MEHANIKA

Dejan Zupan

REŠENE NALOGE IZ
FIZIKE 1

za srednje šole

Ljubljana 2007

1. Merjenje

1.1 Pretvarjanje enot

1. Pretvori v osnovno enoto.

a) 0,8 cm (centimeter)

Kadar so količine zapisane s predponami, je za pretvarjanje potrebno poznati vrednost predpon. V takih primerih je pretvarjanje preprosto, saj namesto predpon postavimo le njihovo vrednost:

$$0{,}8\,\mathrm{cm} = 0{,}8 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} = \underline{\underline{8 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}}$$

b) 16 μs (mikrosekunda)

$$16\,\mu\mathrm{s} = 16 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s} = \underline{\underline{1{,}6 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}}}$$

c) 22 mA (miliamper)

$$22\,\mathrm{mA} = 22 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A} = \underline{\underline{2{,}2 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{A}}}$$

d) 1,7 kK (kilokelvin)

$$1{,}7\,\mathrm{kK} = \underline{\underline{1{,}7 \cdot 10^{3}\,\mathrm{K}}}$$

e) 13 Mmol (megamol)

$$13\,\mathrm{Mmol} = 13 \cdot 10^{6}\,\mathrm{mol} = \underline{\underline{1{,}3 \cdot 10^{7}\,\mathrm{mol}}}$$

f) 0,32 mg (miligram)

Osnovna enota za maso ni gram (g), ampak kilogram (kg), zato moramo to upoštevati. To naredimo tako, da najprej pretvorimo v g, potem pa v kg. Ker je gram tisočinka kilograma, pri pretvarjanju iz g v kg pomnožimo z 10^{-3}:

$$\begin{aligned} 0{,}32\,\mathrm{mg} &= 0{,}32 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{g} = 0{,}32 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg} = \\ &= 0{,}32 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg} = \underline{\underline{3{,}2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{kg}}} \end{aligned}$$

Uporabili smo pravilo za množenje potenc z enakimi osnovami (v tem primeru z osnovo 10):

$$10^{a} \cdot 10^{b} = 10^{a+b}$$

g) 17 Gg (gigagram)

$$\begin{aligned} 17\,\mathrm{Gg} &= 17 \cdot 10^{9}\,\mathrm{g} = 17 \cdot 10^{9} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg} = \\ &= 17 \cdot 10^{6}\,\mathrm{kg} = \underline{\underline{1{,}7 \cdot 10^{7}\,\mathrm{kg}}} \end{aligned}$$

2. Pretvori v osnovno enoto.

a) 23 mm^2

Pri pretvarjanju enot za površino in prostornino pazimo na to, da tudi pri pretvorniku ne pozabimo na ustrezen eksponent (2 ali 3):

$$\begin{aligned} 23\,\mathrm{mm}^2 &= 23 \cdot (10^{-3})^2\,\mathrm{m}^2 = 23 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2 = \\ &= \underline{\underline{2{,}3 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^2}} \end{aligned}$$

Uporabili smo pravilo za potenciranje potenc:

$$(10^{a})^{b} = 10^{ab}$$

b) 16 Gm^2

$$\begin{aligned} 16\,\mathrm{Gm}^2 &= 16 \cdot (10^{9})^2\,\mathrm{m}^2 = 16 \cdot 10^{18}\,\mathrm{m}^2 = \\ &= \underline{\underline{1{,}6 \cdot 10^{19}\,\mathrm{m}^2}} \end{aligned}$$

c) 1,8 km^3

$$1{,}8\,\mathrm{km}^3 = 1{,}8 \cdot (10^{3})^3\,\mathrm{m}^3 = \underline{\underline{1{,}8 \cdot 10^{9}\,\mathrm{m}^3}}$$

d) 1,1 μm^3

$$1{,}1\,\mu\mathrm{m}^3 = 1{,}1 \cdot (10^{-6})^3\,\mathrm{m}^3 = \underline{\underline{1{,}1 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{m}^3}}$$

3. Pretvori v osnovno enoto.

a) 13 ms

$$13\,\mathrm{ms} = 13 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s} = \underline{\underline{1{,}3 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}}}$$

b) 6,3 min

Pretvorbe časovnih enot so v nekaterih primerih drugačne od ostalih. Upoštevati moramo, da je 1 min = 60 s, 1 h = 60 min in 1 dan = 24 h. To upoštevamo tako, da pri pretvarjanju iz večje v manjšo enoto (dan → h, h → min, min → s) množimo s pretvornikom (60 ali 24), v obratni smeri pa delimo s pretvornikom:

$$6{,}3\,\mathrm{min} = 6{,}3 \cdot 60\,\mathrm{s} = \underline{\underline{378\,\mathrm{s}}}$$

c) 0,05 h

$$\begin{aligned} 0{,}05\,\mathrm{h} &= 0{,}05 \cdot 60\,\mathrm{min} = 0{,}05 \cdot 60 \cdot 60\,\mathrm{s} = 180\,\mathrm{s} = \\ &= \underline{\underline{1{,}8 \cdot 10^{2}\,\mathrm{s}}} \end{aligned}$$

d) 13 dni

$$
\begin{aligned}
13\,\mathrm{dni} &= 13 \cdot 24\,\mathrm{h} = 13 \cdot 24 \cdot 60\,\mathrm{min} = \\
&= 13 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\,\mathrm{s} = 1\,123\,200\,\mathrm{s} = \\
&= 1{,}1232 \cdot 10^{6}\,\mathrm{s} = \underline{\underline{1{,}1 \cdot 10^{6}\,\mathrm{s}}}
\end{aligned}
$$

4. Pretvori v osnovno enoto.

a) 16 $\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{cm}^3}$

Enote v ulomku pretvorimo tako, da pretvorimo posebej enote v števcu in posebej enote v imenovalcu, potem pa uporabimo pravilo za deljenje potenc:

$$
\frac{10^{a}}{10^{b}} = 10^{a-b}
$$

$$
16\,\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{cm}^3} = 16 \cdot \frac{10^{-3} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}}{(10^{-2})^3\,\mathrm{m}^3} = 16 \cdot \frac{10^{-6}\,\mathrm{kg}}{10^{-6}\,\mathrm{m}^3} = \underline{\underline{16\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}}
$$

b) 3,0 $\frac{\mathrm{Mg}}{\mu\mathrm{m}^3}$

$$
\begin{aligned}
3{,}0\,\frac{\mathrm{Mg}}{\mu\mathrm{m}^3} &= 3{,}0 \cdot \frac{10^{6} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}}{(10^{-6})^3\,\mathrm{m}^3} = \\
&= 3{,}0 \cdot \frac{10^{3}\,\mathrm{kg}}{10^{-18}\,\mathrm{m}^3} = \underline{\underline{3{,}0 \cdot 10^{21}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}}
\end{aligned}
$$

c) 6,1 $\frac{\mathrm{dag}}{\mathrm{km}^3}$

$$
\begin{aligned}
6{,}1\,\frac{\mathrm{dag}}{\mathrm{km}^3} &= 6{,}1 \cdot \frac{10^{1} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}}{(10^{3})^3\,\mathrm{m}^3} = \\
&= 6{,}1 \cdot \frac{10^{-2}\,\mathrm{kg}}{10^{9}\,\mathrm{m}^3} = \underline{\underline{6{,}1 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}}
\end{aligned}
$$

d) 7,8 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

Pri pretvorbah časovnih enot po potrebi dokončamo pretvorbo s kalkulatorjem:

$$
7{,}8\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 7{,}8 \cdot \frac{10^{3}\,\mathrm{m}}{60 \cdot 60\,\mathrm{s}} = 2{,}167\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{2{,}2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}
$$

e) 1,5 $\frac{\mathrm{Mm}}{\mathrm{cs}}$

$$
1{,}5\,\frac{\mathrm{Mm}}{\mathrm{cs}} = 1{,}5 \cdot \frac{10^{6}\,\mathrm{m}}{10^{-2}\,\mathrm{s}} = \underline{\underline{1{,}5 \cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}
$$

f) 3,8 $\frac{\mu\mathrm{m}}{\mathrm{min}}$

$$
3{,}8\,\frac{\mu\mathrm{m}}{\mathrm{min}} = 3{,}8 \cdot \frac{10^{-6}\,\mathrm{m}}{60\,\mathrm{s}} = \underline{\underline{6{,}3 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}
$$

5. Pretvori v zahtevano enoto.

a) 6 mA v kA

V takih primerih najprej pretvorimo v osnovne enote, potem v zahtevane (razen pri masi, kjer pretvorimo v g in nato naprej). Pazimo le, da je eksponent potence pretvornika pri pretvarjanju iz večje v manjšo enoto pozitiven, obratno pa negativen. Na primer:

$$
\begin{aligned}
3\,\mathrm{km} &= 3 \cdot 10^{3}\,\mathrm{m} \\
16\,\mathrm{m} &= 16 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{km}
\end{aligned}
$$

$$
6\,\mathrm{mA} = 6 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A} = 6 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kA} = \underline{6 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kA}}
$$

b) 13 cmol v μmol

$$
\begin{aligned}
13\,\mathrm{cmol} &= 13 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{mol} = 13 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{6}\,\mu\mathrm{mol} \\
&= 13 \cdot 10^{4}\,\mu\mathrm{mol} = \underline{\underline{1{,}3 \cdot 10^{5}\,\mu\mathrm{mol}}}
\end{aligned}
$$

c) 4 kcd v dcd

$$
4\,\mathrm{kcd} = 4 \cdot 10^{3}\,\mathrm{cd} = 4 \cdot 10^{3} \cdot 10^{1}\,\mathrm{dcd} = \underline{\underline{4 \cdot 10^{4}\,\mathrm{dcd}}}
$$

d) 0,07 MK v kK

$$
\begin{aligned}
0{,}07\,\mathrm{MK} &= 0{,}07 \cdot 10^{6}\,\mathrm{K} = 0{,}07 \cdot 10^{6} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kK} = \\
&= 0{,}07 \cdot 10^{3}\,\mathrm{kK} = \underline{\underline{70\,\mathrm{kK}}}
\end{aligned}
$$

e) 0,3 cm^2 v km^2

$$
\begin{aligned}
0{,}3\,\mathrm{cm}^2 &= 0{,}3 \cdot (10^{-2})^2\,\mathrm{m}^2 = 0{,}3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 = \\
&= 0{,}3 \cdot 10^{-4} \cdot (10^{-3})^2\,\mathrm{km}^2 = \\
&= 0{,}3 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-6}\,\mathrm{km}^2 = \\
&= 0{,}3 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{km}^2 = \underline{\underline{3 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{km}^2}}
\end{aligned}
$$

f) 31 Pm^2 v Gm^2

$$
\begin{aligned}
31\,\mathrm{Pm}^2 &= 31 \cdot (10^{15})^2\,\mathrm{m}^2 = 31 \cdot 10^{30}\,\mathrm{m}^2 = \\
&= 31 \cdot 10^{30} \cdot (10^{-9})^2\,\mathrm{Gm}^2 = \\
&= 31 \cdot 10^{30} \cdot 10^{-18}\,\mathrm{Gm}^2 = \\
&= 31 \cdot 10^{12}\,\mathrm{Gm}^2 = \underline{\underline{3{,}1 \cdot 10^{13}\,\mathrm{Gm}^2}}
\end{aligned}
$$

g) 7 dam^3 v dm^3

$$\begin{aligned}7\,\mathrm{dam}^3 &= 7{,}(10^1)^3\,\mathrm{m}^3 = 7\cdot10^3\,\mathrm{m}^3 = \\ &= 7\cdot10^3\cdot(10^1)^3\,\mathrm{dm}^3 = 7\cdot10^3\cdot10^3\,\mathrm{dm}^3 = \\ &= \underline{\underline{7\cdot10^6\,\mathrm{dm}^3}}\end{aligned}$$

h) 0,38 nm^3 v cm^3

$$\begin{aligned}0{,}38\,\mathrm{nm}^3 &= 0{,}38\cdot(10^{-9})^3\,\mathrm{m}^3 = 0{,}38\cdot10^{-27}\,\mathrm{m}^3 = \\ &= 0{,}38\cdot10^{-27}\cdot(10^2)^3\,\mathrm{cm}^3 = \\ &= 0{,}38\cdot10^{-27}\cdot10^6\,\mathrm{cm}^3 = \\ &= 0{,}38\cdot10^{-21}\,\mathrm{cm}^3 = \underline{\underline{3{,}8\cdot10^{-22}\,\mathrm{cm}^3}}\end{aligned}$$

i) 16 s v min

$$16\,\mathrm{s} = \frac{16}{60}\,\mathrm{min} = 0{,}267\,\mathrm{min} = \underline{\underline{0{,}27\,\mathrm{min}}}$$

j) 3,4 cs v h

$$\begin{aligned}3{,}4\,\mathrm{cs} &= 3{,}4\cdot10^{-2}\,\mathrm{s} = \frac{3{,}4\cdot10^{-2}}{60}\,\mathrm{min} = \\ &= \frac{3{,}4\cdot10^{-2}}{60\cdot60}\,\mathrm{h} = \frac{3{,}4\cdot10^{-2}}{3600}\,\mathrm{h} = \\ &= \underline{\underline{9{,}4\cdot10^{-6}\,\mathrm{h}}}\end{aligned}$$

k) 1,4 ds v dni

$$\begin{aligned}1{,}4\,\mathrm{ds} &= 1{,}4\cdot10^{-1}\,\mathrm{s} = \frac{1{,}4\cdot10^{-1}}{60}\,\mathrm{min} = \\ &= \frac{1{,}4\cdot10^{-1}}{60\cdot60}\,\mathrm{h} = \frac{1{,}4\cdot10^{-1}}{60\cdot60\cdot24}\,\mathrm{dni} = \\ &= \frac{1{,}4\cdot10^{-1}}{86\,400}\,\mathrm{dni} = \underline{\underline{1{,}6\cdot10^{-6}\,\mathrm{dni}}}\end{aligned}$$

l) 6 $\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{dm}^3}$ v $\frac{\mathrm{cg}}{\mu\mathrm{m}^3}$

$$\begin{aligned}6\,\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{dm}^3} &= 6\cdot\frac{10^{-3}\,\mathrm{g}}{(10^{-1})^3\,\mathrm{m}^3} = 6\cdot\frac{10^{-3}\cdot10^2\,\mathrm{cg}}{10^{-3}\cdot(10^6)^3\,\mu\mathrm{m}^3} = \\ &= 6\cdot\frac{10^{-1}\,\mathrm{cg}}{10^{-3}\cdot10^{18}\,\mu\mathrm{m}^3} = 6\cdot\frac{10^{-1}\cdot\mathrm{cg}}{10^{15}\,\mu\mathrm{m}^3} = \\ &= 6\cdot10^{-1}\cdot10^{-15}\,\frac{\mathrm{cg}}{\mu\mathrm{m}^3} = \underline{\underline{6\cdot10^{-16}\,\frac{\mathrm{cg}}{\mu\mathrm{m}^3}}}\end{aligned}$$

m) 1,5 $\frac{\mathrm{Gg}}{\mathrm{km}^3}$ v $\frac{\mu\mathrm{g}}{\mathrm{pm}^3}$

$$\begin{aligned}1{,}5\,\frac{\mathrm{Gg}}{\mathrm{km}^3} &= 1{,}5\cdot\frac{10^9\,\mathrm{g}}{(10^3)^3\,\mathrm{m}^3} = \\ &= 1{,}5\cdot\frac{10^9\cdot10^6\,\mu\mathrm{g}}{10^9(10^{12})^3\,\mathrm{pm}^3} = \\ &= 1{,}5\cdot\frac{10^{15}\,\mu\mathrm{g}}{10^9\cdot10^{36}\,\mathrm{pm}^3} = \\ &= 1{,}5\cdot\frac{10^{15}\,\mu\mathrm{g}}{10^{45}\,\mathrm{pm}^3} = \\ &= 1{,}5\cdot10^{15}\cdot10^{-45}\,\frac{\mu\mathrm{g}}{\mathrm{pm}^3} = \\ &= \underline{\underline{1{,}5\cdot10^{-30}\,\frac{\mu\mathrm{g}}{\mathrm{pm}^3}}}\end{aligned}$$

n) 9,2 $\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{min}}$ v $\frac{\mu\mathrm{m}}{\mathrm{ds}}$

$$\begin{aligned}9{,}2\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{min}} &= 9{,}2\cdot\frac{10^{-2}\,\mathrm{m}}{60\mathrm{s}} = \\ &= 9{,}2\cdot\frac{10^{-2}\cdot10^6\,\mu\mathrm{m}}{60\cdot10^1\,\mathrm{ds}} = \\ &= \frac{9{,}2}{60}\cdot\frac{10^4}{10^1}\,\frac{\mu\mathrm{m}}{\mathrm{ds}} = \\ &= 0{,}1533\cdot10^4\cdot10^{-1}\,\frac{\mu\mathrm{m}}{\mathrm{ds}} = \\ &= 0{,}1533\cdot10^3\,\frac{\mu\mathrm{m}}{\mathrm{ds}} = \\ &= \underline{\underline{1{,}5\cdot10^2\,\frac{\mu\mathrm{m}}{\mathrm{ds}}}}\end{aligned}$$

o) 7,9 $\frac{\mathrm{Mm}}{\mathrm{h}}$ v $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}}$

$$\begin{aligned}7{,}9\,\frac{\mathrm{Mm}}{\mathrm{h}} &= 7{,}9\,\frac{10^6\,\mathrm{m}}{60\,\mathrm{min}} = 7{,}9\cdot\frac{10^6\,\mathrm{m}}{60\,\mathrm{min}} = \\ &= 7{,}9\cdot\frac{10^6\cdot10^{-3}\,\mathrm{km}}{60\,\mathrm{min}} = 7{,}9\cdot\frac{10^3\,\mathrm{km}}{60\,\mathrm{min}} = \\ &= \frac{7{,}9}{60}\cdot10^3\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}} = 0{,}1317\cdot10^3\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}} = \\ &= \underline{\underline{1{,}3\cdot10^2\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}}}}\end{aligned}$$

6. Pretvori v osnovno enoto. Pri tem upoštevaj, da je 1 čevelj = 0,31 m. (Čevelj označimo s ft = foot).

a) 13 ft

$$13\,\mathrm{ft} = 13\cdot0{,}31\,\mathrm{m} = 4{,}03\,\mathrm{m} = \underline{\underline{4{,}0\,\mathrm{m}}}$$

b) 0,6 ft

$$0{,}6\,\mathrm{ft} = 0{,}6 \cdot 0{,}31\,\mathrm{m} = 0{,}186\,\mathrm{m} = \underline{\underline{0{,}2\,\mathrm{m}}}$$

c) 5 ft^2

Ne pozabimo tudi pretvornik potencirati z ustreznim eksponentom:

$$5\,\mathrm{ft}^2 = 5 \cdot (0{,}31\,\mathrm{m})^2 = 0{,}4805\,\mathrm{m}^2 = \underline{\underline{0{,}5\,\mathrm{m}^2}}$$

d) 31 ft^3

$$31\,\mathrm{ft}^3 = 31 \cdot (0{,}31\,\mathrm{m})^3 = 0{,}9235\,\mathrm{m}^3 = \underline{\underline{0{,}92\,\mathrm{m}^3}}$$

7. Pretvori v osnovno enoto.

a) 3,5 min^2

$$\begin{aligned} 3{,}5\,\mathrm{min}^2 &= 3{,}5(60\,\mathrm{s})^2 = 3{,}5 \cdot 3\,600\,\mathrm{s}^2 = \\ &= 12\,600\,\mathrm{s}^2 = 12{,}6 \cdot 10^3\,\mathrm{s}^2 = \underline{\underline{1{,}3 \cdot 10^4\,\mathrm{s}^2}} \end{aligned}$$

b) 6,3 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}^2}$

$$\begin{aligned} 6{,}3\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}^2} &= 6{,}3 \cdot \frac{10^3\,\mathrm{m}}{(60\,\mathrm{min})^2} = 6{,}3 \cdot \frac{10^3\,\mathrm{m}}{3\,600\,\mathrm{min}^2} = \\ &= 6{,}3 \cdot \frac{10^3\,\mathrm{m}}{3\,600 \cdot (60\,\mathrm{s})^2} = 6{,}3 \cdot \frac{10^3\,\mathrm{m}}{3\,600 \cdot 3\,600\,\mathrm{s}^2} = \\ &= \frac{6{,}3 \cdot 10^3\mathrm{m}}{12\,960\,000\,\mathrm{s}^2} = \underline{\underline{4{,}9 \cdot 10^{-4}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} \end{aligned}$$

c) 3,6 $\frac{\mathrm{mm}}{\mu\mathrm{s}^2}$

$$\begin{aligned} 3{,}6\,\frac{\mathrm{mm}}{\mu\mathrm{s}^2} &= 3{,}6 \cdot \frac{10^{-3}\,\mathrm{m}}{(10^{-6})^2\,\mathrm{s}^2} = 3{,}6 \cdot \frac{10^{-3}\,\mathrm{m}}{10^{-12}\,\mathrm{s}^2} = \\ &= 3{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{12}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \underline{\underline{3{,}6 \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} \end{aligned}$$

d) 0,4 $\frac{\mathrm{gdm}}{\mathrm{h}^2}$

$$\begin{aligned} 0{,}4\,\frac{\mathrm{gdm}}{\mathrm{h}^2} &= 0{,}4 \cdot \frac{10^{-3}\,\mathrm{kg} \cdot 10^{-1}\,\mathrm{m}}{(60\,\mathrm{min})^2} = \\ &= 0{,}4 \cdot \frac{10^{-4}\,\mathrm{kgm}}{3\,600 \cdot \mathrm{min}^2} = 0{,}4 \cdot \frac{10^{-4}\,\mathrm{kgm}}{3\,600 \cdot (60\,\mathrm{s})^2} = \\ &= 0{,}4 \cdot \frac{10^{-4}\,\mathrm{kgm}}{3\,600 \cdot 3\,600\,\mathrm{s}^2} = \frac{0{,}4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kgm}}{12\,960\,000\,\mathrm{s}^2} = \\ &= \underline{\underline{3 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}^2}}} \end{aligned}$$

1.2 Merske napake

1. Večkrat izmerimo premer kovinske kroglice in dobimo naslednje vrednosti: 2,35 cm, 2,37 cm, 2,33 cm, 2,38 cm in 2,36 cm. Izračunaj povprečno vrednost premera in določi absolutno ter relativno napako meritve. Premer zapiši z absolutno in relativno napako.

Podatki:

$d_1 = 2{,}35$ cm

$d_2 = 2{,}37$ cm

$d_3 = 2{,}33$ cm

$d_4 = 2{,}38$ cm

$d_5 = 2{,}36$ cm

Povprečna vrednost meritev je njihova vsota deljena s številom meritev:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

Povprečni premer kroglice je tako:

$$\begin{aligned} \overline{d} &= \frac{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5}{5} = \\ &= \frac{2{,}35\,\mathrm{cm} + 2{,}37\,\mathrm{cm} + 2{,}33\,\mathrm{cm} + 2{,}38\,\mathrm{cm} + 2{,}36\,\mathrm{cm}}{5} = \\ &= 2{,}36\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

Da bomo dobili oceno napake meritve, za vsako meritev izračunajmo razliko med vrednostjo meritve in povprečno vrednostjo $(x_n - \overline{x})$:

$$\begin{aligned} d_1 - \overline{d} &= -0{,}008\,\mathrm{cm} \\ d_2 - \overline{d} &= 0{,}012\,\mathrm{cm} \\ d_3 - \overline{d} &= -0{,}028\,\mathrm{cm} \\ d_4 - \overline{d} &= 0{,}022\,\mathrm{cm} \\ d_5 - \overline{d} &= 0{,}002\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

Ker so predznaki razlik nepomembni, zapišimo njihove absolutne vrednosti:

$$\begin{aligned} |d_1 - \overline{d}| &= 0{,}008\,\mathrm{cm} \\ |d_2 - \overline{d}| &= 0{,}012\,\mathrm{cm} \\ |d_3 - \overline{d}| &= 0{,}028\,\mathrm{cm} \\ |d_4 - \overline{d}| &= 0{,}022\,\mathrm{cm} \\ |d_5 - \overline{d}| &= 0{,}002\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

Izmed teh vrednosti izločimo tretjino največjih. Tretjina od 5 je 1,67 ≐ 2; izločili bomo torej dve največji razliki: 0,028 cm in 0,022 cm. Absolutna napaka meritve premera je naslednja največja, torej 0,012 cm. Zaokrožimo jo na **eno mesto**:

$$\Delta d = 0{,}01\,\mathrm{cm}$$

Pomembno je, da napako zaokrožimo na prvo neničelno mesto. Če je napaka že na tem mestu (v našem primeru pri stotinkah centimetra), nas vrednosti naprej ne zanimajo, saj so kvečjemu še bolj nenatančne. Zavedati se moramo, da napaka meritve ni natančna vrednost, ampak le **ocena**, torej približna vrednost. Ponavadi nas niti toliko ne zanima vrednost napake, pač pa le njen velikostni red (ali je napaka pri deseticah, enicah, desetinkah, stotinkah ...).

Zapišimo rezultat (premer) v zapisu z absolutno napako:

$$\begin{aligned} d &= \overline{d} \pm \Delta d \\ d &= \underline{\underline{2{,}36\,\mathrm{cm} \pm 0{,}01\,\mathrm{cm}}} \end{aligned}$$

Tudi povprečno vrednost zaokrožimo na istem mestu, kot smo zaokrožili absolutno napako, torej pri stotinkah centimetra. To moramo nujno storiti, saj natančnost meritve določa absolutna napaka.

Relativno napako dobimo tako, da absolutno napako delimo s povprečno vrednostjo:

$$\delta d = \frac{\Delta d}{\overline{d}} = \frac{0{,}01\,\mathrm{cm}}{2{,}36\,\mathrm{cm}} = 0{,}0042$$

Relativno napako zaokrožimo na dve, največ tri mesta.

Ponavadi relativno napako podajamo v procentih:

$$\delta d = 0{,}0042 \cdot 100\,\% = 0{,}42\,\%$$

Podajmo meritev še z relativno napako:

$$\begin{aligned} d &= \overline{d}(1 \pm \delta d) \\ d &= \underline{\underline{2{,}36\,\mathrm{cm}(1 \pm 0{,}42\,\%)}} \end{aligned}$$

Ponavadi imajo dijaki kar nekaj težav z zaokrožanjem absolutnih napak in povprečnih vrednosti. Zapomnimo si, da ima absolutna napaka vedno le eno neničelno mesto. Oglejmo si nekaj zgledov, kako bi zaokrožili vrednost na eno neničelno mesto:

$$\begin{aligned} 123\,\mathrm{kg} &\to 100\,\mathrm{kg} \\ 0{,}154\,\mathrm{m} &\to 0{,}2\,\mathrm{m} \\ 64{,}5\,\mathrm{s} &\to 60\,\mathrm{s} \\ 3{,}2 \cdot 10^3\,\mathrm{m} &\to 3 \cdot 10^3\,\mathrm{m} \\ 0{,}0027\,\mathrm{mm} &\to 0{,}003\,\mathrm{mm} \\ 251\,\mathrm{min} &\to 300\,\mathrm{min} \ldots \end{aligned}$$

Povprečno vrednost meritve zaokrožimo na istem mestu, kot je zaokrožena absolutna napaka. Za lažje razumevanje si oglejmo še nekaj takih zgledov:

$$\begin{aligned} 1\,245\,\mathrm{kg} \pm 100\,\mathrm{kg} &\to 1\,200\,\mathrm{kg} \pm 100\,\mathrm{kg} \\ 12{,}25\,\mathrm{m} \pm 0{,}2\,\mathrm{m} &\to 12{,}3\,\mathrm{m} \pm 0{,}2\,\mathrm{m} \\ 356\,\mathrm{s} \pm 60\,\mathrm{s} &\to 360\,\mathrm{s} \pm 60\,\mathrm{s} \\ 12{,}6 \cdot 10^3\,\mathrm{m} \pm 3 \cdot 10^3\,\mathrm{m} &\to 13 \cdot 10^3\,\mathrm{m} \pm 3 \cdot 10^3\,\mathrm{m} \\ 13{,}4\,\mathrm{mm} \pm 0{,}003\,\mathrm{mm} &\to 13{,}400\,\mathrm{mm} \pm 0{,}003\,\mathrm{mm} \\ 5\,6371\,\mathrm{min} \pm 300\,\mathrm{min} &\to 56\,400\,\mathrm{min} \pm 300\,\mathrm{min} \ldots \end{aligned}$$

Zapomnimo si, da rezultat vedno zaokrožamo glede na absolutno napako, relativna napaka pa nam pove, kako dobro smo količino izmerili (manjša je relativna napaka, boljša je meritev).

2. Dana sta izmerka $a = 12{,}6 \pm 0{,}2$ in $b = 8{,}5 \pm 0{,}3$. Izračunaj njuno vsoto, razliko, produkt in kvocient. Rezultate pravilno zaokroži.

Podatki:

$a = 12{,}6 \pm 0{,}2$

$b = 8{,}5 \pm 0{,}3$

Izračunajmo vsoto izmerkov a in b:

$$a + b = 12{,}6 + 8{,}5 = 21{,}1$$

Absolutna napaka vsote je vsota absolutnih napak:

$$\Delta(a + b) = \Delta a + \Delta b = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$$

Zapis vsote z absolutno napako je tako:

$$a + b = \underline{\underline{21{,}1 \pm 0{,}5}}$$

Absolutna napaka in vsota sta že pravilno zapisani, zato zaokrožanje ni potrebno.

Razlika izmerkov je:

$$a - b = 12{,}6 - 8{,}5 = 4{,}1$$

Tudi pri odštevanju se absolutne napake seštevajo:

$$\begin{aligned}\Delta(a-b) &= \Delta a + \Delta b = \\ &= 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5\end{aligned}$$

Zapišimo razliko izmerkov z absolutno napako:

$$(a-b) = \underline{\underline{4{,}1 \pm 0{,}5}}$$

Tudi v tem primeru zaokrožanje ni potrebno.

Sedaj izračunajmo produkt izmerkov:

$$ab = 12{,}6 \cdot 8{,}5 = 107{,}1$$

Pri množenju se seštevajo relativne napake, zato najprej izračunajmo relativni napaki izmerkov a in b:

$$\begin{aligned}a &= 12{,}6 \pm 0{,}2 = 12{,}6(1 \pm 0{,}016) = 12{,}6(1 \pm 1{,}6\,\%) \\ b &= 8{,}5 \pm 0{,}3 = 8{,}5(1 \pm 0{,}035) = 12{,}6(1 \pm 3{,}5\,\%)\end{aligned}$$

Relativna napaka produkta izmerkov je tako:

$$\delta(ab) = \delta a + \delta b = 1{,}6\,\% + 3{,}5\,\% = 5{,}1\,\%$$

Da bi pravilno zaokrožili produkt, izračunajmo njegovo absolutno napako:

$$\Delta(ab) = ab \cdot \delta(ab) = 107{,}1 \cdot 0{,}051 = 5{,}4621$$

Tako je:

$$\Delta(ab) = 5$$

Zaokrožimo produkt in ga zapišimo v obliki z absolutno napako:

$$ab = \underline{107 \pm 5}$$

Na koncu izračunajmo še kvocient izmerkov a in b:

$$\frac{a}{b} = 1{,}48235$$

Kot pri množenju izmerkov se tudi pri **deljenju izmerkov relativne napake seštevajo**. Relativna napaka kvocienta je tako enaka kot relativna napaka produkta:

$$\delta\left(\frac{a}{b}\right) = \delta a + \delta b = 1{,}6\,\% + 3{,}5\,\% = 5{,}1\,\%$$

Od tod izračunajmo absolutno napako kvocienta:

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} \cdot \delta\left(\frac{a}{b}\right) = 1{,}48235 \cdot 0{,}051 = 0{,}0756$$

Torej je:

$$\Delta(ab) = 0{,}08$$

Zaokrožimo kvocient in ga zapišimo v obliki z absolutno napako:

$$ab = \underline{\underline{1{,}48 \pm 0{,}08}}$$

Čeprav poznamo pravila za računanje z napakami pri vseh matematičnih operacijah, se v srednji šoli ponavadi uporabljajo le pravila za seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje, ki smo jih uporabili v tej nalogi.

3. Da bi natančneje izmerili čas dijaka, ki teče na 100 m dolgi progi, je 10 časomerilcev merilo naenkrat. Dobili so naslednje rezultate: 12,3 s, 12,6 s, 12,0 s, 12,2 s, 12,5 s, 12,3 s, 12,5 s, 12,7 s, 12,3 s in 12,1 s. Čas podaj v zapisih z absolutno in relativno napako. Izračunaj povprečno hitrost dijaka na 100 m dolgi poti. Kolikšna je absolutna napaka hitrosti, če je dolžina poti 100 m določena z 1,0-odstotno natančnostjo? Povprečna hitrost je kvocient poti in časa ($\overline{v} = \frac{s}{t}$).

Podatki:

$$\begin{array}{lll} t_1 = 12{,}3\ \text{s} & t_6 = 12{,}3\ \text{s} & s = 100\ \text{m}\ (1 \pm 1{,}0\,\%) \\ t_2 = 12{,}6\ \text{s} & t_7 = 12{,}5\ \text{s} & \\ t_3 = 12{,}0\ \text{s} & t_8 = 12{,}7\ \text{s} & \\ t_4 = 12{,}2\ \text{s} & t_9 = 12{,}3\ \text{s} & \\ t_5 = 12{,}5\ \text{s} & t_{10} = 12{,}1\ \text{s} & \end{array}$$

Najprej izračunajmo povprečni čas:

$$\begin{aligned}\bar{t} &= \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 + t_8 + t_9 + t_{10}}{10} = \\ &= \frac{12{,}3\,\text{s} + 12{,}6\,\text{s} + \ldots + 12{,}1\,\text{s}}{10} = 12{,}35\,\text{s}\end{aligned}$$

Izračunajmo absolutne vrednosti razlik med posamezno meritvijo in povprečno vrednostjo:

$$\begin{array}{ll} |t_1 - \bar{t}| = 0{,}05\,\text{s} & |t_6 - \bar{t}| = 0{,}05\,\text{s} \\ |t_2 - \bar{t}| = 0{,}25\,\text{s} & |t_7 - \bar{t}| = 0{,}15\,\text{s} \\ |t_3 - \bar{t}| = 0{,}35\,\text{s} & |t_8 - \bar{t}| = 0{,}35\,\text{s} \\ |t_4 - \bar{t}| = 0{,}15\,\text{s} & |t_9 - \bar{t}| = 0{,}05\,\text{s} \\ |t_5 - \bar{t}| = 0{,}15\,\text{s} & |t_{10} - \bar{t}| = 0{,}25\,\text{s} \end{array}$$

Tretjino ($\frac{10}{3} = 3{,}33 \doteq 3$) največjih razlik izločimo. To so 0,35 s, 0,35 s in 0,25 s. Največjo od preostalih razlik, torej 0,25 s, zaokrožimo na eno mesto in dobimo absolutno napako:

$$\Delta t = 0{,}3\,\text{s}$$

Zapišimo čas dijaka z absolutno napako:

$$t = \underline{\underline{12{,}4\,\mathrm{s} \pm 0{,}3\,\mathrm{s}}}$$

Izračunajmo relativno napako časa:

$$\delta t = \frac{\Delta t}{\bar{t}} = \frac{0{,}3\,\mathrm{s}}{12{,}4\,\mathrm{s}} = 0{,}024 = 2{,}4\,\%$$

Zapišimo čas tekača še z relativno napako:

$$t = \underline{\underline{12{,}4\,\mathrm{s}(1 \pm 2{,}4\,\%)}}$$

Izračunajmo povprečno hitrost dijaka:

$$\bar{v} = \frac{s}{t} = \frac{100\,\mathrm{m}}{12{,}4\,\mathrm{s}} = 8{,}0645\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Napako hitrosti dobimo tako, da seštejemo relativni napaki poti in časa. Relativna napaka hitrosti je tako:

$$\delta v = \delta s + \delta t = 1\,\% + 2{,}4\,\% = 3{,}4\,\%$$

Od tod izračunajmo absolutno napako hitrosti. Najprej relativno napako pretvorimo iz procentov v število (delimo s 100):

$$\delta v = 3{,}4\,\% = 0{,}034$$

Sedaj to vrednost pomnožimo s povprečno hitrostjo in zaokrožimo na eno mesto:

$$\Delta v = \bar{v}\delta v = 8{,}0645\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 0{,}034 = 0{,}274193\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Dobljeno vrednost zaokrožimo:

$$\Delta v = \underline{\underline{0{,}3\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

Dobili smo absolutno napako povprečne hitrosti dijaka. Čeprav naloga ne zahteva, za konec hitrost zapišimo z absolutno in relativno napako:

$$v = 8{,}1\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \pm 0{,}3\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

in

$$v = 8{,}1\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}(1 \pm 3{,}4\,\%)$$

4. Izmerili smo dolžino $a = 36{,}3\,\mathrm{m} \pm 0{,}8\,\mathrm{m}$ in širino $b = 11{,}3\,\mathrm{m} \pm 0{,}4\,\mathrm{m}$ pravokotne njive. Kolikšna sta obseg in površina njive? Rezultata primerno zaokroži.

Podatki:

$$a = 36{,}3\,\mathrm{m} \pm 0{,}8\,\mathrm{m}$$

$$b = 11{,}3\,\mathrm{m} \pm 0{,}4\,\mathrm{m}$$

Izračunajmo obseg njive:

$$o = 2a + 2b = 2 \cdot 36{,}3\,\mathrm{m} + 2 \cdot 11{,}3\,\mathrm{m} = 95{,}2\,\mathrm{m}$$

Da dobimo napako meritve, zapišimo enačbo za računanje obsega kot:

$$o = a + a + b + b$$

V enačbi nastopa le seštevanje, zato je absolutna napaka obsega seštevek absolutnih napak:

$$\begin{aligned} \Delta o &= \Delta a + \Delta a + \Delta b + \Delta b = \\ &= 2\Delta a + 2\Delta b = 2 \cdot 0{,}8\,\mathrm{m} + 2 \cdot 0{,}4\,\mathrm{m} = \\ &= 2{,}4\,\mathrm{m} = 2\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Obseg zapišimo z absolutno napako in primerno zaokrožimo:

$$o = \underline{\underline{95\,\mathrm{m} \pm 2\,\mathrm{m}}}$$

Izračunajmo še površino njive. Ker je njiva pravokotna, je njena površina:

$$S = ab = 36{,}3\,\mathrm{m} \cdot 11{,}3\,\mathrm{m} = 410{,}19\,\mathrm{m}^2$$

Pri računanju površine njive smo zmnožili njeno dolžino in njeno širino. Ker se pri množenju seštevajo relativne napake, je relativna napaka površine enaka vsoti relativnih napak dolžine in širine njive. Izračunajmo najprej relativni napaki meritev:

$$\delta a = \frac{\Delta a}{\bar{a}} = \frac{0{,}8\,\mathrm{m}}{36{,}3\,\mathrm{m}} = 0{,}022 = 2{,}2\,\%$$

in

$$\delta b = \frac{\Delta b}{\bar{b}} = \frac{0{,}4\,\mathrm{m}}{11{,}3\,\mathrm{m}} = 0{,}035 = 3{,}5\,\%$$

Relativna napaka površine je tako:

$$\delta S = \delta a + \delta b = 2{,}2\,\% + 3{,}5\,\% = 5{,}7\,\% = 0{,}057$$

Od tod izračunajmo absolutno napako površine:

$$\Delta S = S\delta S = 410{,}19\,\mathrm{m}^2 \cdot 0{,}057 = 23{,}38\,\mathrm{m}^2 = 20\,\mathrm{m}^2$$

Končno zapišimo površino v zapisu z absolutno napako. Pazimo, da površino pravilno zaokrožimo:

$$S = \underline{\underline{410\,\mathrm{m}^2 \pm 20\,\mathrm{m}^2}}$$

5. Lesena kocka s stranico dolžine 12,3 cm ± 0,6 cm ima maso 1,10 kg ± 0,05 kg. Kolikšna je njena gostota? Gostota telesa je kvocient njegove mase in prostornine ($\rho = \frac{m}{V}$).

Podatki:

$$a = 12{,}3\,\mathrm{cm} \pm 0{,}6\,\mathrm{cm}$$
$$m = 1{,}10\,\mathrm{kg} \pm 0{,}05\,\mathrm{kg}$$

Najprej izračunajmo prostornino kocke:

$$V = a^3 = (12{,}3\,\mathrm{cm})^3 = 1860{,}867\,\mathrm{cm}^3$$

Relativna napaka prostornine kocke je enaka trikratni relativni napaki njene stranice. Računanje prostornine je namreč množenje ($V = a \cdot a \cdot a$), pri množenju pa se seštevajo relativne napake. Izračunajmo relativno napako stranice:

$$\delta a = \frac{\Delta a}{a} = \frac{0{,}6\,\mathrm{cm}}{12{,}3\,\mathrm{cm}} = 0{,}049 = 4{,}9\,\%$$

Tako je relativna napaka prostornine:

$$\delta V = \delta a + \delta a + \delta a = 3\delta a = 3 \cdot 4{,}9\,\% = 14{,}7\,\%$$

Sedaj izračunajmo gostoto kocke:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{1{,}10\,\mathrm{kg}}{1860{,}867\,\mathrm{cm}^3} = 5{,}91122 \cdot 10^{-4}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{cm}^3}$$

Ker se tudi pri deljenju seštevajo relativne napake, je relativna napaka gostote kocke vsota relativnih napak mase in prostornine kocke. Relativno napako prostornine smo že izračunali, izračunajmo še relativno napako mase:

$$\delta m = \frac{\Delta m}{m} = \frac{0{,}05\,\mathrm{kg}}{1{,}10\,\mathrm{kg}} = 0{,}045 = 4{,}5\,\%$$

Tako je relativna napaka gostote kocke:

$$\delta\rho = \delta m + \delta V = 4{,}5\,\% + 14{,}7\,\% = 19{,}2\,\% = 0{,}192$$

Od tod izračunajmo absolutno napako gostote:

$$\begin{aligned}\Delta\rho &= \rho\delta\rho = 5{,}91122 \cdot 10^{-4}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{cm}^3} \cdot 0{,}192 = \\ &= 1{,}135 \cdot 10^{-4}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{cm}^3} = 1 \cdot 10^{-4}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{cm}^3}\end{aligned}$$

Pravilno zaokrožena gostota kocke je tako:

$$\rho = \underline{\underline{6 \cdot 10^{-4}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{cm}^3} \pm 1 \cdot 10^{-4}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{cm}^3}}}$$

Za lažjo predstavo pretvorimo gostoto v osnovne enote ($\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$):

$$\rho = \underline{\underline{600\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \pm 100\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}}$$

6. Kolikšna je relativna napaka polmera kroga, če je njegov obseg 36,7 cm ± 0,8 cm? Kolikšna pa je relativna napaka ploščine tega kroga?

Podatki:

$$o = 36{,}7\,\mathrm{cm} \pm 0{,}8\,\mathrm{cm}$$

Obseg kroga je dan z enačbo:

$$o = 2\pi r$$

Relativna napaka obsega je tako enaka relativni napaki polmera, saj se pri množenju seštevajo relativne napake, 2 in π pa nimata napake:

$$\delta o = \delta r$$

Ker je relativna napaka obsega

$$\delta o = \frac{\Delta o}{o} = \frac{0{,}8\,\mathrm{cm}}{36{,}7\,\mathrm{cm}} = 0{,}022 = 2{,}2\,\%$$

je tudi relativna napaka polmera

$$\delta r = \underline{\underline{2{,}2\,\%}}$$

Ploščina kroga je dana z enačbo:

$$S = \pi r^2$$

Relativna napaka ploščine je torej enaka dvakratni relativni napaki polmera ($S = \pi \cdot r \cdot r$; π nima napake):

$$\delta S = \delta\pi + \delta r + \delta r = 2\delta r = 2 \cdot 2{,}2\,\% = \underline{\underline{4{,}4\,\%}}$$

7. Kolikšna je absolutna napaka polmera krogle, ki ima prostornino $16{,}6\,\mathrm{cm}^3(1 \pm 9\,\%)$? Prostornino krogle izračunamo z enačbo $V = \frac{4\pi r^3}{3}$, kjer je r polmer krogle.

Podatki:

$$V = 16{,}6\,\mathrm{cm}^3(1 \pm 9\,\%)$$

Prostornino krogle pišimo kot:

$$V = \frac{4\pi r \cdot r \cdot r}{3}$$

Pri množenju in deljenju se seštevajo relativne napake, zato je relativna napaka prostornine krogle enaka trikratni relativni napaki polmera, saj števila 4, 3 in π nimajo napake:

$$\delta V = \delta r + \delta r + \delta r = 3\delta r$$

Od tod sledi, da je relativna napaka polmera tretjina relativne napake prostornine:

$$\delta r = \frac{\delta V}{3} = \frac{9\,\%}{3} = 3\,\% = 0,03$$

Da bomo lahko izračunali absolutno napako polmera, ga najprej izrazimo in izračunajmo iz enačbe:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Od tod je:

$$r^3 = \frac{3V}{4\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3\cdot 16,6\,\mathrm{cm}^3}{4\pi}} = 1,5825\,\mathrm{cm}$$

Absolutna napaka polmera je tako:

$$\Delta r = r\delta r = 1,5825\,\mathrm{cm}\cdot 0,03 = 0,04748\,\mathrm{cm}$$

$$\Delta r = \underline{\underline{0,05\,\mathrm{cm}}}$$

8. Avtomobil pospeši iz mirovanja do določene hitrosti na razdalji 270 m ± 10 m. To mu uspe v času 8,7 s ± 0,2 s. Izračunaj pospešek avtomobila in rezultat podaj v obliki z absolutno in relativno napako. Pospešek izračunamo z enačbo $a = \frac{2s}{t^2}$, kjer je s pot, t pa čas.

Podatki:

$s = 270\,\mathrm{m} \pm 10\,\mathrm{m}$

$t = 8,7\,\mathrm{s} \pm 0,2\,\mathrm{s}$

Izračunajmo relativni napaki poti in dolžine, saj v enačbi $a = \frac{2s}{t^2}$ delimo in množimo, zato bomo seštevali relativne napake:

$$\delta s = \frac{\Delta s}{s} = \frac{10\,\mathrm{m}}{270\,\mathrm{m}} = 0,037 = 3,7\,\%$$

in

$$\delta t = \frac{\Delta t}{t} = \frac{0,2\,\mathrm{s}}{8,7\,\mathrm{s}} = 0,023 = 2,3\,\%$$

Izračunajmo pospešek avtomobila:

$$a = \frac{2s}{t^2} = \frac{2\cdot 270\,\mathrm{m}}{(8,7\,\mathrm{s})^2} = 7,13436\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Enačbo za računanje pospeška pišimo kot:

$$a = \frac{2s}{t\cdot t}$$

Od tod sledi, da je relativna napaka pospeška enaka:

$$\delta a = \delta s + \delta t + \delta t = 3,7\,\% + 2,3\,\% + 2,3\,\% = 8,3\,\% = 0,083$$

Izračunajmo še absolutno napako pospeška:

$$\Delta a = a\delta a = 7,13436\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0,083 = 0,592\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 0,6\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Pospešek zaokrožimo in zapišimo z absolutno in relativno napako:

$$a = \underline{\underline{7,1\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \pm 0,6\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = \underline{\underline{7,1\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}(1 \pm 8,3\,\%)}}$$

9. Prostornino stožca izračunamo z enačbo $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$, kjer je r polmer osnovne ploskve, h pa višina stožca. Kolikšna je relativna napaka višine stožca, če je njegova prostornina 23,7 cm³ ± 0,8 cm³, polmer njegove osnovne ploskve pa je dan z 1,0 odstotno natančnostjo?

Podatki:

$V = 23,7\,\mathrm{cm}^3 \pm 0,8\,\mathrm{cm}^3$

$\delta r = 1,0\,\%$

Enačbo za računanje stožca zapišimo kot:

$$V = \frac{\pi\cdot r\cdot r\cdot h}{3}$$

Relativna napaka prostornine stožca je tako vsota dvakratne relativne napake polmera osnovne ploskve in relativne napake višine stožca:

$$\delta V = 2\delta r + \delta h$$

Od tod izrazimo relativno napako višine stožca:

$$\delta h = \delta V - 2\delta r$$

Iz podatka $V = 23,7\,\mathrm{cm}^3 \pm 0,8\,\mathrm{cm}^3$ izračunajmo relativno napako prostornine:

$$\delta V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{0,8\,\mathrm{cm}^3}{23,7\,\mathrm{cm}^3} = 0,034 = 3,4\,\%$$

Tako je relativna napaka višine:

$$\Delta h = 3,4\,\% - 2\cdot 1,0\,\% = \underline{\underline{1,3\,\%}}$$

10. Dana sta izmerka: $x = 12{,}4 \pm 0{,}6$ in $y = 8{,}7 \pm 0{,}3$. Izračunaj izraza $A = \frac{x^3}{7y^2}$ in $B = x^2 - 5y$. Rezultata primerno zaokroži.

Podatki:

$$x = 12{,}4 \pm 0{,}6$$

$$y = 8{,}7 \pm 0{,}3$$

Najprej izračunajmo relativni napaki izmerkov:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{0{,}6}{12{,}4} = 0{,}048 = 4{,}8\,\%$$

in

$$\delta y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{0{,}3}{8{,}7} = 0{,}034 = 3{,}4\,\%$$

Izračunajmo izraz A:

$$A = \frac{x^3}{7y^2} = \frac{12{,}4^3}{7 \cdot 8{,}7^2} = 3{,}598558$$

Če si izraz za računanje količine A mislimo zapisan kot

$$A = \frac{x \cdot x \cdot x}{7 \cdot y \cdot y}$$

vidimo, da je relativna napaka količine A vsota trikratne relativne napake izmerka x in dvakratne relativne napake izmerka y (število 7 nima napake):

$$\delta A = 3\delta x + 2\delta y = 3 \cdot 4{,}8\,\% + 2 \cdot 3{,}4\,\% = 21{,}2\,\% = 0{,}212$$

Izračunajmo absolutno napako količine A:

$$\Delta A = A\delta A = 3{,}598558 \cdot 0{,}212 = 0{,}7629 = 0{,}8$$

Glede na absolutno napako zaokrožimo količino A:

$$A = \underline{\underline{3{,}6 \pm 0{,}8}}$$

Pri računanju količine B moramo biti pazljivi, saj v izrazu nastopata množenje in odštevanje, tako da napako količine B ne moremo določiti v enem koraku. Najprej izračunajmo x^2:

$$x^2 = 12{,}4^2 = 153{,}76$$

Relativna napaka količine $x^2 = x \cdot x$ je dvakratna relativna napaka izmerka x:

$$\delta(x^2) = 2\delta x = 2 \cdot 4{,}8\,\% = 9{,}6\,\% = 0{,}096$$

Za izračun količine B bomo morali od te vrednosti odšteti $5y$, zato bomo pri računanju končne napake potrebovali absolutno napako x^2. Izračunajmo jo:

$$\Delta(x^2) = x^2\delta(x^2) = 153{,}76 \cdot 0{,}096 = 14{,}76$$

Navajeni smo, da absolutno napako zaokrožimo na eno mesto, vendar bomo to naredili šele na koncu, pri absolutni napaki rezultata.

Sedaj izračunajmo še $5y$:

$$5y = 5 \cdot 8{,}7 = 43{,}5$$

Ker se pri seštevanju seštevajo absolutne napake, je absolutna napaka izraza $5y = y + y + y + y + y$ enaka petkratni absolutni napaki izmerka y:

$$\Delta(5y) = 5(\Delta y) = 5 \cdot 0{,}3 = 1{,}5$$

Končno izračunajmo količino B:

$$B = x^2 - 5y = 153{,}76 - 43{,}5 = 110{,}26$$

Pri odštevanju se seštevajo absolutne napake, zato je absolutna napaka količine B vsota absolutnih napak količin x^2 in $5y$:

$$\Delta B = \Delta(x^2) + \Delta(5y) = 14{,}76 + 1{,}5 = 16{,}26 = 20$$

Zaokrožimo količino B glede na njeno absolutno napako:

$$B = \underline{\underline{110 \pm 20}}$$

11. Oceni absolutno napako izraza $(n^2 - m)^2$, če je $n = 4{,}50 \pm 0{,}03$ in $m = 8{,}75 \pm 0{,}04$. Rezultat primerno zaokroži.

Podatki:

$$n = 4{,}50 \pm 0{,}03$$

$$m = 8{,}75 \pm 0{,}04$$

<u>1.NAČIN</u>

Najprej izračunajmo količino v oklepaju $(n^2 - m)$ in jo nato kvadrirajmo. Potrebovali bomo relativno napako izmerka n, ki ga moramo kvadrirati:

$$\delta n = \frac{\Delta n}{n} = \frac{0{,}03}{4{,}50} = 0{,}0067 = 0{,}67\,\%$$

Izračunajmo n^2:

$$n^2 = 4{,}50^2 = 20{,}25$$

Relativna napaka količine n^2 je dvakratna relativna napaka izmerka n:

$$\delta(n^2) = 2\delta n = 2 \cdot 0{,}67\,\% = 1{,}34\,\% = 0{,}0134$$

Absolutna napaka količine n^2 je tako:

$$\Delta(n^2) = n^2\delta(n^2) = 20{,}25 \cdot 0{,}0134 = 0{,}27135$$

Od n^2 odštejmo m:

$$n^2 - m = 20{,}25 - 8{,}75 = 11{,}5$$

Absolutna napaka vrednosti $n^2 - m$ je vsota absolutnih napak n^2 in m:

$$\Delta(n^2 - m) = \Delta n^2 + \Delta m = 0{,}27135 + 0{,}04 = 0{,}31135$$

Vrednost $(n^2 - m)$ moramo kvadrirati, zato za izračun končne napake porebujemo relativno napako te vrednosti:

$$\delta(n^2 - m) = \frac{\Delta(n^2 - m)}{n^2 - m} = \frac{0{,}31135}{11{,}5} = 0{,}027 = 2{,}7\,\%$$

Na koncu kvadrirajmo $n^2 - m$:

$$(n^2 - m)^2 = 11{,}5^2 = 132{,}25$$

Relativna napaka rezultata je dvakratna relativna napaka vrednosti $n^2 - m$:

$$\delta(n^2 - m)^2 = 2\delta(n^2 - m) = 2 \cdot 2{,}7\,\% = 5{,}4\,\% = 0{,}054$$

Izračunajmo absolutno napako rezultata:

$$\begin{aligned} \Delta(n^2 - m)^2 &= (n^2 - m)^2\delta(n^2 - m)^2 = \\ &= 132{,}25 \cdot 0{,}054 = 7{,}1415 = 7 \end{aligned}$$

Končno zaokrožimo rezultat glede na absolutno napako:

$$(n^2 - m)^2 = \underline{\underline{132 \pm 7}}$$

<u>2.NAČIN</u>

Najprej kvadrirajmo izraz, ki ga moramo izračunati:

$$(n^2 - m)^2 = n^4 - 2n^2m + m^2$$

Vsak del posebej izračunajmo in mu določimo absolutno napako. Najprej n^4:

$$n^4 = 4{,}50^4 = 410{,}0625$$

Relativna napaka potence n^4 je štirikratna relativna napaka izmerka n. Relativno napako izmerka n smo izračunali v prvem načinu reševanja in jo uporabimo:

$$\delta n^4 = 4\delta n = 4 \cdot 0{,}67\,\% = 2{,}68\,\% = 0{,}0268$$

Tako je absolutna napaka izraza n^4:

$$\Delta n^4 = n^4\delta n^4 = 410{,}0625 \cdot 0{,}0268 = 10{,}989$$

Izračunajmo $2n^2m$ in ocenimo napako tega:

$$2n^2m = 2 \cdot 4{,}50^2 \cdot 8{,}75 = 354{,}375$$

Relativna napaka tega dela je vsota dvakratne napake izmerka n in napake izmerka m:

$$\delta(2n^2m) = 2\delta n + \delta m$$

Ker je relativna napaka izmerka m

$$\delta m = \frac{\Delta m}{m} = \frac{0{,}04}{8{,}75} = 0{,}0046 = 0{,}46\,\%$$

je relativna napaka drugega dela:

$$\delta(2n^2m) = 2 \cdot 0{,}67\,\% + 0{,}46\,\% = 1{,}8\,\% = 0{,}018$$

Absolutna napaka dela $2n^2m$ je tedaj:

$$\Delta(2n^2m) = 2n^2m\delta(2n^2m) = 354{,}375 \cdot 0{,}018 = 6{,}37875$$

Zadnji del m^2 je:

$$m^2 = 8{,}75^2 = 76{,}5625$$

Relativna napaka izraza m^2 je dvakratna relativna napaka izmerka m:

$$\delta(m^2) = 2\delta m = 2 \cdot 0{,}46\,\% = 0{,}92\,\% = 0{,}0092$$

Od tod je absolutna napaka zadnjega dela:

$$\Delta m^2 = m^2\delta(m^2) = 76{,}5625 \cdot 0{,}0092 = 0{,}704375$$

Končno izračunajmo vrednost izraza:

$$\begin{aligned} (n^2 - m)^2 &= n^4 - 2n^2m + m^2 = \\ &= 410{,}0625 - 354{,}375 + 76{,}5625 = \\ &= 132{,}25 \end{aligned}$$

Absolutna napaka vrednosti je vsota absolutnih napak posameznih delov:

$$\begin{aligned} \Delta(n^2 - m)^2 &= 10{,}989 + 6{,}37875 + 0{,}704375 = \\ &= 18{,}0721 = 20 \end{aligned}$$

Zaokrožimo rezultat glede na absolutno napako:

$$(n^2 - m)^2 = \underline{\underline{130 \pm 20}}$$

Pojasnilo:

Do različnih rezultatov pri računanju na različne načine pride zato, ker računanje z napakami ni natančno, pač pa le približno. Pri tem dobimo približno vrednost napake rezultata, ki je pri zapletenejših primerih, kot v tej nalogi, lahko res le groba ocena.

Pomembno:

Pri reševanju pravih fizikalnih problemov so podatki vedno izmerjene količine in moramo paziti pri podajanju rezultatov, ki jih dobimo iz podatkov (izmerkov). Razen v tem poglavju, kjer so merske napake bistvene, pa v šoli ponavadi napak ne računamo, pač pa se vnaprej odločimo za neko natančnost, s katero podajamo podatke in rezultate. V tej knjigi (in tudi naslednjih knjigah te zbirke) so podatki podani na dve mesti natančno, prav tako so rezultati zaokroženi na dve mesti. Zaradi natančnosti so vmesni rezultati zaokroženi na štiri mesta. Pri računanju ponavadi vmesne rezultate kar pustimo v kalkulatorju in jih uporabimo za nadaljne računanje, ne da bi jih zaokrožili. Tako dobljeni končni rezultati se ne bi smeli opazno razlikovati od tistih v knjigi.

2. Gibanje

2.1 Premo enakomerno gibanje

1. Avtomobil vozi po avtocesti s stalno hitrostjo 120 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Kolikšno pot prevozi v 1,5 h in kolikšno v 20 s? Koliko časa potrebuje za 350 m dolgo pot?

Podatki:

$v = 120\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

$t = 1{,}5\ \text{h}$

$t_1 = 20\ \text{s}$

$s_2 = 350\ \text{m}$

Ker se avtomobil giblje premo enakomerno, je njegova hitrost stalna in velja:

$$s = vt$$

Pot, ki jo avtomobil prevozi v 1,5 h, je tako:

$$s = 120\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1{,}5\,\text{h} = \underline{\underline{180\,\text{km}}}$$

V nadaljevanju naloge je čas podan v sekundah, zato hitrost pretvorimo v $\frac{\text{m}}{\text{s}}$:

$$v = 120\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 33{,}33\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Tako je pot, ki jo avtomobil prevozi v 20 sekundah:

$$s_1 = vt_1 = 33{,}33\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 20\,\text{s} = 667\,\text{m} = \underline{\underline{670\,\text{m}}}$$

Čas, v katerem avtomobil prevozi 350 m, izračunajmo iz enačbe $s = vt$:

$$t_2 = \frac{s_2}{v} = \frac{350\,\text{m}}{33{,}33\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 10{,}5\,\text{s} = \underline{\underline{11\,\text{s}}}$$

2. Janezek potrebuje za pot od doma do šole 24 minut. Kolikšna je njegova povprečna hitrost na poti v šolo, če je pot dolga 1,0 km? Na poti iz šole pa Janezek pospremi sošolko Metko, zato izbere nekoliko daljšo pot domov, in sicer 1,4 km, za kar porabi 36 min. Kolikšna je njegova povprečna hitrost pri hoji domov?

Podatki:

$t_1 = 24\,\text{min} = 0{,}40\,\text{h}$

$s_1 = 1{,}0\,\text{km}$

$s_2 = 1{,}4\,\text{km}$

$t_2 = 36\,\text{min} = 0{,}60\,\text{h}$

Hitrost telesa je kvocient poti in časa, v katerem telo opravi pot:

$$v = \frac{s}{t}$$

Janezkova hitrost na poti v šolo je tako:

$$v_1 = \frac{s_1}{t_1} = \frac{1{,}0\,\text{km}}{0{,}40\,\text{h}} = \underline{\underline{2{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}}$$

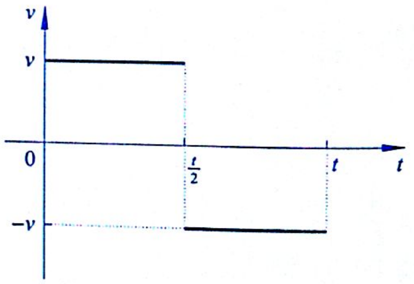
Na poti iz šole pa:

$$v_2 = \frac{s_2}{t_2} = \frac{1{,}4\,\text{km}}{0{,}60\,\text{h}} = 2{,}333\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \underline{\underline{2{,}3\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}}$$

Čeprav v tej nalogi to ni pomembno, pa se moramo zavedati, da je hitrost vektor in ima svojo smer. Hitrost je tako pozitivna, če se telo giblje v smeri izbrane pozitivne smeri, oziroma negativna, če se telo giblje v nasprotni smeri od izbrane pozitivne smeri.

Če si za pozitivno smer izberemo smer od doma proti šoli, potem je Janezkova hitrost na poti v šolo pozitivna, na poti domov pa negativna. Če pa si za pozitivno smer izberemo smer od šole proti domu, pa je Janezkova hitrost pozitivna na poti domov, na poti v šolo pa negativna.

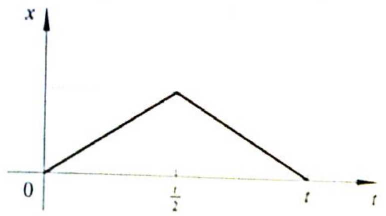
3. Opiši gibanje telesa, ki ga predstavlja graf hitrosti v odvisnosti od časa. Skiciraj še grafa lege in poti v odvisnosti od časa za to gibanje.



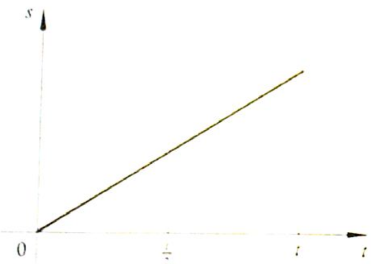
Graf prikazuje enakomerno gibanje, saj se hitrost ne spreminja. Prvo polovico časa je hitrost pozitivna, kar pomeni, da se telo giblje v pozitivni smeri (glede na **izbrano** pozitivno smer). Drugo polovico časa se telo giblje z enako veliko, a negativno hitrostjo, torej v nasprotno smer kot v prvi polovici časa.

Pri risanju grafov lege in poti v odvisnosti od časa moramo biti previdni. Mnogi namreč ne ločijo lege in poti in pri tem pogosto nastanejo težave.

Lega telesa je njegov položaj glede na izbrano izhodišče. V začetku postavimo telo v izhodišče. Prvo polovico časa je hitrost pozitivna, telo se giblje v pozitivni smeri, torej se oddaljuje od izhodišča. Drugo polovico časa je hitrost negativna, telo se izhodišču približuje. Ker je hitrost v obeh polovicah enako velika, se telo na koncu vrne v izhodišče, torej je njegova lega enaka kot na začetku gibanja:



Ko pa rišemo pot v odvisnosti od časa, nas ne zanima smer gibanja telesa, ampak le kolikšno pot opravi. Graf poti v odvisnosti od časa torej v obeh delih poti narašča. Na koncu je telo opravilo pot, ki je enaka seštevku poti v eno in drugo smer:



4. Tekmovalci v hitri hoji tekmujejo na maratonu. Hitrost tekmovalcev merijo tako, da izmerijo čas med dvema kontrolnima točkama, ki sta oddaljeni 60 m. Vodilni tekmovalec potrebuje za pot med kontrolnima točkama 13 sekund, prvi zasledovalec pa 15 sekund. Nariši grafa poti in hitrosti v odvisnosti od časa za pot tekmovalcev med kontrolnima točkama.

Podatki:

$d = 60$ m

$t_1 = 13$ s

$t_2 = 15$ s

Z enačbo $s = vt$ izračunajmo hitrosti obeh tekmovalcev. Upoštevajmo, da je pot v tem primeru za oba enaka $d = 60$ m:

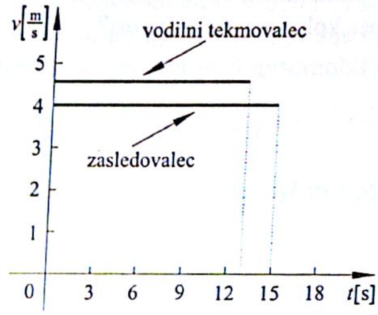
$$v_1 = \frac{d}{t_1} = \frac{60\,\mathrm{m}}{13\,\mathrm{s}} = 4{,}615\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{4{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

in

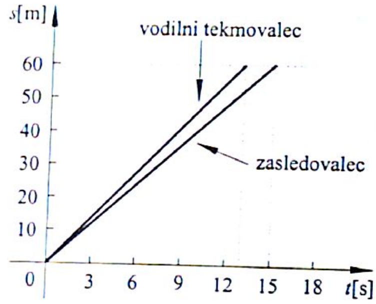
$$v_2 = \frac{d}{t_2} = \frac{60\,\mathrm{m}}{15\,\mathrm{s}} = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{4{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

Na grafu hitrosti v odvisnosti od časa narišimo obe hitrosti.

Hitrosti se ne spreminjata; vodilni tekmovalec ima večjo hitrost:



Na grafu poti v odvisnosti od časa postavimo prvo kontrolno točko v koordinatno izhodišče. Druga kontrolna točka je tako za $d = 60$ m oddaljena od izhodišča. Premica, ki kaže pot vodilnega tekmovalca, je strmejša; njegova hitrost je večja:



5. Motorist vozi enakomerno in prevozi neko pot v času t_0, če se giblje s hitrostjo v_0. V kolikšnem času bi prevozil polovico te poti, če bi se gibal s hitrostjo $3v_0$?

Naj bo s_0 pot, ki jo prevozi motorist s hitrostjo v_0 v času t_0. Tako velja:

$$s_0 = v_0 t_0$$

oziroma

$$t_0 = \frac{s_0}{v_0}$$

S t označimo čas, v katerem bi motorist naredil polovico te poti ($\frac{s_0}{2}$) pri trojni hitrosti ($3v_0$). Tako je:

$$t = \frac{\frac{s_0}{2}}{3v_0} = \frac{s_0}{6v_0}$$

Upoštevajmo, da je $t_0 = \frac{s_0}{v_0}$, in dobimo:

$$t = \underline{\underline{\frac{t_0}{6}}}$$

Motorist bi za polovico poti s_0 pri hitrosti $3v_0$ porabil šestino časa t_0.

6. Kolesar vozi pol ure enakomerno s hitrostjo 20 $\frac{km}{h}$ in še tri četrtine ure enakomerno s hitrostjo 30 $\frac{km}{h}$. Kolikšna je povprečna hitrost kolesarja na tej poti?

Podatki:

$t_1 = 0{,}5\,h$

$v_1 = 20\,\frac{km}{h}$

$t_2 = 0{,}75\,h$

$v_2 = 30\,\frac{km}{h}$

Povprečna hitrost je celotna pot deljena s celotnim časom gibanja:

$$\overline{v} = \frac{s_{cel}}{t_{cel}}$$

Če je gibanje sestavljeno iz več delov, za vsak del posebej izračunamo pot in čas, poti in čase seštejemo, tako da dobimo celotno pot in celotni čas.

V tej nalogi je pot sestavljena iz dveh delov. V prvem delu vozi kolesar 0,5 h s hitrostjo 20 $\frac{km}{h}$, v drugem delu pa 0,75 h s hitrostjo 30 $\frac{km}{h}$.

Najprej seštejmo časa obeh delov, da dobimo celotni čas:

$$t_{cel} = t_1 + t_2 = 0{,}5\,h + 0{,}75\,h = 1{,}25\,h$$

Za vsak del posebej izračunajmo pot:

$$s_1 = v_1 t_1 = 20\,\frac{km}{h} \cdot 0{,}5\,h = 10\,km$$

in

$$s_2 = v_2 t_2 = 30\,\frac{km}{h} \cdot 0{,}75\,h = 22{,}5\,km$$

Poti seštejmo, da dobimo celotno pot:

$$s_{cel} = s_1 + s_2 = 32{,}5\,km$$

Povprečna hitrost je tako:

$$\overline{v} = \frac{s_{cel}}{t_{cel}} = \frac{32{,}5\,km}{1{,}25\,h} = \underline{\underline{26\,\frac{km}{h}}}$$

7. Avtomobil prevozi 30 km s povprečno hitrostjo 60 $\frac{km}{h}$ in še 30 km s povprečno hitrostjo 30 $\frac{km}{h}$. Kolikšna je povprečna hitrost avtomobila na tej poti?

