XVIII Gara Nazionale a Squadre

Semifinale A – 5 Maggio 2017

olimpiadi.dm.unibo.it
www.oliforum.it
www.facebook.com/EGMO2018

Istruzioni Generali

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- **Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.**
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una stella [$\star$].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2361 \qquad \sqrt{7} = 2.6458 \qquad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio**: termine per rivolgere domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio**: termine della gara.

1. L'incontro

Nel Maggio di moltissimi anni fa, diversi matematici si ritrovarono in una locanda; si accorsero subito di essere esattamente tanti quanti gli interi n, compresi tra 100 e 10000, tali che il loro fattoriale $n!$ è un multiplo di 2^{n-1}. Dopo essersi contati, decisero che erano nel giusto numero per intraprendere il pellegrinaggio alla tomba di Archimede. Quanti erano?

2. L'inno

Uno dei matematici era anche un musicista, e decise di comporre una sonata per allietare i suoi compagni. Ha a disposizione 12 note distinte (tra cui, ma ovviamente non solo, ut, re, mi, fa, sol, la, si) e vuole che nella sua composizione ognuna compaia esattamente una volta. Inoltre si accorge che alcune sequenze sono più armoniose delle altre; in particolare quelle in cui l'ut compare prima del mi (non necessariamente subito prima), re, sol e si compaiono in quest'ordine (non per forza consecutivamente) e il fa è tra le prime 3 note. Detto n il numero di composizioni armoniose e m il numero totale di composizioni possibili, dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione $\frac{n}{m}$ ridotta ai minimi termini.

3. Un libro enorme

Appena iniziato il viaggio, i pellegrini si misero subito a parlare dei loro testi preferiti: l'*Arithmetica*, gli *Elementi*, etc. Uno di loro esclamò: "Sapete che conosco un monaco amanuense? Una volta si mise a scrivere un libro contenente tutte le parole di 2015 lettere, composte da esattamente 13 'A' e 2002 'B'; in ogni pagina tranne l'ultima ci sono esattamente 2017 parole. Riuscite a calcolare quante parole ci sono nell'ultima pagina del libro?". Gli altri matematici risposero prontamente.

4. [$\star$] L'armonia delle sfere

"Gli alchimisti", pontificava uno di loro, "consideravano armoniosi gli interi positivi che si potevano scrivere come somma di un intero positivo x, di un intero positivo y multiplo di x, e di un intero positivo z multiplo di y. Tutti diversi tra loro, ovviamente. Sapreste dirmi quanto vale la somma di tutti i numeri interi minori di 10000 che **non** sono armoniosi?"

5. Addestramento

Lungo il tragitto i pellegrini si trovarono nei pressi di un campo d'addestramento, nel quale alcuni soldati si allenavano a gruppetti, di dimensioni tutte diverse; notarono subito che il minimo comune multiplo della dimensione dei vari gruppetti era esattamente 160. Quante sono le possibili suddivisioni che essi possono aver visto?

6. La migliore arma d'assedio

Passando di fianco ad un castello distrutto, uno dei pellegrini disse: "Io mi occupo anche di costruire macchine da guerra, e questo castello è sicuramente stato abbattuto da un trabucco. Quelli che progetto io sono in grado di scagliare massi di $90\,\mathrm{kg}$ in un qualunque punto di una figura pentagonale avente 3 lati consecutivi che misurano x metri, e i due angoli tra loro compresi che misurano $120°$; gli altri due lati misurano $2x$ metri ciascuno. Sapendo che l'area del pentagono è di $44800\sqrt{3}\mathrm{m}^2$, quanto vale x?"

7. Peste nera

"La peste del 1347 ha davvero ucciso moltissime persone", osservò uno dei pellegrini. "Ne ho studiato attentamente la diffusione e ho scoperto che se chiamiamo a_n le persone infette al giorno n dall'inizio dell'epidemia, vale $a_n = a_{n-1} + 9a_{n-2} + 9^2 a_{n-3} + \cdots + 9^{n-1} a_0$ per $n \geq 1$. Sapendo che $a_0 = 2017$, quante cifre ha il numero di persone infette al giorno 2017?"

8. [$\star$] L'ISCRIZIONE
I pellegrini giunsero innanzi a un'antica iscrizione che si leggeva a malapena; uno di loro, studioso di latino, la tradusse: "il rapporto tra i due numeri interi positivi è $0,2017\ldots$"; i decimali successivi al sette erano però cancellati dal tempo e illeggibili. Quanto vale, al minimo, la somma di tali due numeri?

9. CODICI SEGRETI
"I cavalieri templari sono un ordine che nasconde molti segreti" affermò un viaggiatore. "Sono venuto a contatto con uno dei loro sistemi di cifratura, che consisteva nel trovare la minima base b intera positiva in cui il numero $\frac{5445469}{5445468}$ si scrive con un numero finito di cifre dopo la virgola. Ovviamente l'ho risolto subito, e ho scoperto che b valeva..." *Numeratore e denominatore sono scritti in base* 10.

