XVIII Gara Nazionale a Squadre

Finale Nazionale – 6 Maggio 2017

olimpiadi.dm.unibo.it
www.oliforum.it
www.facebook.com/EGMO2018

Istruzioni Generali

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- **Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.**
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una stella [$\star$].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2361 \qquad \sqrt{7} = 2.6458 \qquad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio**: termine per rivolgere domande sul testo.
- **120 minuti dall'inizio**: termine della gara.

Lasciate ogni compasso, o Voi ch'entrate

1. Nel punto medio del cammin

Nel punto medio del cammin di nostra vita, meditando su un problema mi smarrii per una selva oscura. Ponderavo su un triangolo ABC; sul lato AC, di lunghezza 400, presi un punto P. La proiezione di P sul lato BC era detta X, e Y la proiezione di P su AX. Ahi come trovar la lunghezza del lato AB, sapendo che AB era ortogonale ad AX, e che le seguenti condizioni valeano tra le lunghezze dei segmenti: $AC = 2(PX+PY)$ e $BX^2 - AB^2 = 2AB \cdot PY$?

2. Animali fantastici

Giunsi in una selva a forma di triangolo ABC, con $AB = \sqrt{19}$, $BC = 5$ e $AC = 3$, e innanzi a me si pararono una lupa, un leone, e una lonza: esse stabano in tre punti A', B', C' appartenenti a BC, AC, AB rispettivamente et tali che $\frac{A'B}{A'C} = \frac{B'C}{B'A} = \frac{C'A}{C'B}$. Notai che, detto G il baricentro di ABC, $A'G$ bisecava $\widehat{B'A'C'}$. Quanto valeva $(A'B' + A'C')^2$? *Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

3. Un poeta dei numeri

All'uscita dalla selva, vidi una figura, che riconobbi immediatamente dall'abilità con cui si destreggiava con ics e ipsilon. Egli stava calcolando il numero di coppie di interi positivi (x, y) tali che $x^2 + y^2 < 2017 < x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2$. Ne fui stupito, giacché egli non era un personaggio del mio tempo. "Maestro Cartesio, cosa ci fate qui?", chiesi, mentre lui in un lampo terminò l'esercizio.

4. Per me si va...

La mia guida Cartesio mi condusse di fronte alla porta degl'Inferi. Su di essa era inciso un esagono regolare $ABCDEF$ Ogni suo lato era diviso in 49 segmenti uguali: per esempio, AB era diviso in $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{48}B$, mentre BC in $BB_1, B_1B_2, \dots, B_{48}C$, e così via. I punti $A_{14}, B_{14}, C_{14}, D_{14}, E_{14}, F_{14}$ erano collegati da una lingua di fuoco a formare un esagono più piccolo. Qual era il rapporto tra le aree dei due esagoni? *Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini*

5. [$\star$] Il traghettatore

Io e Cartesio giungemmo in fronte a Carnote, il traghettatore. Ei ci venne incontro sulla sua zattera a forma di quadrilatero convesso $ABCD$. Essa aveva una forma peculiare: i suoi angoli erano tali che $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} + \widehat{BAC} + \widehat{BCA}$ e $\widehat{DCA} = 2\widehat{BAC}$. Inoltre, si aveva $AC = 91$, $AD + CD = 169$. Ci ordinò di sederci all'interno del triangolo ABC, piuttosto stretto, di area 2184. Qual era invece l'area totale della zattera che doveva condurci al di là del fiume Archimeronte?

6. Carnot Dimonio

"Considerate duemila dannati:
mille sceglietene per la malvagia
finale a squadre - che sian radunati!".

Carnot dimonio dagli occhi di bragia
loro scrutando, si fe' richiedente
del numero maggior che non disagia

di esser primo e tre cifre avente
e divisor del numero di scelte.
Rispondere tu sai correttamente?

"Non disagia" qui significa "Non manca".

