Proyecto de Ampliación: Planta Ensambladora de Motocicletas

Pronóstico de Demanda y Planificación de Inventario Mediante Mínimos Cuadrados

Juan Andrés Rojas, Johan Esteban Ibarra Garcia
Curso de Álgebra Lineal, 2^{do} Semestre
Universidad Tecnológica
Pereira, Colombia

***Abstract*—El presente trabajo aborda el pronóstico de demanda y planificación de inventario para MotoTec, un fabricante de motocicletas, utilizando el método de mínimos cuadrados, conforme al nivel de un curso de Álgebra Lineal[cite: 13]. Se analiza el historial de ventas (2013-2022) para cuatro familias de motocicletas (urbanas, turismo, off-road y eléctricas) para proyectar la demanda para los años 2023 a 2027[cite: 14]. A partir de estos pronósticos y una matriz de componentes, se determinan las cantidades estimadas de componentes. Este informe detalla el marco teórico del álgebra lineal subyacente, la metodología, los resultados numéricos incluyendo el Error Cuadrático Medio (ECM), y una discusión sobre implicaciones y limitaciones[cite: 15].**

I. Introducción

El álgebra lineal es fundamental en la resolución de problemas tecnológicos y de ingeniería[cite: 1, 2]. En la industria, la toma de decisiones basada en datos es crucial. MotoTec, un fabricante de motocicletas, enfrenta el desafío de optimizar su cadena de suministro, donde el 70% de los componentes son importados[cite: 24, 28]. La meta estratégica de MotoTec es "reducir en 25% el capital inmovilizado en inventarios sin sacrificar disponibilidad"[cite: 26, 32]. Este proyecto aplica el método de mínimos cuadrados para convertir el historial de ventas (2013-2022) en un pronóstico de demanda (2023-2027) y estimar los requerimientos de componentes, limitado al alcance de un curso introductorio de álgebra lineal[cite: 28, 37].

II. Marco Teórico

A. Matrices como Operadores Lineales

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ representa una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$[cite: 29, 58]. Esta transformación mapea vectores de un espacio a otro, pudiendo implicar rotaciones, escalamientos o proyecciones[cite: 31, 61].

B. Método de Mínimos Cuadrados

Para sistemas $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sobredeterminados y sin solución exacta, el método de mínimos cuadrados busca $\mathbf{x}^*$ que minimice $||A\mathbf{x}-\mathbf{b}||_2^2$[cite: 33]. La solución $A\mathbf{x}^*$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre el espacio columna de A, $\text{Col}(A)$[cite: 34]. El vector residuo $\mathbf{r}^* = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^*$ es ortogonal a $\text{Col}(A)$[cite: 35]. $\mathbf{x}^*$ se obtiene de las ecuaciones normales:

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

Si $A^T A$ es invertible (columnas de A linealmente independientes), la solución única es[cite: 36]:

$$\mathbf{x}^* = (A^T A)^{-1}A^T\mathbf{b}$$

Esta técnica es clave para convertir "datos ruidosos en un pronóstico refinado"[cite: 15, 37].

C. Pseudoinversa de Moore-Penrose

Cuando $A^T A$ no es invertible, se usa la pseudoinversa A^+[cite: 38, 112]. La solución $\mathbf{x}^* = A^+\mathbf{b}$ minimiza $||A\mathbf{x} - \mathbf{b}||_2^2$. Si hay múltiples soluciones, $A^+\mathbf{b}$ es la de mínima norma $||x||_2$[cite: 39, 40, 114]. La Descomposición en Valores Singulares (SVD), $A = U\Sigma V^T$, es un método robusto para calcular $A^+ = V\Sigma^+U^T$, donde Σ^+ se forma con los recíprocos de los valores singulares no nulos[cite: 41, 42, 43, 115, 116].

D. Regresión Lineal Simple Aplicada

Para pronosticar ventas S en función del tiempo t, se usa el modelo $S(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \epsilon$[cite: 45]. Para m observaciones (t_i, S_i), el sistema es $A\boldsymbol{\beta} \approx \mathbf{S}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_m \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\beta}} \approx \underbrace{\begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_m \end{pmatrix}}_{\mathbf{S}}$$

Los coeficientes $\boldsymbol{\beta}^* = (\beta_0^*, \beta_1^*)^T$ se estiman por mínimos cuadrados[cite: 46].

