សិក្សាអនុគមន៍ទម្រង់ $y = f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$

លំហាត់ទី១

f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $I = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ ដោយ $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 4}$ ។

ក. សិក្សាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty,\ -2,\ 2$ និង $+\infty$ ។

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេក និង អាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. សង់នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ ក្រាបតាង f ។

ដំណោះស្រាយ

ក. សិក្សាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty,\ -2,\ 2$ និង $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x^2-4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x^2\left(1 - \dfrac{4}{x^2}\right)} = \frac{2}{1-0} = 2$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2}$

$$\lim_{x\to-2} f(x) = \lim_{x\to-2} \frac{2x^2}{x^2-4} = \pm\infty$$ ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to-2} f(x) = \pm\infty}$

$$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \frac{2x^2}{x^2-4} = \pm\infty$$ ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to2} f(x) = \pm\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2\left(1 - \dfrac{4}{x^2}\right)} = \frac{2}{1-0} = 2$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2}$

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេក និង អាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបតាង f

- ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$ ដូចនេះ: $\boxed{\text{បន្ទាត់ } y = 2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេក}}$

- ដោយ $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \pm\infty \,;\, \lim\limits_{x\to 2} f(x) = \pm\infty$

  ដូចនេះ: $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x = -2 \text{ និង } x = -2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$

ខ. សិក្សាអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

- ដេរីវេ

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2}{x^2-4}\right)' = \frac{\left(2x^2\right)'\left(x^2-4\right)-\left(x^2-4\right)'\left(2x^2\right)}{\left(x^2-4\right)^2} = \frac{4x\left(x^2-4\right)-2x\left(2x^2\right)}{\left(x^2-4\right)^2}$$

$$= \frac{4x^3-16x-4x^3}{\left(x^2-4\right)} = \frac{-16x}{\left(x^2-4\right)}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -16x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

- តារាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	

- $f'(x) > 0$ ឬ អនុគមន៍ f កើន នៅពេល $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0)$

- $f'(x) < 0$ ឬ អនុគមន៍ f ចុះ នៅពេល $x \in (0, 2) \cup (2, +\infty)$

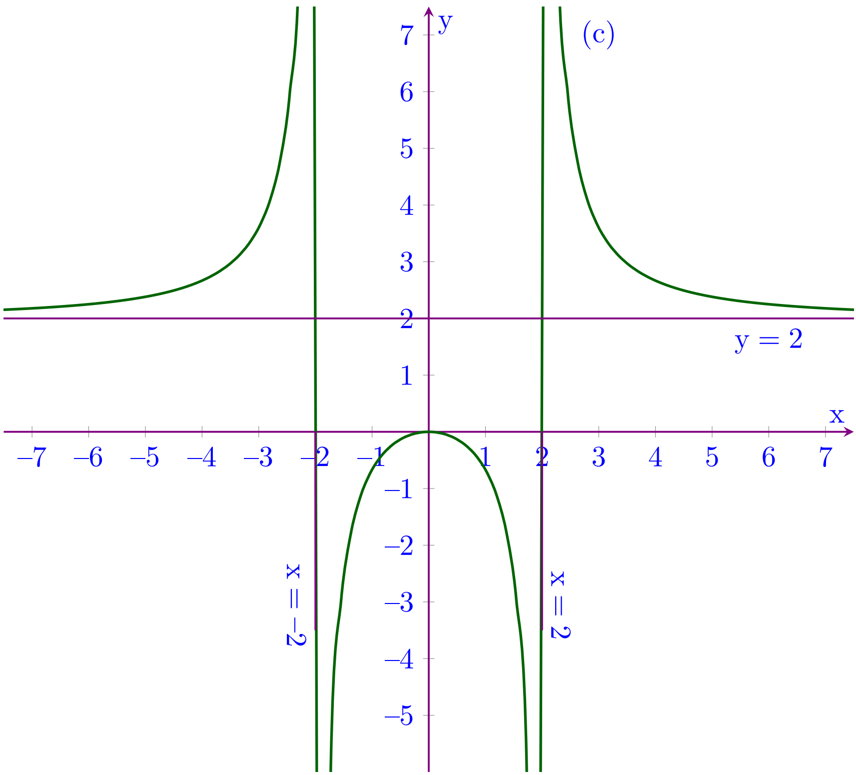
- ត្រង់ $x = 0$; $f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$

  គេបាន f មានអតិបរមាធៀបមួយ គឺ $f(0) = \dfrac{2(0)^2}{0^2-4} = 0$

• តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2

គ. សង់នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ ក្រាបតាង f



លំហាត់ទី២

អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x \neq -2,\ \ x \neq 2$ ដោយ $y = f(x) = \dfrac{x^2}{4-x^2}$ និងមានក្រាប C ។

១. គណនា $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)$ ។
ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C ។

២. សិក្សាសញ្ញានៃដេរីវេ $f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

៣. គណនា $f(-3)$ និង $f(3)$ ហើយសង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ f ។

ដំណោះស្រាយ

១. គណនា $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)$

ដោយ $y = f(x) = \dfrac{x^2}{4-x^2}$ គេបាន

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{x^2}{4-x^2} = \pm\infty \qquad \boxed{\lim_{x\to -2} f(x) = \pm\infty}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2}{4-x^2} = \pm\infty \qquad \boxed{\lim_{x\to 2} f(x) = \pm\infty}$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2}{4-x^2} = -1 \qquad \boxed{\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = -1}$$

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C

- ដោយ $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \pm\infty$ ដូចនេះ: $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x = -2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$
- $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \pm\infty$ ដូចនេះ: $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x = 2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$
- ដោយ $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = -1$ ដូចនេះ: $\boxed{\text{បន្ទាត់ } y = -1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេក}}$

២. សិក្សាសញ្ញានៃដេរីវេ $f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{4-x^2}\right)' = \frac{2x\left(4-x^2\right) + 2x\left(x^2\right)}{\left(x^2\right)^2} = \frac{8x - 2x^3 + 2x^3}{x^4} = \frac{8x}{x^4}$$

ដោយ $x^4 \geq 0 \quad \forall x \in D_f$ គេបាន $f'(x)$ មានសញ្ញាតាមភាគយក $8x$

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

តារាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	$-\infty$		-2			0			2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$		0	$+$		$\Vert$	$+$	

- $f'(x) < 0$ ឬ អនុគមន៍ f ចុះ ពេល $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0)$
- $f'(x) > 0$ ឬ អនុគមន៍ f កើន ពេល $x \in (0, 2) \cup (2, +\infty)$
- ត្រង់ $x = 0$; $f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$

