



## Istruzioni Generali

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- **Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.**
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o più stelle [★].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

## Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio:** termine per rivolgere domande sul testo.
- **120 minuti dall'inizio:** termine della gara.

### 1. Con le mani coordinate

Elpha, la primogenita del re e della regina di Arrotondale, scoprì fin da giovanissima di avere poteri matematici: sapeva controllare il ghiaccio, e usarlo per risolvere con un gesto delle mani problemi di geometria. Congiungendo i palmi, evoca un triangolo  $ABC$  con i lati lunghi  $AB = 5$ ,  $BC = 12$ , e  $CA = \sqrt{97}$ . Poi muove le dita e piazza un cristallo di ghiaccio nel punto medio  $M$  di  $BC$  e nell'intersezione  $P$  tra la mediana  $AM$  e la bisettrice di  $\angle ABC$ . Infine fa cadere una coltre di neve sul triangolo  $PBM$ . Quanto vale l'area della superficie ricoperta di neve? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

### 2. L'alto pupazzo [★]

«Facciamo un pupazzo di neve?» chiede Ganna a Elpha. «Va bene,» risponde la sorella «ma deve essere gigantesco!» E così, con un movimento repentino della mano il pupazzo di neve prende forma. Visto in sezione, questo appare come 2020 cerchi  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{2020}$ , tali che ciascuno è tangente esternamente al successivo, e con la seguente proprietà: per ogni  $i$  con  $2 \leq i \leq 2019$ , le tangenti comuni esterne di  $\Gamma_i$  e  $\Gamma_{i+1}$  si intersecano nel centro di  $\Gamma_{i-1}$ . Sapendo che i raggi di  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  sono entrambi uguali a 1, quanto vale il raggio di  $\Gamma_{2020}$ ?

### 3. I problemi del pupazzo

Appena creato, il pupazzo di neve comincia a vaneggiare sparando problemi a raffica: per esempio, esclama «Siano  $(x_i, y_i)$ , per  $i = 1, 2, \dots, k$ , tutte le coppie ordinate di interi positivi che soddisfano  $x^x + y^y + 11 = 13x^y y^x$ .» «Che carino! Lo chiamerò Olaforum, con tutti questi problemi», decide Ganna. Ma il pupazzo la ignora e continua: «Quanto vale il prodotto di tutti gli  $x_i^2 + y_i^2$ ?»

### 4. Passatempi da principesse

Ganna rimpiange il tempo in cui poteva giocare spensierata con la sorella Elpha, prima della scoperta dei suoi prodigiosi poteri. In uno dei loro giochi preferiti, avevano due pile con rispettivamente 2020 e 2021 monete. Ad ogni mossa Ganna sceglieva una pila e toglieva alcune monete da essa, mentre Elpha calcolava il prodotto del numero delle monete tolte per il numero delle monete nella pila non scelta. Quanto poteva valere, al massimo, la somma di tutti questi prodotti?

### 5. Pavimento colorato

Il pavimento della stanza del castello dove Elpha è tenuta nascosta ha una peculiare colorazione: esso appare come una scacchiera  $9 \times 9$  tale che, se si numerano le righe e le colonne da 1 a 9, le caselle con le coordinate entrambe dispari sono blu, e le restanti sono bianche. Elpha, per passare il tempo, si diverte a cercare modi fantasiosi di camminare sul pavimento. Questa volta, decide di partire dalla casella di coordinate  $(1, 1)$ , posta in basso a sinistra, e di muoversi sempre da una casella a una adiacente andando in alto o a destra. Si ferma poi su un'altra casella blu, diversa da quella di partenza. Quanti sono i percorsi che può aver seguito? *Ogni percorso può contenere anche altre caselle blu oltre a quella finale.*

### 6. Strette di mano a suon di musica

All'incoronazione di Elpha segue una sfarzosa serata di balli nel salone del maniero di Arrotondale. In una delle danze, 15 ballerini si dispongono su 5 file, in modo che ogni fila abbia un numero diverso di persone e ogni fila contenga almeno una persona. Durante i movimenti del ballo ogni persona stringe la mano a tutte le persone

che stanno nelle file adiacenti alla sua (le persone nella prima e nell'ultima fila stringono le mani alle persone di una sola altra fila). Quante sono, al più, le strette di mano?

