XXI Gara Nazionale a Squadre

Unione Matematica Italiana

Ministero dell'Istruzione

Semifinale A – 1 Settembre 2020

olimpiadi.dm.unibo.it
www.oliforum.it

Istruzioni Generali

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- **Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.**
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o più stelle [$\star$].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2361 \qquad \sqrt{7} = 2.6458 \qquad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio**: termine per rivolgere domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio**: termine della gara.

1. Pattinatori paralleli

Quest'anno fa più freddo del solito; l'inverno è arrivato presto! In città c'è anche una pista di pattinaggio a forma di triangolo ABC; sei punti $T_1, T_2, \ldots, T_6$ (in quest'ordine) dividono il lato BC in sette segmenti di uguale lunghezza. Alberto parte dal punto T_3, e pattina parallelamente ad AB fino ad arrivare a un punto P sul segmento AT_4. Barbara parte dal punto T_6, e pattina parallelamente ad AB fino ad arrivare a un punto Q sul segmento AC. Qual è il rapporto tra le distanze che hanno percorso? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

2. La somma delle somme

Il piccolo Alberto conta i giorni che mancano a Natale. Per ogni possibile sequenza di tre numeri, anche uguali tra loro, appartenenti all'insieme $\{0, 1, 2, 3\}$, Alberto scrive la loro somma su un foglio. Poi fa la somma di tutti i numeri scritti. Quanto vale questa somma?

3. Sfida all'ultima palla

Alberto e Barbara si sfidano a una gara di palle di neve. La gara è composta di *round* successivi, e vince il primo che arriva a tre vittorie. Barbara è più brava, e ha probabilità doppia rispetto ad Alberto di vincere ogni round (non è possibile che un round si concluda in pareggio). Alberto ha sei cioccolatini, due al latte e quattro fondenti; per scaldarsi mangia un cioccolatino all'inizio di ogni round dispari (il primo, il terzo, ...). Qual è la probabilità che al termine della sfida Alberto non abbia più cioccolatini al latte? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

4. Per combattere il freddo

Barbara si prepara una cioccolata calda, e dev'essere *bollente*! La sua temperatura (in gradi Freddenheit) è il più piccolo numero di quattro cifre $\mathtt{ABCD}$ (con la cifra $\mathtt{A} \neq 0$) tale che $\mathtt{MCD}(\mathtt{1ABCD}, \mathtt{ABCD}+1) = p > 100$ e $\mathtt{MCD}(\mathtt{ABCD}, \mathtt{A}+\mathtt{B}+\mathtt{C}+\mathtt{D}) = q < 100$, con p e q numeri primi. Quanto vale?

5. Neve esponenziale

Si prevede che a capodanno (giorno 1) cadranno $x_1 = 3$ centimetri di neve, e poi in ogni giorno n successivo x_n centimetri, dove $x_{n+1} = \sqrt[n/2]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$ per ogni n. Quanti centimetri di neve cadranno nel giorno 2020?

6. Tartaglia distratto [$\star\star$]

Quando la maestra ha spiegato il triangolo di Tartaglia, Alberto stava guardando la neve fuori dalla finestra e si è distratto. Ora deve disegnarlo, e sbagliandosi scrive come primo e ultimo numero di ogni riga non tutti uni, ma numeri dispari successivi. Poi riempie il resto con la solita regola ricorsiva: l'n-esimo numero su ogni riga è la somma dell'$n-1$-esimo e dell'n-esimo sulla riga precedente. Quindi per lui le prime righe sono 1, poi $3, 3$, poi $5, 6, 6, 5$, poi $7, 11, 11, 7$. Quanti numeri non multipli di 3 scriverà nelle prime 241 righe?

7. Un mercatino affollato

Il mercatino di Natale che Alberto e Barbara stanno visitando ha una capienza massima di 3030 visitatori, ed è composto di 2020 bancarelle disposte in fila. Davanti a ogni bancarella c'è almeno un visitatore. Qual è il massimo K per cui è sempre possibile trovare una sequenza di bancarelle consecutive che hanno in totale esattamente K visitatori?

8. Cristalli armoniosi

Come si sa, i fiocchi di neve hanno affascinanti forme geometriche. Quello che sta osservando Barbara è un esagono regolare $ABCDEF$. Un punto P al suo interno è tale che le aree dei triangoli ABP, BCP e CDP sono rispettivamente 23, 28 e 40. Qual è l'area totale del fiocco di neve?