  គេបាន f មានអប្បបរមាធៀបមួយ គឺ $f(0) = \dfrac{(0)^2}{4 - 0^2} = 0$

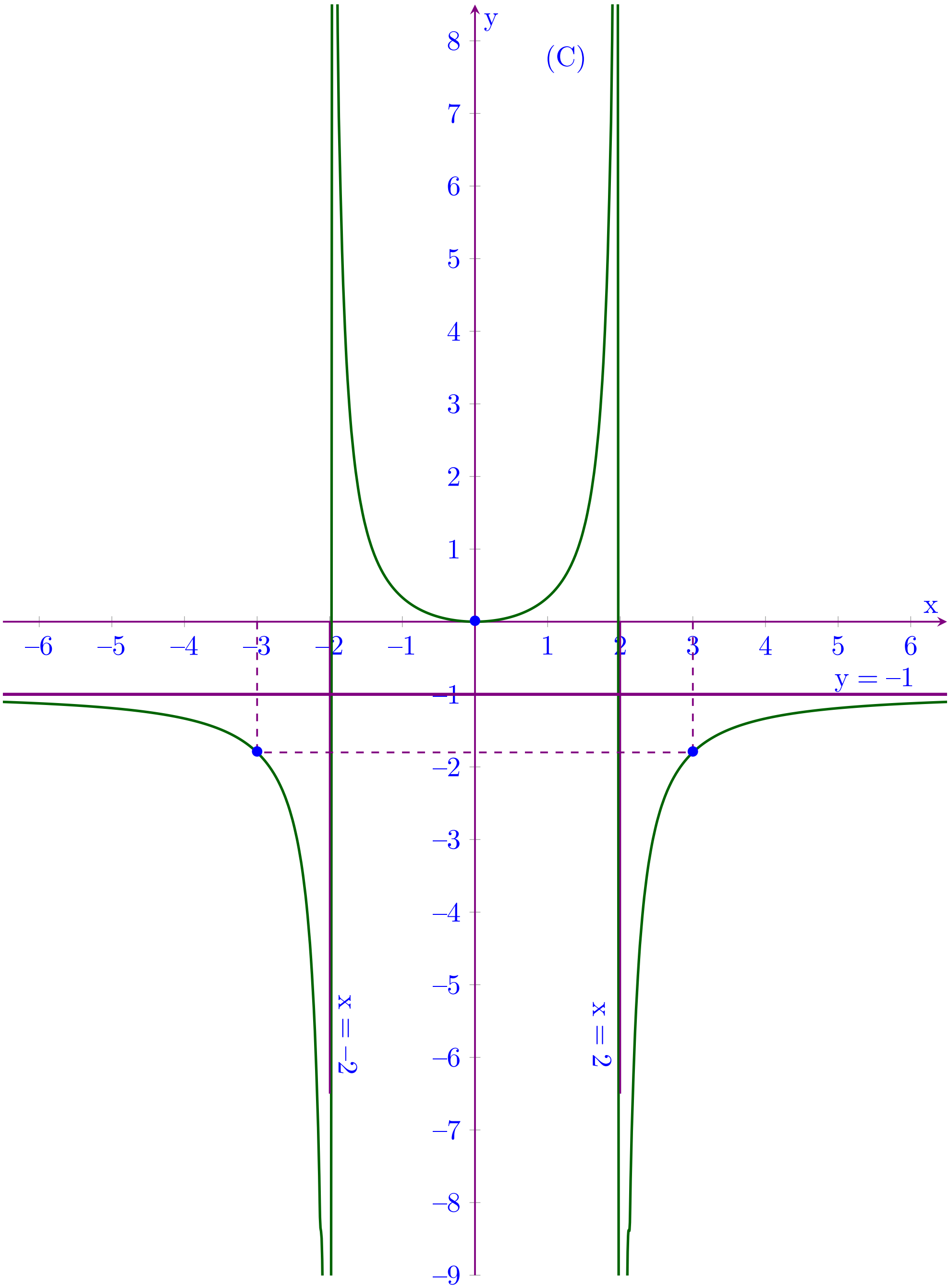
តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		-2			0			2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$		0	$+$		$\Vert$	$+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$		0		$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	-1

៣. គណនា $f(-3)$ និង $f(3)$ ហើយសង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ f

- $f(-3) = \dfrac{(-3)^2}{4 - (-3)^2} = \dfrac{9}{-5}$ $\boxed{f(-3) = -\dfrac{9}{5}}$

- $f(3) = \dfrac{3^2}{4 - 3^2} = \dfrac{9}{-5}$ $\boxed{f(3) = -\dfrac{9}{5}}$


y
(C)
x
y = −1
x = −2
x = 2
−6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6
8 7 6 5 4 3 2 1 −1 −2 −3 −4 −5 −6 −7 −8 −9

លំហាត់ទី៣

អនុគមន៍ f មួយកំណត់ដោយ $y = f(x) = \dfrac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 12}$ មានក្រាបតំណាង (C) ។

ក. ចូររកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

ខ. ចូរគណនាលីមីត៖ $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)$ ។

គ. កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប(C) ។

ឃ. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f រួចសិក្សាសញ្ញាដេរីវេ។

ង. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់ក្រាប(C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

យើងមាន $y = f(x) = \dfrac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 12}$

ដោយ f(x) មានន័យលុះត្រាតែ $x^2 + x - 12 \neq 0 \quad \Leftrightarrow (x+4)(x-3) \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 4 \neq 0 \\ x - 3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -4 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{-4, 3\}}$

ខ. គណនាលីមីត៖ $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to -4} f(x) = \lim_{x\to -4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 12} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 12} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 12} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2\left(2 - \frac{9}{x} + \frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{12}{x^2}\right)} = 2$$

គ. កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប(C)

ដោយ $\lim\limits_{x\to -4} f(x) = \pm\infty$ និង $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \pm\infty$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x = -4 \text{ និង } x = 3 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប} C}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = 2$ ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } y = 2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេក}}$

ឃ. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12}\right)' = \frac{(4x-9)\left(x^2+x-12\right)-(2x+1)\left(2x^2-9x+4\right)}{\left(x^2+x-12\right)^2}$$

$$= \frac{11x^2-56x+104}{\left(x^2+x-12\right)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = \dfrac{11x^2-56x+104}{\left(x^2+x-12\right)^2}}$

សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 11x^2-56x+104 = 0 \quad \Rightarrow \Delta = (-56)^2-4(11)(104) = -1440 < 0$

យើងបាន $f'(x)$ មានសញ្ញាដូចមេគុណ a

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	‖	$+$	

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{D}$ ដូចនេះ អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍កើនលើដែនកំណត់ D_f

ង. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់ក្រាប(C)

តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2

សង់ក្រាប

$$(C)\cap(x'Ox) \Leftrightarrow y=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2-9x+4=0$$

$$\Delta = b^2-4ac=(-9)^2-4(2)(4)=81-32=49$$

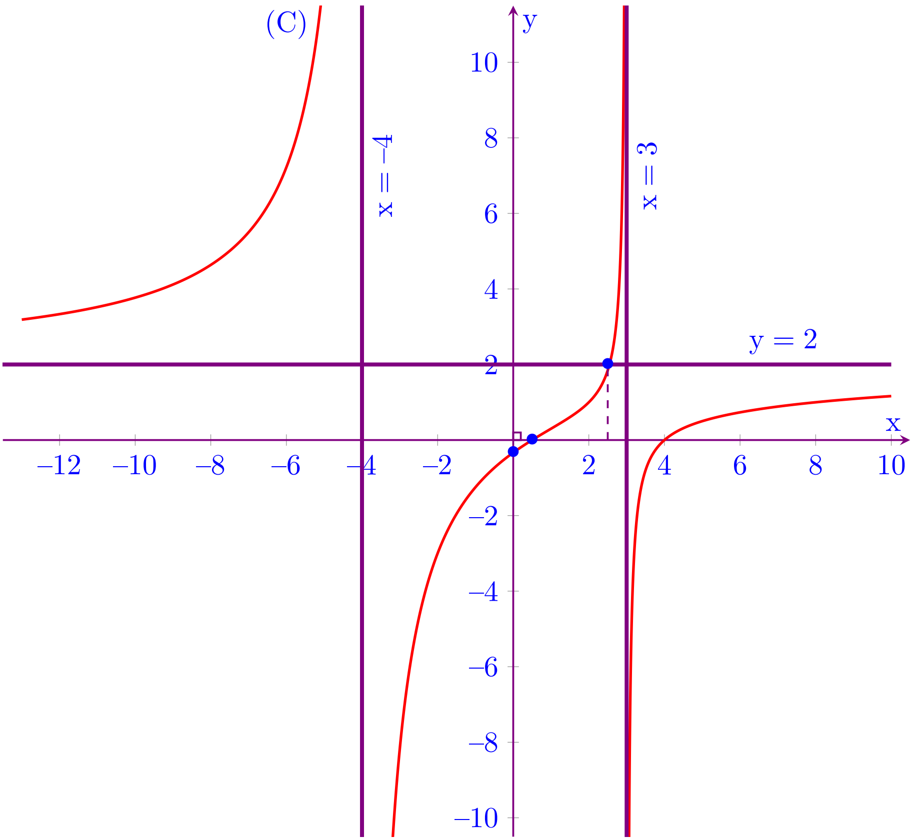
$$\Rightarrow \quad x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{9-\sqrt{49}}{2(2)}=\frac{1}{2}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{9+\sqrt{49}}{2(2)}=4$$