### 7. Colpo di fulmine

Al ballo dell'incoronazione di Elpha, Ganna si è presa una cotta per il principe Hahn! Ha riempito pagine e pagine del suo diario su di lui. Quante? Un quadrato perfetto che si scrive in base 10 come  $ABBA9$  (con la cifra  $A \neq 0$ ). Quanto vale il numero di due cifre che si scrive in base 10 come  $AB$ ? *Rispondere con la somma di tutti i possibili valori che  $AB$  può assumere. Le cifre  $A$  e  $B$  non sono necessariamente distinte.*

### 8. Spartizione di territorio [★]

All'incoronazione di Elpha, il duca di Besselton non rinuncia a tessere le sue trame politiche. Ha portato una mappa che raffigura un territorio circolare di 10000 miglia di diametro, su cui sono segnate con dei punti le capitali degli otto regni del mondo conosciuto. Il duca propone che i confini vengano modificati in modo che ogni regno sia composto da tutti e soli i punti che sono più vicini alla propria capitale che a una delle altre sette. In questo modo, il regno di Besselton e quello di Arrotondale avrebbero la forma di due quadrati congruenti con un lato in comune, interamente contenuti nella mappa. Quante miglia misura, al massimo, tale lato?

### 9. Meglio la moneta unica [★]

Nel regno di Arrotondale sono in uso solo tre tipi di monete, ognuna che vale un numero intero positivo di corone. Detti  $x, y$  e  $z$  i loro valori, si ha che almeno uno di essi è primo, che  $x + y + z = 112$ , e che  $x > (y + 1)(z + 1)$ . Purtroppo, ci sono 20 interi positivi  $N$  tali che non è possibile formare un insieme di monete che valga esattamente  $N$  corone. Questo fatto rende più complicato il commercio e danneggia l'economia del regno. Quali sono i valori delle tre monete? *Si risponda indicando il prodotto  $xyz$ .*

### 10. Fuga dal palazzo

L'incoronazione è stata un disastro! Tutti hanno scoperto i poteri di Elpha, e lei scappa spaventata. La pianta del palazzo è un quadrato formato da  $5 \times 5$  caselle colorate a scacchiera. Elpha si trova nella casella nera centrale, e vuole scappare con mosse che vanno da una casella a una di quelle adiacenti (in orizzontale o in verticale), fino a raggiungere una delle quattro caselle d'angolo. Per evitare nobili e soldati, ad ogni mossa cambia direzione (da orizzontale a verticale e viceversa), e non ripassa mai due volte dalla stessa casella nera, in particolare non tornando mai nella casella centrale. Quanti percorsi diversi può fare? *È invece permesso passare più volte su una stessa casella bianca. È permesso anche passare da una casella d'angolo senza fermarsi e proseguire fino a raggiungerne un'altra.*

### 11. Tanto lavoro per nulla

Kristoffel vende blocchi di ghiaccio per vivere. Sulla sua slitta, tirata dalla fida renna Venn, ha già un numero primo  $p$  di blocchi, e oggi lo aspetta una giornata di lavoro di  $n$  ore. Ogni ora taglia dalla montagna un numero di blocchi pari al numero di ore di lavoro mancanti alla fine della giornata di lavoro (quindi nell'ultima ora 0 blocchi). Però, contemporaneamente, nella  $k$ -esima ora esattamente  $k^2$  blocchi si sciolgono e vanno perduti, per  $k = 1, \dots, n$ . Alla fine della giornata, Kristoffel guarda desolato la sua slitta e vede che l'ultimo blocco sta finendo di sciogliersi proprio ora e non ne è rimasto neppure uno! Quanto valgono  $n$  e  $p$ ? *Rispondere con la somma di tutti i valori possibili per  $n + p$ . Si ricorda che 1 non è un numero primo.*

