XXII Gara Nazionale a Squadre

Semifinale – Venerdì 7 Maggio 2021

Istruzioni Generali

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o più stelle [$\star$].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2361 \qquad \sqrt{7} = 2.6458 \qquad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio**: termine per rivolgere domande sul testo.
- **100 minuti dall'inizio**: termine della gara.

1. Basta Go!

Fibonhui e Seidue, stanchi di giocare a Go, si dedicano agli scacchi; dopo aver messo correttamente i pedoni, non si ricordano come mettere gli altri pezzi, sanno solo che la regina deve stare a sinistra del re (non per forza adiacente). Rispettando questa regola in quanti modi diversi Fibonhui può disporre i suoi pezzi? *I pezzi degli scacchi sono* 2 *alfieri,* 2 *cavalli,* 2 *torri, un re e una regina, e vanno disposti sulla prima riga di una scacchiera quadrata con* 8 *caselle per lato, uno in ogni casella.*

2. In giro per χoto

La città di χoto ha un sistema stradale particolare: dalla piazza principale partono 2021 strade rettilinee, e tutte queste finiscono sulla strada esterna, di forma circolare. Quanti percorsi posso fare partendo dalla piazza e ritornando ad essa, senza mai passare per un incrocio due volte? *La piazza è da considerarsi un incrocio.*

3. Navigazione a distanza [$\star$]

Fibonhui e Seidue giocano con la loro barchetta nella fontana del parco di χoto, un esagono regolare di lato 5 m. Hanno entrambi un radiocontrollo che fa sì che la barchetta risulti sempre a distanza 5 m da entrambi: in questo modo quando Fibonhui e Seidue sono su due vertici consecutivi dell'esagono, la barchetta si trova nel centro della fontana. Se Fibonhui cammina lungo il perimetro della fontana e Seidue cammina anch'egli sul perimetro dell'esagono, ad una distanza costante di 5 m da Fibonhui, qual è la lunghezza percorsa dalla barchetta quando Fibonhui fa un giro completo? *Rispondere il valore trovato moltiplicato per 100.*

4. Date nel futuro

L'organizzatore delle Olimpiadi di χoto ha un incubo dove sogna che la manifestazione verrà rimandata nuovamente. La nuova cerimonia di inaugurazione sarà nella data futura più vicina che rispetta le seguenti condizioni:

- non sarà in gennaio;
- il primo dell'anno in cui è prevista la cerimonia sarà un lunedì;
- il primo del mese in cui è prevista la cerimonia sarà un lunedì;
- la cerimonia si svolgerà nel secondo lunedì del mese.

Qual è questa data? *Dare come risposta* $\mathtt{g}_1\mathtt{g}_2\mathtt{m}_1\mathtt{m}_2 + \mathtt{a}_1\mathtt{a}_2\mathtt{a}_3\mathtt{a}_4$ *(le lettere indicano le cifre della data in base dieci con giorno/mese/anno:* $\mathtt{g}_1\mathtt{g}_2/\mathtt{m}_1\mathtt{m}_2/\mathtt{a}_1\mathtt{a}_2\mathtt{a}_3\mathtt{a}_4$*).*

5. Monete antiche

Il signor φyagi, nel suo piccolo, è un numismatico. Nella città di χoto esistono solo tre tipi di monete antiche:

- Satai, composta da 4 g d'oro, 4 g d'argento, 3 g di bronzo;
- Heikin, composta da 3 g d'oro, 4 g d'argento, 3 g di bronzo;
- Sadai, composta da 2 g d'oro, 2 g d'argento, 3 g di bronzo.

Dopo alcuni scambi di monete antiche tra il signor φyagi e un suo amico, quest'ultimo risulta avere x grammi d'oro, y grammi d'argento e z grammi di bronzo in più di quanto avesse in partenza. Quante sono le terne possibili (x, y, z), con x, y e z tutti strettamente positivi e strettamente minori di 10?