Podatki:

$s_1 = 30\,km$

$v_1 = 60\,\frac{km}{h}$

$s_2 = 30\,km$

$v_2 = 30\,\frac{km}{h}$

Pri nalogah, ko je **pot** razdeljena na dva enaka dela, je pogosta napaka, da povprečno hitrost računamo z enačbo $\frac{v_1+v_2}{2}$. Tak način je pravilen le, če je **čas** gibanja razdeljen na dva enaka dela. Vedno pa je priporočljivo računati povprečno hitrost kot v prejšnji nalogi, torej da je povprečna hitrost celotna pot deljena s celotnim časom:

$$\overline{v} = \frac{s_{cel}}{t_{cel}}$$

Seštejmo oba dela poti, da dobimo celotno pot:

$$s_{cel} = s_1 + s_2 = 60\,km$$

Za vsak del gibanja izračunajmo čas:

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{30\,km}{60\,\frac{km}{h}} = 0{,}5\,h$$

in

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{30\,km}{30\,\frac{km}{h}} = 1\,h$$

Celotni čas je tako:

$$t_{cel} = t_1 + t_2 = 1{,}5\,h$$

in povprečna hitrost:

$$v = \frac{s_{cel}}{t_{cel}} = \frac{60\,km}{1{,}5\,h} = \underline{\underline{40\,\frac{km}{h}}}$$

△8. Prvi kolesar vozi polovico poti s hitrostjo v_0, drugo polovico poti pa s hitrostjo $2v_0$. Drugi kolesar vozi polovico časa s hitrostjo v_0, drugo polovico časa pa s hitrostjo $2v_0$. Kateri kolesar ima večjo povprečno hitrost?

Izračunajmo povprečno hitrost kolesarjev, kot smo to naredili v prejšnjih nalogah.

Prvi kolesar je prvo polovico poti ($\frac{s_0}{2}$) prevozil s hitrostjo v_0. Z enačbo $t = \frac{s}{v}$ izrazimo čas, v katerem je prvi kolesar prevozil prvo polovico poti:

$$t_1 = \frac{\frac{s_0}{2}}{v_0} = \frac{s_0}{2v_0}$$

Drugo polovico poti ($\frac{s_0}{2}$) je prvi kolesar prevozil s hitrostjo $2v_0$. Tako je čas, v katerem je prevozil to pot:

$$t_2 = \frac{\frac{s_0}{2}}{2v_0} = \frac{s_0}{4v_0}$$

Od tod je celotni čas vožnje prvega kolesarja:

$$t_{\text{cel}} = t_1 + t_2 = \frac{s_0}{2v_0} + \frac{s_0}{4v_0} = \frac{2s_0 + s_0}{4v_0} = \frac{3s_0}{4v_0}$$

Povprečna hitrost prvega kolesarja je tako:

$$\overline{v}_1 = \frac{s_{\text{cel}}}{t_{\text{cel}}} = \frac{s_0}{\frac{3s_0}{4v_0}} = \frac{4v_0}{3}$$

Drugi kolesar je polovico časa ($\frac{t_0}{2}$) vozil s hitrostjo v_0, drugo polovico časa ($\frac{t_0}{2}$) pa s hitrostjo $2v_0$.

Celotni čas je kar t_0, izračunajmo pa pot za vsak del posebej:

$$s_1 = v_0 \frac{t_0}{2} = \frac{v_0 t_0}{2}$$

in

$$2v_0 \frac{t_0}{2} = v_0 t_0$$

Seštejmo s_1 in s_2, da dobimo celotno pot.

$$s_{\text{cel}} = s_1 + s_2 = \frac{v_0 t_0}{2} + v_0 t_0 = \frac{3v_0 t_0}{2}$$

Tako je povprečna hitrost drugega kolesarja

$$\overline{v}_2 = \frac{s_{\text{cel}}}{t_{\text{cel}}} = \frac{\frac{3v_0 t_0}{2}}{t_0} = \frac{3v_0}{2}$$

Povprečna hitrost drugega kolesarja ($\frac{3v_0}{2}$) je večja od povprečne hitrosti prvega kolesarja ($\frac{4v_0}{3}$), saj je $\frac{3}{2}$ več kot $\frac{4}{3}$.

9. Dva avtomobila vozita enakomerno drug za drugim. V nekem trenutku je razdalja med njima 500 m. Čez koliko časa bo drugi avtomobil ujel prvega, če je hitrost prvega 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, drugega pa 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$?

Podatki:

$d = 500\,\text{m}$

$v_1 = 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 16{,}67\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

$v_2 = 100\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 27{,}78\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

1.NAČIN

Drugi avtomobil je za 40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ (to je 11,11 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$) hitrejši od prvega. Lahko si mislimo, da avtomobil s to hitrostjo prevozi razdaljo, ki ju ločuje (500 m).

Iz enačbe $s = vt$ izrazimo in izračunajmo čas, ki je potreben drugemu avtomobilu, da ujame prvega:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{500\,\text{m}}{11{,}11\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = \underline{\underline{45\,\text{s}}}$$

△2.NAČIN

Drugi avtomobil na začetku za $d = 500$ m zaostaja za prvim. Pot, ki jo prevozi, da ga ujame (s_2), je zato toliko daljša od poti, ki jo v tem času prevozi prvi avtomobil (s_1):

$$s_2 = s_1 + d$$

V enačbo vstavimo $s_1 = v_1 t$ in $s_2 = v_2 t$ in dobimo:

$$v_2 t = v_1 t + d$$

Od tod izrazimo in izračunajmo čas, ki ga potrebuje drugi avtomobil, da ujame prvega:

$$\begin{aligned} v_2 t - v_1 t &= d \\ t(v_2 - v_1) &= d \\ t &= \frac{d}{v_2 - v_1} = \frac{500\,\text{m}}{27{,}78\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 16{,}67\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = \underline{\underline{45\,\text{s}}} \end{aligned}$$

10. Tovornjak odpelje ob 8^{00} iz Ljubljane proti Mariboru in vozi enakomerno s hitrostjo 55 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Istočasno odpelje drugi tovornjak iz Maribora proti Ljubljani in vozi enakomerno s hitrostjo 85 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Koliko je od Ljubljane oddaljena gostilna, v katero prispeta oba tovornjaka istočasno? Kdaj prispeta v gostilno? Razdalja Ljubljana–Maribor je 130 km.

Podatki:

$v_1 = 55\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

$v_2 = 85\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

$d = 130\,\text{km}$

Tovornjaka do srečanja v gostilni skupaj prevozita pot, ki je enaka razdalji Ljubljana–Maribor ($d = 130$ km):

$$s_1 + s_2 = d$$

V enačbo vstavimo izraza $s_1 = v_1 t$ in $s_2 = v_2 t$:

$$v_1 t + v_2 t = d$$

Upoštevali smo, da je čas za oba enak. Sedaj izračunajmo čas od začetka vožnje do srečanja:

$$\begin{aligned} t(v_1 + v_2) &= d \\ t &= \frac{d}{v_1 + v_2} = \frac{130\,\text{km}}{55\,\frac{\text{km}}{\text{h}} + 85\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = \\ &= 0{,}9286\,\text{h} = 0{,}93\,\text{h} = \underline{\underline{56\,\text{min}}} \end{aligned}$$

Tovornjaka se srečata po 56 minutah vožnje (ob 8^{56}).

Da dobimo oddaljenost mesta srečanja od Ljubljane, čas vožnje do srečanja (0,9286 h) postavimo v enačbo za s_1:

$$s_1 = v_1 t = 55\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot 0{,}9286\,\mathrm{h} = 51{,}07\,\mathrm{km} = \underline{\underline{51\,\mathrm{km}}}$$

△11. Tovorni vlak pelje skozi postajo A in vozi enakomerno proti postaji B s hitrostjo 90 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Najmanj koliko za njim lahko skozi postajo A pelje potniški vlak, ki vozi po isti progi proti postaji B s hitrostjo 130 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, da dohiti tovorni vlak šele na postaji B? Nariši graf poti v odvisnosti od časa za oba vlaka. Razdalja med postajama je 25 km.

Podatki:

$v_1 = 90\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

$v_2 = 130\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

$d = 25\,\mathrm{km}$

Upoštevajmo, da je pot za oba vlaka enaka, $d = 25$ km, in izračunajmo čas, ki ga vsak porabi za pot med postajama.

Tovorni vlak:

$$t_1 = \frac{d}{v_1} = \frac{25\,\mathrm{km}}{90\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} = 0{,}2778\,\mathrm{h} = 16{,}67\,\mathrm{min}$$

Potniški vlak:

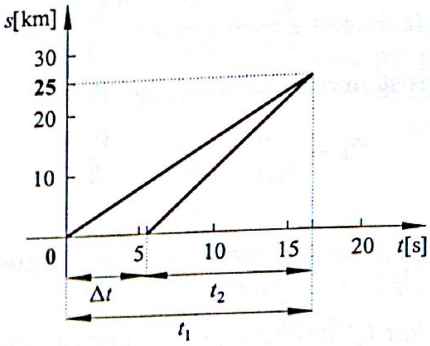
$$t_2 = \frac{d}{v_2} = \frac{25\,\mathrm{km}}{130\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} = 0{,}1923\,\mathrm{h} = 11{,}54\,\mathrm{min}$$

Potniški vlak za pot med postajama porabi za $\Delta t = t_1 - t_2$ manj časa kot tovorni, kar pomeni, da mora vsaj toliko časa kasneje prevoziti postajo A. Tako mora biti zakasnitev potniškega vlaka najmanj:

$$\begin{aligned}\Delta t &= t_1 - t_2 = 16{,}67\,\mathrm{min} - 11{,}54\,\mathrm{min} = \\ &= 5{,}13\,\mathrm{min} = \underline{\underline{5{,}1\,\mathrm{min}}}\end{aligned}$$

Upoštevajmo podatke in izračune ter narišimo graf poti v odvisnosti od časa za oba vlaka.

Postajo A postavimo v koordinatno izhodišče. Tako je postaja B za $d = 25$ km oddaljena od izhodišča. Čas, ko skozi postajo A pelje tovorni vlak, štejmo za začetni čas. Potniški vlak pelje skozi postajo A 5,1 min kasneje, zato je njegov graf toliko zakasnjen na časovni osi. Oba vlaka prispeta na postajo B istočasno, to je 16,7 min zatem, ko je skozi postajo A peljal tovorni vlak:



2.2 Premo enakomerno pospešeno gibanje

1. Kolikšen je pospešek gliserja, ki v 5,0 sekundah pospeši iz mirovanja do 30 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$? Kolikšen pa je pospešek (pojemek) gliserja, če od hitrosti 30 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ ustavi v 5,0 sekundah?

Podatki:

$t = 5{,}0\,\mathrm{s}$

$v = 30\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 8{,}333\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Pospešek je kvocient spremembe hitrosti in časovnega intervala, v katerem se sprememba zgodi:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Sprememba hitrosti je razlika med končno in začetno hitrostjo:

$$\Delta v = v_{\mathrm{k}} - v_{\mathrm{z}}$$

V prvem primeru je sprememba hitrosti gliserja:

$$\Delta v = 8{,}333\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 8{,}333\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Upoštevali smo, da gliser na začetku miruje.

Od tod je pospešek:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{8{,}333\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{5{,}0\,\mathrm{s}} = 1{,}667\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \underline{\underline{1{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}$$

Ko pa gliser zavira in je končna hitrost enaka nič, je sprememba hitrosti:

$$\Delta v = v_k - v_z = 0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 8{,}333\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = -8{,}333\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

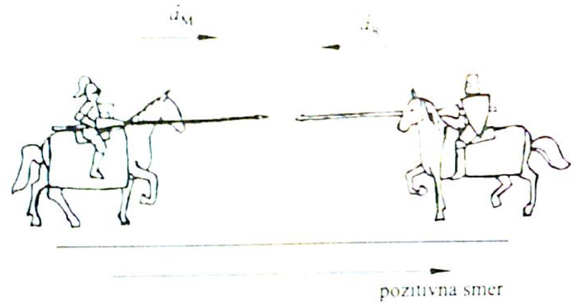
Pospešek (pojemek) je tako:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-8{,}333\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{5\,\mathrm{s}} = -1{,}667\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \underline{\underline{-1{,}7\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}$$

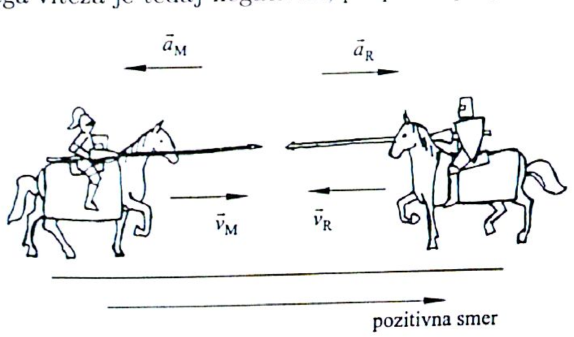
To, da je pospešek pri pospeševanju pozitiven, pri zaviranju pa negativen, je posledica tega, da si za pozitivno smer izberemo smer gibanja. Pospešek je namreč vektor, ki pri pospeševanju kaže v smeri gibanja, pri zaviranju pa v nasprotni smeri gibanja.

2. Modri in rdeči vitez na konjih stojita vsak na svojem koncu bojišča. Na znak začneta pospeševati drug proti drugemu. Izberi si pozitivno smer in povej, kakšno smer imata hitrost in pospešek vsakega od vitezov. Kaj pa ko viteza pred srečanjem zavirata?

Za pozitivno smer izberimo smer gibanja modrega viteza. Njegova hitrost in pospešek sta tako pozitivna. Rdeči vitez pa se giblje in pospešuje v negativni smeri, zato sta njegova hitrost in pospešek negativna.



Ko viteza zavirata, se jima spremenita smeri pospeškov, ne pa tudi hitrosti, saj se še vedno gibljeta v enakih smereh kot prej. Glede na izbrano pozitivno smer je tako hitrost modrega viteza pozitivna, njegov pospešek pa negativen. Hitrost rdečega viteza je tedaj negativna, pospešek pa pozitiven:



Hitro lahko ugotovimo smeri hitrosti in pospeškov obeh vitezov v primeru, da bi si za pozitivno smer izbrali smer gibanja rdečega viteza. Na zgornjih slikah obrnimo pozitivno smer v smeri gibanja rdečega viteza in dobimo smeri hitrosti in pospeškov ravno obrnjene kot prej.

Kadar v nalogi nastopa le eno telo, za pozitivno smer ponavadi izberemo smer gibanja telesa. Pospešek je tedaj pri pospeševanju pozitiven, pri zaviranju pa negativen.

3. Najmanj koliko mora biti dolga vzletna steza, če se letalo med 20 sekund trajajočim vzletom giblje s pospeškom 3,0 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, da doseže potrebno hitrost? Kolikšna je ta hitrost?

Podatki:

$t = 20\,\mathrm{s}$

$a = 3{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Najmanjša dolžina vzletne steze je pot, ki jo letalo prevozi med 20-sekundnim vzletom. Izračunajmo jo z enačbo za pot pri enakomerno pospešenem gibanju:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Upoštevajmo, da letalo nima začetne hitrosti ($v_0 = 0$), in dobimo:

$$s = \frac{at^2}{2} = 3{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{(20\,\mathrm{s})^2}{2} = \underline{\underline{600\,\mathrm{m}}}$$

Kolikšno hitrost ima letalo na koncu vzletne steze, izračunajmo z enačbo za hitrost pri enakomerno pospešenem gibanju:

$$v = v_0 + at$$

Ker letalo nima začetne hitrosti, vstavimo $v_0 = 0$ in dobimo:

$$v = at = 3{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 20\,\mathrm{s} = \underline{\underline{60\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

4. Voznik bolida formule 1 začne pred ovinkom zavirati s stalnim pojemkom 8,0 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Koliko metrov pred ovinkom mora začeti zavirati, če začne zavirati pri hitrosti 250 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, zaviranje pa traja 0,45 s?

Podatki:

$a = 8{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

$v_0 = 250\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 69{,}44\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$t = 0{,}45\,\mathrm{s}$

Pot, ki jo bolid opravi med zaviranjem, izračunajmo z enačbo $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, pri kateri upoštevajmo, da je pospešek bolida negativen:

$$s = v_0t + \frac{(-a)t^2}{2} =$$
$$= 69{,}44\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 0{,}45\,\mathrm{s} + \left(-8{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) \cdot \frac{(0{,}45\,\mathrm{s})^2}{2} =$$
$$= 30{,}44\,\mathrm{m} = \underline{\underline{30\,\mathrm{m}}}$$

Enačbe enakomerno pospešenega gibanja ($s = v_0t + \frac{at^2}{2}$, $v = v_0 + at$ in $v^2 = {v_0}^2 + 2as$) so izpeljane za primer, ko je pozitivna smer kar smer gibanja. Pospešek je pozitiven, ko telo pospešuje, in negativen, ko telo zavira.

5. Avtomobil začne pri hitrosti 75 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ enakomerno pospeševati. Pospešuje 3,0 s in v tem času prevozi 110 m. S kolikšnim pospeškom pospešuje? Kolikšna je njegova hitrost po treh sekundah pospeševanja?

Podatki:

$v_0 = 75\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 20{,}83\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$t = 3{,}0\,\mathrm{s}$

$s = 110\,\mathrm{m}$

Pospešek avtomobila izrazimo in izračunajmo iz enačbe $s = v_0t + \frac{at^2}{2}$:

$$s - v_0t = \frac{at^2}{2}$$
$$2(s - v_0t) = at^2$$
$$a = \frac{2(s - v_0t)}{t^2} =$$
$$= \frac{2(110\,\mathrm{m} - 20{,}83\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 3{,}0\,\mathrm{s})}{(3{,}0\,\mathrm{s})^2} =$$
$$= 10{,}56\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \underline{\underline{11\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}$$

Rezultat uporabimo za izračun končne hitrosti avtomobila:

$$v = v_0 + at =$$
$$= 20{,}83\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 10{,}56\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 3{,}0\,\mathrm{s} =$$
$$= 52{,}51\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{53\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

6. Kolesar se začne gibati enakomerno pospešeno. Po 100 m doseže maksimalno hitrost 30 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. S kolikšnim pospeškom se giblje? Koliko časa pospešuje?

Podatki:

$s = 100\,\mathrm{m}$

$v = 30\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 8{,}333\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Za izračun pospeška, s katerim se giblje kolesar, zapišimo enačbo za hitrost v odvisnosti od poti pri enakomerno pospešenem gibanju:

$$v^2 = {v_0}^2 + 2as$$

Kolesar nima začetne hitrosti ($v_0 = 0$), zato je:

$$v^2 = 2as$$

Od tod pa pospešek kolesarja:

$$a = \frac{v^2}{2s} = \frac{\left(8{,}333\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{(2 \cdot 100\,\mathrm{m})} =$$
$$= 0{,}3472\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \underline{\underline{0{,}35\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}$$

Ne pozabimo, da je pospešek kolesarja stalen, tako da rezultat $a = 0{,}3472\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ uporabimo za nadaljnje računanje.

Čas pospeševanja kolesarja izračunajmo iz enačbe $v = v_0 + at$, v kateri upoštevajmo, da je $v_0 = 0$:

$$v = at$$

Od tod je:

$$t = \frac{v}{a} = \frac{8{,}333\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{0{,}3472\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \underline{24\,\mathrm{s}}$$

7. Tovornjak pri hitrosti 77 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ začne enakomerno zavirati. S kolikšnim pojemkom zavira, če se ustavi po 13 sekundah? Kolikšno pot prevozi med ustavljanjem? Kolikšno pot pa prevozi do trenutka, ko je njegova hitrost 23 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$?

Podatki:

$v_0 = 77\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 21{,}39\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$t = 13\,\mathrm{s}$

$v = 23\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 6{,}389\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Gibanje tovornjaka je enakomerno pojemajoče s končno hitrostjo nič, saj se tovornjak ustavi. To upoštevajmo v enačbi $v = v_0 + at$ in iz nje izračunajmo pospešek:

$$\begin{aligned} 0 &= v_0 + at \\ a &= -\frac{v_0}{t} = -\frac{21{,}39\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{13\,\mathrm{s}} = -1{,}645\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \underline{\underline{-1{,}6\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} \end{aligned}$$

Izračunani pospešek uporabimo še za izračun poti, ki jo tovornjak prevozi med ustavljanjem:

$$\begin{aligned} s &= v_0 t + \frac{at^2}{2} = \\ &= 21{,}39\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 13\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + \left(-1{,}645\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) \cdot \frac{(13\,\mathrm{s})^2}{2} = \\ &= 139{,}1\,\mathrm{m} = \underline{\underline{140\,\mathrm{m}}} \end{aligned}$$

Pri računanju poti, ki jo tovornjak naredi med zaustavljanjem s pospeškom $a = -1{,}645\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ od $77\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ ($21{,}39\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$) do $23\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ ($6{,}389\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$), si pomagajmo z enačbo:

$$v^2 = {v_0}^2 + 2as$$

Tako je:

$$\begin{aligned} v^2 - {v_0}^2 &= 2as \\ s &= \frac{v^2 - {v_0}^2}{2a} = \\ &= \frac{\left(6{,}389\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - \left(21{,}39\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2 \cdot \left(-1{,}645\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)} = \\ &= 126{,}7\,\mathrm{m} = \underline{\underline{130\,\mathrm{m}}} \end{aligned}$$

8. Telo se giblje s stalnim pospeškom a in od mirovanja do končne hitrosti pospeši na poti s. Na kolikšni poti pospeši do polovice končne hitrosti?

Pri podobnih nalogah nas prehitro sklepanje velikokrat pripelje do napačnega zaključka. V tem primeru je pogosta zmota, ko mislimo, da telo do polovice končne hitrosti prevozi tudi polovico poti.

Podobne naloge vedno rešujmo tako, da z enačbami povežemo količine, ki nas zanimajo.

Pot, ki jo telo naredi od mirovanja do končne hitrosti, izrazimo z enačbo $v^2 = {v_0}^2 + 2as$:

$$\begin{aligned} v^2 &= 2as \\ s &= \frac{v^2}{2a} \end{aligned}$$

Sedaj pa zapišimo še izraz za pot, ki jo telo opravi do polovice končne hitrosti ($\frac{v}{2}$):

$$s' = \frac{\left(\frac{v}{2}\right)^2}{2a} = \frac{v^2}{4 \cdot 2a}$$

V enačbi upoštevajmo, da je $s = \frac{v^2}{2a}$, in dobimo:

$$s' = \frac{s}{4}$$

Telo do polovice končne hitrosti prevozi le četrtino poti. Tak rezultat je posledica kvadratne odvisnosti hitrosti in poti.

△9. Opazovalec stoji ob začetku prvega vagona mirujočega vlaka, ko ta odpelje. Prvi vagon se pomakne mimo njega v 5,3 sekunde. Koliko časa se bo mimo njega peljal šesti vagon, če so vsi vagoni enako dolgi, vlak pa ves čas pospešuje enakomerno?

V nalogi imamo podatek za čas pomika prvega vagona mimo opazovalca ob vlaku, zato zapišimo enačbo, ki poveže dolžino vagona in ta čas. V enačbi $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$ upoštevajmo, da vlak na začetku miruje ($v_0 = 0$) in enačbo zapišimo s količinama t_1 (čas pomika prvega vagona mimo opazovalca) in s_1 (dolžina prvega vagona):

$$s_1 = \frac{a{t_1}^2}{2}$$

Podobno zapišimo enačbo za pot s_5, ki jo vlak opravi od začetka gibanja pa do trenutka, ko do opazovalca pripelje začetek šestega vagona (tudi za ta primer je $v_0 = 0$):

$$s_5 = \frac{a{t_5}^2}{2}$$

Ker je s_5 dolžina petih vagonov, velja:

$$s_5 = 5s_1$$

saj so vsi vagoni enako dolgi.

V enačbo $s_5 = 5s_1$ vstavimo izraza za poti s_1 in s_5:

$$\frac{a{t_5}^2}{2} = 5\frac{a{t_1}^2}{2}$$

Od tod je:

$${t_5}^2 = 5{t_1}^2$$

In tako:

$$t_5 = \sqrt{5}t_1$$

Izračunajmo čas od trenutka, ko vlak spelje, pa do trenutka, ko mimo opazovalca pripelje začetek šestega vagona:

$$t_5 = \sqrt{5} \cdot 5{,}3\,\mathrm{s} = 11{,}85\,\mathrm{s}$$

Isti račun ponovimo še za pot s_6 od začetka gibanja vlaka do trenutka, ko mimo opazovalca pripelje konec šestega oziroma začetek sedmega vagona. V tem primeru je:

$$s_6 = 6s_1$$

Izvedimo še ostale račune enako kot v prvem primeru.

Za poti zapišimo:

$$s_1 = \frac{at_1{}^2}{2} \qquad \text{in} \qquad s_6 = \frac{at_6{}^2}{2}$$

Vstavimo v enačbo $s_6 = 6s_1$:

$$\frac{at_6{}^2}{2} = 6\frac{at_1{}^2}{2}$$

Po krajšanju dobimo:

$$t_6{}^2 = 6t_1{}^2$$

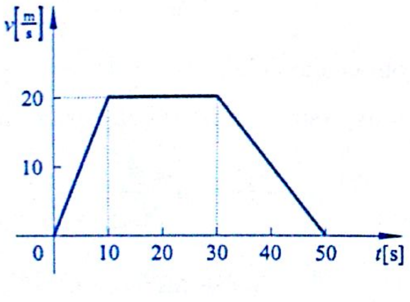
Tako dobimo še čas, v katerem vlak prevozi pot enako šestim dolžinam vagona:

$$t_6 = \sqrt{6}t_1 = \sqrt{6} \cdot 5{,}3\,\mathrm{s} = 12{,}98\,\mathrm{s}$$

Šesti vagon vozi mimo opazovalca od časa t_5 do časa t_6. Čas vožnje šestega vagona mimo opazovalca je tako:

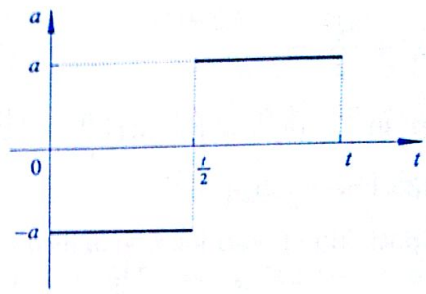
$$t = t_6 - t_5 = 12{,}98\,\mathrm{s} - 11{,}85\,\mathrm{s} = 1{,}13\,\mathrm{s} = 1{,}1\,\mathrm{s}$$

10. Opiši gibanje telesa, za katerega je narisan graf hitrosti v odvisnosti od časa.



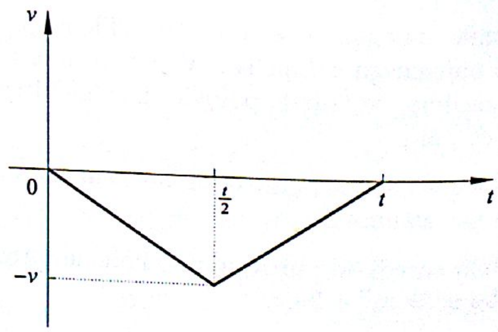
Prvih 10 sekund telo enakomerno pospešuje v pozitivni smeri. Hitrost se od mirovanja poveča na $20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Telo se zatem 20 sekund (od 10. do 30. sekunde) giblje enakomerno s hitrostjo $20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ v pozitivni smeri. Gibanje se zaključi z 20-sekundnim zaviranjem (od 30. do 50. sekunde), ko se telo od hitrosti $20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ustavi. Tudi v zadnjem delu je gibanje v pozitivni smeri, hitrost je pozitivna, le da je pospešek negativen.

11. Opiši, kako se giblje telo, ki se mu pospešek spreminja, kot je prikazano na grafu. Skiciraj graf hitrosti v odvisnosti od časa za to gibanje, če telo na začetku miruje:

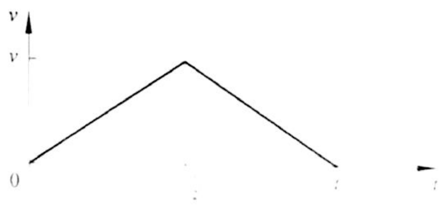


Gibanje je razdeljeno na dva enaka časovna intervala. V prvem je pospešek negativen, v drugem delu pa je pospešek enako velik, vendar pozitiven. O smeri (predznaku) pospeška smo že govorili. Opis gibanja, ki ga prikazuje graf, je odvisen od izbire pozitivne smeri. Če si za pozitivno smer izberemo pozitivno smer pospeška, potem telo v prvem delu pospešuje v negativno smer, v drugem pa v pozitivno smer. Ker telo na začetku miruje, v prvem delu pospeši od mirovanja do neke končne hitrosti, vendar v negativno smer. Lahko rečemo, da se hitrost zmanjša od 0 do končne hitrosti $-v$. V drugem delu telo pospešuje v pozitivno smer, zato se hitrost poveča. Ker je pospešek enako velik kot v prvem delu in je tudi čas pospeševanja v obeh delih enak, se hitrost poveča ravno toliko, kot se je v prvem delu zmanjšala, torej do nič.

Na te smeri hitrosti moramo paziti, ko rišemo graf hitrosti v odvisnosti od časa. Telo na začetku miruje, v prvem delu se hitrost zmanjša na $-v$, v drugem delu pa poveča nazaj na nič:



Če pa bi si za pozitivno smer izbrali negativno smer pospeška, bi bil pospešek v prvem delu pozitiven, v drugem pa negativen. Telo bi v tem primeru v prvem delu pospešilo do hitrosti v v pozitivni smeri, v drugem delu pa zaviralo do mirovanja:



12. Vlak vozi s hit[illegible] s pojemkom 2.4 [illegible] odvisnosti od čas[illegible]

Podatki:

$v_0 = 95\,\frac{km}{h}$ [illegible] 26.39 [illegible]

$a = 2.4\,\frac{m}{s^2}$

Da bomo grafe lahk[illegible] izraču-najmo pot in čas [illegible] smer izberimo smer gibanja vlaka. P[illegible] negativen.

Pot, ki jo vlak prev[illegible] izračunajmo z enačbo $v^2 = v_0^2 + 2as$ [illegible] da je končna hitrost nič (vlak se ustavi):

$$[illegible] + 2as$$

Od tod je:

$$s = -\frac{v_0^2}{2a} = -\frac{\left(26.39\,\frac{m}{s}\right)^2}{2\cdot\left(-2.4\,\frac{m}{s^2}\right)} =$$

$$= 145.1\,m = \underline{\underline{150\,m}}$$

Čas ustavljanja dobimo z enačbo $v = v_0 + at$, če upoštevamo, da je končna hitrost nič:

$$0 = v_0 + at$$

Tako je:

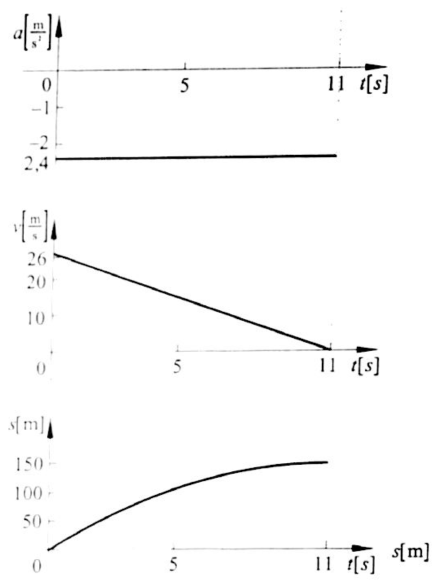
$$t = -\frac{v_0}{a} = -\frac{26{,}39\,\frac{m}{s}}{-2{,}4\,\frac{m}{s^2}} = 11\,s$$

S pomočjo teh izračunov in podatkov narišimo grafe. Rišimo jih enega pod drugim, da lahko primerjamo časovno os. Začetek (izhodišče) grafov naj bo v trenutku, ko vlak začne zavirati.

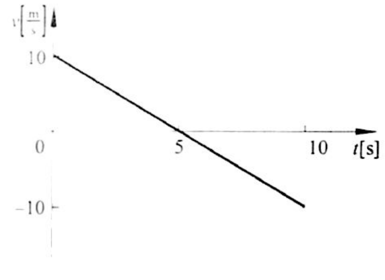
Pospešek vlaka je stalen (konstanten) in negativen.

Hitrost vlaka je največja na začetku, potem pa enakomerno pojema do mirovanja.

Pot, ki jo prevozi vlak, narašča vse počasneje, ko se manjša hitrost:



13. Hitrost žogice se spreminja kot kaže graf. Opiši to gibanje. Nariši grafa poti in lege v odvisnosti od časa za to gibanje.



Za pozitivno smer izberimo začetno smer gibanja žogice. Žogica prvih 5 sekund zavira od hitrosti $10\,\frac{m}{s}$ do mirovanja. Drugih 5 sekund žogica pospešuje v negativni smeri, hitrost se ji zmanjša na $-10\,\frac{m}{s}$.

Najprej izračunajmo pospešek žogice v prvih petih sekundah. Sprememba hitrosti v tem delu gibanja je:

$$\Delta v = v_k - v_z = 0\,\frac{m}{s} - 10\,\frac{m}{s} = -10\,\frac{m}{s}$$

Tako je pospešek žogice v prvem delu:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-10\,\frac{m}{s}}{5\,s} = -2\,\frac{m}{s^2}$$

S tem pospeškom z enačbo $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$ izračunajmo pot, ki jo žogica opravi v prvih petih sekundah (začetna hitrost v tem delu je $10\,\frac{m}{s}$):

$$s = 10\,\frac{m}{s} \cdot 5\,s \overset{-}{\cancel{+}} \frac{\left(-2\frac{m}{s^2}\right)(5\,s)^2}{2} = 25\,m$$

V drugem delu gibanja žogice je sprememba njene hitrosti:

$$\Delta v = v_k - v_z = -10\,\frac{m}{s} - 0\,\frac{m}{s} = -10\,\frac{m}{s}$$

Od tod pa pospešek:

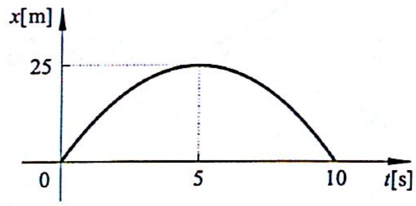
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-10\,\frac{m}{s}}{5\,s} = -2\,\frac{m}{s^2}$$

V enačbi $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$ upoštevajmo, da žogica na začetku drugega dela miruje, in dobimo:

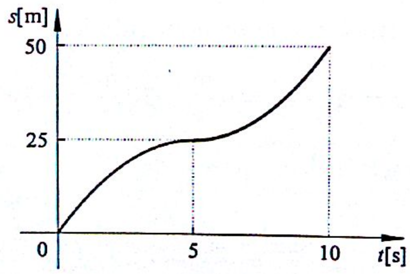
$$s = \frac{at^2}{2} = \frac{\left(-2\frac{m}{s^2}\right)(5s)^2}{2} = -25\,m$$

Pot, ki jo žogica opravi v drugem delu, je enako velika kot pot v prvem delu, vendar je negativna. To pomeni, da se žogica v drugem delu giblje v nasprotni smeri od izbrane pozitivne smeri oziroma v nasprotni smeri kot v prvem delu gibanja.

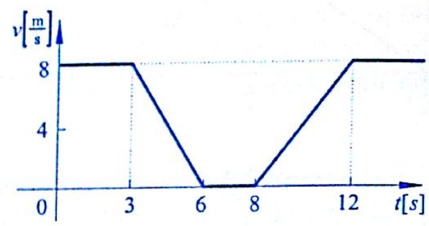
Pri risanju grafa lege v odvisnosti od časa upoštevajmo smer gibanja žogice. Lega v prvi polovici gibanja narašča do 25 m, v drugi polovici pa se zmanjša za 25 m, torej nazaj na nič. Povedano z drugimi besedami, žogica se vrne nazaj v prvotno lego:



Pri grafu poti v odvisnosti od časa pa ne upoštevajmo predznaka poti. V prvem delu je žogica opravila 25 m poti, prav tako pa tudi v drugem delu. Pazimo le na to, da je gibanje v prvem delu pojemajoče, v drugem delu pa pospešeno:



△ 14. Na grafu je prikazan časovni potek hitrosti za neko gibanje. Nariši še graf pospeška v odvisnosti od časa in ga opremi z ustreznimi vrednostmi. Kolikšen je pospešek v peti in kolikšen v deveti sekundi gibanja?



Iz grafa razberemo, da je gibanje sestavljeno iz petih delov. Prve 3 sekunde je gibanje enakomerno, od 3. do 6. sekunde je gibanje pojemajoče, od 6. do 8. sekunde telo miruje, od 8. do 12. sekunde je gibanje pospešeno in od 12. sekunde naprej enakomerno.

Pospešek je različen od nič le na dveh odsekih, in sicer med 3. in 6. sekundo, ko je negativen (hitrost se manjša), in med 8. in 12. sekundo, ko je pozitiven (hitrost narašča).

Najprej izračunajmo pospešek med 3. in 6. sekundo.

Na grafu odčitajmo čas ter začetno in končno hitrost na tem delu:

$t = 3\,s$

$v_0 = 8\,\frac{m}{s}$

$v = 0$

V enačbi $v = v_0 + at$ upoštevajmo, da je končna hitrost nič ($v = 0$):

$$0 = v_0 + at$$

Od tod je:

$$a = -\frac{v_0}{t} = -\frac{8\,\frac{m}{s}}{3\,s} = -2{,}677\,\frac{m}{s^2} = -2{,}7\,\frac{m}{s^2}$$

Pospešek med 3. in 6. sekundo je $-2{,}7\,\frac{m}{s^2}$.

Izračunajmo še pospešek med 8. in 12. sekundo.

Na grafu odčitajmo čas ter začetno in končno hitrost na tem delu:

$t = 4\,s$

$v_0 = 0$

$v = 8\,\frac{m}{s}$

Sedaj pa v enačbi $v = v_0 + at$ upoštevajmo, da ni začetne hitrosti ($v_0 = 0$):

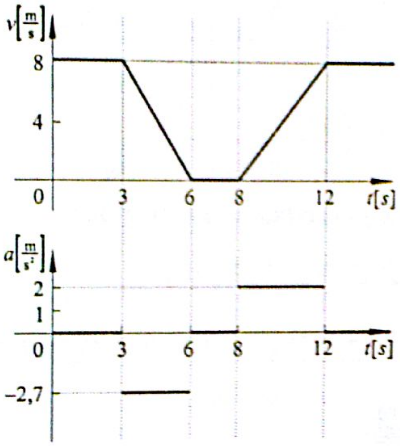
$$v = at$$

Tako dobimo:

$$a = \frac{v}{t} = \frac{8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{4\,\text{s}} = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Pospešek med 8. in 12. sekundo je $2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Za boljšo predstavo narišimo oba grafa. Pospešek je različen od nič le na odsekih med 3. in 6. sekundo ter med 8. in 12. sekundo:



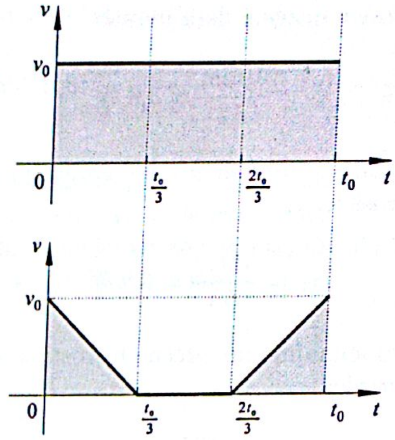
Odgovorimo še na vprašanji:

Pospešek med 3. in 6. sekundo je ves čas $-2{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, torej tudi v 5. sekundi. Prav tako je pospešek med 8. in 12. sekundo ves čas $2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, torej tudi v 9. sekundi.

△15. Avtomobil pelje s stalno hitrostjo. Ko voznik zagleda rdečo luč na semaforju, začne zaustavljati vozilo s stalnim pojemkom. Ustavi se pred semaforjem in čaka ravno toliko časa, kolikor je zaviral. Potem se prižge zelena luč in voznik pospeši do hitrosti, ki jo je imel pred zaviranjem. Pospešek je konstanten in je po velikosti enak pojemku, s katerim je zaviral. Kolikokrat več poti bi avtomobil prevozil od trenutka, ko začne zavirati, do trenutka, ko je njegova hitrost spet enaka začetni, če se mu ne bi bilo treba zaustaviti pri semaforju?

Pot telesa lahko preberemo iz grafa hitrosti v odvisnosti od časa. **Pot je površina lika, ki ga omejujeta krivulja hitrosti in abscisna os.**

V prvem primeru, ko avtomobil vozi brez ustavljanja, je pot kar površina pravokotnika, ki je narisan na prvem grafu. V drugem primeru je površina sestavljena iz dveh pravokotnih trikotnikov, ki skupaj tvorita pravokotnik; zanj ni težko ugotoviti, da je njegova površina trikrat manjša od tiste na prvem grafu:



Od tod sledi, da je pot, ki jo naredi avtomobil brez ustavljanja, trikrat večja od poti, ki jo naredi avtomobil, ki se ustavi pred semaforjem.

16. V tabeli je podano spreminjanje lege telesa glede na izbrano izhodišče. Izračunaj hitrosti in pospeške telesa in jih vstavi v tabelo. Kolikšen je povprečni pospešek telesa, če predpostavimo, da telo pospešuje enakomerno?

$t(\text{s})$	$x(\text{cm})$	$v(\frac{\text{cm}}{\text{s}})$	$a(\frac{\text{cm}}{\text{s}^2})$
0	0,0		
2,5		v_1	
5	6,0		a_1
7,5		v_2	
10	25		a_2
12,5		v_3	
15	56		a_3
17,5		v_4	
20	99		a_4
22,5		v_5	
25	155		a_5
27,5		v_6	
30	226		

Hitrost telesa je kvocient spremembe lege (poti) in časa:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Ker je gibanje pospešeno in se hitrost telesa spreminja, bomo tako izračunali povprečno hitrost telesa. V prvih petih sekundah se lega spremeni za 6,0 cm. Tako je povprečna hitrost telesa v prvih petih sekundah:

$$v_1 = \frac{6{,}0\,\text{cm}}{5\,\text{s}} = 1{,}2\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

V drugih petih sekundah se lega spremeni za 19 cm. Povprečna hitrost v drugem delu je tako:

$$v_2 = \frac{19\,\text{cm}}{5\,\text{s}} = 3{,}8\,\tfrac{\text{cm}}{\text{s}}$$

V naslednjih petih sekundah se lega spremeni za 31 cm in povprečna hitrost je:

$$v_3 = \frac{31\,\text{cm}}{5\,\text{s}} = 6{,}2\,\tfrac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Na ta način izračunajmo povprečne hitrosti še za ostale petsekundne intervale:

$$\begin{aligned} v_4 &= \frac{43\,\text{cm}}{5\,\text{s}} = 8{,}6\,\tfrac{\text{cm}}{\text{s}} \\ v_5 &= \frac{56\,\text{cm}}{5\,\text{s}} = 11{,}2\,\tfrac{\text{cm}}{\text{s}} \\ v_6 &= \frac{71\,\text{cm}}{5\,\text{s}} = 14{,}2\,\tfrac{\text{cm}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Pospešek telesa je kvocient spremembe hitrosti in ustreznega časovnega intervala:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

V petih sekundah (od 2,5 s do 7,5 s) se hitrost poveča od 1,2 $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ do 3,8 $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$, torej za 2,6 $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$. Pospešek je v tem delu tako:

$$a_1 = \frac{2{,}6\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}}{5\,\text{s}} = 0{,}52\,\tfrac{\text{cm}}{\text{s}^2}$$

V drugem intervalu (od 7,5 s do 12,5 s) se hitrost poveča za 2,4 $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ (6,2 $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ − 3,8 $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$). Pospešek v drugem intervalu je torej:

$$a_2 = \frac{2{,}4\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}}{5\,\text{s}} = 0{,}48\,\tfrac{\text{cm}}{\text{s}^2}$$

Izračunajmo še ostale pospeške na podoben način:

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{2{,}4\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}}{5\,\text{s}} = 0{,}48\,\tfrac{\text{cm}}{\text{s}^2} \\ a_4 &= \frac{2{,}6\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}}{5\,\text{s}} = 0{,}52\,\tfrac{\text{cm}}{\text{s}^2} \\ a_5 &= \frac{3{,}0\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}}{5\,\text{s}} = 0{,}60\,\tfrac{\text{cm}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

Izračunane vrednosti hitrosti in pospeška vstavimo v tabelo:

t(s)	x(cm)	$v(\frac{\text{cm}}{\text{s}})$	$a(\frac{\text{cm}}{\text{s}^2})$
0	0,0		
2,5		1,2	
5	6,0		0,52
7,5		3,8	
10	25		0,48
12,5		6,2	
15	56		0,48
17,5		8,6	
20	99		0,52
22,5		11,2	
25	155		0,60
27,5		14,2	
30	226		

Izračunajmo še povprečni pospešek gibanja:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5} = \\ &= \frac{0{,}52\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2} + 0{,}48\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2} + 0{,}48\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2} + 0{,}52\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2} + 0{,}60\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}}{5} = \\ &= \underline{\underline{0{,}52\,\tfrac{\text{cm}}{\text{s}^2}}} \end{aligned}$$

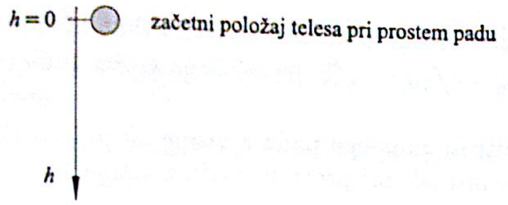
2.2.1 Prosti pad, navpični met navzdol in navpični met navzgor

1. Kamen spustimo, da prosto pade. Na tla pade 4,7 sekunde zatem. S kolikšne višine smo ga spustili? S kolikšno hitrostjo prileti na tla? Zračni upor zanemarimo.

Podatki:

t = 4,7 s

Če zanemarimo zračni upor, je prosti pad enakomerno pospešeno gibanje s pospeškom $g = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ (težnim pospeškom). Naloge rešujemo z enačbami enakomerno pospešenega gibanja, le da uporabimo oznaki h (višina) namesto s (pot) in oznako g namesto a za pospešek. Prosti pad je gibanje z začetno hitrostjo nič ($v_0 = 0$). V enačbah upoštevajmo tudi to. Izhodišče koordinatnega sistema izberimo v točki, s katere telo spustimo in usmerimo navzdol, v smeri padanja telesa:



Višina, s katere smo spustili kamen, je enaka poti, ki jo kamen opravi med padanjem, zato uporabimo enačbo:

$$h = \frac{gt^2}{2}$$

Dobimo jo iz enačbe za pot pri enakomerno pospešenem gibanju, $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, če upoštevamo zgornja navodila ($s = h$, $v_0 = 0$ in $a = g$).

Tako je:

$$h = \frac{gt^2}{2} = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{(4{,}7\,\mathrm{s})^2}{2} = 108{,}4\,\mathrm{m} = \underline{\underline{110\,\mathrm{m}}}$$

Za izračun hitrosti, s katero kamen prileti na tla, pa uporabimo enačbo:

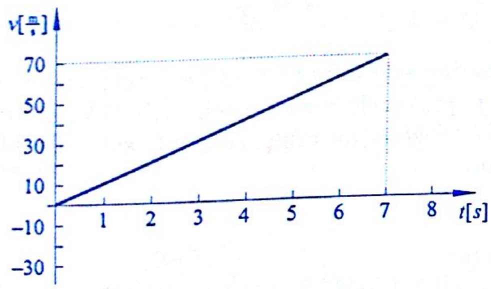
$$v = gt$$

Zvezo dobimo iz enačbe za hitrost pri enakomerno pospešenem gibanju $v = v_0 + at$, če upoštevamo, da je $v_0 = 0$ in $a = g$.

Tako je hitrost, s katero kamen prileti na tla:

$$v = gt = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 4{,}7\,\mathrm{s} = 46{,}11\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{46\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

2. Dan je graf hitrosti v odvisnosti od časa za prosti pad telesa. Ugotovi, koliko časa je telo padalo, s kolikšno hitrostjo je udarilo ob tla in s katere višine je padlo.



Iz grafa preberemo, da je padanje trajalo približno 7 sekund, končna hitrost pa je okoli 70 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Višino, s katere je telo padlo, izračunajmo z enačbo $h = \frac{gt^2}{2}$ v katero vstavimo čas padanja:

$$h = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{(7\,\mathrm{s})^2}{2} = 240{,}3\,\mathrm{m} = \underline{\underline{240\,\mathrm{m}}}$$

3. Neko telo spustimo z višine 27 m, da prosto pade na tla. Kolikšno hitrost ima, ko zadene ob tla? Kolikšna pa je njegova hitrost na polovici višine (13,5 m) in kolikšna, ko je 10 m od tal? Upor zraka zanemarimo.

Podatki:

$h = 27$ m

$h_1 = 13{,}5$ m

$h_2 = 10$ m

Uporabimo enačbo $v^2 = v_0^2 + 2as$. V enačbi zamenjamo oznaki za pot in pospešek ter upoštevajmo, da pri prostem padu telo nima začetne hitrosti:

$$v^2 = 2gh$$

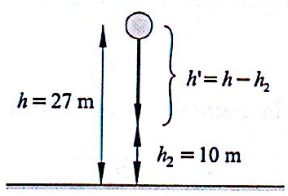
Tako je hitrost telesa, ko prileti na tla:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 27\,\mathrm{m}} = 23{,}02\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{23\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

Za hitrost na polovici višine uporabimo enako enačbo. Pazimo le, da vstavimo h_1 namesto h (telo je priletelo do polovice višine):

$$v_1 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 13{,}5\,\mathrm{m}} = 16{,}27\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{16\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

Pri računanju hitrosti telesa, ko je ta 10 m od tal, pa bodimo previdni. Količina h v enačbi $v = \sqrt{2gh}$ je opravljena pot. V tem primeru je h torej razdalja med začetno (27 m) in končno višino (10 m), torej:



$$h' = h - h_2 = 27\,\mathrm{m} - 10\,\mathrm{m} = 17\,\mathrm{m}$$

Od tod je hitrost telesa 10 m nad tlemi :

$$v' = \sqrt{2gh'} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 17\,\mathrm{m}} = 18{,}26\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{18\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

4. Z vrha nebotičnika spustimo telo, da prosto pade. Na vsakih deset metrov izmerimo hitrost telesa. S pomočjo enačb za prosti pad izračunaj te hitrosti in dopolni tabelo. Ali so izmerjene hitrosti večje ali manjše od izračunanih? Zakaj?

$h(\mathrm{m})$	v $(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})$
10	
20	
30	

Iz enačbe $v^2 = 2gh$ izrazimo in izračunajmo hitrosti po desetih, dvajsetih in tridesetih metrih prostega padanja:

$$v_1 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 10\,\mathrm{m}} = 14{,}01\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{14\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

$$v_2 = \sqrt{2gh_2} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 20\,\mathrm{m}} = 19{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

$$v_3 = \sqrt{2gh_3} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 30\,\mathrm{m}} = 24{,}26\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{24\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

Rezultate vnesimo v tabelo:

$h(\mathrm{m})$	v $(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})$
10	14
20	20
30	24

Izmerjene hitrosti bi bile precej manjše, saj pri računanju nismo upoštevali zračnega upora, ki zavira padanje.

5. Telo, ki prosto pade na tla iz višine h, ima pri tleh hitrost $50\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Kolikšno hitrost ima telo, ki prosto pade iz višine $3h$?

Podatki:

$v_1 = 50\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

$h_2 = 3h_1$

Da bi ugotovili, s kolikšno hitrostjo prileti na tla telo iz trikratne začetne višine, zapišimo zvezo med končno hitrostjo in začetno višino:

$$v_1^2 = 2gh$$

Enačbo korenimo in namesto h pišimo h_1 (začetna višina v prvem primeru):

$$v_1 = \sqrt{2gh_1}$$

Na isti način zapišimo še končno hitrost pri trikratni višini $(h_2 = 3h_1)$:

$$v_2 = \sqrt{2gh_2} = \sqrt{2g3h_1}$$

To lahko zapišemo kot:

$$v_2 = \sqrt{3}\sqrt{2gh_1}$$

Upoštevajmo, da je $\sqrt{2gh_1} = v_1$, in dobimo:

$$v_2 = \sqrt{3}v_1 = \sqrt{3} \cdot 50\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 86{,}60\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \underline{\underline{87\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}}$$

Končna hitrost prostega pada z višine $3h$ je le $\sqrt{3}$-krat večja od končne hitrosti pri prostem padu z višine h.

6. Z balkona 7,0 m nad tlemi deček vrže košarkarsko žogo navpično navzdol s hitrostjo $5{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Koliko časa leti žoga do tal? S kolikšno hitrostjo udari ob tla? Upor zraka ne upoštevamo.

Podatki:

$h = 7{,}0\ \mathrm{m}$

$v_0 = 5{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Navpični met navzdol je, podobno kot prosti pad, enakomerno pospešeno gibanje s pospeškom $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, le da ima telo začetno hitrost, zato računajmo z enačbami za enakomerno pospešeno gibanje. Ponavadi zamenjamo oznaki za pot $(s \to h)$ in pospešek $(a \to g)$.

Hitrost žoge, ko prileti na tla, tako izračunajmo z enačbo $v_2 = v_0^2 + 2as$, ki po uporabi novih oznak dobi obliko:

$$v^2 = v_0^2 + 2gh$$

Od tod je:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_0^2 + 2gh} = \sqrt{\left(5{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + 2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 7{,}0\,\mathrm{m}} = \\ &= 12{,}74\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{13\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}} \end{aligned}$$

Sedaj, ko poznamo začetno in končno hitrost, z enačbo $v = v_0 + gt$ izračunajmo čas leta žoge:

$$v - v_0 = gt$$

$$t = \frac{(v - v_0)}{g} = \frac{\left(12{,}74\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 5{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 0{,}7890\,\mathrm{s} = \underline{\underline{0{,}79\,\mathrm{s}}}$$

7. V predzadnji sekundi prostega pada telo preleti 45 m. Kolikšno pot napravi telo v zadnji sekundi? S kolikšno hitrostjo pade na tla? S kolikšne višine smo telo spustili? Upor zraka zanemarimo.

Podatki:

$h = 45\ \mathrm{m}$

Za pot telesa v predzadnji sekundi zapišimo enačbo:

$$h = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$$

Gibanje v predzadnji sekundi leta je namreč navpični met navzdol, saj ima telo na začetku predzadnje sekunde že neko hitrost.

Iz enačbe izrazimo začetno hitrost (hitrost na začetku predzadnje sekunde):

$$h - \frac{gt^2}{2} = v_0 t$$

$$v_0 = \frac{h - \frac{gt^2}{2}}{t}$$

V enačbo vstavimo čas $t = 1$ s (predzadnja sekunda) in višino $h = 45$ m ter izračunajmo v_0:

$$v_0 = \frac{\left(45\,\mathrm{m} - 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{(1\,\mathrm{s})^2}{2}\right)}{1\,\mathrm{s}} = 40{,}1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Sedaj z enačbo $v = v_0 + gt$ izračunajmo hitrost telesa na koncu predzadnje sekunde padanja (čas je tudi tu ena sekunda):

$$v = 40{,}1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1\,\mathrm{s} = 49{,}91\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Izračunali smo hitrost telesa na koncu predzadnje sekunde padanja, kar pa je hkrati tudi začetna hitrost telesa za zadnjo sekundo padanja. Uporabimo jo za izračun poti, ki jo telo preleti v zadnji sekundi: .

$$\begin{aligned} s &= v_0 t + \frac{gt^2}{2} = 49{,}91\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 1\,\mathrm{s} + 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{(1\,\mathrm{s})^2}{2} = \\ &= 54{,}82\,\mathrm{m} = \underline{55\,\mathrm{m}} \end{aligned}$$

Končno hitrost telesa v zadnji sekundi padanja izračunajmo z enačbo $v_k = v_0 + gt$, v kateri za v_0 vstavimo končno hitrost v predzadnji sekundi:

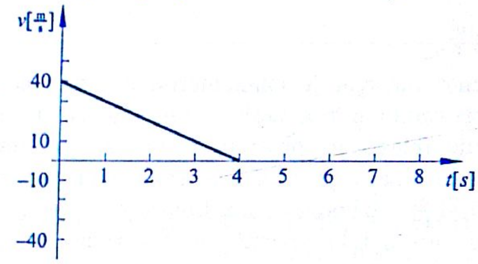
$$v_k = 49{,}91\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1\,\mathrm{s} = 59{,}72\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{60\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

Z enačbo $v_k^2 = v_0^2 + 2gH$ izračunajmo še, kolikšna je višina H, s katere smo telo spustili. V enačbi upoštevajmo, da je začetna hitrost nič:

$$v_k^2 = 2gH$$

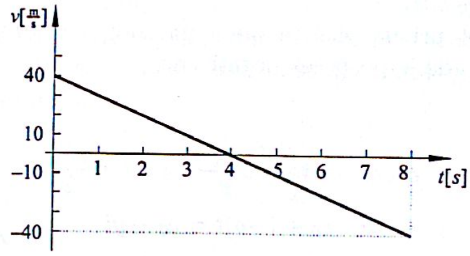
$$H = \frac{v_k^2}{(2g)} = \frac{\left(59{,}72\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{\left(2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)} = 181{,}8\,\mathrm{m} = \underline{\underline{180\,\mathrm{m}}}$$

8. Iz grafa hitrosti v odvisnosti od časa za navpični met odčitaj čimveč podatkov o metu. Kako bi se graf nadaljeval? Nariši še graf pospeška v odvisnosti od časa za to gibanje (skupaj z nadaljevanjem).



Graf se začne pri hitrosti približno $40\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. To je začetna hitrost navpičnega meta. Telo do najvišje točke (do zaustavitve) porabi okoli 4 sekunde.

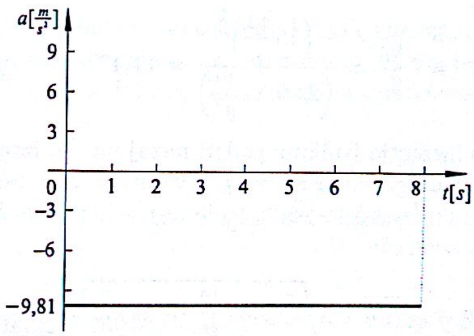
V nadaljevanju leta začne telo prosto padati. Hitrost enakomerno narašča in je usmerjena v nasprotni smeri kot pri dviganju. Glede na dan graf je pozitivna smer navzgor, zato je hitrost v drugem delu negativna. Graf se torej nadaljuje na negativno stran in se konča pri hitrosti, ki je nasprotno enaka tisti, s katero je telo začelo navpični met:



Ker je pospešek prostega pada enak pospešku navpičnega meta, je pospešek ves čas enak:

$$a = g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Ves čas je usmerjen navzdol. Glede na to, da smo za pozitivno smer izbrali smer navzgor, je pospešek tako ves čas leta negativen:

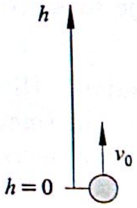


9. Frnikulo vržemo navpično navzgor s hitrostjo 15 $\frac{m}{s}$. Kako visoko prileti? S kolikšno hitrostjo prileti nazaj na tla? Vpliv zraka zanemarimo.

Podatki:

$$v_0 = 15\,\frac{m}{s}$$

Navpični met navzgor je enakomerno pojemajoče gibanje, če ne upoštevamo upora zraka. Gibanje zavira ista sila, ki pospešuje telesa pri prostem padu oziroma navpičnem metu navzdol, zato je pojemek enak težnemu pospešku ($a = g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$). Izhodišče koordinatnega sistema izberemo v točki, s katere telo vržemo, in pozitivno os usmerimo navpično navzgor:



Glede na izbiro pozitivne smeri je pospešek navpičnega meta navzgor negativen. Pri računanju uporabljajmo podobne enačbe kot pri navpičnem metu navzdol, ne pozabimo pa upoštevati, da je pospešek negativen:

$$\begin{aligned} h &= v_0 t + \frac{(-g)t^2}{2} = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \\ v &= v_0 + (-g)t = v_0 - gt \\ v^2 &= v_0^2 + 2(-g)h = v_0^2 - 2gh \end{aligned}$$

Kolikšna je največja višina, ki jo frnikula doseže, izračunajmo z enačbo $v^2 = v_0^2 - 2gh$, pri kateri upoštevajmo, da frnikula v najvišji točki miruje, torej je njena končna hitrost nič:

$$\begin{aligned} 0 &= v_0^2 - 2gh \\ v_0^2 &= 2gh \\ h &= \frac{v_0^2}{2g} = \frac{\left(15\,\frac{m}{s}\right)^2}{\left(2 \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}\right)} = 11{,}47\,m = \underline{\underline{11\,m}} \end{aligned}$$

S kolikšno hitrostjo frnikula prileti nazaj na tla, izračunajmo z enačbo prostega pada $v^2 = 2gh$, v katero vstavimo višino, s katere frnikula prosto pade, to je največja višina, ki smo jo pravkar izračunali:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot 11{,}47\,m} = \underline{\underline{15\,\frac{m}{s}}}$$

Hitrost je enaka kot tista, s katero smo frnikulo na začetku vrgli navzgor. To bi lahko tudi pričakovali, saj se telesa na enaki poti z enakim pospeškom, kot je bil prej pojemek, logično hitrost ravno toliko poveča, kot se je prej zmanjšala. To si velja zapomniti, saj nam bo v pomoč pri reševanju podobnih nalog.

10. Teniško žogico z loparjem udarimo tako, da odleti navpično navzgor s hitrostjo 30 $\frac{m}{s}$. Koliko metrov preleti v zadnji sekundi dviganja? Zračni upor zanemarimo.

Da bi izračunali, kolikšno pot opravi žogica v zadnji sekundi dviganja, najprej izračunajmo čas dviganja. To naredimo z enačbo:

$$v = v_0 - gt$$

Žogica se v najvišji točki ustavi ($v = 0$):

$$0 = v_0 - gt$$

Od tod je čas dviganja:

$$\begin{aligned} v_0 &= gt \\ t &= \frac{v_0}{g} = \frac{30\,\frac{m}{s}}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}} = 3{,}058\,s \end{aligned}$$

Sedaj izračunajmo največjo višino, ki jo žogica doseže. Uporabimo enačbo:

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

Tako dobimo:

$$h = 30\,\frac{m}{s} \cdot 3{,}058\,s - 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot \frac{(3{,}058\,s)^2}{2} = 45{,}87\,m$$

Od časa dviganja odštejmo 1 sekundo in dobimo čas leta žogice do zadnje sekunde dviganja:

$$t_1 = 3{,}058\,s - 1{,}0\,s = 2{,}058\,s$$

Izračunajmo še višino, do katere se žogica dvigne v tem času. Uporabimo isto enačbo kot za največjo višino, le da vstavimo čas t_1:

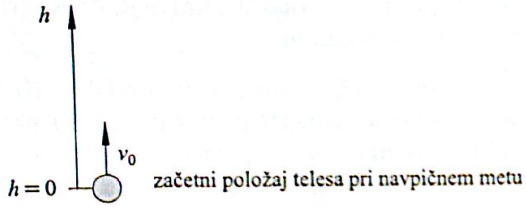
$$\begin{aligned} h_1 &= v_0 t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = \\ &= 30\,\frac{m}{s} \cdot 2{,}058\,s - 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot \frac{(2{,}058\,s)^2}{2} = \\ &= 40{,}97\,m \end{aligned}$$

9. Frnikulo vržemo navpično navzgor s hitrostjo 15 $\frac{m}{s}$. Kako visoko prileti? S kolikšno hitrostjo prileti nazaj na tla? Vpliv zraka zanemarimo.

Podatki:

$$v_0 = 15\,\frac{m}{s}$$

Navpični met navzgor je enakomerno pojemajoče gibanje, če ne upoštevamo upora zraka. Gibanje zavira ista sila, ki pospešuje telesa pri prostem padu oziroma navpičnem metu navzdol, zato je pojemek enak težnemu pospešku ($a = g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$). Izhodišče koordinatnega sistema izberemo v točki, s katere telo vržemo, in pozitivno os usmerimo navpično navzgor:



Glede na izbiro pozitivne smeri je pospešek navpičnega meta navzgor negativen. Pri računanju uporabljajmo podobne enačbe kot pri navpičnem metu navzdol, ne pozabimo pa upoštevati, da je pospešek negativen:

$$\begin{aligned} h &= v_0t + \frac{(-g)t^2}{2} = v_0t - \frac{gt^2}{2} \\ v &= v_0 + (-g)t = v_0 - gt \\ v^2 &= v_0^2 + 2(-g)h = v_0^2 - 2gh \end{aligned}$$

Kolikšna je največja višina, ki jo frnikula doseže, izračunajmo z enačbo $v^2 = v_0^2 - 2gh$, pri kateri upoštevajmo, da frnikula v najvišji točki miruje, torej je njena končna hitrost nič:

$$\begin{aligned} 0 &= v_0^2 - 2gh \\ v_0^2 &= 2gh \\ h &= \frac{v_0^2}{2g} = \frac{\left(15\,\frac{m}{s}\right)^2}{\left(2 \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}\right)} = 11{,}47\,m = \underline{\underline{11\,m}} \end{aligned}$$

S kolikšno hitrostjo frnikula prileti nazaj na tla, izračunajmo z enačbo prostega pada $v^2 = 2gh$, v katero vstavimo višino, s katere frnikula prosto pade, to je največja višina, ki smo jo pravkar izračunali:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot 11{,}47\,m} = \underline{\underline{15\,\frac{m}{s}}}$$

Hitrost je enaka kot tista, s katero smo frnikulo na začetku vrgli navzgor. To bi lahko tudi pričakovali, saj se telesu na enaki poti z enakim pospeškom, kot je bil prej pojemek, logično hitrost ravno toliko poveča, kot se je prej zmanjšala. To si velja zapomniti, saj nam bo v pomoč pri reševanju podobnih nalog.

10. Teniško žogico z loparjem udarimo tako, da odleti navpično navzgor s hitrostjo 30 $\frac{m}{s}$. Koliko metrov preleti v zadnji sekundi dviganja? Zračni upor zanemarimo.

Da bi izračunali, kolikšno pot opravi žogica v zadnji sekundi dviganja, najprej izračunajmo čas dviganja. To naredimo z enačbo:

$$v = v_0 - gt$$

Žogica se v najvišji točki ustavi ($v = 0$):

$$0 = v_0 - gt$$

Od tod je čas dviganja:

$$\begin{aligned} v_0 &= gt \\ t &= \frac{v_0}{g} = \frac{30\,\frac{m}{s}}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}} = 3{,}058\,s \end{aligned}$$

Sedaj izračunajmo največjo višino, ki jo žogica doseže. Uporabimo enačbo:

$$h = v_0t - \frac{gt^2}{2}$$

Tako dobimo:

$$h = 30\,\frac{m}{s} \cdot 3{,}058\,s - 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot \frac{(3{,}058\,s)^2}{2} = 45{,}87\,m$$

Od časa dviganja odštejmo 1 sekundo in dobimo čas leta žogice do zadnje sekunde dviganja:

$$t_1 = 3{,}058\,s - 1{,}0\,s = 2{,}058\,s$$

Izračunajmo še višino, do katere se žogica dvigne v tem času. Uporabimo isto enačbo kot za največjo višino, le da vstavimo čas t_1:

$$\begin{aligned} h_1 &= v_0t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = \\ &= 30\,\frac{m}{s} \cdot 2{,}058\,s - 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot \frac{(2{,}058\,s)^2}{2} = \\ &= 40{,}97\,m \end{aligned}$$

Razlika med to višino (40,97 m) in največjo višino (45,87 m) je pot, ki jo žogica opravi v zadnji sekundi dviganja, torej:

$$s = 45{,}87\,\mathrm{m} - 40{,}97\,\mathrm{m} = \underline{\underline{4{,}9\,\mathrm{m}}}$$

11. Žogico vržemo navpično navzgor s hitrostjo v_0 tako, da doseže višino h. Kolikšno višino bi dosegla žogica , če bi jo vrgli navpično navzgor s hitrostjo $2v_0$?

Podatki:

$v_0' = 2v_0$

Zapišimo zvezo med začetno hitrostjo navpičnega meta in največjo višino:

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

Sedaj zapišimo enako zvezo še za novo začetno hitrost $v_0' = 2v_0$ in novo višino h':

$$h' = \frac{(2v_0)^2}{2g} = \frac{4v_0^2}{2g}$$

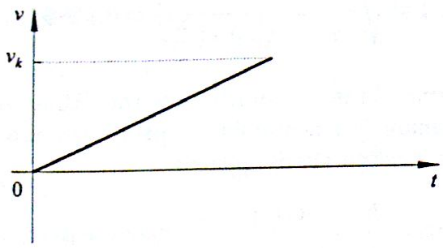
Upoštevajmo, da je $\frac{v_0^2}{2g} = h$, in dobimo:

$$\underline{\underline{h' = 4h}}$$

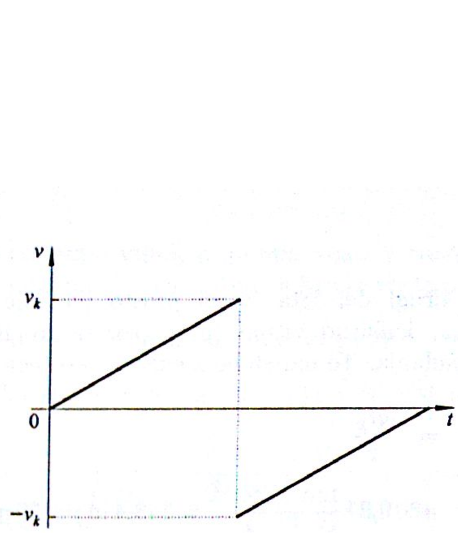
Če bi žogico vrgli navpično navzgor z dvakratno začetno hitrostjo, bi dosegla štirikratno višino.