7. Il Primo Cerchio
Attraversato il fiume, giungemmo al Primo Cerchio, il più grande di tutti, il $\lim_{b \to 0}$; esso avea difatti la forma di un cerchio di raggio 84. Nell'attraversarlo, mentre eravamo in un punto distante 36 dal centro, la mia guida Cartesio lanciò una palla lungo una certa corda AB della circonferenza. Esso rimbalzò due volte sulle pareti, dopodiché ritornò per la prima volta nel punto iniziale ai nostri piedi. Qual era la lunghezza di tale corda AB? *I rimbalzi avvengono in modo regolare (l'angolo di riflessione è uguale a quello di incidenza).*

8. La sequenza degli ignavi
Andammo poi nel girone degl'ignavi, dov'erano coloro che sono troppo pigri per far di conto. La loro punizione era calcolare, senza posa, i termini d'una sequenza definita come segue: $a_1 = 30$ e, per ogni $n \geq 1$, chiamasi a_{n+1} il minimo intero positivo maggiore di a_n tale che $mcm(a_1, \ldots, a_{n+1}) > mcm(a_1, \ldots, a_n)$. Tutto questo mentre un dimonio urlava loro nelle orecchie: "Lavorare, lavorare, lavorare…". "Sapresti dire—mi chiese Cartesio—quanto vale il più grande elemento della sequenza minore di 2405?"

9. Il gran rifiuto
Poiché nessuno di loro avea il coraggio di assumersi il fardello del papato, Fibonaccio VII e Cardanino V decisero di giocarselo alle carte, peccando così ancora più gravemente. Essi aveano un mazzo di 52 carte, numerate da 1 a 13 con quattro copie per ogne numero. Ognuno di loro ne pescò una; qual era la probabilità che quella pescata da Fibonaccio recasse un numero più alto di quella di Cardanino? *Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini*

10. Giuochi proibiti
'Questo è il girone dei lussuriosi', aveva appena detto l'almo Cartesio, quando due anime si staccarono dal gruppo, e giunsero da noi. Le riconobbi: erano Alberto e Barbara. Protagonisti insieme di sì tanti giuochi, aveano col tempo ceduto alla passione. In vita, amavano dilettarsi con una lavagna su cui erano scritti i numeri da 1 a 100: a turno uno di loro rimpiazzava due numeri a e b con il loro minimo comune multiplo $mcm(a, b)$ e il loro massimo comun divisore $MCD(a, b)$. Continuarono così fino a quando non vi erano più mosse disponibili: per ogni possibile coppia i nuovi numeri sarebbero difatti stati uguali ai precedenti. Ordinando in ordine decrescente i numeri presenti sulla lavagna alla fine del giuoco, qual era il decimo?

11. Galeotto fu il libro
Un altro dei trastulli di Alberto e Barbara era questo: nella loro biblioteca vi erano dieci volumi di poemi cavallereschi, numerati da 1 a 10. Alberto ne prendeva due casualmente, e poi dei due teneva quello con il numero maggiore e scartava l'altro. Barbara ne prendeva altri due casualmente tra i rimanenti otto, ma ella teneva quello con il numero minore e scartava quello con il numero maggiore. Sapendo che la somma dei numeri dei due volumi scartati era 11, qual era la probabilità che anche la somma dei due volumi tenuti fosse 11? *Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini*

12. Algoritmi golosi
"I matematici mi chiamarono Ciaccoppoli", mi disse una figura nel girone de' golosi. Elli avea ricevuto dai guelfi bianchi di Firenze 2017 cioccolatini, e altrettanti dai guelfi neri. La sua punizione, però, era di non poterli mangiare, ma di doverli disporre in triangoli sempre più grossi. Per il primo triangolo abbisognavagli un solo cioccolatino, per il secondo tre, per il terzo sei, e così via, secondo i numeri triangolari. Me ne andai prima che terminasse, mentre mi guardava sghembo. Quanti triangoli, tutti disgiunti, riuscirà costui a realizzare con i cioccolatini presenti?

