XX Gara Nazionale a Squadre

Prima Semifinale – 3 Maggio 2019

olimpiadi.dm.unibo.it
www.oliforum.it

Istruzioni Generali

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- **Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.**
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o più stelle [$\star$].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2361 \qquad \sqrt{7} = 2.6458 \qquad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio**: termine per rivolgere domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio**: termine della gara.

1. C'era una volta

C'era una volta... Sì, ma quando esattamente? Per darvi un'idea, c'è un polinomio $p(x)$ non costante con tutti i coefficienti in $\{0, 1, \ldots, 10\}$ e tale che $10 \mid p(11)$ $12 \mid p(13)$ e $18 \mid p(19)$. Bisogna andare indietro di tanti eoni quanto il grado del polinomio. Di quanti eoni come minimo?

2. Il teorema del brutto anatroccolo [$\star\star$]

In un parco a forma di triangolo ABC, con $AC > BC$, vive un anatroccolo; egli ama sguazzare in un lago di forma circolare, la cui sponda passa per A e per i piedi delle altezze uscenti da B e da C. Il lago interseca in un altro punto P la circonferenza circoscritta ad ABC. Se $BC = 3456\sqrt{2}$, $\widehat{BCA} = 27°$ e $\widehat{CAP} = 45°$, quanto dista B dall'ortocentro di ABC?

3. Stecche di cannella

Casa della strega. C'è una cesta con 99 stecche di cannella di lunghezze 2, 3, ..., 100. Ogni giorno Gödel inganna la strega (che crede di tastare il dito di Hensel) usando una delle stecche, diciamo lunga n. Se n è un primo Gödel mangia poi tutta la stecca. Altrimenti ne mangia una parte in modo che la nuova lunghezza $m < n$ sia massima tra quelle non coprime con n e ripone la parte rimanente nella cesta. Per quante volte la strega verrà ingannata?

4. Flauto magico [$\star$]

Il pifferaio di Hamel sapeva attirare una quantità più che numerabile di topi con il suo flauto. Un giorno arrivò in una città dove c'erano 900 topi numerati da 1 a 900, e suonò 900 canzoni. L'n-esima canzone attirava il topo m quando $m \leq n$ e $\mathrm{MCD}(m, n) = 1$. Per quali n accadeva che la canzone n attirasse un numero di topi che è divisore di n? *Si risponda indicando la somma di tali n.*

5. Specchio parlante [$\star\star$]

Pochi sanno che lo Specchio Parlante funzionava anche da calcolatrice. La Regina un giorno mostrò allo specchio un intero di quattro cifre, e chiese "Specchio, specchio, dalla magia perenne, dimmi la radice quadrata di questo numero N". Della risposta, la regina sentì solo "(brusio) virgola zero uno due tre quattro (brusio)". Quanto vale N?

6. La torre di Raperujan

La torre di Raperujan ha 2020 piani di forma triangolare che si alternano con 2019 di forma circolare. Visto dall'alto ogni piano è contenuto nel piano subito sotto e ne tocca il contorno in tre punti. I piani $2i$, $i = 0, 1, \ldots, 2019$ sono triangoli di vertici A_i, B_i, C_i con A_{i+1} contenuto nel segmento B_iC_i, B_{i+1} nel segmento A_iC_i, e C_{i+1} nel segmento A_iB_i. Il piano terra ($i = 0$) ha angolo $\frac{\pi}{4}$ in A_0. Quanto misura l'angolo in A_{2019} moltiplicato per $\frac{2^{2019}}{\pi}$? *Se il numero è razionale, si dia come risposta la somma del denominatore e della cifra delle unità del numeratore della frazione ridotta ai minimi termini; altrimenti* 9999.

7. I viaggi di Gödeller

Gödeller ha percorso in lungo e in largo la terra (che, si sa, è piatta e triangolare), visitando paesi lontani. La sua mappa è a forma di triangolo equilatero di lato 10, diviso da rette parallele ai lati in 100 triangoli equilateri di lato 1. In ogni viaggio, parte dal triangolino più in alto e arriva al triangolo centrale dell'ultima riga in basso, muovendosi solo tra triangolini aventi un lato in comune, e senza mai visitare più volte lo stesso triangolino né ritornare verso l'alto riattraversando una delle parallele orizzontali. Quanti percorsi diversi può seguire?

