = f(x^3 - 3x)$? *Si dice che λ è una radice multipla del polinomio $p(x)$ se $\frac{p(x)}{(x-\lambda)^2}$ è un polinomio.*

13. L'universo in una stanza [⋆⋆]

"Buone notizie, matematici —esclama il prof. Fredholm— questa scatola a forma di tetraedro regolare di lato $28\sqrt{3}$ m contiene non uno, ma due universi, identici, e di forma sferica. Non solo, ma le sfere possono scambiarsi di posto muovendosi rigidamente all'interno della scatola, senza mai sovrapporsi". Quanti *millimetri* può misurare, al massimo, il raggio dei due universi sferici?

14. Da convertire in teoremi [⋆]

Frege ha deciso di usare il suo rimborso delle tasse per comprarsi 1000 caffè. Per ogni N compreso tra 1 e 1000, l'N-esimo caffè ha un contenuto di caffeina pari a $N/s(N)$, dove $s(N)$ è la somma delle cifre di N: per esempio, il 433esimo caffè ne contiene $\frac{433}{4+3+3}$. Qual è la quantità totale di caffeina che assumerà Frege, pari alla somma dei contenuti di caffeina di tutti i caffè?

15. CAPTCHA [$\star$]

Per motivi sconosciuti ai più, Frege ha uno sconveniente tatuaggio con dei numeri. Si tratta di una tabella 4×4 in cui sono annerite le quattro caselle della diagonale che va dalla casella in basso a sinistra a quella in alto a destra. Nelle restanti caselle sono scritti i numeri interi tra 1 e 12, ognuno una volta sola. In ogni coppia di caselle adiacenti orizzontalmente, la casella più a sinistra contiene un numero maggiore di quella più a destra. In ogni coppia di caselle adiacenti verticalmente, la casella più in alto contiene un numero maggiore di quella più in basso. In quanti modi è possibile riempire la tabella rispettando queste condizioni?

16. Forza bruta

Beuler sa che il codice che libera la sfera temporale che gli permetterà di viaggiare nel tempo è una sequenza di 2018 cifre, scelte tra $0, 1, 2$, ma la cui somma vale al più 8. Con le sue dita robot, sta cercando di digitare uno per volta tutti i possibili codici che rispettano queste caratteristiche. Quanti codici digiterà? *Si risponda indicando il resto della divisione di questo numero per 2018.*

17. Martizione del piano [$\star\star$]

Il logo della MuCorp, la più potente corporazione dell'universo, ha la forma di una lettera M che si estende all'infinito, vale a dire, una spezzata non intrecciata composta da una semiretta, due segmenti, e un'altra semiretta (in quest'ordine). In quante parti al massimo viene diviso il piano da 20 spezzate di questo tipo?

18. Compleanno particolare

Frege si è dimenticato un'altra volta di che giorno è il compleanno di Liela! Si ricorda solo che il numero $g_1g_2m_1m_2$ formato scrivendo la data nel formato giorno/mese (con g_1 e m_1 uguali a zero, eventualmente) e leggendo le quattro cifre di fila, è il prodotto di due numeri primi, diversi e minori di 100, che si scrivono con le stesse cifre in ordine opposto (ab e ba). Quali sono le possibili date di nascita che rispettano questa condizione? *Si risponda indicando la somma dei possibili valori del numero $g_1g_2m_1m_2$.*

19. Frege, Escher e Bach

L'olomorfo è uno strumento musicale in grado di proiettare complesse scene quadridimensionali. Philip J. Frege, che si diletta di questo strumento, ha disegnato su un piano a mezz'aria un triangolo equilatero ABC. Detto M il punto medio di BC, ha costruito con uno svolazzo il punto D esterno ad ABC tale che BMD sia un triangolo equilatero. Poi ha ripetuto la costruzione e la melodia su un'ottava più acuta, chiamando N il punto medio di MD e scegliendo P esterno a BMD tale che PND sia un triangolo equilatero. Sapendo che $AB = 3556$, quanto misura PC?

20. Il quadrifoglio a cinque petali

Il leggendario quadrifoglio a cinque petali trovato da Frege aveva la forma di questa figura piana. Su una circonferenza Γ di centro O e raggio 1 prendiamo cinque punti A, B, C, D, E che la dividono in cinque archi uguali e disgiunti. Consideriamo le cinque circonferenze di raggio 1, distinte da Γ, e passanti rispettivamente per A e B, per B e C, per C e D, per D ed E, per E ed A. Una circonferenza più piccola di centro O è tangente a queste cinque circonferenze. Quanto vale il suo raggio? *Si risponda indicando le prime quattro cifre dopo la virgola.*

21. Palloni che girano [$\star$]

I Goldbachtrotters sono famosi per la loro abilità nel manipolare numeri di altezza crescente. Nel loro numero più famoso, $2n$ di loro si mettono in fila, indossando maglie su cui sono scritti, da sinistra a destra, i numeri $+1, +2, +3 \ldots + (n-1), +n, -n, -(n-1) \ldots -2, -1$. Il primo di loro, quello con il numero $+1$, lancia la palla al suo compagno di squadra immediatamente alla sua destra. Allo stesso modo, quando riceve la palla, ogni giocatore la passa al giocatore che ha distanza da lui pari al suo numero di maglia, a destra se il numero è positivo e a sinistra se è negativo. Quindi per esempio il giocatore con il numero -4 passa la palla al giocatore che sta quattro posti a sinistra rispetto a lui. Per quanti interi $n \geq 1$ la palla sarà di nuovo in possesso del giocatore iniziale dopo 24 passaggi?