

Proyecto de Ampliación: Planta Ensambladora de Motocicletas

Pronóstico de Demanda y Planificación de Inventario Mediante Mínimos Cuadrados y Análisis de Incertidumbre

Juan Andrés Rojas – Esteban Ibarra
Universidad Tecnológica
Curso de Álgebra Lineal
2º Semestre

Mayo 27, 2025

Resumen

Este trabajo utiliza el método de mínimos cuadrados para **pronosticar la demanda y planificar el inventario** de MotoTec. A partir de datos históricos de ventas (2013–2022) de cuatro tipos de motocicletas, se proyectan ventas (2023–2027) y se estiman necesidades de componentes. Incluye métricas de ajuste (ECM, R^2), un **modelo global (hiperplano)**, **intervalos de predicción** y una **simulación de Monte Carlo** para analizar incertidumbre. El repositorio con el código completo está en GitHub.

1. Introducción

MotoTec enfrenta volatilidad en la demanda y alta dependencia de componentes importados (70 % de Asia). El objetivo es **reducir inventario en un 25 %** sin afectar producción. Aplicamos **métodos de mínimos cuadrados** para:

1. Pronosticar ventas de cuatro familias de motos (urbanas, turismo, off-road, eléctricas) para 2023–2027.
2. Calcular necesidades de 10 componentes clave por año.
3. Cuantificar incertidumbre mediante un **modelo global** y **simulación de Monte Carlo**.

2. Marco Teórico

2.1. Matriz y Mínimos Cuadrados

Una **matriz** A organiza datos (ventas vs. tiempo). El método de **mínimos cuadrados** resuelve

$$A\mathbf{x} \approx \mathbf{b}$$

minimizando la suma de cuadrados de residuos. Si $A^T A$ es invertible, la solución es

$$\mathbf{x}^* = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}.$$

Si no lo fuera, se emplea la **pseudoinversa de Moore–Penrose** A^+ .

2.2. Regresión Lineal Simple

Modelamos las ventas $S(t)$ como

$$S(t) = \beta_0 + \beta_1 t,$$

donde t es el índice de año (1 para 2013, \dots , 10 para 2022). A partir de los datos históricos se calculan (β_0, β_1) y luego se proyecta para $t = 11, \dots, 15$ (2023–2027).

3. Datos y Metodología

3.1. Datos Históricos

Ventas anuales de 2013 a 2022 para cuatro tipos de motos (unidades):

Cuadro 1: Historial de ventas (2013–2022).

Año (t)	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4
1 (2013)	172	89	18	28
2 (2014)	185	116	49	33
3 (2015)	202	155	98	49
4 (2016)	225	188	96	44
5 (2017)	252	200	148	59
6 (2018)	286	199	173	72
7 (2019)	316	240	204	70
8 (2020)	342	245	235	96
9 (2021)	371	280	266	140
10 (2022)	402	302	297	250

3.2. Matriz de Componentes

Cada moto requiere 10 componentes, detallados en la Tabla 2. La matriz $C \in \mathbb{R}^{10 \times 4}$ especifica las unidades de cada componente por moto.

Cuadro 2: Matriz de componentes (unidades por tipo de moto).

Componente	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4
1	1	1	1	0
2	2	0	1	1
3	0	0	0	1
4	0	0	0	1
5	0	0	1	0
6	3	2	0	0
7	1	4	0	0
8	5	2	0	1
9	1	1	2	0
10	1	1	0	0

4. Resultados

4.1. Modelos de Regresión Individual

Para cada tipo $i = 1, 4$, se construyó la matriz de diseño

$$A = [\mathbf{1} \mid t] \in \mathbb{R}^{10 \times 2}$$

y se estimó

$$(\beta_0^{(i)}, \beta_1^{(i)}).$$

Los resultados finales (coeficientes, ECM, R^2) se muestran en la Tabla 3.

Cuadro 3: Coeficientes, ECM y R^2 por tipo de moto.

Tipo	β_0	β_1	Modelo $S(t)$	ECM	R^2
1	129.33	26.54	$129,33 + 26,54 t$	59.41	0.99
2	79.07	22.24	$79,07 + 22,24 t$	114.16	0.97
3	-10.40	30.69	$-10,40 + 30,69 t$	56.90	0.99
4	-18.33	18.62	$-18,33 + 18,62 t$	1174.68	0.71

4.2. Ventas Pronosticadas (2023–2027)

Usando cada modelo, se proyectaron ventas para $t = 11 \dots 15$. La Tabla 4 muestra los valores redondeados.

Cuadro 4: Ventas pronosticadas (unidades) 2023–2027.