12. Žogico za namizni tenis spustimo na tla. Žogica se od tal odbije in dvigne nazaj do prvotne višine (predpostavimo, da je odboj idealen). Skiciraj graf hitrosti v odvisnosti od časa za to gibanje.

Prvi del gibanja žogice je prosti pad. Hitrost žogice se od nič enakomerno poveča do končne hitrosti, ko se žogica dotakne tal:



Pri trku s tlemi se smer hitrosti žogice obrne, velikost pa ostane ista, če naj se žogica dvigne do prvotne višine. Torej nadaljujemo z risanjem grafa pri hitrosti $-v_k$. Od tega trenutka je gibanje enakomerno pojemajoče, hitrost žogice se enakomerno manjša do mirovanja. Dviganje traja enako časa kot spuščanje:



Pri risanju grafa smo privzeli, da je hitrost pozitivna v prvem delu, torej ko je obrnjena navzdol. Če bi si za pozitivno smer izbrali smer navzgor, potem se predznaka hitrosti obrneta.

13. S fračo izstrelimo kovinsko kroglico navpično navzgor. Nazaj na tla pade po 11 sekundah. Kako visoko je kroglica v najvišji točki? S kolikšno hitrostjo prileti na tla? Zračni upor zanemarimo.

Podatki:

$t = 11s$

Pri navpičnem metu navzgor sta čas dviganja in čas padanja enaka. Če let, dviganje in padanje, traja 11 s, potem polovico časa traja dviganje, polovico pa padanje. Čas dviganja je tako enak času padanja:

$$t_d = t_p = \frac{t}{2} = \frac{11\,\mathrm{s}}{2} = 5{,}5\,\mathrm{s}$$

<u>1.NAČIN</u>

S tem časom izračunajmo največjo višino meta. Najprej z enačbo $v = v_0 - gt$, v katero vstavimo $v = 0$ in čas dviganja, izračunajmo začetno hitrost:

$$\begin{aligned} 0 &= v_0 - gt_d \\ v_0 &= gt_d = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 5{,}5\,\mathrm{s} = 53{,}96\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{54\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}} \end{aligned}$$

S to hitrostjo smo morali izstreliti kroglico navzgor, da se je do najvišje točke dvigala 5,5 s. Spomnimo se, **da je to hkrati tudi hitrost, s katero bo kroglica priletela nazaj na tla.**

V enačbo navpičnega meta $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ vstavimo začetno hitrost 54 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ in čas dviganja ter izračunajmo še največjo višino:

$$h = 53{,}96\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 5{,}5\,\mathrm{s} - 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{(5{,}5\,\mathrm{s})^2}{2} = 148{,}4\,\mathrm{m} = \underline{\underline{150\,\mathrm{m}}}$$

2.NAČIN

Opazujmo drugi del leta, torej prosto padanje kroglice. Izračunajmo, kolikšno višino (pot) preleti kroglica v 5,5 sekundah padanja. To naredimo z enačbo prostega pada:

$$h = \frac{gt_p^2}{2}$$

$$h = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\frac{(5{,}5\,\mathrm{s})^2}{2} = 148{,}4\,\mathrm{m} = \underline{\underline{150\,\mathrm{m}}}$$

Seveda je to tudi največja višina, ki jo kroglica doseže pri dviganju.

Za izračun hitrosti, s katero pade kroglica na tla, pa uporabimo enačbo $v = gt_p$:

$$v = gt_p = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 5{,}5\,\mathrm{s} = 53{,}96\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{54\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

14. Hruška, ki visi na veji 3,4 m nad nami, se odtrga in pade na tla, če jo kamen zadane s hitrostjo vsaj 3,0 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. S kolikšno najmanjšo hitrostjo moramo vreči kamen navpično navzgor v hruško, da se odtrga? Računajmo, kot da ni upora zraka.

Podatki:

$h = 3{,}4$ m

$v = 3{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

V tem primeru navpičnega meta končna hitrost ni enaka nič. To upoštevajmo v enačbi $v^2 = v_0^2 - 2gh$ in iz nje izračunajmo začetno hitrost:

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 - 2gh \\ v_0^2 &= v^2 + 2gh \\ v_0 &= \sqrt{v^2 + 2gh} = \\ &= \sqrt{\left(3{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + 2\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 3{,}4\,\mathrm{m}} = \\ &= 8{,}701\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{8{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}} \end{aligned}$$

△15. Romeo vrže Juliji pismo, ki ga je zavil v kamen. Istočasno kane Juliji iz oči solza. S kolikšno hitrostjo je Romeo vrgel pismo, če se pismo in solza srečata natanko na polovici poti? Julija je 4,0 m višje kot Romeo.

Podatki:

$h = 4{,}0$ m

Solza in pismo do srečanja opravita vsak 2,0 m poti. Vsota njunih poti je torej enaka celotni višini $h = 4{,}0$ m. Pot, ki jo opravi solza, izrazimo z enačbo prostega pada:

$$h_1 = \frac{gt^2}{2}$$

Višino, ki jo v istem času preleti pismo, pa izrazimo z enačbo navpičnega meta:

$$h_2 = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

Vsota višin h_1 in h_2 je enaka celotni višini:

$$h = h_1 + h_2$$

V enačbo vstavimo izraza za h_1 in h_2:

$$h = \frac{gt^2}{2} + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

Tako dobimo:

$$h = v_0 t$$

Začetna hitrost, s katero Romeo vrže pismo, je tako:

$$v_0 = \frac{h}{t}$$

V gornji enakosti je t čas od začetka do srečanja. Tega izračunajmo iz enačbe za prosti pad solze do srečanja:

$$h_1 = \frac{gt^2}{2}$$

Od tod je:

$$t^2 = \frac{2h_1}{g}$$

Torej:

$$t = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 2{,}0\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 0{,}6386\,\mathrm{s}$$

Upoštevali smo, da je h_1 polovica celotne višine, torej 2,0 m. Sedaj izračunani čas postavimo v prej izpeljano enačbo in izračunajmo začetno hitrost pisma:

$$v_0 = \frac{h}{t} = \frac{4{,}0\,\mathrm{m}}{0{,}6386\,\mathrm{s}} = 6{,}263\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{6{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

△16. Balon s toplim zrakom se začne dvigati. Dviga se enakomerno pospešeno s pospeškom $3{,}0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Po 5,0 sekundah dviganja z balona spustijo vrečo peska, da prosto pade na tla. Koliko časa zatem, ko jo spustijo, vreča udari ob tla, če zanemarimo zračni upor? S kolikšno hitrostjo udari ob tla?

Podatki:

$a = 3{,}0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

$t = 5{,}0\ \mathrm{s}$

Najprej izračunajmo, kako visoko je balon v trenutku, ko spustijo vrečo iz balona. Balon se dviga enakomerno pospešeno, zato uporabimo enačbo za pot pri enakomerno pospešenem gibanju:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Začetna hitrost balona je nič, zato je:

$$s = \frac{at^2}{2} = 3.0\,\mathrm{ms^{-2}} \cdot \frac{(5.0\,\mathrm{s})^2}{2} = 37.5\,\mathrm{m}$$

V tej fazi reševanja velikokrat naredimo napako in računamo samo še prosti pad z višine 37.5 m. To seveda ne drži, saj se vreča skupaj z balonom dviga in ko jo spustimo, še nekaj časa leti navzgor. Da bi izračunali čas dviganja, moramo najprej izračunati hitrost balona oziroma vreče na tej višini. To naredimo z enačbo za hitrost pri enakomerno pospešenem gibanju $v = v_0 + at$, pri kateri upoštevajmo, da je začetna hitrost balona nič:

$$v = at = 3.0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 5.0\,\mathrm{s} = 15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

To je začetna hitrost navpičnega meta za vrečo. Uporabimo jo pri izračunu časa leta vreče navzgor. V enačbi $v = v_0 - gt$ upoštevajmo, da vreča v najvišji točki miruje:

$$0 = v_0 - gt$$

Čas dviganja vreče od izpustitve do najvišje točke je tako:

$$\begin{aligned} v_0 &= gt \\ t &= \frac{v_0}{g} = \frac{15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \underline{\underline{1{,}529\,\mathrm{s}}} \end{aligned}$$

Izračunajmo še, kako visoko prileti vreča v tem času:

$$\begin{aligned} h &= v_0 t - \frac{gt^2}{2} = \\ &= 15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 1{,}529\,\mathrm{s} - 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{(1{,}529\,\mathrm{s})^2}{2} = \\ &= 11{,}47\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

To višino dodajmo višini, ki jo ima vreča v trenutku, ko jo spustijo, in dobimo končno višino, s katere vreča prosto pade:

$$H = 37{,}5\,\mathrm{m} + 11{,}47\,\mathrm{m} = 48{,}97\,\mathrm{m}$$

Sedaj lahko izračunamo čas padanja s te višine z enačbo $H = \frac{1}{2}gt^2$:

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 48{,}97\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 3{,}160\,\mathrm{s}$$

Končno seštejmo čas dviganja od izpustitve do najvišje točke in čas padanja od najvišje točke do tal, da dobimo celotni čas leta:

$$t_{\mathrm{leta}} = 1{,}529\,\mathrm{s} + 3{,}16\,\mathrm{s} = 4{,}689\,\mathrm{s} = \underline{\underline{4{,}7\,\mathrm{s}}}$$

2.3 Ravninsko gibanje

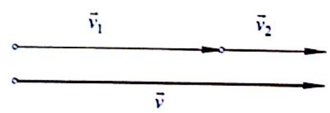
1. Motorni čoln njegovi motorji poganjajo s hitrostjo v_1 glede na vodo. Vodni tok odnaša čoln s hitrostjo v_2, ki je pol manjša od hitrosti v_1. Nariši vektorja $\vec{v_1}$ in $\vec{v_2}$ ter vektor celotne hitrosti čolna glede na obalo, če je tok usmerjen v isto smer, nasprotno smer ali pravokotno na smer, v katero motorji poganjajo čoln.

Celotna hitrost čolna je vektorska vsota hitrosti, s katero motorji poganjajo čoln, in hitrosti vodnega toka:

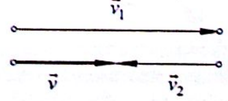
$$\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$$

Čoln se pri tem giblje v smeri vsote.

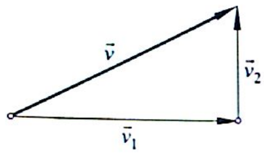
Kadar sta vektorja enako usmerjena, torej ko je vodni tok usmerjen enako kot čoln, je dolžina njune vsote enaka vsoti njunih dolžin. Velikost hitrosti, s katero se čoln giblje, je tako $v_1 + v_2$:



Kadar sta vektorja nasprotno usmerjena, torej ko vodni tok zavira čoln, je dolžina njune vsote enaka razliki njunih dolžin. Velikost hitrosti čolna v tem primeru je tako $v_1 - v_2$:



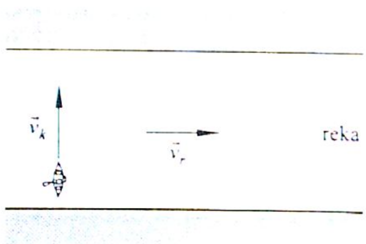
V primeru, ko pa sta vektorja pravokotna in vodni tok zanaša čoln iz smeri, njuno vsoto dobimo, če začetek drugega vektorja postavimo na konec prvega vektorja. Vsota vektorjev je tedaj vektor, ki ima začetek v začetku prvega vektorja in konec v koncu drugega vektorja:



Čoln se v tem primeru giblje poševno glede na smer, v katero ga poganjajo motorji.

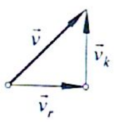
2. Kanuist s hitrostjo v_k glede na vodo vesla preko reke. Usmeri se naravnost proti nasprotnemu bregu. Reka ga pri tem odnaša s hitrostjo v_r, ki je enako velika kot njegova hitrost glede na vodo. Nariši pot, po kateri se kanuist giblje preko reke. Kako bi izračunali celotno hitrost čolna glede na obalo?

Na skici narišimo vektorja obeh hitrosti. Hitrost kanuista glede na vodo usmerimo pravokotno na breg, hitrost reke pa vzdolž brega:

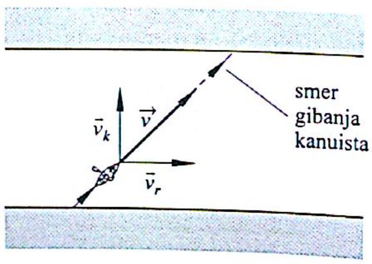


Hitrost reke in kanuistova hitrost glede na vodo sta komponenti njegove celotne hitrosti glede na breg. Celotna hitrost je vsota komponent:

$$\vec{v} = \vec{v_k} + \vec{v_r}$$



Kanuist se preko reke giblje v smeri celotne hitrosti, torej poševno glede na breg:



Ker celotna hitrost in komponenti tvorijo pravokotni trikotnik, v katerem sta komponenti kateti, celotna hitrost pa hipotenuza, velikost celotne hitrosti dobimo s Pitagorovim izrekom:

$$v^2 = v_k^2 + v_r^2$$

oziroma

$$v = \sqrt{v_k^2 + v_r^2}$$

3. Letalo bi v brezvetrju letelo s hitrostjo 400 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ proti severu. Veter piha z zahoda s hitrostjo 80 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ in letalo odnaša iz smeri. Kolikšna je celotna hitrost letala? Kako daleč veter odnese letalo v pol ure?

Podatki:

$v_1 = 400\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

$v_2 = 80\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

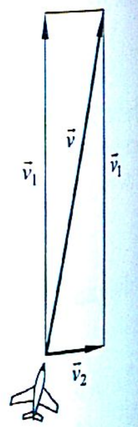
$t = 0{,}5\ \mathrm{h}$

Letalo leti s hitrostjo, ki je vektorska vsota njegove hitrosti v brezvetrju in hitrosti, s katero ga odnaša veter (slika). Hitrost letala v brezvetrju in hitrost vetra sta komponenti hitrosti, s katero se letalo giblje. Komponenti sta pravokotni med seboj in tvorita skupaj z vsoto (celotno hitrostjo) pravokotni trikotnik. Celotno hitrost letala zato izračunajmo s Pitagorovim izrekom:

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2$$

Od tod je:

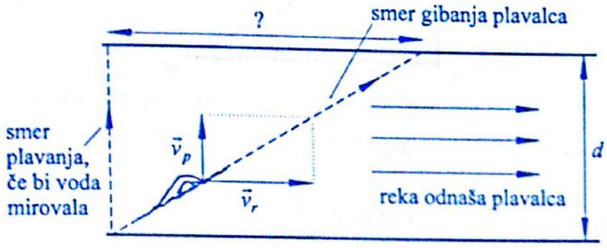
$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \\ &= \sqrt{\left(400\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right)^2 + \left(80\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right)^2} = \\ &= 407{,}9\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \underline{\underline{410\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}} \end{aligned}$$



Letalo leti proti severu, veter pa ga odnaša proti vzhodu. Gibanji sta neodvisni, zato obravnavajmo vsako smer posebej. Ker je gibanje enakomerno, z enačbo $s = v_2 t$ izračunajmo, kako daleč proti vzhodu veter odnese letalo v pol ure:

$$s = 80\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot 0{,}5\ \mathrm{h} = \underline{\underline{40\ \mathrm{km}}}$$

4. Plavalec prečka reko, ki je široka 15 m in ima hitrost 2,0 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Hitrost plavalca glede na vodo je 1,5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ in je usmerjena naravnost proti nasprotnemu bregu. Kako daleč ga reka odnese pri prečkanju? Ali bi za plavanje preko reke porabil več ali manj časa, če bi bila hitrost reke večja?



Podatki:

$d = 15$ m

$v_r = 2{,}0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$v_p = 1{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Nalogo rešimo tako, da gibanje razdelimo na dve smeri (x in y) in obravnavamo vsako smer posebej. Gibanje je namreč v vsaki smeri neodvisno od druge smeri.

V prečni smeri oziroma smeri y poznamo hitrost in pot, zato izračunajmo čas, ki ga porabi plavalec, da pride preko reke. Uporabimo enačbo $s = v_p t$, saj je gibanje enakomerno:

$$t = \frac{d}{v_p} = \frac{15\,\text{m}}{1{,}5\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}} = \underline{\underline{10\,\text{s}}}$$

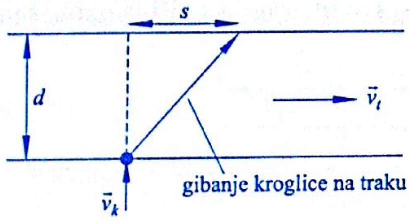
Čas je enak tudi za smer x (smer reke), saj reka odnaša plavalca ravno toliko časa, kot plavalec prečka reko.

Uporabimo ta čas in izračunajmo, kako daleč reka odnese plavalca pri prečkanju:

$$s = v_r t = 2{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10\,\text{s} = \underline{\underline{20\,\text{m}}}$$

Plavalec prečka reko v 10 sekundah ne glede na hitrost reke, saj sta hitrost in pot v prečni smeri (y) in tako tudi čas neodvisna od hitrosti reke. Res pa je, da reka odnese plavalca dalje, če je njena hitrost večja.

5. Tekoči trak se giblje s hitrostjo 50 $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$. Na rob traku postavimo kroglico, tako da se giblje skupaj s trakom. Kroglico nato sunemo v prečni smeri glede na trak tako, da pade s traku na drugi strani, 40 cm naprej od točke, kjer smo jo sunili (glej sliko). S kolikšno hitrostjo smo sunili kroglico? Širina traku je 1,3 m.



Podatki:

$v_t = 50\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}$

$s = 40$ cm

$d = 1{,}3$ m

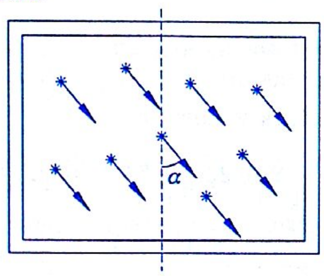
Gibanje razdelimo na gibanji v smereh x in y. Gibanje je enakomerno, zato z enačbo $s = v_t t$ izračunajmo čas, v katerem trak odnese kroglico za 40 cm (smer x):

$$t = \frac{s}{v_t} = \frac{40\,\text{cm}}{50\,\dfrac{\text{cm}}{\text{s}}} = 0{,}8\,\text{s} = \underline{\underline{0{,}80\,\text{s}}}$$

Ker je čas v obe smeri enak, ga uporabimo tudi za računanje hitrosti kroglice v prečni smeri (y):

$$v_k = \frac{d}{t} = \frac{1{,}3\,\text{m}}{0{,}8\,\text{s}} = 1{,}625\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \underline{\underline{1{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

6. Janezek skozi okno opazuje padanje snežink. Veter odnaša snežinke, da padajo pod kotom 45° glede na navpičnico. Janezek izmeri, da snežinke od vrha do dna okna padajo 2,3 s. Višina okna je 1,5 m. S kolikšno hitrostjo piha veter? Kolikšna je celotna hitrost snežink? Privzemi, da je gibanje snežink enakomerno.



Podatki:

$t = 2{,}3$ s

$h = 1{,}5$ m

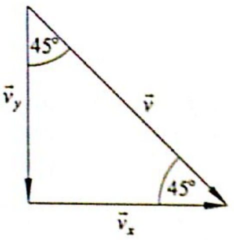
$\alpha = 45°$

Hitrost snežink je sestavljena iz komponent v smeri y

(padanje) in smeri x (veter). Velikost hitrosti v smeri y izračunajmo z enačbo $s = vt$, kjer je s višina okna, t pa čas padanja snežink:

$$h = v_y t$$
$$v_y = \frac{h}{t} = \frac{1{,}5\,\mathrm{m}}{2{,}3\,\mathrm{s}} = 0{,}6522\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Za pravokotni trikotnik, ki ga tvorita komponenti hitrosti in celotna hitrost, ugotovimo, da ima enaki kateti. Velikost hitrosti v smeri x je tako enaka velikosti hitrosti v smeri y:



$$v_x = v_y = 0{,}6522\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{0{,}65\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

Velikost celotne hitrosti snežink izračunajmo s Pitagorovim izrekom:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(0{,}6522\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + \left(0{,}6522\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} =$$
$$= 0{,}9224\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{0{,}92\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

Dodatek

Pri reševanju takih in podobnih nalog, pri katerih kot ni 45° in kateti v pravokotnem trikotniku nista enaki, uporabimo kotne funkcije. V tej nalogi uporabimo funkcijo tangens, ki je razmerje priležne in nasprotne stranice v pravokotnem trikotniku:

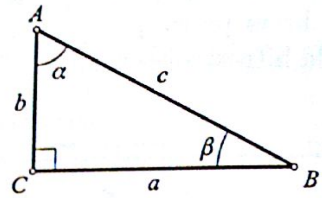
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_x}{v_y}$$

Tako je hitrost snežink v smeri x:

$$v_x = v_y \mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}6522 \mathrm{tg}\,45° = 0{,}6522\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{0{,}65\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

$$(\mathrm{tg}\,45° = 1)$$

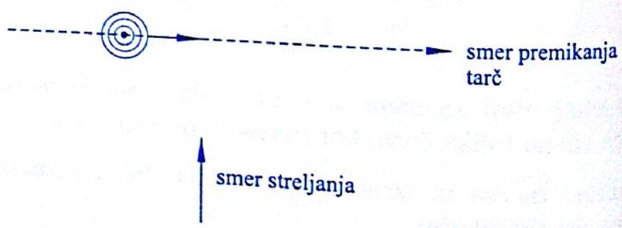
Kotne funkcije (sinus, kosinus, tangens in kotangens) pri matematiki vpeljejo kasneje, zato se jim pri fiziki v prvem letniku srednje šole ponavadi izognemo. Nekatere težje naloge pa bomo vseeno reševali z njihovo pomočjo, zato jih omenimo. Definiramo jih z razmerji stranic v pravokotnem trikotniku. Sinus kota je razmerje kotu nasprotne katete in hipotenuze, kosinus kota je razmerje kotu priležne katete in hipotenuze, tangens kota je razmerje kotu nasprotne in kotu priležne katete, kotangens pa kotu priležne in kotu nasprotne katete:



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \sin\beta = \frac{b}{c}$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \cos\beta = \frac{a}{c}$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} \qquad \mathrm{tg}\,\beta = \frac{b}{a}$$
$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a} \qquad \mathrm{ctg}\,\beta = \frac{a}{b}$$

Za uporabo pri fiziki kotnih funkcij ni potrebno natančno poznati, dovolj je že, če jih znamo zapisati iz razmerij stranic v pravokotnem trikotniku in jih izračunati s kalkulatorjem.

7. Vojaki na strelski vaji streljajo v premične tarče. Tarče se gibljejo s hitrostjo 1,5 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ po ravni črti, ki je od vojakov oddaljena 300 m (glej sliko). Koliko pred tarče morajo meriti vojaki, da bodo zadeli, če so hitrosti izstrelkov njihovih pušk 400 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$? Vojaki streljajo na tarče v smeri, ki je pravokotna na smer gibanja tarč.



Podatki:

$$d = 300\ \mathrm{m}$$
$$v_t = 1{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$
$$v_i = 400\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Iz razdalje do tarč in hitrosti izstrelkov z enačbo $d = v_i t$ izračunajmo čas, ki ga izstrelki porabijo do tarč:

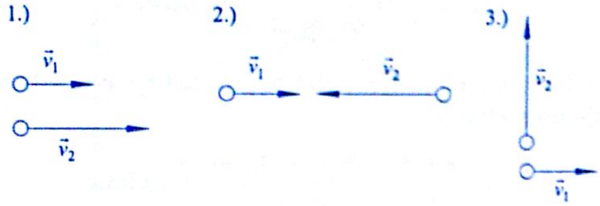
$$t = \frac{d}{v_i} = \frac{300\,\mathrm{m}}{400\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 0{,}75\,\mathrm{s}$$

Toliko časa se tarče med strelom in zadetkom premikajo s hitrostjo 1,5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Pot, ki jo pri tem naredijo, je:

$$s = v_t t = 1{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0{,}75\,\text{s} = 1{,}125\,\text{m} = \underline{\underline{1{,}1\,\text{m}}}$$

Vojaki morajo tako meriti 1,1 m pred tarčo, da bodo tarčo zadeli.

8. Dve telesi se gibljeta s hitrostma 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ in 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Kolikšna je njuna medsebojna hitrost, če se gibljeta v enakih, nasprotnih ali pravokotnih smereh?

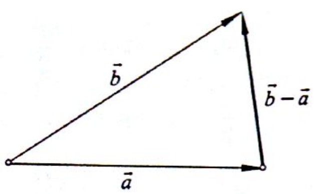


Podatki:

$v_1 = 30\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

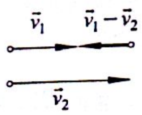
$v_2 = 50\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Medsebojna (relativna) hitrost teles je hitrost, s katero se telesi približujeta ali oddaljujeta eno od drugega. Velikost medsebojne hitrosti teles je enaka velikosti vektorske razlike njunih hitrosti. Velikost vektorske razlike dveh vektorjev s skupnim izhodiščem je dolžina vektorja, ki poveže njuni konici:



V prvem primeru se telesi gibljeta v enakih smereh. Dolžina razlike vektorjev hitrosti je v tem primeru kar razlika velikosti obeh vektorjev:

$$v_{r1} = v_1 - v_2$$



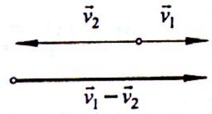
Če si za pozitivno smer izberemo smer hitrosti teles, dobimo:

$$v_{r1} = v_1 - v_2 = 30\,\frac{\text{km}}{\text{h}} - 50\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \underline{\underline{-20\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}}$$

Negativni znak nam pove, da je razlika vektorjev v_1 in v_2 usmerjena v negativno smer, kar pa nas v tej nalogi niti ne zanima.

Ko se telesi gibljeta v nasprotnih smereh, je dolžina razlike vektorjev njunih hitrosti enaka vsoti dolžin vektorjev hitrosti:

$$v_{r2} = v_1 - v_2$$

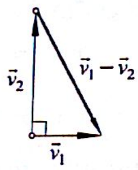


Za pozitivno smer si izberimo smer gibanja prvega telesa:

$$v_{r2} = v_1 - (-v_2) = v_1 + v_2 = 50\,\frac{\text{km}}{\text{h}} + 30\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \underline{\underline{80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}}$$

V primeru, ko se telesi gibljeta v pravokotnih smereh, pa dolžino razlike njunih vektorjev hitrosti izračunajmo s Pitagorovim izrekom, saj razlika in vektorja hitrosti tvorijo pravokotni trikotnik:

$$\begin{aligned} v_{r3}^2 &= v_1^2 + v_2^2 \\ v_{r3} &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \\ &= \sqrt{\left(30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2 + \left(50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2} = \\ &= 58{,}31\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 58\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \end{aligned}$$



△9. Parnik pluje med dvema pristaniščema ob reki. Potovanje v eno smer traja 45 minut, v drugo smer pa 65 minut. Kako oddaljeni sta pristanišči, če parnik pluje s hitrostjo 20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ glede na vodo?

Podatki:

$t_1 = 45\,\text{min} = 0{,}75\,\text{h}$

$t_2 = 65\,\text{min} = 1{,}083\,\text{h}$

$v_p = 20\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Naloga na prvi pogled ne spada med naloge ravninskega gibanja, vendar je tudi v tej nalogi pomembno pravilno sešteti hitrosti parnika in reke.

Različna časa potovanja v eno in drugo smer sta posledica gibanja reke. V eno smer parnik pluje s tokom, hitrost parnika glede na breg je takrat vsota hitrosti parnika glede na vodo in hitrosti reke:

$$v_1 = v_p + v_r$$

Pri potovanju v nasprotni smeri pa parnik pluje nasproti toku. Njegovo hitrost v tem primeru dobimo, če od hitrosti, s katero pluje parnik glede na vodo, odštejemo hitrost reke:

$$v_2 = v_p - v_r$$

Razdaljo, ki jo parnik opravi v obeh primerih, izrazimo z enačbo $s = vt$, saj je gibanje enakomerno:

$$s_1 = v_1 t_1 = (v_p + v_r)t_1$$

in

$$s_2 = v_2 t_2 = (v_p - v_r)t_2$$

Ker je pot v obeh primerih enaka, torej $s_1 = s_2$, dobimo:

$$(v_p + v_r)t_1 = (v_p - v_r)t_2$$

Edina neznanka v enačbi je hitrost reke. Izračunajmo jo:

$$\begin{aligned}
v_p t_1 + v_r t_1 &= v_p t_2 - v_r t_2 \\
v_r t_1 + v_r t_2 &= v_p t_2 - v_p t_1 \\
v_r(t_1 + t_2) &= v_p(t_2 - t_1) \\
v_r &= v_p \frac{t_2 - t_1}{t_1 + t_2} = 20\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot \frac{65\,\mathrm{min} - 45\,\mathrm{min}}{65\,\mathrm{min} + 45\,\mathrm{min}} = \\
&= 3{,}636\,\tfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}
\end{aligned}$$

Rezultat vstavimo v eno od enačb za pot in dobili bomo razdaljo med pristaniščema:

$$\begin{aligned}
s &= s_1 = (v_p + v_r)t_1 = \left(20\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} + 3{,}636\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right) \cdot 0{,}75\,\mathrm{h} = \\
&= 17{,}73\,\mathrm{km} = \underline{\underline{18\,\mathrm{km}}}
\end{aligned}$$

Da bomo v rezultat bolj prepričani, lahko še izračunamo:

$$\begin{aligned}
s &= s_2 = (v_p - v_r)t_2 = \left(20\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} - 3{,}636\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right) \cdot 1{,}083\,\mathrm{h} = \\
&= 18{,}02\,\mathrm{km} = \underline{\underline{18\,\mathrm{km}}}
\end{aligned}$$

△ 10. Mirko stoji na nadvozu, ki je 10 m nad železniško progo. Kamen vrže navpično navzdol tako, da zadane v vagon, ki pelje pod njim. Kolikšna je lahko najmanjša in kolikšna največja hitrost, s katero Mirko vrže kamen, da še zadane vagon, katerega začetek je v trenutku meta 20 m pred nadvozom in vozi enakomerno s hitrostjo 100 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$? Dolžina vagona je 8,0 m, višina pa 3,0 m. Zračni upor zanemarimo.

Podatki:

$h = 10$ m

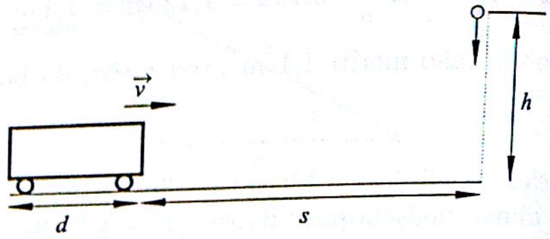
$s = 20$ m

$v = 100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 27{,}78\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$d = 8{,}0$ m

$a = 3{,}0$ m

Najprej izračunajmo čas, v katerem sprednji del vagona pripelje do nadvoza. Uporabimo enačbo enakomernega gibanja $s = vt_1$:



$$t_1 = \frac{s}{v} = \frac{20\,\mathrm{m}}{27{,}78\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 0{,}7199\,\mathrm{s}$$

Zadnji del vagona ima 8,0 m daljšo pot, zato je čas, v katerem pripelje do nadvoza:

$$t_2 = \frac{s + d}{v} = \frac{20\,\mathrm{m} + 8{,}0\,\mathrm{m}}{27{,}78\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 1{,}008\,\mathrm{s}$$

Vagon je torej v časovnem intervalu od 0,7199 s do 1,008 s pod nadvozom. Da bo Mirko zadel v vagon, mora kamen v tem časovnem intervalu preleteti pot, ki je enaka razliki višine nadvoza in višine vagona:

$$s_1 = h - a = 10\,\mathrm{m} - 3{,}0\,\mathrm{m} = 7{,}0\,\mathrm{m}$$

Hitrost, s katero mora Mirko vreči kamen navpično navzdol, izrazimo iz enačbe za navpični met navzdol:

$$\begin{aligned}
s_1 &= v_0 t + \frac{gt^2}{2} \\
s_1 - \frac{gt^2}{2} &= v_0 t \\
v_0 &= \frac{s_1 - \frac{gt^2}{2}}{t}
\end{aligned}$$

Največjo hitrost, s katero Mirko še lahko vrže kamen, dobimo, če v to enačbo vstavimo čas, v katerem prvi del vagona pripelje do nadvoza:

$$v_{01} = \frac{7{,}0\,\mathrm{m} - 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{(0{,}7199\,\mathrm{s})^2}{2}}{0{,}7199\,\mathrm{s}} = 6{,}192\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{6{,}2\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

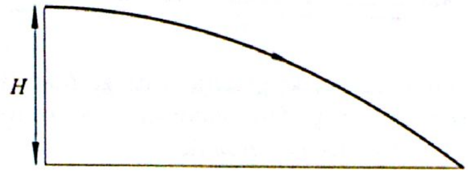
Najmanjšo začetno hitrost kamna pa dobimo, če v enačbo vstavimo čas, ko zadnji del vagona pripelje pod nadvoz:

$$v_{02} = \frac{7{,}0\,\mathrm{m} - 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{(1{,}008\,\mathrm{s})^2}{2}}{1{,}008\,\mathrm{s}} = 2{,}000\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{2{,}0\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

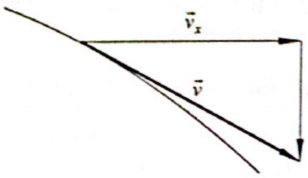
2.4 Vodoravni met

1. Nariši tir gibanja telesa pri vodoravnem metu z višine H, če zanemarimo zračni upor. Na tiru nariši vektor hitrosti telesa ob začetku meta (začetna hitrost), nekje na sredini leta in na koncu leta (končno hitrost). Velikosti vektorjev naj bodo v pravilnem razmerju.

Tir gibanja telesa pri vodoravnem metu je parabola. Pazimo, da se tir takoj po izmetu odlepi od vodoravnice (telo takoj začne padati):

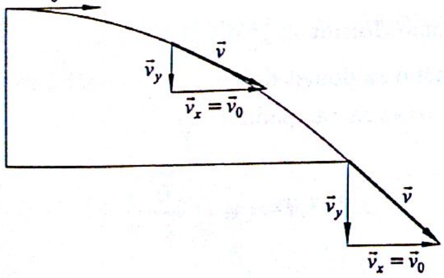


Hitrost vodoravnega meta je sestavljena iz dveh komponent; vodoravne komponente (v_x) in navpične komponente (v_y). Celotna hitrost je v vsakem trenutku tangentna na krivuljo gibanja:



Vodoravna komponenta hitrosti (v_x) se ne spreminja, ker predpostavimo, da ni zračnega upora, in je ves čas enaka začetni hitrosti. Navpična komponenta hitrosti (v_y) pa narašča in je na koncu meta največja.

Vektor hitrosti na začetku (začetna hitrost) nima navpične komponente, saj ni začetne hitrosti v navpični smeri in je tako vodoraven. Pri risanju vektorjev na sredini in na koncu leta upoštevajmo, da vodoravna komponenta ostaja enaka začetni hitrosti, navpična komponenta pa se veča:



Vektor hitrosti se daljša, ker se veča navpična komponenta hitrosti. Vektor na koncu (končna hitrost) je tako najdaljši.

2. Kolikšen je pospešek vodoravnega meta? Kam je usmerjen? Ali se med letom spreminja? Zračni upor ne upoštevamo.

Vodoravni met razdelimo na gibanje v vodoravni smeri, ki je enakomerno, in gibanje v navpični smeri, ki je enakomerno pospešeno s pospeškom $g = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ (prosti pad). Celotni pospešek vodoravnega meta je seštevek pospeškov v vodoravni in navpični smeri. Ker pospeška v vodoravni smeri ni, je pospešek vodoravnega meta kar enak pospešku v navpični smeri:

$$\vec{a} = \vec{a_x} + \vec{a_y} = \vec{0} + \vec{g} = \vec{g}$$

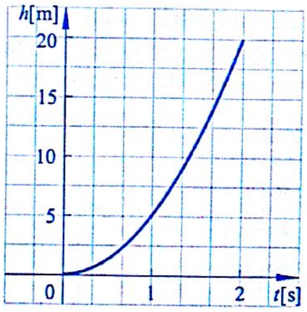
$$a = g = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Pospešek vodoravnega meta je tako ves čas leta enak in je usmerjen navzdol, proti središču Zemlje.

3. Z višine H istočasno vržemo tri žogice v vodoravni smeri. Prvo samo spustimo, da prosto pade, drugo vržemo s hitrostjo v_0, tretjo pa s hitrostjo $2v_0$. Katera od žogic bo prva priletela do tal? Odgovor utemelji.

Pri vodoravnem metu gibanje v navpični smeri ni odvisno od gibanja v vodoravni smeri. Čas padanja z neke višine je tako enak, ne glede na hitrost telesa v vodoravni smeri. Žogice bodo na tla priletele istočasno.

4. Z 20 m visokega stolpa vržemo telo v vodoravni smeri. Odvisnost višine telesa, merjene od mesta, kjer telo vržemo, od časa je podana z grafom. Koliko je oddaljeno telo od tal po eni sekundi? Koliko časa je telo v zraku?

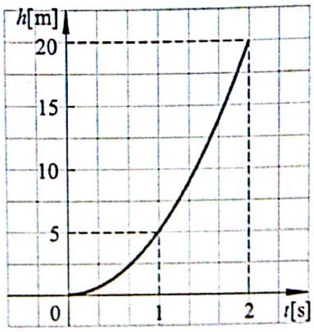


Podatki:

$H = 20$ m

$t = 1$ s

Na grafu odčitamo višino, ki predstavlja opravljeno pot, merjeno od mesta, kjer telo vržemo, po eni sekundi:

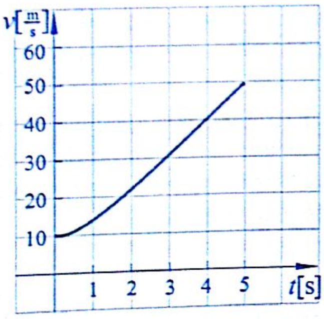


$$h(t = 1\,\mathrm{s}) \doteq 5\,\mathrm{m}$$

Telo je torej že naredilo približno 5 m v navpični smeri; do tal mu ostane še $20\,\mathrm{m} - 5\,\mathrm{m} = \underline{15\,\mathrm{m}}$.

Iz grafa je razvidno, da telo opravi 20 m in doseže tla po približno 2 sekundah.

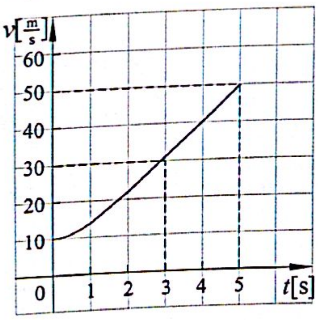
5. Dan je graf celotne hitrosti v odvisnosti od časa pri vodoravnem metu. S kolikšno začetno hitrostjo smo vrgli telo? Kolikšna je bila hitrost telesa po 3 sekundah leta? S kolikšno hitrostjo prileti telo na tla, če let traja pet sekund?



Na grafu odčitamo začetno hitrost, to je hitrost ob času nič:

$$v_0 = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Hitrost po treh oziroma petih sekundah leta odčitajmo iz grafa tako, da potegnemo črto od časovne osi (3. in 5. sekunde) do krivulje in nato od krivulje na hitrostno os:



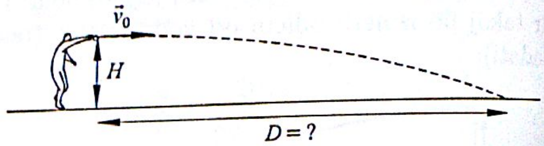
Vidimo, da je hitrost po 3 sekundah približno 30 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, po 5 sekundah pa 50 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

6. Deček vrže sneženo kepo s hitrostjo 16 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ v vodoravni smeri. Kako daleč od dečka pade kepa na tla, če je bila v trenutku meta 1,5 m visoko nad tlemi? Zračni upor zanemarimo.

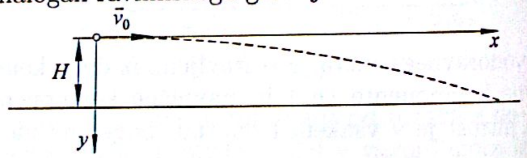
Podatki:

$v_0 = 16\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$H = 1{,}5\,\mathrm{m}$



Vodoravni met je ravninsko gibanje, zato ga razdelimo na dve gibanji, v smereh x in y. Obravnavamo vsako smer posebej kot pri nalogah ravninskega gibanja:



Gibanje v **smeri y** je prosti pad, zato pri računanju uporabljajmo **enačbe prostega pada.**

Najprej z začetno višino H z enačbo $H = \frac{gt^2}{2}$ izračunajmo čas padanja kepe:

$$t^2 = \frac{2H}{g}$$

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}5\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 0{,}5530\,\mathrm{s}$$

V **smeri x je gibanje enakomerno.** Ker je čas gibanja v vodoravni smeri enak kot v navpični smeri, v enačbo za pot pri enakomernem gibanju $s = vt$ vstavimo čas padanja in dobimo pot, ki jo opravi kepa v smeri x:

$$D = v_0 t = 16\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 0{,}5530\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 8{,}848\,\mathrm{m} = \underline{\underline{8{,}8\,\mathrm{m}}}$$

Pot imenujemo **domet** in jo označimo z D.

Splošno enačbo za domet dobimo, če v enačbo za pot v smeri x vstavimo izraz za čas padanja $\sqrt{\frac{2H}{g}}$:

$$D = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Enačba spada med osnovne enačbe in je ponavadi ne izpeljujemo.

Pri nalogah vodoravnega meta vedno predpostavimo, da je zračni upor zanemarljiv. V nadaljevanju tega ne bomo poudarjali pri vsaki nalogi posebej.

7. Z obrambnega zidu nekega gradu izstrelijo topovsko granato z maso 20 kg v vodoravni smeri. Granata pade na tla 80 m od zidu. Kolikšno hitrost je imela granata pri izstrelitvi, če je obrambni zid visok 12 m?

Podatki:

$m = 20$ kg

$D = 80$ m

$H = 12$ m

Uporabimo enačbo za domet $D = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}$ ter iz nje izrazimo in izračunajmo začetno hitrost granate:

$$v_0 = \frac{D}{\sqrt{\frac{2H}{g}}} = \frac{80\,\mathrm{m}}{\sqrt{\frac{2\cdot 12\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}} = 51{,}15\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{51\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

Pri reševanju nismo uporabili mase, kar je pravilno, saj če zanemarimo zračni upor, domet ni odvisen od mase. Včasih so v nalogah dani podatki, ki jih ne potrebujemo, vendar nas ne smejo zmesti.

8. S teniškim loparjem z vso močjo udarimo po žogici, tako da odleti vodoravno z začetno hitrostjo 57 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Kolikšna je bila višina žogice ob udarcu, če žogica prileti 43 m daleč?

Podatki:

$v_0 = 57\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$D = 43$ m

1.NAČIN

Najprej z dometom, ki je pot v smeri x, in začetno hitrostjo, ki je hitrost v smeri x, izračunajmo čas leta žogice. Gibanje v smeri x je enakomerno, zato velja:

$$D = v_0 t$$

Od tod je:

$$t = \frac{D}{v_0} = \frac{43\,\mathrm{m}}{57\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 0{,}7544\,\mathrm{s}$$

Čas padanja v smeri y je enak. Gibanje v smeri y je prosti pad, zato začetno višino žogice izračunajmo z enačbo $H = \frac{gt^2}{2}$:

$$H = \frac{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot(0{,}7544\,\mathrm{s})^2}{2} = 2{,}792\,\mathrm{m} = \underline{\underline{2{,}8\,\mathrm{m}}}$$

2.NAČIN

Začetno višino izrazimo in izračunajmo iz enačbe za domet vodoravnega meta $D = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}$. Enačbo najprej kvadrirajmo:

$$D^2 = v_0^2\cdot\frac{2H}{g}$$

Od tod pa izrazimo in izračunajmo začetno višino žogice:

$$H = \frac{D^2 g}{2v_0^2} = \frac{(43\,\mathrm{m})^2\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2\cdot\left(57\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} = 2{,}791\,\mathrm{m} = \underline{\underline{2{,}8\,\mathrm{m}}}$$

9. Domet vodoravnega meta je D, če telo vržemo v vodoravni smeri z višine H in s hitrostjo v_0. Kolikšen je domet vodoravnega meta z višine $2H$ in enako začetno hitrostjo v_0?

Zapišimo zvezo med količinama, ki jih pri nalogi opazujemo; to sta začetna višina H in domet D. Količini sta povezani z enačbo za domet:

$$D = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Zapišimo enako enačbo še za novi količini, H' in D':

$$D' = v_0\sqrt{\frac{2H'}{g}}$$

V enačbo vstavimo $H' = 2H$:

$$D' = v_0\sqrt{\frac{2H'}{g}} = v_0\sqrt{\frac{2\cdot 2H}{g}} = v_0\sqrt{2}\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Upoštevajmo, da je $D = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}$, in dobimo:

$$D' = \sqrt{2}D = 1{,}4D$$

Domet z višine, ki je 2-krat večja, je le 1,4-krat večji. To je posledica korenske odvisnosti začetne višine in dometa.

10. Na Zemlji je domet žogice D, če jo vržemo z začetno hitrostjo v_0 z višine H. Kolikšen je domet žogice z isto začetno hitrostjo, ki jo vržemo z enake višine na planetu, kjer je težni pospešek četrtino težnega pospeška na Zemlji?

Zapišimo enačbo za domet, saj ta poveže domet in težni pospešek:

$$D = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Domet na planetu označimo z D', težni pospešek na planetu pa z g' in zapišimo še enačbo za domet na planetu:

$$D' = v_0\sqrt{\frac{2H}{g'}}$$

Težni pospešek na planetu je četrtina zemeljskega:

$$g' = \frac{g}{4}$$

Od tod je:

$$D' = v_0\sqrt{\frac{2H}{\frac{g}{4}}} = v_0\sqrt{4\cdot\frac{2H}{g}} = v_0\sqrt{4}\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Upoštevajmo še, da je $\sqrt{4} = 2$ in $D = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}$:

$$D' = 2D$$

Domet na planetu, kjer je težni pospešek 4-krat manjši, je 2-krat večji kot na Zemlji.

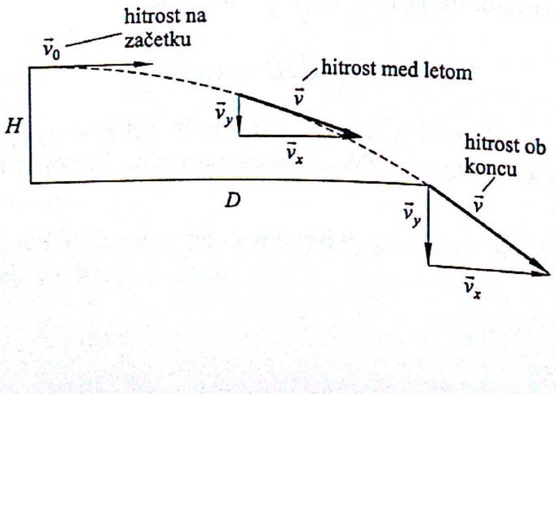
11. S 7,0 m visokega balkona vržemo žogo v vodoravni smeri. Na tla prileti s hitrostjo 25 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. S kolikšno začetno hitrostjo smo žogo vrgli z balkona?

Podatki:

$H = 7{,}0\ \text{m}$

$v = 25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Hitrost vodoravnega meta je sestavljena iz komponente v smeri x in komponente v smeri y:



Komponenti sta med seboj pravokotni, zato njuno
celotno hitrost, izrazimo s Pitagorovim izrekom:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2$$

oziroma

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Hitrost v smeri x je stalna in je ves čas enaka začetni hit

$$v_x = v_0$$

Hitrost v smeri y zapišimo z enačbami za prosti pad:

$$v_y = gt$$

ali

$$v_y = \sqrt{2gh}$$

V tej nalogi poznamo višino, zato komponento y hitrost izračunajmo z enačbo $v_y = \sqrt{2gh}$:

$$v_y = \sqrt{2gH} = \sqrt{2\cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 7{,}0\ \text{m}} = 11{,}72\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Sedaj, ko poznamo komponento y in celotno hitrost ob k leta, iz zveze $v^2 = v_x^2 + v_y^2$ lahko izračunamo komponent hitrosti na koncu leta:

$$v_x^2 = v^2 - v_y^2$$

$$v_x = \sqrt{\left(25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(11{,}72\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 22{,}08\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \doteq 22\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ker se hitrost v smeri x ne spreminja, je to tudi začetna hi žoge.

12. Kamen vržemo v vodoravni smeri s hitrostjo 20 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ tla prileti s hitrostjo 27 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Koliko časa leti?

Podatki:

$v_0 = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$v = 27\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Zapišimo enačbo za končno hitrost vodoravnega meta:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2$$

Iz enačbe izrazimo hitrost v_y (v smeri y):

$$v_y^2 = v^2 - v_x^2$$

$$v_y = \sqrt{v^2 - v_x^2}$$

Upoštevajmo, da je hitrost v smeri x ves čas enaka v_0, in izračunajmo končno hitrost v smeri y:

$$v_y = \sqrt{\left(27\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - \left(20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} = 18{,}14\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Uporabimo enačbo za hitrost v smeri y pri prostem padu $v_y = gt$ in izračunajmo čas padanja, ki je enak času leta:

$$t = \frac{v_y}{g} = \frac{18{,}14\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 1{,}849\,\mathrm{s} = \underline{\underline{1{,}9\,\mathrm{s}}}$$

13. Z avtom se peljemo s hitrostjo 60 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, ko skozi odprto okno pomolimo roko, v kateri imamo železno kroglico. Kako se giblje kroglica, ko jo izpustimo, če ne upoštevamo zračnega upora? Kako daleč od mesta, kjer smo jo izpustili, pade kroglica na tla, če je bila ob izpustu na višini 1,2 m?

Podatki:

$v_0 = 60\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 16{,}67\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$H = 1{,}2$ m

Včasih imamo občutek, da bi kroglica po izpustu odletela nazaj. Tak občutek izhaja iz izkušenj pri podobnih dejanjih, kjer telo, ki ga spustimo skozi avtomobilsko okno, zračni upor zavira in zaostane za avtomobilom. V primeru, ko zračnega upora ni, pa se telo giblje skupaj z avtomobilom, saj ima v smeri x ves čas enako hitrost, v smeri y pa prosto pada. Gibanje je torej vodoravni met z začetno hitrostjo $60\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 16{,}67\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Razdalja med mestom izpusta in mestom, kjer pade kroglica na tla, je domet. Izračunajmo ga:

$$\begin{aligned} D &= v_0 \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}} = 16{,}67\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}2\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = \\ &= 8{,}245\,\mathrm{m} = \underline{\underline{8{,}2\,\mathrm{m}}} \end{aligned}$$

△14. Z lokom izstrelimo puščico v vodoravni smeri. S kolikšne višine jo izstrelimo, če pri začetni hitrosti 80 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ prileti 50 m daleč? Kako daleč od strelca v vodoravni smeri je puščica, ko je v zraku polovico časa celotnega leta? Kako oddaljena je v tem trenutku od tal?

Podatki:

$D = 50$ m

$v_0 = 80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Z enačbo za domet $D = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}$ izračunajmo začetno višino:

$$H = \frac{D^2 g}{2v_0^2} = \frac{(50\,\mathrm{m})^2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2 \cdot \left(80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} = 1{,}916\,\mathrm{m}$$

Iz začetne višine z enačbo $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ izračunajmo čas padanja, ki je hkrati tudi čas celotnega leta:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}916\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 0{,}6250\,\mathrm{s}$$

Polovica časa je tako:

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{t}{2} = \frac{0{,}6250\,\mathrm{s}}{2} = 0{,}3125\,\mathrm{s}$$

Oddaljenost od strelca v vodoravni smeri je kar pot v smeri x, ki jo puščica naredi v tem času:

$$s = v_0 t_{\frac{1}{2}} = 80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 0{,}3125\,\mathrm{s} = \underline{\underline{25\,\mathrm{m}}}$$

Kako globoko pade puščica do tega trenutka, izračunajmo z enačbo za prosti pad:

$$h = \frac{g t_{\frac{1}{2}}^2}{2} = \frac{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (0{,}3125\,\mathrm{s})^2}{2} = 0{,}4790\,\mathrm{m}$$

Puščica je od tal oddaljena za razliko med začetno višino (1,916 m) in višino, za katero že pade (0,4790 m):

$$h' = H - h = 1{,}916\,\mathrm{m} - 0{,}4790\,\mathrm{m} = 1{,}437\,\mathrm{m} = \underline{\underline{1{,}4\,\mathrm{m}}}$$

△15. Helikopter leti na višini 200 m in s hitrostjo 100 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ v vodoravni smeri. Pod njim pluje jadrnica v isti smeri s hitrostjo 30 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Kje mora biti helikopter v trenutku, ko odvrže paket, da bo paket padel na jadrnico?

Podatki:

$H = 200$ m

$v_1 = 100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 27{,}78\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$v_2 = 30\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 8{,}333\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Paket ima na začetku enako hitrost kot helikopter, torej 27,78 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ v vodoravni smeri. Giblje se, kot bi ga s to hitrostjo vrgli v vodoravni smeri. Razdaljo od mesta, kjer helikopter spusti paket in ta pade v vodo, dobimo, če izračunamo domet:

$$D = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}} = 27{,}78\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \sqrt{\frac{2 \cdot 200\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}^2}} = 177{,}4\,\mathrm{m}$$

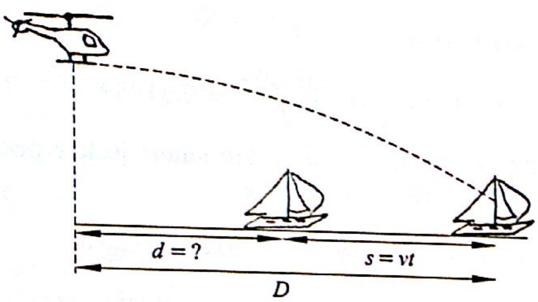
Izračunajmo čas padanja paketa. Le-ta je neodvisen od začetne hitrosti:

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 200\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 6{,}386\,\mathrm{s}$$

V tem času bo jadrnica, ki se giblje enakomerno s hitrostjo 8,333 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, prepotovala pot:

$$s = vt = 8{,}333\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 6{,}386\,\mathrm{s} = 53{,}21\,\mathrm{m}$$

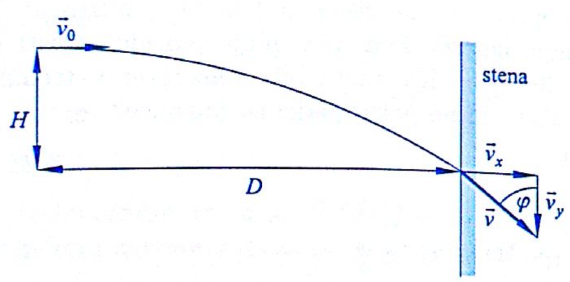
Za toliko mora biti helikopter bližje jadrnici, kot pa če bi jadrnica mirovala:



Od tod je vodoravna razdalja med helikopterjem in jadrnico v trenutku, ko mora helikopter spustiti paket:

$$d = D - s = 177{,}4\,\mathrm{m} - 53{,}21\,\mathrm{m} = 124{,}2\,\mathrm{m} = \underline{\underline{120\,\mathrm{m}}}$$

△16. S puško streljamo v vodoravni smeri proti 72 metrov oddaljeni tarči. Kolikšna je začetna hitrost izstrelka, če se zapiči v tarčo pod kotom 10° glede na vodoravnico? Kolikšna je višinska razlika med mestom, kjer je bil izstrelek izstreljen, in mestom, kjer se zapiči v tarčo?



Podatki:

$D = 72$ m

$\varphi = 10°$

Iz enačbe za pot v smeri x, $D = v_0 t$, izrazimo čas leta:

$$t = \frac{D}{v_0}$$

Zapišimo enačbo $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{v_y}{v_x}$ (glej skico) in upoštevajmo, da je $v_x = v_0$ in $v_y = gt$:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{gt}{v_0}$$

V enačbo vstavimo izraz $t = \frac{D}{v_0}$:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{gD}{v_0^2}$$

Izračunajmo začetno hitrost:

$$\begin{aligned} v_0^2\,\mathrm{tg}\,\varphi &= gD \\ v_0^2 &= \frac{gD}{\mathrm{tg}\,\varphi} \\ v_0 &= \sqrt{\frac{gD}{\mathrm{tg}\,\varphi}} = \sqrt{\frac{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 72\,\mathrm{m}}{\mathrm{tg}\,10°}} = \\ &= 63{,}29\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{63\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}} \end{aligned}$$

Sedaj pa z enačbo za domet $D = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}$ izračunajmo začetno višino:

$$H = \frac{D^2 g}{2v_0^2} = \frac{(72\,\mathrm{m})^2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2 \cdot \left(63{,}29\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} = 6{,}348\,\mathrm{m} = \underline{\underline{6{,}3\,\mathrm{m}}}$$

2.5 Enakomerno kroženje

1. Vožnja z vrtiljakom traja 2,0 minuti. V tem času vrtiljak naredi 28 obhodov. S kolikšno povprečno frekvenco se vrti? Koliko časa traja en obhod? Privzemi, da je vrtenje ves čas enakomerno.

Podatki:

$t = 2{,}0\,\mathrm{min} = 120\,\mathrm{s}$

$N = 28$

Frekvenca kroženja je definirana kot kvocient števila obhodov in časa, v katerem se zgodijo:

$$\nu = \frac{N}{t}$$

Frekvenca vrtiljaka je tako:

$$\nu = \frac{28}{120\,\mathrm{s}} = 0{,}2333\,\mathrm{s}^{-1} = \underline{\underline{0{,}23\,\mathrm{Hz}}}$$

Enoto za frekvenco s^{-1} imenujmo hertz (Hz).

Čas enega obhoda imenujemo obhodni čas in ga označimo s t_0. Frekvenca in obhodni čas sta povezana z enačbo:

$$\nu = \frac{1}{t_0}$$

Tako je obhodni čas vrtiljaka:

$$t_0 = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{0{,}2333\,\mathrm{s}^{-1}} = 4{,}286\,\mathrm{s} = \underline{\underline{4{,}3\,\mathrm{s}}}$$

2. Telo kroži enakomerno po krožnici s polmerom 0,50 m. V 0,20 s opiše kot 270°. Kolikšna je kotna hitrost kroženja? V kolikšnem času naredi telo en obhod?

Podatki:

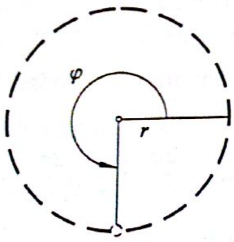
$r = 0.50$ m

$t = 0.20$ s

$\varphi = 270°$

Kotna hitrost kroženja je definirana kot kvocient kota φ in časa, v katerem se telo zasuče za ta kot:

$$\omega = \frac{\varphi}{t}$$



V enačbo vedno vstavimo kot v radianih in ne v stopinjah. Za pretvarjanje stopinj v radiane uporabimo zvezo:

$$1° = \frac{2\pi}{360}\,\mathrm{rd}$$

Zveza temelji na dejstvu, da je 360° enako 2π radianov.

S pomočjo te zveze pretvorimo 270° v radiane:

$$270° = 270 \cdot 1° = 270 \cdot \frac{2\pi}{360}\,\mathrm{rd} = 4{,}712\,\mathrm{rd}$$

Vstavimo v enačbo $\omega = \frac{\varphi}{t}$ in izračunajmo kotno hitrost telesa:

$$\omega = \frac{4{,}712\,\mathrm{rd}}{0{,}20\,\mathrm{s}} = 23{,}56\,\frac{\mathrm{rd}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{24\,\mathrm{s}^{-1}}}$$

V enoti kotne hitrosti upoštevamo, da je enota radian enaka 1.

Obhodni čas je s kotno hitrostjo povezan z enačbo:

$$\omega = \frac{2\pi}{t_0}$$

Od tod je obhodni čas telesa:

$$t_0 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{23{,}56\,\mathrm{s}^{-1}} = 0{,}2667\,\mathrm{s} = \underline{\underline{0{,}27\,\mathrm{s}}}$$

3. Pri telovadbi dijaki tečejo v krogu s polmerom 8,4 m. Kolikšno pot naredi eden od dijakov v času, ko zveznica med njim in središčem kroženja opiše kot 20°? Predpostavi, da dijak teče enakomerno.

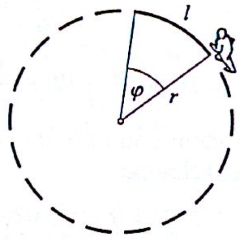
Podatki:

$r = 8{,}4$ m

$\varphi = 20°$

Pot, ki jo dijak naredi, imenujmo lok in označimo z l. Lok je s polmerom in kotom povezan z enačbo:

$$l = r\varphi$$



Pretvorimo kot 20° v radiane:

$$20° = 20 \cdot 1° = 20 \cdot \frac{2\pi}{360}\,\mathrm{rd} = 0{,}3491\,\mathrm{rd}$$

Z enačbo $l = r\varphi$ izračunajmo lok (pot):

$$l = 8{,}4\,\mathrm{m} \cdot 0{,}3491\,\mathrm{rd} = 2{,}932\,\mathrm{m} = \underline{\underline{2{,}9\,\mathrm{m}}}$$

Tudi v enoti za lok (pot) smo upoštevali, da je enota radian enaka 1.

4. Utež vrtimo na 0,74 metra dolgi vrvici, da enakomerno kroži s frekvenco 2,7 Hz. Kolikšni sta kotna in obodna hitrost uteži? Ali je gibanje pospešeno? Pojasni. Kolikšen je pospešek?

Podatki:

$r = 0{,}74$ m

$\nu = 2{,}7$ Hz

Kotno hitrost uteži izračunajmo z zvezo:

$$\omega = 2\pi\nu$$

$$\omega = 2\pi \cdot 2{,}7\,\text{Hz} = 16{,}96\,\text{s}^{-1} = \underline{\underline{17\,\text{s}^{-1}}}$$

Kotno in obodno hitrost poveže enačba:

$$v = r\omega$$

Obodna hitrost uteži je tako:

$$v = r\omega = 0{,}74\,\text{m} \cdot 16{,}96\,\text{s}^{-1} = 12{,}55\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} = \underline{\underline{13\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

Enakomerno kroženje je pospešeno gibanje, saj se spreminja smer hitrosti. Pospešek enakomernega kroženja ima smer proti središču kroženja (v smeri radija) in ga imenujemo radialni ali centripetalni pospešek. Radialni pospešek uteži izračunajmo z enačbo:

$$a_r = \omega v$$

$$a_r = 16{,}96\,\text{s}^{-1} \cdot 12{,}55\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 212{,}8\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} = \underline{\underline{210\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

Za vajo izračunajmo radialni oziroma centripetalni pospešek uteži še z enačbama:

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(12{,}55\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{0{,}74\,\text{m}} = 212{,}8\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} = 210\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

in

$$a_r = \omega^2 r = (16{,}96\,\text{s}^{-1})^2 \cdot 0{,}74\,\text{m} = 212{,}9\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} = 210\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Enačbi dobimo tako, da v enačbo $a_r = \omega v$ vstavimo enačbo $v = r\omega$ ali $\omega = \frac{v}{r}$. Katero od enačb pri nalogi uporabimo, je odvisno od podatkov.

5. Kolikšna je povprečna oddaljenost Zemlje od Sonca, če znaša radialni pospešek Zemlje zaradi kroženja okrog Sonca $6{,}0 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$?

Podatki:

$a_r = 6{,}0 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$t_0 = 365\,\text{dni} = 365 \cdot 24 \cdot 3\,600\,\text{s} = 3{,}154 \cdot 10^7\,\text{s}$
(obhodni čas Zemlje okrog Sonca je eno leto)

Z enačbo $\omega = \frac{2\pi}{t_0}$ izračunajmo kotno hitrost Zemlje:

$$\omega = \frac{2\pi}{3{,}154 \cdot 10^7\,\text{s}} = 1{,}992 \cdot 10^{-7}\,\text{s}^{-1}$$

Od tod pa iz enačbe $a_r = \omega^2 r$ razdaljo med Zemljo in Soncem:

$$r = \frac{a_r}{\omega^2} = \frac{6{,}0 \cdot 10^{-3}\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1{,}992 \cdot 10^{-7}\,\text{s}^{-1}} =$$

$$= 1{,}512 \cdot 10^{11}\,\text{m} = 1{,}5 \cdot 10^{11}\,\text{m} = \underline{\underline{150 \cdot 10^6\,\text{km}}}$$

Zemlja je od Sonca oddaljena 150 milijonov kilometrov.

6. S kolikšnim pospeškom se gibljejo telesa na ekvatorju zaradi vrtenja Zemlje okoli lastne osi? Polmer Zemlje je 6 400 km.

Podatki:

$r_z = 6\,400\,\text{km} = 6\,400 \cdot 10^3\,\text{m} = 6{,}4 \cdot 10^6\,\text{m}$

$t_0 = 24\,\text{h} = 24 \cdot 3\,600\,\text{s} = 8{,}64 \cdot 10^4\,\text{s}$
(Zemlja se okoli svoje osi zavrti v 24 urah.)

Najprej z obhodnim časom izračunajmo kotno hitrost teles na ekvatorju:

$$\omega = \frac{2\pi}{t_0} = \frac{2\pi}{8{,}64 \cdot 10^4\,\text{s}} = 7{,}272 \cdot 10^{-5}\,\text{s}^{-1}$$

Nato z enačbo $a_r = \omega^2 r_z$ še njihov radialni pospešek:

$$a_r = (7{,}272 \cdot 10^{-5}\,\text{s}^{-1})^2 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6\,\text{m} =$$

$$= 3{,}384 \cdot 10^{-2}\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} = \underline{\underline{3{,}4 \cdot 10^{-2}\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

7. Motorist vozi po krožnem ovinku s polmerom 40 m in pri tem je njegov radialni pospešek $4{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Ali je prekoračil omejitev hitrosti v naselju ($50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$)?

Podatki:

$r = 40$ m

$a_r = 4{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Iz enačbe $a_r = \frac{v^2}{r}$ izrazimo in izračunajmo obodno hitrost motorista:

$$v^2 = a_r r$$

$$v = \sqrt{a_r r} = \sqrt{4{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 40\,\text{m}} = 13{,}42\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} =$$

$$= 48{,}30\,\tfrac{\text{km}}{\text{h}} = \underline{\underline{48\,\tfrac{\text{km}}{\text{h}}}}$$

Motorist očitno ni prekoračil omejitve hitrosti.

8. Telo kroži po krožnici s polmerom r in frekvenco ν. Njegova obodna hitrost je v. Kolikšna mora biti obodna hitrost telesa, ki kroži po krožnici s polmerom $0{,}7r$, da bo njegova frekvenca enaka ν?

Podatki:

$r_2 = 0{,}7r_1$

$\nu_2 = \nu_1$

Frekvenci teles sta enaki

$$\nu_1 = \nu_2$$

V to enakost vstavimo $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ (dobimo iz $\omega = 2\pi\nu$):

$$\frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{\omega_2}{2\pi}$$

Ko okrajšamo 2π, dobimo:

$$\omega_1 = \omega_2$$

Ugotovili smo, da sta tudi kotni hitrosti teles enaki. Sedaj v enačbo $\omega_1 = \omega_2$ vstavimo $\omega = \frac{v}{r}$ za obe kotni hitrosti:

$$\frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2}$$

Upoštevajmo, da je $r_2 = 0{,}7r_1$:

$$\frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{0{,}7r_1}$$

Od tod je:

$$v_1 = \frac{v_2}{0{,}7}$$

oziroma

$$\underline{\underline{v_2 = 0{,}7v_1}}$$

Obodna hitrost telesa, ki kroži po krožnici z manjšim polmerom, je manjša, kar smo tudi pričakovali.

9. Kolikšni sta frekvenci minutnega in sekundnega kazalca ure? Kolikšni sta obodni hitrosti in pospeška konic kazalcev, če je minutni dolg 1,5 cm, sekundni pa 0,45 cm?