$$(C)\cap(y'Oy) \Leftrightarrow x=0 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{2(0)^2-9(0)+4}{0^2+0-12}=\frac{4}{-12}=-\frac{1}{3}$$

$$(C)\cap(d): y=2 \Leftrightarrow 2=\frac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12} \quad \Rightarrow x=\frac{28}{11}$$

- អាស៊ីមតូតឈរ $x=-4,\ x=3$ អាស៊ីមតូតដេក $y=2$



លំហាត់ទី៤

គេមានអនុគមន៍ f មួយកំណត់ដោយ $y=f(x)=\dfrac{3x^2-18x+25}{x^2-6x+8}$ មានក្រាបតំណាង(C)។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍f។

ខ. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍f ត្រង់ $\pm\infty$; 2 និង 4 ។ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងដេក។

គ. ចូរបង្ហាញថា $f'(x)=\dfrac{-2x+6}{\left(x^2-6x+8\right)^2}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}-\{2,4\}$។

ឃ. សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ$f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍f។

ង. សង់ក្រាប (C)។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍f យើងមាន $y=f(x)=\dfrac{3x^2-18x+25}{x^2-6x+8}$

$f(x)$ មានន័យលុះត្រាតែ $x^2-6x+8\neq 0 \Leftrightarrow \quad (x-2)(x-4)\neq 0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x-2\neq 0\\ x-4\neq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq 2\\ x\neq 4\end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{D_f=\mathbb{R}-\{2,4\}}$

ខ. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍f ត្រង់ $\pm\infty$; 2 និង 4

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-18x+25}{x^2-6x+8}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(3-\frac{18}{x}+\frac{25}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{6}{x}+\frac{8}{x^2}\right)}=3$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-18x+25}{x^2-6x+8}=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4}\frac{3x^2-18x+25}{x^2-6x+8}=\pm\infty$$

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងដេក

ដោយ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\pm\infty$; $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\pm\infty$

ដូចេនះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x=2;\ x=4 \text{ ជាអាស៊ីមតតូតឈរ}}$

ដោយ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 3$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } y = 3 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេក}}$

គ. បង្ហាញថា $f'(x) = \dfrac{-2x+6}{\left(x^2-6x+8\right)^2}$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R} - \{2,4\}$

$$f'(x) = \left(\frac{3x^2-18x+25}{x^2-6x+8}\right)'$$

$$= \frac{(6x-18)\left(x^2-6x+8\right)-(2x-6)\left(3x^2-18x+25\right)}{\left(x^2-6x+8\right)^2}$$

$$= \frac{-2x+6}{\left(x^2-6x+8\right)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = \dfrac{-2x+6}{\left(x^2-6x+8\right)^2}}$

ឃ. សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x+6 = 0 \quad \Rightarrow x = 3$$

តារាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	

- $f'(x) < 0$ ឬ អនុគមន៍ f ចុះ ពេល $x \in (3,4) \cup (4,+\infty)$
- $f'(x) > 0$ ឬ អនុគមន៍ f កើន ពេល $x \in (-\infty,2) \cup (2,3)$
- ត្រង់ $x = 3;\ f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$

  គេបាន f មានអតិបរមាធៀបមួយ គឺ $f(3) = \dfrac{3(3)^2-18(3)+25}{3^2-6(3)+8} = 2$

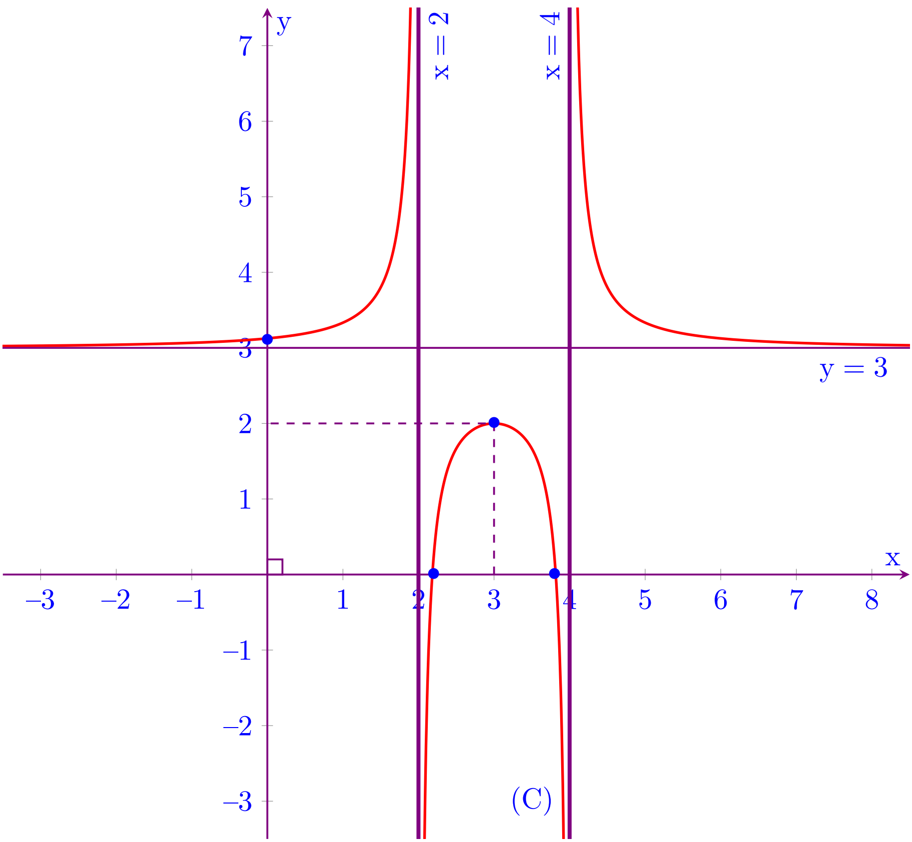
សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍f

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3

ង. សង់ក្រាប (C)

$$(C)\cap(x'ox) \Leftrightarrow y=0 \Leftrightarrow 3x^2-18x+25=0 \Rightarrow x_1=\frac{9-\sqrt{6}}{3}\ ;\ x_2=\frac{9+\sqrt{6}}{3}$$

$$(C)\cap(y'oy) \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y=\frac{3(0)^2-18(0)+25}{0^2-6(0)+8}=\frac{25}{8}$$



