



XX Gara Nazionale a Squadre

Finale Nazionale – 4 Maggio 2019



olimpiadi.dm.unibo.it
www.oliforum.it

Istruzioni Generali

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- **Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.**
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o più stelle [★].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio:** termine per rivolgere domande sul testo.
- **120 minuti dall'inizio:** termine della gara.

1. C'era una volta

“C'era una volta, in un regno molto, molto lontano...” Sì, ma quanto lontano? Per darvi un'idea, detto $f(n)$ il numero di divisori di n maggiori di $1000000 - n$, il regno dista un numero di miglia pari a $f(600000) + f(600001) + \dots + f(1000000)$. Quante miglia è lontano il regno molto, molto lontano?

2. Rana che salta

Nella palude dove vive Šrech ci sono 30 ninfee, disposte a formare una griglia 6×5 . Un giorno Šrech nota una rana che saltella sulle ninfee, partendo dalla casella in basso a sinistra. Ogni volta che salta atterra in un'altra ninfea, non necessariamente adiacente, che non si trova in una colonna più a sinistra né in una riga più in basso di quella precedente. In quanti modi diversi può raggiungere la ninfea in alto a destra?

3. Freccia prismica [★]

Per attaccare la casa di Šrech un villico è dotato di frecce magiche la cui punta ha la forma di un prisma retto triangolare con tutti gli spigoli di 1 centimetro, mentre l'asta ha spessore trascurabile e giace sull'asse del prisma. La punta si avvicina al muro, spesso 1 metro, a velocità 300 metri al secondo perpendicolarmente ad esso e compie una rotazione completa rispetto al suo asse ogni 0.2 millisecondi. Passando attraverso il muro il proiettile perfora tutto ciò che tocca senza essere rallentato. Quanti centimetri cubici misura il foro?

4. Personaggi fantastici e dove catturarli

Lord Farquaday ha messo una taglia sui personaggi fantastici: la sua grida comincia con “pollicino: 1 doblone, campanellino: 2 dobloni”, e così via, fino a “ciclope: 1000 dobloni”, con tutti i numeri tra 1 e 1000 che compaiono una e una sola volta. Accortosi però che i suoi forzieri non consentono questa spesa, vuole appellarsi a un cavillo: ogni ricompensa n verrà letta nella più piccola base B_n in cui essa ha senso. Per esempio, il numero 243 va letto in base 5, e corrisponde (riletto in base 10) a 73 dobloni. Per alcuni numeri n della grida, accade che $B_n \neq 10$ e il numero $10 + B_n$ divide il numero n quando quest'ultimo viene letto sia in base B_n che in base 10. Trovare la somma di tali n .

5. Lo sanno anche gli asini [★]

“Ma questo asino parla!” “Non solo parlo, ma so anche qual è il primo intero n di 3 cifre per cui la quantità $\binom{n}{14}\binom{n}{15}\binom{n}{16}\binom{n}{17}$ sia un quadrato perfetto!” dice Cauchino, scappando per evitare di essere consegnato alle guardie. E Peanocchio (che stava origliando): “Anch'io lo so!” e improvvisamente il suo naso si allunga... Qual è il numero di cui parla Cauchino?

6. Piove sulla palude

Notte. Nel sogno di Cauchino le gocce di pioggia diventano schizzi di fango a forma di \times e di \circ che riempiono completamente tante griglie immaginarie 3×3 con cinque ' \times ' e quattro ' \circ '. “Uno, due, tre, ...”: Cauchino sta contando nel sonno le varie configurazioni finali. Quante ce ne sono a meno di rotazioni e riflessioni dello schema?

7. Strano disegno[★★]

Arrivati a Moduloc, Šrech nota subito due cose molto strane: la prima è che non c'è nessun abitante nei dintorni, e la seconda è che i tombini riportano una decorazione molto strana. Si tratta di un triangolo ABC , inscritto in

una circonferenza Γ , e altre due circonferenze ω_1 e ω_2 , tangenti entrambe internamente a Γ ed esternamente al lato BC . Inoltre ω_1 tange BC nel piede D della bisettrice uscente da A , mentre ω_2 tange BC nel simmetrico di D rispetto al punto medio di BC . “Cauchino, smettiti di cantare e guarda qui: se tracciamo un segmento da A tangente a ω_1 misura 2018, mentre se lo tracciassimo tangente a ω_2 misurerebbe 2019!” Quanto vale il quadrato della differenza tra le lunghezze di AB e di AC ?

8. L'uomo nell'alto castello

Lord Farquaday ha progettato un nuovo castello, con la forma di un enorme cubo di lato 24, da costruirsi con due tipi diversi di marmo. Detto A uno dei vertici, B, C, D quelli ad esso adiacenti, ed E quello opposto, si sezionano con un piano gli spigoli AB , AC ed AD , in modo che i punti di intersezione, X , Y e Z rispettivamente, soddisfino $AX = 6$ e $AY = AZ = 8$. Il tetraedro $EXYZ$ dev'essere composto di marmo azzurro, mentre la parte rimanente di marmo bianco. Quant'è il volume del marmo azzurro necessario a costruire il castello? Lord Farquaday è a corto di idee...