Podatki:

$t_{01} = 60\,\text{min} = 3\,600\,\text{s}$ (obhodni čas minutnega kazalca)

$t_{02} = 60\,\text{s}$ (obhodni čas sekundnega kazalca)

$r_1 = 1{,}5\,\text{cm} = 1{,}5\cdot 10^{-2}\,\text{m}$

$r_2 = 0{,}45\,\text{cm} = 0{,}45\cdot 10^{-2}\,\text{m}$

Frekvenci kazalcev izračunajmo iz zveze $\nu = \frac{1}{t_0}$:

$$\nu_1 = \frac{1}{t_{01}} = \frac{1}{3\,600\,\text{s}} = 2{,}778\cdot 10^{-4}\,\text{Hz} = \underline{\underline{2{,}8\cdot 10^{-4}\,\text{Hz}}}$$

in

$$\nu_2 = \frac{1}{t_{02}} = \frac{1}{60\,\text{s}} = 1{,}667\cdot 10^{-2}\,\text{Hz} = \underline{\underline{1{,}7\cdot 10^{-2}\,\text{Hz}}}$$

Obodni hitrosti kazalcev izračunajmo z enačbo $v = r\omega$, še prej pa z zvezo med kotno hitrostjo in frekvenco, $\omega = 2\pi\nu$, izračunajmo kotni hitrosti kazalcev:

$$\omega_1 = 2\pi\nu_1 = 2\pi\cdot 2{,}778\cdot 10^{-4}\,\text{Hz} = 1{,}745\cdot 10^{-3}\,\text{s}^{-1}$$

in

$$\omega_2 = 2\pi\nu_2 = 2\pi\cdot 1{,}667\cdot 10^{-2}\,\text{Hz} = 0{,}1047\,\text{s}^{-1}$$

Tako sta obodni hitrosti kazalcev:

$$v_1 = r_1\omega_1 = 1{,}5\cdot 10^{-2}\,\text{m}\cdot 1{,}745\cdot 10^{-3}\,\text{s}^{-1} =$$

$$= 2{,}618\cdot 10^{-5}\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} = \underline{\underline{2{,}6\cdot 10^{-5}\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

in

$$v_2 = r_2\omega_2 = 0{,}45\cdot 10^{-2}\,\text{m}\cdot 0{,}1047\,\text{s}^{-1} =$$

$$= 4{,}712\cdot 10^{-4}\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} = \underline{\underline{4{,}7\cdot 10^{-4}\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

Na koncu še z enačbo $a_r = \omega v$ izračunajmo radialna pospeška kazalcev:

$$a_{r1} = \omega_1 v_1 = 1{,}745\cdot 10^{-3}\,\text{s}^{-1}\cdot 2{,}618\cdot 10^{-5}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} =$$

$$= 4{,}568\cdot 10^{-8}\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} = \underline{\underline{4{,}6\cdot 10^{-8}\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

in

$$a_{r2} = \omega_2 v_2 = 0{,}1047\,\text{s}^{-1}\cdot 4{,}712\cdot 10^{-4}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} =$$

$$= 4{,}933\cdot 10^{-5}\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} = \underline{\underline{4{,}9\cdot 10^{-5}\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

Iz enačbe $a_r = \frac{v^2}{r}$ izrazimo in izračunajmo obodno hitrost motorista:

$$v^2 = a_r r$$

$$v = \sqrt{a_r r} = \sqrt{1{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 40\,\mathrm{m}} = 13{,}42\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$= 48{,}30\ [illegible] = 48\ [illegible]$$

Motorist očitno ni [illegible] hitrosti.

8. [illegible]

Podatki:

$r_2 = 0{,}7$ [illegible]

$\nu_2 = \nu_1$ [illegible]

Frekvenci teles sta [illegible]

[illegible]

V to enakost vstavimo [illegible] $\omega = 2\pi\nu$ [illegible]

[illegible]

Ko okrajšamo 2π, dobimo [illegible]

$$\omega_1 = \omega_2$$

Ugotovili smo, da sta tudi kotni hitrosti teles enaki. Sedaj v enačbo $\omega_1 = \omega_2$ vstavimo $\omega = \frac{v}{r}$ za obe kotni hitrosti:

$$\frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2}$$

Upoštevajmo, da je $r_2 = 0{,}7r_1$:

$$\frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{0{,}7r_1}$$

Od tod je:

$$v_1 = \frac{v_2}{0{,}7}$$

oziroma

$$\underline{\underline{v_2 = 0{,}7v_1}}$$

Obodna hitrost telesa, ki kroži po krožnici z manjšim polmerom, je manjša, kar smo tudi pričakovali.

9. Kolikšni sta frekvenci minutnega in sekundnega kazalca ure? Kolikšni sta obodni hitrosti in pospeška konic kazalcev, če je minutni dolg 1,5 cm, sekundni pa 0,45 cm?

Podatki:

$t_{01} = 60\,\mathrm{min} = 3\,600\,\mathrm{s}$ (obhodni čas minutnega kazalca)

$t_{02} = 60\,\mathrm{s}$ (obhodni čas sekundnega kazalca)

$r_1 = 1{,}5\,\mathrm{cm} = 1{,}5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$

$r_2 = 0{,}45\,\mathrm{cm} = 0{,}45 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$

Frekvenci kazalcev izračunajmo iz zveze $\nu = \frac{1}{t_0}$:

$$\nu_1 = \frac{1}{t_{01}} = \frac{1}{3\,600\,\mathrm{s}} = 2{,}778 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{Hz} = \underline{\underline{2{,}8 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{Hz}}}$$

in

$$\nu_2 = \frac{1}{t_{02}} = \frac{1}{60\,\mathrm{s}} = 1{,}667 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{Hz} = \underline{\underline{1{,}7 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{Hz}}}$$

Obodni hitrosti kazalcev izračunajmo z enačbo $v = r\omega$, še prej pa z zvezo med kotno hitrostjo in frekvenco, $\omega = 2\pi\nu$, izračunajmo kotni hitrosti kazalcev:

$$\omega_1 = 2\pi\nu_1 = 2\pi \cdot 2{,}778 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{Hz} = 1{,}745 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$$

in

$$\omega_2 = 2\pi\nu_2 = 2\pi \cdot 1{,}667 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{Hz} = 0{,}1047\,\mathrm{s}^{-1}$$

Tako sta obodni hitrosti kazalcev:

$$v_1 = r_1\omega_1 = 1{,}5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} \cdot 1{,}745 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1} =$$
$$= 2{,}618 \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{2{,}6 \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

in

$$v_2 = r_2\omega_2 = 0{,}45 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} \cdot 0{,}1047\,\mathrm{s}^{-1} =$$
$$= 4{,}712 \cdot 10^{-4}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{4{,}7 \cdot 10^{-4}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

Na koncu še z enačbo $a_r = \omega v$ izračunajmo radialna pospeška kazalcev:

$$a_{r1} = \omega_1 v_1 = 1{,}745 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 2{,}618 \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} =$$
$$= 4{,}568 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \underline{\underline{4{,}6 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}$$

in

$$a_{r2} = \omega_2 v_2 = 0{,}1047\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 4{,}712 \cdot 10^{-4}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} =$$
$$= 4{,}933 \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \underline{\underline{4{,}9 \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}$$

10. Otroci se igrajo z avtomobilčki na električni pogon, ki dirjajo po okrogli stezi s polmerom 0,60 m. Janezov avtomobilček vozi enakomerno in mimo štarta pripelje vsakih 7,0 sekund. Kolikšno pot naredi v 1,5 sekunde?

Podatki:

$r = 0{,}60\ \mathrm{m}$

$t_0 = 7{,}0\ \mathrm{s}$

$t = 1{,}5\ \mathrm{s}$

Ker je t_0 obhodni čas Janezovega avtomobilčka, iz zveze $\nu = \frac{1}{t_0}$ izračunajmo frekvenco, s katero kroži:

$$\nu = \frac{1}{t_0} = \frac{1}{7{,}0\,\mathrm{s}} = 0{,}1429\,\mathrm{s}^{-1}$$

Nato z zvezo $\omega = 2\pi\nu$ izračunajmo kotno hitrost avtomobilčka:

$$\omega = 2\pi \cdot 0{,}1429\,\mathrm{s}^{-1} = 0{,}8979\,\mathrm{s}^{-1}$$

Od tu lahko za izračun poti oziroma loka, ki ga avtomobilček naredi v 1,5 s, nadaljujemo na dva načina:

1.NAČIN

Iz definicije kotne hitrosti $\omega = \frac{\varphi}{t}$ izrazimo kot in ga izračunajmo:

$$\varphi = \omega t = 0{,}8979\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 1{,}5\,\mathrm{s} = 1{,}347\,\mathrm{rd}$$

Kot vstavimo v enačbo za lok in dobimo:

$$l = r\varphi = 0{,}60\,\mathrm{m} \cdot 1{,}347\,\mathrm{rd} = 0{,}8082\,\mathrm{m} = \underline{\underline{0{,}81\,\mathrm{m}}}$$

2.NAČIN

Z enačbo $v = \omega r$ izračunajmo obodno hitrost:

$$v = 0{,}8979\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 0{,}60\,\mathrm{m} = 0{,}5387\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Iz definicije obodne hitrosti

$$v = \frac{l}{t}$$

izračunajmo pot (l – lok), ki jo naredi avtomobilček:

$$l = v \cdot t = 0{,}5387\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 1{,}5\,\mathrm{s} = 0{,}8081\,\mathrm{m} = \underline{\underline{0{,}81\,\mathrm{m}}}$$

11. Kolesarji vozijo po krožni stezi enakomerno s hitrostjo $35\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Čas, ki ga kolesarji porabijo za en krog, je 3,8 s. Kolikšen je polmer kroga?

Podatki:

$v = 35\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 9{,}722\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$t = 3{,}8\ \mathrm{s}$

1.NAČIN

Iz zveze obhodnega časa in kotne hitrosti izračunajmo kotno hitrost kroženja kolesarjev:

$$\omega = \frac{2\pi}{t_0} = \frac{2\pi}{3{,}8\,\mathrm{s}} = 1{,}653\,\mathrm{s}^{-1}$$

Od tod pa z enačbo $v = \omega r$ izračunajmo polmer:

$$r = \frac{v}{\omega} = \frac{9{,}722\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1{,}653\mathrm{s}^{-1}} = 5{,}881\,\mathrm{m} = \underline{\underline{5{,}9\,\mathrm{m}}}$$

2.NAČIN

Obseg kroga, po katerem krožijo kolesarji, je lok (pot), ki ga naredijo pri enem obhodu. Izračunajmo ga z enačbo $l = vt$:

$$ob = l = vt = 9{,}722\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 3{,}8\,\mathrm{s} = 36{,}94\,\mathrm{m}$$

Ker je obseg kroga s polmerom povezan z enačbo $ob = 2\pi r$, je:

$$r = \frac{ob}{2\pi} = 5{,}879\,\mathrm{m} = 5{,}9\,\mathrm{m}$$

12. Okrogla plošča se enakomerno vrti. V eni minuti naredi 3 obhode. Kolikšen kot v radianih opiše v 1,7 minute točka na plošči, ki je 25 cm oddaljena od osi vrtenja? Koliko obhodov naredi v tem času ta točka? Kolikšni pa sta kotna in obodna hitrost točke na plošči, ki je 7,0 cm oddaljena od osi kroženja?

Podatki:

$t = 1{,}0\,\mathrm{min} = 60\,\mathrm{s}$

$N = 3$

$t_1 = 1{,}7\,\mathrm{min} = 102\,\mathrm{s}$

$r_1 = 25\,\mathrm{cm} = 0{,}25\,\mathrm{m}$

$r_2 = 7{,}0\,\mathrm{cm}$

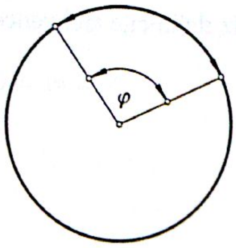
Iz prvih dveh podatkov izračunajmo frekvenco kroženja plošče:

$$\nu = \frac{N}{t} = \frac{3}{60\,\mathrm{s}} = 0{,}05\,\mathrm{Hz}$$

Iz frekvence izračunajmo kotno hitrost:

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 0{,}05\,\mathrm{Hz} = 0{,}3142\,\mathrm{s}^{-1}$$

Vse točke na plošči, ne glede na to, kako oddaljene so od osi kroženja, imajo enako kotno hitrost, saj v enakih časovnih intervalih opišejo enake kote.



Z enačbo $\varphi = \omega t$ izračunajmo kot, ki ga v 102 sekundah opiše katerakoli točka na plošči, torej tudi tista, ki je od osi oddaljena 25 cm:

$$\varphi = 0{,}3142\,\mathrm{s^{-1}} \cdot 102\,\mathrm{s} = 32{,}05\,\mathrm{rd} = \underline{\underline{32\,\mathrm{rd}}}$$

Ne pozabimo, da je rezultat v radianih in ne v stopinjah.

Koliko obhodov naredi ta točka in seveda tudi katerakoli druga točka na plošči v tem času, izračunajmo tako, da kot φ delimo z 2π radiani, saj toliko naredi točka pri enem obhodu. Število obhodov v 102 sekundah je tako:

$$N = \frac{32{,}05\,\mathrm{rd}}{2\pi\,\mathrm{rd}} = 5{,}101 = \underline{\underline{5{,}1}}$$

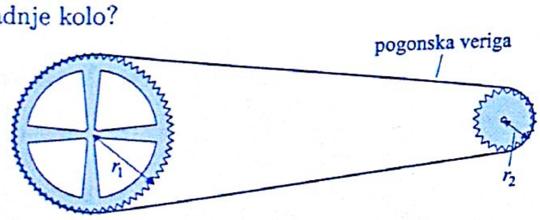
Za računanje kotne in obodne hitrosti točke, ki je 7,0 cm oddaljena od osi vrtenja, se spomnimo, da je kotna hitrost vseh točk na plošči enaka, torej tudi te točke:

$$\omega = 0{,}3142\,\mathrm{s^{-1}} = 0{,}31\,\mathrm{s^{-1}}$$

Obodne hitrosti točk pa so različne, če so točke različno oddaljene od osi vrtenja. Z enačbo $v = \omega r$ izračunajmo hitrost točke, ki je od osi vrtenja oddaljena 7,0 cm:

$$v = 0{,}3142\,\mathrm{s^{-1}} \cdot 7{,}0\,\mathrm{cm} = 2{,}187\,\tfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} = 2{,}2\,\tfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$$

13. Zobnik, na katerega so pritrjena pedala za poganjanje kolesa, ima premer 22 cm. Preko pogonske verige je povezan z zobnikom na zadnjem kolesu, ki ima premer 9,0 cm. Kolesar poganja pedala s frekvenco 0,80 Hz. S kolikšno frekvenco se vrti zadnje kolo?



Podatki:

$2r_1 = 22\,\mathrm{cm} \Rightarrow r_1 = 11\,\mathrm{cm} = 0{,}11\,\mathrm{m}$

$2r_2 = 9{,}0\,\mathrm{cm} \Rightarrow r_2 = 4{,}5\,\mathrm{cm} = 0{,}045\,\mathrm{m}$

$\nu_1 = 0{,}80$ Hz

Ker sta zobnika povezana s pogonsko verigo, sta njuni obodni hitrosti enaki:

$$v_1 = v_2$$

V zvezo vstavimo izraz $v = \omega r$ za obe obodni hitrosti:

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$

Upoštevajmo še zvezo $\omega = 2\pi\nu$ med kotno hitrostjo in frekvenco:

$$2\pi\nu_1 r_1 = 2\pi\nu_2 r_2$$

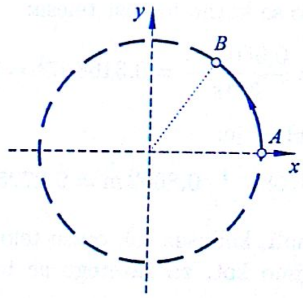
Okrajšajmo 2π in dobimo:

$$\nu_1 r_1 = \nu_2 r_2$$

Iz dobljene enačbe izrazimo in izračunajmo, s kakšno frekvenco se vrti zobnik na zadnjem kolesu:

$$\nu_2 = \frac{\nu_1 r_1}{r_2} = \frac{0{,}80\,\mathrm{Hz} \cdot 11\,\mathrm{cm}}{4{,}5\,\mathrm{cm}} = 1{,}956\,\mathrm{Hz} = \underline{\underline{2{,}0\,\mathrm{Hz}}}$$

△14. Telo kroži enakomerno v ravnini xy okrog središča, ki je v koordinatnem izhodišču. Za premik iz točke A v točko B (50 cm, 70 cm) potrebuje 3,0 sekunde. Kolikšni sta obodna in kotna hitrost telesa? Kolikšen lok opiše telo v 7,0 sekundah? Kolikokrat se telo zavrti v 4,3 minutah?



Podatki:

$x = 50\,\mathrm{cm} = 0{,}50\,\mathrm{m}$ (koordinata x točke B)

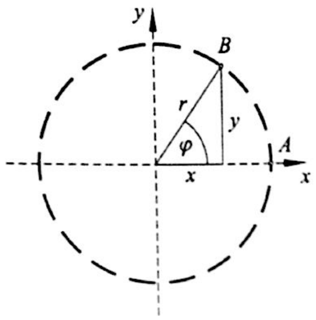
$y = 70\,\mathrm{cm} = 0{,}70\,\mathrm{m}$ (koordinata y točke B)

$t = 3{,}0\,\mathrm{s}$

$t_1 = 7{,}0\,\mathrm{s}$

$t_2 = 4{,}3\,\mathrm{min} = 258\,\mathrm{s}$

V koordinatnem sistemu narišimo koordinati točke B. Koordinati s polmerom tvorita pravokotni trikotnik:



Polmer kroženja zato izračunajmo s Pitagorovim izrekom:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} = \\ &= \sqrt{(0{,}50\,\mathrm{m})^2 + (0{,}70\,\mathrm{m})^2} = 0{,}8602\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

V istem pravokotnem trikotniku zapišimo tangens kota, za katerega se je telo zasukalo pri premiku iz točke A v točko B:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = 1{,}4$$

Od tod je:

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1}1{,}4 = 54{,}46^\circ$$

Kot pretvorimo v radiane:

$$\varphi = 54{,}46 \cdot 1^\circ = 54{,}46 \cdot \frac{2\pi\,\mathrm{rd}}{360} = 0{,}9505\,\mathrm{rd}$$

Sedaj izračunajmo še kotno hitrost telesa:

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{0{,}9505\,\mathrm{rd}}{3{,}0\,\mathrm{s}} = 0{,}3168\,\mathrm{s}^{-1} = \underline{\underline{0{,}32\,\mathrm{s}^{-1}}}$$

Obodna hitrost telesa je:

$$v = \omega r = 0{,}3168\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 0{,}8602\,\mathrm{m} = 0{,}2725\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{0{,}27\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

Da bomo izračunali, kolikšen lok opiše telo v 7,0 sekundah, najprej izračunajmo kot, za katerega se telo zasuče v tem času:

$$\varphi = \omega t = 0{,}3168\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 7{,}0\,\mathrm{s} = 2{,}218\,\mathrm{rd}$$

Tako je lok:

$$l = r\varphi = 0{,}8602\,\mathrm{m} \cdot 2{,}218\,\mathrm{rd} = 1{,}908\,\mathrm{m} = \underline{\underline{1{,}9\,\mathrm{m}}}$$

Na vprašanje, kolikokrat se telo zavrti v 4,3 minute (= 258 s), odgovorimo tako, da najprej iz enačbe $\omega = 2\pi\nu$ izrazimo in izračunamo frekvenco telesa:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{0{,}3168\,\mathrm{s}^{-1}}{2\pi} = 0{,}05042\,\mathrm{Hz}$$

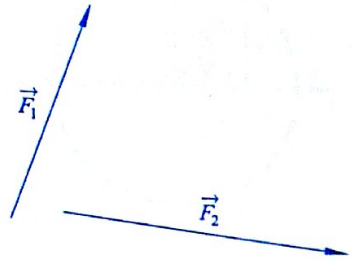
Iz definicije frekvence $\nu = \frac{N}{t}$ pa število obhodov telesa:

$$N = \nu t = 0{,}05042\,\mathrm{Hz} \cdot 258\,\mathrm{s} = 13{,}01 = \underline{\underline{13}}$$

3. Sile

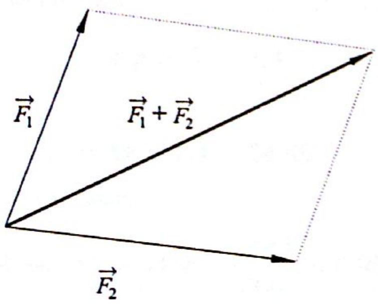
3.1 Sila kot vektor

1. Grafično seštej narisani sili.



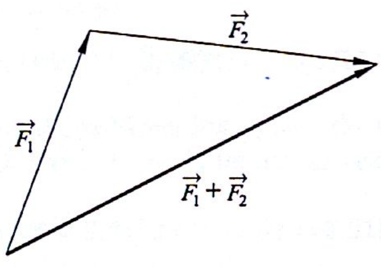
1.NAČIN

Sili premaknimo v skupno izhodišče. S silama tvorimo paralelogram tako, da s konca vsake sile narišimo vzporednico drugi sili. Vsota sil je vektor z začetkom v skupnem izhodišču in koncem v nasprotnemu oglišču. Ta način imenujemo paralelogramsko pravilo za seštevanje sil:

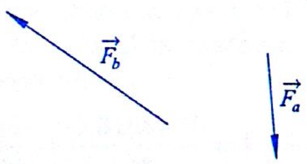


2.NAČIN

Silo $\vec{F_2}$ prenesimo na konec sile $\vec{F_1}$. Vsota sil je vektor z začetkom v začetku sile $\vec{F_1}$ in koncem v koncu sile $\vec{F_2}$:

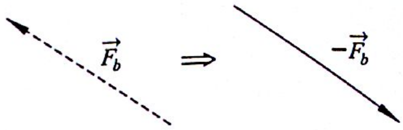


2. S pomočjo vektorjev $\vec{F_a}$ in $\vec{F_b}$ nariši vektor $\vec{F_a} - \vec{F_b}$:



1.NAČIN

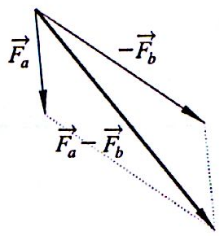
Najprej narišimo silo $-\vec{F_b}$, ki je nasprotno enaka sili $\vec{F_b}$:



Vsota sil $\vec{F_a}$ in $-\vec{F_b}$ je razlika sil $\vec{F_a}$ in $\vec{F_b}$, saj velja:

$$\vec{F_a} + (-\vec{F_b}) = \vec{F_a} - \vec{F_b}$$

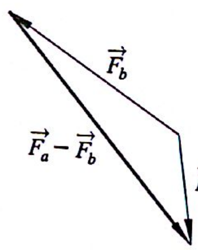
S paralelogramskim pravilom seštejmo sili $\vec{F_a}$ in $-\vec{F_b}$ in dobimo vektor $\vec{F_a} - \vec{F_b}$:



2.NAČIN

Sili $\vec{F_a}$ in $\vec{F_b}$ premaknimo v skupno izhodišče.

Dolžina vektorja razlike $(\vec{F_a} - \vec{F_b})$ je razdalja med konicama vektorjev, vektor razlike pa je usmerjen proti konici prvega vektorja v razliki, proti konici vektorja $\vec{F_a}$:



3. Na milimetrski papir nariši silo $\vec{F_1}$ z velikostjo 3,5 N in silo $\vec{F_2}$ z velikostjo 2,8 N. Sili imata skupno izhodišče, kot med njima je 30°. Grafično seštej sili in izmeri velikost vsote (rezultante).

Podatki:

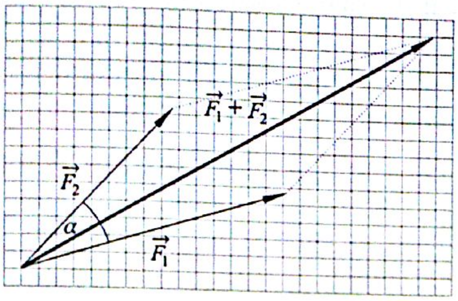
$F_1 = 3{,}5$ N

$F_2 = 2{,}8$ N

$\alpha = 30°$

Narišimo sili $\vec{F_1}$ in $\vec{F_2}$ na milimetrski papir. Vzemimo, da 1 cm na sliki pomeni 1 N, tako je sila $\vec{F_1}$ dolga 3,5 cm, sila $\vec{F_2}$

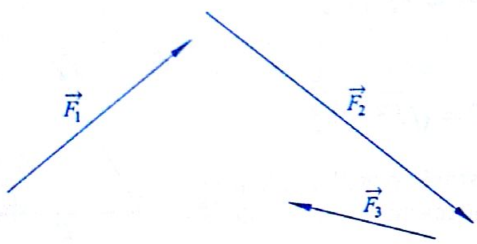
pa 2,8 cm. Napaka pri risanju je približno 0,1 cm, kar pomeni 0,1 N.



Sili seštejmo s paralelogramskim pravilom in z ravnilom izmerimo velikost rezultante. Dobimo približno 6,1 cm (±0,1 cm), kar pomeni, da ima rezultanta sil velikost 6,1 N (±0,1 N).

Da ne bo zmede pri označevanju sil enkrat z $\vec{F}$ in drugič z F, se domenimo, da silo označimo vektorsko, torej $\vec{F}$, če mislimo na silo kot vektor, če pa označujemo le velikost sile, pišimo F.

4. Na sliki so narisane tri sile z velikostmi $F_1 = 30$ N, $F_2 = 45$ N in $F_3 = 20$ N. Narisane so tako, da 1 cm dolžine pomeni 10 N (±0,1 cm oziroma ±1 N). Grafično čim bolj natančno določi vsoto (rezultanto) teh sil.



Podatki:

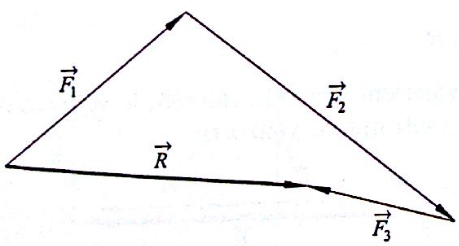
$F_1 = 30$ N

$F_2 = 45$ N

$F_3 = 20$ N

1 cm ... 10 N

Več sil bomo najlažje sešteli, če jih zložimo po vrsti tako, da bo začetek vsake naslednje sile v koncu prejšnje. Vsota sil je razdalja med začetkom prve in koncem zadnje sile:



Pomerimo dolžino rezultante $\vec{R}$, da dobimo njeno velikost. To je 3,9 cm, ker pa 1 cm pomeni 10 N, je to 39 N. Rezultat je seveda približen, saj metoda ni natančna.

5. Sili $\vec{F_1}$ in $\vec{F_2}$ z velikostma 10 N in 15 N sta pravokotni druga na drugo. Grafično določi velikost tretje sile (F_3) tako, da bo njihova vsota (rezultanta) enaka nič ($\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3} = 0$).

Podatki:

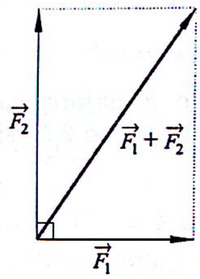
$F_1 = 10$ N

$F_2 = 15$ N

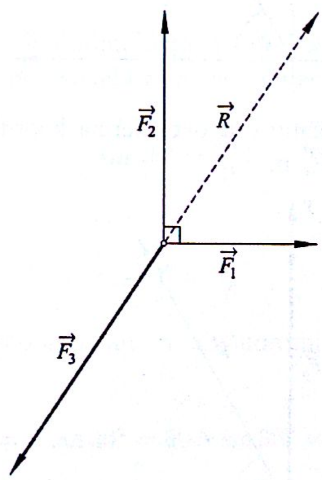
1.NAČIN

Narišimo sili $\vec{F_1}$ in $\vec{F_2}$ v skupnem izhodišču. Izberimo merilo tako, da 1 cm na sliki pomeni 5 N. Tako je sila $\vec{F_1}$ dolga 2 cm, sila $\vec{F_2}$ pa 3 cm. Njuno vsoto skonstruirajmo s paralelogramskim pravilom. Izmerimo njeno dolžino in dobimo približno 3,6 cm (±0,1 cm). Izračunajmo velikost rezultante sil $\vec{F_1}$ in $\vec{F_2}$:

$$\begin{aligned} R &= F_1 + F_2 = \\ &= 3{,}6\,\mathrm{cm}\,(\pm 0{,}1\,\mathrm{cm}) \cdot 5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}} = \\ &= 18\,\mathrm{N}\,(\pm 0{,}5\,\mathrm{N}) \end{aligned}$$



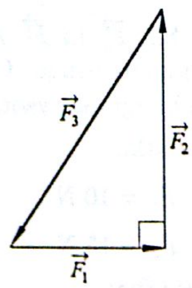
Če naj bo vsota sil $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ in $\vec{F_3}$ enaka nič, sta sila $\vec{F_3}$ in dobljena rezultanta $\vec{R}$ nasprotno enaka vektorja. Sila $\vec{F_3}$ je tako usmerjena obratno kot rezultanta $\vec{R}$, njena velikost pa je 18 N:



2.NAČIN

Sile narišimo v istem merilu kot pri prvem načinu; 1 cm na sliki pomeni 5 N. Sili $\vec{F_1}$ in $\vec{F_2}$ narišimo tako, da se sila $\vec{F_2}$ začne v koncu sile $\vec{F_1}$.

Če naj bo vsota sil enaka nič, ima sila $\vec{F_3}$ začetek v koncu sile $\vec{F_2}$ in konec v začetku sile $\vec{F_1}$. Izmerimo velikost sile $\vec{F_3}$ in dobimo 3,6 cm (±0,1 cm), kar pomeni 18 N (±0,5 N).



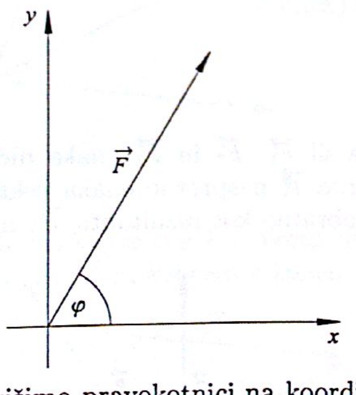
6. Sila F ima velikost 8 N in je usmerjena pod kotom 60° glede na pozitivno os x. Grafično razstavi silo $\vec{F}$ na komponenti v smeri x in y v pravokotnem koordinatnem sistemu. Približno izmeri velikosti komponent.

Podatki:

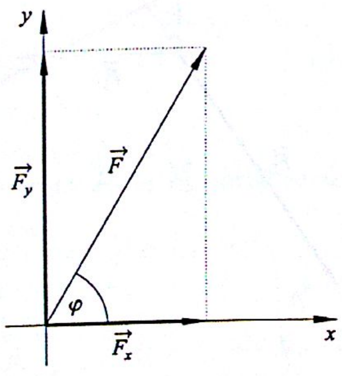
$F = 8$ N

$\varphi = 60°$

Silo $\vec{F}$ najprej narišimo v koordinatnem sistemu. 1 cm na sliki naj bo 2 N, sila je tako dolga 4 cm:



S konice sile narišimo pravokotnici na koordinatni osi in označimo vektorja $\vec{F_x}$ in $\vec{F_y}$:



Silo $\vec{F}$ smo razstavili na komponenti $\vec{F_x}$ in $\vec{F_y}$, saj je $\vec{F}$ vsota vektorjev $\vec{F_x}$ in $\vec{F_y}$ (paralelogramsko pravilo).

Na koncu izmerimo dolžini komponent in izračunajmo njuni velikosti. Dolžina komponente $\vec{F_x}$ meri približno 2 cm. Od tod je njena velikost:

$$F_x = 2\,\text{cm} \cdot 2\,\frac{\text{N}}{\text{cm}} = 4\,\text{N}$$

Merimo približno na 1 mm = 0,1 cm natančno, kar pomeni, da je napaka približno:

$$0{,}1\,\text{cm} \cdot 2\,\frac{\text{N}}{\text{cm}} = 0{,}2\,\text{N}$$

Komponenta $\vec{F_y}$ pa meri približno 3,5 cm, kar pomeni, da je njena velikost:

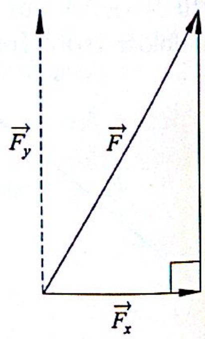
$$F_y = 3{,}5\,\text{cm} \cdot 2\,\frac{\text{N}}{\text{cm}} = 7\,\text{N}\,(\pm 0{,}2\,\text{N})$$

Rezultat lahko hitro preverimo, saj komponenti $\vec{F_x}$ in $\vec{F_y}$ in sila $\vec{F}$ tvorijo pravokotni trikotnik. Velikosti stranic v pravokotnem trikotniku poveže Pitagorov izrek:

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2$$

Od tod je:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$



V enačbo vstavimo velikosti komponent in izračunajmo velikost sile $\vec{F}$:

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{(4\,\text{N})^2 + (7\,\text{N})^2} = \sqrt{16\,\text{N}^2 + 49\,\text{N}^2} = \\ &= \sqrt{65\,\text{N}^2} = 8{,}062\,\text{N} = 8\,\text{N} \end{aligned}$$

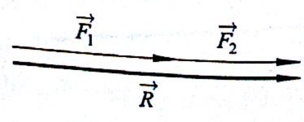
7. Izračunaj velikost rezultante sil $\vec{F_1}$ in $\vec{F_2}$, če sta usmerjeni v enakih, nasprotnih ali v pravokotnih smereh. Velikost sile $\vec{F_1}$ je 200 N, velikost sile $\vec{F_2}$ pa 150 N.

Podatki:

$F_1 = 200$ N

$F_2 = 150$ N

Če sta sili usmerjeni v enakih smereh, je velikost njune rezultante enaka vsoti njunih velikosti:

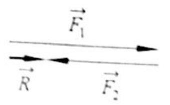


Tako imamo:

$$R = F_1 + F_2 = 200\,\mathrm{N} + 150\,\mathrm{N} = 350\,\mathrm{N}$$

Velikost rezultante nasprotno usmerjenih sil je razlika njunih velikosti:

$$R = F_1 - F_2 = 200\,\mathrm{N} - 150\,\mathrm{N} = 50\,\mathrm{N}$$



Narišimo še primer, ko sta sili pravokotni med seboj in jih grafično seštejmo. Tako dobimo pravokotni trikotnik, v katerem sta kateti veliki kot sili $\vec{F_1}$ in $\vec{F_2}$, hipotenuza pa kot njuna vsota (rezultanta).

Velikost rezultante izračunajmo s Pitagorovim izrekom

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2$$

Od tod je:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{(200\,\mathrm{N})^2 + (150\,\mathrm{N})^2} = \underline{\underline{250\,\mathrm{N}}}$$

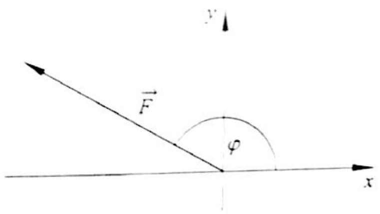
△8. Sila $\vec{F}$ ima [illegible] tivno smer[illegible] komponent v sme[illegible] N.

Podatki:

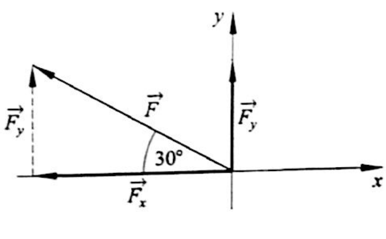
$F = 80$ N

$\varphi = 150°$

Narišimo koordinatni sistem in silo $\vec{F}$:

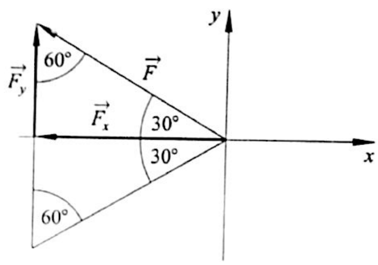


Silo grafično razstavimo na komponenti $\vec{F_x}$ in $\vec{F_y}$. S komponentama in silo tvorimo pravokotni trikotnik in v njem označimo kot 30°:



1.NAČIN

Pravokotni trikotnik, ki ima enega od kotov 30°, je polovica enakostraničnega trikotnika:



Na sliki vidimo, da je velikost komponente $\vec{F_x}$ enaka višini tega enakostraničnega trikotnika, katerega stranica je 80 N. Višina v enakostraničnem trikotniku z dolžino stranice a je podana z enačbo:

$$v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Tako je velikost komponente $\vec{F_x}$:

$$F_x = F\frac{\sqrt{3}}{2} = 80\frac{\sqrt{3}}{2} = 69{,}28\,\mathrm{N} = \underline{\underline{69\,\mathrm{N}}}$$

Velikost komponente sile $\vec{F}$ v smeri y, to je $\vec{F_y}$, je enaka polovici stranice tega enakostraničnega trikotnika, torej:

$$F_y = \frac{F}{2} = \frac{80\,\mathrm{N}}{2} = \underline{\underline{40\,\mathrm{N}}}$$

△2.NAČIN

V pravokotnem trikotniku, ki ga tvorijo komponenti $\vec{F_x}$ in $\vec{F_y}$ ter sila $\vec{F}$, zapišimo enačbi za sinus in kosinus kota 30°:

$$\sin 30° = \frac{F_y}{F}$$

in

$$\cos 30° = \frac{F_x}{F}$$

Iz dobljenih enačb izrazimo in izračunajmo velikosti komponent $\vec{F_x}$ in $\vec{F_y}$:

$$F_y = F\sin 30° = 80\,\mathrm{N}\sin 30° = \underline{\underline{40\,\mathrm{N}}}$$

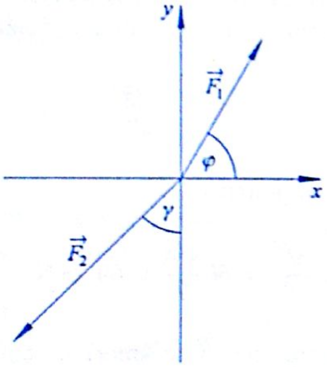
in

$$F_x = F\cos 30° = 80\,\mathrm{N}\cos 30° = 69{,}28\,\mathrm{N} = \underline{\underline{69\,\mathrm{N}}}$$

O kotnih funkcijah sinus in kosinus smo nekaj več povedali v poglavju 2.4 Ravninsko gibanje. Ponovimo le, da funkciji zapišemo s pomočjo razmerij stranic v pravokotnem trikotniku (sinus kota je kvocient kotu nasprotne katete in hipotenuze, kosinus pa kvocient kotu priležne katete in hipotenuze).

Kot smo že omenili, kotne funkcije ne spadajo v učni načrt prvega letnika srednje šole, zato se jih praviloma skušamo izogibati. Naloge so tako omejene na trikotnike s koti 30°, 45° ali 60°, ki jih lahko rešimo tudi brez uporabe kotnih funkcij. Vseeno bodo pri takih nalogah kot dodatna možnost ponavadi podane tudi rešitve z uporabo kotnih funkcij.

△9. Določi velikost rezultante sil $\vec{F_1}$ in $\vec{F_2}$. Velikost sile $\vec{F_1}$ je 35 N, velikost sile $\vec{F_2}$ 50 N, kot φ je 60° in kot γ 45°.



Podatki:

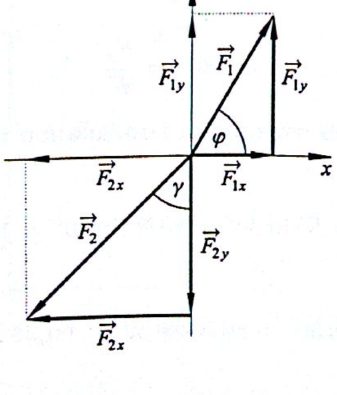
$F_1 = 35$ N

$F_2 = 50$ N

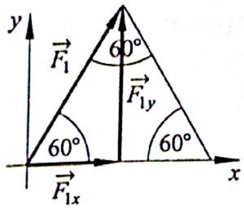
$\varphi = 60°$

$\gamma = 45°$

Sili najprej grafično razstavimo na komponente; silo $\vec{F_1}$ na komponenti $\vec{F_{1x}}$ in $\vec{F_{1y}}$ in silo $\vec{F_2}$ na komponenti $\vec{F_{2x}}$ in $\vec{F_{2y}}$. S komponentami in silama tvorimo dva pravokotna trikotnika:



Kot v prejšnji nalogi je trikotnik sile $\vec{F_1}$ polovica ena[...] straničnega trikotnika s stranico 35 N:



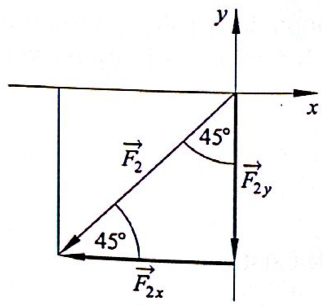
Komponenta sile $\vec{F_1}$ v smeri x ima tako velikost enako polovi[...] stranice, torej:

$$F_{1x} = \frac{F_1}{2} = \frac{35\,\mathrm{N}}{2} = 17{,}5\,\mathrm{N}$$

Komponenta sile $\vec{F_1}$ v smeri y pa ima velikost enako viši[...] tega enakostraničnega trikotnika:

$$F_{1y} = \frac{F_1\sqrt{3}}{2} = \frac{35\,\mathrm{N}\sqrt{3}}{2} = 30{,}31\,\mathrm{N}$$

Trikotnik sile $\vec{F_2}$ pa je enakokraki trikotnik; komponenti si[...] $\vec{F_2}$ imata torej enaki velikosti:



Enakokraki trikotnik je polovica kvadrata. Hipotenuza te[...] trikotnika je hkrati diagonala kvadrata. Diagonala kvadra[...] s stranico a je podana z enačbo:

$$d = a\sqrt{2}$$

Od tod je $a = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$. Tako je velikost komponent (stranic):

$$F_{2x} = F_{2y} = \frac{F_2}{\sqrt{2}} = \frac{50\,\mathrm{N}}{\sqrt{2}} = 35{,}36\,\mathrm{N}$$

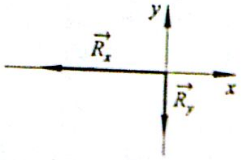
Velikost rezultante v smeri x dobimo, če seštejemo veliko[...] komponent $\vec{F_{1x}}$ in $\vec{F_{2x}}$. Ne pozabimo, da je $\vec{F_{2x}}$ usmerjen[...] negativno smer:

$$R_x = F_{1x} - F_{2x} = 17{,}5\,\mathrm{N} - 35{,}36\,\mathrm{N} = -17{,}86\,\mathrm{N}$$

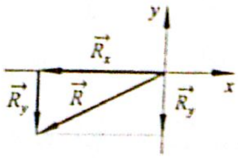
Na podoben način izračunajmo velikost rezultante v smeri y:

$$R_y = F_{1y} - F_{2y} = 30{,}31\,\mathrm{N} - 35{,}36\,\mathrm{N} = -5{,}05\,\mathrm{N}$$

Obe komponenti sta negativni, kar pomeni, da sta usmerjeni v negativnih smereh:



Rezultanta tvori s svojima komponentama pravokotni trikotnik:



Po Pitagorovem izreku je:

$$R^2 = {R_x}^2 + {R_y}^2$$

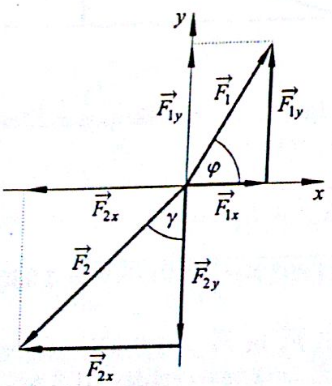
Od tod je:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(17{,}86\,\mathrm{N})^2 + (5{,}05\,\mathrm{N})^2} = \\ &= 18{,}56\,\mathrm{N} = \underline{\underline{19\,\mathrm{N}}} \end{aligned}$$

Pri računanju s Pitagorovim izrekom nismo upoštevali negativnih predznakov komponent, saj v Pitagorovem izreku nastopajo le dolžine stranic v pravokotnem trikotniku, ne pa tudi njihove smeri.

2.NAČIN

Zapišimo enačbi za sinus in kosinus v trikotniku sile $\vec{F_1}$:



$$\sin\varphi = \frac{F_{1y}}{F_1} \qquad \cos\varphi = \frac{F_{1x}}{F_1}$$

In še v trikotniku sile $\vec{F_2}$:

$$\sin\gamma = \frac{F_{2x}}{F_2} \qquad \cos\gamma = \frac{F_{2y}}{F_2}$$

Iz teh enačb izrazimo in izračunajmo velikost komponent sil $\vec{F_1}$ in $\vec{F_2}$:

$$\begin{aligned} F_{1x} &= F_1\cos\varphi = 35\,\mathrm{N}\cos 60^\circ = 17{,}5\,\mathrm{N} \\ F_{1y} &= F_1\sin\varphi = 35\,\mathrm{N}\sin 60^\circ = 30{,}31\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} F_{2x} &= F_2\sin\gamma = 50\,\mathrm{N}\sin 45^\circ = 35{,}36\,\mathrm{N} \\ F_{2y} &= F_2\cos\gamma = 50\,\mathrm{N}\cos 45^\circ = 35{,}36\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Sedaj izračunajmo rezultanto za vsako smer posebej. Velikost rezultante v smeri x dobimo, če upoštevamo, da je komponenta $\vec{F_{1x}}$ usmerjena v pozitivno, komponenta $\vec{F_{2x}}$ pa v negativno smer:

$$R_x = F_{1x} - F_{2x} = 17{,}5\,\mathrm{N} - 35{,}36\,\mathrm{N} = -17{,}86\,\mathrm{N}$$

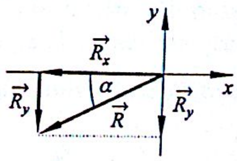
Podoben račun ponovimo še za rezultanto v smeri y:

$$R_y = F_{1y} - F_{2y} = 30{,}31\,\mathrm{N} - 35{,}36\,\mathrm{N} = -5{,}05\,\mathrm{N}$$

Nadaljevanje je enako kot pri prvem načinu, zato ga ne bomo ponavljali.

Omenimo še prednost računanja s kotnimi funkcijami. Z uporabo kotnih funkcij lahko natančno določimo smer rezultante. Zapišimo tangens kota α, ki ga rezultanta oklepa z osjo x in smo ga označili na sliki (tangens kota je kvocient kotu nasprotne katete in kotu priležne katete):

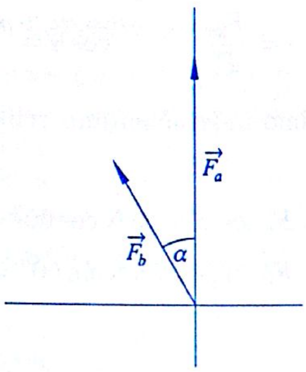
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{5{,}05\,\mathrm{N}}{17{,}86\,\mathrm{N}} = 0{,}2828$$



Od tod pa s funkcijo arkustangens (tg^{-1}) izračunajmo kot α:

$$\alpha = \mathrm{tg}^{-1}(0{,}2828) = 15{,}79^\circ = \underline{\underline{16^\circ}}$$

△10. Med silama $\vec{F_a}$ in $\vec{F_b}$ je kot 30°. Izračunaj, kolikšni naj bosta velikost in smer sile $\vec{F_c}$, da bo skupna vsota sil $\vec{F_a}$, $\vec{F_b}$ in $\vec{F_c}$ enaka nič. Velikost sile $\vec{F_a}$ je 1,2 kN, velikost sile $\vec{F_b}$ pa 0,8 kN.



Podatki:

$F_a = 1{,}2\,\text{kN} = 1200\ \text{N}$

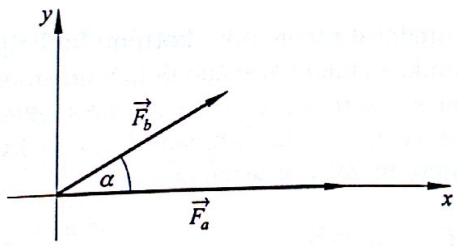
$F_b = 0{,}8\,\text{kN} = 800\ \text{N}$

$\alpha = 30°$

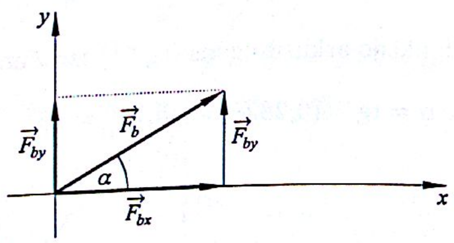
1.NAČIN

Da bo vsota sil $\vec{F_a}$, $\vec{F_b}$ in $\vec{F_c}$ enaka nič, mora biti sila $\vec{F_c}$ nasprotno enaka vsoti sil $\vec{F_a}$ in $\vec{F_b}$, zato najprej izračunajmo velikost in določimo smer vsote sil $\vec{F_a}$ in $\vec{F_b}$.

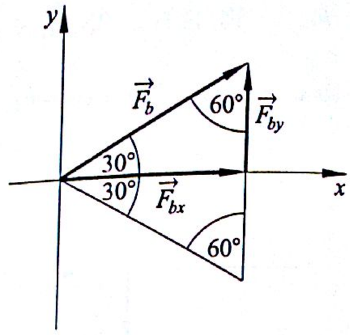
Sili postavimo v koordinatno izhodišče. $\vec{F_a}$ usmerimo v pozitivno smer x, $\vec{F_b}$ je tako usmerjena pod kotom 30° glede na pozitivno smer x:



Silo $\vec{F_b}$ razstavimo na komponenti $\vec{F_{bx}}$ in $\vec{F_{by}}$:



Trikotnik sile $\vec{F_b}$ predstavlja polovico enakostraničnega trikotnika s stranico 800 N:



Zato je velikost komponente $\vec{F_{bx}}$ enaka višini v tem trikotni

$$F_{bx} = \frac{F_b\sqrt{3}}{2} = \frac{800\,\text{N}\sqrt{3}}{2} = 692{,}8\,\text{N}$$

Velikost komponente $\vec{F_{by}}$ pa je enaka polovici stranice te trikotnika:

$$F_{by} = \frac{F_b}{2} = \frac{800\,\text{N}}{2} = 400\,\text{N}$$

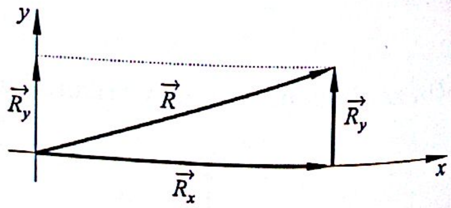
Sedaj izračunajmo velikosti komponent rezultantante sil $\vec{F_a}$ in $\vec{F_b}$ za vsako smer posebej. V smeri x delujeta $\vec{F_a}$ in $\vec{F_{bx}}$ obe v pozitivno smer:

$$R_x = F_a + F_{bx} = 692{,}8\,\text{N} + 1\,200\,\text{N} = 1\,893\,\text{N}$$

V smeri y pa deluje le komponenta $\vec{F_{by}}$ v pozitivno smer. Velikost rezultante sil $\vec{F_a}$ in $\vec{F_b}$ v smeri y je tako:

$$R_y = F_{by} = 400\,\text{N}$$

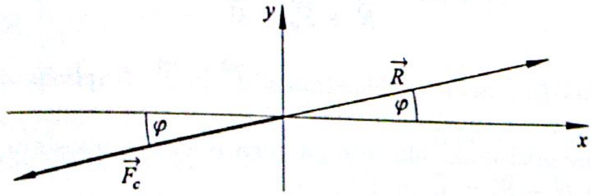
Ker sta R_x in R_y pozitivni, je rezultanta usmerjena v pr kvadrant:



Komponenti $\vec{R_x}$ in $\vec{R_y}$ tvorita skupaj z njeno vsoto $\vec{R}$ pra vokotni trikotnik, zato je:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{{R_x}^2 + {R_y}^2} = \\ &= \sqrt{(1\,893\,\text{N})^2 + (400\,\text{N})^2} = 1\,935\,\text{N} = \underline{\underline{1{,}9\,\text{kN}}} \end{aligned}$$

Velikost vsote sil $\vec{F_a}$ in $\vec{F_b}$ je 1,9 kN, usmerjena pa je v pr kvadrant. Sila $\vec{F_c}$ ima tako velikost 1,9 kN, usmerjena pa nasproti vsoti sil $\vec{F_a}$ in $\vec{F_b}$ v tretji kvadrant:

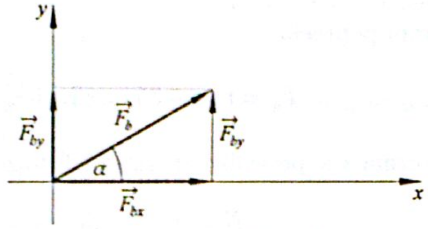


2.NAČIN

Velikosti komponent sile $\vec{F_b}$ lahko izračunamo tudi s kotnimi funkcijami. V pravokotnem trikotniku, ki ga tvorita komponenti $\vec{F}_{bx}$ in $\vec{F}_{by}$ s silo $\vec{F_b}$, zapišimo sinus in kosinus kota α:

$$\sin\alpha = \frac{F_{by}}{F_b}$$

$$\cos\alpha = \frac{F_{bx}}{F_b}$$



Iz dobljenih zvez izrazimo in izračunajmo velikost komponent sile $\vec{F_b}$:

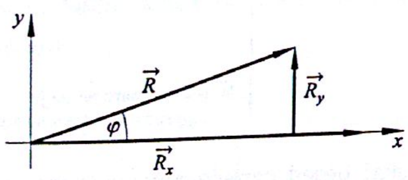
$$F_{by} = F_b \sin\alpha = 800\,\mathrm{N}\sin 30^\circ = 400\,\mathrm{N}$$

$$F_{bx} = F_b \cos\alpha = 800\,\mathrm{N}\cos 30^\circ = 692{,}8\,\mathrm{N}$$

Velikost rezultante sil $\vec{F_a}$ in $\vec{F_b}$ (1,9 kN) dobimo enako kot pri prvem načinu, zato računa ne bomo ponavljali.

Z uporabo kotnih funkcij pa lahko natančno določimo tudi smer rezultante. Pri prvem načinu reševanja te naloge smo lahko le določili, da je rezultanta usmerjena v prvi kvadrant. S kotnimi funkcijami pa lahko določimo tudi kot, ki ga oklepa rezultanta z eno od osi.

Označimo s φ kot, ki ga rezultanta oklepa z osjo x:



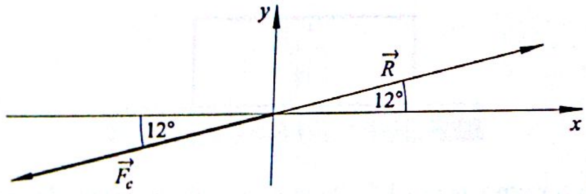
Tangens kota φ je:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{R_y}{R_x} = \frac{400\,\mathrm{N}}{1\,893\,\mathrm{N}} = 0{,}2113$$

Tako je:

$$\varphi = \mathrm{tg}^{-1}(0{,}2113) = 11{,}93^\circ = 12^\circ$$

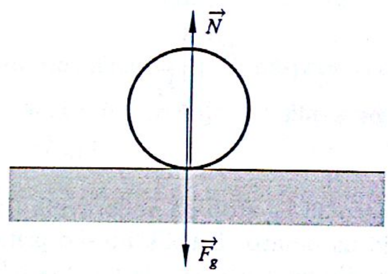
Sila F_c ima torej velikost 1,9 kN, usmerjena pa je nasprotno od rezultante sil $\vec{F_a}$ in $\vec{F_b}$, torej v tretji kvadrant; z abscisno osjo oklepa kot 12°:



3.2 Ravnovesje sil

1. Žoga miruje na vodoravni podlagi. Nariši vse sile, ki delujejo nanjo. Velikosti sil naj bodo v pravem razmerju.

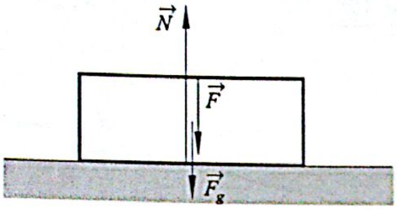
Na žogo delujeta sila teže in pravokotna sila podlage (tal), ki jo imenujemo tudi normala. Silo teže rišimo iz težišča žoge; usmerimo jo navzdol, proti središču Zemlje. Označimo jo s $\vec{F_g}$. Sila podlage (normala) ima začetek v točki, kjer se žoga dotika tal, in je usmerjena navzgor. Označimo jo z $\vec{N}$:



Ker žoga miruje, zanjo velja **I. Newtonov zakon (zakon o ravnovesju sil): Telo miruje ali se giblje premo enakomerno, kadar je vsota vseh zunanjih sil nanj enaka nič.** Vsota vseh sil na žogo je tako enaka nič, kar pomeni, da sta sila teže in normala nasprotno enaki sili; njuni velikosti sta enaki.

2. Na opeko, ki leži na vodoravnih tleh, pritisnemo s silo navpično navzdol. Nariši sile, ki delujejo na opeko. Velikosti sil naj bodo v pravem razmerju. Za opeko zapiši enačbo za ravnovesje sil.

Narišimo opeko in sile, ki delujejo nanjo. Silo, s katero pritiskamo, rišimo z začetkom v točki, v kateri se dotika opeke, in jo usmerimo navzdol. Sila teže prijemlje v težišču in je tudi usmerjena navzdol. Pravokotna sila podlage (normala) prijemlje na sredi stične ploskve med opeko in tlemi in je usmerjena navzgor:



Zakon o ravnovesju sil (I. Newtonov zakon) pravi, da je vsota zunanjih sil na telo, ki miruje, enaka nič:

$$\vec{F} + \vec{F_g} + \vec{N} = \vec{0}$$

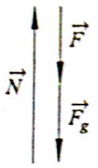
Sila teže in sila $\vec{F}$ sta usmerjeni navzdol, normala pa navzgor. Naj bo pozitivna smer navzgor, negativna pa navzdol. Za velikosti sil tedaj velja:

$$N - F - F_g = 0$$

ali

$$N = F + F_g$$

Dolžine sil na sliki morajo biti v tem razmerju. Skupna dolžina sil $\vec{F_g}$ in $\vec{F}$ mora biti enaka dolžini normale:

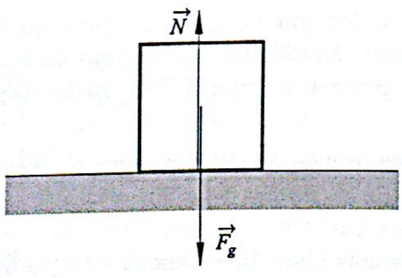


3. Omara z maso 35 kg stoji na vodoravnih tleh. Nariši vse sile, ki delujejo na omaro. S kolikšno silo pritiska omara na tla? S kolikšno silo pa pritiskajo tla na omaro?

Podatki:

$m = 35$ kg

Na skici narišimo sili, ki delujeta na omaro. Sila teže ima začetek v težišču omare, usmerjena je navzdol. Pravokotna sila podlage (normala) ima začetek sredi stične ploskve med tlemi in omaro; usmerjena je navzgor, pravokotno na tla:



Ker omara miruje, zanjo velja I. Newtonov zakon:

$$\vec{N} + \vec{F_g} = \vec{0}$$

Zapišimo še enačbo z velikostma sil $\vec{F_g}$ in $\vec{N}$. Naj bo pozitivna smer navzgor (pozitivna smer osi y). V tem primeru je sila normale pozitivna, sila teže pa negativna. To upoštevajmo v enačbi $\vec{N} + \vec{F_g} = \vec{0}$ in dobimo:

$$N - F_g = 0$$

ali

$$N = F_g$$

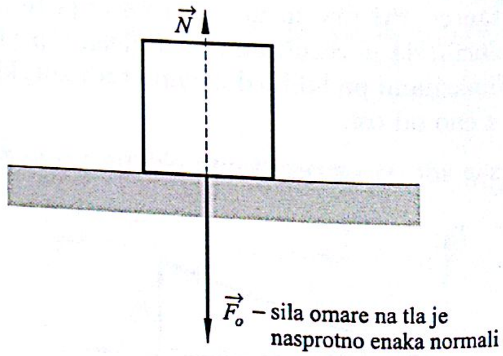
Velikost sile teže izračunajmo z enačbo $F_g = mg$, kjer je g težni popešek:

$$F_g = mg = 35\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 343{,}4\,\mathrm{N}$$

Normala je po velikosti enaka sili teže:

$$N = F_g = 343{,}4\,\mathrm{N} = \underline{\underline{340\,\mathrm{N}}}$$

Normala je sila, s katero tla delujejo na omaro. Spomnimo se III. Newtonovega zakona (zakona o vzajemnem učinku): **Če eno telo deluje na drugo z neko silo, deluje drugo telo nazaj z nasprotno enako silo.** Od tod je sila, s katero omara deluje na tla, nasprotno enaka sili, s katero tla delujejo na omaro, torej normali. Sila omare na tla je tako enako velika kot normala, 340 N, in je usmerjena navzdol (nasproti normali):



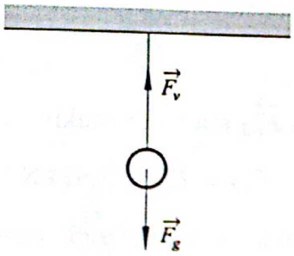
Namenimo nekaj besed označevanju oziroma neoznačevanju sil z vektorskimi znaki. Silo označimo z vektorskim znakom $\vec{F}$, kadar mislimo na silo kot vektor in je v tej oznaki vsebovana tudi smer sile. Primer v tej nalogi je enačba $\vec{N} + \vec{F_g} = \vec{0}$. Kadar pa v enačbi nastopajo le velikosti sil, sile pišemo brez vektorske oznake, smer sil v enačbi pa podamo s predznaki. Tako enačba $\vec{N} + \vec{F_g} = \vec{0}$ preide v enačbo $N - F_g = 0$.

4. Utež z maso 48 kg prosto visi na navpični vrvi. S kolikšno silo vrv drži utež? S kolikšno silo je napeta vrv?

Podatki:

$m = 48$ kg

Narišimo skico in sili, ki delujeta na utež. Sila teže vleče utež proti tlom, sila vrvi pa jo drži navzgor:



Utež miruje, zato je vsota vseh sil, ki delujejo nanjo, enaka nič (I. Newtonov zakon):

$$\vec{F_v} + \vec{F_g} = \vec{0}$$

Zapišimo enačbo še v obliki, kjer smeri sil upoštevamo s predznaki. Za pozitivno si izberimo smer navzgor (smer sile vrvi):

$$F_v - F_g = 0$$

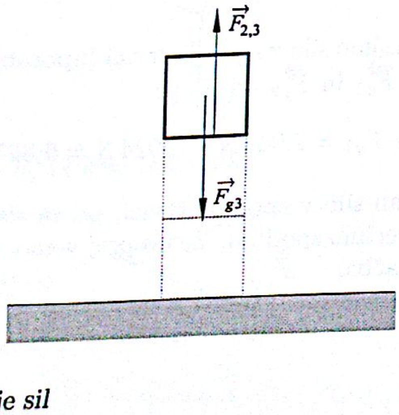
Od tod je sila, s katero vrv drži utež, po velikosti enaka sili teže:

$$F_v = F_g = mg = 48\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 470{,}9\,\mathrm{N} = \underline{470\,\mathrm{N}}$$

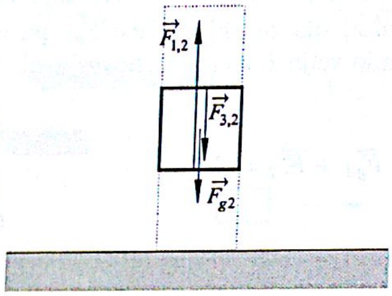
Po III. Newtonovem zakonu je sila, s katero vrv drži utež, nasprotno enaka sili, s katero utež vleče vrv. Vrv je tako napeta s 470 N.

5. Otrok se igra z lesenimi kockami. Tri kocke zloži eno na drugo. Nariši vse sile, ki delujejo na posamezne kocke. Zapiši pare nasprotno enakih sil.

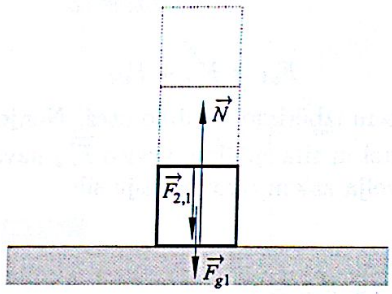
Na zgornjo kocko delujta sila teže $\vec{F_{g3}}$ navzdol in sila srednje kocke $\vec{F_{2,3}}$ navzgor:



Na srednjo kocko delujeta sila teže $\vec{F_{g2}}$ in sila zgornje kocke $\vec{F_{3,2}}$ navzdol ter sila spodnje kocke $\vec{F_{1,2}}$ navzgor:



Na spodnjo kocko delujeta sila teže $\vec{F_{g1}}$ in sila srednje kocke $\vec{F_{2,1}}$ navzdol ter sila podlage $\vec{N}$ navzgor:



Po III. Newtonovem zakonu so pari nasprotno enakih sil:

a) sila zgornje kocke na srednjo in sila srednje kocke na zgornjo ($\vec{F_{3,2}} = -\vec{F_{2,3}}$)

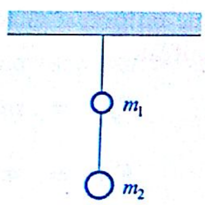
b) sila spodnje kocke na srednjo in sila srednje kocke na spodnjo ($\vec{F_{1,2}} = -\vec{F_{2,1}}$)

6. Utež z maso 300 g visi na vrvici. Nanjo je z vrvico pritrjena utež z maso 400 g (glej sliko). Nariši vse sile, ki delujejo na zgornjo, in vse sile, ki delujejo na spodnjo utež. S kolikšno silo je napeta zgornja in s kolikšno spodnja vrvica?

Podatki:

$m_1 = 300\,\mathrm{g} = 0{,}3\,\mathrm{kg}$

$m_2 = 400\,\mathrm{g} = 0{,}4\,\mathrm{kg}$

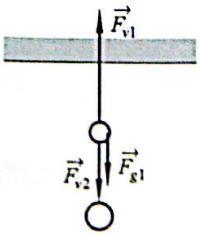


Pri reševanju nalog, v katerih nastopa več teles, lahko vsako telo obravnavamo posebej, lahko pa si za obravnavo izberemo več teles hkrati. V tej nalogi imamo možnost obravnavati vsako utež posebej ali obe uteži skupaj. Pravimo, da izberemo sistem (telo ali več teles skupaj).

1.NAČIN

Najprej si za sistem izberimo zgornjo utež in narišimo sile, ki delujejo nanjo. Sila teže $\vec{F}_{g1}$ in sila spodnje vrvice $\vec{F}_{v2}$ sta usmerjeni navzdol, sila zgornje vrvice $\vec{F}_{v1}$ pa navzgor. Ker utež miruje, zanjo velja zakon o ravnovesju sil:

$$\vec{F}_{v1} + \vec{F}_{g1} + \vec{F}_{v2} = \vec{0}$$



Naj bo smer navzgor pozitivna smer. Tako dobimo:

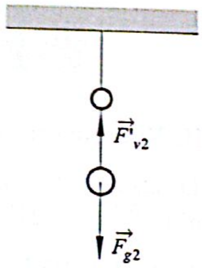
$$F_{v1} - F_{g1} - F_{v2} = 0$$

oziroma

$$F_{v1} = F_{g1} + F_{v2}$$

Sedaj si za sistem izberimo spodnjo utež. Nanjo delujeta sila teže $\vec{F}_{g2}$ navzdol in sila spodnje vrvice $\vec{F}'_{v2}$ navzgor. Tudi za spodnjo utež velja zakon o ravnovesju sil:

$$\vec{F}'_{v2} + \vec{F}_{g2} = \vec{0}$$



Od tod dobimo enačbo:

$$F'_{v2} - F_{g2} = 0$$

ali

$$F'_{v2} = F_{g2}$$

Da bomo lahko izračunali velikosti sil, s katerima sta napeti vrvici, najprej z enačbo $F_g = mg$ izračunajmo velikosti sil teže uteži:

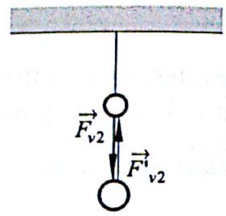
$$F_{g1} = m_1 g = 0{,}3\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 2{,}943\,\mathrm{N}$$

$$F_{g2} = m_2 g = 0{,}4\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 3{,}924\,\mathrm{N}$$

Velikost sile $\vec{F}_{g2}$ vstavimo v ravnovesno enačbo spodnje uteži $F'_{v2} = F_{g2}$ in dobimo velikost sile, s katero spodnja vrvica vleče spodnjo utež:

$$F'_{v2} = F_{g2} = 3{,}924\,\mathrm{N} = \underline{\underline{3{,}9\,\mathrm{N}}}$$

Sila, s katero spodnja vrvica drži spodnjo utež, je naspro… enaka sili, s katero spodnja vrvica vleče zgornjo utež (vrv… miruje, vsota sil nanjo je enaka nič):



Velikosti sil $\vec{F}_{v2}$ in $\vec{F}'_{v2}$ sta torej enaki:

$$F_{v2} = F'_{v2} = 3{,}924\,\mathrm{N}$$

Rezultat uporabimo v ravnovesni enačbi zgornje ute… $F_{v1} = F_{g1} + F_{v2}$ in izračunajmo še silo zgornje vrvice n… zgornjo utež:

$$F_{v1} = F_{g1} + F_{v2} = 2{,}943\,\mathrm{N} + 3{,}924\,\mathrm{N} = 6{,}876\,\mathrm{N} = 6{,}9\,\mathrm{N}$$

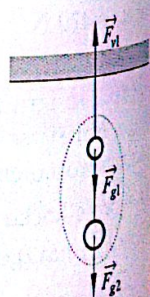
Kot v prejšnji nalogi sklepajmo, da sta vrvici napeti s silama, s katerima delujeta na uteži. Zgornja vrvica je tako napeta s silo 6,9 N, spodnja pa s silo 3,9 N.

2.NAČIN

Sedaj si za sistem najprej izberimo obe uteži skupaj in na skici narišimo sile, ki delujejo na ta sistem. Sila zgornje vrvi drži sistem navzgor, sili teže obeh uteži pa sistem vlečeta navzdol. Sil med utežema, torej sil v spodnji vrvi, ne upoštevamo, saj sta notranji sili (notranje sile so sile med telesi v sistemu in ne vplivajo na ravnovesje sistema).