9. Cono rotolante [$\star\star$]

Da una grotta si è staccata una stalattite che ha la forma di un cono retto con altezza 12 e raggio di base 5. È ora appoggiata di lato sul pavimento, e rotola compiendo una rotazione completa attorno al punto, fisso, in cui il vertice tocca il pavimento. Tutta l'aria spazzata dalla stalattite ghiaccia formando un blocco solido. Qual è il volume del blocco?

10. In tre attorno al falò [$\star$]

Alberto, Barbara e Ciro sono seduti intorno al fuoco, disposti rispettivamente ai vertici A, B, C di un triangolo. Il fuoco sta nell'incentro I. Un punto del triangolo è considerato vicino ad Alberto se per raggiungerlo egli non deve oltrepassare la retta passante per I e perpendicolare ad AI; e similmente vicino a Barbara (o a Ciro) se per raggiungerlo ella (o egli) non deve oltrepassare la retta passante per I e perpendicolare a BI (o CI). Sapendo che il triangolo ABC ha i lati lunghi $3, 4, 5$, qual è l'area dell'insieme dei punti interni al triangolo che sono vicini a due o più persone? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

11. Legna da ardere

Ogni giorno il papà di Barbara mette nel caminetto un certo numero di ciocchi di legna; per la precisione, il giorno n-esimo ne mette tanti quanti i modi distinti in cui si può scrivere n come somma di potenze di 2 non ordinate. Per esempio, il quarto giorno ne mette 4 (difatti i modi sono $1+1+1+1$, $1+1+2$, $2+2$, 4), e il 61esimo giorno ne mette 1460. Quanti ciocchi di legna consumerà in totale nei primi 30 giorni?

12. Chi è più goloso

La torta di mele che Alberto ha preparato ha la forma di un rettangolo $ABCD$. Prende due punti E ed F sul lato AB (in modo che A, E, F, B siano in quest'ordine), e la divide in quattro parti tagliando lungo i segmenti CE e DF. Alberto tiene per sé la parte contenente il segmento EF, che ha area 200. Dà ai suoi genitori la parte contenente CD, che ha area 450, e la parte contenente A, che ha area 441. Alla sorella Barbara rimane la parte contenente B; qual è la sua area?

13. Il salto del cavallo [$\star$]

Chiusa in casa nelle lunghe sere innevate, Barbara gioca a scacchi 3D con il nonno. Sulla loro scacchiera $8 \times 8 \times 8$, un cavallo si muove spostandosi di due caselle in una qualunque delle sei direzioni, e poi di una casella in una direzione perpendicolare. Scegliendo a caso due caselle distinte sulla scacchiera, qual è la probabilità che un cavallo *non* possa saltare da una all'altra con una singola mossa? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

14. Polinomio particolare

Nella sua letterina, Alberto ha chiesto a Babbo Natale di portargli un polinomio $p(x, y)$ in cui tutti i termini hanno grado (complessivo) 2, e inoltre per ogni a, b si ha $p(a, b) = p(-b, a-b)$. Babbo Natale corruga un po' le sopracciglia a questa strana richiesta, ma alla fine i suoi elfi riescono a fabbricare un polinomio diverso da quello nullo che soddisfa le richieste. Quanto vale $p(2,4)/p(3,-3)$? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

15. Distanze astronomiche

Quanta distanza percorre Babbo Natale con la sua slitta, per consegnare i regali a tutti i bambini del mondo? Esattamente $(8!)!$ chilometri, il fattoriale di otto fattoriale. Quando questo numero viene scritto in base 75600, con quanti zeri termina?

16. Olimpiadi invernali [$\star$]

Dopo una giornata sulla neve, Alberto si è messo in pigiama e sta leggendo sotto le coperte un libro di problemi di matematica per prepararsi al Winter Camp. Si è bloccato su questo: a_i e b_i sono due successioni infinite di reali tali che $a_0 > 0$, tali che $a_{n+1} + b_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ e $a_{n+1}b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ per $n \geq 0$; inoltre $b_{2020} = 1$. Trovare la somma dei possibili valori di a_0.