III. Planteamiento del Problema de MotoTec

MotoTec busca optimizar el inventario para cuatro familias de motocicletas (urbanas, turismo, off-road, eléctricas)[cite: 47]. La dependencia de componentes asiáticos (70%) y la volatilidad global son desafíos[cite: 48, 28, 29]. **Meta Estratégica (2024-2025):** Reducir capital inmovilizado en inventarios en 25% sin afectar disponibilidad[cite: 50, 32]. **Datos Disponibles:**

- Ventas anuales (2013-2022) para cuatro modelos (Tabla I)[cite: 52, 34, 39].
- Matriz de componentes 10×4 (unidades de 10 componentes por 4 modelos) (Tabla IV)[cite: 53, 35, 41].

Objetivo Específico: Usar mínimos cuadrados para:

1) Pronosticar demanda para 2023-2027 a partir de ventas 2013-2022.
2) Determinar cantidades estimadas de componentes para órdenes futuras[cite: 55, 37].

Los datos son sintéticos con fines académicos[cite: 56].

IV. Metodología Aplicada

A. Fase 1: Pronóstico de Ventas

Se ajusta un modelo $S(t) = \beta_0 + \beta_1 t$ para cada tipo de moto. El tiempo t se codifica: $t = 1$ para 2013, ..., $t = 10$ para 2022[cite: 57, 58]. La matriz $A \in \mathbb{R}^{10\times 2}$ y el vector $\mathbf{S}_{\text{tipo}} \in \mathbb{R}^{10\times 1}$ son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 10 \end{pmatrix}, \mathbf{S}_{\text{tipo}} = \begin{pmatrix} S_{2013} \\ \vdots \\ S_{2022} \end{pmatrix}_{\text{tipo}}$$

Los coeficientes $\boldsymbol{\beta}_{\text{tipo}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{S}_{\text{tipo}}$[cite: 59]. Las ventas se proyectan para $t = 11$ (2023) a $t = 15$ (2027).

B. Fase 2: Planificación de Componentes

Sea $C \in \mathbb{R}^{10\times 4}$ la matriz de componentes (Tabla IV)[cite: 60]. El vector de ventas pronosticadas $\mathbf{F}_{\text{año}} \in \mathbb{R}^{4\times 1}$ para cada año se usa para calcular los requerimientos de componentes $\mathbf{R}_{\text{año}} \in \mathbb{R}^{10\times 1}$:

$$\mathbf{R}_{\text{año}} = C \cdot \mathbf{F}_{\text{año}}$$

Cada elemento de $\mathbf{R}_{\text{año}}$ es la cantidad total de un componente[cite: 61].

V. Resultados y Análisis

A. Datos Históricos de Ventas

La Tabla I muestra las ventas históricas[cite: 62, 39].

TABLE I
VENTAS HISTÓRICAS POR TIPO DE MOTO (2013-2022) [CITE: 39, 62, 63, 64]

Año (t)	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4
2013 (1)	172	89	18	28
2014 (2)	185	116	49	33
2015 (3)	202	155	98	49
2016 (4)	225	188	96	44
2017 (5)	252	200	148	59
2018 (6)	286	199	173	72
2019 (7)	316	240	204	70
2020 (8)	342	245	235	96
2021 (9)	371	280	266	140
2022 (10)	402	302	297	250

B. Coeficientes de Regresión y ECM

Con $A^T A = \begin{pmatrix} 10 & 55 \\ 55 & 385 \end{pmatrix}$, $(A^T A)^{-1} = \frac{1}{825}\begin{pmatrix} 385 & -55 \\ -55 & 10 \end{pmatrix}$[cite: 65]. Los coeficientes $\boldsymbol{\beta}^* = (\beta_0^*, \beta_1^*)^T$ y el Error Cuadrático Medio $ECM = \frac{1}{m}||A\boldsymbol{\beta}^* - \mathbf{S}||_2^2$ [cite: 93] se muestran en la Tabla II.

TABLE II
COEFICIENTES DE REGRESIÓN Y ECM POR TIPO DE MOTO

Tipo ECM	β_0^*	β_1^*	Modelo $S(t)$
Tipo 1 59.41	129.33	26.54	$129.33 + 26.54t$ [cite: 66]
Tipo 2 226.65	75.20	21.11	$75.20 + 21.11t$ [cite: 67]
Tipo 3 166.74	10.73	28.30	$10.73 + 28.30t$ [cite: 68]
Tipo 4 1174.68	-18.33	18.62	$-18.33 + 18.62t$ [cite: 69]

C. Pronósticos de Ventas para 2023-2027

Las ventas pronosticadas (redondeadas) se presentan en la Tabla III[cite: 70].