Tipo	2023 ($t = 11$)	2024 ($t = 12$)	2025 ($t = 13$)	2026 ($t = 14$)	2027 ($t = 15$)
1	421	448	474	501	527
2	324	346	368	390	413
3	327	358	389	419	450
4	187	205	224	242	261

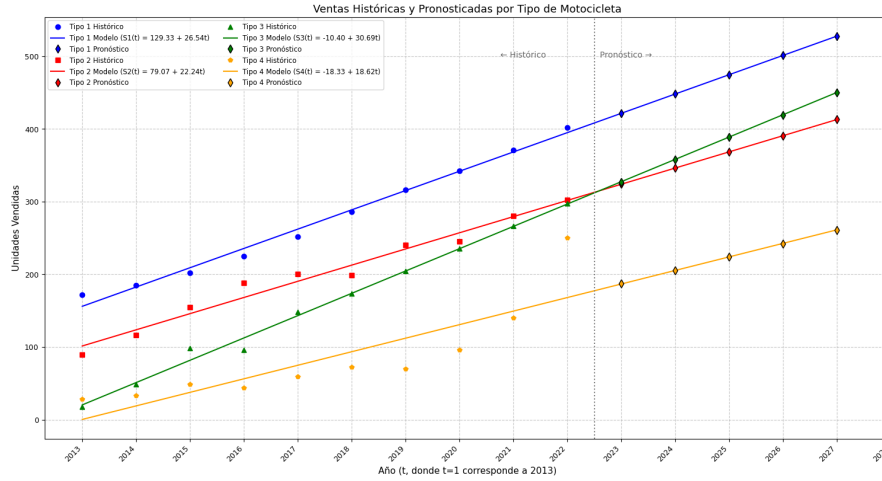


Figura 1: Ventas históricas (2013–2022), modelos ajustados y pronósticos (2023–2027) por tipo de moto.

4.3. Estimación Inicial de Componentes

Multiplicando la matriz C por los vectores de ventas proyectadas para 2024 ($t = 12$) y 2025 ($t = 13$) (método *directo*), se obtienen las necesidades mostradas en la Tabla 5.

Cuadro 5: Componentes requeridos (redondeado) para 2024 y 2025 (método directo).

Componente	Req. 2024	Req. 2025
1	1152	1231
2	1459	1561
3	205	224
4	205	224
5	358	389
6	2036	2158
7	1832	1946
8	3137	3330
9	1510	1620
10	794	842

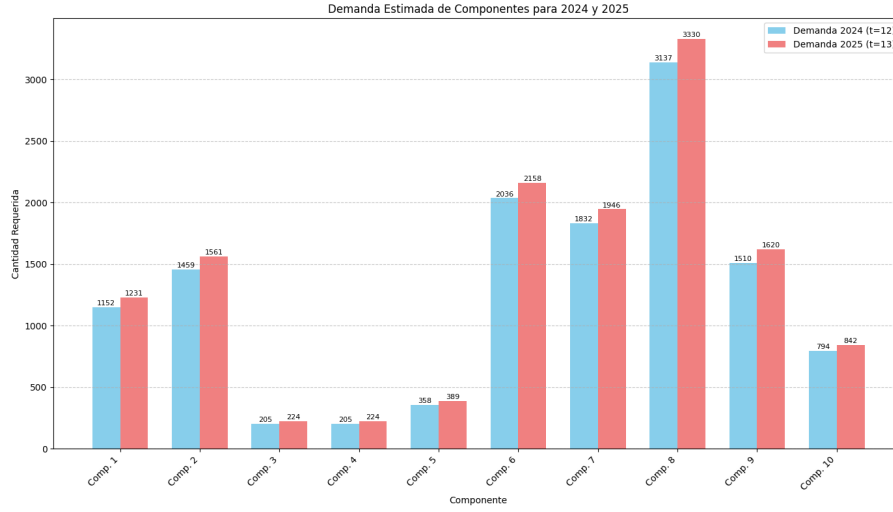


Figura 2: Demanda estimada de componentes (método directo) para 2024 y 2025.

4.4. Modelo Global (Hiperplano)

Se consideró un modelo lineal simple para las **ventas totales** $S_{\text{total}}(t)$:

$$S_{\text{total}}(t) = \beta_0^{\text{tot}} + \beta_1^{\text{tot}} t,$$

usando $t = 1 \dots 10$ (2013–2022). Los coeficientes obtenidos (Python) son:

$$\beta_0^{\text{tot}} = 179,67, \quad \beta_1^{\text{tot}} = 98,10, \quad \text{ECM}_{\text{tot}} = 1543,28, \quad R_{\text{tot}}^2 = 0,9809.$$

Con este modelo se proyectan ventas totales:

2023 ($t = 11$) : 1259 unidades,
 2024 ($t = 12$) : 1357 unidades,
 2025 ($t = 13$) : 1455 unidades,
 2026 ($t = 14$) : 1553 unidades,
 2027 ($t = 15$) : 1651 unidades.

La Figura 3 muestra el ajuste histórico y la proyección.