លំហាត់ទី៥

គេឲ្យអនុគមន៍ f មួយ កំណត់ដោយ $y = f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x^2+4}$ មានក្រាបតំណាង(C) ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍f។

ខ. រកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប(C)។

គ. សិក្សាអថិរភាព និងសង់តារាងអថិរភាពនៃអនុគមន៍f ។

ឃ. សង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយ$\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍f យើងមាន $y = f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x^2+4}$

$f(x)$ មានន័យលុះត្រាតែ $x^2+4 \neq 0$ ដោយ $x^2+4 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

ខ. រកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប(C)

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+2x}{x^2+4} = 1$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } y = 1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប}(C)}$

គ. សិក្សាអថិរភាព និងសង់តារាងអថិរភាពនៃអនុគមន៍f

ដេរីវេ$f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2+2x}{x^2+4}\right)' \\ &= \frac{(2x+2)\left(x^2+4\right)-(2x)\left(x^2+2x\right)}{\left(x^2+4\right)^2} \\ &= \frac{2x^3+8x+2x^2+8-2x^3-4x^2}{\left(x^2+4\right)^2} \\ &= \frac{-2x^2+8x+8}{\left(x^2+4\right)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \quad -2x^2+8x+8=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=8^2-4(-2)(8)=64+64=128$$

$$\Rightarrow \quad x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-8-\sqrt{128}}{2(-2)}=\frac{-8-8\sqrt{2}}{-4}=2+2\sqrt{2}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-8+\sqrt{128}}{2(-2)}=\frac{-8+8\sqrt{2}}{-4}=2-2\sqrt{2}$$

តារាងសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	$-\infty$		$2-2\sqrt{2}$		$2+2\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- $f'(x)<0$ ឬ អនុគមន៍ f ចុះ នៅពេល $x\in\left(-\infty,2-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2+2\sqrt{2},+\infty\right)$
- $f'(x)>0$ ឬ អនុគមន៍ f កើន នៅពេល $x\in\left(2-2\sqrt{2},\ 2+2\sqrt{2}\right)$

បរមាធៀប៖

- ត្រង់ $x=2-2\sqrt{2}$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី$-$ ទៅ $+$ យើងបាន f មានអប្បបរមាធៀបមួយគឺ

$$f(2-2\sqrt{2})=\frac{\left(2-2\sqrt{2}\right)^2+2\left(2-2\sqrt{2}\right)}{\left(2-2\sqrt{2}\right)^2+4}=\frac{4-8\sqrt{2}+8+4-4\sqrt{2}}{4-8\sqrt{2}+8+4}$$

$$=\frac{16-12\sqrt{2}}{16-8\sqrt{2}}=\frac{4-3\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}\times\frac{4+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{16+8\sqrt{2}-12\sqrt{2}-12}{16-8}$$

$$=\frac{4-4\sqrt{2}}{8}=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

- ត្រង់ $x=2+2\sqrt{2}$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី$+$ ទៅ $-$ យើងបាន f មានអតិបរមាធៀបមួយគឺ

$$f(2+2\sqrt{2})=\frac{\left(2+2\sqrt{2}\right)^2+2\left(2+2\sqrt{2}\right)}{\left(2+2\sqrt{2}\right)^2+4}=\frac{4+8\sqrt{2}+8+4+4\sqrt{2}}{4+8\sqrt{2}+8+4}$$

$$= \frac{16+12\sqrt{2}}{16+8\sqrt{2}} = \frac{4+3\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} \times \frac{4-2\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{16-8\sqrt{2}+12\sqrt{2}-12}{16-8}$$

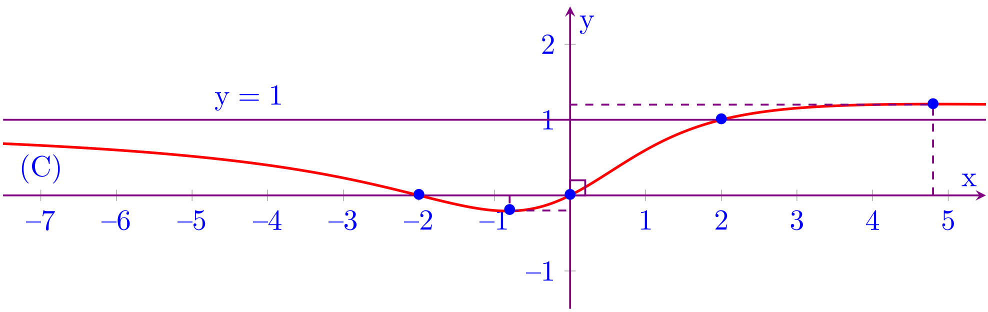
$$= \frac{4+4\sqrt{2}}{8} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

- តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍f

x	$-\infty$		$2-2\sqrt{2}$		$2+2\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	1

ឃ. សង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយ$\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

- $(C) \cap (x'ox) \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow (x)(x+2) = 0 \quad \Rightarrow x = 0, x = -2$
- $(C) \cap (y'oy) \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{0^2 + 2(0)}{0^2 + 4} = 0$
- $(C) \cap (d) : y = 1 \Leftrightarrow 1 = \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 + 4} \Leftrightarrow x^2 + 4 = x^2 + 2x \quad \Rightarrow x = 2$



លំហាត់ទី៦

គេមានអនុគមន៍មួយ កំណត់ដោយលើ $\mathbb{R}-\{-2\}$ ដែល $y=f(x)=\dfrac{x^2-1}{(x+2)^2}$ ។

តាង(C) ជាក្រាបតំណាងនៃអនុគមន៍f។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$; $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)$ ។ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងអស់ដែលមាន ។

ខ. គណនាដេរីវេ$f'(x)$ រួចបង្ហាញថាអនុគមន៍f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបមួយស្មើ $-\dfrac{1}{3}$ ត្រង់ $x=-\dfrac{1}{2}$ ។

គ. សង់តារាងអថេរភាព រួចសង់ក្រាប(C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$; $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-1}{(x+2)^2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x)=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)^2}=1$$

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងអស់ដែលមាន

ដោយ $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=+\infty$ ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់}x=-2\text{ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប}(C)}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)=1$ ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់}y=1\text{ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប}(C)}$

ខ. គណនាដេរីវេ$f'(x)$

$$\begin{aligned}
f'(x)=\left(\frac{x^2-1}{(x+2)^2}\right)' &= \frac{2x(x+2)^2-2(x+2)\left(x^2-1\right)}{(x+2)^4}\\
&= \frac{2x\left(x^2+4x+4\right)-2x^3+2x-4x^2+4}{(x+2)^4}\\
&= \frac{2x^3+8x^2+8x-2x^3+2x-4x^2+4}{(x+2)^4}\\
&= \frac{4x^2+10x+4}{(x+2)^4}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\dfrac{4x^2+10x+4}{(x+2)^4}}$

បង្ហាញថាអនុគមន៍f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបមួយស្មើ $-\dfrac{1}{3}$ ត្រង់ $x=-\dfrac{1}{2}$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \quad 4x^2+10x+4=0 \Leftrightarrow \quad (4x+2)(x+2)=0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4x+2=0 \\ x+2=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2} \\ x=-2 \end{array}\right.$$