Zapišimo enačbo ravnovesja, saj sistem miruje:

$$\vec{F}_{g1} + \vec{F}_{g2} + \vec{F}_{v1} = \vec{0}$$



Upoštevajmo smeri sil in dobimo:

$$F_{v1} - F_{g1} - F_{g2} = 0$$

Od tod izračunajmo silo v zgornji vrvici (uporabimo vrednosti za velikosti sil $\vec{F}_{g1}$ in $\vec{F}_{g2}$ od prej):

$$F_{v1} = F_{g1} + F_{g2} = 2{,}943\,\mathrm{N} + 3{,}924\,\mathrm{N} = 6{,}867\,\mathrm{N} = \underline{\underline{6{,}9\,\mathrm{N}}}$$

Da bi izračunali silo v spodnji vrvici, pa za sistem izberimo eno od uteži, recimo spodnjo. Že od prej vemo, da zanjo velja ravnovesna enačba:

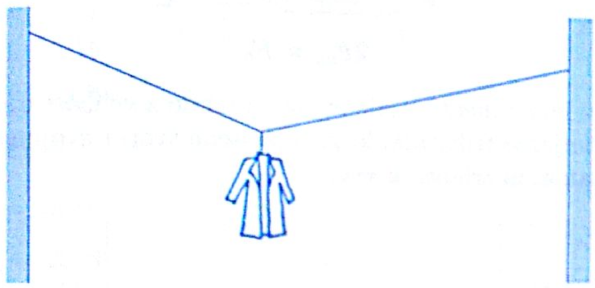
$$F_{v2} - F_{g2} = 0$$

Od tod je sila v spodnji vrvici:

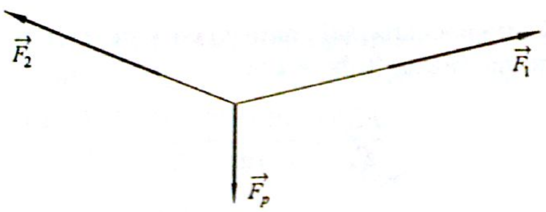
$$F_{v2} = F_{g2} = 3{,}924\,\mathrm{N} = \underline{\underline{3{,}9\,\mathrm{N}}}$$

Vrvici sta torej napeti s silama 6,9 N in 3,9 N.

7. Na vrv za obešanje perila obesimo plašč (slika). Nariši sile, ki delujejo na vrv. Velikosti sil naj bodo v pravem razmerju. Maso vrvi zanemari.



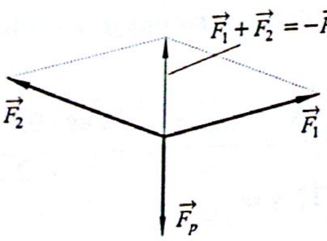
Na vrv delujejo sila plašča navzdol ter sili stranskih opor, vsaka v svojo smer (v smeri vrvi):



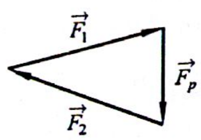
Vrv miruje, zato zanjo velja zakon o ravnovesju sil. Vsota vseh sil, ki delujejo na vrv, je tako enaka nič:

$$\vec{F}_p + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$$

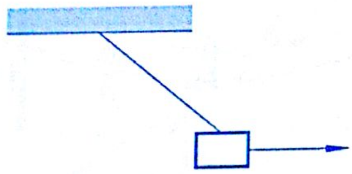
Dolžine sil morajo biti take, da je vsota sil $\vec{F}_1$ in $\vec{F}_2$ nasprotno enaka sili $\vec{F}_p$:



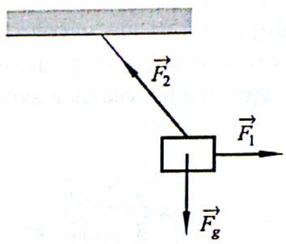
Sile $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ in $\vec{F}_p$ tvorijo trikotnik:



8. Tovor je obešen na navpični vrvi. Na tovor pritrdimo še eno vrv, ki jo vlečemo v vodoravni smeri, tako da se navpična vrv nekoliko nagne. Nariši vse sile na tovor. Za tovor zapiši ravnovesni enačbi za vodoravno in navpično smer.



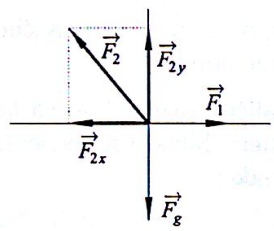
Na skici narišimo sile, ki delujejo na tovor. Sila teže vrvi vleče tovor navzdol, sili vrvi pa vsaka v svojo smer:



Tovor miruje, zato je vsota vseh sil nanj enaka nič:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_g = \vec{0}$$

Da bomo zapisali ravnovesni enačbi za vodoravno in navpično smer, silo poševne vrvi razstavimo na vodoravno in navpično komponento:



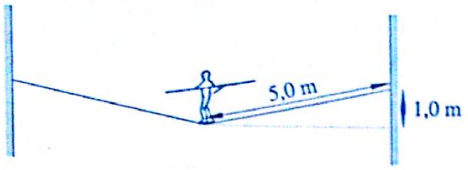
V vodoravni smeri delujeta sila vodoravne vrvi in komponenta x poševne sile, vsaka v svojo smer. Ravnovesna enačbe za velikosti sil v tej smeri je tako:

$$F_1 = F_{2x}$$

V navpični smeri pa delujeta sila teže navzdol in y komponenta sile poševne vrvi navzgor. Za velikosti teh sil tako velja:

$$F_g = F_{2y}$$

△9. Cirkuški vrvohodec stoji na sredi vrvi. Vrv je pri tem upognjena, kot kaže slika. S kolikšno silo je napeta vrv, če je masa vrvohodca 70 kg?



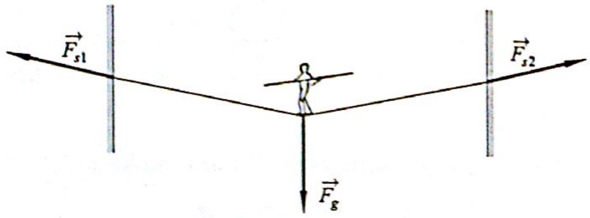
Podatki:

$m = 70$ kg

$a = 1{,}0$ m

$c = 5{,}0$ m

Narišimo sile, ki delujejo na vrv in vrvohodca, ki jih oba izberimo za sistem. Sila teže vrvohodca je usmerjena navzdol, sili sten pa vlečeta vrv simetrično vsaka v svojo smer:

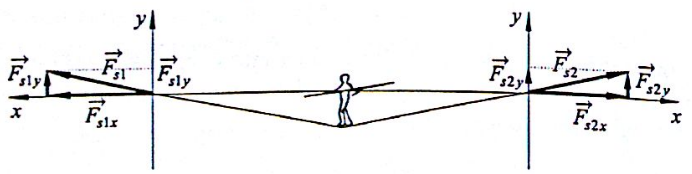


Vsota vseh sil na vrv je enaka nič, saj vrv miruje:

$$\vec{F}_{s1} + \vec{F}_{s2} = -\vec{F}_g$$

Nalogo rešimo tako, da ravnovesno enačbo razbijemo na dve enačbi, za vsako smer posebej.

Sili sten najprej grafično razstavimo na komponenti v vodoravni in navpični smeri. Sili sta simetrični, komponente obeh sil so po velikosti enake:



Sedaj zapišimo ravnovesni enačbi za vsako smer posebej. V vodoravni smeri delujeta komponenti sile stene v nasprotnih smereh:

$$F_{s1x} = F_{s2x}$$

To seveda drži, vendar nam ne pomaga pri reševanju naloge. V navpični smeri pa deluje sila teže vrvohodca navzdol in obe komponenti y sile sten navzgor. V navpični smeri zato velja

$$F_{s1y} + F_{s2y} = F_g$$

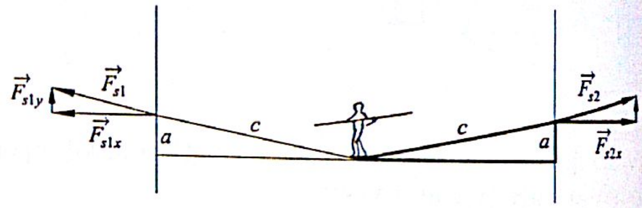
Ker sta $\vec{F}_{s1y}$ in $\vec{F}_{s2y}$ po velikosti enaki, velikosti obeh označimo z F_{sy}. Tako dobimo:

$$F_{sy} + F_{sy} = F_g$$

oziroma

$$2F_{sy} = F_g$$

Velikost komponente y sile stene izrazimo z velikostjo sile F_s, če primerjamo trikotnik, ki ga sila stene tvori s svojima komponentama, in trikotnik vrvi:



Trikotnika sta podobna, saj imata enake kote, zato je razmerje njunih stranic enako. Tako velja:

$$\frac{F_{sy}}{F_s} = \frac{1{,}0\,\mathrm{m}}{5{,}0\,\mathrm{m}} = \frac{1}{5}$$

ali

$$F_{sy} = \frac{F_s}{5}$$

To vstavimo v enačbo $2F_{sy} = F_g$:

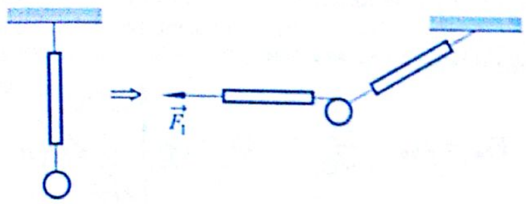
$$\frac{2F_s}{5} = F_g$$

Vstavimo še $F_g = mg$ in izračunajmo velikost sile, s katero stena vleče vrv:

$$F_s = \frac{F_g \cdot 5}{2} = \frac{mg \cdot 5}{2} = \frac{70\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 5}{2} =$$
$$= 1\,717\,\mathrm{N} = \underline{\underline{1{,}7\,\mathrm{kN}}}$$

Velikost sile, s katero stena vleče vrv, je hkrati tudi velikost sile, s katero je vrv napeta.

10. Utež obesimo na silomer, ki se pri tem raztegne do oznake 15 N. Potem na utež pritrdimo še en silomer, ki ga vlečemo v vodoravni smeri s silo 26 N. Pri tem se prvi silomer nagne in dodatno raztegne. S kolikšno silo je napet poševni silomer? Oceni, kolikšen kot oklepa poševni silomer z navpičnico.



Podatki:

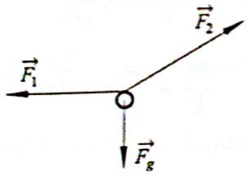
$F = 15\ \mathrm{N}$

$F_1 = 26\ \mathrm{N}$

Ko utež visi na silomeru in ta kaže 15 N, je ta sila enaka sili teže uteži. Teža uteži je torej 15 N:

$$F_g = 15\ \mathrm{N}$$

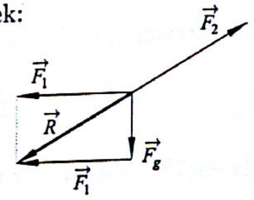
V drugem primeru na utež delujejo tri sile: sila teže $\vec{F_g}$ navzdol, sila vodoravnega silomera $\vec{F_1}$ v levo in sila poševnega silomera $\vec{F_2}$ poševno, desno navzgor:



Sila poševnega silomera je nasprotno enaka vsoti sile teže uteži in sile vodoravnega silomera, zato najprej izračunajmo velikost vsote sile teže uteži in sile vodoravnega silomera. Ta vsota, teža uteži in sila vodoravnega silomera tvorijo pravokotni trikotnik:

Njihove velikosti poveže Pitagorov izrek:

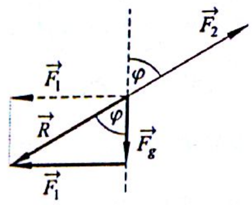
$$R^2 = F_1^2 + F_g^2$$



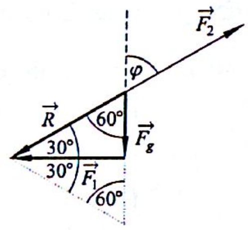
Tako je velikost vsote sil teže uteži in vodoravnega silomera:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{F_1^2 + F_g^2} = \sqrt{(26\,\mathrm{N})^2 + (15\,\mathrm{N})^2} = \\ &= 30{,}02\,\mathrm{N} = \underline{\underline{30\,\mathrm{N}}} \end{aligned}$$

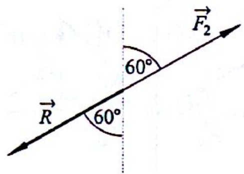
Poševni silomer je tako napet s silo, ki ima velikost 30 N, usmerjena pa je nasprotno tej vsoti. Kot φ, ki ga oklepa poševni silomer z navpičnico, dobimo, če bolje pogledamo trikotnik vsote sil teže uteži in vodoravnega silomera:



Hipotenuza v tem trikotniku, ki predstavlja velikost vsote, je dvakrat večja od krajše katete, ki predstavlja velikost sile teže. Trikotnik je tako polovica enakostraničnega trikotnika s kotoma 30° in 60°:



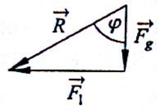
Kot, ki ga $\vec{R}$ oklepa z navpičnico, je tako približno 60°. Prav tako pa je 60° tudi kot, ki ga poševni silomer oklepa z navpičnico:



Dodatek

Kot φ bi natančneje določili s pomočjo kotnih funkcij. V trikotniku vsote, sile teže in sile vodoravnega silomera zapišemo tangens kota, ki ga vsota oklepa z navpičnico:

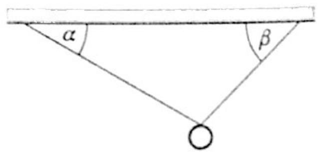
$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{F_1}{F_g} = \frac{26\,\mathrm{N}}{15\,\mathrm{N}} = 1{,}733$$



Od tod dobimo:

$$\varphi = \mathrm{tg}^{-1}1{,}733 = 60{,}01° = 60°$$

△ 11. Utež z maso 0,50 kg visi na dveh poševnih vrvicah, kot kaže slika. Kot α je 30°, kot β pa 45°. Kolikšni sta sili, s katerima sta napeti vrvici?



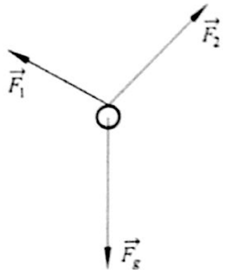
Podatki:

$m = 0{,}50$ kg

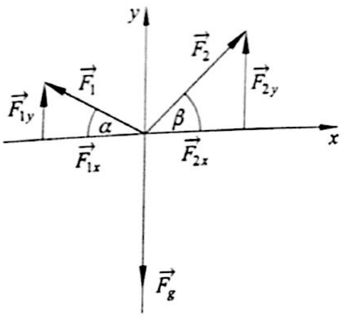
$\alpha = 30°$

$\beta = 45°$

Na utež delujejo: sila teže $\vec{F_g}$ navzdol, sili vrvic, $\vec{F_1}$ in $\vec{F_2}$ pa vsaka v svojo smer:



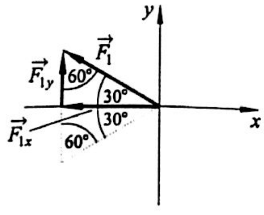
Postavimo koordinatni sistem, sili $\vec{F_1}$ in $\vec{F_2}$ pa najprej grafično razstavimo na komponente. Prenesimo kota α in β v pravokotna trikotnika sil $\vec{F_1}$ in $\vec{F_2}$.



1.NAČIN

Trikotnik sile $\vec{F_1}$ je polovica enakostraničnega trikotnika, zato je velikost komponente $\vec{F_{1x}}$ enaka višini enakostraničnega trikotnika s stranico F_1:

$$F_{1x} = \frac{F_1\sqrt{3}}{2}$$

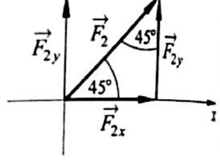


Velikost komponente $\vec{F_{1y}}$ pa je polovica stranice enakostraničnega trikotnika s stranico F_1:

$$F_{1y} = \frac{F_1}{2}$$

Trikotnik sile $\vec{F_2}$ je enakokraki trikotnik, zato sta komponenti $\vec{F_{2x}}$ in $\vec{F_{2y}}$ enako veliki. Njuno velikost predstavlja stranica v kvadratu z diagonalo F_2:

$$F_{2x} = F_{2y} = \frac{F_2}{\sqrt{2}}$$



Sedaj zapišimo ravnovesne enačbe za utež. V vodoravni smeri na utež delujeta $\vec{F_{1x}}$ in $\vec{F_{2x}}$ vsaka v svojo smer:

$$F_{1x} = F_{2x}$$

V navpični smeri na utež delujeta $\vec{F_{1y}}$ in $\vec{F_{2y}}$ navzgor ter sila teže uteži navzdol:

$$F_{1y} + F_{2y} = F_g$$

V enačbi vstavimo prej izražene velikosti komponent in dobimo:

$$\frac{F_1\sqrt{3}}{2} = \frac{F_2}{\sqrt{2}}$$

in

$$\frac{F_1}{2} + \frac{F_2}{\sqrt{2}} = F_g$$

Iz prve enačbe izrazimo F_2:

$$F_2 = \frac{F_1\sqrt{3}\sqrt{2}}{2} = \frac{F_1\sqrt{6}}{2}$$

To vstavimo v drugo enačbo:

$$\frac{F_1}{2} + \frac{F_1\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = F_g$$

Upoštevamo, da je $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$, da dobimo:

$$\frac{F_1}{2} + \frac{F_1\sqrt{3}}{2} = F_g$$

Iz enačbe izrazimo velikost sile $\vec{F_1}$:

$$F_1\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = F_g$$

$$F_1 = \frac{F_g}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

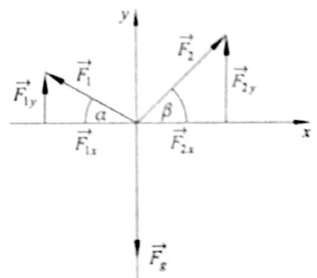
Upoštevajmo, da je $F_g = mg$, in izračunajmo velikost sile $\vec{F_1}$:

$$F_1 = \frac{mg}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{0{,}50\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = 3{,}591\,\mathrm{N} = \underline{\underline{3{,}6\,\mathrm{N}}}$$

Rezultat vstavimo v prej dobljeno zvezo $F_2 = \frac{F_1\sqrt{6}}{2}$ in izračunajmo še velikost sile $\vec{F_2}$:

$$F_2 = \frac{3{,}591\,\mathrm{N}\sqrt{6}}{2} = 4{,}398\,\mathrm{N} = 4{,}4\,\mathrm{N}$$

2.NAČIN



Najprej v trikotniku sile $\vec{F_1}$ zapišimo sinus in kosinus kota α:

$$\sin\alpha = \frac{F_{1y}}{F_1} \qquad \cos\alpha = \frac{F_{1x}}{F_1}$$

Od tod sta komponenti sile $\vec{F_1}$:

$$\begin{aligned} F_{1y} &= F_1 \sin\alpha \\ F_{1x} &= F_1 \cos\alpha \end{aligned}$$

Podoben postopek ponovimo v trikotniku sile $\vec{F_2}$:

$$\sin\beta = \frac{F_{2y}}{F_2} \qquad \cos\beta = \frac{F_{2x}}{F_2}$$

Tako sta komponenti sile $\vec{F_2}$:

$$F_{2y} = F_2 \sin\beta$$

$$F_{2x} = F_2 \cos\beta$$

Sedaj, ko smo sili razstavili po smereh, zapišimo enačbi ravnovesja za vsako smer posebej. V smeri x delujeta komponenti $\vec{F_{1x}}$ in $\vec{F_{2x}}$ v nasprotnih smereh:

$$F_{1x} = F_{2x}$$

Vstavimo izraza za velikost kompenent in tako dobimo:

$$F_1 \cos\alpha = F_2 \cos\beta$$

V smeri y deluje sila teže navzdol, komponenti $\vec{F_{1y}}$ in $\vec{F_{2y}}$ pa navzgor. Ravnovesje za smer y se tako glasi:

$$F_{1y} + F_{2y} = F_g$$

Upoštevajmo še izraze za velikost komponent in sile teže in dobimo:

$$F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\beta = mg$$

Tako smo dobili sistem dveh enačb z dvema neznankama (F_1 in F_2):

$$\begin{aligned} F_1 \cos\alpha &= F_2 \cos\beta \\ F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\beta &= mg \end{aligned}$$

Sistem rešimo tako, da iz prve enačbe izrazimo eno izmed neznank, recimo F_2:

$$F_2 = \frac{F_1 \cos\alpha}{\cos\beta}$$

Izraz vstavimo v drugo enačbo:

$$F_1 \sin\alpha + \frac{F_1\cos\alpha}{\cos\beta}\sin\beta = mg$$

Iz dobljene enačbe izračunajmo velikost sile $\vec{F_1}$:

$$F_1 (\sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\sin\beta) = mg$$

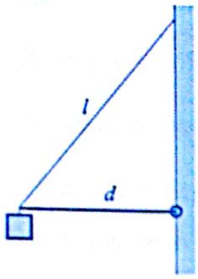
$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{mg}{\sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\sin\beta} = \\ &= \frac{0{,}50\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\sin 30^\circ + \frac{\cos 30^\circ}{\cos 45^\circ}\sin 45^\circ} = 3{,}591\,\mathrm{N} = \underline{\underline{3{,}6\,\mathrm{N}}} \end{aligned}$$

Izračunajmo še velikost sile $\vec{F_2}$:

$$F_2 = \frac{F_1\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{3{,}591\,\mathrm{N}\cos 30^\circ}{\cos 45^\circ} = 4{,}398\,\mathrm{N} = \underline{\underline{4{,}4\,\mathrm{N}}}$$

Ravnovesne naloge tega tipa so zelo podobne. Potrebno je razstaviti sile na komponente v smereh x in y, zapisati ravnovesni enačbi ter iz enačb izraziti iskane količine.

△ 12. Lahek drog je vrtljivo vpet na pokončno steno. Na koncu droga visi zaboj z maso 50 kg. Na drog je na njegovem koncu pritrjena vrvica, ki je z drugim koncem pritrjena na steno. S kolikšno silo je napeta vrv in kolikšna je sila v drogu? Dolžina droga je 4,5 m, dolžina vrvi pa 6,5 m.



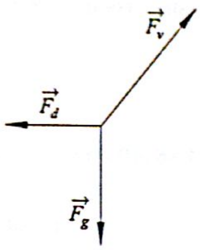
Podatki:

$m = 50$ kg

$d = 4{,}5$ m

$l = 6{,}5$ m

Narišimo sile, ki delujejo na krajišče droga: sila teže zaboja $\vec{F_g}$, sila vrvi $\vec{F_v}$ in sila droga $\vec{F_d}$.

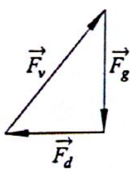


Sila droga je usmerjena proč od stene, saj uravnoveša del sile vrvi, ki vleče drog proti steni.

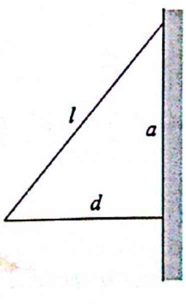
Ker krajišče droga miruje, je vsota sil, ki delujejo nanj, enaka nič:

$$\vec{F_g} + \vec{F_v} + \vec{F_d} = \vec{0}$$

Sila droga, sila teže zaboja in sila vrvi tako tvorijo pravokotni trikotnik:



Ta trikotnik je podoben (ima enake kote) trikotniku vrvi, droga in stene:



V podobnih trikotnikih so razmerja stranic enaka. Tako do-bimo, da je:

$$\frac{F_v}{F_g} = \frac{l}{a}$$

in

$$\frac{F_d}{F_g} = \frac{d}{a}$$

kjer je a razdalja med mestom, kjer je vrv vpeta na steno, in mestom, kjer je drog vpet na steno, kot smo označili na sliki.

Da bomo iz razmerij lahko izračunali velikosti sile droga in vrvice, najprej s Pitagorovim izrekom izračunajmo dolžino a:

$$a^2 = l^2 - d^2$$

$$a = \sqrt{l^2 - d^2} = \sqrt{(6{,}5\,\mathrm{m})^2 - (4{,}5\,\mathrm{m})^2} = 4{,}690\,\mathrm{m}$$

Sila, s katero je napeta vrv, je tako:

$$F_v = \frac{lF_g}{a} = \frac{lmg}{a} =$$

$$= \frac{6{,}5\mathrm{m} \cdot 50\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{4{,}690\,\mathrm{m}} = 679{,}8\,\mathrm{N} = \underline{\underline{680\,\mathrm{N}}}$$

Sila v drogu pa:

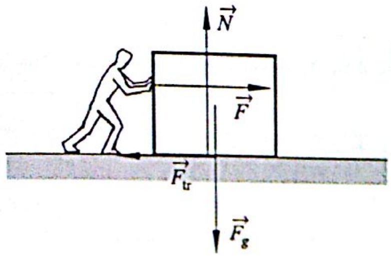
$$F_d = \frac{dF_g}{a} = \frac{dmg}{a} =$$

$$= \frac{4{,}5\,\mathrm{m} \cdot 50\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{4{,}690\,\mathrm{m}} = 470{,}6\,\mathrm{N} = \underline{\underline{470\,\mathrm{N}}}$$

3.3 Sila trenja in sila lepenja

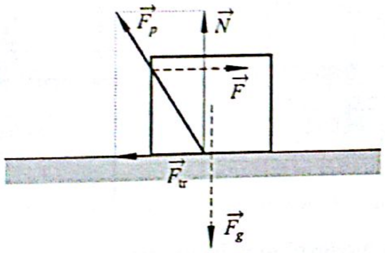
1. Delavec potiska veliko balo sena v vodoravni smeri tako, da se ta premika enakomerno po vodoravni podlagi. Nariši sile, ki delujejo na balo. Pazi na pravilna razmerja velikosti sil. Razloži, kaj je sila podlage, in jo nariši na skici.

Na sliki narišimo sile, ki delujejo na balo. Delavec potiska balo v vodoravni smeri s silo $\vec{F}$. Prijemališče sile je v točki, v kateri se delavec dotika bale. Sila teže je usmerjena navz-dol, proti središču Zemlje, in prijemlje v težišču. Normala je usmerjena navzgor, pravokotno na podlago. Njeno prijemali-šče je na sredini spodnje ploskve bale. Na balo deluje še sila trenja med balo in tlemi. Usmerjena je nasproti gibanja klade in prijemlje na sredini stične ploskve med balo in tlemi:



Pri risanju pazimo na velikosti sil. Sila trenja je enako dolga kot sila delavca, saj se klada v vodoravni smeri giblje enakomerno in je vsota vseh sil enaka nič (I. Newtonov zakon). Iz enakega razloga sta enako dolgi tudi sila teže in normala, saj klada v navpični smeri miruje.

Sila podlage je vsota sile trenja in normale. Na sliki grafično seštejmo obe sili in vsoto, silo podlage, označimo z $\vec{F}_p$:



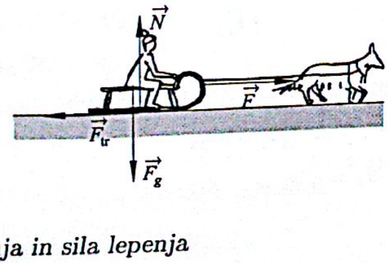
2. Pes vleče deklico na saneh vodoravno po snegu. S kolikšno vodoravno silo mora vleči, da se sanke gibljejo enakomerno? Kolikšna je pri tem sila podlage (snega) na sanke? Masa deklice skupaj s sankami je 45 kg, koeficient trenja med sankami in snegom je 0,20.

Podatki:

$m = 45$ kg

$k_{tr} = 0{,}20$

Na deklico in sani delujejo: sila teže navzdol, normala navzgor, sila psa naprej in sila trenja nazaj:



Zapišimo enačbo za ravnovesje sil v vodoravni smeri, saj je gibanje enakomerno:

$$F = F_{tr}$$

V navpični smeri ni gibanja, zato tudi za to smer velja ravnovesje sil:

$$N = F_g$$

Sedaj pa s pomočjo teh enačb izračunajmo silo psa. Najprej v enačbo za ravnovesje sil v vodoravni smeri vstavimo izraz za računanje sile trenja $F_{tr} = k_{tr}N$.

Tako dobimo:

$$F = k_{tr}N$$

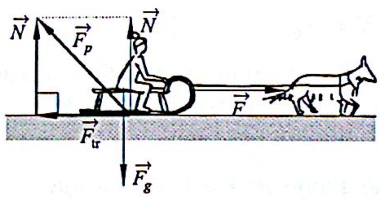
Upoštevajmo še, da je $N = F_g$:

$$F = k_{tr}F_g$$

Za silo teže F_g velja $F_g = mg$, zato je sila psa:

$$F = k_{tr}mg = 0{,}20 \cdot 45\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 88{,}29\,\mathrm{N} = \underline{\underline{88\,\mathrm{N}}}$$

Sila podlage (snega) na sanke je vektorska vsota sile trenja in normale. Sili grafično seštejemo. Sila trenja, normala in sila podlage tvorijo pravokotni trikotnik:



Velikost sile podlage izrazimo s Pitagorovim izrekom:

$$F_p^2 = F_{tr}^2 + N^2$$

Iz enačb ravnovesja dobimo velikosti sile trenja in normale:

$$F_{tr} = F = 88{,}29\,\mathrm{N}$$

in

$$N = F_g = mg = 441{,}5\,\mathrm{N}$$

Tako je sila podlage (snega) na sanke:

$$\begin{aligned} F_p &= \sqrt{F_{tr}^2 + N^2} = \\ &= \sqrt{(88{,}29\,\mathrm{N})^2 + (441{,}5\,\mathrm{N})^2} = 450{,}2\,\mathrm{N} = \underline{\underline{450\,\mathrm{N}}} \end{aligned}$$

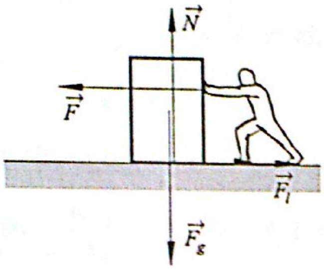
3. Odločili smo se za nekaj centimetrov premakniti hladilnik. Najmanj s kolikšno silo moramo potisniti v vodoravni smeri, da se hladilnik premakne z mesta, če je masa hladilnika 40 kg, koeficient lepenja med njim in tlemi pa 0,90?

Podatki:

$m = 40\ \mathrm{kg}$

$k_l = 0{,}90$

Na skici narišimo sile, ki delujejo na hladilnik. V vodoravni smeri delujeta nanj sila potiskanja naprej in sila lepenja nazaj, v navpični smeri pa sila teže navzdol in normala navzgor:



Zapišimo enačbi ravnovesja za vodoravno in navpično smer:

vodoravno : $F = F_l$

navpično : $N = F_g$

Iz ravnovesja sil v vodoravni smeri vidimo, da bomo hladilnik premaknili, če ga bomo potisnili s silo, ki je vsaj enaka sili lepenja med hladilnikom in tlemi.

V enačbi za računanje velikosti sile lepenja

$$F_l = k_l N$$

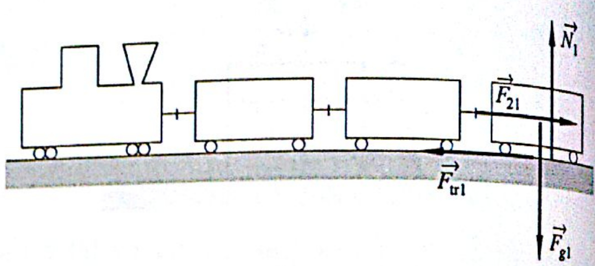
upoštevajmo, da je $N = F_g = mg$ in izračunajmo silo lepenja med hladilnikom in tlemi:

$$F_l = k_l mg = 0{,}90 \cdot 40\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 353{,}2\,\mathrm{N} = \underline{\underline{350\,\mathrm{N}}}$$

Ker pa je $F = F_l$, velja, da moramo hladilnik potisniti vsaj s silo 350 N, da ga bomo premaknili z mesta.

4. Lokomotiva pred sabo potiska tri vagone. Lokomotiva in vagoni se gibljejo premo enakomerno. Nariši sile, ki delujejo na posamezne vagone. Zapiši ravnovesne enačbe za vsak vagon. Katere so dvojice nasprotno enakih sil?

Najprej narišimo sile na prvi vagon, ki je najbolj oddaljen od lokomotive. Nanj delujejo: sila drugega vagona $\vec{F}_{21}$ naprej, sila trenja $\vec{F}_{\mathrm{tr1}}$ nazaj, sila teže $\vec{F}_{g1}$ navzdol in normala navzgor:

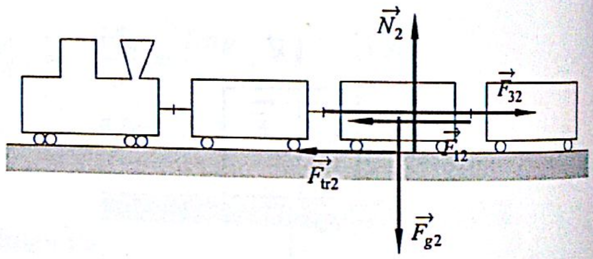


Enačbi ravnovesja se tako glasita:

vodoravno : $F_{21} = F_{\mathrm{tr1}}$

navpično : $N_1 = F_{g1}$

Na drugi vagon delujejo: sila tretjega vagona $\vec{F}_{32}$ naprej, sila trenja $\vec{F}_{\mathrm{tr2}}$ in sila prvega vagona $\vec{F}_{12}$ nazaj, sila teže $\vec{F}_{g2}$ navzdol in normala N_2 navzgor:

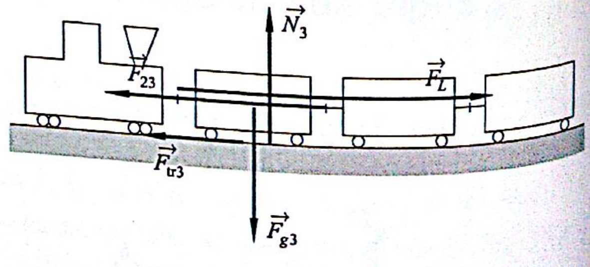


Od tod sta ravnovesni enačbi za drugi vagon:

vodoravno : $F_{32} = F_{\mathrm{tr2}} + F_{12}$

navpično : $N_2 = F_{g2}$

Tretji vagon lokomotiva potiska naprej s silo $\vec{F_L}$, zavirata pa ga sila trenja $\vec{F}_{\mathrm{tr3}}$ in sila drugega vagona $\vec{F}_{23}$. V navpični smeri delujeta na tretji vagon sila teže $\vec{F}_{g3}$ navzdol in normala $\vec{N_3}$ navzgor:



Tako sta ravnovesni enačbi za tretji vagon:

vodoravno : $F_L = F_{\mathrm{tr3}} + F_{23}$

navpično : $N_3 = F_{g3}$

Dvojici nasprotno enakih sil sta:

a) sila prvega vagona na drugi vagon in sila drugega vagona na prvi vagon: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

b) sila drugega vagona na tretji vagon in sila tretjega vagona na drugi vagon: $\vec{F}_{23} = -\vec{F}_{32}$

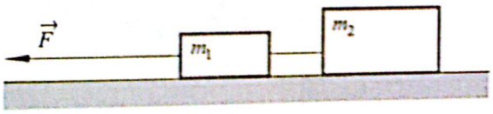
5. Dve kladi, povezani z vrvico, vlečemo po vodoravnih tleh. Masa prve klade je 400 g, masa druge pa 700 g. S kolikšno silo moramo vleči prvo klado v vodoravni smeri, da se kladi gibljeta v smeri vlečenja s konstantno hitrostjo? Kolikšna je pri tem sila v vrvici med kladama? Koeficient trenja med kladama in tlemi je 0,60.

Podatki:

$$m_1 = 400\,\mathrm{g} = 0{,}40\,\mathrm{kg}$$

$$m_2 = 700\,\mathrm{g} = 0{,}70\,\mathrm{kg}$$

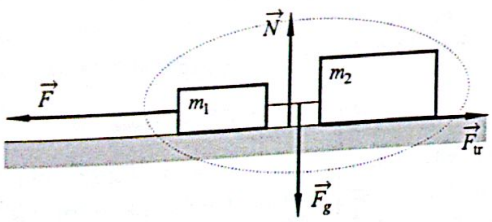
$$k_{\mathrm{tr}} = 0{,}60$$



Že v poglavju o ravnovesju sil smo videli, da je pri nalogah z več telesi pomembno izbrati pravi sistem teles. Nalogo rešimo na dva načina, da bomo izbiro sistema še utrdili.

1.NAČIN

Za sistem najprej izberimo obe kladi skupaj. Na ta sistem delujejo: sila vlečenja naprej, sila trenja nazaj, sila teže navzdol in normala navzgor. Sila v vrvici med kladama je sila v sistemu (notranja sila) in ne vpliva na njegovo gibanje:



Zapišimo ravnovesje sil za ta sistem:

vodoravno : $F = F_{\mathrm{tr}}$

navpično : $N = F_g$

V enačbo ravnovesja v vodoravni smeri vstavimo $F_{\mathrm{tr}} = k_{\mathrm{tr}}N$ in upoštevajmo še ravnovesje v navpični smeri ($N = F_g$):

$$F = k_{\mathrm{tr}}N = k_{\mathrm{tr}}F_g$$

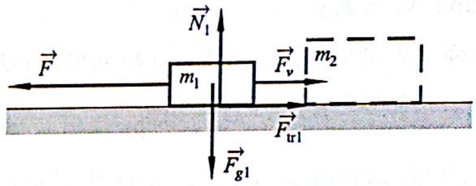
Ker je sistem sestavljen iz obeh klad, je sila teže sistema enaka sili teže obeh klad:

$$F_g = (m_1 + m_2)g$$

Tako je sila vlečenja:

$$\begin{aligned} F &= k_{\mathrm{tr}}(m_1 + m_2)\,\mathrm{g} = \\ &= 0{,}60 \cdot (0{,}40\,\mathrm{kg} + 0{,}70\,\mathrm{kg}) \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \\ &= 6{,}475\,\mathrm{N} = \underline{\underline{6{,}5\,\mathrm{N}}} \end{aligned}$$

Da bi izračunali silo v vrvici med kladama, si za sistem izberimo samo prvo klado. Nanjo delujejo: sila vlečenja naprej, sila trenja in sila vrvice nazaj, sila teže navzdol in normala navzgor:



Zapišimo enačbi ravnovesja:

vodoravno : $F = F_{tr1} + F_v$

navpično : $N_1 = F_{g1}$

Silo trenja prve klade s tlemi izračunajmo z enačbo:

$$F_{\mathrm{tr1}} = k_{\mathrm{tr}}N_1$$

Pri tem upoštevajmo, da je:

$$N_1 = F_{g1} = m_1 g$$

Tako je:

$$F_{\mathrm{tr1}} = k_{\mathrm{tr}}m_1 g = 0{,}60 \cdot 0{,}40\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 2{,}354\,\mathrm{N}$$

Iz enačbe ravnovesja v vodoravni smeri izrazimo silo vrvice:

$$F_v = F - F_{\mathrm{tr1}}$$

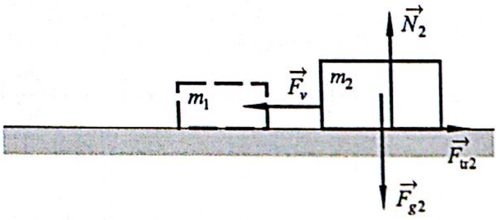
V enačbo vstavimo F_{tr1} in upoštevajmo še rezultat iz prvega sistema, kjer smo izračunali silo vlečenja $F = 6{,}475$ N:

$$F_v = 6{,}475\,\mathrm{N} - 2{,}354\,\mathrm{N} = 4{,}121\,\mathrm{N} = \underline{\underline{4{,}1\,\mathrm{N}}}$$

Sila v vrvici med kladama je 4,1 N.

2.NAČIN

V tem primeru pa najprej izračunajmo silo v vrvici med kladama. Za sistem si izberimo samo drugo klado in narišimo sile, ki delujejo nanjo: sila vrvice naprej, sila trenja nazaj, sila teže navzdol in normala navzgor:



Zapišimo ravnovesni enačbi za drugo klado:

vodoravno : $F_v = F_{tr2}$

navpično : $N_2 = F_{g2}$

V prvo enačbo vstavimo $F_{tr2} = k_{tr}N_2$ in upoštevajmo, da je:

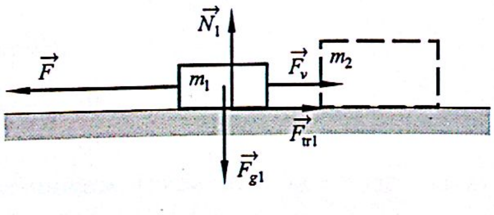
$$N_2 = F_{g2} = m_2 g$$

Dobimo:

$$\begin{aligned} F_v &= k_{tr}N_2 = k_{tr}m_2 g = \\ &= 0{,}60 \cdot 0{,}70\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 4{,}120\,\mathrm{N} = \underline{\underline{4{,}1\,\mathrm{N}}} \end{aligned}$$

Izračunali smo silo v vrvici. To je sila, s katero prva klada vleče drugo klado naprej. Po III. Newtonovem zakonu pa je ta sila nasprotno enaka sili, s katero druga klada vleče prvo nazaj. Rezultat bomo uporabili za nadaljne računanje.

Za sistem si sedaj izberimo prvo klado. Nanjo delujejo: sila vlečenja naprej, sila trenja in sila vrvice nazaj, sila teže navzdol in normala navzgor:



Ravnovesni enačbi za ta sistem sta:

vodoravno : $F = F_{tr1} + F_v$

navpično : $N_1 = F_{g1}$

Z enačbo $F_{tr1} = k_{tr}N_1$ izračunajmo silo trenja med prvo klado in tlemi. Upoštevajmo, da je:

$$N_1 = F_{g1} = m_1 g$$

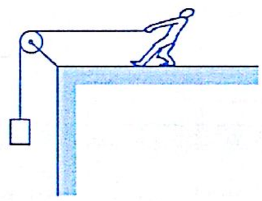
Torej je:

$$F_{tr} = k_{tr}m_1 g = 0{,}60 \cdot 0{,}40\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 2{,}354\,\mathrm{N}$$

Sedaj pa ta rezultat vstavimo v ravnovesno enačbo za vodoravno smer. Ne pozabimo, da smo velikost sile v vrvici izračunali že v prvem sistemu ($F_v = 4{,}120\,\mathrm{N}$):

$$F = F_{tr} + F_v = 2{,}354\,\mathrm{N} + 4{,}120\,\mathrm{N} = 6{,}474\,\mathrm{N} = \underline{\underline{6{,}5\,\mathrm{N}}}$$

6. Gradbeni delavec stoji na vodoravni površini in dviguje breme z nižje ležečega položaja s pomočjo škripca. Najmanj kolikšen mora biti koeficient lepenja med podlago in podplati na delavčevih čevljih, da lahko enakomerno dviguje breme z maso 50 kg? Masa delavca je 80 kg.

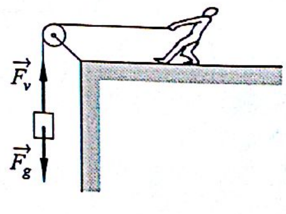


Podatki:

$m = 50$ kg

$m_d = 80$ kg

V nalogi nastopata dve telesi, delavec in breme. Za sistem izberimo vsakega posebej. Najprej narišimo sili, ki delujeta na breme:



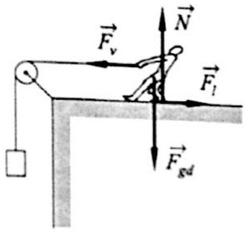
Ker se breme dviga enakomerno, sta sili nasprotno enaki, torej enako veliki:

$$F_v = F_g$$

Sila v vrvi je tako:

$$F_v = mg = 50\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 490{,}5\,\mathrm{N}$$

Sedaj narišimo sile, ki delujejo na delavca:



Iz skice je razvidno ravnovesje sil, ki delujejo na delavca:

vodoravno : $F_l = F_v$

navpično : $N = F_{gd}$

V enačbo za ravnovesje v vodoravni smeri vstavimo $F_l = k_l N$:

$$k_l N = F_v$$

Upoštevajmo, da je:

$$N = F_{gd} = m_d g$$

Tako dobimo:

$$k_l m_d g = F_v$$

Od tod pa je koeficient lepenja med podlago in podplati:

$$k_l = \frac{F_v}{m_d g} = \frac{490{,}5\,\mathrm{N}}{80\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 0{,}625 = \underline{\underline{0{,}63}}$$

Upoštevali smo, da je sila F_v, s katero vrv vleče delavca, enako velika kot sila, s katero breme vleče vrv. Na ta način računamo vedno, kadar v nalogi nastopata dve ali več povezanih teles.

7. Na steni visi slika z maso 2,0 kg. Sliko z roko potisnemo pravokotno na steno in prerežemo vrvico, na katero je slika obešena. Najmanj s kolikšno silo moramo tiščati sliko pravokotno proti steni, da ne zdrsne navzdol, če je koeficient lepenja med sliko in steno 0,40? Kolikšna je sila stene na sliko?

Podatki:

$m = 2{,}0$ kg

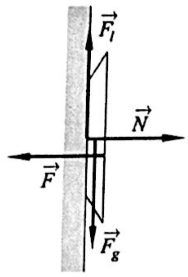
$k_l = 0{,}40$

Na skici narišimo sile, ki delujejo na sliko: silo lepenja navzgor, silo teže navzdol, silo roke proti steni in normalo od stene.

Ravnovesni enačbi sta:

vodoravno : $F = N$

navpično : $F_l = F_g$



V drugo enačbo vstavimo $F_l = k_l N$ ter $F_g = mg$ in dobimo:

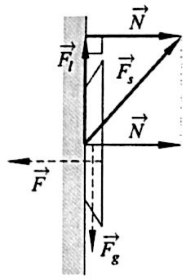
$$k_l N = mg$$

Od tod je:

$$N = \frac{mg}{k_l} = \frac{2{,}0\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{0{,}40} = 49{,}05\,\mathrm{N} = 49\,\mathrm{N}$$

To pa je hkrati tudi velikost sile, s katero moramo potiskati sliko ob steno. Ravnovesna enačba za vodoravno smer nam pove, da je $F = N = 49\,\mathrm{N}$.

Sila stene na sliko je vektorska vsota normale in sile lepenja. Silo lepenja in normalo grafično seštejmo:



Velikost sile stene izračunajmo s Pitagorovim izrekom, saj $\vec{F_l}$, $\vec{N}$ in $\vec{F_s}$ tvorijo pravokotni trikotnik:

$$F_s^2 = F_l^2 + N^2$$

Velikost normale smo že izračunali, $N = 49{,}05$ N, velikost sile lepenja pa je enaka:

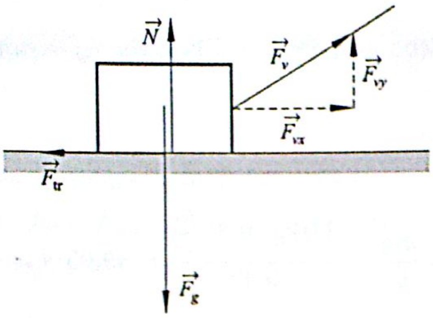
$$F_l = k_l N = 0{,}40 \cdot 49{,}05\,\mathrm{N} = 19{,}62\,\mathrm{N}$$

Tako je sila stene na sliko:

$$F_s = \sqrt{F_l^2 + N^2} = \sqrt{(19{,}62\,\mathrm{N})^2 + (49{,}05\,\mathrm{N})^2} = 52{,}83\,\mathrm{N} = \underline{\underline{53\,\mathrm{N}}}$$

8. Otrok vleče igračo v obliki klade, ki je privezana na vrvico. Igrača se giblje enakomerno po vodoravnih tleh. Vrvica je poševna. Nariši vse sile, ki delujejo na igračo, pri tem pa pazi na dolžine vektorjev.

Narišimo skico igrače in sile, ki delujejo nanjo: silo teže, normalo, silo vrvice in silo trenja. Silo vrvice razstavimo na vodoravno in navpično komponento, da bomo lažje določili dolžine ostalih sil:



Dolžina sile trenja je enaka dolžini vodoravne komponente sile vrvice, ker se igrača giblje enakomerno, dolžina sile teže pa je enaka vsoti dolžine normale in dolžine navpične komponente sile vrvice.

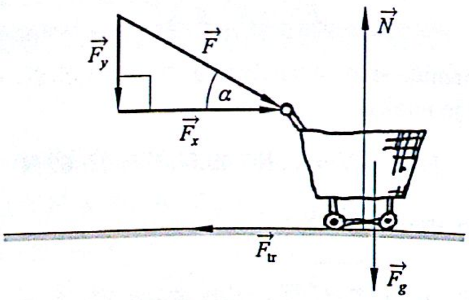
9. Nakupovalni voziček potiskamo pod kotom 30° glede na vodoravnico. S kolikšno najmanjšo silo ga moramo potiskati, da se bo gibal enakomerno, če je sila trenja, ki zavira gibanje vozička v vodoravni smeri, 20 N?

Podatki:

$\alpha = 30°$

$F_{tr} = 20\ \text{N}$

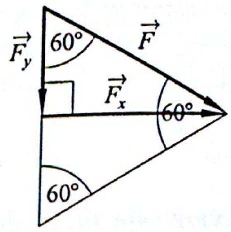
Narišimo skico vozička in sile, ki delujejo nanj. Silo, s katero ga potiskamo ($\vec{F}$), razstavimo na vodoravno in navpično komponento ($\vec{F}_x$ in $\vec{F}_y$):



V vodoravni smeri deluje nanj vodoravna komponenta sile $\vec{F}$ naprej in sila trenja nazaj. Ravnovesje sil za vodoravno smer je tako:

$$F_x = F_{tr}$$

Trikotnik sile $\vec{F}$ in njenih komponent $\vec{F}_x$ in $\vec{F}_y$ predst polovico enakostraničnega trikotnika:



Velikost vodoravne komponente $\vec{F}_x$ predstavlja višina t trikotnika, velikost sile $\vec{F}$ pa njegova stranica. Višina ena straničnega trikotnika je z dolžino stranice povezana z ena $v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (v – višina, a – dolžina stranice). Tako tudi velikosti sil $\vec{F}_x$ in $\vec{F}$ velja:

$$F_x = \frac{F\sqrt{3}}{2}$$

Izraz vstavimo v ravnovesno enačbo za vodoravno smer, to $F_x = F_{tr}$:

$$\frac{F\sqrt{3}}{2} = F_{tr}$$

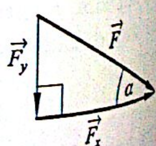
Velikost sile $\vec{F}$, s katero vlečemo voziček, je tako:

$$F = \frac{F_{tr} \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{20\ \text{N} \cdot 2}{\sqrt{3}} = 23{,}09\ \text{N} = \underline{\underline{23\ \text{N}}}$$

Dodatek

Vodoravno komponento sile, s katero potiskamo voziček, lahk izrazimo tudi s pomočjo kotne funkcije kosinus (kosinus ko je razmerje kotu priležne katete in hipotenuze):

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}$$



Od tod je:

$$F_x = F\cos\alpha$$

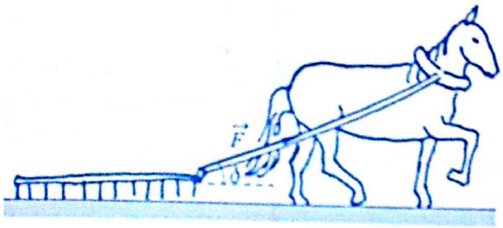
Izraz vstavimo v ravnovesno enačbo $F_x = F_{tr}$:

$$F\cos\alpha = F_{tr}$$

Od tod pa izračunajmo silo, s katero moramo potiskati vo ček:

$$F = \frac{F_{tr}}{\cos\alpha} = \frac{20\ \text{N}}{\cos 30°} = 23{,}09\ \text{N} = \underline{\underline{23\ \text{N}}}$$

10. Konj vleče brano po vodoravni njivi s silo $\vec{F}$, ki je glede na vodoravnico nagnjena za 60° (glej sliko). Kolikšna je ta sila, če se konj in brana gibljeta enakomerno? Masa brane je 30 kg, koeficient trenja med brano in njivo pa 0,8.



Podatki:

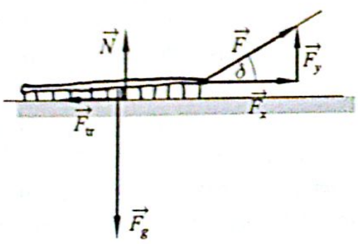
$m = 30\text{ kg}$

$k_{\mathrm{tr}} = 0{,}8$

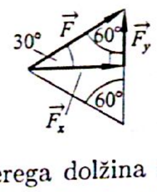
$\delta = 60°$

Na skici narišimo sile, ki delujejo na brano: silo konja, silo trenja, silo teže in normalo.

Silo konja $\vec{F}$ razstavimo na vodoravno in navpično komponento:



Za kasnejše računanje razstavimo silo $\vec{F}$ še računsko. Trikotnik sile $\vec{F}$ dopolnimo do enakostraničnega trikotnika:



V tem trikotniku, katerega dolžina stranice predstavlja velikost sile $\vec{F}$, predstavlja velikost navpične komponente sile $\vec{F}$ polovica dolžine stranice:

$$F_y = \frac{F}{2}$$

Velikost vodoravne komponente sile $\vec{F}$ pa predstavlja višina v tem trikotniku, zato velja:

$$F_x = \frac{F\sqrt{3}}{2}$$

Sedaj zapišimo ravnovesni enačbi za vodoravno in navpično smer. V vodoravni smeri delujeta na brano vodoravna komponenta sile konja naprej in sila trenja nazaj:

$$F_x = F_{\mathrm{tr}}$$

V navpični smeri pa delujeta normala in navpična komponenta sile konja navzgor, sila teže pa navzdol:

$$N + F_y = F_g$$

V enačbi vstavimo izraza za velikosti komponent sile konja ($F_x = \frac{F\sqrt{3}}{2}$ in $F_y = \frac{F}{2}$):

$$\text{vodoravno}: \frac{F\sqrt{3}}{2} = F_{\mathrm{tr}}$$

$$\text{navpično}: N + \frac{F}{2} = F_g$$

Vstavimo še izraza za računanje velikosti sile teže ($F_g = mg$) in velikosti sile trenja ($F_{\mathrm{tr}} = k_{\mathrm{tr}}N$):

$$\frac{F\sqrt{3}}{2} = k_{\mathrm{tr}}N$$

in

$$N + \frac{F}{2} = mg$$

Sedaj iz prve enačbe izrazimo N:

$$N = \frac{F\sqrt{3}}{2k_{\mathrm{tr}}}$$

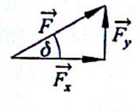
Izraz postavimo v drugo enačbo in iz nje izrazimo ter izračunajmo silo konja:

$$\begin{aligned}
\frac{F\sqrt{3}}{2k_{\mathrm{tr}}} + \frac{F}{2} &= mg \\
F\left(\frac{\sqrt{3}}{2k_{\mathrm{tr}}} + \frac{1}{2}\right) &= mg \\
F &= \frac{mg}{\frac{\sqrt{3}}{2k_{\mathrm{tr}}} + \frac{1}{2}} = \frac{30\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\frac{\sqrt{3}}{2\cdot 0{,}8} + \frac{1}{2}} = \\
&= 186{,}0\,\mathrm{N} = \underline{\underline{190\,\mathrm{N}}}
\end{aligned}$$

Dodatek

Silo konja razstavimo s pomočjo kotnih funkcij. Zapišimo sinus in kosinus kota δ:

$$\sin\delta = \frac{F_y}{F} \qquad \cos\delta = \frac{F_x}{F}$$



Od tod izrazimo komponenti sile konja:

$$F_y = F\sin\delta \qquad F_x = F\cos\delta$$

Sedaj ponovimo postopek kot prej. Zapišimo ravnovesni enačbi za vodoravno in navpično smer:

$$F_x = F_{\mathrm{tr}} \qquad N + F_y = F_g$$

V enačbi vstavimo izraza za velikosti komponent sile konja, izraz za računanje velikosti sile teže in enačbo za računanje velikosti sile trenja:

$$\text{vodoravno}: F\cos\delta = k_{\mathrm{tr}}N$$

$$\text{navpično}: N + F\sin\delta = mg$$

Iz prve enačbe izrazimo N:

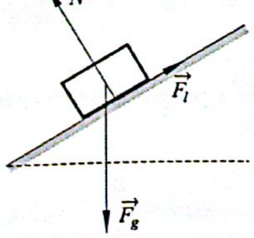
$$N = \frac{F\cos\delta}{k_{\mathrm{tr}}}$$

Izraz postavimo v drugo enačbo in iz nje izrazimo ter izračunajmo silo konja:

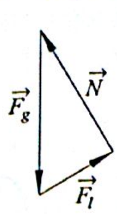
$$\begin{aligned}
\frac{F\cos\delta}{k_{\mathrm{tr}}} + F\sin\delta &= mg \\
F\left(\frac{\cos\delta}{k_{\mathrm{tr}}} + \sin\delta\right) &= mg \\
F &= \frac{mg}{\frac{\cos\delta}{k_{\mathrm{tr}}} + \sin\delta} = \frac{30\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\frac{\cos 30^\circ}{0{,}8} + \sin 30^\circ} = \\
&= 186{,}0\,\mathrm{N} = \underline{190\,\mathrm{N}}
\end{aligned}$$

11. Opeka miruje na klancu. Nariši sile, ki delujejo na opeko. Silo teže razstavi na dinamično in statično komponento. Nariši tudi silo podlage na opeko. Ali bi se sile spremenile in kako, če bi klada enakomerno drsela po klancu navzdol?

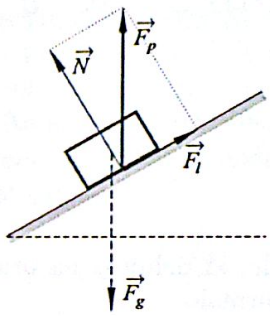
Na opeko na klancu delujejo: sila teže navpično navzdol, normala pravokotno na podlago (klanec) in sila lepenja po klancu navzgor:



Pazimo, da je vektorska vsota sil nič, saj opeka miruje. Velikosti sil so torej take, da tvorijo trikotnik:



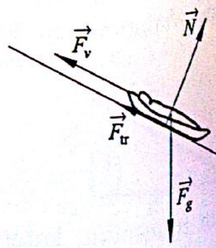
Sila podlage je vsota normale in sile lepenja:



Če bi opeka enakomerno drsela po klancu navzdol, bi bila vsota sil nanjo še vedno enaka nič. Edino, kar bi se spremenilo, je, da bi namesto sile lepenja tedaj delovala sila trenja.

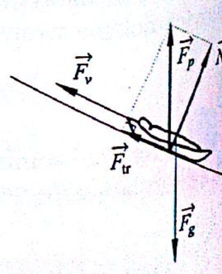
12. Ponesrečenega planinca v rešilnem čolnu spuščajo po klancu tako, da ga zadržujejo z vrvjo. Čoln se spušča enakomerno. Nariši vse sile, ki pri tem delujejo na čoln. Nariši silo podlage na čoln. V katerem primeru je sila podlage na čoln pravokotna na klanec?

Na čoln pri spuščanju delujejo: sila teže navpično navzdol, sila trenja in sila vrvi navzgor po klancu in normala pravokotno na klanec.



Sila podlage $\vec{F}_p$ je vsota sile trenja in normale:

$$\vec{F}_p = \vec{F}_{\mathrm{tr}} + \vec{N}$$



Sila podlage bi bila pravokotna na klanec le v primeru, da bi bila sila trenja enaka nič, torej če bi bil klanec popolnoma gladek. V tem primeru bi bila sila podlage kar enaka sili normale:

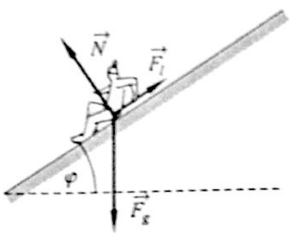
$$\vec{F_p} = \vec{N}$$

13. Janezek sedi na poledenelem pobočju, ki ima naklon 30°. Najmanj kolikšen mora biti koeficient lepenja med njim in klancem, da ne zdrsne?

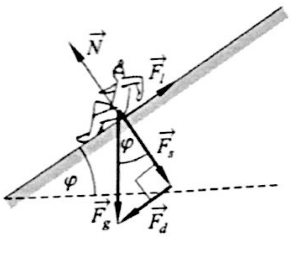
Podatki:

$\varphi = 30°$

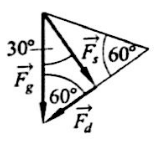
Na Janezka delujejo: sila teže navpično navzdol, sila lepenja navzgor po klancu in normala pravokotno na klanec:



Silo teže razstavimo na dinamično komponento $\vec{F_d}$, vzporedno s klancem in statično komponento $\vec{F_s}$ pravokotno na klanec. Kot φ, ki ga omejujeta klanec in vodoravnica, je enak kotu, ki ga omejujeta sila teže in njena statična komponenta:



Trikotnik sile teže dopolnimo do enakostraničnega trikotnika, katerega dolžina stranice predstavlja velikost sile teže:



Dinamično komponento sile teže predstavlja polovica dolžine stranice, statično komponento pa višina. Zato velja:

$$F_d = \frac{F_g}{2} \quad \text{in} \quad F_s = \frac{F_g\sqrt{3}}{2}$$

Zapišimo ravnovesni enačbi za sile, vzporedne s klancem, in sile, pravokotne na klanec:

vzporedne : $F_l = F_d$

pravokotne :$N = F_s$

V enačbi vstavimo izraza za komponenti sile teže ($F_d = \frac{F_g}{2}$ in $F_s = \frac{F_g\sqrt{3}}{2}$), izraz za silo teže ($F_g = mg$) in izraz za silo lepenja ($F_l = k_l N$) in dobimo:

$$k_l N = \frac{F_g}{2} \quad \text{in} \quad N = \frac{F_g\sqrt{3}}{2}$$

Enačbi delimo (levi in desni strani med seboj):

$$\frac{k_l N}{N} = \frac{\frac{F_g}{2}}{\frac{F_g\sqrt{3}}{2}}$$

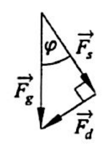
Tako dobimo:

$$k_l = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}5774 = 0{,}58$$

Naloga je lep primer, kako moramo vedno čimdlje računati brez številskih podatkov. V tej nalogi se šele pri koncu okrajša sila teže, ki tako za končni izračun ni potrebna. Če bi že prej vstavljali številske podatke, bi se nam zdelo, da v nalogi manjka podatek.

Dodatek

Dinamično in statično komponento sile teže lahko izrazimo s pomočjo sinusa in kosinusa kota φ:



Tako je:

$$\sin\varphi = \frac{F_d}{F_g} \qquad \cos\varphi = \frac{F_s}{F_g}$$

Od tod izrazimo komponenti sile teže:

$$F_d = F_g \sin\varphi \quad \text{in} \quad F_s = F_g \cos\varphi$$

Nadaljevanje je podobno kot prej. Zapišimo ravnovesni enačbi za sile vzporedne s klancem in sile pravokotne na klanec:

$$F_l = F_d \quad \text{in} \quad N = F_s$$

V enačbi vstavimo izraza za komponenti sile teže ($F_d = F_g \sin\varphi$ in $F_s = F_g \cos\varphi$) in izraz za silo lepenja ($F_l = k_l N$) in dobimo:

$$k_l N = F_g \sin\varphi \qquad \text{in} \qquad N = F_g \cos\varphi$$

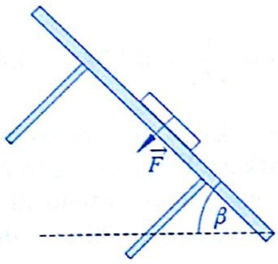
Enačbi delimo (levi in desni strani med seboj):

$$\frac{k_l N}{N} = \frac{F_g \sin\varphi}{F_g \cos\varphi}$$

Od tod je:

$$k_l = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \mathrm{tg}\,\varphi = \mathrm{tg}\,30° = 0{,}5774 = \underline{\underline{0{,}58}}$$

△ 14. Na mizi leži knjiga z maso 0,50 kg. Mizo na eni strani dvignemo tako, da je njen naklon 45°. Z roko pritiskamo na knjigo pravokotno proti mizi. S kolikšno najmanjšo silo moramo potiskati knjigo, da ta ne zdrsne? Koeficient lepenja med knjigo in mizo je 0,3.



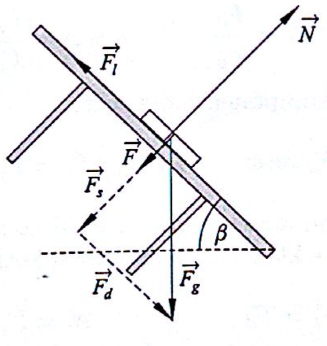
Podatki:

$m = 0{,}5$ kg

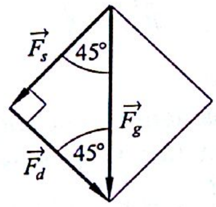
$k_l = 0{,}3$

$\beta = 45°$

Na skici narišimo sile, ki delujejo na knjigo. To so: sila teže navzdol, sila lepenja vzdolž mize navzgor ter normala in sila roke pravokotno na mizo:



Razstavimo silo teže in zapišimo izraza za velikost njene d
namične in statične komponente. Trikotnik sile teže in njeni
komponent je enakokrak. Dopolnimo ga do kvadrata:



Dolžina stranice kvadrata predstavlja velikost statične ali d
namične komponente sile teže, ki sta v tem primeru ena
po velikosti, dolžina diagonale pa predstavlja velikost si
teže. Dolžina diagonale d in dolžina stranice a sta v kvadrat
povezani z enačbo $d = \sqrt{2}a$, zato sta velikosti statične in d
namične komponente sile teže z velikostjo sile teže povezani
enačbo:

$$F_g = \sqrt{2}F_s = \sqrt{2}F_d$$

Torej:

$$F_s = F_d = \frac{F_g}{\sqrt{2}}$$

V enačbo vstavimo izraz za velikost sile teže $F_g = mg$ i
izračunajmo velikost komponent sile teže:

$$F_d = F_s = \frac{mg}{\sqrt{2}} = \frac{0{,}50\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\sqrt{2}} = 3{,}468\,\mathrm{N}$$

Sedaj zapišimo ravnovesni enačbi za knjigo. V smeri vzp
redno z mizo delujeta na knjigo dinamična komponenta si
teže in sila lepenja:

$$F_d = F_l$$

V smeri pravokotno na mizo pa nanjo delujeta sila roke i
statična komponenta sile teže v eno smer, normala pa v drug

$$F + F_s = N$$

V prvo enačbo vstavimo izraz za silo lepenja:

$$F_d = k_l N$$

Od tod pa izrazimo in izračunajmo velikost normale:

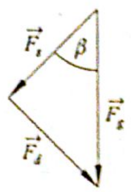
$$N = \frac{F_d}{k_l} = \frac{3{,}468\,\mathrm{N}}{0{,}3} = 11{,}56\,\mathrm{N}$$

Velikost vstavimo v drugo enačbo ter iz nje izrazimo in izračunajmo silo F:

$$F = N - F_s$$
$$F = 11{,}56\,\mathrm{N} - 3{,}468\,\mathrm{N} = 8{,}092\,\mathrm{N} = \underline{\underline{8{,}1\,\mathrm{N}}}$$

Dodatek

Ponovimo računanje velikosti sile $\vec{F}$ še nekoliko drugače. Velikost statične in dinamične komponente sile teže izrazimo s pomočjo kotnih funkcij (glej dodatek pri prejšnji nalogi):



$$F_d = F_g \sin\beta$$
$$F_s = F_g \cos\beta$$

Zapišimo ravnovesni enačbi:

$$F_d = F_l$$
$$F + F_s = N$$

Ravnovesni enačbi prepišimo in vstavimo izraze za velikosti komponent sile teže in izraz za računanje velikosti sile lepenja $F_l = k_l N$:

$$F_g \sin\beta = k_l N$$

in

$$F + F_g \cos\beta = N$$

Iz prve enačbe izrazimo N:

$$N = \frac{F_g \sin\beta}{k_l}$$

Izraz vstavimo v drugo enačbo ter iz nje izrazimo in izračunajmo velikost sile $\vec{F}$:

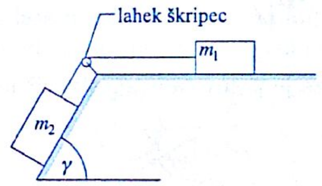
$$F + F_g \cos\beta = \frac{F_g \sin\beta}{k_l}$$
$$F = \frac{F_g \sin\beta}{k_l} - F_g \cos\beta =$$
$$= F_g\left(\frac{\sin\beta}{k_l} - \cos\beta\right) =$$
$$= mg\left(\frac{\sin\beta}{k_l} - \cos\beta\right) =$$
$$= 0{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\left(\frac{\sin 45^\circ}{0{,}3} - \cos 45^\circ\right) =$$
$$= 8{,}093\,\mathrm{N} = \underline{\underline{8{,}1\,\mathrm{N}}}$$

Sedaj smo do konca računali brez vstavljanja številk. Ta način je mogoče manj pregleden in za začetnika manj sprejemljiv, je pa boljši, ker dobimo splošno rešitev. Z enačbo

$$F = mg\left(\frac{\sin\beta}{k_l} - \cos\beta\right)$$

namreč lahko izračunamo velikost sile za različne mase klade, koeficiente trenja ali naklone mize.