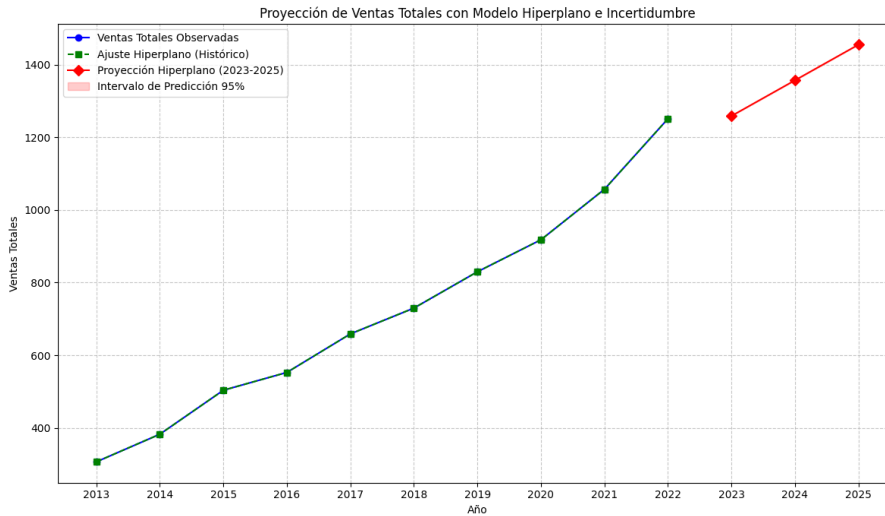


Figura 3: Ventas totales observadas vs. predichas (modelo hiperplano) con banda de incertidumbre.

4.5. Intervalos de Predicción (95 %)

Para 2024 ($t = 12$) y 2025 ($t = 13$), el intervalo de predicción del 95 % se calculó con $\alpha = 0,05$, grados de libertad $n - 2 = 8$. Los resultados son:

$$\begin{aligned} 2024 : 1357 [1242, 1472], \text{ margen } \pm 115 (8,5 \%) \\ 2025 : 1455 [1334, 1576], \text{ margen } \pm 121 (8,3 \%) \end{aligned}$$

Estos intervalos reflejan la incertidumbre asociada al modelo global.

4.6. Estimación Corregida de Componentes

Para 2024 y 2025, en lugar de usar directamente los pronósticos individuales, se distribuyeron las ventas totales proyectadas según las **proporciones promedio históricas** de cada tipo:

$$\text{Proporciones} = [0,405, 0,288, 0,201, 0,106].$$

Así, las ventas totales proyectadas asignadas a cada tipo son:

$$\begin{aligned} 2024 : 1357 \times \text{proporciones} &= [550, 391, 272, 144] \text{ (aprox.)}, \\ 2025 : 1455 \times \text{proporciones} &= [589, 419, 292, 155] \text{ (aprox.)}. \end{aligned}$$

Multiplicando por C , obtenemos las **necesidades corregidas** (Tabla 6).

Cuadro 6: Demandas de componentes **corregidas** para 2024 y 2025.

Componente	Req. 2024	Req. 2025
1	1213	1300
2	1516	1625
3	144	155
4	144	155
5	272	292
6	2430	2606
7	2112	2265
8	3674	3939
9	1485	1592
10	940	1008

En total, los componentes requeridos son:

$$\begin{aligned} \text{Total 2024} &= 13\,930, \quad \text{media} = \frac{13\,930}{1357} \approx 10,3 \text{ componentes/moto}, \\ \text{Total 2025} &= 14\,937, \quad \text{media} = \frac{14\,937}{1455} \approx 10,3 \text{ componentes/moto}. \end{aligned}$$

4.7. Simulación de Monte Carlo (2024–2025)

Se realizaron 10 000 simulaciones asumiendo errores normales con $\sigma = \sqrt{\text{ECM}_{\text{tot}}} \approx 39,3$. Para cada iteración se:

1. Simularon ventas totales 2024 y 2025.
2. Distribuyeron según proporciones históricas.
3. Calculó demanda de componentes corregida.

Los resultados más relevantes son:

▪ **Ventas totales (MC):**

- 2024: media = 1357, IC 95 % = [1280, 1436], error relativo = $\pm 5,7 \%$.
- 2025: media = 1455, IC 95 % = [1377, 1533], error relativo = $\pm 5,4 \%$.

- **Demanda de componentes (MC, 2024):**
 - Componente 1: media = 1213, IC 95 % = [1144, 1283].
 - Componente 2: media = 1516, IC 95 % = [1430, 1604].
 - Componente 3: media = 144, IC 95 % = [136, 153].
 - Componente 4: media = 144, IC 95 % = [136, 153].
 - Componente 5: media = 272, IC 95 % = [257, 288].
 - Componente 6: media = 2431, IC 95 % = [2293, 2572].
 - Componente 7: media = 2113, IC 95 % = [1993, 2235].
 - Componente 8: media = 3675, IC 95 % = [3466, 3888].
 - Componente 9: media = 1485, IC 95 % = [1401, 1572].
 - Componente 10: media = 941, IC 95 % = [887, 995].