### 12. Il lato spezzato

Ganna ha incontrato Kristoffel, che è la persona giusta per aiutarla a trovare la sorella Elpha: conosce la foresta come le sue tasche. Essa ha la forma di un quadrilatero convesso  $ABCD$ , con  $\angle ABC = 90^\circ$ . Ganna si trova ora in un punto  $F$  interno al segmento  $AB$ , tale che  $\angle ADF = 90^\circ$ ,  $\angle FDB = \angle BAC$ . Kristoffel, sapendo che  $AB = 232$ ,  $DF = 138$ ,  $FC = 64$ , sa calcolare al volo la differenza delle misure dei segmenti  $AF$  e  $BF$ . Quanto vale?

### 13. Mentre gli anni passano

Il generale Matiyasevich è rimasto bloccato con la sua truppa per lunghi anni nella Foresta Incantata, ma non ha mai rinunciato a far allenare i suoi 2020 soldati. Ogni giorno, forma due squadre, una all'attacco e una alla difesa (non per forza con lo stesso numero di soldati), e le fa combattere. Ognuna delle due squadre deve contenere almeno un soldato, e non è necessario che ogni giorno tutti i soldati siano impegnati. Quanti allenamenti diversi possono fare in questo modo? *Un allenamento si considera ripetuto se ha lo stesso sottoinsieme di soldati all'attacco e lo stesso sottoinsieme alla difesa. Detto  $N$  il numero di allenamenti, indicare nelle quattro cifre della risposta da sinistra a destra il resto della divisione di  $N$  per 3, 4, 5, 7.*

### 14. Connessi da un triangolo [★]

Kristoffel e Ganna stanno setacciando la foresta per trovare dove si è nascosta Elpha. La stanno cercando muovendosi all'interno di un'area innevata a forma di rettangolo  $ABCD$ , con  $AB = 40$  e  $BC = 10$ . Non l'hanno ancora trovata, però c'è stato un momento in cui le loro tre posizioni formavano un triangolo equilatero: in

quel momento Kristoffel si trovava in un punto del rettangolo distante meno di 10 da  $BC$  e Ganna in un punto del rettangolo distante meno di 10 da  $AD$ . Quanto vale l'area della regione in cui può trovarsi Elpha in base a questa informazione? *Il punto in cui si trova Elpha non si trova necessariamente all'interno del rettangolo innevato.*

### 15. Biliardo con il dardo

Elpha si trova nel suo palazzo di ghiaccio, in un vertice di una stanza rettangolare con i lati di lunghezza 1 e  $\sqrt{2}$ . Scorge i due soldati ingaggiati dal principe Hahn per ucciderla, e scaglia un dardo di ghiaccio lungo la bisettrice uscente dal vertice. Il dardo raggiunge il lato opposto, che chiameremo  $\ell$ , e rimbalza perfettamente. Rimbalza poi molte altre volte colpendo tutte le pareti della stanza. Dopo il 2415esimo rimbalzo, sfortunatamente il dardo colpisce Ganna al cuore, congelandola immediatamente. Quanti tra questi 2415 rimbalzi sono avvenuti sul lato  $\ell$ ?

### 16. Triangolo gigante [★★]

La Foresta Incantata è un luogo di trasformazione, ma anche un luogo a forma di triangolo  $ABC$ , il cui lato  $AB$  coincide con una possente diga. Nel tentativo di colpire Ganna, un gigante di ghiaccio scaglia un macigno che si abbatte sulla diga nel punto  $P \in AB$ . Detti  $X$  il centro della circonferenza circoscritta ad  $APC$  e  $Y$  il centro della circonferenza circoscritta a  $BPC$ , il gigante si trova nell'intersezione  $Z$  delle rette  $AX$  e  $BY$ . Sapendo che  $AB = 91$ ,  $BC = 104$ ,  $CA = 65$  e che  $AX = 35$ , qual è la lunghezza di  $CZ$ ?