9. Combattimento parimpari

Šrech si trova circondato dai cavalieri di Lord Farquaday, in un punto P all'interno di un ring a forma di quadrilatero convesso $ABCD$. Il primo cavaliere si trova nel punto $X_0 = B$; il secondo in un punto Y_0 sul lato BC tale che $BY_0 = \frac{1}{2}BC$; il terzo in un punto Z_0 su lato CD tale che $CZ_0 = \frac{1}{3}CD$, il quarto in un punto W_0 sul lato DA tale che $DW_0 = \frac{1}{4}DA$, il quinto in un punto X_1 sul lato AB tale che $AX_1 = \frac{1}{5}AB$, il sesto su un punto Y_1 appartenente a BC tale che $BY_1 = \frac{1}{6}BC$, e così via ciclicamente. Shrek, che è un Arco ma non è per nulla stupido, ha calcolato che le aree di X_0PY_0B , di Y_0PZ_0C e di Z_0PW_0D valgono rispettivamente 881, 1539, e 1989. Quanto vale l'area dell'insieme di punti che stanno all'interno di tutti i quadrilateri della forma W_nPX_nA , per ogni n intero non negativo?

10. Sogni di cubi, quadrati, e bolle di sapone

Da piccola, Fibona si immaginava il futuro a fare matematica, insieme a un principe azzurro bellissimo, alto, nobile, e con una medaglia Fields. Riempiva le pagine del suo diario con disegni di bolle di sapone ed equazioni. Su una pagina, aveva scritto l'equazione $p^2q - 11 = 4(p + q^3)$. E, cosa curiosa, il suo diario era composto da p fogli prima di quello con l'equazione, e q dopo di esso, dove p e q sono due numeri primi che soddisfano l'equazione. Da quanti fogli al massimo era composto il diario (senza dimenticare quello contenente l'equazione)?

11. Polinomio esponenziale [★]

Nella lunga attesa del principe che la liberi, la principessa Fibona è riuscita a trovare una formula per calcolare quanti giorni ancora dovrà aspettare. Basta calcolare le ultime quattro cifre di $p(2019)$, dove $p(x)$ è il polinomio a coefficienti reali di grado 2018 tale che $p(n) = n \cdot 3^n$ per ogni $n = 0, 1, \dots, 2018$. Quanti giorni dovrà ancora aspettare Fibona?

12. Archi e cipolle

“Vedi, Cauchino, gli Archi sono come le cipolle.” “Sniff... puzzano?” “Sì... no!” “Ah, ti fanno piangere?” “No! Strati! Le cipolle hanno gli strati. Gli Archi hanno gli strati e le cipolle hanno gli strati. Capito?! Tutti e due abbiamo gli strati!” esclama Šrech affettando una cipolla con $2^{2019} \cdot 5^2$ strati. Sapendo che ogni tipo di cipolla ha un certo numero positivo di strati, e che per ogni tipo di cipolla con $n > 1$ strati esistono due cipolle (eventualmente dello stesso tipo) il cui numero di strati somma n , quanti tipi diversi di cipolla esisteranno come minimo?

13. Il ponte sulla lava

Per arrivare al castello della Draghessian, l'unico modo è attraversare uno dei due ponticelli di legno sospesi su un lago di lava. I ponti partono da due punti B e C , sono entrambi di lunghezza 1000 e terminano nello stesso punto A . Sotto i ponti si intravede un pilastro di roccia, posto nell'incentro I di ABC . Šrech e Cauchino stanno attraversando il ponte che si estende da C . “Non guardare giù, Cauchino! Piuttosto, guarda a sinistra: si vede l'inizio dell'altro ponte, B , che è in direzione esattamente perpendicolare al ponte che stiamo attraversando!” dice Šrech per cercare di tranquillizzare il suo compagno di viaggio. “Almeno Šrech, dimmi se abbiamo già attraversato metà del ponte!” “Non è difficile rispondere: il punto medio del ponte si riconosce perché da esso passa la circonferenza per A, B e I !” Quanta strada manca per giungere alla fine del ponte?

14. Due catene per un drago [★★]

Le due catene a cui è legata Draghessian sono molto strane: gli estremi X e Y scorrono rispettivamente, senza toccare gli estremi, sui lati AB di lunghezza 60 e BC di lunghezza 70 di un triangolo ABC con angolo di 75 gradi in B . Le catene non hanno lunghezza fissa, ma si allungano o si accorciano a formare due lati di un triangolo equilatero XYP , di cui Draghessian è il terzo vertice P , posizionato sempre dalla parte opposta a B rispetto alla retta XY . Ci chiediamo qual è l'area della regione in cui può trovarsi Draghessian al variare di X e Y .