តារាងសញ្ញា$f'(x)$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

ត្រង់ $x=-\dfrac{1}{2}$; $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី$-$ទៅ$+$ យើងបានf មានអប្បបរមាធៀបមួយគឺ

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1}{\left(\left(-\frac{1}{2}\right)+2\right)^2}=\frac{\frac{1}{4}-1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{-\frac{3}{4}}{\frac{9}{4}}=-\frac{3}{4}\times\frac{4}{9}=-\frac{1}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{អនុគមន៍f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបមួយស្មើ } -\dfrac{1}{3} \text{ ត្រង់ } x=-\dfrac{1}{2}}$

គ. តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍f

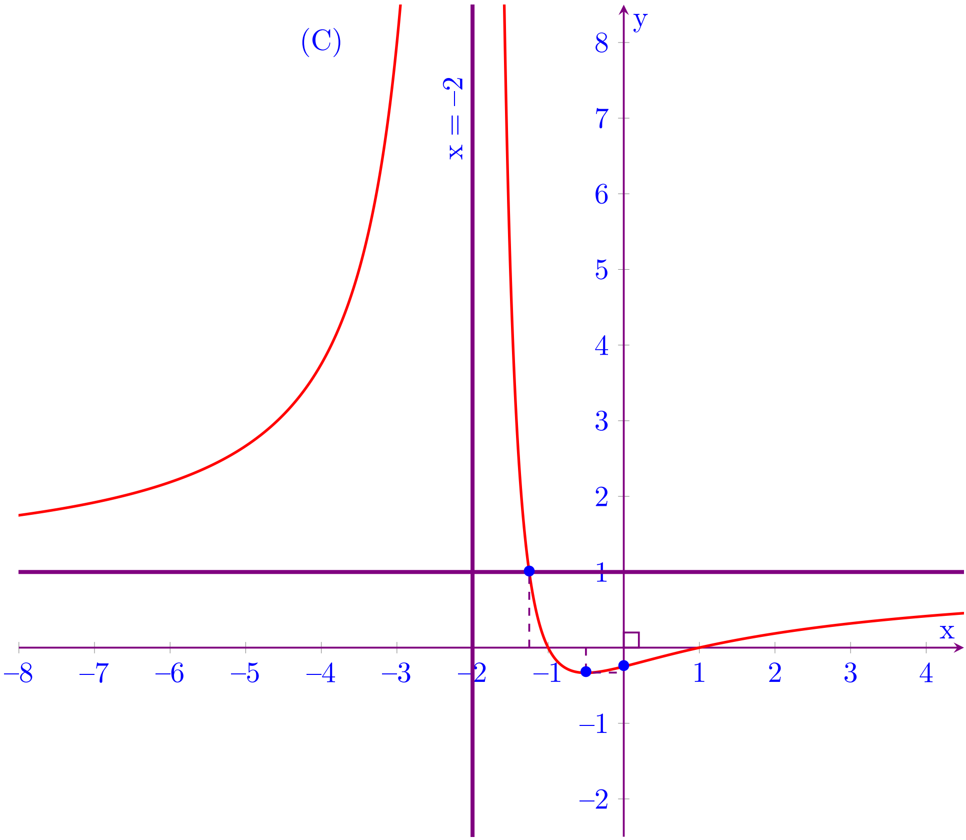
x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\frac{1}{3}$	↗	1

សង់ក្រាប(C)

$$(C)\cap(x'ox) \Leftrightarrow y=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-1=0 \quad \Rightarrow \ x=\pm 1$$

$$(C)\cap(y'oy) \Leftrightarrow x=0 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{0^2-1}{(0+2)^2}=\frac{-1}{4}$$

$$\begin{aligned}(C)\cap(d): y=1 \quad &\Leftrightarrow \quad 1=\frac{x^2-1}{(x+2)^2}\\ &\Leftrightarrow \quad (x+2)^2=x^2-1\\ &\Leftrightarrow \quad x^2+4x+4=x^2-1 \quad \Rightarrow x=-\frac{5}{4}\end{aligned}$$



លំហាត់ទី៧

អនុគមន៍f មួយកំណត់ដោយ $y = f(x) = \dfrac{-x^2 - 2x + 3}{x^2 + 3x + 2}$ មានក្រាបតំណាង(C)។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

ខ. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-1,\ -2$ និង $\pm\infty$។ ទាញរកអាស៊ីមតូតដេក និងអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរ។

គ. ចំពោះគ្រប់$x \in \mathbb{R} - \{-1, -2\}$ ចូរគណនាដេរីវេ$f'(x)$។

ឃ. សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ រួចសង់តារាងអថិរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

ង. ចូរសង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយ $(O, \vec{i}, \vec{j})$

ដំណោះស្រាយ

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

យើងមាន $y = f(x) = \dfrac{-x^2 - 2x + 3}{x^2 + 3x + 2}$

$f(x)$ មានន័យលុះត្រាតែ $x^2 + 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \quad (x+1)(x+2) \neq 0 \quad \Rightarrow\ x \neq -1;\ x \neq -2$

ដូចនេះ $\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{-1, -2\}}$

ខ. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-1,\ -2$ និង $\pm\infty$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{-x^2 - 2x + 3}{x^2 + 3x + 2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{-x^2 - 2x + 3}{x^2 + 3x + 2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{-x^2 - 2x + 3}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2\left(-1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} = -1$$

ទាញរកអាស៊ីមតូតដេក និងអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរ

ដោយ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -1$ ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } y = -1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប(C)}}$

ដោយ $\lim_{x\to -1} f(x) = \pm\infty$; $\lim_{x\to -2} f(x) = \pm\infty$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x = -1 \text{ និង } x = -2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប(C)}}$

គ. ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R} - \{-1, -2\}$ គណនាដេរីវេ $f'(x)$

$$f'(x) = \left(\frac{-x^2 - 2x + 3}{x^2 + 3x + 2}\right)' = \frac{(-2x-2)\left(x^2+3x+2\right) - (2x+3)\left(-x^2-2x+3\right)}{\left(x^2+3x+2\right)^2}$$

$$= \frac{-x^2 - 10x - 13}{\left(x^2+3x+2\right)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = \frac{-x^2 - 10x - 13}{\left(x^2+3x+2\right)^2}}$

ឃ. សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 - 10x - 13 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(-1)(-13) = 100 - 52 = 48$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 - \sqrt{48}}{2(-1)} = \frac{10 - 4\sqrt{3}}{-2} = -5 + 2\sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 + \sqrt{48}}{2(-1)} = \frac{10 + 4\sqrt{3}}{-2} = -5 - 2\sqrt{3}$$

តារាងសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	$-\infty$		$-5-2\sqrt{3}$		-2		$-5+2\sqrt{3}$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	

- $f'(x) > 0$ ពេល $x \in \left(-5 - 2\sqrt{3}, -2\right) \cup \left(-2, -5 + 2\sqrt{3}\right)$
- $f'(x) < 0$ ពេល $x \in \left(-\infty, -5 - 2\sqrt{3}\right) \cup \left(-5 + 2\sqrt{3}, -1\right) \cup (-1, +\infty)$