△ 15. Dve kladi sta povezani z vrvjo. Ena leži na vodoravnih tleh, druga pa na klancu. Kolikšna je lahko največ masa uteži na klancu, da uteži ne zdrsneta? Masa uteži na vodoravnih tleh je 1,5 kg, naklon klanca je 60°, koeficient lepenja pa je pri obeh 0,8.



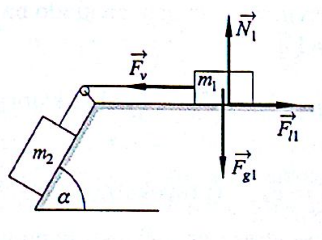
Podatki:

$m_1 = 1{,}5$ kg

$\gamma = 60^\circ$

$k_l = 0{,}8$

V tej nalogi obravnavajmo vsako klado posebej. Najprej narišimo sile, ki delujejo na klado na vodoravni podlagi:



Ker klada miruje, zanjo velja ravnovesje sil. V vodoravni smeri tako velja:

$$F_v = F_{l1}$$

V navpični pa:

$$N_1 = F_{g1}$$

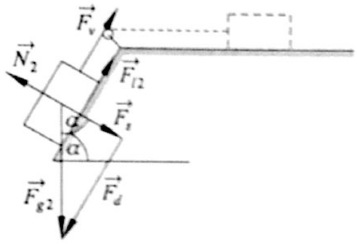
V prvo enačbo vstavimo $F_{l1} = k_l N_1$ in dobimo:

$$F_v = k_l N_1$$

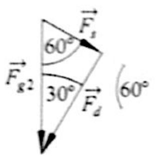
Upoštevajmo še drugo enačbo ($N_1 = F_{g1} = m_1 g$) in izračunajmo silo vrvi F_v:

$$F_v = k_l m_1 g = 0{,}8 \cdot 1{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 11{,}77\,\mathrm{N}$$

Sedaj narišimo sile, ki delujejo na drugo klado. Silo teže razstavimo na dinamično in statično komponento:



Trikotnik sile teže je polovica enakostraničnega trikotnika:



Tako velja:

$$F_d = \frac{F_{g2}\sqrt{3}}{2} \quad \text{(višina enakostraničnega trikotnika)}$$

in

$$F_s = \frac{F_{g2}}{2} \quad \text{(polovica dolžine stranice)}$$

Sedaj zapišimo ravnovesni enačbi za klado na klancu. Iz skice je razvidno, da velja:

$$F_d = F_{l2} + F_v \quad \text{(vzdolž klanca)}$$

in

$$N_2 = F_s \quad \text{(pravokotno na klanec)}$$

V enačbi vstavimo izraza za velikosti komponent sile teže in izraz za velikost sile lepenja $F_{l2} = k_l N_2$. Tako dobimo:

$$\frac{F_{g2}\sqrt{3}}{2} = k_l N_2 + F_v$$

in

$$N_2 = \frac{F_{g2}}{2}$$

Drugo enačbo vstavimo v prvo in dobimo:

$$\frac{F_{g2}\sqrt{3}}{2} = \frac{k_l F_{g2}}{2} + F_v$$

Enačbo preuredimo in izračunajmo F_{g2}:

$$\begin{aligned} \frac{F_{g2}\sqrt{3}}{2} - \frac{k_l F_{g2}}{2} &= F_v \\ F_{g2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{k_l}{2}\right) &= F_v \\ F_{g2} &= \frac{F_v}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{k_l}{2}} = \frac{11{,}77\,\mathrm{N}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{0{,}8}{2}} = 25{,}26\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

V enačbo smo vstavili F_v, ki smo jo izračunali za prvo klad- saj sta sili, s katerima kladi delujeta ena na drugo, nasprot- enaki (III. Newtonov zakon).

Od tod z izrazom $F_{g2} = m_2 g$ izračunajmo še maso uteži n- klancu:

$$m_2 = \frac{F_{g2}}{g} = \frac{25{,}26\,\mathrm{N}}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 2{,}575\,\mathrm{kg} = \underline{\underline{2{,}6\,\mathrm{kg}}}$$

Dodatek

Kot v prejšnji nalogi tudi sedaj ponovimo izračun še z upora- kotnih funkcij. Prvi del naloge, ko z ravnovesnima enačbam- za klado na vodoravni podlagi izračunamo silo vrvi, ostan- enak. Tako dobimo:

$$F_v = 11{,}77\,\mathrm{N}$$

V drugem delu naloge pa silo teže klade na klancu raz- tavimo na dinamično in statično komponento z uporabo ko- nih funkcij:

$$\begin{aligned} F_d &= F_{g2} \sin\alpha \\ F_s &= F_{g2} \cos\alpha \end{aligned}$$

Sedaj zapišimo ravnovesni enačbi za klado na klancu:

$$\begin{aligned} F_d &= F_{l2} + F_v \\ N_2 &= F_s \end{aligned}$$

V enačbi vstavimo zveze $F_d = F_{g2}\sin\alpha$, $F_s = F_{g2}\cos\alpha$ i- $F_{l2} = k_l N_2$:

$$\begin{aligned} F_{g2}\sin\alpha &= k_l N_2 + F_v \\ N_2 &= F_{g2}\cos\alpha \end{aligned}$$

Enačbi združimo:

$$F_{g2} \sin\alpha = k_l F_{g2} \cos\alpha + F_v$$

Izračunajmo F_{g2}:

$$\begin{aligned} F_{g2} \sin\alpha - k_l F_{g2} \cos\alpha &= F_v \\ F_{g2}(\sin\alpha - k_l \cos\alpha) &= F_v \\ F_{g2} &= \frac{F_v}{\sin\alpha - k_l \cos\alpha} = \\ &= \frac{11{,}77\,\text{N}}{\sin 60^\circ - 0{,}8 \cos 60^\circ} = \\ &= 25{,}26\,\text{N} \end{aligned}$$

Izračunajmo še maso uteži na klancu:

$$m_2 = \frac{F_{g2}}{g} = \frac{25{,}26\,\text{N}}{9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2{,}575\,\text{kg} = \underline{\underline{2{,}6\,\text{kg}}}$$

3.4 Sile in pospešek

1. Izračunaj velikost sile, ki pospeši telo z maso 12 kg s pospeškom 5,5 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$?

Podatki:

$m = 12$ kg

$a = 5{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Za telesa, ki se gibljejo pospešeno, velja II. Newtonov zakon: **Vsota vseh sil na telo je enaka masi pomnoženi s pospeškom telesa**:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Vsota vseh sil na telo in pospešek telesa, ki nastopata v tej enačbi, sta vektorski količini. Čeprav v tej nalogi to ni pomembno, se je dobro zavedati, da enačba pove tudi to, da sta vsota vseh sil na telo in pospešek telesa vektorja usmerjena v isto smer.

Kadar nas zanimata le velikosti vsote vseh sil in pospeška, uporabimo enačbo:

$$F = ma$$

Velikost sile, ki pospeši telo z maso 12 kg s pospeškom 5,5 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, je tako:

$$F = 12\,\text{kg} \cdot 5{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \underline{\underline{66\,\text{N}}}$$

2. Kolikšen je pospešek nogometne žoge z maso 300 g, če jo brcnemo s silo 120 N?

Podatki:

$m = 300\,\text{g} = 0{,}30$ kg

$F = 120$ N

Velikost pospeška žoge izračunajmo iz enačbe $F = ma$:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{120\,\text{N}}{0{,}3\,\text{kg}} = \underline{\underline{400\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

3. Na telo z maso 2,0 kg delujeta sili 18 N proti vzhodu in 26 N proti zahodu. Določi smer in velikost pospeška telesa.

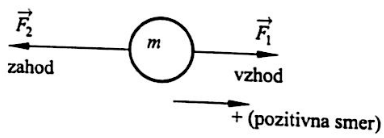
Podatki:

$m = 2{,}0$ kg

$F_1 = 18$ N

$F_2 = 26$ N

Narišimo skico telesa in sili, ki delujeta nanj. Izberimo pozitivno smer proti vzhodu in jo na skici jasno označimo:



Velikost vsote sil, ki delujejo na telo, izračunajmo tako, da smeri sil podamo s predznaki. Glede na izbrano smer je sila $\vec{F_1}$ usmerjena v pozitivno, sila $\vec{F_2}$ pa v negativno smer:

$$F = F_1 - F_2 = 18\,\text{N} - 26\,\text{N} = -8\,\text{N}$$

Velikost vsote je tako 8 N, negativni predznak pa pove, da je usmerjena v negativno smer, proti zahodu.

Sedaj z enačbo $F = ma$ izračunajmo pospešek telesa:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{-8\,\text{N}}{2\,\text{kg}} = \underline{\underline{-4\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

Velikost pospeška je 4 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, ker pa je negativen, je usmerjen v negativno smer, torej proti zahodu. Lahko bi pospešek izračunali tudi brez negativnega predznaka, saj tako vemo, da je usmerjen v smeri vsote vseh sil, torej proti zahodu.

4. Avtomobil z maso 850 kg pelje s hitrostjo 80 $\frac{km}{h}$. Kolikšna povprečna sila v vodoravni smeri zavira avtomobil, če se ta ustavi v 5,0 sekundah? Predpostavimo, da avtomobil zavira enakomerno s konstantnim pojemkom.

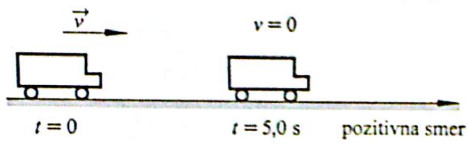
Podatki:

$m = 850$ kg

$v_0 = 80\,\frac{km}{h} = 22{,}22\,\frac{m}{s}$

$t = 5{,}0$ s

Pospešek avtomobila je kvocient spremembe hitrosti in časa, v katerem se ta sprememba zgodi. Za pozitivno si izberimo smer gibanja avtomobila:



Tako je pospešek avtomobila:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{\Delta t} = \frac{0 - 22{,}22\,\frac{m}{s}}{5{,}0\,s} = -4{,}444\,\frac{m}{s^2}$$

Upoštevali smo, da je končna hitrost nič, saj se avtomobil ustavi. Pospešek je negativen, ker je usmerjen v nasprotno smer od izbrane pozitivne smeri.

Izračunani pospešek vstavimo v enačbo $F = ma$ in izračunajmo velikost sile, ki zavira avtomobil:

$$F = 850\,kg \cdot \left(-4{,}444\,\frac{m}{s^2}\right) = -3777\,N = \underline{\underline{-3{,}8\,kN}}$$

Za izračun velikosti sile, ki zavira avtomobil, bi lahko negativni predznak pospeška tudi izpustili. Nič pa ni narobe, če ga upoštevamo. Negativni predznak sile zaviranja pomeni le, da je usmerjena nasprotno od pozitivne smeri.

5. Jadrnica pluje enakomerno s hitrostjo 20 $\frac{km}{h}$. Nenadoma začne pihati močnejši veter, ki jadrnico na razdalji 100 m pospeši do hitrosti 40 $\frac{km}{h}$. Kolikšna je vsota sil, ki delujejo na jadrnico med pospeševanjem? Masa jadrnice je 2 500 kg.

Podatki:

$v_0 = 20\,\frac{km}{h} = 5{,}556\,\frac{m}{s}$

$v = 40\,\frac{km}{h} = 11{,}11\,\frac{m}{s}$

$s = 100$ m

$m = 2\,500$ kg

Predpostavimo, da jadrnica pospešuje enakomerno in iz enačbe $v^2 = v_0^2 + 2as$ izračunajmo njen pospešek:

$$\begin{aligned} v^2 - v_0^2 &= 2as \\ a &= \frac{v^2 - v_0^2}{2s} = \\ &= \frac{\left(11{,}11\,\frac{m}{s}\right)^2 - \left(5{,}556\,\frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 100\,m} = 0{,}4628\,\frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

Rezultat vstavimo v enačbo $F = ma$ in izračunajmo velikost vsote sil, ki pospešujejo jadrnico:

$$F = ma = 2\,500\,kg \cdot 0{,}4628\,\frac{m}{s^2} = 1\,157\,N = \underline{\underline{1{,}2\,kN}}$$

6. Povprečna vsota sil, ki zavirajo letalo pri vzletu, je 25 kN. Kolikšna je povprečna vsota sil, ki letalo pri vzletu pospešujejo, če letalo po 3,5 km dolgi vzletni stezi vozi 50 s od mirovanja do vzletne hitrosti? Letalo se po stezi giblje enakomerno pospešeno. Masa letala je 20 ton.

Podatki:

$F_{zav} = 25\,kN = 25\,000\,N$

$s = 3{,}5\,km = 3\,500\,m$

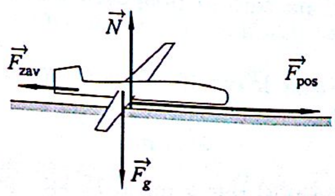
$t = 50$ s

$m = 20\,ton = 20\,000\,kg$

Pospešek letala izračunajmo iz enačbe $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, v kateri upoštevajmo, da letalo na začetku miruje ($v_0 = 0$):

$$\begin{aligned} s &= \frac{at^2}{2} \\ a &= \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \cdot 3\,500\,m}{(50\,s)^2} = 2{,}8\,\frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

Narišimo skico letala in sile, ki delujejo nanj. V navpični smeri silo teže in normalo, v vodoravni smeri pa silo pospeševanja in silo zaviranja:



V navpični smeri se letalo ne giblje, zato je sila teže po velikosti enaka normali:

$$N = F_g$$

V vodoravni smeri letalo pospešuje in velja enačba $F = ma$, kjer je F velikost vsote vseh sil v vodoravni smeri:

$$F_{\text{pos}} - F_{\text{zav}} = ma$$

Za pozitivno smer ponavadi izberemo smer pospeševanja, zato je $\vec{F}_{\text{pos}}$ pozitivna, $\vec{F}_{\text{zav}}$ pa negativna.

Iz enačbe izračunajmo velikost vsote sil, ki letalo pospešujejo:

$$\begin{aligned} F_{\text{pos}} &= ma + F_{\text{zav}} = 20\,000\,\text{kg} \cdot 2{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 25\,000\,\text{N} = \\ &= 81\,000\,\text{N} = \underline{\underline{81\,\text{kN}}} \end{aligned}$$

7. Sila F pospeši telo z maso m od mirovanja do končne hitrosti na poti s. Na kolikšni poti pa pospeši sila $2F$ isto telo do enake končne hitrosti?

Pospešek izrazimo iz enačbe $v^2 = v_0^2 + 2as$. Upoštevajmo, da je začetna hitrost nič:

$$\begin{aligned} v^2 &= 2as \\ a &= \frac{v^2}{2s} \end{aligned}$$

Izraz postavimo v enačbo $F = ma$:

$$F = \frac{mv^2}{2s}$$

Iz dobljene enačbe izrazimo pot:

$$s = \frac{mv^2}{2F}$$

Glede na dobljeno enačbo lahko sklepamo, da je pri dvakrat večji sili pot dvakrat manjša, torej:

$$\underline{\underline{s' = \frac{s}{2}}}$$

Lahko pa nadaljujemo pot bolj računsko. V enačbo $s = \frac{mv^2}{2F}$ vstavimo novo silo $F' = 2F$, da dobimo novo pot s':

$$s' = \frac{mv^2}{2F'} = \frac{mv^2}{2 \cdot 2F}$$

V enačbi upoštevajmo, da je $s = \frac{mv^2}{2F}$:

$$s' = \frac{\frac{mv^2}{2F}}{2} = \underline{\underline{\frac{s}{2}}}$$

Dvakrat večja sila pospeši telo do enake končne hitrosti na polovici poti. Čeprav se sliši logično in se mogoče vprašamo, ali je račun sploh potreben, pa naj znova opozorim, da je rezultat posledica preproste zveze sile in poti v tem primeru. Pri podobnih nalogah ne smemo nikdar kar na začetku sklepati o takem rezultatu, ampak moramo zvezo med količinami vedno preveriti in rezultat dobiti z računom.

8. Gradbeno dvigalo dviga tovor z maso 50 kg. S kolikšno silo je napeta jeklena žica dvigala, ko dvigalo na začetku dvigovanja pospešuje s pospeškom 4,0 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$? Kaj pa na koncu dvigovanja, ko dvigalo zavira z enakim pospeškom (pojemkom)?

Podatki:

$m = 50$ kg

$a = 4{,}0\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Narišimo skico in sili, ki delujeta na tovor. Sila teže navzdol in sila žice navzgor:

Ko dvigalo pospešuje ali zavira, zanj velja II. Newtonov zakon (vsota vseh sil na telo je enaka masi pomnoženi s pospeškom telesa):

$$\vec{F}_ž + \vec{F}_g = m\vec{a}$$

Ko dvigalo na začetku dvigovanja pospešuje navzgor, je tudi pospešek usmerjen navzgor. Omenili smo že, da si je vedno smiselno za pozitivno smer izbrati smer pospeševanja, zato si za pozitivno smer izberimo smer navzgor. Glede na to izbiro je sila žice pozitivna, sila teže pa negativna, zato zapišimo:

$$F_ž - F_g = ma$$

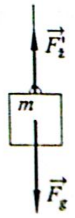
Iz enačbe izrazimo velikost sile žice:

$$F_ž = F_g + ma$$

Vstavimo $F_g = mg$ in izračunajmo velikost sile, s katero je napeta žica dvigala med pospeševanjem navzgor:

$$\begin{aligned} F_ž &= mg + ma = 50\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 50\,\text{kg} \cdot 4{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \\ &= 490{,}5\,\text{N} + 200\,\text{N} = 690{,}5\,\text{N} = \underline{\underline{690\,\text{N}}} \end{aligned}$$

Ko pa dvigalo zavira z enakim pospeškom (pojemkom), je pospešek usmerjen navzdol. Tudi v tem primeru si za pozitivno smer izberimo smer pospeška, torej navzdol. Na dvigalo delujeta isti sili kot prej, le da sedaj sila teže deluje v pozitivno, sila žice pa v negativno smer. Sila teže je v tem primeru večja od sile žice:



Enačba za ta primer je tako:

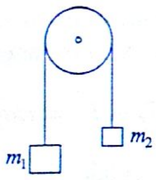
$$F_g - F_ž' = ma$$

Iz enačbe izrazimo in izračunajmo še velikost sile žice med zaviranjem:

$$\begin{aligned} F_ž' &= F_g - ma = mg - ma = \\ &= 50\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} - 50\,\mathrm{kg} \cdot 4{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \\ &= 490{,}5\,\mathrm{N} - 200\,\mathrm{N} = 290{,}5\,\mathrm{N} = \underline{\underline{290\,\mathrm{N}}} \end{aligned}$$

Zapomnimo si, da sila, s katero dvigamo breme, ni vedno enaka sili teže bremena. To je res le, če breme dvigamo enakomerno.

9. Dve uteži sta povezani z vrvjo in obešeni preko lahkega škripca (glej sliko). Ko ju spustimo, se začneta gibati s pospeškom $2{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Masa težje uteži je 5,6 kg. Kolikšna je masa lažje uteži? S kolikšno silo je napeta vrv?

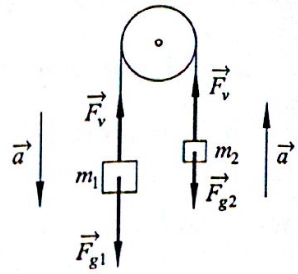


Podatki:

$m_1 = 5{,}6$ kg

$a = 2{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Ko uteži spustimo, se začneta gibati pospešeno. Težja navzdol, lažja pa navzgor. Ker sta povezani z vrvjo, se gibljeta z enako velikim pospeškom:



Na **težjo** utež delujeta sila teže navzdol in sila vrvi navz[gor]. Utež pospešuje navzdol, zato si za pozitivno smer izberi[mo ta] smer. Sila teže je tako usmerjena v pozitivno, sila vrvi p[a v] negativno smer. Z upoštevanjem smeri sil zapišimo ena[čbo] **$F = ma$ za težjo utež:**

$$F_{g1} - F_v = m_1 a$$

Tudi na lažjo utež delujeta sila teže navzdol in sila vrvi na[v]gor. Ker pa ta utež pospešuje navzgor, je sila teže v t[em] primeru usmerjena v negativno, sila vrvi pa v pozitivno s[mer]. To upoštevajmo v **enačbi $F = ma$ za lažjo utež:**

$$F_v - F_{g2} = m_2 a$$

1.NAČIN

Iz enačbe za težjo utež izrazimo in izračunajmo silo vrvi:

$$\begin{aligned} F_v &= F_{g1} - m_1 a = m_1 g - m_1 a = m_1(g-a) = \\ &= 5{,}6\,\mathrm{kg}\left(9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} - 2{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = 39{,}26\,\mathrm{N} = \underline{\underline{39\,\mathrm{N}}} \end{aligned}$$

Velikost sile vrvi na eno utež je enaka velikosti sile vrvi [na] drugo utež. Rezultat tako lahko uporabimo v enačbi za l[ažjo] utež in izračunamo njeno maso:

$$\begin{aligned} m_2 a &= F_v - F_{g2} = F_v - m_2 g \\ m_2 a + m_2 g &= F_v \\ m_2(a+g) &= F_v \\ m_2 &= \frac{F_v}{a+g} = \frac{39{,}26\,\mathrm{N}}{2{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \\ &= 3{,}113\,\mathrm{kg} = \underline{\underline{3{,}1\,\mathrm{kg}}} \end{aligned}$$

2.NAČIN

Ker je velikost sile vrvi na eno in drugo utež enaka (3. Newtonov zakon), iz enačbe za lažjo utež izrazimo silo vrvi

$$F_v = m_2 a + F_{g2}$$

Izraz vstavimo v enačbo za težjo utež:

$$F_{g1} - (m_2 a + F_{g2}) = m_1 a$$

V enačbi odpravimo oklepaj in vstavimo $F_{g1} = m_1 g$ in $F_{g2} = m_2 g$:

$$\begin{aligned} F_{g1} - m_2 a - F_{g2} &= m_1 a \\ m_1 g - m_2 a - m_2 g &= m_1 a \end{aligned}$$

Iz enačbe izrazimo in izračunajmo m_2:

$$\begin{aligned} m_1 g - m_1 a &= m_2 a + m_2 g \\ m_1 g - m_1 a &= m_2 (a + g) \\ m_2 &= \frac{m_1 g - m_1 a}{a + g} = \\ &= \frac{5{,}6\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} - 5{,}6\,\mathrm{kg} \cdot 2{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \\ &= 3{,}113\,\mathrm{kg} = \underline{\underline{3{,}1\,\mathrm{kg}}} \end{aligned}$$

Silo vrvi izračunajmo tako, da rezultat vstavimo v enačbo lažje uteži:

$$\begin{aligned} F_v &= m_2 a + m_2 g = m_2 (a + g) = \\ &= 3{,}113\,\mathrm{kg}\left(2{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = 39{,}25\,\mathrm{N} = \underline{\underline{39\,\mathrm{N}}} \end{aligned}$$

10. Tekmovalca v bobu pri startu potiskata bob vsak s silo 200 N v vodoravni smeri. S kolikšnim pospeškom se giblje bob, če je njegova masa 45 kg, koeficient trenja med njim in ledeno stezo pa je 0,2?

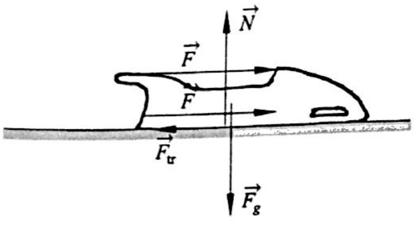
Podatki:

$F = 200\,\mathrm{N}$

$m = 45\,\mathrm{kg}$

$k_{tr} = 0{,}2$

Narišimo skico boba in sile, ki delujejo nanj med pospeševanjem:



Ker se bob v navpični smeri ne giblje, je sila teže F_g po velikosti enaka N:

$$F_g = N$$

V vodoravni smeri delujeta na bob sili tekmovalcev $2F$ naprej v smeri pospeševanja, sila trenja F_{tr} pa ga zavira. Smer pospeševanja izberimo za pozitivno. Tako dobimo:

$$2F - F_{tr} = ma$$

Velikost sile trenja izračunajmo z izrazom $F_{tr} = k_{tr} N$, v katerem upoštevajmo, da je $N = F_g = mg$:

$$F_{tr} = k_{tr} N = k_{tr} mg = 0{,}2 \cdot 45\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 88{,}29\,\mathrm{N}$$

Rezultat vstavimo v enačbo:

$$2F - F_{tr} = ma$$

in izračunajmo pospešek boba:

$$\begin{aligned} a &= \frac{2F - F_{tr}}{m} = \frac{2 \cdot 200\,\mathrm{N} - 88{,}29\,\mathrm{N}}{45\,\mathrm{kg}} = \\ &= 6{,}927\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \underline{\underline{6{,}9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} \end{aligned}$$

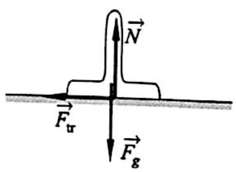
11. Pri balinanju na ledu, curlingu, tekmovalec zadrsa čok po ledeni ploskvi. Kako daleč se čok odpelje po ledu, če je njegova začetna hitrost 2,2 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, koeficient trenja med njim in podlago pa 0,030?

Podatki:

$v_0 = 2{,}2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$k_{tr} = 0{,}030$

Na čok med drsenjem po ledu delujejo sila teže in normala v navpični smeri ter sila trenja v vodoravni smeri:



Ker se čok v navpični smeri ne giblje, za navpično smer velja ravnovesje sil:

$$N = F_g$$

V vodoravni smeri pa čok zavira, v tej smeri nanj deluje le sila trenja. Za pozitivno smer izberimo smer gibanja čoka (nasprotno kot do sedaj, ko smo za pozitivno smer vedno izbrali smer pospeška). Sila trenja je torej usmerjena v negativni smeri, zato zapišimo:

$$-F_{\mathrm{tr}} = ma$$

V enačbo vstavimo $F_{\mathrm{tr}} = k_{\mathrm{tr}}N$:

$$-k_{\mathrm{tr}}N = ma$$

Upoštevajmo, da je $N = F_g = mg$:

$$-k_{\mathrm{tr}}mg = ma$$

Okrajšajmo maso in izračunajmo pospešek, s katerim čok zavira:

$$a = -k_{\mathrm{tr}}g = -0{,}030 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = -0{,}2943\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Sedaj pa s podatki in izračunanim pospeškom izračunajmo pot, ki jo čok naredi. Uporabimo enačbo $v^2 = v_0^2 + 2as$. Ker je končna hitrost čoka nič, dobimo:

$$\begin{aligned} 0 &= v_0^2 + 2as \\ -v_0^2 &= 2as \end{aligned}$$

Od tod je pot čoka:

$$s = -\frac{v_0^2}{2a} = -\frac{\left(2{,}2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2 \cdot \left(-0{,}2943\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)} = 8{,}223\,\mathrm{m} = \underline{\underline{8{,}2\,\mathrm{m}}}$$

12. Vlak sestavljajo lokomotiva in dva vagona. Pri speljevanju se vlak giblje s konstantnim pospeškom $0{,}50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. S kolikšno silo mora lokomotiva vleči vagona? S kolikšno silo prvi vagon vleče drugega? Masa prvega vagona je 8 500 kg, masa drugega vagona pa 7 000 kg. Koeficient trenja med vagonoma in tračnicami je 0,3.

Podatki:

$a = 0{,}50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

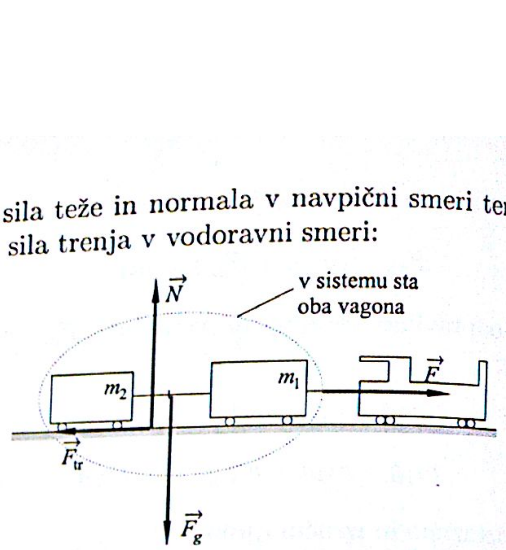
$m_1 = 8\,500\,\mathrm{kg}$

$m_2 = 7\,000\,\mathrm{kg}$

$k_{\mathrm{tr}} = 0{,}3$

Že v prejšnjih poglavjih o silah smo veliko govorili o nalogah, kjer nastopa več teles. Izbira telesa oziroma sistema je v teh nalogah ključnega pomena.

Za izračun velikosti sile, s katero lokomotiva vleče vagona pri pospeševanju, za sistem izberimo oba vagona. Na ta sistem delujejo: sila teže in normala v navpični smeri ter sila lokomotive in sila trenja v vodoravni smeri:



V navpični smeri ni gibanja, zato velja:

$$N = F_g$$

Silo teže sistema izrazimo z enačbo $F_g = (m_1 + m_2)g$, saj sta v sistemu oba vagona. Od tod z upoštevanjem ravnovesja v navpični smeri dobimo:

$$N = (m_1 + m_2)g$$

Vsota vseh sil na sistem v vodoravni smeri pa je enaka masi pomnoženi s pospeškom sistema (II. Newtonov zakon):

$$F - F_{\mathrm{tr}} = (m_1 + m_2)a$$

Za pozitivno smo si izbrali smer pospeševanja lokomotive, zato je sila lokomotive pozitivna, sila trenja pa negativna. Ne smemo pozabiti upoštevati masi obeh vagonov.

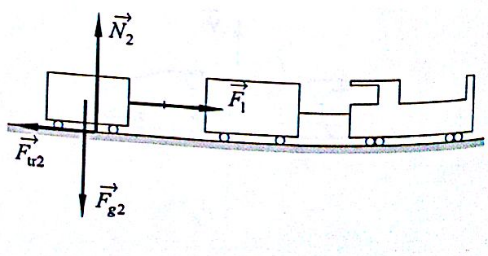
Iz enačbe izrazimo silo lokomotive:

$$F = (m_1 + m_2)a + F_{\mathrm{tr}}$$

Vstavimo $F_{\mathrm{tr}} = k_{\mathrm{tr}}N = k_{\mathrm{tr}}(m_1 + m_2)g$ in silo izračunajmo:

$$\begin{aligned} F &= (m_1 + m_2)a + k_{\mathrm{tr}}(m_1 + m_2)g = \\ &= (8\,500\,\mathrm{kg} + 7\,000\,\mathrm{kg}) \cdot 0{,}50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + \\ &\quad + 0{,}3 \cdot (8\,500\,\mathrm{kg} + 7\,000\,\mathrm{kg}) \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \\ &= 53\,370\,\mathrm{N} = \underline{\underline{53\,\mathrm{kN}}} \end{aligned}$$

Pri računanju sile, s katero prvi vagon vleče drugega, pa za sistem izberimo samo zadnji vagon. Narišimo sile, ki delujejo nanj:



V navpični smeri vagon miruje, zato velja:

$$F_{g2} = N_2$$

V vodoravni smeri pa vagon pospešuje:

$$F_1 - F_{tr2} = m_2 a$$

Upoštevali smo, da je sila $\vec{F_1}$ usmerjena v pozitivno smer, sila $\vec{F}_{tr2}$ pa v negativno smer. Iz enačbe izrazimo silo prvega vagona:

$$F_1 = m_2 a + F_{tr2}$$

Vstavimo izraz za računanje velikosti sile trenja $F_{tr2} = k_{tr} N_2$, v katerem upoštevamo, da je $N_2 = F_{g2} = m_2 g$, in izračunajmo silo F_1:

$$\begin{aligned} F_1 &= m_2 a + k_{tr} m_2 g = \\ &= 7\,000\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + 0{,}3 \cdot 7\,000\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \\ &= 24\,100\,\mathrm{N} = \underline{\underline{24\,\mathrm{kN}}} \end{aligned}$$

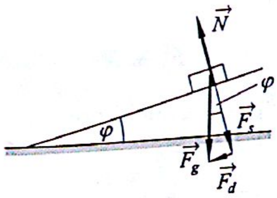
△13. Kolikšen je pospešek telesa, ki brez trenja drsi navzdol po klancu? Telo se v 20 m poti spusti za 3,0 m.

Podatki:

$s = 20$ m

$h = 3{,}0$ m

Na telo, ki drsi po klancu navzdol brez trenja, delujeta sila teže navpično navzdol in normala pravokotno na klanec. Silo teže razstavimo na dinamično in statično komponento:



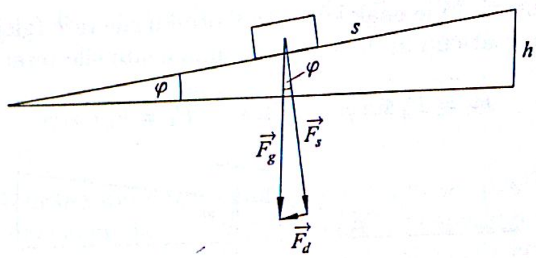
V smeri pravokotno na klanec telo miruje, zato velja:

$$F_s = N$$

V smeri vzdolž klanca pa telo pospešuje. Za pozitivno smer izberimo smer pospeševanja. V tej smeri nanj deluje dinamična komponenta sile teže, ki je hkrati edina sila v tej smeri. Tako velja:

$$F_d = ma$$

Velikost dinamične komponente sile teže izrazimo z velikostjo sile teže, tako da primerjamo trikotnika sile teže in njenih komponent ter trikotnik klanca:



Trikotnika sta podobna, saj imata enake kote. Razmerje stranic je tako tudi enako, kar pomeni, da velja:

$$\frac{F_d}{F_g} = \frac{h}{s}$$

Od tod izrazimo velikost dinamične komponente sile teže:

$$F_d = \frac{F_g h}{s} = \frac{mgh}{s}$$

Dobljeno zvezo vstavimo v enačbo $F_d = ma$:

$$\frac{mgh}{s} = ma$$

Po krajšanju mase dobimo:

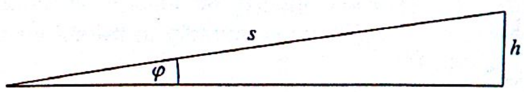
$$\frac{gh}{s} = a$$

Tako je:

$$a = \frac{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 3{,}0\,\mathrm{m}}{20\,\mathrm{m}} = 1{,}472\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \underline{\underline{1{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}$$

Dodatek

Računanja pospeška se lotimo še z uporabo kotnih funkcij. Najprej izračunajmo naklon klanca. V pravokotnem trikotniku klanca zapišimo sinus kota φ (naklon klanca):



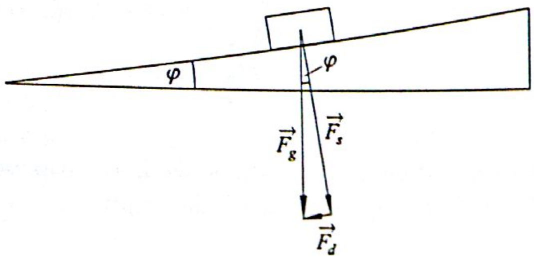
$$\sin\varphi = \frac{h}{s} = \frac{3{,}0\,\mathrm{m}}{20\,\mathrm{m}} = 0{,}15$$

Od tod je naklon klanca:

$$\varphi = \sin^{-1} 0{,}15 = 8{,}627°$$

S tem kotom, ki je enak kotu v trikotniku sile teže (glej sliko), zapišimo statično in dinamično komponento sile teže:

$$F_d = F_g \sin\varphi \qquad \text{in} \qquad F_s = F_g \cos\varphi$$



Zapišimo ravnovesno enačbo za smer pravokotno na klanec:

$$F_s = N$$

In enačbo za smer vzdolž klanca, v kateri telo pospešuje:

$$F_d = ma$$

V zadnji enačbi upoštevajmo, da je $F_d = F_g \sin\varphi$ in $F_g = mg$:

$$F_g \sin\varphi = ma$$

$$mg \sin\varphi = ma$$

Po krajšanju mase dobimo:

$$a = g \sin\varphi$$

V enačbo vstavimo prej izračunani kot naklona in izračunajmo pospešek telesa na klancu:

$$a = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \sin 8{,}627° = 1{,}472\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \underline{\underline{1{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

△ 14. Kolikšno hitrost doseže smučarski skakalec na zaletni stezi z nagibom 60°, če je koeficient trenja med smučkami in smučino 0,20, steza pa je dolga 20 m? Zračni upor zanemarimo.

Podatki:

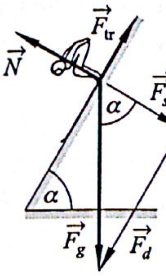
$\alpha = 60°$

$k_{tr} = 0{,}20$

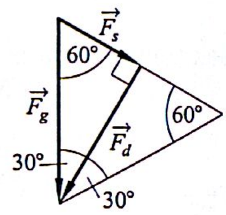
$s = 20$ m

Da bomo lahko izračunali hitrost skakalca na koncu z
najprej izračunajmo njegov pospešek pri gibanju po z
stezi.

Najprej narišimo skico skakalca in sile, ki delujejo nanj. S
teže razstavimo na dinamično in statično komponento:



Trikotnik sile teže in njenih komponent dopolnimo do ena
straničnega trikotnika. Velikost statične komponente pr
stavlja polovica osnovnice tega trikotnika, velikost dinami
komponente pa višino v tem trikotniku:



Tako dobimo:

$$F_s = \frac{F_g}{2}$$

in

$$F_d = \frac{F_g\sqrt{3}}{2}$$

Zapišimo ravnovesno enačbo za smer pravokotno na klan
saj v tej smeri ni gibanja. V tej smeri na skakalca deluje
in $\vec{N}$, vsaka v svojo smer:

$$F_s = N$$

Ker je $F_s = \frac{F_g}{2}$ in $F_g = mg$, dobimo:

$$\frac{mg}{2} = N$$

V smeri vzdolž klanca na skakalca delujeta $\vec{F}_d$ in $\vec{F}_{tr}$
pozitivno smer si izberimo smer pospeševanja in zapišim

$$F_d - F_{tr} = ma$$

Upoštevajmo, da je $F_{tr} = k_{tr}N$ in $F_d = \frac{F_g\sqrt{3}}{2} = \frac{mg\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{mg\sqrt{3}}{2} - k_{tr}N = ma$$

V enačbo vstavimo še $N = \frac{mg}{2}$, okrajšajmo maso in izračunajmo pospešek:

$$\begin{aligned} \frac{mg\sqrt{3}}{2} - k_{\mathrm{tr}}\frac{mg}{2} &= ma \\ \frac{g\sqrt{3}}{2} - k_{\mathrm{tr}}\frac{g}{2} &= a \\ a &= g\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{k_{\mathrm{tr}}}{2}\right) = \\ &= 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{0{,}20}{2}\right) = 7{,}515\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned}$$

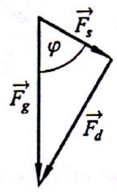
Sedaj pa izračunajmo hitrost skakalca na dnu zaleta. Izračunani pospešek vstavimo v enačbo $v^2 = 2as$:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot 7{,}515\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 20\,\mathrm{m}} = \sqrt{300{,}6\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = \\ &= 17{,}34\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{17\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}} \end{aligned}$$

Dodatek

Za računanje pospeška skakalca uporabimo kotne funkcije. Najprej razstavimo silo teže na statično in dinamično komponento (glej prejšnjo nalogo):

$$\begin{aligned} F_d &= F_g \sin\varphi = mg\sin\varphi \\ F_s &= F_g \cos\varphi = mg\cos\varphi \end{aligned}$$



Kot prej zapišimo enačbi za smeri pravokotno in vzdolž klanca:

$$F_s = N \qquad \text{in} \qquad F_d - F_{\mathrm{tr}} = ma$$

V enačbah upoštevajmo, da je $F_d = mg\sin\varphi$, $F_s = mg\cos\varphi$ in $F_g = mg$. Tako dobimo:

$$mg\cos\alpha = N \qquad \text{in} \qquad mg\sin\alpha - k_{\mathrm{tr}}N = ma$$

V drugo enačbo vstavimo prvo, okrajšajmo maso in izračunajmo pospešek:

$$\begin{aligned} mg\sin\alpha - k_{\mathrm{tr}}mg\cos\alpha &= ma \\ g\sin\alpha - k_{\mathrm{tr}}g\cos\alpha &= a \\ a &= g(\sin\alpha - k_{\mathrm{tr}}\cos\alpha) = \\ &= 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}(\sin 60^\circ - 0{,}20 \cdot \cos 60^\circ) = 7{,}515\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned}$$

Končno z enačbo $v^2 = 2as$ izračunajmo hitrost skakalca na dnu zaleta:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot 7{,}515\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 20\,\mathrm{m}} = \\ &= \sqrt{300{,}6\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = 17{,}34\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{17\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}} \end{aligned}$$

△ 15. S kolikšno silo mora zavirati kolesar, ki se spušča po strmini z naklonom 30°, da se bo spuščal s pospeškom $0{,}30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$? Upor zraka zanemarimo. Masa kolesarja skupaj s kolesom je 70 kg.

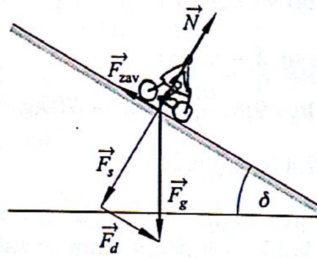
Podatki:

$\delta = 30^\circ$

$a = 0{,}30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

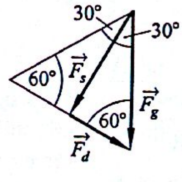
$m = 70$ kg

Na skici kolesarja na klancu narišimo sile, ki delujejo nanj: silo teže, silo zaviranja (trenje) in normalo. Silo teže razstavimo na statično in dinamično komponento.



Trikotnik sile teže dopolnimo do enakostraničnega trikotnika in vidimo, da velikost statične komponente predstavlja višina v tem trikotniku, velikost dinamične komponente pa polovica dolžine stranice:

$$\begin{aligned} F_s &= \frac{F_g\sqrt{3}}{2} = \frac{mg\sqrt{3}}{2} \\ F_d &= \frac{F_g}{2} = \frac{mg}{2} \end{aligned}$$



Sedaj zapišimo enačbi za gibanje kolesarja. V smeri pravokotno na klanec ni gibanja, zato velja:

$$N = F_s$$

V smeri vzdolž klanca kolesar pospešuje po klancu navzdol. Smer navzdol si izberimo za pozitivno, tako da je dinamična komponenta sile teže pozitivna, sila zaviranja pa negativna:

$$F_d - F_{\text{zav}} = ma$$

Iz te enačbe izrazimo silo zaviranja:

$$F_{\text{zav}} = F_d - ma$$

V enačbo vstavimo $F_d = \frac{mg}{2}$ in izračunajmo silo, s katero naj kolesar zavira:

$$\begin{aligned} F_{\text{zav}} &= \frac{mg}{2} - ma = \frac{70\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} - 70\,\text{kg} \cdot 0{,}30\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \\ &= 322{,}4\,\text{N} = 320\,\text{N} \end{aligned}$$

Dodatek

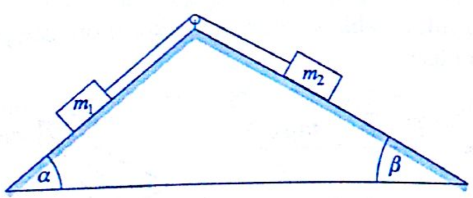
Silo teže bi lahko razstavili tudi s pomočjo kotnih funkcij. Kot v prejšnjih nalogah dobimo:

$$\begin{aligned} F_s &= F_g \cos\delta = mg\cos\delta \\ F_d &= F_g \sin\delta = mg\sin\delta \end{aligned}$$

Izraz za F_d vstavimo v enačbo $F_{\text{zav}} = F_d - ma$ in dobimo:

$$\begin{aligned} F_{\text{zav}} &= mg\sin\delta - ma = \\ &= 70\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \sin 30^\circ - 70\,\text{kg} \cdot 0{,}30\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \\ &= 322{,}4\,\text{N} = \underline{\underline{320\,\text{N}}} \end{aligned}$$

△16. Dve telesi sta povezani z vrvico in sta vsak na svojem pobočju klanca. S kolikšnim pospeškom se začneta gibati, ko ju spustimo? $m_1 = 0{,}60$ kg, $m_2 = 1{,}7$ kg, $\alpha = 40°$, $\beta = 30°$, $k_{tr} = 0{,}2$ (za obe kladi)



Podatki:

$m_1 = 0{,}60$ kg

$m_2 = 1{,}7$ kg

$\alpha = 40°$

$\beta = 30°$

$k_{tr} = 0{,}2$

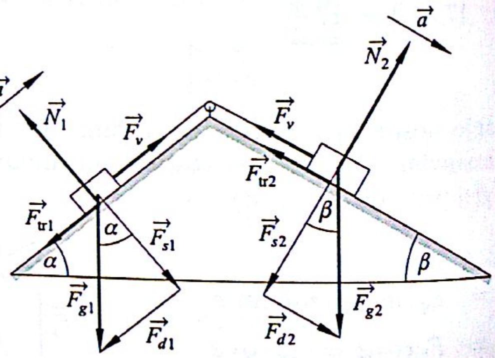
Preden narišemo sile, ki delujejo na telesi, moramo določiti smer, v katero se bosta začeli gibati. To storimo tako, da primerjamo dinamični komponenti obeh tež:

$$\begin{aligned} F_{d1} &= F_{g1} \sin\alpha = m_1 g \sin\alpha = \\ &= 0{,}60\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin 40^\circ = 3{,}783\,\text{N} \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} F_{d2} &= F_{g2} \sin\beta = m_2 g \sin\beta = \\ &= 1{,}7\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin 30^\circ = 8{,}339\,\text{N} \end{aligned}$$

Dinamična komponenta težjega telesa je večja kljub temu, da ima klanec na njeni strani manjši naklon. Kladi se bosta tako začeli gibati proti desni. Glede na to na skici narišimo sile. Pazimo predvsem pri silah trenja, ki sta usmerjeni nasprotno od smeri gibanja.



Zapišimo enačbe najprej za prvo telo. V smeri pravokotno na klanec velja:

$$N_1 = F_{s1}$$

Upoštevajmo zvezo $F_{s1} = m_1 g \cos\alpha$ in dobimo:

$$N_1 = m_1 g \cos\alpha$$

V smeri vzdolž klanca na prvo telo delujejo dinamična komponenta sile teže in sila trenja navzdol po klancu in sila vrvi navzgor po klancu. Ker smo prej ugotovili, da telo pospešuje navzgor po klancu, se enačba $F = ma$ za prvo telo glasi:

$$F_v - F_{d1} - F_{tr1} = m_1 a$$

V enačbo vstavimo:

$$F_{d1} = m_1 g \sin\alpha$$

in

$$F_{tr1} = k_{tr} N_1 = k_{tr} m_1 g \cos\alpha$$

Tako dobimo:

$$F_v - m_1 g \sin\alpha - k_{tr} m_1 g \cos\alpha = m_1 a$$

Zapišimo podobne enačbe še za drugo telo. V smeri pravokotno na klanec velja:

$$N_2 = F_{s2}$$

oziroma

$$N_2 = m_2 g \cos\beta$$

V smeri vzdolž klanca pa pazimo na smeri, saj je pozitivna smer za to telo navzdol po klancu:

$$F_{d2} - F_{tr2} - F_v = m_2 a$$

Upoštevajmo še, da je:

$$F_{d2} = m_2 g \sin\beta$$

in

$$F_{tr2} = k_{tr} N_2 = k_{tr} m_2 g \cos\beta$$

Torej je:

$$m_2 g \sin\beta - k_{tr} m_2 g \cos\beta - F_v = m_2 a$$

Za boljšo preglednost še enkrat zapišimo obe enačbi, ki smo ju dobili:

Prvo telo:

$$F_v - m_1 g \sin\alpha - k_{tr} m_1 g \cos\alpha = m_1 a$$

Drugo telo:

$$m_2 g \sin\beta - k_{tr} m_2 g \cos\beta - F_v = m_2 a$$

Sili vrvi, ki nastopata v enačbah, imata enako velikost (III. Newtonov zakon), zato iz prve enačbe izrazimo silo vrvi in izraz vstavimo v drugo enačbo:

$$F_v = m_1 a + m_1 g \sin\alpha + k_{tr} m_1 g \cos\alpha$$

$$\begin{aligned} m_2 g \sin\beta - k_{tr} m_2 g \cos\beta - \\ -(m_1 a + m_1 g \sin\alpha + k_{tr} m_1 g \cos\alpha) = m_2 a \end{aligned}$$

Odpravimo oklepaj:

$$\begin{aligned} m_2 g \sin\beta - k_{tr} m_2 g \cos\beta - m_1 a - m_1 g \sin\alpha - \\ -k_{tr} m_1 g \cos\alpha = m_2 a \end{aligned}$$

Člen $m_1 a$ nesimo preko enačaja, da bomo na desni strani lahko izpostavili a:

$$\begin{aligned} m_2 g \sin\beta - k_{tr} m_2 g \cos\beta - m_1 g \sin\alpha - k_{tr} m_1 g \cos\alpha = \\ = (m_1 + m_2) a \end{aligned}$$

Od tod pa je pospešek teles:

$$a = \frac{m_2 g \sin\beta - k_{tr} m_2 g \cos\beta - m_1 g \sin\alpha - k_{tr} m_1 g \cos\alpha}{m_1 + m_2} =$$

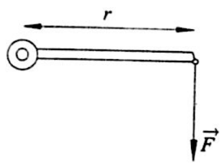
$$= 0{,}3325\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \underline{\underline{0{,}33\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}$$

Pri neprimernih podatkih lahko dobimo tudi negativni rezultat. To ne pomeni, da telesi pospešujeta v drugi smeri, saj smo na začetku z računom pokazali, da pospešujeta v to smer. Negativni rezultat bi v tem primeru pomenil, da pri takih podatkih kladi ne pospešujeta, pač pa mirujeta.

3.5 Navor sile

3.5.1 Definicija navora

1. Na konec kljuke z dolžino 12 cm pritisnemo s silo 20 N v pravokotni smeri (glej sliko). S kolikšnim navorom, glede na os kljuke, delujemo?



Podatki:

$r = 12\,\mathrm{cm} = 0{,}12\,\mathrm{m}$

$F = 20\ \mathrm{N}$

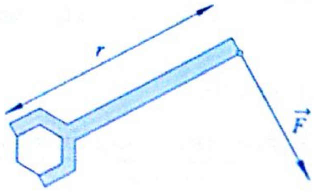
Kadar je sila pravokotna na ročico (ročica je vektor z začetkom v osi in koncem v prijemališču sile), je velikost navora kar produkt velikosti sile in dolžine ročice:

$$M = rF$$

Tako je navor, s katerim delujemo na kljuko:

$$M = 0{,}12\,\mathrm{m} \cdot 20\,\mathrm{N} = \underline{\underline{2{,}4\,\mathrm{Nm}}}$$

2. Vijak privijemo, če nanj delujemo z navorom 160 Nm. S kolikšno silo moramo pritisniti pravokotno na koncu 18 cm dolgega ključa, da vijak privijemo?



Podatki:

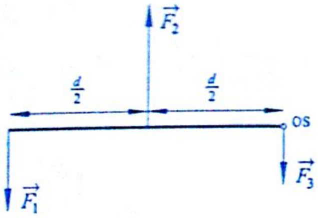
$M = 160$ Nm

$r = 18\,\text{cm} = 0{,}18\,\text{m}$

Uporabimo enačbo za računanje velikosti navora, ko je sila pravokotna na ročico ($M = rF$), in izračunajmo velikost sile, s katero moramo priviti vijak:

$$F = \frac{M}{r} = \frac{160\,\text{Nm}}{0{,}18\,\text{m}} = 888{,}9\,\text{N} = \underline{\underline{890\,\text{N}}}$$

3. Na vodoravno palico dolžine 1,2 m delujejo tri sile, kot kaže slika. Velikosti sil so: $F_1 = 25$ N, $F_2 = 45$ N in $F_3 = 15$ N. Kolikšen je skupni navor vseh sil glede na vodoravno os skozi desno krajišče palice?



Podatki:

$d = 1{,}2$ m

$F_1 = 25$ N

$F_2 = 45$ N

$F_3 = 15$ N

Navor sile, ki ima prijemališče v osi, je vedno enak nič, saj je dolžina ročice enaka nič. Navor sile F_3 glede na os skozi njeno prijemališče je tako enak nič, ne glede na to, kako je sila usmerjena:

$$M_3 = r_3F_3 = 0\,\text{m} \cdot 15\,\text{N} = 0\,\text{Nm}$$

Dolžina ročice sile F_2 glede na os skozi desno krajišče je polovica dolžine palice:

$$r_2 = \frac{d}{2} = \frac{1{,}2\,\text{m}}{2} = 0{,}6\,\text{m}$$

Ker je sila F_2 pravokotna na ročico r_2, je njen navor:

$$M_2 = r_2F_2 = 0{,}6\,\text{m} \cdot 45\,\text{N} = 27\,\text{Nm}$$

Sila F_1 pa prijemlje na nasprotnem krajišču palice, kot je postavljena os. Dolžina njene ročice je tako kar cela dolžina palice:

$$r_1 = d = 1{,}2\,\text{m}$$

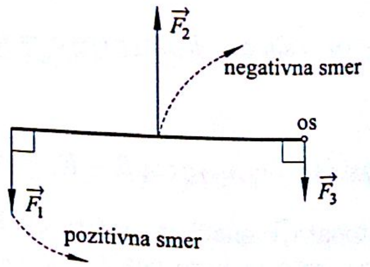
Sila F_1 je pravokotna na ročico, zato je njen navor:

$$M_1 = r_1F_1 = 1{,}2\,\text{m} \cdot 25\,\text{N} = 30\,\text{Nm}$$

Skupni navor treh sil glede na izbrano os je vsota navorov:

$$M = M_1 + M_2 + M_3$$

Paziti moramo na predznake navorov. Predznak navora je odvisen od tega, v katero smer glede na os navor vrti telo. V našem primeru navor M_1 vrti palico v nasprotni smeri urinega kazalca, navor M_2 pa v smeri urinega kazalca. Ponavadi izberemo, da so navori, ki vrtijo v nasprotni smeri urinega kazalca, pozitivni, navori, ki vrtijo v smeri urinega kazalca, pa negativni:

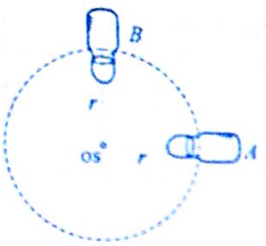


Tako je vsota navorov na palico:

$$M = 30\,\text{Nm} - 27\,\text{Nm} + 0\,\text{Nm} = \underline{\underline{3{,}0\,\text{Nm}}}$$

Rezultat je pozitiven, torej vsota navorov vrti palico v nasprotni smeri urinega kazalca.

4. Deklica se igra s kanglico in jo vrti v navpičnem krogu. Kolikšen je navor sile teže kanglice v točkah A in B glede na os v središču kroženja? Masa kanglice je 300 g, polmer kroženja kanglice pa 0,46 m.



Podatki:

$m = 300\,\mathrm{g} = 0{,}30\,\mathrm{kg}$

$r = 0{,}46\,\mathrm{m}$

Ko je kanglica v točki A, sta sila in ročica, ki je v tem primeru kar polmer kroženja, pravokotni. Navor sile teže na kanglico v točki A zato izračunajmo z enačbo:

$$M_A = rF_g$$

Upoštevajmo, da je $F_g = mg$, in dobimo:

$$M_A = rmg = 0{,}46\,\mathrm{m} \cdot 0{,}30\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} =$$

$$= 1{,}354\,\frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}^2} = \underline{\underline{1{,}4\,\mathrm{Nm}}}$$

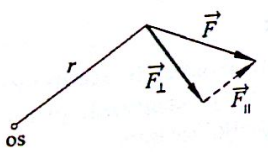
Kadar sta ročica in sila vzporedni oziroma kolinearni, je navor te sile enak nič. Ker sta v točki B ročica (polmer) in sila teže kolinearni, je navor sile teže kanglice v tej točki enak nič:

$$M_B = 0$$

Dodatek

Navor sile, ki z ročico oklepa poljuben kot, izračunamo z enačbo:

$$M = rF_\perp$$



$F_\perp$ je velikost pravokotne komponente sile glede na ročico. Torej k navoru prispeva le pravokotna komponenta sile.

Sile, pravokotne na ročico, v celoti prispevajo k navoru (kot v točki A). Sile, ki pa so vzporedne oziroma kolinearne z ročico, pa ne prispevajo k navoru; njihov navor je enak nič (kot v točki B).

△5. Ravnilo z maso 70 g in dolžino 40 cm leži na vodoravni mizi. Kolikšen je navor sile teže ravnila glede na vodoravno os skozi levo krajišče ravnila? Kolikšen pa je navor sile teže ravnila glede na to os, če ravnilo primemo za desno krajišče in dvignemo za 30°, 45°, 60° ali 90° glede na mizo?

Podatki:

$m = 70\,\mathrm{g} = 0{,}070\,\mathrm{kg}$

$d = 40\,\mathrm{cm} = 0{,}40\,\mathrm{m}$

$\alpha_1 = 30°$

$\alpha_2 = 45°$

$\alpha_3 = 60°$

$\alpha_4 = 90°$

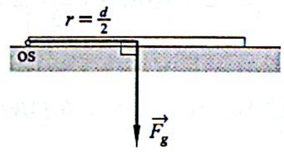
Dolžina ročice, to je razdalja od osi do prijemališča sile, je v vseh primerih enaka polovici dolžine ravnila:

$$r = \frac{d}{2} = \frac{0{,}40\mathrm{m}}{2} = 0{,}20\,\mathrm{m}$$

Velikost sile teže izračunajmo z enačbo $F_g = mg$:

$$F_g = 0{,}070\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 0{,}6867\,\mathrm{N}$$

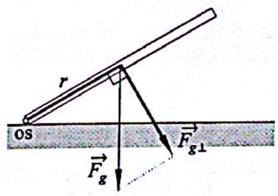
Sila teže ravnila in ročica sta v primeru, ko ravnilo leži na mizi, pravokotni:



Navor je enak:

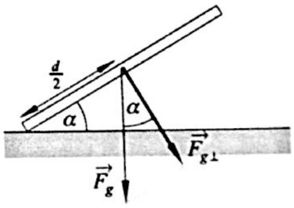
$$M = rF_g = 0{,}20\,\mathrm{m} \cdot 0{,}6867\,\mathrm{N} = 0{,}1373\,\mathrm{Nm} = \underline{\underline{0{,}14\,\mathrm{Nm}}}$$

Ko pa ravnilo dvignemo za desno krajišče, sila teže ravnila in ročica nista več pravokotni:

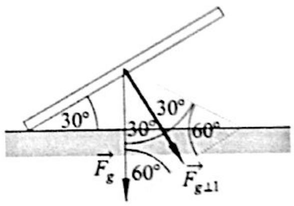


K navoru prispeva le pravokotna komponenta sile teže glede na ročico (ravnilo), zato v teh primerih navor izračunajmo z enačbo $M = rF_{g\perp}$, kjer je $F_{g\perp}$ velikost pravokotne komponente sile teže na ročico.

Silo teže grafično razstavimo na pravokotno in vzporedno komponento. Kot, ki ga tvori sila teže F_g s svojo komponento $F_{g\perp}$, je enak kotu med ravnilom in mizo:



V primeru, ko ravnilo oklepa kot 30° z mizo, dopolnimo trikotnik sile teže do enakostraničnega trikotnika. Velikost pravokotne komponente sile teže predstavlja višina v tem trikotniku, katerega stranica predstavlja velikost sile teže:



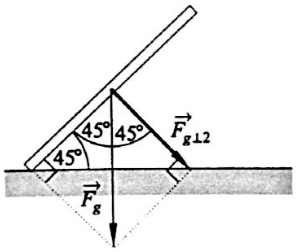
Od tod dobimo:

$$F_{g\perp1} = \frac{F_g\sqrt{3}}{2} = 0{,}6867\,\mathrm{N}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}5947\,\mathrm{N}$$

Navor je tako:

$$M = rF_{g\perp1} = 0{,}20\,\mathrm{m}\cdot 0{,}5947\,\mathrm{N} = 0{,}1189\,\mathrm{Nm} = \underline{\underline{0{,}12\,\mathrm{Nm}}}$$

Ko ravnilo z mizo oklepa kot 45°, trikotnik sile teže dopolnimo do kvadrata, v katerem diagonala predstavlja velikost sile teže, stranica pa velikost njene pravokotne komponente:



Tako je:

$$F_g = F_{g\perp2}\sqrt{2}$$

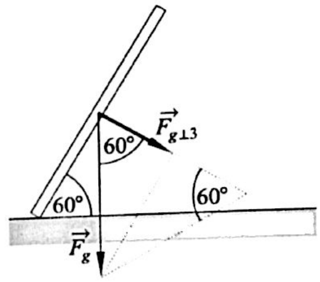
oziroma

$$F_{g\perp2} = \frac{F_g}{\sqrt{2}} = \frac{0{,}6867\,\mathrm{N}}{\sqrt{2}} = 0{,}4856\,\mathrm{N}$$

Navor sile teže pri tem kotu je tako:

$$\begin{aligned} M_2 &= rF_{g\perp2} = 0{,}20\,\mathrm{m}\cdot 0{,}4856\,\mathrm{N} = 0{,}09712\,\mathrm{Nm} = \\ &= \underline{\underline{0{,}097\,\mathrm{Nm}}} \end{aligned}$$

Pri kotu 60° dopolnimo trikotnik sile teže do enakostraničnega trikotnika, v katerem velikost pravokotne komponente sile teže na ročico (ravnilo) predstavlja polovica stranice, stranica pa velikost sile teže:



Velikost pravokotne komponente sile teže je tako:

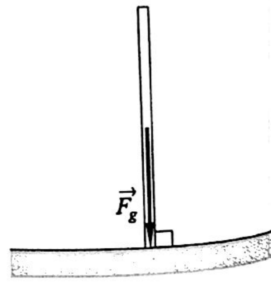
$$F_{g\perp3} = \frac{F_g}{2} = \frac{0{,}6867\,\mathrm{N}}{2} = 0{,}3434\,\mathrm{N}$$

In navor:

$$\begin{aligned} M_3 &= rF_{g\perp3} = 0{,}20\,\mathrm{m}\cdot 0{,}3434\,\mathrm{N} = 0{,}06868\,\mathrm{Nm} = \\ &= \underline{\underline{0{,}069\,\mathrm{Nm}}} \end{aligned}$$

V zadnjem primeru, ko pa je ravnilo navpično, pa sta sila teže in ročica kolinearni, tako da je navor sile teže v tem primeru nič:

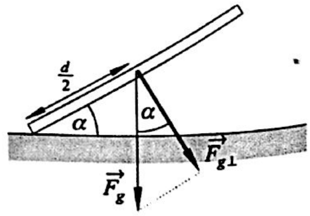
$$M_4 = \underline{\underline{0\,\mathrm{Nm}}}$$



Dodatek

Velikost pravokotnih komponent sile teže glede na ročic (ravnilo) pri posameznih primerih lažje izrazimo s pomočj kotne funkcije kosinus:

$$\cos\alpha = \frac{F_{g\perp}}{F_g}$$



Od tod je:

$$F_{g\perp} = F_g \cos\alpha$$

Navor sile teže ravnila glede na vodoravno os skozi levo krajišče, ko je ravnilo nagnjeno za kot α glede na mizo, je tako:

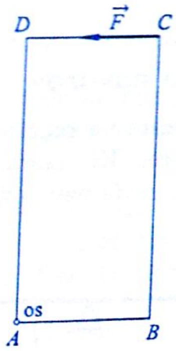
$$M = rF_g \cos\alpha$$

Za α vstavimo 30°, 45°, 60° in 90° in dobimo:

$$\begin{aligned}
M_1 &= 0{,}20\,\mathrm{m} \cdot 0{,}6867\,\mathrm{N} \cdot \cos 30° = \\
&= 0{,}1189\,\mathrm{Nm} = \underline{\underline{0{,}12\,\mathrm{Nm}}} \\
M_2 &= 0{,}20\,\mathrm{m} \cdot 0{,}6867\,\mathrm{N} \cdot \cos 45° = \\
&= 0{,}09711\,\mathrm{Nm} = \underline{\underline{0{,}097\,\mathrm{Nm}}} \\
M_3 &= 0{,}20\,\mathrm{m} \cdot 0{,}6867\,\mathrm{N} \cdot \cos 60° = \\
&= 0{,}06867\,\mathrm{Nm} = \underline{\underline{0{,}069\,\mathrm{Nm}}} \\
M_4 &= 0{,}20\,\mathrm{m} \cdot 0{,}6867\,\mathrm{N} \cdot \cos 90° = \underline{\underline{0\,\mathrm{Nm}}}
\end{aligned}$$

V zadnjem primeru smo uporabili razširjeno definicijo funkcije kosinus, po kateri je $\cos 90° = 0$.

Δ6. Sila F prijemlje v oglišču C pravokotnika $ABCD$ in je usmerjena proti oglišču D. Kolikšen je navor te sile glede na os v oglišču A? Velikost sile je 170 N, stranici pravokotnika pa merita 26 cm in 57 cm.



Podatki:

$F = 170$ N

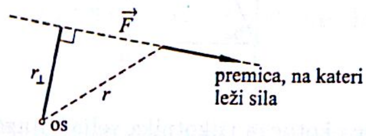
$a = 26\,\mathrm{cm} = 0{,}26\,\mathrm{m}$

$b = 57\,\mathrm{cm} = 0{,}57\,\mathrm{m}$

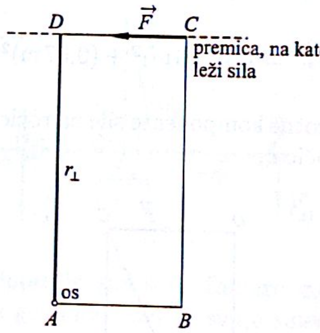
Računanje dolžine ročice in pravokotne komponente sile na ročico je v tem primeru zamudno in zapleteno. Včasih se temu lahko izognemo tako, da namesto pravokotne komponente sile na ročico poiščemo pravokotno komponento ročice na silo. Navor takrat izračunamo z enačbo:

$$M = r_\perp F$$

Dolžina pravokotne ročice $r_\perp$ na silo je razdalja od osi do premice, na kateri leži sila:



V tej nalogi je dolžina pravokotne ročice na silo kar stranica b:



Navor sile F glede na os v točki A je tako:

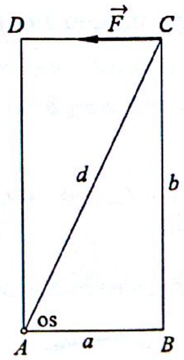
$$M = bF = 0{,}57\,\mathrm{m} \cdot 170\,\mathrm{N} = 96{,}9\,\mathrm{Nm} = \underline{\underline{97\,\mathrm{Nm}}}$$

Ta način računanja navora je v mnogih nalogah neprimerno lažji. Vedno seveda ne moremo računati na ta način, saj ne poznamo vedno dolžine pravokotne komponente ročice na silo. Kateri od načinov računanja navora je lažji, je odvisno od posameznega primera. Občutek za pravo izbiro načina pa pridobimo le z vajo in veliko rešenimi primeri.

Dodatek

Za vajo izračunajmo navor še na klasični način z enačbo $M = rF_\perp$.

Dolžina ročice je razdalja od osi do prijemališča sile, torej diagonala pravokotnika $ABCD$. Diagonala s stranicama a in b tvori pravokotni trikotnik:



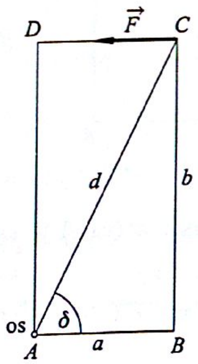
Za stranice pravokotnega trikotnika velja Pitagorov izrek:

$$d^2 = a^2 + b^2$$

Tako je ročica (diagonala):

$$r = d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(0{,}26\,\mathrm{m})^2 + (0{,}57\,\mathrm{m})^2} = 0{,}6265\,\mathrm{m}$$

Za izračun pravokotne komponente sile na ročico potrebujemo kot med silo in ročico:



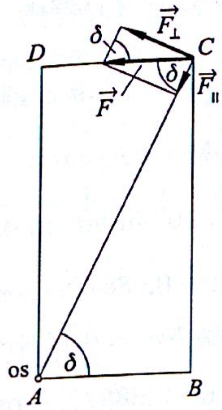
Po definiciji funkcije kosinus je:

$$\cos\delta = \frac{a}{d} = \frac{0{,}26\,\mathrm{m}}{0{,}6265\,\mathrm{m}} = 0{,}4150$$

Od tod s funkcijo arkuskosinus izračunajmo kot δ:

$$\delta = \cos^{-1}(0{,}4150) = 65{,}48°$$

Kot δ je enak kotu med diagonalo (ročico) in silo. Sedaj razstavimo silo F na vzporedno ($F_{\parallel}$) in pravokotno ($F_{\perp}$) komponento glede na ročico (diagonalo):



V trikotniku, ki ga tvorijo sila in njeni komponenti, zapišim sinus kota δ:

$$\sin\delta = \frac{F_{\perp}}{F}$$

Od tod je:

$$F_{\perp} = F\sin\delta = 170\,\mathrm{N}\cdot\sin 65{,}48° = 154{,}7\,\mathrm{N}$$

Končno izračunajmo navor sile F glede na os v točki A:

$$M = rF_{\perp} = 0{,}6265\,\mathrm{m}\cdot 154{,}7\,\mathrm{N} = 96{,}92\,\mathrm{Nm} = \underline{\underline{97\,\mathrm{Nm}}}$$

Prepričali smo se, da je ta način mnogo bolj zapleten, tako d se v podobnih primerih zagotovo izplača računati na prejšnj način.