TABLE III
VENTAS PRONOSTICADAS (UNIDADES) PARA 2023-2027 [CITE: 70, 71, 72, 73]

Tipo	2023 ($t = 11$)	2024 ($t = 12$)	2025 ($t = 13$)	2026 ($t = 14$)	2027 ($t = 15$)
Tipo 1	421	448	474	501	527
Tipo 2	307	329	350	371	392
Tipo 3	322	350	379	407	435
Tipo 4	186	205	224	242	261

Por ejemplo, para Tipo 2 en 2023 ($t = 11$): $S_2(11) = 75.20 + 21.11 \times 11 \approx 307$[cite: 74].

D. Visualización Gráfica del Pronóstico

La Figura 1 muestra los datos históricos, las líneas de tendencia y los pronósticos para todos los tipos de motocicletas.

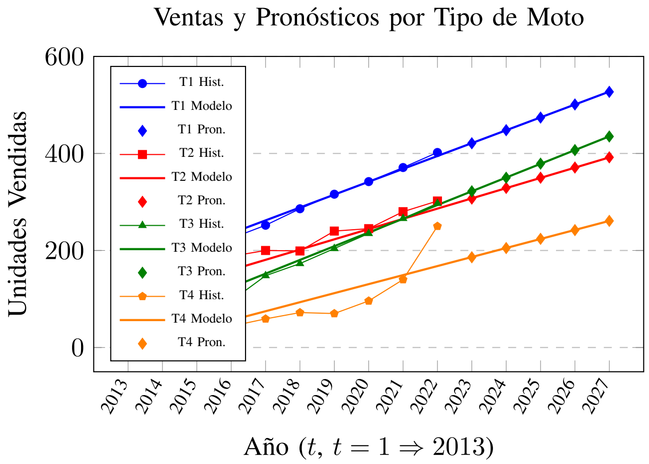

Fig. 1. Ventas históricas (2013-2022) y pronosticadas (2023-2027) para todos los tipos de motocicleta.

E. Matriz de Componentes y Planificación

La matriz C (Tabla IV) detalla los componentes por moto[cite: 80, 41].

TABLE IV
MATRIZ DE COMPONENTES (UNIDADES/MOTO) [CITE: 41, 80, 81, 82, 83]

Componente	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4
Comp. 1	1	1	1	0
Comp. 2	0	2	1	1
Comp. 3	0	0	0	1
Comp. 4	0	0	0	1
Comp. 5	0	0	1	0
Comp. 6	3	2	0	0
Comp. 7	1	4	0	0
Comp. 8	5	2	0	1
Comp. 9	1	1	2	0
Comp. 10	1	1	0	0

Los requerimientos para 2023 y 2025 se muestran en la Tabla V. Para 2023: $\mathbf{F}_{2023} = (421, 307, 322, 186)^T$. $\mathbf{R}_{2023} = C \cdot \mathbf{F}_{2023}$[cite: 85]. Para 2025: $\mathbf{F}_{2025} = (474, 350, 379, 224)^T$. $\mathbf{R}_{2025} = C \cdot \mathbf{F}_{2025}$.

TABLE V
CANTIDADES ESTIMADAS DE COMPONENTES PARA 2023 Y 2025 [CITE: 86, 87]

Componente	Requerido 2023	Requerido 2025
Comp. 1	1050	1203
Comp. 2	1122	1293
Comp. 3	186	224
Comp. 4	186	224
Comp. 5	322	379
Comp. 6	1877	2122
Comp. 7	1649	1874
Comp. 8	2905	3294
Comp. 9	1372	1582
Comp. 10	728	824

Ej. Comp. 1 para 2023: $1 \cdot 421 + 1 \cdot 307 + 1 \cdot 322 + 0 \cdot 186 = 1050$.

VI. DISCUSIÓN

El análisis con mínimos cuadrados proporcionó modelos lineales de pronóstico. Los valores de ECM (Tabla II) indican la calidad del ajuste. El ECM para Moto Tipo 1 es el más bajo (59.41), sugiriendo un buen ajuste lineal. Moto Tipo 2 y 3 tienen ECMs mayores (226.65 y 166.74 respectivamente), lo que indica una mayor dispersión de los datos históricos alrededor de la línea de regresión.

La Moto Tipo 4 presenta el ECM más alto (1174.68) y un intercepto $\beta_0 = -18.33$[cite: 69], que carece de interpretación física para ventas[cite: 90]. Esto sugiere que un modelo lineal simple es una pobre aproximación para el Tipo 4, especialmente dado su crecimiento acelerado reciente (ver Tabla I)[cite: 89]. La simplicidad del modelo fue una restricción del ejercicio ("nivel primer semestre")[cite: 91].