5. Discusión

- Los modelos individuales para Tipos 1 y 3 muestran ajustes casi perfectos ($R^2 = 0.99$), mientras que Tipo 2 ($R^2 = 0.97$) y, especialmente, Tipo 4 ($R^2 = 0.71$) tienen mayor error. Esto indica que el modelo lineal simple es insuficiente para el Tipo 4.
- El modelo global de ventas totales ($R^2 = 0.9809$) confirma que la suma de las ventas individuales sigue una tendencia lineal fuerte. Su ECM de 1543.28 es coherente con la variabilidad conjunta.
- Los intervalos de predicción del 95 % (± 8)
- La estimación corregida de componentes—usando proporciones históricas—produce demandas ligeramente superiores al método directo, reflejando mejor la dinámica global de ventas. El promedio de 10.3 componentes por moto es consistente con la matriz C y las proporciones históricas.
- La simulación de Monte Carlo reduce el error relativo de ventas totales a ± 5 –6

6. Conclusiones

1. Coeficientes y ajuste de los modelos individuales:

- Moto Tipo 1: $\beta_0 = 129,33$, $\beta_1 = 26,54$, ECM = 59.41, $R^2 = 0.99$. Ajuste excelente.
- Moto Tipo 2: $\beta_0 = 79,07$, $\beta_1 = 22,24$, ECM = 114.16, $R^2 = 0.97$. Buen ajuste, ligera variabilidad no explicada.
- Moto Tipo 3: $\beta_0 = -10,40$, $\beta_1 = 30,69$, ECM = 56.90, $R^2 = 0.99$. Ajuste excelente, intercepto negativo sin impacto en el rango de datos.
- Moto Tipo 4: $\beta_0 = -18,33$, $\beta_1 = 18,62$, ECM = 1174.68, $R^2 = 0.71$. Ajuste deficiente; tendencia lineal limitada.

2. Pronósticos de ventas (2023–2027):

Año (t)	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4
2023 (11)	421	324	327	187
2024 (12)	448	346	358	205
2025 (13)	474	368	389	224
2026 (14)	501	390	419	242
2027 (15)	527	413	450	261

- Tipo 1 y 3 lideran en unidades; Tipo 4 sigue siendo impredecible.

3. Requerimientos de componentes (método directo) para 2024–2025:

Componente	Req. 2024	Req. 2025
1	1152	1231
2	1459	1561
3	205	224
4	205	224
5	358	389
6	2036	2158
7	1832	1946
8	3137	3330
9	1510	1620
10	794	842

- Verificación: Componente 1 en 2024 = 1152 (coincide con R_{2024}).

4. Modelo global (hiperplano) para ventas totales:

$$S_{\text{total}}(t) = 179,67 + 98,10 t, \quad \text{ECM}_{\text{tot}} = 1543,28, \quad R_{\text{tot}}^2 = 0,9809.$$

2023 (11) : 1259,

2024 (12) : 1357,

2025 (13) : 1455,

2026 (14) : 1553,

2027 (15) : 1651.

5.

6. Estimación corregida de componentes (2024–2025):

$$\text{Proporciones promedio} = [0,405, 0,288, 0,201, 0,106].$$

2024: reparto [550, 391, 272, 144], 2025: [589, 419, 292, 155].

Demandas corregidas:

Comp.	Req. 2024	Req. 2025
1	1213	1300
2	1516	1625
3	144	155
4	144	155
5	272	292
6	2430	2606
7	2112	2265
8	3674	3939
9	1485	1592
10	940	1008

- Totales: 13 930 (2024), 14 937 (2025), promedio = 10.3 componentes/moto.

7. Simulación Monte Carlo (10 000 iteraciones):

- Ventas totales:
 - 2024: media = 1357, IC 95
 - 2025: media = 1455, IC 95
- Demanda componentes 2024 (ejemplos):

Comp. 1: media=1213, IC [1144, 1283]; Comp. 2: media=1516, IC [1430, 1604]; ...

- La simulación reduce la incertidumbre de componentes a $\pm 5-6$

8. Resumen ejecutivo:

- El hiperplano explica 98.09
- Error estándar ± 39.3 unidades (ventas totales).
- Promedio de componentes por moto = 10.3 (coincide con C y proporciones históricas).

Anexo: Código Fuente

El código Python completo (regresiones, pronósticos, cálculos de ECM/ R^2 , hiperplano, intervalos, Monte Carlo y gráficos) está disponible en:

<https://github.com/Rojas-09/Trabajo-Lineal.git>