8. I tre Bernoullini

I tre Bernoullini si dirigono verso un terreno triangolare ABC. Tracciano una retta ℓ, che interseca AB in N e AC in M. Il quadrilatero $BCMN$ è circoscrivibile a una circonferenza: il primo Bernoullino costruisce allora una capanna di paglia, circolare e inscritta a $BCMN$. Il secondo Bernoullino costruisce una capanna circolare di legno, inscritta ad ANM. Il terzo Bernoullino prolunga il lato BC dalla parte di C, intersecando ℓ in un punto L, e costruisce una capanna circolare di mattoni, inscritta a LMC. Inaspettatamente, la capanna di paglia è tangente alle altre due. Il famelico Mene-lupo si avvicina, e osserva che $\widehat{BAC} = 56°$. Quanto vale $\widehat{BNM}$?

9. Triangoli di fiammiferi [$\star$]

I fiammiferi cadono dalle mani intirizzite della piccola fiammiferaia. In terra formano il seguente disegno: un triangolo ABC con il segmento AD, D un punto sul lato BC. I lati AB e AC misurano rispettivamente 24 e 40 fiammiferi. La piccola osserva che le bisettrici degli angoli $\widehat{ADB}$ e $\widehat{ACB}$ concorrono su AB, mentre le bisettrici di $\widehat{ADC}$ e $\widehat{ABC}$ concorrono su AC. Mentre si addormenta si chiede: quanto varrà $BD^2 + DC^2$?

10. Il cestino di mele

Cappuc-ceva Rosso vuole portare un cestino di deliziose mele alla nonna. Il suo cestino ha la forma di un cilindro a cui è stato sottratto un cono che ha per base una delle due facce circolari del cilindro e per vertice il centro dell'altra faccia. Il cilindro ha altezza 5 e raggio 12. Le mele sono identiche, di forma perfettamente sferica, e sono tali che se il loro raggio fosse più grande anche di pochissimo non ce ne starebbe neppure una all'interno del cestino. Qual è il massimo volume di mele che è possibile posizionare all'interno del cestino?

11. Un mondo fiabesco

C'erano una volta due regni lontani in uno strano mondo. Ciascun regno era la superficie laterale di uno dei due coni infiniti ottenuti dalla rotazione di una retta attorno a un'altra ad essa incidente. Ogni regno era diviso in regioni, ottenute tagliando questo strano mondo con 70 piani. Quante regioni c'erano al massimo, in tutto?

12. Una briciola d'ingegno [$\star\star$]

L'arbitrariamente piccolo Pollicino attraversa la foresta dal punto di coordinate $(0,0)$ al punto $(504,504)$, facendo 1008 passi di lunghezza 1, tutti paralleli agli assi, ogni giorno tramite una strada diversa per depistare l'Arco Cattivo. Ogni giorno, lungo la strada, Pollicino lascia una briciola di pane ogni volta che passa da un punto (m,n) tale che $n \geq m$ (inclusi il primo e l'ultimo). Un mattino, Pollicino si accorge di aver già percorso tutte le strade disponibili. Quante briciole di pane ha lasciato lungo tutti i percorsi fatti finora? *Si risponda indicando il resto della divisione di questo numero per* 2018.

13. Guidati dalle stelle

"N-esima stella a destra, e poi dritto fino al mattino." Perel Pan sta spiegando come arrivare sull'Isola che non esiste. Aggiunge: "N è un numero naturale minore di 2019. Se definiamo

$$K_N = \sqrt{N + \sqrt{N^2 + \sqrt{N^4 + \sqrt{N^8 + \sqrt{\dots}}}}},$$

si ha che $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot K_N$ è intero." Qual è la somma di tutti i possibili valori di N?

14. Mentre ingrassano

Nella loro prigione di pan di zenzero, Hensel e Gödel passavano il tempo giocando. Gödel parte dicendo un intero N tra 1 e 10000 (estremi inclusi). Poi, a turno, ognuno dei due replica con un numero maggiore di quello appena detto dal suo avversario, secondo queste regole: se il numero è pari, si può scegliere se aumentarlo di due oppure raddoppiarlo; se è dispari, si può scegliere se aumentarlo di tre oppure triplicarlo. Il primo a dire un numero maggiore di 10000 vince. Per quante possibili scelte di N Hensel ha una strategia che gli garantisce la vittoria?

15. Che asino di lupo [$\star$]

Lupo alla porta (con voce mielata): "$p(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6$". I sette capretti (in coro): "*mammina, la combinazione per aprire la porta è il resto di* $p(1) - p(2) + p(3) - p(4) + p(5) - \ldots - p(2018) + p(2019)$ *diviso per* 1010." Per loro fortuna il lupo non sa fare il conto (Fiuu…) Qual è la combinazione?

16. Materassi

Il vero motivo per cui la principessa ha dormito male con un *o-piccolo* sotto $n = 2019$ materassi: la somma delle cifre di n è multipla sia di 3 che di 4. Per questo è necessario cambiare il numero n. Per quante scelte di n tra 1 e 2019 vale questa problematica proprietà?