A pesar de las limitaciones, los pronósticos permiten una estimación inicial de componentes, crucial para la meta de MotoTec de reducir capital inmovilizado[cite: 32, 96]. Pronósticos más precisos mitigan riesgos de sobreinventario y desabastecimiento[cite: 97, 16].

VII. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

Este estudio aplicó el método de mínimos cuadrados para pronosticar la demanda de motocicletas y planificar requerimientos de componentes en MotoTec[cite: 106]. **Conclusiones Principales:**

1) Se generaron modelos de regresión lineal y pronósticos (2023-2027) para cuatro tipos de motocicletas[cite: 108].
2) Se cuantificaron necesidades de componentes basadas en estos pronósticos[cite: 109].
3) Se calcularon los ECM, revelando variaciones en la adecuación del modelo lineal para diferentes tipos de moto, siendo particularmente limitado para el Tipo 4[cite: 110].

Trabajo Futuro:

1) **Análisis de Residuos:** Realizar un diagnóstico completo de los residuos de regresión para validar supuestos del modelo (e.g., normalidad, homocedasticidad)[cite: 95].
2) **Modelos Avanzados:** Explorar modelos no lineales o de series temporales (e.g., ARIMA, suavización exponencial) para capturar patrones más complejos, especialmente para la Moto Tipo 4[cite: 92, 113].
3) **Validación Out-of-Sample:** Si se dispusiera de más datos, validar los modelos con un conjunto de prueba para evaluar su poder predictivo real[cite: 112].

Estas mejoras permitirían a MotoTec refinar su toma de decisiones y avanzar hacia sus objetivos estratégicos[cite: 121].

APPENDIX A
CÓDIGO PYTHON PARA ANÁLISIS Y GRÁFICOS

El siguiente código Python utiliza las bibliotecas NumPy y Matplotlib para realizar los cálculos de regresión lineal, pronósticos, ECM y la generación del gráfico combinado.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Datos histricos de ventas (2013-2022) [cite: 62, 63, 64]
# Columnas: Tipo 1, Tipo 2, Tipo 3, Tipo 4
sales_hist_data = np.array([
    [172, 89,  18,  28],  # 2013 (t=1)
    [185, 116, 49,  33],  # 2014 (t=2)
    [202, 155, 98,  49],  # 2015 (t=3)
    [225, 188, 96,  44],  # 2016 (t=4)
    [252, 200, 148, 59],  # 2017 (t=5)
    [286, 199, 173, 72],  # 2018 (t=6)
    [316, 240, 204, 70],  # 2019 (t=7)
    [342, 245, 235, 96],  # 2020 (t=8)
    [371, 280, 266, 140], # 2021 (t=9)
    [402, 302, 297, 250]  # 2022 (t=10)
])

num_years_hist = sales_hist_data.shape[0]
t_hist = np.arange(1, num_years_hist + 1)

# Matriz de diseo A para regresin lineal [cite: 46, 58]
A_design = np.vstack([np.ones(num_years_hist), t_hist]).T

# Clculo de (A^T A)^-1 A^T [cite: 37, 59, 65]
A_T_A_inv_A_T = np.linalg.inv(A_design.T @ A_design) @ A_design.T

beta_coeffs = []
models_str = []
ecm_values = []

print("Coeficientes de Regresion (beta_0, beta_1) y ECM:")
for i in range(sales_hist_data.shape[1]): # Para cada tipo de moto
    S_tipo = sales_hist_data[:, i]
    beta = A_T_A_inv_A_T @ S_tipo
    beta_coeffs.append(beta)
    models_str.append(f"S{i+1}(t) = {beta[0]:.2f} + {beta[1]:.2f}t")

    # Calcular ECM (MSE) [cite: 93]
    S_pred_hist = A_design @ beta
    residuals = S_tipo - S_pred_hist
    ecm = np.sum(residuals**2) / num_years_hist
    ecm_values.append(ecm)
    print(f"Tipo {i+1}: beta_0={beta[0]:.2f}, beta_1={beta[1]:.2f}, ECM={ecm:.2f}")