10. STRUMENTI DI TORTURA
Discutendo di religione, uno dei matematici si mise a descrivere un complicato strumento di tortura dell'inquisizione spagnola: partendo da un cubo di lato $568\,\mathrm{mm}$, su ogni faccia viene incollata una piramide a base quadrata -coincidente con la faccia del cubo- e le cui facce laterali sono triangoli equilateri. "Ma è orribile!" disse inorridito un altro "Però ha una forma davvero interessante, mi chiedo quanto sia lungo in millimetri il percorso minimo che unisce due vertici opposti qualunque del solido muovendosi sulla sola superficie..." *Nota: due vertici si dicono opposti se sono simmetrici rispetto al centro del cubo.*

11. [$\star$] INVENZIONI FUTURISTICHE
Il percorso passava vicino alla città di Vinci, così uno dei pellegrini propose di passare a salutare un suo amico, Leonardo. Questi mostrò loro un apparecchio rivoluzionario: nel futuro si sarebbe chiamato "orologio digitale", diceva. Mostrava infatti ore e minuti utilizzando quattro cifre decimali nella forma $\mathrm{ab}:\mathrm{cd}$ (dalle $00:00$ alle $23:59$). "Dato che siete matematici", disse Leonardo "perché non mi dite quante volte nell'arco della giornata accade che $\mathrm{abcd} = k \cdot \mathrm{ab} \cdot \mathrm{cd}$, per un qualche intero k?" *Con* abcd *si intende il numero decimale composto dalle quattro cifre* $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}$*, e similmente per* ab *e* cd.

12. SCACCHIERA INCOMPLETA
Giunti ad una locanda lungo il cammino, dopo essersi ristorati, uno dei viandanti tirò fuori una scacchiera da viaggio: era composta da 4 scacchiere 5×5 che composte insieme formavano una scacchiera 10×10; mentre la stava montando, in particolare quando mancava solo il quadrante in basso a destra, si fermò a guardare quella figura a forma di L rovesciata e si chiese: "Quanti saranno i percorsi che portano dalla casella in basso a sinistra a quella in alto a destra?". Un matematico rispose: "Infiniti ovviamente! Però se aggiungiamo l'ipotesi che ci si può muovere solo verso l'alto o verso destra, diventa un problema non banale. Qual è la sua soluzione?"

13. [$\star$] SORTITE CASUALI
"Io ho studiato attentamente le strategie militari delle crociate", affermò uno dei pellegrini, appena ebbero superato il campo di addestramento. "In particolare, durante l'assedio di Gerusalemme ogni giorno gli arabi tentavano una sortita da una delle quattro diverse porte della città, situate nei quattro punti cardinali. Il primo giorno di assedio usarono la porta a Nord, e dal secondo giorno adottarono uno stratagemma particolare per disorientare l'esercito di Goffredo di Buglione: all'alba tiravano una moneta, e se fosse uscita testa sarebbero usciti dalla stessa porta del giorno precedente, altrimenti da quella successiva in senso antiorario. (la successione è quindi Nord-Ovest-Sud-Est)". Qual è la probabilità che il 52-esimo giorno di assedio gli arabi prendano la porta a Nord? *Dare come risposta le ultime quattro cifre della somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

14. CURIOSI POLINOMI
Uno dei matematici rivelò agli altri che stava studiando i polinomi, nella speranza di trovare una formula per il terzo grado. "Durante il mio lavoro, mi sono imbattuto in certi polinomi molto particolari: se chiamiamo n la somma dei coefficienti di $p(x)$, allora $p(2017) = n!$. Qual è il più grande n minore di 10000 tale per cui esista un polinomio p a coefficienti interi che soddisfi queste condizioni?".

15. [$\star$] LA GIOSTRA
"Il sovrano del mio paese mi ha chiesto di progettare un recinto per un torneo molto particolare" disse un matematico. "Vuole che la zona principale sia un trapezio $ABCD$, con base maggiore AB, circoscritto a una circonferenza Γ di raggio R; vi è poi un'area secondaria costruita prendendo un punto E sul prolungamento di CD dalla parte di C, esterno al segmento CD, e disegnando la circonferenza inscritta al triangolo $\triangle CEB$ di raggio r. Tutto questo deve seguire una ben precisa proporzione: detto F il punto di intersezione delle rette AD e BC, deve valere $R : r = AF : BE = 2$. In quanti modi posso scegliere dei valori interi per le lunghezze AB e BF in modo che $1 \leq BF < AB \leq 53$?"

16. INCISIONI SULLA LAPIDE
Giunti finalmente a destinazione, i nostri pellegrini trovarono la tomba di Archimede, sulla cui lapide era inciso un eptagono regolare $ABCDEFG$ di centro O. Con grande disappunto videro che l'incisione era stata vandalizzata con alcune righe: il vandalo aveva preso il punto X simmetrico di D rispetto alla retta BG, poi aveva intersecato le rette XB e GO in Y. Tuttavia osservarono che l'angolo convesso $\angle CYG$ aveva un valore interessante se espresso in gradi. Quant'è tale numero? *Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*