បរមាធៀប

- ត្រង់ $x = -5 - 2\sqrt{3}$; $f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី$-$ទៅ$+$ នោះ f មានអប្បបរមាធៀបមួយគឺ

$$f(-5-2\sqrt{3}) = \frac{-\left(-5-2\sqrt{3}\right)^2 - 2\left(-5-2\sqrt{3}\right) + 3}{\left(-5-2\sqrt{3}\right)^2 + 3\left(-5-2\sqrt{3}\right) + 2} = 4\sqrt{3} - 8$$

• ត្រង់ $x = -5 + 2\sqrt{3}$; $f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី$+$ទៅ$-$ នោះ f មានអតិបរមាធៀបមួយគឺ

$$f(-5+2\sqrt{3}) = \frac{-\left(-5+2\sqrt{3}\right)^2 - 2\left(-5+2\sqrt{3}\right)+3}{\left(-5+2\sqrt{3}\right)^2+3\left(-5+2\sqrt{3}\right)+2} = -4\sqrt{3}-8$$

សង់តារាងអថិរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$		$-5-2\sqrt{3}$		-2		$-5+2\sqrt{3}$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-1				$+\infty$ ‖		$-4\sqrt{3}-8$		‖ $+\infty$		
		↘		↗	‖	↗		↘	‖	↘	
			$4\sqrt{3}-8$		‖ $-\infty$				$-\infty$ ‖		-1

ង. សង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយ $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$$(C)\cap(x'ox) \Leftrightarrow y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2-2x+3 = 0 \Leftrightarrow (-x+1)(x+3) = 0$$

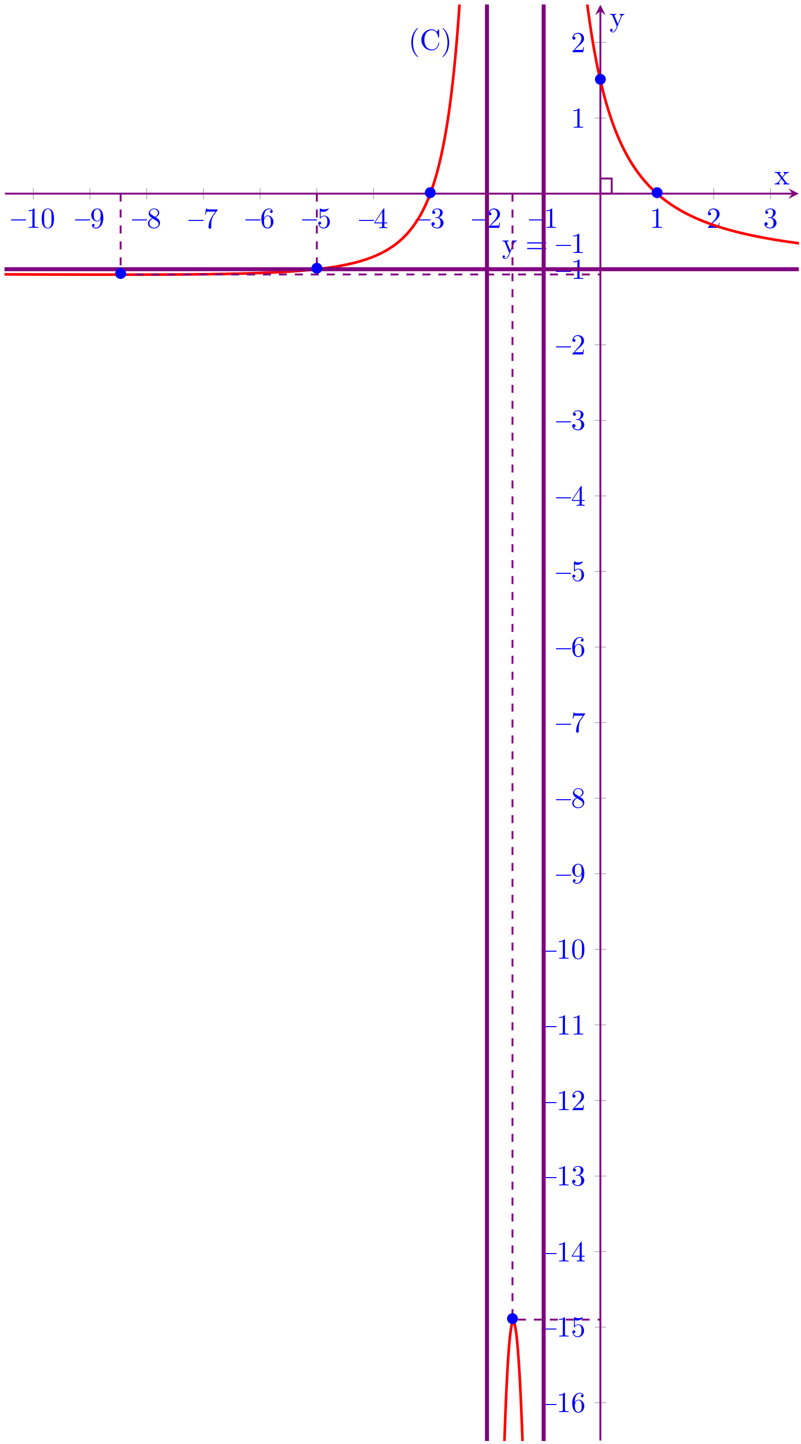
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} -x+1 = 0 \\ x+3 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right.$$

$$(C)\cap(y'oy) \Leftrightarrow x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-0^2-2(0)+3}{0^2+3(0)+2} = \frac{3}{2}$$

$$(C)\cap(d) : y = -1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 = \frac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2} \Leftrightarrow -x^2-3x-2 = -x^2-2x+3$$

$$\Rightarrow -x = 5$$

$$\Rightarrow x = -5$$


(C)
y
x
y = −1
−10
−9
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
−10
−11
−12
−13
−14
−15
−16

លំហាត់ទី៨

គេអោយអនុគមន៍ f មួយ កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{1,3\}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3}$ ។

តាង(C) ជាក្រាបតាងអនុគមន៍ f ក្នុងតម្រុយ$\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$។

ក. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $y=1$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប(C) ត្រង់ $\pm\infty$។

រួចរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរ ។

ខ. ចូរបង្ហាញថា $f'(x)=-\dfrac{8\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-4x+3\right)^2}$ ចំពោះគ្រប់$\mathbb{R}-\{1,3\}$ ។

គ. សិក្សាអថិរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f រួចសង់ក្រាប(C)។

ឃ. ដោយប្រើក្រាប(C) ពិភាក្សាតាមតម្លៃk នូវចំនួនឫសរបស់សមីការ

$(k-1)x^2-4(k+1)x+3(k-1)=0 \quad (1)$

រួចប្រៀបធៀបឫសរបស់ (1) ទៅនឹងចំនួន $-3,\ -\sqrt{3},\ -1,\ 0,\ 1,\ \sqrt{3}$ និង 3។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $y=1$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប(C) ត្រង់ $\pm\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}=1$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } y=1 \text{ ជាសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប(C) ត្រង់ } \pm\infty}$

រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរ

ដោយ $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3}=\pm\infty$

ហើយ $\lim\limits_{x\to3} f(x)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3}=\pm\infty$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x=1 \text{ និង } x=3 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប(C)}}$

ខ. បង្ហាញថា $f'(x)=-\dfrac{8\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-4x+3\right)^2}$ ចំពោះគ្រប់ $\mathbb{R}-\{1,3\}$

$$f'(x)=\left(\frac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3}\right)'=\frac{(2x+4)\left(x^2-4x+3\right)-(2x-4)\left(x^2+4x+3\right)}{\left(x^2-4x+3\right)^2}$$

$$=\frac{-8x^2+24}{\left(x^2-4x+3\right)^2}=-\frac{8\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-4x+3\right)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=-\dfrac{8\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-4x+3\right)^2} \text{ ចំពោះគ្រប់} \mathbb{R}-\{1,3\}}$