### 17. Alla ricerca di risposte [★]

«Ganna? Elpha? Stampacchia?» esclama Olaforum vagando nella foresta. È diventato grande e saggio, e mentre cammina pondera i grandi interrogativi dell'esistenza. Ad esempio: detto  $F_k$  il  $k$ -esimo numero di Fibonacci, quante sono le coppie di interi  $(n, m)$  con  $0 \leq n, m \leq 2016$  tali che esista un intero non negativo  $a$  per il quale  $F_n \cdot F_m = F_a$ ? *Ricordiamo che i numeri di Fibonacci sono definiti ricorsivamente come  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$ ,  $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$  per  $k \geq 0$ .*

### 18. Pozioni benefiche e pozioni malefiche [★]

Nel tentativo di curare Ganna, il re dei troll Grampapà rispolvera tutte le  $2^{128} - 1$  pozioni magiche che può formare combinando i suoi 128 ingredienti. Di queste, alcune sono benefiche e le altre sono malefiche (a parte quella formata da tutti gli ingredienti, che per qualche antica magia è sia benefica che malefica). Combinare tra loro due pozioni benefiche ne produce una benefica, e combinare tra loro due pozioni malefiche una malefica. Inoltre, se una pozione è benefica, la pozione formata da tutti gli ingredienti non inclusi in essa è malefica, e viceversa. Grampapà non sa quali pozioni sono benefiche e quali malefiche, ma può scoprire l'effetto di una pozione distillandola. Vuole scoprire esattamente quali pozioni sono benefiche e quali malefiche, distillando il minor numero possibile di pozioni. Quante ne serviranno?

### 19. Sommatoria in binario

«Solo un atto di vero amore può sciogliere un cuore di ghiaccio». Invece, per un cervello di ghiaccio un rimedio efficace potrebbe essere cimentarsi con il seguente problema. Siano  $z(n)$  e  $u(n)$  due funzioni che restituiscono rispettivamente il numero di zeri e di uni nella scrittura in base 2 del numero  $n$ , e sia  $f(n) = (-1)^{z(n)} / 2^{u(n)}$ . Per esempio, quindi,  $f(13) = f(1101_2) = (-1)^1 / 2^3 = -1/8$ , mentre  $f(17) = f(10001_2) = (-1)^3 / 2^2 = -1/4$ . Calcolare quanto vale la somma  $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(1023)$ . *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

### 20. Un problema di amore vero [★★]

Quale atto di vero amore maggiore di risolvere per Ganna un problema con due stelline? Kristoffel non sarà certo il principe dei matematici, ma a differenza di Hahn ama Ganna, e come simbolo del suo amore è riuscito nell'impresa. Il problema che ha risolto è questo: sia  $a_n$  una successione di interi positivi distinti tale che  $a_1 = 3$  e  $a_{2020} < 350000$ . È noto che  $\text{MCD}(a_n, a_m) = a_{\text{MCD}(n, m)}$  per ogni  $m, n$ . Sia  $N$  il minimo valore possibile per  $a_{2020}$ ; sia invece  $M$  il massimo valore possibile di  $a_{2020}$  supponendo che  $a_{3030} = 50337$ . Sulle guance di Ganna ricomincia a tornare la vita, mentre Kristoffel scrive sul cartellino delle risposte le ultime 4 cifre di  $N + M \dots$

### 21. Fino al secondo film

Così, Elpha ritorna ad Arrotondale, e Ganna e Kristoffel coronano il loro sogno d'amore, vivendo felici e contenti per tantissimi anni; per la precisione  $n = 1 + 11 + 111 + \dots + 111 \dots 111$ , dove l'ultimo addendo ha 2020 uni. Quanto vale la parte intera di  $10^{2023}/n$ ?