# Pronosticos para 2023-2027 (t=11 a t=15) [cite: 3, 70]
num_years_forecast = 5
t_forecast_abs = np.arange(num_years_hist + 1, num_years_hist + 1 +
        num_years_forecast)
sales_forecast_data = np.zeros((num_years_forecast, sales_hist_data.shape[1]))

for i in range(sales_hist_data.shape[1]):
    beta = beta_coeffs[i]
    S_pred_forecast = beta[0] + beta[1] * t_forecast_abs
    sales_forecast_data[:, i] = np.round(S_pred_forecast)

print("\nVentas Pronosticadas (2023-2027):")
print("Ao (t) | Tipo 1 | Tipo 2 | Tipo 3 | Tipo 4")
for j in range(num_years_forecast):
    year_label = 2022 + (j + 1)
    print(f"{year_label} ({t_forecast_abs[j]}) | "
          f"{sales_forecast_data[j,0]:.0f}   | "
          f"{sales_forecast_data[j,1]:.0f}   | "
          f"{sales_forecast_data[j,2]:.0f}   | "
          f"{sales_forecast_data[j,3]:.0f}")

# Visualizacin Grfica (similar a Figura 1, combinada)
plt.figure(figsize=(10, 6)) # Adjust for potential single column in final doc if
        needed
colors = ['blue', 'red', 'green', 'orange']
markers_hist = ['o', 's', '^', 'p']
type_labels = ['Tipo 1', 'Tipo 2', 'Tipo 3', 'Tipo 4']
t_all = np.arange(1, num_years_hist + 1 + num_years_forecast)

for i in range(sales_hist_data.shape[1]):
    beta = beta_coeffs[i]
    # Datos histricos
    plt.plot(t_hist, sales_hist_data[:, i], marker=markers_hist[i], linestyle='None'
        , color=colors[i], label=f'{type_labels[i]} Hist.')
    # Lnea de regresin (extendida)
    S_reg_line = beta[0] + beta[1] * t_all
    plt.plot(t_all, S_reg_line, color=colors[i], linestyle='-', label=f'{type_labels
        [i]} Modelo')
    # Datos pronosticados
    plt.plot(t_forecast_abs, sales_forecast_data[:, i], marker='d', linestyle='None'
        , color=colors[i], markeredgecolor='black', label=f'{type_labels[i]} Pron.')

xtick_locs = np.arange(1, 16)
xtick_labels_year = np.arange(2013, 2028)
plt.xticks(xtick_locs, xtick_labels_year, rotation=45, ha="right", fontsize=8)
plt.xlabel("Ao (t, donde t=1 es 2013)")
plt.ylabel("Unidades Vendidas")
plt.title("Ventas Histricas y Pronosticadas por Tipo de Moto")
plt.legend(fontsize='small', ncol=2) # ncol might be adjusted
plt.grid(True, linestyle='--')
plt.tight_layout()
# plt.savefig("ventas_pronostico_combinado.png") # To save the figure
plt.show() # Show plot if running interactively, pgfplots handles this in LaTeX

# Matriz de Componentes C (10 componentes, 4 tipos de moto) [cite: 80, 81, 82, 83]
C_matrix = np.array([
    [1, 1, 1, 0],  # Comp 1
    [0, 2, 1, 1],  # Comp 2
    [0, 0, 0, 1],  # Comp 3
    [0, 0, 0, 1],  # Comp 4
    [0, 0, 1, 0],  # Comp 5
    [3, 2, 0, 0],  # Comp 6
    [1, 4, 0, 0],  # Comp 7
    [5, 2, 0, 1],  # Comp 8
    [1, 1, 2, 0],  # Comp 9
    [1, 1, 0, 0]   # Comp 10
])

# Calcular requerimientos de componentes para 2023 (t=11) y 2025 (t=13)
# F_2023 es la primera fila de sales_forecast_data
F_2023 = sales_forecast_data[0, :] # Pronstico para t=11
R_2023 = C_matrix @ F_2023

# F_2025 es la tercera fila de sales_forecast_data
F_2025 = sales_forecast_data[2, :] # Pronstico para t=13
R_2025 = C_matrix @ F_2025

print("\nRequerimientos de Componentes Estimados:")
print("Componente | Req. 2023 (t=11) | Req. 2025 (t=13)")
for i in range(C_matrix.shape[0]):
    print(f"Comp. {i+1:<6} | {R_2023[i]:<17.0f} | {R_2025[i]:.0f}")

# Ejemplo de clculo para Comp. 1 en 2023:
# C1_2023 = (C_matrix[0,0]*F_2023[0] + C_matrix[0,1]*F_2023[1] +
#            C_matrix[0,2]*F_2023[2] + C_matrix[0,3]*F_2023[3])
# print(f"Clculo manual Comp 1 2023: {C1_2023}")
```

Listing 1. Código Python para el análisis de regresión y pronóstico