13. L'inferno speciale
"Questo è un girone speciale", mi disse Cartesio, "riservato a chi si macchia di colpe gravi, come semplificare addendi nelle frazioni oppure parlare al cinema." Eran presenti in questo settore solo quattordici dannati, numerati da uno a quattordici. Ogni dì, un diavolo sceglieva alcuni di essi (a volte anche nessuno di loro, se erano particolarmente fortunati), e ordinava ad ognuno dei prescelti di portare sulle spalle una quantità di macigni variabile tra uno e cinquantasei. Ogni giorno, tali quantità erano scelte in ordine crescente: un prescelto con un numero più grande ne doveva portare una quantità strettamente maggiore. In quanti modi diversi potebano essere abbinati ogni giorno dannati e macigni? *Si risponda indicando la somma dei numeri primi distinti presenti nella fattorizzazione del risultato.*

14. Struttura demoniaca
Durante il nostro viaggio, Cartesio si dilungò a spiegarmi la struttura dell'inferno, tra cerchi, gironi e malebesgue. Giacché fui colto da uno svenimento, ricordo ben poco, ma la sua forma base è quella di un dodecaedro, vale a dire un solido regolare con 12 facce pentagonali. Esso ha V vertici, S spigoli, e D diagonali interne (cioè, che non giacciono su nessuna delle sue facce). Quanto vale $D \cdot S + V$?

15. Dannati triangoli
Nei pressi del fiume Stage, vidi un girone in cui erano racchiusi coloro che odiavano la geometria, trafitti eternamente da una successione di piccoli triangoli isosceli (ma non equilateri). Uno di loro cercava di misurarne i lati col righello, un

altro di calcolare tutto in baricentriche: ahi derelitti! Avendo tutti fatto il disegno male, però, non notarono una proprietà cruciale: l'angolo al vertice dell'$n+1$-esimo triangolo della successione era ampio quanto gli angoli alla base dell'n-esimo triangolo, per ogni n. Indicando con α_n l'ampiezza in gradi degli angoli alla base dell'n-esimo triangolo, come deve scegliersi il primo di essi, α_1, acciocché il numero di α_n che sono interi sia massimo?

16. Tra i fuochi ardenti
Tra gl'iracondi, nei pressi del fiume Stage, sedeva un'altra anima prava, colpevole in vita di non saper controllare la sua favella. Abile cultore della geometria, anche la più complessa, fu condannato a sedere in mezzo a un esagono $ABCDEF$ di area 1000, fatto di carboni rossi e roventi. Attorno ad esso ardevano fiamme in forma di sei ellissi, tutte uguali tra loro, ognuna avente per fuochi due vertici dell'esagono ch'erano adiacenti (estremi dello stesso lato). Quella di fuochi A e B era tangente a quella di fuochi C e D; quella di fuochi B e C era tangente a quella di fuochi D ed E, e così via, in cerchio. Tutti questi punti di tangenza formavano un poligono; qual era la sua area?

17. Tassa di soggiorno
All'ingresso dell'infernale città di Hermite, i diavoli bloccarono il nostro passaggio con un problema che nessun vivente sapeva risolvere. Enunciarono: $f(x)$ è un polinomio a coefficienti interi non costante tale che per ogni intero dispari n si ha $2f(n)^4 = f(f(n)^2 - 458) + 1832f(n)^2$, mentre per ogni intero pari m risulta che $f(m) - f(1)$ è un multiplo di $m+1$. Neppure Cartesio, ahimé, seppe dir loro quanto valeva $f(457) + f(459) + f(461)$.