3.5.2 Ravnovesje navorov

1. Marko in Tamara sedita na gugalnici. Marko sedi na le strani 1,3 m od podpore. Kje mora sedeti Tamara, da je gugalnica v ravnovesju glede navorov? Marko tehta 65 kg Tamara pa 48 kg.

Podatki:

$r_1 = 1{,}3$ m

$m_1 = 65$ kg

$m_2 = 48$ kg

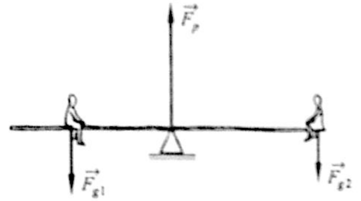
Naloge iz ravnovesja navorov so nekoliko podobne nalogam ravnovesja sil. Tako kot pri ravnovesju sil velja, da telo miruje ali se giblje premo enakomerno, kadar je vsota vseh sil na enaka nič (I. Newtonov zakon), za ravnovesje navorov velja da se **telo ne vrti oziroma se vrti enakomerno, kadar je vsota vseh navorov nanj enaka nič.**

Zelo pomemben del reševanja nalog iz ravnovesja navorov je izbira osi. **Izbira osi je** namreč **poljubna**, saj ravnovesje telesa ne more biti odvisno od tega. Pri večini nalog pa je izbira osi ključnega pomena za nadaljevanje.

Glede izbire osi nalogo z gugalnico rešimo na dva načina.

1.NAČIN

Na gugalnico delujejo tri sile, in sicer sili teže obeh otrok navzdol in sila podpore navzgor:



Izračunajmo velikosti sil teže obeh otrok:

$$F_{g1} = m_1 g = 65\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 637{,}7\,\mathrm{N}$$

in

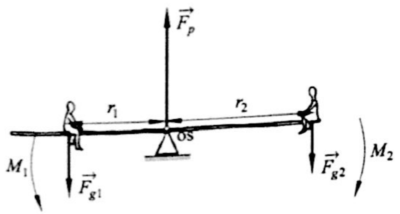
$$F_{g2} = m_2 g = 48\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 470{,}9\,\mathrm{N}$$

Velikost sile podpore je enaka vsoti velikosti sil teže (ravnovesje sil, saj gugalnica miruje):

$$F_p = F_{g1} + F_{g2} = 637{,}7\,\mathrm{N} + 470{,}9\,\mathrm{N} = 1\,109\,\mathrm{N}$$

Če je gugalnica v ravnovesju navorov, mora biti vsota vseh navorov enaka nič, torej mora biti vsota navorov, ki vrtijo v eno smer, enaka vsoti navorov, ki vrtijo v drugo smer.

Os izberimo v prijemališču sile podpore, torej v točki, kjer je gugalnica podprta. Glede na to os je navor sile podpore enak nič, ostaneta pa navora sil teže, ki vrtita vsak v svojo smer:



Tako mora biti navor sile teže Marka enak navoru sile teže Tamare:

$$M_1 = M_2$$

Z r_1 označimo oddaljenost Marka, z r_2 pa oddaljenost Tamare od izbrane osi (podpore). Dolžini ročic sta tako r_1 za silo F_{g1} in r_2 za silo F_{g2}. Ker sta obe sili pravokotni na ročici, navora M_1 in M_2 zapišimo v obliki $M = rF$:

$$r_1 F_{g1} = r_2 F_{g2}$$

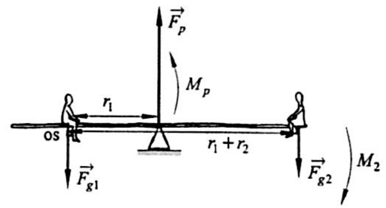
Iz enačbe izrazimo in izračunajmo r_2:

$$r_2 = \frac{r_1 F_{g1}}{F_{g2}} = \frac{1{,}3\,\mathrm{m} \cdot 637{,}7\,\mathrm{N}}{470{,}9\,\mathrm{N}} = 1{,}760\,\mathrm{m} = \underline{\underline{1{,}8\,\mathrm{m}}}$$

Tamara mora sedeti 1,8 m desno od podpore, da bo gugalnica v ravnovesju.

2.NAČIN

Postavimo sedaj os v prijemališče sile F_{g1}, torej na mesto, kjer sedi Marko. V tem primeru je navor sile F_{g1} enak nič. Ostaneta navora sile podpore in sile teže Tamare. Dolžina ročice sile podpore je r_1, dolžina ročice sile teže Tamare pa $r_1 + r_2$:



Navora sile podpore in sile teže Tamare morata biti enako velika, saj vrtita gugalnico vsak v svojo smer (glej sliko):

$$M_p = M_2$$

Sili sta pravokotni na ročici, zato zapišimo:

$$r_1 F_p = (r_1 + r_2) F_{g2}$$

V enačbi odpravimo oklepaj:

$$r_1 F_p = r_1 F_{g2} + r_2 F_{g2}$$

Člen $r_1 F_{g2}$ prenesimo preko enačaja ter izrazimo in izračunajmo r_2:

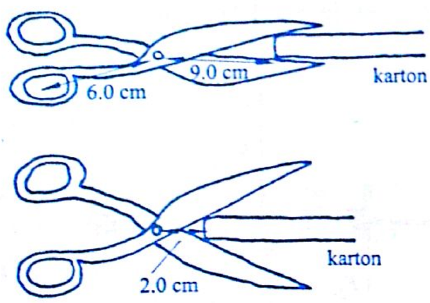
$$\begin{aligned} r_1 F_p - r_1 F_{g2} &= r_2 F_{g2} \\ r_2 &= \frac{r_1 F_p - r_1 F_{g2}}{F_{g2}} = \\ &= \frac{1{,}3\,\mathrm{m} \cdot 1\,109\,\mathrm{N} - 1{,}3\,\mathrm{m} \cdot 470{,}9\,\mathrm{N}}{470{,}9\,\mathrm{N}} = \\ &= 1{,}762\,\mathrm{m} = \underline{\underline{1{,}8\,\mathrm{m}}} \end{aligned}$$

Rezultat je seveda enak, saj ne sme biti odvisen od izbire osi. Prav tako bi os lahko izbrali v prijemališču sile F_{g2} ali kjerkoli drugje.

Pomembno:

Ponavadi os izberemo v prijemališču sile, ki je ne poznamo in je ne iščemo, saj je navor te sile nič in sila ne nastopa v enačbi. Natančneje pa bomo to 'pravilo' spoznali pri kasnejših nalogah.

2. S škarjami želimo rezati karton. Da karton prerežemo, ga mora rezilo stisniti vsaj s silo 18 N. S kolikšno silo moramo pritisniti na škarje, da bomo prerezali karton, če damo karton prvič čisto na konec rezil, 9,0 cm od osi, drugič pa karton pomaknemo bolj navznoter proti osi, 2,0 cm od osi? Razdalja od osi škarij do mesta, kjer pritisnemo, je 6,0 cm.



Podatki:

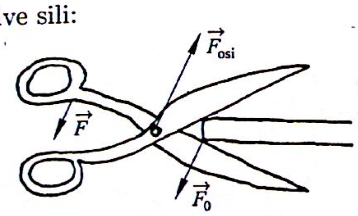
$F_0 = 18$ N

$r_1 = 9{,}0$ cm

$r_2 = 2{,}0$ cm

$r = 6{,}0$ cm

Narišimo škarje in sile, ki delujejo na zgornjo polovico. Prav tako bi lahko izbrali tudi spodnjo polovico, saj je enako. S prsti pritisnemo na škarje s silo F. Karton pritiska na škarje s silo, ki je nasprotno enaka sili, s katero škarje pritiskajo nanj (F_0). V osi škarij pa deluje sila druge polovice škarij, ki uravnovesi ti dve sili:



Predpostavimo, da sta sili F in F_0 pravokotni na škarje. Sila v osi škarij je tako tudi pravokotna na škarje, njena velikost pa je enaka vsoti velikosti sil F in F_0:

$$F_{osi} = F + F_0$$

Sile F_{osi} ne poznamo in je tudi ne iščemo, zato os za navor postavimo v prijemališče te sile, torej v os škarij. Navor sile F_{osi} glede na to os je nič, saj je dolžina ročice nič, tako da ostaneta le še navora sil F in F_0. Če hočemo prerezati karton, mora biti navor sile F vsaj tolikšen, kot navor sile F_0. Torej

$$M = M_0$$

Dolžini ročic za navora sta razdalji od osi škarij do prijemališč sil; torej r za silo F in r_1 ali r_2 za silo F_0. Predpostavili smo, da sta sili F in F_0 pravokotni na škarje in tako tudi na ročici, zato zapišimo njuna navora v obliki $M = rF$. Tako velja:

$$rF = r_1F_0 \qquad \text{(za prvi primer)}$$

in

$$rF = r_2F_0 \qquad \text{(za drugi primer)}$$

Iz enačb izrazimo in izračunajmo silo, s katero moramo pritisniti na škarje, da prerežemo karton.

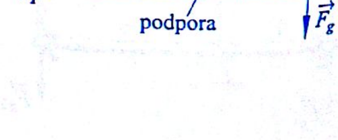
Ko je karton 9,0 cm od osi:

$$F = \frac{r_1F_0}{r} = \frac{9{,}0\,\text{cm}\cdot 18\,\text{N}}{6{,}0\,\text{cm}} = \underline{27\,\text{N}}$$

Ko je karton 2,0 cm od osi:

$$F = \frac{r_2F_0}{r} = \frac{2{,}0\,\text{cm}\cdot 18\,\text{N}}{6{,}0\,\text{cm}} = 6\,\text{N} = \underline{\underline{6{,}0\,\text{N}}}$$

3. 1,6 m dolgo lahko leseno palico želimo uporabiti za vzvod, s katerim bomo dvignili breme z maso 180 kg. Na kateri razdalji od bremena moramo palico podpreti, če lahko na drugi strani palice pritisnemo največ s silo 800 N? Predpostavi, da sta sila bremena in sila, s katero pritiskamo, pravokotni na vzvod.



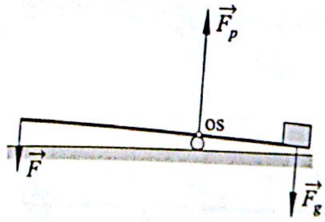
Podatki:

$d = 1{,}6$ m

$m = 180$ kg

$F = 800$ N

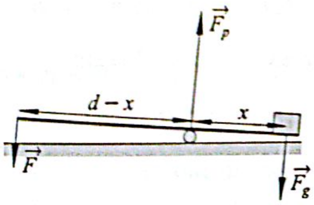
Na palico (vzvod) delujejo: sila teže bremena F_g, sila, s katero pritiskamo F, in sila podpore F_p. Sile F_p ne iščemo, zato v njeno prijemališče postavimo os navorov:



Navor sile podpore je tako nič, navora sil F_g in F pa sta enaka:

$$M_g = M$$

Dolžina ročice za navor sile F_g je razdalja od bremena do podpore. Označimo jo z x. Dolžina ročice sile F pa je razdalja od prijemališča sile F do podpore, torej preostanek dolžine palice $(d - x)$. Velikost bremena zanemarimo in vzamemo, kot da sila bremena prijemlje na koncu:



Predpostavili smo, da sta sili pravokotni na palico in s tem na ročici, zato zapišimo:

$$xF_g = (d - x)F$$

V enačbo vstavimo izraz za velikost sile teže $F_g = mg$:

$$xmg = (d - x)F$$

Na desni strani se znebimo oklepaja:

$$xmg = dF - xF$$

Člen xF prenesimo preko enačaja, da bomo na levi strani lahko izpostavili x:

$$\begin{aligned} xmg + xF &= dF \\ x(mg + F) &= dF \end{aligned}$$

Od tod je razdalja od bremena do podpore:

$$\begin{aligned} x &= \frac{dF}{mg + F} = \frac{1{,}6\,\text{m} \cdot 800\,\text{N}}{180\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 800\,\text{N}} = \\ &= 0{,}4989\,\text{m} = \underline{\underline{0{,}50\,\text{m}}} \end{aligned}$$

4. Na gugalnici sedita dva dečka. Prvi, z maso 45 kg, sedi 1,6 m od podpore, drugi, z maso 38 kg, pa na drugi strani 2,2 m od podpore. Pridruži se jima deklica z maso 31 kg. Kako daleč od podpore in na katero stran se mora usesti deklica, da bo gugalnica v ravnovesju?

Podatki:

$m_1 = 45$ kg

$r_1 = 1{,}6$ m

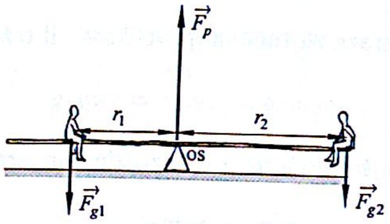
$m_2 = 38$ kg

$r_2 = 2{,}2$ m

$m_3 = 31$ kg

1.NAČIN

Najprej na gugalnici sedita dečka. Na gugalnico v tem primeru delujejo tri sile: sili teže obeh dečkov ter sila podpore. Os navorov izberimo v sili podpore in izračunajmo navora, s katerima sili teže dečkov delujeta na gugalnico:



Dolžini ročic sta kar oddaljenosti dečkov od podpore (r_1 in r_2). Sili sta pravokotni na ročici. Navor težjega dečka izračunajmo z enačbo:

$$M_1 = r_1 F_{g1}$$

Ker je $F_{g1} = m_1 g$, je navor težjega dečka glede na os v podpori:

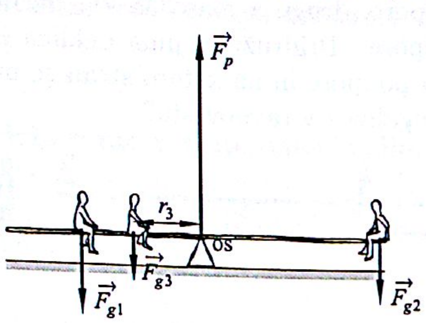
$$M_1 = r_1 m_1 g = 1{,}6\,\text{m} \cdot 45\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 706{,}3\,\text{Nm}$$

Podobno je navor lažjega dečka:

$$M_2 = r_2 m_2 g = 2{,}2\,\text{m} \cdot 38\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 820{,}1\,\text{Nm}$$

Navor lažjega dečka je večji in gugalnica bi se zasukala v njegovo smer. Deklica se mora torej usesti na stran težjega dečka.

Z r_3 označimo razdaljo od podpore do mesta, kamor se usede deklica:



Na gugalnico sedaj delujejo štiri sile. Poleg sil, ki so že prej delovale nanjo, sedaj na gugalnico deluje še sila teže deklice. Glede na os v podpori delujejo na gugalnico trije navori, saj je navor sile podpore nič. Navora sil teže deklice in težjega dečka vrtita gugalnico v eno smer, navor sile teže lažjega dečka pa v drugo smer. Če je gugalnica v ravnovesju, velja:

$$M_1 + M_3 = M_2$$

Če so sile in ročice pravokotne, v enačbo vstavimo izraze za računanje navorov $M = rF$:

$$r_1 F_{g1} + r_3 F_{g3} = r_2 F_{g2}$$

Vstavimo še izraze za računanje velikosti sil teže $F_g = mg$:

$$r_1 m_1 g + r_3 m_3 g = r_2 m_2 g$$

V enačbi okrajšajmo g in iz nje izrazimo in izračunajmo r_3:

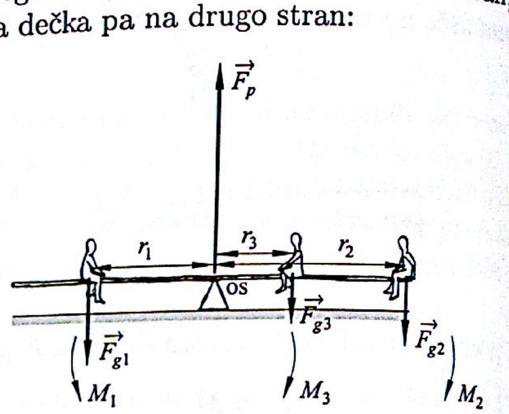
$$\begin{aligned} r_3 m_3 &= r_2 m_2 - r_1 m_1 \\ r_3 &= \frac{r_2 m_2 - r_1 m_1}{m_3} = \\ &= \frac{2{,}2\,\mathrm{m} \cdot 38\,\mathrm{kg} - 1{,}6\,\mathrm{m} \cdot 45\,\mathrm{kg}}{31\,\mathrm{kg}} = \\ &= 0{,}3742\,\mathrm{m} = \underline{\underline{0{,}37\,\mathrm{m}}} \end{aligned}$$

Deklica se mora vsesti 0,37 m od podpore na stran težjega dečka.

2.NAČIN

Pri prvem načinu nam kar nekaj časa vzame ugotavljanje, na katero stran se deklica usede, preden zapišemo enačbo za ravnovesje navorov. Nalogo pa lahko rešimo tudi hitreje. Deklico enostavno posedemo na eno stran, ni važno katero.

Recimo, da deklica sedi na strani lažjega dečka. Os naj bo še vedno v prijemališču sile podpore. Glede na to os navora sil teže lažjega dečka in deklice vrtita na eno stran, navo teže težjega dečka pa na drugo stran:



Enačba za ravnovesje navorov se tako glasi:

$$M_1 = M_2 + M_3$$

Enako kot pri prvem načinu zapišimo navore:

$$r_1 F_{g1} = r_2 F_{g2} + r_3 F_{g3}$$

Upoštevajmo izraz za velikost sil teže:

$$r_1 m_1 g = r_2 m_2 g + r_3 m_3 g$$

Okrajšajmo g in izračunajmo r_3:

$$\begin{aligned} r_1 m_1 &= r_2 m_2 + r_3 m_3 \\ r_1 m_1 - r_2 m_2 &= r_3 m_3 \\ r_3 &= \frac{r_1 m_1 - r_2 m_2}{m_3} = \\ &= \frac{1{,}6\,\mathrm{m} \cdot 45\,\mathrm{kg} - 2{,}2\,\mathrm{m} \cdot 38\,\mathrm{kg}}{31\,\mathrm{kg}} = \\ &= -0{,}3742\,\mathrm{m} = \underline{\underline{-0{,}37\,\mathrm{m}}} \end{aligned}$$

Rezultat je negativen, kar pomeni, da smo deklico posedli na napačno stran. Deklica se mora usesti na stran težjega dečka in sicer 0,37 m od podpore.

5. Lahka palica dolžine 1,8 m visi na dveh navpičnih vrvicah, ki sta pritrjeni na koncih palice. Palica je vodoravna. Vsaka vrvica prenese največ silo 24 N. Kolikšno utež lahko postavimo na palico 0,34 m od njenega konca, da se vrvici ne strgata?

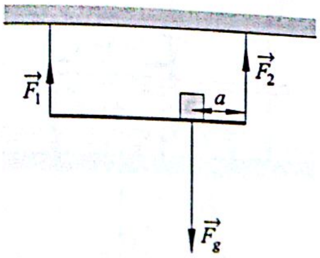
Podatki:

$d = 1{,}8$ m

$F = 24$ N

$a = 0{,}34$ m

Narišimo sile, ki delujejo na palico. Sila teže uteži je usmerjena navzdol, sili vrvic pa držita palico navzgor:



Ravnovesje sil se torej glasi:

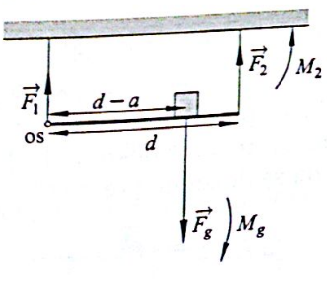
$$F_g = F_1 + F_2$$

Ni težko ugotoviti, da je bolj obremenjena vrvica, ki je bližje uteži. Ta vrvica se bo tudi prva pretrgala, zato nas sila v drugi vrvici ne zanima in os za navore postavimo v njeno prijemališče. Glede na to os navor sile teže uteži vrti v smeri urinega kazalca, navor sile bližnje vrvice pa v nasprotni smeri urinega kazalca.

Navor vrvice mora uravnovesiti navor sile teže uteži:

$$M_2 = M_g$$

Dolžina ročice sile vrvice je enaka dolžini palice (d), dolžina ročice sile teže uteži pa je dolžina palice skrajšana za razdaljo od vrvice do uteži ($d - a$):



Sili sta pravokotni na ročici, zato velja:

$$dF_2 = (d-a)F_g$$

Upoštevajmo, da je $F_g = mg$:

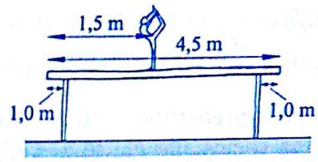
$$dF_2 = (d-a)mg$$

Od tod pa je masa uteži, ki jo ravno še lahko postavimo na palico:

$$m = \frac{dF_2}{(d-a)g} = \frac{1{,}8\,\mathrm{m}\cdot 24\,\mathrm{N}}{(1{,}8\,\mathrm{m} - 0{,}34\,\mathrm{m})\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} =$$

$$= 3{,}016\,\mathrm{kg} = \underline{\underline{3{,}0\,\mathrm{kg}}}$$

6. Orodna telovadka se sprehaja po gredi. Kolikšni sta sili v podporah grede, ko je telovadka 1,5 m oddaljena od konca gredi? Gred je dolga 4,5 m, podpori pa sta od krajišč oddaljeni 1,0 m. Masa gredi je 50 kg, masa telovadke pa 40 kg. Podpori sta navpični.



Podatki:

$a = 1{,}5$ m

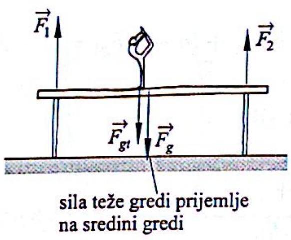
$l = 4{,}5$ m

$b = 1{,}0$ m

$m = 50$ kg

$m_t = 40$ kg

Narišimo gred in sile, ki delujejo nanjo. Sila teže gredi F_g in sila teže telovadke F_{gt} delujeta navzdol, sili podpore F_1 in F_2 pa navzgor:



Za gred velja ravnovesje sil:

$$F_g + F_{gt} = F_1 + F_2$$

Izračunajmo velikosti sil F_g in F_{gt}:

$$F_g = mg = 50\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 490{,}5\,\mathrm{N}$$

in

$$F_{gt} = m_t g = 40\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 392{,}4\,\mathrm{N}$$

Velikost vsote sil F_1 in F_2 je torej:

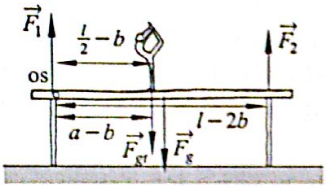
$$490{,}5\,\mathrm{N} + 392{,}4\,\mathrm{N} = 882{,}9\,\mathrm{N}$$

To pa je tudi vse, kar lahko izračunamo z enačbo za ravnovesje sil. Da bomo izračunali posamezni velikosti sil F_1 in F_2, zapišimo še enačbo za ravnovesje navorov.

Os za navore postavimo v prijemališče sile F_1, čeprav je ena od iskanih sil. Navor sile F_1 je tako enak nič in v enačbi za ravnovesje navorov ostane edina neznanka velikost sile F_2. Glede na izbrano os vrtita navora sil F_g in F_{gt} v smeri urinega kazalca, navor sile F_2 pa v nasprotni smeri urinega kazalca. Tako je:

$$M_g + M_{gt} = M_2$$

Dolžine ročic navorov preberimo s skice. Dolžina ročice sile F_g je $\frac{l}{2} - b$, dolžina ročica sile F_{gt} je $a - b$ in dolžina ročice sile F_2 je $l - 2b$:



Vse sile so pravokotne na ročice, zato zapišimo:

$$\left(\frac{l}{2} - b\right)F_g + (a - b)F_{gt} = (l - 2b)F_2$$

Od tod je velikost sile F_2:

$$F_2 = \frac{\left(\frac{l}{2} - b\right)F_g + (a - b)F_{gt}}{l - 2b} =$$

$$= \frac{\left(\frac{4{,}5\,\mathrm{m}}{2} - 1{,}0\,\mathrm{m}\right) \cdot 490{,}5\,\mathrm{N} + (1{,}5\,\mathrm{m} - 1{,}0\,\mathrm{m}) \cdot 392{,}4\,\mathrm{N}}{4{,}5\,\mathrm{m} - 2 \cdot 1{,}0\,\mathrm{m}} =$$

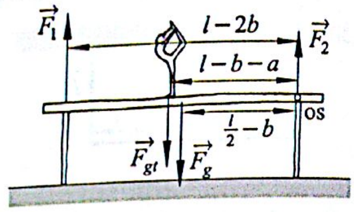
$$= \frac{1{,}25\,\mathrm{m} \cdot 490{,}5\,\mathrm{N} + 0{,}5\,\mathrm{m} \cdot 392{,}4\,\mathrm{N}}{2{,}5\,\mathrm{m}} =$$

$$= 323{,}7\,\mathrm{N} = \underline{\underline{320\,\mathrm{N}}}$$

Za izračun velikosti sile F_1 imamo dve možnosti. Podobno kot velikost sile F_2 jo izračunamo, če postavimo os v prijemališče sile F_2. Takrat je navor sile F_2 enak nič, ostaneta pa navora sil F_g in F_{gt}, ki vrtita v eno smer, in navor sile F_1, ki vrti v drugo smer:

$$M_g + M_{gt} = M_1$$

Dolžine ročic za ta primer spet dobimo s pomočjo skice. Dolžina ročice sile F_g je $\frac{l}{2} - b$, dolžina ročice sile F_{gt} je $l - b - a$ in dolžina ročice sile F_1 je $l - 2b$:



Sledi:

$$\left(\frac{l}{2} - b\right)F_g + (l - b - a)F_{gt} = (l - 2b)F_1$$

Od tod je velikost sile F_1:

$$F_1 = \frac{\left(\frac{l}{2} - b\right)F_g + (l - b - a)F_{gt}}{l - 2b} =$$

$$= \frac{1{,}25\,\mathrm{m} \cdot 490{,}5\,\mathrm{N} + 2{,}0\,\mathrm{m} \cdot 392{,}4\,\mathrm{N}}{2{,}5\,\mathrm{m}} =$$

$$= 559{,}2\,\mathrm{N} = \underline{\underline{560\,\mathrm{N}}}$$

Velikost sile F_1 pa izračunamo precej hitreje, če upoštevamo enačbo za ravnovesje sil:

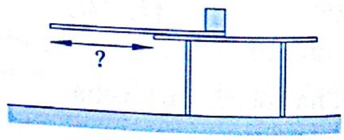
$$F_g + F_{gt} = F_1 + F_2$$

$$F_1 = F_g + F_{gt} - F_2 =$$

$$= 490{,}5\,\mathrm{N} + 392{,}4\,\mathrm{N} - 323{,}7\,\mathrm{N} =$$

$$= 559{,}2\,\mathrm{N} = \underline{\underline{560\,\mathrm{N}}}$$

7. Na konec 2,5 m dolge deske z maso 8,7 kg položimo opeko z maso 3,0 kg. Desko položimo na rob mize tako, da konec brez opeke moli preko roba. Koliko deske lahko največ moli preko roba mize, da se deska ne prevrne?



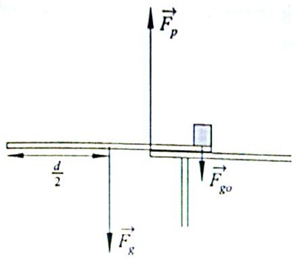
Podatki:

$d = 2{,}5$ m

$m = 8{,}7$ kg

$m_o = 3{,}0$ kg

Narišimo sile na desko v trenutku, ko se ta začne prevračati preko roba. V tem trenutku je rob mize edina točka, v kateri je deska podprta, in sila podlage prijemlje v tej točki. Sila teže deske prijemlje na sredini deske, sila teže opeke pa na koncu deske, če zanemarimo velikost opeke:

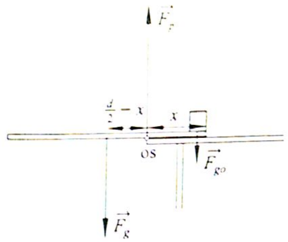


Os navorov izberimo v prijemališču sile podlage, saj je ne iščemo. Glede na to os delujeta na desko dva navora. Navor sile teže deske suče desko v eno smer, navor sile teže opeke pa v drugo smer.

Ker mora deska ostati na mizi, mora biti navor sile teže opeke vsaj enak navoru sile teže deske:

$$M_o = M$$

Na skici z x označimo dolžino dela deske, ki leži na mizi. To je hkrati dolžina ročice sile F_{go} glede na izbrano os. Dolžina ročice sile F_g je tako $(\frac{d}{2} - x)$:



Ker sta sili pravokotni na ročici, zapišimo:

$$xF_{go} = \left(\frac{d}{2} - x\right)F_g$$

V enačbo vstavimo $F_{go} = m_o g$ in $F_g = mg$:

$$xm_o g = \left(\frac{d}{2} - x\right)mg$$

Okrajšajmo g in se na desni znebimo oklepaja:

$$xm_o = \frac{md}{2} - mx$$

Da bomo lahko izpostavili x, prenesimo člen mx na levo stran enačbe:

$$xm_o + mx = \frac{md}{2}$$

$$x(m_o + m) = \frac{md}{2}$$

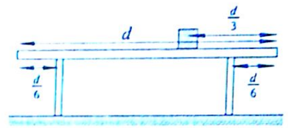
Od tod pa izrazimo in izračunajmo x, to je del deske, ki leži na mizi:

$$x = \frac{\frac{md}{2}}{m_o + m} = \frac{\frac{8{,}7\,\mathrm{kg} \cdot 2{,}5\,\mathrm{m}}{2}}{3{,}0\,\mathrm{kg} + 8{,}7\,\mathrm{kg}} = 0{,}9295\,\mathrm{m}$$

Največja dolžina deske, ki lahko moli preko roba, je tako:

$$d - x = 2{,}5\,\mathrm{m} - 0{,}9295\,\mathrm{m} = 1{,}571\,\mathrm{m} = \underline{\underline{1{,}6\,\mathrm{m}}}$$

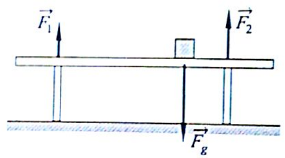
8. Na vodoravnem lesenem podstavku, ki ima dve navpični nogi, je postavljena opeka, kot kaže slika. Kolikšni sta sili na nogi, če ima opeka maso 8,5 kg? Maso podstavka zanemari.



Podatki:

$m = 8{,}5$ kg

Na podstavek delujejo: sila teže opeke F_g in sili nog F_1 in F_2:



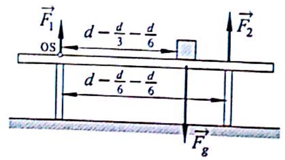
Zapišimo ravnovesje sil za podstavek:

$$F_g = F_1 + F_2$$

Os za navore izberimo v prijemališču ene izmed sil nog, recimo sile F_1. Glede na to os delujeta na postavek dva navora: navor sile teže opeke in navor druge noge. Navora sta nasprotno enaka:

$$M_g = M_2$$

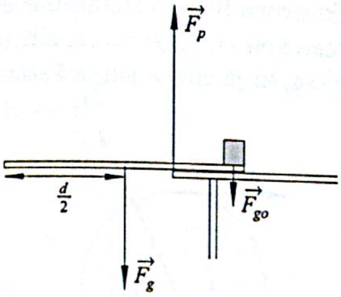
Dolžini ročic izračunajmo s pomočjo skice. Dolžina ročice sile teže opeke je dolžina podstavka zmanjšana za $\frac{d}{3}$ in $\frac{d}{6}$:



Tako je:

$$r = d - \frac{d}{3} - \frac{d}{6} = \frac{6d - 2d - d}{6} = \frac{3d}{6} = \frac{d}{2}$$

koncu deske, če zanemarimo velikost opeke:

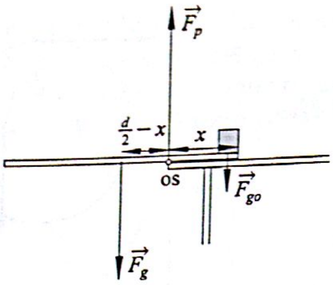


Os navorov izberimo v prijemališču sile podlage, saj je ne iščemo. Glede na to os delujeta na desko dva navora. Navor sile teže deske suče desko v eno smer, navor sile teže opeke pa v drugo smer.

Ker mora deska ostati na mizi, mora biti navor sile teže opeke vsaj enak navoru sile teže deske:

$$M_o = M$$

Na skici z x označimo dolžino dela deske, ki leži na mizi. To je hkrati dolžina ročice sile F_{go} glede na izbrano os. Dolžina ročice sile F_g je tako $(\frac{d}{2} - x)$:



Ker sta sili pravokotni na ročici, zapišimo:

$$xF_{go} = \left(\frac{d}{2} - x\right)F_g$$

V enačbo vstavimo $F_{go} = m_o g$ in $F_g = mg$:

$$xm_o g = \left(\frac{d}{2} - x\right)mg$$

Okrajšajmo g in se na desni znebimo oklepaja:

$$xm_o = \frac{md}{2} - mx$$

Da bomo lahko izpostavili x, prenesimo člen mx na levo stran enačbe:

$$xm_o + mx = \frac{md}{2}$$

$$x(m_o + m) = \frac{md}{2}$$

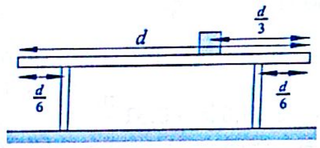
Od tod pa izrazimo in izračunajmo x, to je del deske, ki leži na mizi:

$$x = \frac{\frac{md}{2}}{m_o + m} = \frac{\frac{8{,}7\,\text{kg} \cdot 2{,}5\,\text{m}}{2}}{3{,}0\,\text{kg} + 8{,}7\,\text{kg}} = 0{,}9295\,\text{m}$$

Največja dolžina deske, ki lahko moli preko roba, je tako:

$$d - x = 2{,}5\,\text{m} - 0{,}9295\,\text{m} = 1{,}571\,\text{m} = \underline{\underline{1{,}6\,\text{m}}}$$

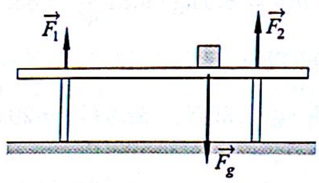
8. Na vodoravnem lesenem podstavku, ki ima dve navpični nogi, je postavljena opeka, kot kaže slika. Kolikšni sta sili na nogi, če ima opeka maso 8,5 kg? Maso podstavka zanemari.



Podatki:

$m = 8{,}5$ kg

Na podstavek delujejo: sila teže opeke F_g in sili nog F_1 in F_2:



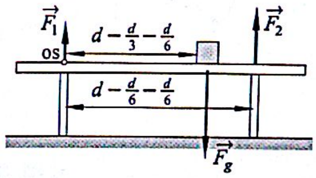
Zapišimo ravnovesje sil za podstavek:

$$F_g = F_1 + F_2$$

Os za navore izberimo v prijemališču ene izmed sil nog, recimo sile F_1. Glede na to os delujeta na postavek dva navora: navor sile teže opeke in navor druge noge. Navora sta nasprotno enaka:

$$M_g = M_2$$

Dolžini ročic izračunajmo s pomočjo skice. Dolžina ročice sile teže opeke je dolžina podstavka zmanjšana za $\frac{d}{3}$ in $\frac{d}{6}$:



Tako je:

$$r = d - \frac{d}{3} - \frac{d}{6} = \frac{6d - 2d - d}{6} = \frac{3d}{6} = \frac{d}{2}$$

Da dobimo dolžino ročice sile F_2 pa od dolžine podstavka odštejmo dvakrat po $\frac{d}{6}$:

$$r_2 = d - \frac{d}{6} - \frac{d}{6} = \frac{6d - d - d}{6} = \frac{4d}{6} = \frac{2d}{3}$$

Sili sta pravokotni na ročici, zato zapišimo navora v obliki $M = rF$:

$$\frac{d}{2}F_g = \frac{2d}{3}F_2$$

Okrajšajmo d in izrazimo F_2:

$$F_2 = \frac{\frac{1}{2}F_g}{\frac{2}{3}} = \frac{3F_g}{4}$$

Upoštevajmo, da je $F_g = mg$, in izračunajmo velikost sile F_2:

$$F_2 = \frac{3mg}{4} = \frac{3 \cdot 8{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{4} = 62{,}54\,\mathrm{N} = \underline{\underline{63\,\mathrm{N}}}$$

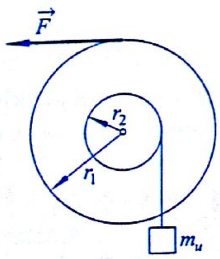
Velikost sile F_1 pa najhitreje izračunamo iz ravnovesja sil, ki smo ga že zapisali ($F_g = F_1 + F_2$). Velikost sile teže je:

$$F_g = mg = 8{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 83{,}39\,\mathrm{N}$$

Tako je velikost sile F_1:

$$F_1 = F_g - F_2 = 83{,}39\,\mathrm{N} - 62{,}54\,\mathrm{N} = 20{,}85\,\mathrm{N} = \underline{\underline{21\,\mathrm{N}}}$$

9. Kolo s polmerom 0,87 m pritrdimo na vodoravno os. Na isto os pritrdimo še manjše kolo s polmerom 0,14 m. Na obe kolesi navijemo vrv. Na vrv manjšega kolesa obesimo utež z maso 13 kg. S kolikšno silo moramo vleči vrv večjega kolesa, če naj utež miruje, se spušča ali dviga enakomerno?



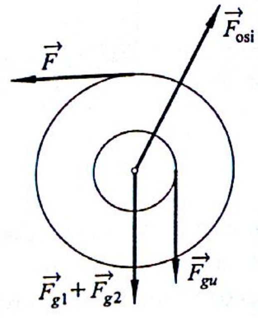
Podatki:

$m_u = 13$ kg

$r_1 = 0{,}87$ m

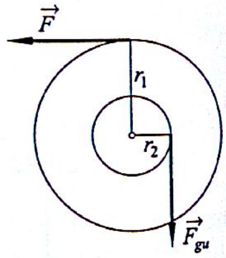
$r_2 = 0{,}14$ m

Kolesi obravnavamo skupaj kot sistem. Nanju delujejo sili teže obeh koles, ki prijemljeta v središču (osi) koles, sila osi, sila vrvice manjšega kolesa, ki je enaka sili teže uteži, in sila vrvice večjega kolesa, ki je enaka sili, s katero vlečemo:



Os za navore izberimo v osi koles. Navora sil teže koles sta tako enaka nič, prav tako pa tudi navor sile osi. Glede na izbrano os na kolesi delujeta navor sile vrvice manjšega kolesa F_1 in navor sile vrvice večjega kolesa F_2. **Ne glede na to ali utež miruje ali pa se enakomerno spušča ali dviga, je vsota navorov na kolesih enaka nič**, kar pomeni, da sta navora enaka:

$$M = M_{gu}$$



Dolžini ročic za navora sta kar polmera koles r_1 in r_2. Sili sta pravokotni na ročici (polmera), zato velja:

$$r_1 F = r_2 F_{gu}$$

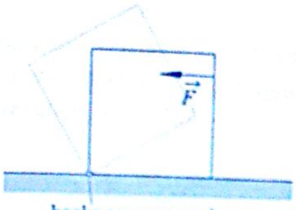
Velikost sile teže uteži izrazimo z enačbo $F_{gu} = m_u g$ in postavimo v enačbo:

$$r_1 F = r_2 m_u g$$

Od tod je sila, s katero vlečemo vrv večjega kolesa:

$$F = \frac{r_2 m_u g}{r_1} = \frac{0{,}14\,\mathrm{m} \cdot 13\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{0{,}87\,\mathrm{m}} = 20{,}52\,\mathrm{N} = \underline{\underline{21\,\mathrm{N}}}$$

△10. Lesena kocka s stranico 18 cm leži na vodoravnih tleh. S kolikšno silo jo moramo potisniti v vodoravni smeri, da se kocka začne vrteti okoli nasprotne stranice? Predpostavimo, da kocka ne zdrsne. Masa kocke je 3,2 kg, potiskamo pa jo na višini 13 cm glede na tla.



kocka se prevrne okrog te osi

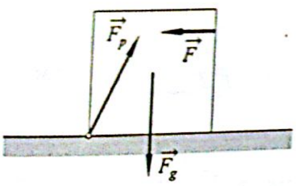
Podatki:

$a = 18$ cm

$m = 3{,}2$ kg

$h = 13$ cm

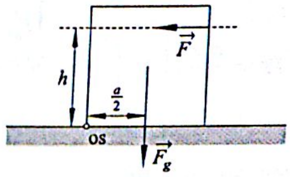
Na skici narišimo sile, ki delujejo na kocko v trenutku, ko se ta začne prevračati. Sila teže prijemlje v težišču (središču) kocke in je usmerjena navzdol. Sila, s katero potiskamo, je vodoravna. Sila podlage pa deluje v točki, v kateri se kocka še dotika tal. Usmerjena je poševno navzgor, saj mora uravnovesiti silo teže in silo, s katero potiskamo:



Navajeni smo že, da os postavimo v prijemališče sile, ki je ne iščemo. V tem primeru je to sila podlage. Glede na os v tej točki delujeta na kocko navor sile teže F_g in navor sile F, s katero potiskamo. Navor sile F mora biti vsaj enak navoru sile F_g, če naj se kocka začne prevračati:

$$M = M_g$$

Sili F in F_g nista pravokotni na svoji ročici, tako da navor računamo z enačbo $M = rF_\perp$, kjer je $F_\perp$ velikost pravokotne komponente sile na ročico ali $M = r_\perp F$, kjer je $r_\perp$ dolžina pravokotne komponente ročice na silo. V tej nalogi je neprimerno lažje računati z enačbo $M = r_\perp F$ (glej 6. nalogo v prejšnjem poglavju), saj dolžini pravokotnih ročic za sili F in F_g kar preberemo iz skice. Dolžina pravokotne ročice sile F je kar h, sile F_g pa $\frac{a}{2}$:



Tako dobimo enačbo:

$$hF = \frac{a}{2}F_g$$

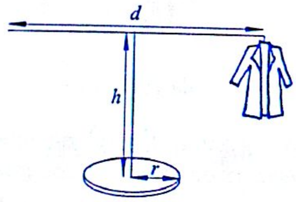
V enačbo vstavimo $F_g = mg$ in izračunajmo velikost sile F:

$$hF = \frac{a}{2}mg$$

$$F = \frac{\frac{a}{2}mg}{h} = \frac{\frac{18\,\text{cm}}{2} \cdot 3{,}2\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{13\,\text{cm}} =$$

$$= 21{,}73\,\text{N} = \underline{\underline{22\,\text{N}}}$$

△11. Stojalo za obleke je narejeno iz okroglega podstavka s polmerom 23 cm in maso 5,0 kg ter lahkega nosilca v obliki črke T z višino 1,5 m in vodoravno prečko dolgo 80 cm. Največ kolikšno maso ima lahko obleka, ki jo obesimo na enega od koncev vodoravne prečke?



Podatki:

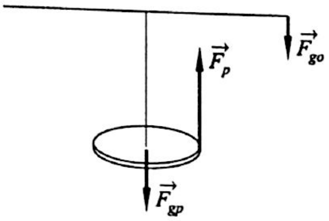
$r = 23\,\text{cm} = 0{,}23$ m

$m_p = 5{,}0$ kg

$h = 1{,}5$ m

$d = 80\,\text{cm} = 0{,}80$ m

Na stojalo delujejo: sila teže podstavka F_{gp}, sila teže obleke F_{go} ter sila podlage F_p, ki prijemlje v točki, okoli katere se stojalo začne obračati, če opisujemo trenutek, ko se stojalo začne podirati:



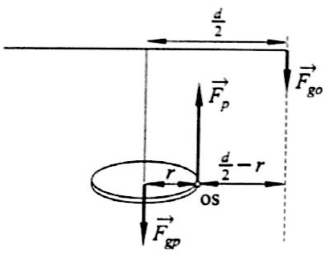
Os za navore postavimo v prijemališče sile F_p, ki nas ne zanima. Na stojalo tako delujeta dva nasprotna navora: navor sile F_{gp} in navor sile F_{go}. Navor sile F_{gp} mora vsaj uravnovesiti navor sile F_{go}, da se stojalo ne podre:

$$M_{gp} = M_{go}$$

Ročica za navor sile F_{gp} je kar polmer podstavka in je pravokotna na silo F_{gp}, tako da navor sile F_{gp} lahko zapišemo kot:

$$M_{gp} = rF_{gp}$$

Navor sile F_{go} pa najlažje izrazimo na način $M = r_{\perp}F_{go}$, saj je dolžina pravokotne komponente ročice na silo kar $\frac{d}{2} - r$:



Navor sile F_{go} je torej:

$$M_{go} = \left(\frac{d}{2} - r\right)F_{go}$$

Izraza za velikosti navorov vstavimo v enačbo $M_{gp} = M_{go}$:

$$rF_{gp} = \left(\frac{d}{2} - r\right)F_{go}$$

Upoštevajmo še, da je $F_{gp} = m_p g$ in $F_{go} = m_o g$, in dobimo:

$$rm_p g = \left(\frac{d}{2} - r\right)m_o g$$

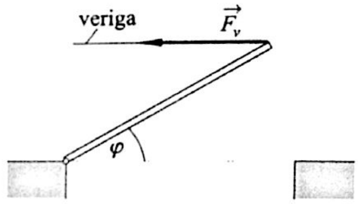
V enačbi okrajšajmo g in izračunajmo največjo dovoljeno maso obleke na stojalu:

$$rm_p = \left(\frac{d}{2} - r\right)m_o$$

$$m_o = \frac{rm_p}{\frac{d}{2} - r} = \frac{0{,}23\,\text{m} \cdot 5{,}0\,\text{kg}}{\frac{0{,}80\,\text{m}}{2} - 0{,}23\,\text{m}} =$$

$$= 6{,}765\,\text{kg} = \underline{\underline{6{,}8\,\text{kg}}}$$

△ 12. Dvižni most dvigujejo z verigo, kot kaže slika. S kolikšno silo je napeta veriga, ko most z vodoravnico oklepa kot 30°? Most ima maso 2 500 kg. Veriga je vodoravna.

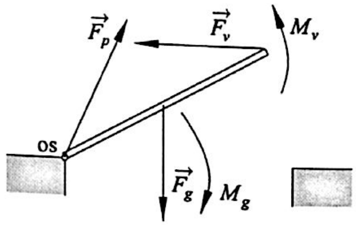


Podatki:

$\varphi = 30°$

$m = 2\,500$ kg

Na most delujejo: sila teže mostu F_g, sila verige F_v in sila podlage F_p. Sile podlage ne poznamo in nas tudi ne zanima, zato os postavimo v njeno prijemališče. Glede na tako izbrano os navor sile teže vrti most v eno smer, navor sile verige pa v drugo:



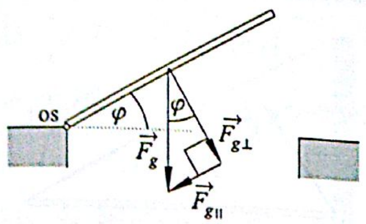
Če most miruje ali se enakomerno dviga ali spušča (vrti v eno ali drugo smer), je vsota navorov nanj enaka nič, kar pomeni, da sta navora enaka:

$$M_g = M_v$$

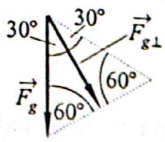
Sila teže prijemlje na polovici mostu, zato je dolžina njene ročice enaka polovici dolžine mostu:

$$r_g = \frac{d}{2}$$

Na skici razstavimo silo teže na vzporedno in pravokotno komponento:



Trikotnik sile teže dopolnimo do enakostraničnega trikotnika. Velikost pravokotne komponente sile teže predstavlja višino v tem trikotniku:



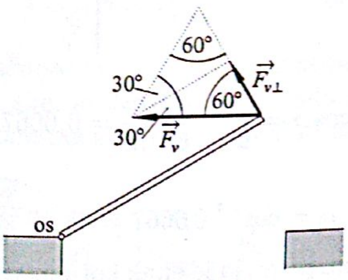
Tako dobimo:

$$F_{g\perp} = \frac{F_g\sqrt{3}}{2}$$

Sila verige prijemlje na koncu mostu, zato je dolžina njene ročice glede na izbrano os kar enaka dolžini mostu:

$$r_v = d$$

Tudi silo verige razstavimo na vzporedno in pravokotno komponento glede na most. Trikotnik dopolnimo do enakostraničnega trikotnika:



Vidimo, da je:

$$F_{v\perp} = \frac{F_v}{2}$$

Sedaj zapišimo ravnovesje navorov ($M_g = M_v$) s pomočjo dobljenih dolžin ročic in velikosti pravokotnih komponent sil:

$$r_g F_{g\perp} = r_v F_{v\perp}$$

$$\frac{d}{2} F_g \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{dF_v}{2}$$

V enačbi okrajšajmo $\frac{d}{2}$:

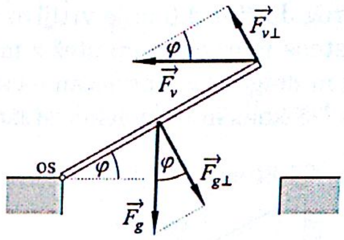
$$\frac{F_g\sqrt{3}}{2} = F_v$$

Upoštevajmo, da je $F_g = mg$, in izračunajmo velikost sile, s katero je napeta veriga:

$$F_v = mg\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\,500\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\frac{\sqrt{3}}{2} = 21\,240\,\mathrm{N} = \underline{\underline{21\,\mathrm{kN}}}$$

Dodatek

Pravokotni komponenti sile teže in sile verige na most zapišimo s kotnimi funkcijami.



V trikotniku sile teže zapišimo kosinus kota φ:

$$\cos\varphi = \frac{F_{g\perp}}{F_g}$$

Od tod je:

$$F_{g\perp} = F_g \cos\varphi$$

V trikotniku sile verige pa zapišimo sinus kota φ:

$$\sin\varphi = \frac{F_{v\perp}}{F_v}$$

Tako je:

$$F_{v\perp} = F_v \sin\varphi$$

Zapišimo ravnovesje navorov s pomočjo že prej dobljenih dolžin ročic in sedaj izraženih velikosti pravokotnih komponent sil:

$$\frac{d}{2} F_g \cos\varphi = dF_v \sin\varphi$$

V enačbi okrajšajmo d:

$$\frac{1}{2} F_g \cos\varphi = F_v \sin\varphi$$

Izrazimo silo, s katero je napeta veriga:

$$F_v = \frac{\frac{1}{2} F_g \cos\varphi}{\sin\varphi}$$

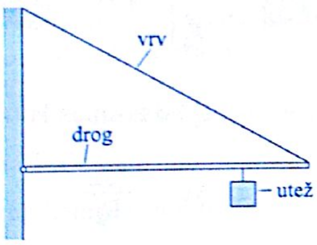
Upoštevajmo še, da je $F_g = mg$, in izračunajmo velikost F_v:

$$F_v = \frac{\frac{1}{2}mg\cos\varphi}{\sin\varphi} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot 2\,500\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cos 30°}{\sin 30°} =$$

$$= 2\,1240\,\mathrm{N} = \underline{\underline{21\,\mathrm{kN}}}$$

△13. Vodoraven drog dolžine 4,0 m je vrtljivo vpet v navpično steno. 3,0 m od stene nanj obesimo utež z maso 50 kg. Drog je na koncu s 6,0 m dolgo vrvjo privezan na steno. S kolikšno silo je napeta vrv? S kolikšno silo deluje stena na drog? Maso droga zanemari.



Podatki:

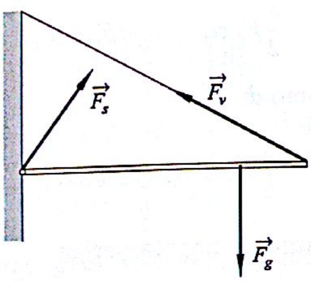
$l = 4{,}0$ m

$b = 3{,}0$ m

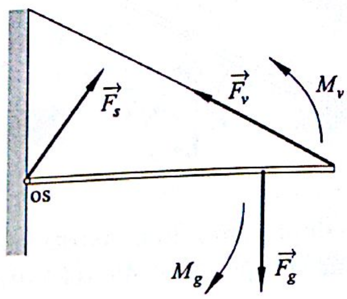
$m = 50$ kg

$a = 6{,}0$ m

Narišimo sile, ki delujejo na drog. Sila vrvi prijemlje na koncu droga in deluje v smeri vrvi. Sila teže uteži prijemlje 3,0 m od stene in je usmerjena navzdol. Sila stene pa prijemlje na mestu, kjer je drog vpet v steno in je usmerjena poševno navzgor, saj mora uravnovesiti silo teže in silo vrvi:



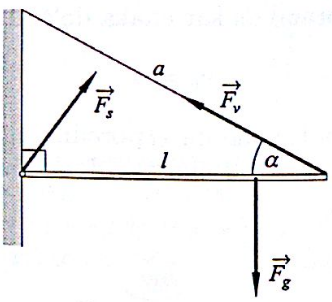
V prvem koraku izračunajmo silo vrvi, zato os za navore postavimo v prijemališče sile stene. Tako na drog delujeta navor sile teže uteži in navor sile vrvi:



Navora sta enaka:

$$M_g = M_v$$

Sila vrvi ni pravokotna na ročico, zato potrebujemo velikost njene pravokotne komponente. Da bomo lahko razstavili silo vrvi, izračunajmo kot med drogom in vrvjo. V trikotniku, ki ga tvorijo drog, vrv in stena, zapišimo kosinus kota med drogom in vrvjo:

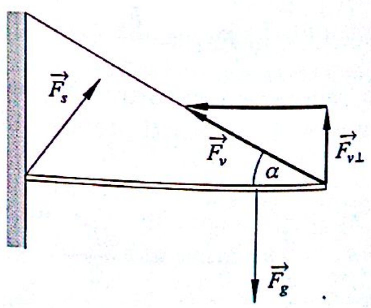


$$\cos\alpha = \frac{l}{a} = \frac{4{,}0\,\mathrm{m}}{6{,}0\,\mathrm{m}} = 0{,}6667$$

Tako je:

$$\alpha = \cos^{-1} 0{,}6667 = 48{,}19°$$

Kot α med drogom in vrvjo je enak kotu med silo vrvi in njeno vodoravno komponento:



Vidimo, da je:

$$\sin\alpha = \frac{F_{v\perp}}{F_v}$$

Od tod izrazimo velikost pravokotne komponente sile vrvi:

$$F_{v\perp} = F_v \sin\alpha$$

Dolžina ročice sile vrvi glede na os v prijemališču sile stene je kar dolžina droga:

$$r_v = l$$

Navor sile vrvi tako zapišimo z enačbo:

$$M_v = lF_{v\perp} = lF_v \sin\alpha$$

Sila teže uteži pa je pravokotna na ročico, katere dolžina je b, zato njen navor zapišimo kot:

$$M_g = bF_g$$

Navora izenačimo ($M_g = M_v$):

$$lF_v \sin\alpha = bF_g$$

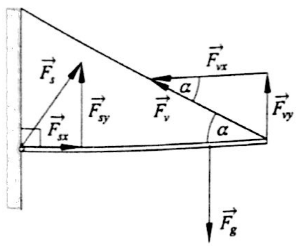
Od tod je:

$$F_v = \frac{bF_g}{l\sin\alpha}$$

V enačbi upoštevajmo še $F_g = mg$ in izračunajmo velikost sile vrvi:

$$F_v = \frac{bmg}{l\sin\alpha} = \frac{3{,}0\,\mathrm{m}\cdot 50\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{4{,}0\,\mathrm{m}\cdot\sin 48{,}19^\circ} = 493{,}6\,\mathrm{N} = \underline{\underline{490\,\mathrm{N}}}$$

Silo stene pa izračunajmo s pomočjo ravnovesja sil. Še enkrat narišimo drog in sile, ki delujejo nanj. Silo stene in silo vrvi razstavimo na komponente v vodoravni in navpični smeri.



V vodoravni smeri je velikost vodoravne komponente sile stene enaka velikosti vodoravne komponente sile vrvi:

$$F_{sx} = F_{vx}$$

V navpični smeri pa je velikost sile teže uteži enaka vsoti velikosti navpičnih komponent sile vrvi in sile stene:

$$F_g = F_{vy} + F_{sy}$$

Izračunajmo velikost sile teže uteži:

$$F_g = mg = 50\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 490{,}5\,\mathrm{N}$$

Ker poznamo kot α, izračunajmo še komponenti sile vrvi. Na skici je razvidno, da je:

$$\frac{F_{vx}}{F_v} = \cos\alpha$$

in

$$\frac{F_{vy}}{F_v} = \sin\alpha$$

Od tod pa sta velikosti komponent sile vrvi:

$$F_{vx} = F_v\cos\alpha = 493{,}6\,\mathrm{N}\cdot\cos 48{,}19^\circ = 329{,}1\,\mathrm{N}$$

in

$$F_{vy} = F_v\sin\alpha = 493{,}6\,\mathrm{N}\cdot\sin 48{,}19^\circ = 367{,}9\,\mathrm{N}$$

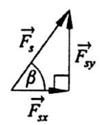
Iz ravnovesja sil dobimo velikosti komponent sile stene:

$$F_{sx} = F_{vx} = 329{,}1\,\mathrm{N}$$

in

$$F_{sy} = F_g - F_{vy} = 490{,}5\,\mathrm{N} - 367{,}9\,\mathrm{N} = 122{,}6\,\mathrm{N}$$

Komponenti vektorsko seštejmo in dobili bomo silo stene:



Iz velikosti komponent po Pitagorovem izreku izračunajmo velikost sile stene:

$$F_s = \sqrt{F_{sx}^2 + F_{sy}^2} = \sqrt{(329{,}1\,\mathrm{N})^2 + (122{,}6\,\mathrm{N})^2} = 351{,}2\,\mathrm{N} = \underline{350\,\mathrm{N}}$$

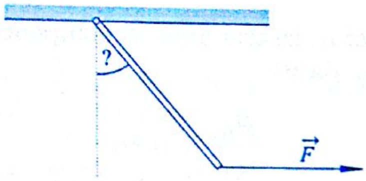
S pomočjo kotne funkcije tangens pa izračunajmo še kot, ki ga sila stene oklepa z vodoravnico (drogom):

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{F_{sy}}{F_{sx}} = \frac{122{,}6\,\mathrm{N}}{329{,}1\,\mathrm{N}} = 0{,}3725$$

Tako je:

$$\beta = \mathrm{tg}^{-1}0{,}3725 = 20{,}43^\circ = \underline{\underline{20^\circ}}$$

△14. Kovinsko palico z maso 8,5 kg vrtljivo obesimo na strop. Konec palice vlečemo s silo 34 N v vodoravni smeri. Kolikšen kot z navpičnico oklepa palica?



Podatki:

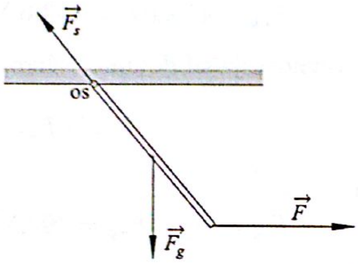
$m = 8{,}5$ kg

$F = 34$ N

Na skici narišimo sile, ki delujejo na palico. Sila stropa nas ne zanima, zato v njenem prijemališču izberimo os za navore. Glede na to os na palico delujeta navor sile teže palice in navor sile F.

Navora sta po velikosti enaka:

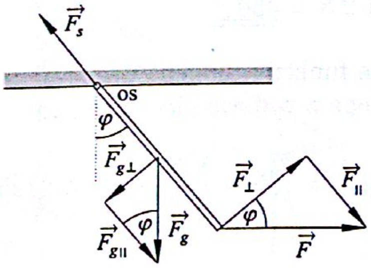
$$M_g = M$$



Sila F prijemlje na koncu palice, zato je dolžina njene ročice enaka dolžini palice. Sila teže palice pa prijemlje na polovici palice, zato je dolžina njene ročice tako enaka polovici dolžine palice. Sili nista pravokotni na palico (ročici), zato k navoru prispevata le pravokotni komponenti:

$$\frac{d}{2} F_{g\perp} = dF_\perp$$

Izrazimo pravokotni komponenti sil F_g in F na palico. Silo teže in silo F razstavimo na vzporedno in pravokotno komponento na palico:



Da izrazimo velikosti pravokotnih komponent sile teže in sile F, v trikotniku sile teže palice zapišimo sinus kota φ, v trikotniku sile F pa kosinus kota φ:

$$\sin\varphi = \frac{F_{g\perp}}{F_g} \qquad \text{in} \qquad \cos\varphi = \frac{F_\perp}{F}$$

Velikosti pravokotnih komponent sile teže in sile F sta tako:

$$F_{g\perp} = F_g \sin\varphi \qquad \text{in} \qquad F_\perp = F\cos\varphi$$

Dobljena izraza za velikosti pravokotnih komponent vstavimo v enačbo $\frac{d}{2}F_{g\perp} = dF_\perp$:

$$\frac{d}{2} F_g \sin\varphi = dF\cos\varphi$$

V enačbi okrajšajmo d in upoštevajmo, da je $F_g = mg$:

$$\frac{1}{2} mg\sin\varphi = F\cos\varphi$$

Od tod je:

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{F}{\frac{1}{2}mg} = \frac{2F}{mg}$$

Upoštevajmo še zvezo $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi$ in dobimo:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2F}{mg} = \frac{2\cdot 34\,\mathrm{N}}{8{,}5\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 0{,}8155$$

Tako je kot, ki ga oklepa palica z navpičnico:

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1} 0{,}8155 = 39{,}20° = \underline{\underline{39°}}$$

3.5.3 Težišče

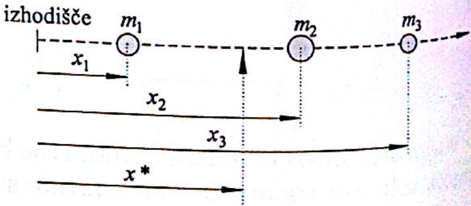
1. Dve majhni uteži z masama $m_1 = 28$ g in $m_2 = 16$ g sta na razdalji 8,5 cm. Kje je njuno težišče?

Podatki:

$m_1 = 28$ g

$m_2 = 16$ g

$r = 8{,}5$ cm



Težišče majhnih točkastih teles, ki ležijo na premici, izračunamo z enačbo:

$$x^* = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}$$

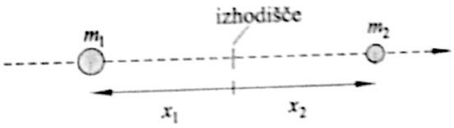
Pri tem so m_1, m_2, m_3 ... mase posameznih teles in x_1, x_2, x_3 ... koordinate teh teles glede na izbrano izhodišče. Paziti moramo, da so koordinate teles na eni strani izhodišča pozitivne, na drugi pa negativne. Izbira izhodišča je, tako kot pri računanju z navori, poljubna. Rezultat x^* je koordinata težišča glede na izbrano izhodišče. Predznak rezultata pove, na kateri strani izhodišča leži težišče.

1.NAČIN

Izberimo izhodišče na sredini med utežema. Tako sta koordinati uteži:

$$x_1 = -\frac{r}{2} = -\frac{8{,}5\,\mathrm{cm}}{2} = -4{,}25\,\mathrm{cm}$$

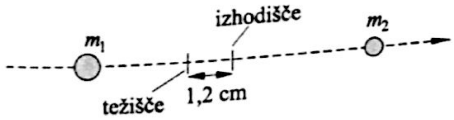
$$x_2 = \frac{r}{2} = 4{,}25\,\mathrm{cm}$$



Koordinati vstavimo v enačbo za računanje težišča in izračunajmo koordinato težišča:

$$x^* = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{-4{,}25\,\mathrm{cm} \cdot 28\,\mathrm{g} + 4{,}25\,\mathrm{cm} \cdot 16\,\mathrm{g}}{28\,\mathrm{g} + 16\,\mathrm{g}} = -1{,}159\,\mathrm{cm} = \underline{\underline{-1{,}2\,\mathrm{cm}}}$$

Težišče uteži je tako 1,2 cm oddaljeno od izbranega izhodišča v negativno smer.

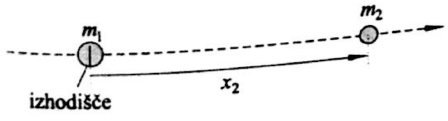


2.NAČIN

Ponavadi izhodišče postavimo v eno od uteži. Tako je koordinata te uteži nič in račun je nekoliko krajši.

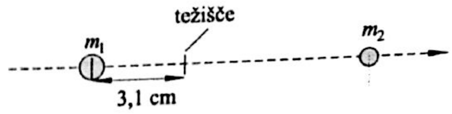
Postavimo izhodišče v levo utež. Koordinati uteži sta tako:

$$x_1 = 0\,\mathrm{cm} \quad \text{in} \quad x_2 = 8{,}5\,\mathrm{cm}$$



Tako je težišče uteži glede na izhodišče v levi uteži:

$$x^* = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{0\,\mathrm{cm} \cdot 28\,\mathrm{g} + 8{,}5\,\mathrm{cm} \cdot 16\,\mathrm{g}}{28\,\mathrm{g} + 16\,\mathrm{g}} = 3{,}091\,\mathrm{cm} = \underline{\underline{3{,}1\,\mathrm{cm}}}$$



Težišče leži 3,1 cm desno od leve uteži. Rezultat je seveda enak tistemu iz prvega načina, le da je podan drugače, glede na drugo izhodišče.

2. Tri frnikule z masami $m_1 = 15$ g, $m_2 = 25$ g in $m_3 = 40$ g ležijo na premici. Prva in druga sta med seboj oddaljeni 15 cm. Koliko je tretja oddaljena od druge, če je njihovo težišče oddaljeno 7,0 cm od druge v smeri proti tretji frnikuli?

Podatki:

$m_1 = 15$ g

$m_2 = 25$ g

$m_3 = 40$ g

$a = 15$ cm

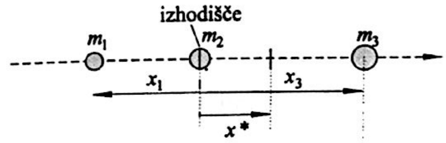
$x = 7{,}0$ cm

Zapišimo enačbo za računanje težišča frnikul:

$$x^* = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Izhodišče postavimo v srednjo frnikulo in pozitivno smer usmerimo v desno. Tako je koordinata leve frnikule:

$$x_1 = -a = -15\,\mathrm{cm}$$



Koordinata druge frnikule je seveda nič, saj leži v izhodišču. Koordinata tretje frnikule pa je iskana količina, torej mesto, kjer leži tretja frnikula. Glede na izhodišče v srednji frnikuli je koordinata težišča:

$$x^* = x = 7{,}0\,\mathrm{cm}$$

Iz enačbe

$$x^* = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

izpeljimo in izračunajmo oddaljenost tretje frnikule od osi oziroma srednje frnikule:

$$x^*(m_1 + m_2 + m_3) = x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3$$

$$x^*(m_1 + m_2 + m_3) - x_1 m_1 - x_2 m_2 = x_3 m_3$$

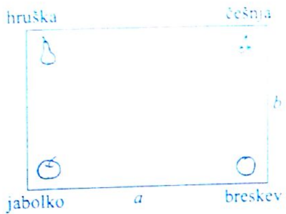
$$x_3 = \frac{x^*(m_1 + m_2 + m_3) - x_1 m_1 - x_2 m_2}{m_3} =$$

$$= \frac{7{,}0\,\mathrm{cm}\cdot(15\,\mathrm{g}+25\,\mathrm{g}+40\,\mathrm{g}) - (-15\,\mathrm{cm})\cdot 15\,\mathrm{g} - 0\,\mathrm{cm}\cdot 25\,\mathrm{g}}{40\,\mathrm{g}} =$$

$$= 19{,}63\,\mathrm{cm} = \underline{\underline{20\,\mathrm{cm}}}$$

Tretja frnikula leži 20 cm desno od srednje frnikule.

3. Na vogalih mize pravokotne oblike so postavljeni jabolko, breskev, češnja in hruška. Kje je njihovo težišče? Miza ima dolžino 1,2 m in širino 0,8 m. Mase so: $m_j = 150$ g, $m_b = 80$ g, $m_č = 20$ g in $m_h = 120$ g.



Podatki:

$a = 1{,}2$ m $\qquad m_b = 80$ g

$b = 0{,}8$ m $\qquad m_č = 20$ g

$m_j = 150$ g $\qquad m_h = 120$ g

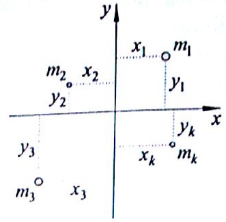
V primerih, ko so majhna telesa razporejena na ravnini, izračunamo vsako koordinato težišča posebej.