6. Numeri e inchini [$\star$]

Il signor φyagi è un cerimoniere del tè e ha ideato la seguente cerimonia. Egli scrive su di una lavagna un intero positivo n. Dopodiché inizia a contare ad alta voce, partendo da 1. Ogni volta che dice un numero k, se k divide il numero in quel momento scritto alla lavagna, il signor φyagi incrementa il numero scritto alla lavagna di 15 e tutti i presenti devono effettuare un inchino. Diciamo che n è *ossequioso* se, da un certo punto in poi, bisogna inchinarsi ogni volta che il signor φyagi dice un numero. Qual è il più grande intero *ossequioso* minore o uguale di 2021?

7. Giocando con gli origami

Fibonhui, appassionata di origami, decide di fare questo gioco: appoggiata su un tavolo, prende un foglio rettangolare e lo piega a metà lungo la direzione verticale, poi ancora a metà lungo la stessa direzione, e così via, per 2021 volte. Si accorge che ad ogni piega può scegliere se portare il lembo di sinistra del foglio sopra quello a destra oppure il lembo di destra del foglio sopra quello a sinistra. In questo modo, dopo aver riaperto tutto il foglio sul tavolo, esso avrà una sequenza di $2^{2021}-1$ pieghe parallele, alcune "a monte" ($\wedge$) ed altre "a valle" ($\vee$). Ripete lo stesso gioco con tanti fogli diversi. Osservando tutte le sottosequenze di 4 pieghe consecutive sui vari fogli, si chiede: quante di differenti se ne possono contare, al più?

8. Monete moderne

Nella città di χoto vi è un sistema monetario alquanto particolare: esistono tutte e sole le monete con valore un numero primo dispari. Il signor φyagi compra una ciotola di ramen, e si accorge che nessuna combinazione di monete gli permetterà di pagarlo esattamente senza ricevere del resto. Quanto costa il ramen al massimo?

9. Incontri di summo

Prima di affrontarsi sul dohyō, i lottatori di summo eseguono alcune mosse rituali. Viene scelto un punto X del piano e si applica la trasformazione T_X, che manda X in sé e ogni punto P distinto da X in P' secondo la seguente costruzione: P' è il punto della circonferenza di diametro XP tale che l'arco PP', percorso in senso antioriario, descrive un angolo al centro di $90°$. La trasformazione può essere applicata più di una volta, se i tenjin (gli spiriti) sono benevoli; se però T_X viene applicata una volta di troppo, i tenjin si arrabbiano e l'incontro non può essere disputato.

Per il primo incontro di summo di quest'anno viene scelto come X un vertice di un 2021-agono regolare di area 2021!. Quante volte al massimo può essere applicata T_X, sapendo che i tenjin saranno benevoli fintantoché l'area del poligono rimane un numero intero? *Il simbolo* 2021! *indica il fattoriale di* 2021.

10. Un miele squisito

Nel quartiere di Ginzeta da secoli si tramanda una tecnica per produrre il miele in città: bisogna predisporre 13 alberi di mandarino in fila, ognuno distante dagli adiacenti esattamente 2. In ognuno di questi alberi c'è un alveare con probabilità $\frac{1}{2}$ indipendentemente dagli altri alberi. Gli apicoltori, per ogni alveare, possono modificare il raggio d'azione delle api di quell'alveare con particolari tecniche tramandate da secoli: api aventi raggio d'azione r arrivano in tutti gli alberi che distano meno di r dal proprio alveare. Per ottenere il miele migliore possibile, bisogna predisporre i raggi d'azione degli alveari presenti in modo tale che:

- il raggio d'azione di ogni alveare sia un intero positivo dispari;
- il primo e l'ultimo albero non vengano raggiunti da api;
- in ogni albero diverso dal primo e l'ultimo arrivino api che provengono esattamente da un solo alveare.

Calcolare la probabilità che, modificando opportunamente i raggi d'azione, sia possibile ottenere il miglior miele. *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

11. Fioritura dei ciliegi

Nel parco di della città di χoto, si trovano 10 000 alberi di ciliegio: inoltre, per ogni naturale n tale che $0 \leq n < 10\,000$ esiste esattamente un albero di ciliegio nel parco che risulta avere n foglie. Un ciliegio con n foglie fiorisce se e solo se per ogni $y \in \mathbb{R}$ si ha

$$n \cdot (90-n) \leq (2021-n) \cdot y^2$$

Quanti sono i ciliegi del parco di χoto che fioriscono?