គ. សិក្សាអថិរភាព

ដោយ $f'(x)=-\dfrac{8\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-4x+3\right)^2}$

យើងបាន $f'(x)=0 \Leftrightarrow \quad -8\left(x^2-3\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad -8x^2+24=0 \quad \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

តារាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		1		$\sqrt{3}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	

- $f'(x)>0$ ឬ អនុគមន៍ f កើន ពេល $x\in\left(-\sqrt{3},1\right)\cup\left(1,\ \sqrt{3}\right)$
- $f'(x)<0$ ឬ អនុគមន៍ f ចុះ ពេល $x\in\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},3\right)\cup(3,+\infty)$

បរមាធៀប

- ត្រង់ $x=-\sqrt{3};\ f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី$-$ទៅ$+$ នោះ f មានអប្បបរមាធៀបមួយគឺ

$$f(-\sqrt{3})=\frac{\left(-\sqrt{3}\right)^2+4\left(-\sqrt{3}\right)+3}{\left(-\sqrt{3}\right)^2-4\left(-\sqrt{3}\right)+3}=4\sqrt{3}-7$$

• ត្រង់ $x = \sqrt{3}$; $f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី$+$ទៅ$-$ នោះ f មានអតិបរមាធៀបមួយគឺ

$$f(\sqrt{3}) = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 4\left(\sqrt{3}\right) + 3}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 4\left(\sqrt{3}\right) + 3} = -4\sqrt{3} - 7$$

សង់តារាងអថិរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		1		$\sqrt{3}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1 ↘		$4\sqrt{3}-7$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-4\sqrt{3}-7$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

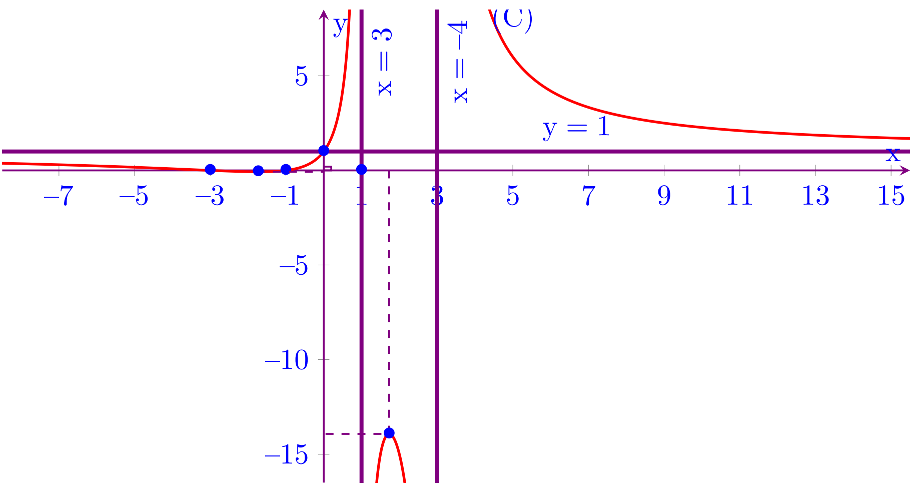
សង់ក្រាប(C)

$$(C) \cap (x'ox) \Leftrightarrow \quad y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = -3$$

$$(C) \cap (y'oy) \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{0^2 + 4(0) + 3}{0^2 - 4(0) + 3} = 1$$

$$(C) \cap (d) : y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 4x + 3}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = x^2 + 4x + 3 \quad \Rightarrow x = 0$$



ឃ. ពិភាក្សាតាមតម្លៃk នូវចំនួនឫសរបស់សមីការ $(k-1)x^2-4(k+1)x+3(k-1)=0 \quad (1)$

$$
\begin{aligned}
(1) \Leftrightarrow \quad & kx^2-x^2-4kx-4x+3k-3=0 \\
\Leftrightarrow \quad & k\left(x^2-4x+3\right)-\left(x^2+4x+3\right)=0 \\
\Leftrightarrow \quad & k=\frac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3}
\end{aligned}
$$

$\Leftrightarrow \quad k=f(x)$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងក្រាប(C)និងបន្ទាត់ $y=k$

តាមក្រាប(C)

- បើ $k \in \left(-\infty,-4\sqrt{3}-7\right)$ $\Rightarrow$ (1) មានឫសពីរផ្សេងគ្នាដែល $1<x_1<x_2<3$
- បើ $k=-4\sqrt{3}-7$ $\Rightarrow$ (1) មានឫសតែមួយគត់ $x=\sqrt{3}$
- បើ $k \in \left(-4\sqrt{3}-7, 4\sqrt{3}-7\right)$ $\Rightarrow$ (1) គ្មានឫស
- បើ $k=4\sqrt{3}-7$ $\Rightarrow$ (1) មានឫសតែមួយគត់គឺ $x=-\sqrt{3}$
- បើ $k \in \left(4\sqrt{3}-7, 1\right)$ $\Rightarrow$ (1) មានឫសពីរផ្សេងគ្នា ដែល $x_1<x_2<0$
- បើ $k=1$ $\Rightarrow$ (1) មានឫសតែមួយគត់ គឺ $x=0$
- បើ $k \in (1,+\infty)$ $\Rightarrow$ (1) មានឫសពីរផ្សេងគ្នាដែល $0<x_1<1 ; \quad 3<x_2$

លំហាត់ទី៩

គេមានអនុគមន៍ f មួយកំណត់ដោយ $y = f(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2}$ មានក្រាបតំណាង(C)។

ក. ចូររកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍f។

ខ. គណនា $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ ។ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងអស់ដែលមាន។

គ. សិក្សាអថិរភាព និងសង់តារាងអថិរភាពនៃអនុគមន៍f។

ឃ. ចូរសង់ក្រាប(C) ក្នុងតម្រុយ $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍f

យើងមាន $y = f(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2} = \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{x-3}{x-2}$

f(x) មានន័យលុះត្រាតែ $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow \quad x \neq 2$

ដូចនេះ $\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{2\}}$

ខ. គណនា $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} = 1$$

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងអស់ដែលមាន

ដោយ $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \pm\infty$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x = 2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប(C)}}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } y = 1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប(C)}}$

គ. សិក្សាអថិរភាព និងសង់តារាងអថិរភាពនៃអនុគមន៍f

ដេរីវេ

$$f'(x)=\left(\frac{x-3}{x-2}\right)'=\frac{(x-3)'(x-2)-(x-2)'(x-3)}{(x-2)^2}$$
$$=\frac{1}{(x-2)^2}>0\quad \forall x\in D_f$$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\|\|$	$+$

- $f'(x)>0$ ពេល $x\in(-\infty,2)\cup(2,+\infty)\Rightarrow$ អនុគមន៍ f កើន ពេល $x\in(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