Enačbi za računanje koordinat težišča sta enaki kot enačba za računanje težišča teles na premici:

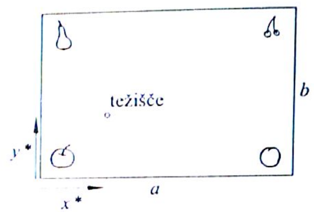
$$x^* = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 + \ldots + x_k m_k}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_k}$$

$$y^* = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3 + \ldots + y_k m_k}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_k}$$

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ in $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k$ so koordinate teles glede na izbrano izhodišče:



Izhodišče postavimo v jabolko, ki leži v levem spodnjem oglišču mize:



Koordinate jabolka, breskve, češnje in hruške glede na to izhodišče so:

$x_j = 0$ m $\qquad y_j = 0$ m

$x_b = 1{,}2$ m $\qquad y_b = 0$ m

$x_č = 1{,}2$ m $\qquad y_č = 0{,}8$ m

$x_h = 0m$ $\qquad y_h = 0{,}8$ m

Uporabimo enačbo za računanje koordinate težišča in izračunajmo najprej koordinato x težišča:

$$x^* = \frac{x_j m_j + x_b m_b + x_č m_č + m_h x_h}{m_j + m_b + m_č + m_h} =$$

$$= \frac{0\,\mathrm{m}\cdot 150\,\mathrm{g} + 1{,}2\,\mathrm{m}\cdot 80\,\mathrm{g} + 1{,}2\,\mathrm{m}\cdot 20\,\mathrm{g} + 0\,\mathrm{m}\cdot 120\,\mathrm{g}}{150\,\mathrm{g} + 80\,\mathrm{g} + 20\,\mathrm{g} + 120\,\mathrm{g}} =$$

$$= 0{,}3243\,\mathrm{m} = \underline{\underline{0{,}32\,\mathrm{m}}}$$

Podobno izračunajmo še koordinato y težišča:

$$y^* = \frac{y_j m_j + y_b m_b + y_č m_č + y_h x_h}{m_j + m_b + m_č + m_h} =$$

$$= \frac{0\,\mathrm{m}\cdot 150\,\mathrm{g} + 0\,\mathrm{m}\cdot 80\,\mathrm{g} + 0{,}8\,\mathrm{m}\cdot 20\,\mathrm{g} + 0{,}8\,\mathrm{m}\cdot 120\,\mathrm{g}}{150\,\mathrm{g} + 80\,\mathrm{g} + 20\,\mathrm{g} + 120\,\mathrm{g}} =$$

$$= 0{,}3027\,\mathrm{m} = \underline{\underline{0{,}30\,\mathrm{m}}}$$

Koordinati težišča jabolka, breskve, češnje in hruške sta tako:

$$x^* = 0{,}32\,\mathrm{m} = 32\,\mathrm{cm}$$

$$y^* = 0{,}30\,\mathrm{m} = 30\,\mathrm{cm}$$

Iz enačbe

$$x^* = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

izpeljimo in izračunajmo oddaljenost tretje frnikule od osi oziroma srednje frnikule:

$$x^*(m_1 + m_2 + m_3) = x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3$$

$$x^*(m_1 + m_2 + m_3) - x_1 m_1 - x_2 m_2 = x_3 m_3$$

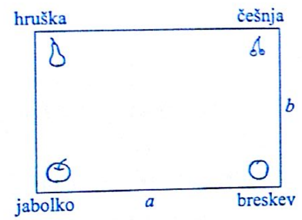
$$x_3 = \frac{x^*(m_1 + m_2 + m_3) - x_1 m_1 - x_2 m_2}{m_3} =$$

$$= \frac{7{,}0\,\text{cm}\cdot(15\,\text{g}+25\,\text{g}+40\,\text{g}) - (-15\,\text{cm})\cdot 15\,\text{g} - 0\,\text{cm}\cdot 25\,\text{g}}{40\,\text{g}} =$$

$$= 19{,}63\,\text{cm} = \underline{\underline{20\,\text{cm}}}$$

Tretja frnikula leži 20 cm desno od srednje frnikule.

3. Na vogalih mize pravokotne oblike so postavljeni jabolko, breskev, češnja in hruška. Kje je njihovo težišče? Miza ima dolžino 1,2 m in širino 0,8 m. Mase so: $m_j = 150$ g, $m_b = 80$ g, $m_č = 20$ g in $m_h = 120$ g.



Podatki:

$a = 1{,}2$ m	$m_b = 80$ g
$b = 0{,}8$ m	$m_č = 20$ g
$m_j = 150$ g	$m_h = 120$ g

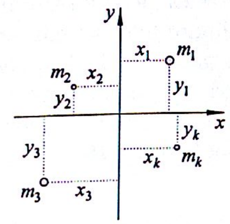
V primerih, ko so majhna telesa razporejena na ravnini, izračunamo vsako koordinato težišča posebej.

Enačbi za računanje koordinat težišča sta enaki kot enačba za računanje težišča teles na premici:

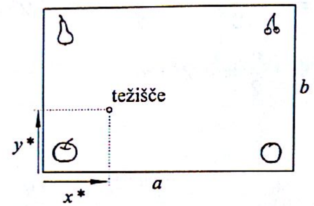
$$x^* = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 + \ldots + x_k m_k}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_k}$$

$$y^* = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3 + \ldots + y_k m_k}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_k}$$

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ in $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k$ so koordinate teles glede na izbrano izhodišče:



Izhodišče postavimo v jabolko, ki leži v levem spodnjem oglišču mize:



Koordinate jabolka, breskve, češnje in hruške glede na to izhodišče so:

$x_j = 0\,\text{m}$	$y_j = 0\,\text{m}$
$x_b = 1{,}2\,\text{m}$	$y_b = 0\,\text{m}$
$x_č = 1{,}2\,\text{m}$	$y_č = 0{,}8\,\text{m}$
$x_h = 0\,\text{m}$	$y_h = 0{,}8\,\text{m}$

Uporabimo enačbo za računanje koordinate težišča in izračunajmo najprej koordinato x težišča:

$$x^* = \frac{x_j m_j + x_b m_b + x_č m_č + m_h x_h}{m_j + m_b + m_č + m_h} =$$

$$= \frac{0\,\text{m}\cdot 150\,\text{g} + 1{,}2\,\text{m}\cdot 80\,\text{g} + 1{,}2\,\text{m}\cdot 20\,\text{g} + 0\,\text{m}\cdot 120\,\text{g}}{150\,\text{g} + 80\,\text{g} + 20\,\text{g} + 120\,\text{g}} =$$

$$= 0{,}3243\,\text{m} = \underline{\underline{0{,}32\,\text{m}}}$$

Podobno izračunajmo še koordinato y težišča:

$$y^* = \frac{y_j m_j + y_b m_b + y_č m_č + y_h x_h}{m_j + m_b + m_č + m_h} =$$

$$= \frac{0\,\text{m}\cdot 150\,\text{g} + 0\,\text{m}\cdot 80\,\text{g} + 0{,}8\,\text{m}\cdot 20\,\text{g} + 0{,}8\,\text{m}\cdot 120\,\text{g}}{150\,\text{g} + 80\,\text{g} + 20\,\text{g} + 120\,\text{g}} =$$

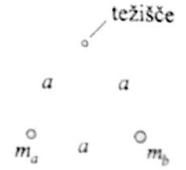
$$= 0{,}3027\,\text{m} = \underline{\underline{0{,}30\,\text{m}}}$$

Koordinati težišča jabolka, breskve, češnje in hruške sta tako:

$$x^* = 0{,}32\,\text{m} = 32\,\text{cm}$$

$$y^* = 0{,}30\,\text{m} = 30\,\text{cm}$$

4. Dve uteži z masama 2,8 kg in 4,3 kg sta na razdalji 80 cm. Kam moramo postaviti tretjo utež z maso 3,3 kg, da bo njihovo skupno težišče v prostem oglišču enakostraničnega trikotnika, ki ima v preostalih dveh ogliščih prvi dve uteži (glej sliko)?



Podatki:

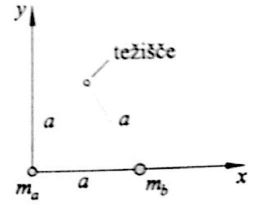
$m_a = 2{,}8$ kg

$m_b = 4{,}3$ kg

$m_c = 3{,}3$ kg

$a = 80$ cm

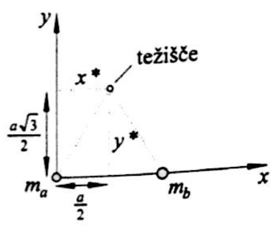
Uteži so razporejene na ravnini, zato bomo računali z enačbama za računanje koordinat težišča. Izhodišče postavimo v utež z maso m_a:



Koordinate uteži, za kateri vemo, kje ležita, so tako:

$$x_a = 0\,\text{cm} \qquad y_a = 0\,\text{cm}$$
$$x_b = 80\,\text{cm} \qquad y_b = 0\,\text{cm}$$

Koordinati težišča izrazimo s stranico enakostraničnega trikotnika:



Tako je:

$$x^* = \frac{a}{2} = 40\,\text{cm}$$

in

$$y^* = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{80\,\text{cm} \cdot \sqrt{3}}{2} = 69{,}28\,\text{cm}$$

Sedaj iz enačbe za koordinato x težišča izrazimo koordinato tretje uteži:

$$x^* = \frac{x_a m_a + x_b m_b + x_c m_c}{m_a + m_b + m_c}$$
$$x^*(m_a + m_b + m_c) = x_a m_a + x_b m_b + x_c m_c$$
$$x^*(m_a + m_b + m_c) - x_a m_a - x_b m_b = x_c m_c$$
$$x_c = \frac{x^*(m_a + m_b + m_c) - x_a m_a - x_b m_b}{m_c}$$

V enačbi upoštevajmo prej izračunane koordinate glede na izbrano izhodišče in izračunajmo koordinato x tretje uteži:

$$x_c = \frac{x^*(m_a + m_b + m_c) - x_a m_a - x_b m_b}{m_c} = 21{,}82\,\text{cm} = \underline{\underline{22\,\text{cm}}}$$

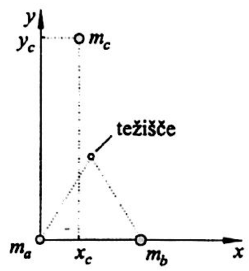
Na podoben način kot koordinato x izrazimo še koordinato y tretje uteži:

$$y^* = \frac{y_a m_a + y_b m_b + y_c m_c}{m_a + m_b + m_c}$$
$$y^*(m_a + m_b + m_c) = y_a m_a + y_b m_b + y_c m_c$$
$$y^*(m_a + m_b + m_c) - y_a m_a - y_b m_b = y_c m_c$$
$$y_c = \frac{y^*(m_a + m_b + m_c) - y_a m_a - y_b m_b}{m_c}$$

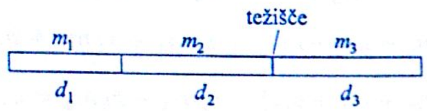
Vstavimo vrednosti in izračunajmo še koordinato y tretje uteži:

$$y_c = \frac{y^*(m_a + m_b + m_c) - y_a m_a - y_b m_b}{m_c} = 218{,}3\,\text{cm} = \underline{\underline{220\,\text{cm}}}$$

Tretja utež leži 22 cm desno in 220 cm nad utežjo z maso m_a.



5. Tri palice postavimo eno za drugo. Mase palic so 0,30 kg, 0,65 kg in 1,3 kg. Dolžini prvih dveh palic sta 0,45 m in 0,78 m. Kolikšna je dolžina tretje palice, če je težišče palic na spoju med drugo in tretjo palico?



Podatki:

$m_1 = 0{,}30$ kg $d_1 = 0{,}45$ m

$m_2 = 0{,}65$ kg $d_2 = 0{,}78$ m

$m_3 = 1{,}3$ kg

Težišče palic ravno tako računamo z enačbo:

$$x^* = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

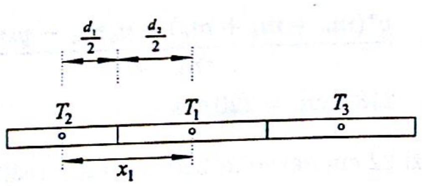
le da so sedaj x_1, x_2 in x_3 koordinate težišč posameznih palic glede na izbrano izhodišče. m_1, m_2 in m_3 pa so v tem primeru kar mase posameznih palic.

Težišča posameznih palic ležijo na sredi palic, če so palice homogene. Izhodišče postavimo v težišče srednje palice. Tako je:

$$x_2 = 0\,\text{cm}$$

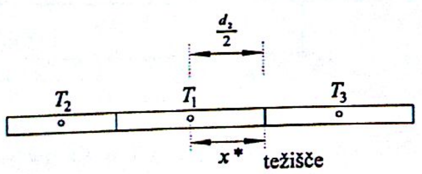
Težišče leve palice ima koordinato:

$$x_1 = -\frac{d_1}{2} - \frac{d_2}{2} = -\frac{0{,}45\,\text{m}}{2} - \frac{0{,}78\,\text{m}}{2} = -0{,}615\,\text{m}$$



Koordinata skupnega težišča treh palic, ki leži na spoju med drugo in tretjo palico, je:

$$x^* = \frac{d_2}{2} = \frac{0{,}78\,\text{m}}{2} = 0{,}39\,\text{m}$$



Iz enačbe

$$x^* = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

izrazimo x_3, koordinato težišča tretje palice:

$$x^*(m_1 + m_2 + m_3) = x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3$$

$$x^*(m_1 + m_2 + m_3) - x_1 m_1 - x_2 m_2 = x_3 m_3$$

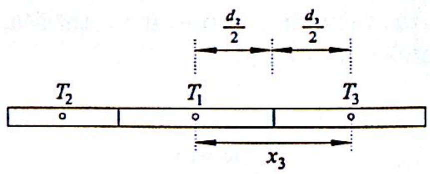
$$x_3 = \frac{x^*(m_1 + m_2 + m_3) - x_1 m_1 - x_2 m_2}{m_3}$$

V enačbo vstavimo vrednosti in izračunajmo x_3:

$$x_3 = 0{,}8169\,\text{m}$$

Koordinata x_3 je sestavljena iz polovice dolžin druge in tretje palice:

$$x_3 = \frac{d_2}{2} + \frac{d_3}{2}$$



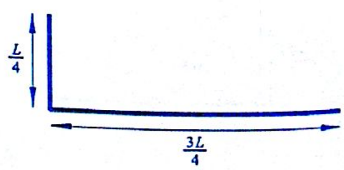
Od tod je:

$$\frac{d_3}{2} = x_3 - \frac{d_2}{2}$$

oziroma:

$$\begin{aligned} d_3 &= \left(x_3 - \frac{d_2}{2}\right) \cdot 2 = \left(0{,}8169\,\text{m} - \frac{0{,}78\,\text{m}}{2}\right) \cdot 2 = \\ &= 0{,}8538\,\text{m} = \underline{\underline{0{,}85\,\text{m}}} \end{aligned}$$

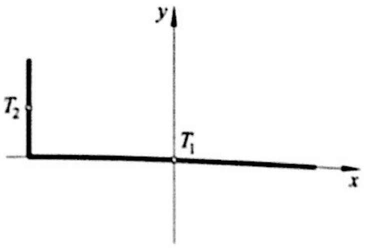
△6. Homogen železen drog zvijemo v obliko črke L tako, da krajši del predstavlja $\frac{1}{4}$ celotne dolžine droga. Kje je težišče tako zvitega droga? Debelino droga zanemarimo.



Drog razdelimo na dva dela. Ker je drog homogen, sta masi delov v enakem razmerju kot dolžini, torej:

$$m_1 = \frac{3}{4}\,\text{m} \qquad \text{in} \qquad m_2 = \frac{1}{4}\,\text{m}$$

Vsak od delov ima težišče na svoji sredini. Za izhodišče izberimo težišče daljšega dela. Daljši del droga naj leži na osi x:

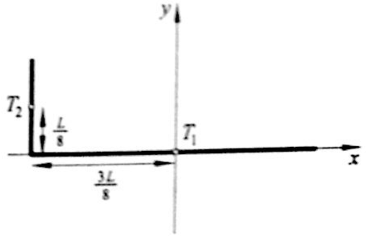


Glede na izbrano os imata težišči posameznih delov droga koordinate:

$$x_1 = 0 \qquad y_1 = 0$$

in

$$x_2 = -\frac{\frac{3}{4}L}{2} = -\frac{3}{8}L \qquad y_2 = \frac{\frac{1}{4}L}{2} = \frac{1}{8}L$$



Izračunajmo koordinati težišča:

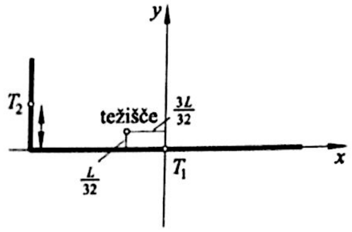
$$x^* = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{0\,\mathrm{L} \cdot \frac{3}{4}\mathrm{m} + \left(-\frac{3}{8}\right)L \cdot \frac{1}{4}\mathrm{m}}{\frac{3}{4}\mathrm{m} + \frac{1}{4}\mathrm{m}} =$$

$$= \frac{-\frac{3}{32}L\,\mathrm{m}}{\mathrm{m}} = \underline{\underline{-\frac{3}{32}L}}$$

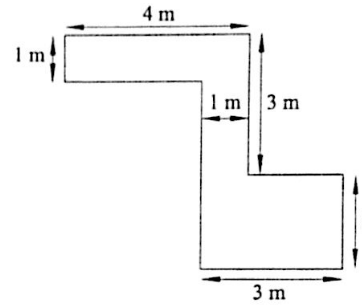
$$y^* = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{0\,\mathrm{L} \cdot \frac{3}{4}\mathrm{m} + \frac{1}{8}L \cdot \frac{1}{4}\mathrm{m}}{\frac{3}{4}\mathrm{m} + \frac{1}{4}\mathrm{m}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{32}L\,\mathrm{m}}{\mathrm{m}} = \underline{\underline{\frac{1}{32}L}}$$

Težišče zvitega droga leži za $\frac{3}{32}$ dolžine celega droga levo in za $\frac{1}{32}$ više od težišča daljšega dela:



△7. Iz kartona izrežemo lik, ki ga vidimo na skici. Kje je težišče tega lika?



Koordinati težišča likov, ki so sestavljeni iz delov, za katere vemo, kje imajo težišče, izračunamo z enačbama:

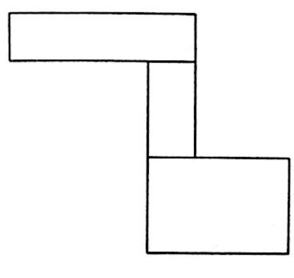
$$x^* = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2 + x_3 S_3 + \ldots + x_k S_k}{S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_k}$$

in

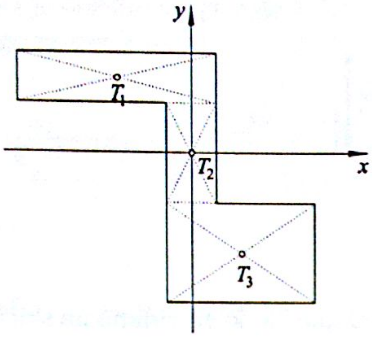
$$y^* = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2 + y_3 S_3 + \ldots + y_k S_k}{S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_k}$$

Pri tem so x_1, x_2, x_3, ..., x_k in y_1, y_2, y_3, ..., y_k koordinate težišč posameznih delov lika glede na izbrano izhodišče, S_1, S_2, S_3, ..., S_k pa so ploščine posameznih delov lika.

Lik najprej razdelimo na tri pravokotnike. Možnih je več načinov, vendar težavnost računanja ni kaj dosti odvisna od tega:



Vsak od izbranih pravokotnikov ima težišče na presečišču diagonal. Izhodišče za računanje težišča izberimo v težišču srednjega pravokotnika:



S slike lahko preberemo koordinate težišč posameznih pravokotnikov glede na izbrano izhodišče:

$$x_1 = -1{,}5\,\mathrm{m} \qquad y_1 = 1{,}5\,\mathrm{m}$$
$$x_2 = 0\,\mathrm{m} \qquad y_2 = 0\,\mathrm{m}$$
$$x_3 = 1\,\mathrm{m} \qquad y_3 = -2\,\mathrm{m}$$

Izračunajmo še ploščine pravokotnikov:

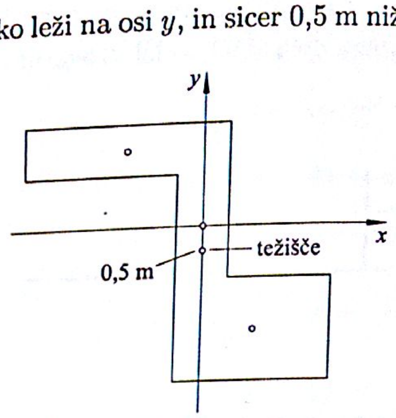
$$\begin{aligned} S_1 &= 1\,\mathrm{m}\cdot 4\,\mathrm{m} = 4\,\mathrm{m}^2 \\ S_2 &= 1\,\mathrm{m}\cdot 2\,\mathrm{m} = 2\,\mathrm{m}^2 \\ S_3 &= 2\,\mathrm{m}\cdot 3\,\mathrm{m} = 6\,\mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

Izračunane vrednosti vstavimo v enačbi za računanje koordinat težišča:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x_1S_1 + x_2S_2 + x_3S_3}{S_1+S_2+S_3} = \\ &= \frac{-1{,}5\,\mathrm{m}\cdot 4\,\mathrm{m}^2 + 0\,\mathrm{m}\cdot 2\,\mathrm{m}^2 + 1\,\mathrm{m}\cdot 6\,\mathrm{m}^2}{4\,\mathrm{m}^2 + 2\,\mathrm{m}^2 + 6\,\mathrm{m}^2} = \\ &= \frac{0\,\mathrm{m}^3}{12\,\mathrm{m}^2} = \underline{\underline{0{,}0\,\mathrm{m}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^* &= \frac{y_1S_1 + y_2S_2 + y_3S_3}{S_1+S_2+S_3} = \\ &= \frac{1{,}5\,\mathrm{m}\cdot 4\,\mathrm{m}^2 + 0\,\mathrm{m}\cdot 2\,\mathrm{m}^2 + (-2\,\mathrm{m})\cdot 6\,\mathrm{m}^2}{4\,\mathrm{m}^2 + 2\,\mathrm{m}^2 + 6\,\mathrm{m}^2} = \\ &= -\frac{6\,\mathrm{m}^3}{12\,\mathrm{m}^2} = \underline{\underline{-0{,}5\,\mathrm{m}}} \end{aligned}$$

Težišče lika tako leži na osi y, in sicer 0,5 m nižje od izbranega izhodišča:



3.6 Sile pri enakomernem kroženju

1. Kolikšna je vsota vseh sil na telo z maso 100 g, ki enakomerno kroži s frekvenco 2,0 Hz po krožnici s polmerom 0,50 m? Kam je usmerjena vsota vseh sil na telo?

Podatki:

$m = 100\,\mathrm{g} = 0{,}10\,\mathrm{kg}$

$\nu = 2{,}0\,\mathrm{Hz}$

$r = 0{,}50\,\mathrm{m}$

V poglavju Enakomerno kroženje smo spoznali, da je enakomerno kroženje pospešeno gibanje. Pospešek enakomernega kroženja imenujemo radialni pospešek in je vedno usmerjen proti središču kroženja. Izračunamo ga lahko na tri načine:

$$a_r = \omega v = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

Ker je enakomerno kroženje pospešeno gibanje, velikost vsote sil na telo, ki enakomerno kroži, izračunajmo z enačbo $F = ma$, v kateri upoštevajmo, da je $a = a_r$:

$$F = ma_r$$

Radialni pospešek izračunajmo z enačbo $a_r = \omega^2 r$, v kateri upoštevajmo, da je $\omega = 2\pi\nu$:

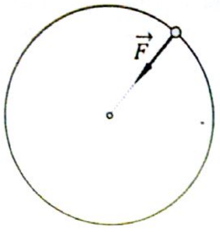
$$a_r = \omega^2 r = (2\pi\nu)^2 r = (2\cdot\pi\cdot 2{,}0\,\mathrm{Hz})^2\cdot 0{,}50\,\mathrm{m} = 78{,}96\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Rezultat vstavimo v enačbo $F = ma_r$ in izračunajmo velikost vsote sil, ki delujejo na telo:

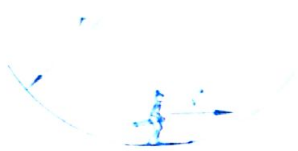
$$F = 0{,}10\,\mathrm{kg}\cdot 78{,}96\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 7{,}896\,\mathrm{N} = \underline{\underline{7{,}9\,\mathrm{N}}}$$

Iz II. Newtonovega zakona sledi, da imata vsota vseh sil na telo in pospešek telesa enaki smeri, zato je **vsota vseh**

sil pri enakomernem kroženju vedno usmerjena proti središču kroženja:



2. Z največ kolikšno hitrostjo sme smukač z maso 80 kg pridrveti na dno krožne vdolbine s polmerom 30 m, če njegove noge zdržijo silo 1 500 N?



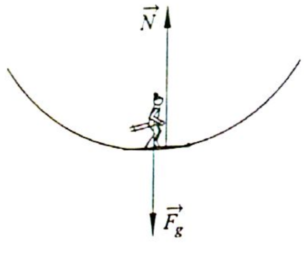
Podatki:

$m = 80$ kg

$r = 30$ m

$F = 1\,500$ N

Smukač pri gibanju po krožni vdolbini kroži. Predpostavimo, da kroži enakomerno. V tem primeru nanj delujeta dve sili: sila teže navzdol, proč od središča kroženja, in normala navzgor, proti središču kroženja. Silo trenja in silo zračnega upora zanemarimo:



Zapišimo enačbo $F = ma_r$ za smukača, pri tem pa upoštevajmo, da je normala pozitivna, saj je usmerjena v smeri pospeška, proti središču kroženja, sila teže pa je usmerjena v nasprotno smer in je negativna:

$$N - F_g = ma_r$$

Normala je sila, s katero tla pritiskajo na smukača, torej po velikosti enaka sili, s katero smukač (njegove noge) pritiska na tla:

$$N = F = 1\,500\,\mathrm{N}$$

Sedaj iz enačbe $N - F_g = ma_r$ izrazimo in izračunajmo radialni pospešek:

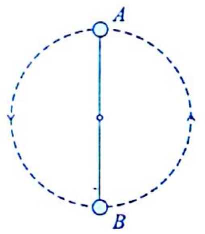
$$a_r = \frac{N - F_g}{m} = \frac{N - mg}{m} = \frac{1\,500\,\mathrm{N} - 80\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{80\,\mathrm{kg}} = 8{,}94\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Nazadnje dobimo iz enačbe $a_r = \frac{v^2}{r}$ hitrost smukača:

$$v^2 = a_r \cdot r$$

$$v = \sqrt{a_r \cdot r} = \sqrt{8{,}95\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 30\,\mathrm{m}} = 16{,}38\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{16\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

3. Otrok vrti žogico na vrvici tako, da ta kroži po navpičnem krogu s polmerom 0,38 m. Žogica kroži z obhodnim časom 0,33 s. S kolikšno silo je napeta vrvica v trenutku, ko je žogica v najvišji oziroma najnižji točki kroženja? Masa žogice je 200 g.



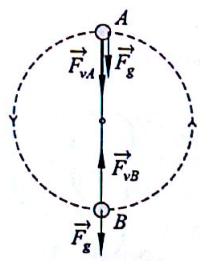
Podatki:

$r = 0{,}38$ m

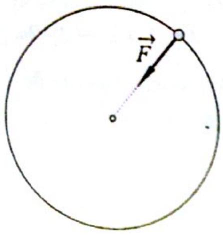
$t_0 = 0{,}33$ s

$m = 200\,\mathrm{g} = 0{,}20$ kg

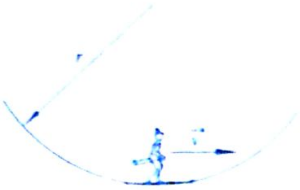
Na skici označimo zgornji položaj žogice z A in spodnji položaj z B. Na žogico v obeh položajih delujeta sila teže navzdol in sila vrvice proti središču:



sil pri enakomernem kroženju vedno usmerjena proti središču kroženja:



2. Z največ kolikšno hitrostjo sme smukač z maso 80 kg pridrveti na dno krožne vdolbine s polmerom 30 m, če njegove noge zdržijo silo 1 500 N?



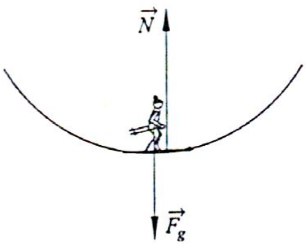
Podatki:

$m = 80$ kg

$r = 30$ m

$F = 1\,500$ N

Smukač pri gibanju po krožni vdolbini kroži. Predpostavimo, da kroži enakomerno. V tem primeru nanj delujeta dve sili: sila teže navzdol, proč od središča kroženja, in normala navzgor, proti središču kroženja. Silo trenja in silo zračnega upora zanemarimo:



Zapišimo enačbo $F = ma_r$ za smukača, pri tem pa upoštevajmo, da je normala pozitivna, saj je usmerjena v smeri pospeška, proti središču kroženja, sila teže pa je usmerjena v nasprotno smer in je negativna:

$$N - F_g = ma_r$$

Normala je sila, s katero tla pritiskajo na smukača, torej po velikosti enaka sili, s katero smukač (njegove noge) pritiska na tla:

$$N = F = 1\,500\,\mathrm{N}$$

Sedaj iz enačbe $N - F_g = ma_r$ izrazimo in izračunajmo radialni pospešek:

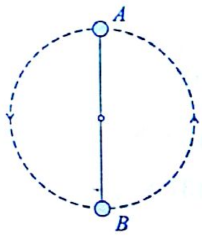
$$a_r = \frac{N - F_g}{m} = \frac{N - mg}{m} = \frac{1\,500\,\mathrm{N} - 80\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{80\,\mathrm{kg}} = 8{,}94\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Nazadnje dobimo iz enačbe $a_r = \frac{v^2}{r}$ hitrost smukača:

$$v^2 = a_r \cdot r$$

$$v = \sqrt{a_r \cdot r} = \sqrt{8{,}95\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 30\,\mathrm{m}} = 16{,}38\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{16\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

3. Otrok vrti žogico na vrvici tako, da ta kroži po navpičnem krogu s polmerom 0,38 m. Žogica kroži z obhodnim časom 0,33 s. S kolikšno silo je napeta vrvica v trenutku, ko je žogica v najvišji oziroma najnižji točki kroženja? Masa žogice je 200 g.



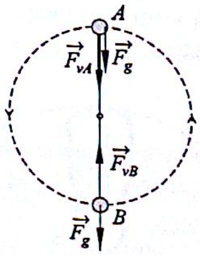
Podatki:

$r = 0{,}38$ m

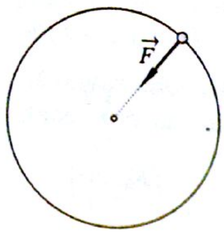
$t_0 = 0{,}33$ s

$m = 200\,\mathrm{g} = 0{,}20\,\mathrm{kg}$

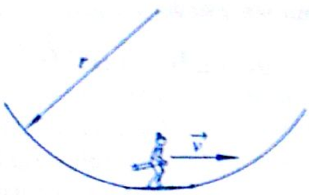
Na skici označimo zgornji položaj žogice z A in spodnji položaj z B. Na žogico v obeh položajih delujeta sila teže navzdol in sila vrvice proti središču:



sil pri enakomernem kroženju vedno usmerjena proti središču kroženja:



2. Z največ kolikšno hitrostjo sme smukač z maso 80 kg pridrveti na dno krožne vdolbine s polmerom 30 m, če njegove noge zdržijo silo 1 500 N?



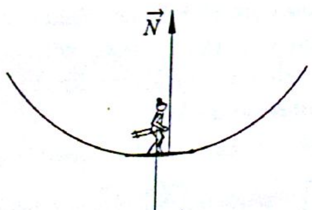
Podatki:

$m = 80$ kg

$r = 30$ m

$F = 1\,500$ N

Smukač pri gibanju po krožni vdolbini kroži. Predpostavimo, da kroži enakomerno. V tem primeru nanj delujeta dve sili: sila teže navzdol, proč od središča kroženja, in normala navzgor, proti središču kroženja. Silo trenja in silo zračnega upora zanemarimo:



Zapišimo enačbo $F = ma_r$ za smukača, pri tem pa upoštevajmo, da je normala pozitivna, saj je usmerjena v smeri pospeška, proti središču kroženja, sila teže pa je usmerjena v nasprotno smer in je negativna:

$$N - F_g = ma_r$$

Normala je sila, s katero tla pritiskajo na smukača, torej po velikosti enaka sili, s katero smukač (njegove noge) pritiska na tla:

$$N = F = 1\,500\,\mathrm{N}$$

Sedaj iz enačbe $N - F_g = ma_r$ izrazimo in izračunajmo radialni pospešek:

$$a_r = \frac{N - F_g}{m} = \frac{N - mg}{m} =$$

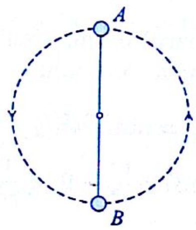
$$= \frac{1\,500\,\mathrm{N} - 80\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{80\,\mathrm{kg}} = 8{,}94\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Nazadnje dobimo iz enačbe $a_r = \frac{v^2}{r}$ hitrost smukača:

$$v^2 = a_r \cdot r$$

$$v = \sqrt{a_r \cdot r} = \sqrt{8{,}95\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 30\,\mathrm{m}} = 16{,}38\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{16\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

3. Otrok vrti žogico na vrvici tako, da ta kroži po navpičnem krogu s polmerom 0,38 m. Žogica kroži z obhodnim časom 0,33 s. S kolikšno silo je napeta vrvica v trenutku, ko je žogica v najvišji oziroma najnižji točki kroženja? Masa žogice je 200 g.



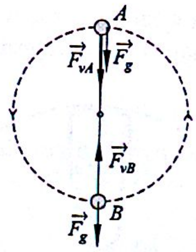
Podatki:

$r = 0{,}38$ m

$t_0 = 0{,}33$ s

$m = 200\,\mathrm{g} = 0{,}20$ kg

Na skici označimo zgornji položaj žogice z A in spodnji položaj z B. Na žogico v obeh položajih delujeta sila teže navzdol in sila vrvice proti središču:



Zapišimo najprej II. Newtonov zakon ($F = ma_r$) za položaj A. Obe sili sta usmerjeni v smeri pospeška, proti središču, tako da velja:

$$F_{vA} + F_g = ma_r$$

Od tod dobimo:

$$F_{vA} = ma_r - F_g = ma_r - mg = m(a_r - g)$$

Velikost radialnega pospeška izrazimo z enačbo $a_r = \omega^2 r$, v kateri upoštevajmo, da je $\omega = \frac{2\pi}{t_0}$:

$$a_r = \left(\frac{2\pi}{t_0}\right)^2 r = \frac{4\pi^2 r}{t_0^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 0{,}38\,\mathrm{m}}{(0{,}33\,\mathrm{s})^2} = 137{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Izračunajmo silo, s katero je napeta vrvica v položaju A:

$$\begin{aligned} F_{vA} &= m(a_r - g) = 0{,}20\,\mathrm{kg}\left(137{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} - 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = \\ &= 25{,}60\,\mathrm{N} = \underline{\underline{26\,\mathrm{N}}} \end{aligned}$$

V položaju B je sila vrvice še vedno usmerjena proti središču, torej je pozitivna, medtem ko je sila teže usmerjena proč od središča in je zato negativna:

$$F_{vB} - F_g = ma_r$$

Od tod izrazimo in izračunajmo velikost sile, s katero je napeta vrvica v spodnjem položaju:

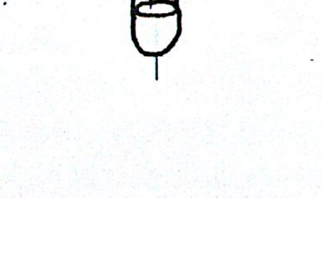
$$\begin{aligned} F_{vB} &= ma_r + F_g = ma_r + mg = m(a_r + g) = \\ &= 0{,}20\,\mathrm{kg}\left(137{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = 29{,}52\,\mathrm{N} = \underline{\underline{29\,\mathrm{N}}} \end{aligned}$$

4. Deklica vrti kanglico z vodo tako, da ta kroži po krožnici s premerom 0,65 m v navpični ravnini. S kolikšno najmanjšo frekvenco mora deklica vrteti kanglico, da še ne polije vode?

Podatki:

$r = 0{,}65$ m

Naloga je malo podobna prejšnji. S premislekom ugotovimo, da je kritična najvišja točka kroženja. Če bo frekvenca vrtenja premajhna, se bo voda v tej točki razlila iz kanglice. Narišimo skico in sili, ki v najvišji točki delujeta na vodo:



Tako sila teže vode kot sila podlage kanglice na vodo delujeta navzdol, proti središču kroženja. Enačba za kroženje se tako glasi:

$$F_g + F_k = ma_r$$

V mejnem primeru, ko voda ravno še kroži in se še ne izlije, bo sila podlage kanglice na vodo enaka nič:

$$F_k = 0$$

in tako:

$$ma_r = mg$$

Po krajšanju mase dobimo:

$$a_r = g$$

Od tod z upoštevanjem zveze

$$a_r = \omega^2 r = (2\pi\nu)^2 r$$

dobimo:

$$(2\pi\nu)^2 r = g$$

oziroma

$$\begin{aligned} 4\pi^2\nu^2 r &= g \\ \nu^2 &= \frac{g}{4\pi^2 r} \end{aligned}$$

Od tod je minimalna frekvenca, s katero mora deklica vrteti kanglico:

$$\nu = \sqrt{\frac{g}{4\pi^2 r}} = \sqrt{\frac{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{4\pi^2 \cdot 0{,}65\,\mathrm{m}}} = 0{,}6183\,\mathrm{Hz} = \underline{\underline{0{,}62\,\mathrm{Hz}}}$$

5. Marko se vozi z vlakcem smrti v zabaviščnem parku. S kolikšno silo pritiska na sedež, če vlakec vozi enakomerno s hitrostjo 60 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ po vodoravni stezi, konveksni krožni stezi s polmerom 30 m oziroma konkavni krožni stezi s polmerom 30 m? Markova masa je 58 kg.

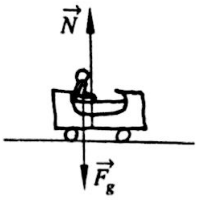
Podatki:

$v = 60\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 16{,}67\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$r = 30$ m

$m = 58$ kg

Na vodoravni stezi se vlakec in z njim Marko giblje premo enakomerno. Po I. Newtonovem zakonu je tedaj vsota sil na Marka enaka nič. To pomeni, da sta sila teže in sila sedeža (normala) po velikosti enaki.

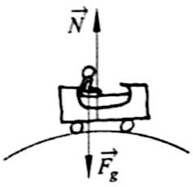


Tako je:

$$N = F_g = mg = 58\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 569{,}0\,\mathrm{N} = \underline{\underline{570\,\mathrm{N}}}$$

Normala, torej sila sedeža na Marka, je nasprotno enaka sili, s katero Marko pritiska na sedež.

Na delu steze, ki je konveksno krožne oblike, pa vlakec in Marko približno enakomerno krožita. Marka opazujemo v najvišji točki. Nanj še vedno delujeta sila teže navzdol in sila sedeža (normala) navzgor:



V tem primeru velja za Marka II. Newtonov zakon, torej je vsota vseh sil enaka masi pomnoženi z radialnim pospeškom. Sila teže je usmerjena proti središču kroženja, torej v smeri pospeška, zato je pozitivna, sila sedeža (normala) pa v nasprotno smer, zato je negativna:

$$F_g - N = ma_r$$

Od tod je velikost sile sedeža na Marka, ki je nasprotno enaka sili Marka na sedež:

$$N = F_g - ma_r = mg - ma_r = m(g - a_r)$$

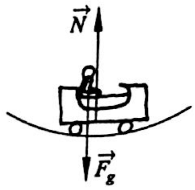
Izračunajmo velikost radialnega pospeška:

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(16{,}67\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{30\,\mathrm{m}} = 9{,}263\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Rezultat vstavimo v enačbo:

$$\begin{aligned} N &= m(g - a_r) = 58\,\mathrm{kg} \cdot \left(9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} - 9{,}263\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = \\ &= 31{,}73\,\mathrm{N} = \underline{\underline{32\,\mathrm{N}}} \end{aligned}$$

Narišimo še skico konkavnega dela steze in sili, ki delujeta na Marka v tem primeru:



V tem primeru je sila teže usmerjena v nasprotno smer od središča in je negativna, sila sedeža (normala) pa deluje v smeri proti središču in je pozitivna:

$$N - F_g = ma_r$$

Tako je:

$$\begin{aligned} N &= ma_r + F_g = ma_r + mg = m(a_r + g) = \\ &= 58\,\mathrm{kg}\left(9{,}263\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = 1\,106\,\mathrm{N} = \underline{\underline{1\,100\,\mathrm{N}}} \end{aligned}$$

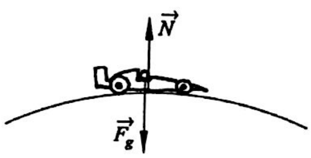
6. Voznik bolida formule 1 pripelje do odseka ceste, ki je konveksne oblike s polmerom 120 m. Najmanj kolikšna mora biti hitrost bolida, da se bo odlepil od ceste?

Podatki:

$R = 120$ m

Na skici narišimo sile, ki delujejo na bolid pri vožnji po konveksnem vozišču. Sila teže je usmerjena navzdol, normala pa navzgor. Ker je središče krožnice, po kateri se giblje bolid, v smeri sile teže, je ta v enačbi pozitivna, normala pa negativna:

$$F_g - N = ma_r$$



V primeru, ko se bolid ravno odlepi od ceste, cesta ne deluje več nanj, torej normale ni več ($N = 0$). Enačba tako dobi obliko:

$$F_g = ma_r$$

Od tod pa je:

$$mg = ma_r$$

oziroma

$$g = a_r$$

Z upoštevanjem zveze:

$$a_r = \frac{v^2}{R}$$

dobimo hitrost, pri kateri bo bolid formule 1 na konveksnem delu cestišča 'poskočil':

$$\begin{aligned} g &= \frac{v^2}{R} \\ v^2 &= gR \\ v &= \sqrt{gR} = \sqrt{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 120\,\mathrm{m}} = \\ &= 34{,}31\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 34\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad (120\,\tfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}) \end{aligned}$$

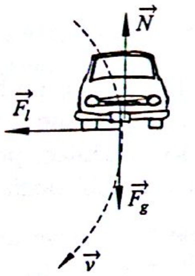
7. Največ s kolikšno hitrostjo lahko pelje avtomobil po vodoravnem krožnem ovinku s polmerom 50 m, če je koeficient lepenja med asfaltom in gumami 0,6?

Podatki:

$r = 50$ m

$k_l = 0{,}6$

Na skici avtomobila narišimo sile, ki delujejo nanj ob vožnji skozi ovinek. Sila teže in normala delujeta v navpični smeri (smer y), sila lepenja med gumami in asfaltom pa deluje proti središču ovinka:



V navpični smeri se avtomobil ne giblje, zato sta sila teže in normala po velikosti enaki:

$$N = F_g = mg$$

V vodoravni smeri avtomobil kroži, zato velja enačba $F = ma_r$, kjer je F vsota vseh sil v tej smeri. Sila lepenja je edina sila v smeri x, zato zapišimo:

$$F_l = ma_r$$

V enačbo vstavimo izraz za velikost sile lepenja $F_l = k_l N$ in dobimo:

$$k_l N = ma_r$$

Upoštevajmo še zvezo za ravnovesje sil v smeri y ($N = F_g = mg$) in dobimo:

$$k_l mg = ma_r$$

Okrajšajmo maso in v enačbo vstavimo izraz $a_r = \frac{v^2}{r}$:

$$\begin{aligned} k_l g &= a_r \\ k_l g &= \frac{v^2}{r} \end{aligned}$$

Od tod je maksimalna hitrost avtomobila pri vožnji skozi ovinek:

$$\begin{aligned} v^2 &= rk_l g \\ v &= \sqrt{rk_l g} = \sqrt{50\,\mathrm{m}\cdot 0{,}6\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \\ &= 17{,}16\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{17\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}} \qquad (62\,\tfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}) \end{aligned}$$

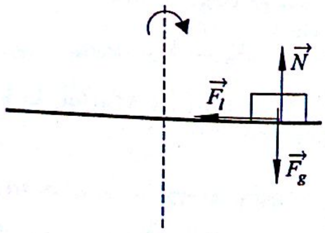
8. Gramofonska plošča se vrti s 45 vrtljaji na minuto. Kako daleč od osi vrtenja smemo na ploščo položiti radirko, da ne zdrsne, če je koeficient lepenja med radirko in ploščo 0,2?

Podatki:

$\nu = \frac{45}{\mathrm{min}} = \frac{0{,}75}{\mathrm{s}}$

$k_l = 0{,}2$

Na skici narišimo sile, ki delujejo na radirko:



V navpični smeri na radirko delujeta sila teže in normala, ki sta nasprotno enaki:

$$N = F_g$$

V vodoravni smeri na radirko deluje le sila lepenja, ki je usmerjena proti središču kroženja. Ker radirka enakomerno kroži, velja:

$$F_l = ma_r$$

Upoštevajmo, da je $F_l = k_l N$ in $N = F_g = mg$:

$$k_l mg = ma_r$$

Okrajšajmo m in upoštevajmo zvezo:

$$a_r = \omega^2 r = (2\pi\nu)^2 r$$

Tako je:

$$k_l g = (2\pi\nu)^2 r = 4\pi^2\nu^2 r$$

Od tod izračunajmo največjo možno oddaljenost radirke od osi vrtenja:

[illegible]

29. Utež [illegible]
frekvenc[illegible]
krogu s [illegible]
K[illegible]

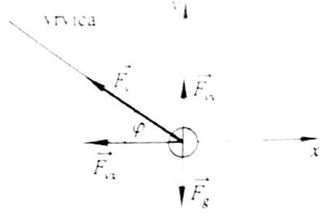
Podatki:

$m = 0{,}80$ kg

$r = 0{,}60$ m

$\nu = 1{,}3$ Hz

Čeprav se nam na pogled morda zdi, da je vrvica, s katero vrtimo utež v vodoravnem krogu, lahko tudi vodoravna, pa temu ni tako. Vrvica je namreč vedno vsaj malo nagnjena glede na vodoravnico, saj mora navpična komponenta sile vrvi uravnovesiti silo teže:



V navpični smeri tako velja:

$$F_{vy} = F_g$$

Od tod je velikost navpične komponente sile vrvi:

$$F_{vy} = mg = 0{,}80\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 7{,}848\,\text{N}$$

V vodoravni smeri utež enakomerno kroži, edina sila, ki deluje nanjo, je vodoravna komponenta sile vrvi:

$$F_{vx} = ma_r$$

Upoštevajmo, da je $a_r = \omega^2 r = (2\pi\nu)^2 r$, in izračunajmo velikost vodoravne komponente sile vrvi:

$$F_{vx} = m(2\pi\nu)^2 r = 0{,}80\,\text{kg}(2\pi \cdot 1{,}3\,\text{Hz})^2 \cdot 0{,}60\,\text{m} = 32{,}02\,\text{N}$$

Vodoravna in navpična komponenta tvorita skupaj z njuno vsoto, silo vrvi, pravokotni trikotnik. Velikost vsote, torej sile vrvi, zato izračunajmo s Pitagorovim izrekom:

$$F_v = \sqrt{F_{vx}^2 + F_{vy}^2} = \sqrt{(7{,}848\,\text{N})^2 + (32{,}02\,\text{N})^2} =$$
$$= 32{,}97\,\text{N} = \underline{\underline{33\,\text{N}}}$$

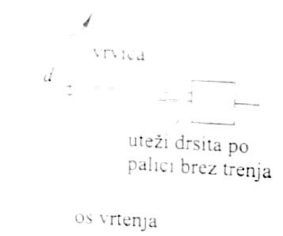
Kot, ki ga sila vrvi oklepa z vodoravnico, izračunajmo iz enakosti:

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{F_{vy}}{F_{vx}} = \frac{7{,}848\,\text{N}}{32{,}02\,\text{N}} = 0{,}2451$$

Od tod je:

$$\varphi = \text{tg}^{-1} 0{,}2451 = 13{,}77^\circ = \underline{\underline{14^\circ}}$$

[illegible] na lahki palici, po kateri drsita [illegible] vrvico. Palico zavr- [illegible] tako, da uteži krožita [illegible]. Težja utež 15 cm oddaljena od [illegible] zdrsneta. Kolikšno je razmerje mas [illegible]



Podatki:

$d = 0{,}50$ m

$r_1 = 15\,\text{cm} = 0{,}15$ m

Uteži krožita po krožnicah z različnima polmeroma. Težja utež kroži po krožnici s polmerom $r_1 = 0{,}15$ m, lažja utež pa tako po krožnici s polmerom:

$$r_2 = d - r_1 = 0{,}35\,\text{m}$$

Upoštevajmo, da je $F_l = k_l N$ in $N = F_g = mg$:

$$k_l mg = ma_r$$

Okrajšajmo m in upoštevajmo zvezo:

$$a_r = \omega^2 r = (2\pi\nu)^2 r$$

Tako je:

$$k_l g = (2\pi\nu)^2 r = 4\pi^2\nu^2 r$$

Od tod izračunajmo največjo možno oddaljenost radirke od osi vrtenja:

$$r = \frac{k_l g}{4\pi^2\nu^2} = \frac{0{,}2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{4 \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{0{,}75}{\mathrm{s}}\right)^2} =$$

$$= 0{,}08835\,\mathrm{m} = 8{,}835\,\mathrm{cm} = \underline{\underline{8{,}8\,\mathrm{cm}}}$$

△9. Utež z maso 0,80 kg je privezana na vrvici. Vrtimo jo s frekvenco 1,3 Hz tako, da enakomerno kroži po vodoravnem krogu s polmerom 0,60 m. S kolikšno silo je napeta vrvica? Kolikšen kot pri tem oklepa vrvica z vodoravnico?

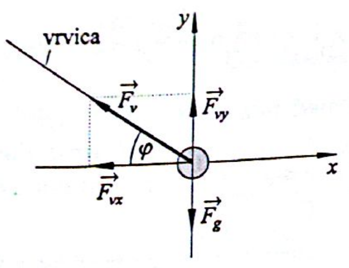
Podatki:

$m = 0{,}80$ kg

$r = 0{,}60$ m

$\nu = 1{,}3$ Hz

Čeprav se nam na pogled morda zdi, da je vrvica, s katero vrtimo utež v vodoravnem krogu, lahko tudi vodoravna, pa temu ni tako. Vrvica je namreč vedno vsaj malo nagnjena glede na vodoravnico, saj mora navpična komponenta sile vrvi uravnovesiti silo teže:



V navpični smeri tako velja:

$$F_{vy} = F_g$$

Od tod je velikost navpične komponente sile vrvi:

$$F_{vy} = mg = 0{,}80\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 7{,}848\,\mathrm{N}$$

V vodoravni smeri utež enakomerno kroži, edina sila, ki deluje nanjo, je vodoravna komponenta sile vrvi:

$$F_{vx} = ma_r$$

Upoštevajmo, da je $a_r = \omega^2 r = (2\pi\nu)^2 r$, in izračunajmo velikost vodoravne komponente sile vrvi:

$$F_{vx} = m(2\pi\nu)^2 r = 0{,}80\,\mathrm{kg}(2\pi \cdot 1{,}3\,\mathrm{Hz})^2 \cdot 0{,}60\,\mathrm{m} = 32{,}02\,\mathrm{N}$$

Vodoravna in navpična komponenta tvorita skupaj z njuno vsoto, silo vrvi, pravokotni trikotnik. Velikost vsote, torej sile vrvi, zato izračunajmo s Pitagorovim izrekom:

$$F_v = \sqrt{F_{vx}^2 + F_{vy}^2} = \sqrt{(7{,}848\,\mathrm{N})^2 + (32{,}02\,\mathrm{N})^2} =$$

$$= 32{,}97\,\mathrm{N} = \underline{\underline{33\,\mathrm{N}}}$$

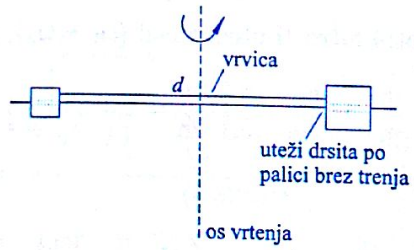
Kot, ki ga sila vrvi oklepa z vodoravnico, izračunajmo iz enakosti:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{F_{vy}}{F_{vx}} = \frac{7{,}848\,\mathrm{N}}{32{,}02\,\mathrm{N}} = 0{,}2451$$

Od tod je:

$$\varphi = \mathrm{tg}^{-1} 0{,}2451 = 13{,}77° = \underline{\underline{14°}}$$

△10. Dve uteži sta pritrjeni na lahki palici, po kateri drsita brez trenja. Povezani sta z 0,50 m dolgo vrvico. Palico zavrtimo okrog pravokotne osi skozi središče tako, da uteži krožita po vodoravnih krogih. Če je težja utež 15 cm oddaljena od osi, uteži kljub vrtenju ne zdrsneta. Kolikšno je razmerje mas uteži?



Podatki:

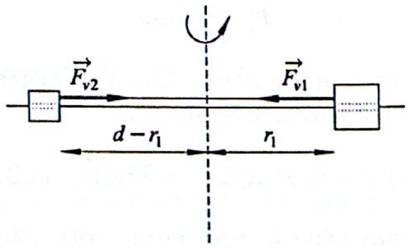
$d = 0{,}50$ m

$r_1 = 15\,\mathrm{cm} = 0{,}15$ m

Uteži krožita po krožnicah z različnima polmeroma. Težja utež kroži po krožnici s polmerom $r_1 = 0{,}15$ m, lažja utež pa tako po krožnici s polmerom:

$$r_2 = d - r_1 = 0{,}35\,\mathrm{m}$$

Uteži sta povezani z vrvico, ki vsako od njiju vleče proti središču kroženja:



Ker v ravnini kroženja na uteži ne deluje nobena druga sila, za uteži velja:

$$F_{v1} = m_1 a_{r1} \qquad \text{in} \qquad F_{v2} = m_2 a_{r2}$$

Z upoštevanjem III. Newtonovega zakona ugotovimo, da sta F_{v1} in F_{v2} nasprotno enaki sili, torej enaki po velikosti:

$$F_{v1} = F_{v2}$$

Od tod pa sledi:

$$m_1 a_{r1} = m_2 a_{r2}$$

Tako je razmerje mas uteži:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_{r2}}{a_{r1}}$$

V enačbo vstavimo izraz za velikost radialnega pospeška $a_r = \omega^2 r$:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\omega_2^2 r_2}{\omega_1^2 r_1}$$

Ker pa sta kotni hitrosti uteži enaki ($\omega_1 = \omega_2$), dobimo:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{0{,}35\,\mathrm{m}}{0{,}15\,\mathrm{m}} = 2{,}333 = \underline{\underline{2{,}3}}$$

3.7 Gravitacijska sila

1. S kolikšno gravitacijsko silo se privlačita majhni telesi z masama 200 g in 300 g, če sta oddaljeni 22 cm?

Podatki:

$$m_1 = 100\,\mathrm{g} = 0{,}20\,\mathrm{kg}$$

$$m_2 = 300\,\mathrm{g} = 0{,}30\,\mathrm{kg}$$

$$r = 22\,\mathrm{cm} = 0{,}22\,\mathrm{m}$$

Velikost gravitacijske sile med med dvema majhnima (točkastima) telesoma izračunamo z Newtonovim gravitacijskim zakonom:

$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

m_1 in m_2 sta masi teles, r oddaljenost med njima, G pa je gravitacijska konstanta:

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$$

Tako je velikost sile med telesoma:

$$\begin{aligned} F &= \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2} \cdot 0{,}20\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}30\,\mathrm{kg}}{(0{,}22\,\mathrm{m})^2} = \\ &= 8{,}269 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N} = \underline{\underline{8{,}3 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N}}} \end{aligned}$$

Gravitacijska sila je vedno privlačna, zato se za smer sile ne zanimamo posebej.

2. Kolikšna je razdalja med dvema točkastima telesoma z masama 35 g in 75 g, če se privlačita s silo $3{,}4 \cdot 10^{-13}$ N?

Podatki:

$$m_1 = 35\,\mathrm{g} = 0{,}035\,\mathrm{kg}$$

$$m_2 = 75\,\mathrm{g} = 0{,}075\,\mathrm{kg}$$

$$F = 3{,}4 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{N}$$

Iz Newtonovega gravitacijskega zakona

$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

dobimo:

$$r^2 = \frac{G m_1 m_2}{F}$$

Tako je razdalja med telesoma:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{G m_1 m_2}{F}} = \\ &= \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2} \cdot 0{,}035\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}075\,\mathrm{kg}}{3{,}4 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{N}}} = \\ &= 0{,}7176\,\mathrm{m} = \underline{\underline{0{,}72\,\mathrm{m}}} \end{aligned}$$

3. Dve kovinski krogli, ena z maso 850 kg in polmerom 30 cm, druga pa z maso 290 kg in polmerom 20 cm, se dotikata. S kolikšno gravitacijsko silo deluje težja krogla na lažjo? Kaj pa lažja na težjo?

Podatki:

$m_1 = 850$ kg

$r_1 = 30\,\mathrm{cm} = 0{,}30\,\mathrm{m}$

$m_2 = 290$ kg

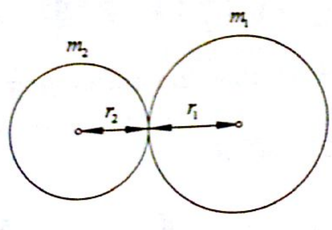
$r_2 = 20\,\mathrm{cm} = 0{,}20\,\mathrm{m}$

Gravitacijski zakon

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

v tej obliki velja tudi za krogli, čeprav nista majhni oziroma zelo oddaljeni. Razdalja med kroglama je v tem primeru razdalja med **težiščema krogel**. Ker se krogli dotikata, je to kar vsota njunih polmerov:

$$r = r_1 + r_2 = 0{,}50\,\mathrm{m}$$

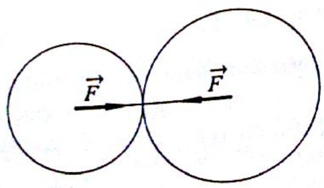


Velikost privlačne gravitacijske sile med kroglama je tako:

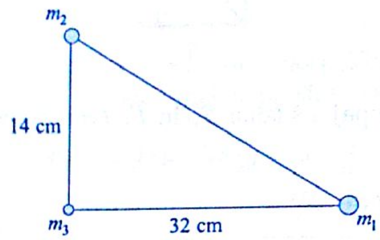
$$F = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\dfrac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{kg^2}} \cdot 850\,\mathrm{kg} \cdot 290\,\mathrm{kg}}{(0{,}50\,\mathrm{m})^2} =$$

$$= 6{,}577 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{N} = \underline{\underline{6{,}6 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{N}}}$$

Izračunali smo velikost sil, s katerima krogli privlačita ena drugo. Velikost sile težje krogle na lažjo in velikost sile lažje krogle na težjo sta namreč enaki (III. Newtonov zakon):



4. Tri frnikule z masami $m_1 = 230$ g, $m_2 = 150$ g in $m_3 = 180$ g so razporejene v ogliščih pravokotnega trikotnika, kot kaže slika. Kolikšna je skupna gravitacijska sila, s katero frnikuli 1 in 2 privlačita frnikulo 3?



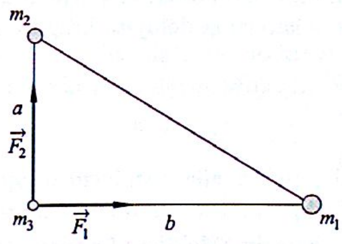
Podatki:

$m_1 = 230\,\mathrm{g} = 0{,}23\,\mathrm{kg}$ $\quad a = 14\,\mathrm{cm} = 0{,}14\,\mathrm{m}$

$m_2 = 150\,\mathrm{g} = 0{,}15\,\mathrm{kg}$ $\quad b = 32\,\mathrm{cm} = 0{,}32\,\mathrm{m}$

$m_3 = 180\,\mathrm{g} = 0{,}18\,\mathrm{kg}$

Frnikuli 1 in 2 privlačita frnikulo 3 vsaka v svojo smer:



Z gravitacijskim zakonom izračunajmo velikost vsake sile posebej:

$$F_1 = \frac{Gm_1m_3}{b^2} =$$

$$= \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\dfrac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{kg^2}} \cdot 0{,}23\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}18\,\mathrm{kg}}{(0{,}32\,\mathrm{m})^2} =$$

$$= 2{,}697 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N}$$

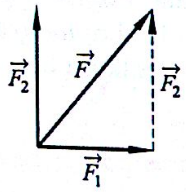
in

$$F_2 = \frac{Gm_2m_3}{a^2} =$$

$$= \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\dfrac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{kg^2}} \cdot 0{,}15\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}18\,\mathrm{kg}}{(0{,}14\,\mathrm{m})^2} =$$

$$= 9{,}188 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N}$$

Narišimo rezultanto teh sil:



Rezultanta skupaj s silama $\vec{F_1}$ in $\vec{F_2}$ tvori pravokotni trikotnik, zato je:

$$
\begin{aligned}
F^2 &= F_1^2 + F_2^2 \\
F &= \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \\
&= \sqrt{(2{,}697 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N})^2 + (9{,}188 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N})^2} = \\
&= 9{,}576 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N} = \underline{\underline{9{,}6 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N}}}
\end{aligned}
$$

5. Dve kovinski krogli z masama 120 kg in 270 kg sta na razdalji 5,0 m. Kam moramo postaviti tretjo kroglo, da bo vsota gravitacijskih sil, s katerima delujeta krogli nanjo, enaka nič?

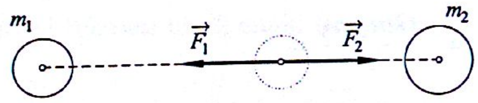
Podatki:

$m_1 = 120\ \mathrm{kg}$

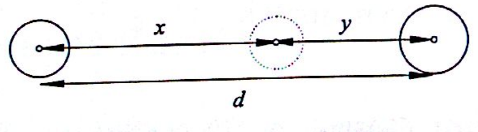
$m_2 = 270\ \mathrm{kg}$

$d = 5{,}0\ \mathrm{m}$

Da bo vsota sil, s katerima delujeta krogli na tretjo, enaka nič, moramo tretjo kroglo postaviti nekam med njiju, na njuno zveznico, saj se le tako sili odštejeta (izničita):



Razdaljo od prve do tretje krogle označimo z x, razdaljo od druge do tretje krogle pa z y:



Jasno je, da velja:

$$x + y = d$$

Če se sili med seboj izničita in je njuna rezultanta enaka nič, morata biti velikosti sil $\vec{F_1}$ in $\vec{F_2}$ enaki:

$$F_1 = F_2$$

Velikosti sil izrazimo z gravitacijskim zakonom, pri tem pa upoštevajmo oznaki za razdalji med kroglami (x in y):

$$\frac{Gm_1m_3}{x^2} = \frac{Gm_2m_3}{y^2}$$

V enačbi okrajšajmo G in m_3:

$$\frac{m_1}{x^2} = \frac{m_2}{y^2}$$

Enačbo preoblikujmo:

$$x^2 = \frac{y^2 m_1}{m_2}$$

Od tod je:

$$x = y\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$$

Zvezo vstavimo v izraz, ki povezuje razdalji x in y:

$$
\begin{aligned}
x + y &= d \\
y\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} + y &= d
\end{aligned}
$$

Iz dobljene enačbe izrazimo in izračunajmo razdaljo y:

$$
\begin{aligned}
y\left(\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} + 1\right) &= d \\
y &= \frac{d}{\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} + 1} = \frac{5{,}0\,\mathrm{m}}{\sqrt{\frac{120\,\mathrm{kg}}{270\,\mathrm{kg}}} + 1} = \\
&= 3\,\mathrm{m} = \underline{\underline{3{,}0\,\mathrm{m}}}
\end{aligned}
$$

Srednja krogla je tako od težje krogle oddaljena 3,0 m, od lažje pa 2,0 m.

6. Z uporabo gravitacijskega zakona izračunaj maso Zemlje. Polmer Zemlje meri približno 6 400 km.

Podatki:

$R_Z = 6\,400\,\mathrm{km} = 6{,}4 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$

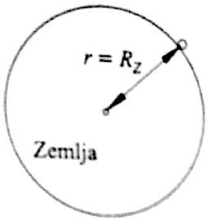
Da bi izračunali maso Zemlje, si na površini Zemlje zamislimo neko majhno točkasto telo (žogico, kamen, frnikulo ...). Silo, s katero Zemlja privlači telo, lahko izrazimo na dva načina. Prvič, kot silo teže:

$$F_g = mg$$

g je težni pospešek ($g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$).

Ali s pomočjo gravitacijskega zakona. Razdalja med njunima težiščema je kar polmer Zemlje:

$$F = \frac{GmM_Z}{R_Z^2}$$



Z M_Z smo označili maso Zemlje.

Izraza izenačimo:

$$mg = \frac{GmM_Z}{R_Z^2}$$

Okrajšamo maso majhnega telesa:

$$g = \frac{GM_Z}{R_Z^2}$$

Iz dobljene enačbe pa izrazimo in izračunajmo maso Zemlje:

$$M_Z = \frac{gR_Z^2}{G} = \frac{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot(6{,}4\cdot 10^6\,\mathrm{m})^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}} =$$

$$= 6{,}024\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} = \underline{\underline{6{,}0\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}}$$

7. Kolikšen je težni pospešek na Marsu? Polmer Marsa je 3380 km, masa pa $6{,}5\cdot 10^{23}$ kg.

Podatki:

$R_m = 3\,380\,\mathrm{km} = 3{,}38\cdot 10^6\,\mathrm{m}$

$M_m = 6{,}5\cdot 10^{23}\,\mathrm{kg}$

Uporabimo zvezo, ki smo jo izpeljali v prejšnji nalogi:

$$g = \frac{GM_m}{R_m^2}$$

Namesto mase in polmera Zemlje smo v enačbo vstavili maso in polmer Marsa.

Od tod izračunajmo velikost težnega pospeška na Marsu:

$$g = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}\cdot 6{,}5\cdot 10^{23}\,\mathrm{kg}}{(3{,}38\cdot 10^6\,\mathrm{m})^2} = 3{,}795\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \underline{\underline{3{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}$$

8. Koliko tehta liter vode na površju Marsa? Uporabi rezultat iz prejšnje naloge.

Kot vemo, ima liter vode maso 1,0 kg. Težo litra vode na Marsu izračunajmo z enačbo:

$$F_g = mg$$

Upoštevajmo velikost težnega pospeška na Marsu ($g = 3{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$), ki smo jo izračunali v prejšnji nalogi:

$$F_g = 1{,}0\,\mathrm{kg}\cdot 3{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \underline{\underline{3{,}8\,\mathrm{N}}}$$

9. Kako daleč od zemeljske površine kroži satelit, ki Zemljo obkroži v 8,0 urah? Polmer Zemlje je 6 400 km, masa Zemlje pa $6{,}0\cdot 10^{24}$ kg.

Podatki:

$t_0 = 8{,}0\,\mathrm{h} = 8{,}0\cdot 3\,600\,\mathrm{s} = 2{,}88\cdot 10^4\,\mathrm{s}$

$r_Z = 6\,400\,\mathrm{km} = 6{,}4\cdot 10^6\,\mathrm{m}$

$M_Z = 6{,}0\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$

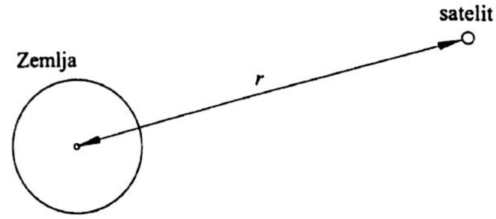
Predpostavimo, da satelit enakomerno kroži okoli Zemlje. Za telo, ki enakomerno kroži, velja enačba (II. Newtonov zakon):

$$F = ma_r$$

Na satelit deluje le privlačna sila Zemlje, ki je tako hkrati enaka vsoti vseh sil na satelit. Velikost privlačne sile Zemlje izrazimo z gravitacijskim zakonom:

$$F = \frac{GmM_Z}{r^2}$$

Pri tem je m masa satelita, M_Z masa Zemlje, r pa polmer kroženja, torej razdalja od **težišča Zemlje do satelita:**



Velikost radialnega pospešek satelita izrazimo z obhodnim časom in radijem kroženja:

$$a_r = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{t_0}\right)^2 r$$

Sedaj oba izraza postavimo v enačbo $F = ma_r$:

$$\frac{GmM_Z}{r^2} = m\left(\frac{2\pi}{t_0}\right)^2 r$$

r je v obeh primerih polmer kroženja, torej razdalja od težišča Zemlje do satelita. Okrajšajmo maso satelita in enačbo preuredimo:

$$\frac{GM_Z}{r^3} = \left(\frac{2\pi}{t_0}\right)^2$$

$$\frac{GM_Z}{r^3} = \frac{4\pi^2}{t_0^2}$$

Od tod je:

$$r^3 = \frac{GM_Z t_0^2}{4\pi^2}$$

Torej je polmer kroženja satelita:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt[3]{\frac{GM_Z t_0^2}{4\pi^2}} = \\ &= \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2} \cdot 6{,}0 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} \cdot (2{,}88 \cdot 10^4\,\mathrm{s})^2}{4\pi^2}} = \\ &= 20\,330\,000\,\mathrm{m} = 20\,330\,\mathrm{km} \end{aligned}$$

Od polmera kroženja odštejmo polmer Zemlje, da dobimo višino, na kateri kroži satelit:

$$\begin{aligned} h &= r - R_Z = 20\,330\,\mathrm{km} - 6\,400\,\mathrm{km} = \\ &= 13\,930\,\mathrm{km} = \underline{\underline{14\,000\,\mathrm{km}}} \end{aligned}$$

4. Mehanske lastnosti snovi