18. [$\star$] Far quadrare i conti
Nel girone successivo, riconobbi tra l'anime derelitte il mio antico maestro fiorentino, Quadretto Latino. Ei deve il nome alla sua perizia nel costruire tabelle quadrate di $n \times n$ caselle, ognuna contenente numeri reali. Per esempio, egli amava costruire quadrati tali che, per ogni cella, la somma tra il numero presente in essa e quelli nelle celle ad essa confinanti era uguale a zero. Per quali interi n compresi tra 2 e 2017 (estremi inclusi) è costruibile una siffatta tabella con numeri non tutti nulli? *Una casella confina con un'altra se esse si toccano per un vertice oppure un lato.*

19. Oltre le colonne
Avvolto da una duplice fiamma, riconobbi un celebre personaggio del nostro passato: Ellisseo. Egli vagò nel Mediterraneo, visitando molti dei porti conosciuti al tempo. Avea inizialmente una lista di porti numerati da 1 a 1000, scritti uno sotto l'altro in colonna. Visitato il n. 1, egli cancellò dalla lista il 3. Indi visitò il 2, e cancellò dalla lista il numero 5. Poi visitò il 4, e cancellò il 9; e proseguì così per lunghi anni, ogni volta visitando il porto con il numero più basso n rimasto sulla lista che non aveva ancora visitato e cancellando il numero $2n+1$ (quando esso era minore di 1000). Quando egli arrivò al termine della lista, quanti numeri rimasero scritti?

20. [$\star$] La mensa delle normali
"Il conte Ugobbino", fece il vate, "si macchiò di una colpa orribile." "Pisano?" chiosai, con l'umorismo delle mie genti, ma Cartesio ignorò le mie burle. "Imprigionato dai suoi inimici, subito tracciò una retta sul muro. Poi ogni giorno lanciò una moneta; se usciva testa, egli tracciava una retta perpendicolare alla prima, se usciva croce una parallela. Avea tracciato 99 rette oltre alla prima, quando la fame lo costrinse al bieco pasto." Qual è il numero medio di regioni in cui il piano cui appartiene il muro della cella viene diviso da queste rette?

21. [$\star$] Sfere demoniache
Arrivammo infine a un edificio dalla forma peculiare, entro al quale, disse la mia guida, avremmo incontrato Lucifourier. Il cuore dell'edificio era un segmento verticale AB di lunghezza 20, tagliato in due nel suo punto medio M. Nella parte inferiore dell'edificio v'era una piramide retta a base quadrata, di lato $10\sqrt{2}$, di cui MA era l'altezza; nella parte superiore invece un tetraedro regolare, appoggiato su di un vertice, di cui MB era un'altezza: il punto M era un vertice comune a entrambi i solidi. Inoltre, in ognuno degli otto vertici di questa figura aveva centro una sfera di raggio 5; l'edificio era quindi formato da tutti i punti interni ad almeno uno di questi dieci solidi. Quale ne era il volume?

22. [$\star$] La Scala del Diavolo
Innanzi a noi si ergeva Lucifourier, enorme, orribile e puzzolente. "Ma quanto è alto?", chiesi a Cartesio? Ed egli paziente mi rispose: siano a,b,c,d,e,f,g,h le soluzioni reali di $x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) = 1$. La sua altezza è pari a $a^7 + b^7 + c^7 + d^7 + e^7 + f^7 + g^7 + h^7$. E la mia mente non poteva comprendere la magnitudine di questo numero...

23. [$\star$] Il primo traditore
L'imperatore infernale Lucifourier, intrappolato nelle acque ghiacciate del Cauchyto, tormentava i tre grandi traditori—Giüdel, Brunge e Kuttio—maciullandoli di problemi. Una bocca profferì: "Quante sono le terne di interi $a,b,c \in \{0,\ldots,70\}$ tali che $a^2 + b^2 - 2c^2$ sia multiplo di 71? Rispondi o condividi la loro sorte!". Raggelato dalla paura, dovetti chiamare in aiuto Cartesio che rispose per me. Cosa disse a Lucifourier?

24. [$\star$] La natural Borela
"V'è un sol modo di uscire dall'inferno—disse la mia guida Cartesio—attraverso questa rete di cunicoli, che sbuca dall'altro lato della Terra", e mi mostrò una mappa su un foglio di pergamena. Su di essa era tracciato un triangolo ABC.