12. Uguaglianze zen [$\star\star$]

Il giardino zen di Fibonhui ha la forma di un quadrilatero convesso $ABCD$ tale che $AB = 84\,\mathrm{m}$ e $CD = 140\,\mathrm{m}$. Per ammirarne l'armonia, Fibonhui si mette in P, punto d'incontro di AC e BD. Ella sa che $\widehat{BAP} = \widehat{PAD}$ e $\widehat{CDP} = \widehat{PDA}$; si accorge inoltre che P, il punto in cui si trova, è equidistante da B e da C. Quanto vale, in metri, tale lunghezza?

13. Benvenuto a Toχo, PhiPhi

PhiPhi è un panda arrivato da poco nello zoo di Toχo: il primo giorno ha mangiato una canna di bambù, il secondo ne ha mangiate due, il terzo ne ha mangiate tre. Dal quarto giorno in poi, nel giorno n, PhiPhi ha mangiato una canna di bambù in più rispetto al giorno $n-3$.

Determinare per quali n risulta che al termine del giorno n il totale di canne di bambù mangiate in giorni pari fino a quel momento è uguale al totale di canne di bambù mangiate in giorni dispari fino a quel momento. *Dare come risposta la somma di tutti i possibili valori di n con $n \leq 2021$.*

14. Scatole inscatolate

Fibonhui e Seidue fanno un gioco. Fibonhui sceglie a caso 3 numeri distinti n_1, n_2, n_3 dall'insieme $\{1, 2, \ldots, 2021\}$ e costruisce una scatola di dimensioni n_1, n_2, n_3 a forma di parallelepipedo. Seidue fa lo stesso selezionando m_1, m_2, m_3 (sempre a caso e distinti) dai 2018 rimanenti. Fibonhui vince se una delle due scatole può essere inserita all'interno dell'altra (con le facce parallele all'altra e totalmente contenuta al suo interno). Qual è la probabilità di vittoria di Fibonhui? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

15. Rapporti tra raggi

Fibonhui sta mangiando del sushi: guarda desolata il piatto in cui sono rimasti solo un uramaki e un maki, che vede dall'alto come due circonferenze, rispettivamente Γ (di raggio R) e γ (di raggio $r < R$), tangenti in T. Inoltre il ripieno dell'uramaki può essere rappresentato anch'esso da una circonferenza Γ_i, concentrica a Γ e di raggio $R_i < R$. Nota la seguente curiosità: chiamando P e P' i punti di tangenza di Γ con le due tangenti comuni di Γ e γ che non passano per T, risulta che PP' è tangente a Γ_i. Sapendo che $R_i/R = \sqrt{3/5}$, quanto vale la somma $\frac{R}{r} + \frac{r}{R}$?

16. Un buon auspicio

Per ottenere eterna fortuna, il signor φyagi costruisce molte gru piegando fogli di carta: per l'esattezza, una per ogni numero di 4 cifre che abbia come somma delle cifre 19. Quante sono?

17. Allenamento di un samatemurai

Il grande samatemurai Yakobi allena la propria resistenza, fisica e matematica, in una radura di forma circolare, lungo la cui circonferenza sono cresciuti 2000 alberi in altrettanti punti equispaziati. Yakobi fa così: sceglie un albero, con la sua kartana incide sul tronco il numero 1, poi, in verso orario, salta 1 albero, e sul successivo incide il 2, salta 2 alberi, e sul successivo incide il 3, salta 3 alberi, e sul successivo incide il 4, e così via finché tutti i numeri fino al 2021 sono stati scritti (anche più di uno sullo stesso albero). Qual è il massimo $n < 2021$ tale che n è scritto sullo stesso albero su cui è inciso 2021?

18. Matemeowtica [$\star\star$]

L'isola di Aoshimura è famosa per essere abitata da una numerosa colonia felina. Fibonhui vi si reca spesso: un certo numero di gatti la ascolta attentamente mentre parla di matematica. Fibonhui ha notato che il numero di felini che si raduna attorno a lei è uguale al numero di coefficienti dispari nel polinomio $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^{10}$. Quanti sono?