15. Giocare con il fuoco [★]

Cauchino, per distrarre la Draghessian mentre Šrech salva Fibona, le insegna un gioco. Funziona così: disegna sul muro uno schema con delle caselle disposte a forma di triangolo, con 7 caselle nella riga in alto, 6 in quella sotto, e così via fino ad avere una sola casella in fondo. Riempie poi la riga in alto con numeri interi da 0 a 7 in modo che la loro somma sia 7, e completa lo schema scrivendo in ogni casella la somma dei numeri scritti nelle due immediatamente sopra, come nel triangolo di Tartaglia. Poi si annota il numero scritto in fondo, cancella i numeri dello schema e ricomincia con una nuova configurazione iniziale. Lo scopo del gioco è scoprire quanto vale la somma di tutti i numeri annotati, dopo aver completato gli schemi con tutte le configurazioni possibili della prima riga. Purtroppo per Cauchino, la Draghessian ha già capito quanto vale questa somma. . .

16. Passatempo per la strada

Nel viaggio di ritorno dalla tana della Draghessian, accompagnati da momenti romantici e canzoni rock, Šrech e Fibona passavano il loro tempo giocando con delle pedine su un'enorme scacchiera $n \times n$. Le pedine possono fare due tipi di mosse: o spostarsi in alto di 7 caselle e a destra di 2, oppure spostarsi in alto di 2 caselle e a destra di 7. In entrambe le mosse, una pedina che esce dal bordo della scacchiera rientra nel bordo opposto come se la scacchiera continuasse periodicamente: cioè, la pedina si muove da (x, y) a $(x+2, y+7) \bmod n$, o $(x+7, y+2) \bmod n$. Fibona nota che la dimensione n della scacchiera è il più grande numero minore di 9000 (che non sia multiplo di 2 né di 7) tale che una pedina può raggiungere con mosse successive esattamente un quinto delle caselle. Qual è questo numero n ?

17. Squallida bettola

Gli avventori della locanda *The Poisson Apple* sono dei tipi poco raccomandabili, e spesso scoppiano delle risse. La locandiera ha comprato sei boccali per la birra, ma sa che ogni volta che scoppia una rissa uno dei boccali potrebbe essere distrutto. La probabilità che questo avvenga è dell' n per cento, dove n è il numero di boccali ancora intatti. In media, quante risse saranno avvenute quando tutti i boccali sono distrutti?

18. Codici a barre [★★]

Ognuna delle pozioni prodotte dalla fabbrica della Fata Matrice è contrassegnata da un codice composto da quattro interi positivi a, b, c, d ; ogni singola pozione prodotta deve avere un codice diverso da tutte le altre già esistenti. Inoltre, per controllo, ha un codice a barre che riporta il numero razionale $1/(a^2 + b^3 + c^8 + d^n)$. L'intero positivo n , uguale per tutte le pozioni, è stato scelto accuratamente, in modo che, non importa quante pozioni verranno prodotte e con quali numeri di codice, la somma dei numeri scritti su tutti i codici a barre non potrà mai superare un certo intero M . Quanto vale n al minimo?

19. Pozioni mancanti [★★]

Nel magazzino della Fata Matrice stanno 2019 pozioni, numerate da 1 a 2019. Per controllare che siano tutte, la Fata ha l'abitudine di contarle: per ogni modo possibile di scegliere 1009 pozioni tra quelle presenti, calcola il prodotto dei loro 1009 numeri; poi somma tra loro tutti i prodotti ottenuti. Il Gatto con gli Ordinali ha rubato la numero 253, la pozione *Asintoticamente Felici e Contenti*; mentre lo faceva, però, sono cadute a terra e si sono rotte anche la pozione numero 2018 e la numero 2019. La Fata Matrice gira tra gli scaffali, esegue il calcolo in base alle regole dette sopra, e nota che qualcosa non va perché ottiene una somma diversa da quella abituale: qual è l'insolito risultato che ha ottenuto? *Si risponda indicando il resto ottenuto dividendo il risultato per 2017.*

20. I bottoni nuovi di Tan-di-zero

Tan-di-zero si è rifatto il guardaroba e ora ha $p(2019)$ bottoni gommosi, dove $p(x)$ è un polinomio i cui coefficienti sono interi compresi tra -19 e 19 . Sapreste dire quanti bottoni ha, sapendo che $p(91) = 745381$?

21. Proprio all'ultimo binomiale

Lord Farquaday ha fretta di completare il matrimonio con Fibona, per conquistare il più *alto* titolo di principe. La cerimonia, però, si dilunga, perché il rito prevede di chiedere "Chi ha qualcosa in contrario, pronunci la somma di tutti gli esponenti dei fattori primi distinti che compaiono nella fattorizzazione del minimo comune multiplo tra $\binom{99}{1}, \binom{99}{2}, \dots, \binom{99}{99}$, oppure taccia per sempre." Il celebrante ha appena finito di dire il penultimo numero $\binom{99}{98}$, quando Šrech irrompe nella chiesa: "*Fermi* tutti! Io so quanto vale questa somma! E non solo, ma amo anche la principessa di vero amore!" Quanto vale quella somma?