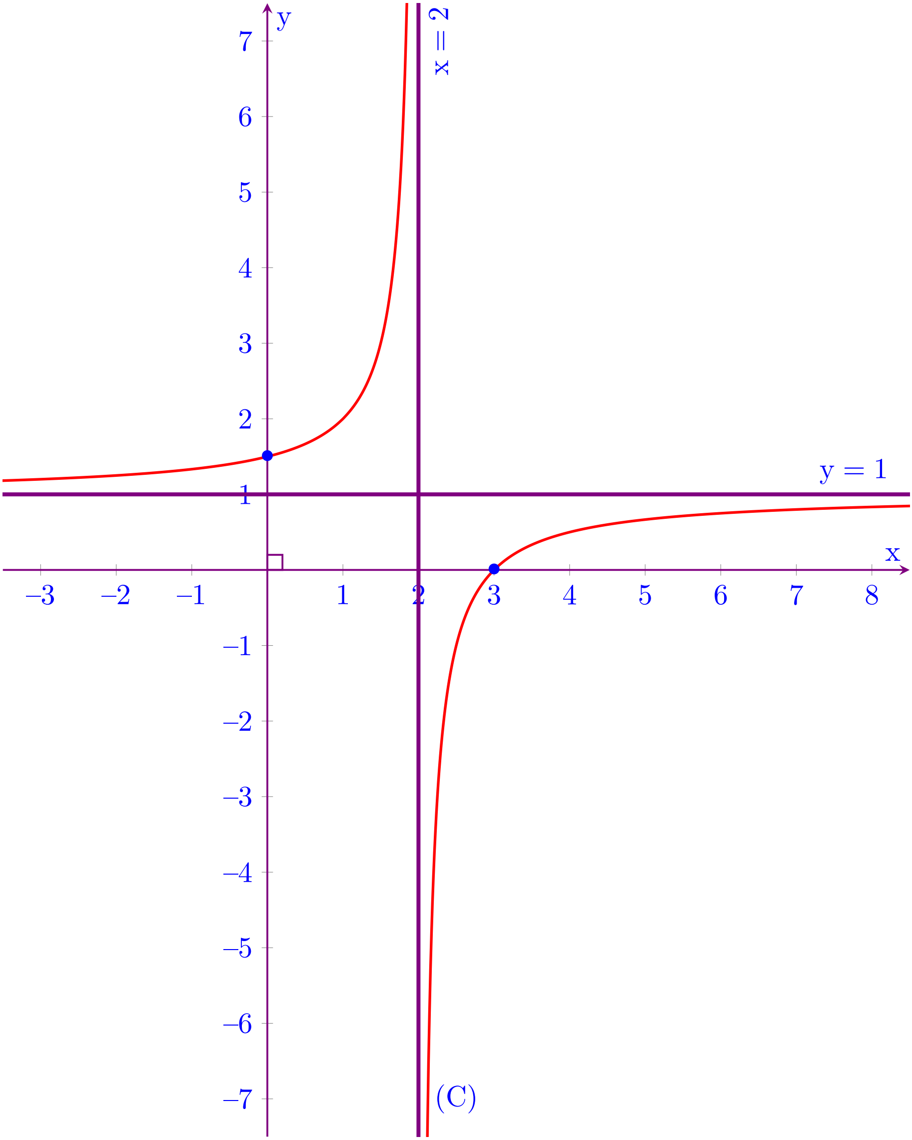
តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty \ \|\| \ -\infty$	$\nearrow$	1

ឃ. សង់ក្រាប(C) ក្នុងតម្រុយ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

$$(C)\cap(x'ox)\Leftrightarrow y=0\quad\Leftrightarrow\quad x-3=0$$
$$\Rightarrow\quad x=3$$

$$(C)\cap(y'oy)\Leftrightarrow x=0\quad\Rightarrow y=\frac{0^2-4(0)+3}{0^2-3(0)+2}=\frac{3}{2}$$



y
x
x = 2
y = 1
(C)
−3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8
7 6 5 4 3 2 1 −1 −2 −3 −4 −5 −6 −7

លំហាត់ទី១០

គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{2x^2-7x+5}{x^2-5x+7}$ ។

យើងតាងដោយ (C) ក្រាបរបស់វាលើតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

1. រកដែនកំណត់ D នៃអនុគមន៍ f ។

2. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f(x) ត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$។

   ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូត d ទៅនឹងក្រាប(C) ត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$។

3. a. ស្រាយបំភ្លឺថាគ្រប់ចំនួនពិត $x\in D$; ដេរីវេ $f'(x)=\dfrac{-3\left(x^2-6x+8\right)}{\left(x^2-5x+7\right)^2}$ ។

   b. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f។

   c. សង់ក្រាប(C) នៃអនុគមន៍f។

ដំណោះស្រាយ

1. រកដែនកំណត់ D នៃអនុគមន៍ f

   យើងមាន $f(x)=\dfrac{2x^2-7x+5}{x^2-5x+7}$

   f(x) មានន័យលុះត្រាតែ $x^2-5x+7\neq 0$

   $\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4(1)(7)=25-28=-3<0$

   $\Rightarrow\ x^2-5x+7$ មានសញ្ញាដូចមេគុណa

   យើងបាន $x^2-5x+7>0\quad\forall\, x\in\mathbb{R}$

   ដូចនេះ $\boxed{D_f=\mathbb{R}}$

2. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f(x) ត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-7x+5}{x^2-5x+7}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{7}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}=2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-7x+5}{x^2-5x+7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(2-\frac{7}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}\right)} = 2$$

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូត d ទៅនឹងក្រាប(C) ត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$

ដោយ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$ ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } y = 2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប(C)}}$

3. a. ស្រាយបំភ្លឺថាគ្រប់ចំនួនពិត $x \in D$; ដេរីវេ $f'(x) = \dfrac{-3\left(x^2-6x+8\right)}{\left(x^2-5x+7\right)^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2-7x+5}{x^2-5x+7}\right)' = \frac{(4x-7)\left(x^2-5x+7\right)-(2x-5)\left(2x^2-7x+5\right)}{\left(x^2-5x+7\right)^2}$$

$$= \frac{-3x^2+18x-24}{\left(x^2-5x+7\right)^2}$$

$$= \frac{-3\left(x^2-6x+8\right)}{\left(x^2-5x+7\right)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{x \in D;\ \text{ដេរីវេ } f'(x) = \dfrac{-3\left(x^2-6x+8\right)}{\left(x^2-5x+7\right)^2}}$

b. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3\left(x^2-6x+8\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x^2+18x-24 = 0$$

$$\Leftrightarrow (-3x+6)(x-4) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} -3x+6=0 \\ x-4=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$$

តារាងសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- $f'(x) > 0$ ពេល $x \in (2, 4) \quad \Rightarrow \quad$ អនុគមន៍f កើនលើចន្លោះ$x \in (2, 4)$
- $f'(x) < 0$ ពេល $x \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$

  $\Rightarrow$ អនុគមន៍f ចុះលើចន្លោះ$x \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$

បរមាធៀប

- ត្រង់ $x = 2;\ f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី$-$ ទៅ$+$ យើងបាន f មានអប្បបរមាធៀបមួយគឺ

$$f(2) = \frac{2(2)^2 - 7(2) + 5}{(2)^2 - 5(2) + 7} = -1$$

- ត្រង់ $x = 4;\ f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី$+$ ទៅ$-$ យើងបាន f មានអតិបរមាធៀបមួយគឺ

$$f(4) = \frac{2(4)^2 - 7(4) + 5}{(4)^2 - 5(4) + 7} = 3$$

តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	↘	-1	↗	3	↘	2

c. សង់ក្រាប(C) នៃអនុគមន៍f

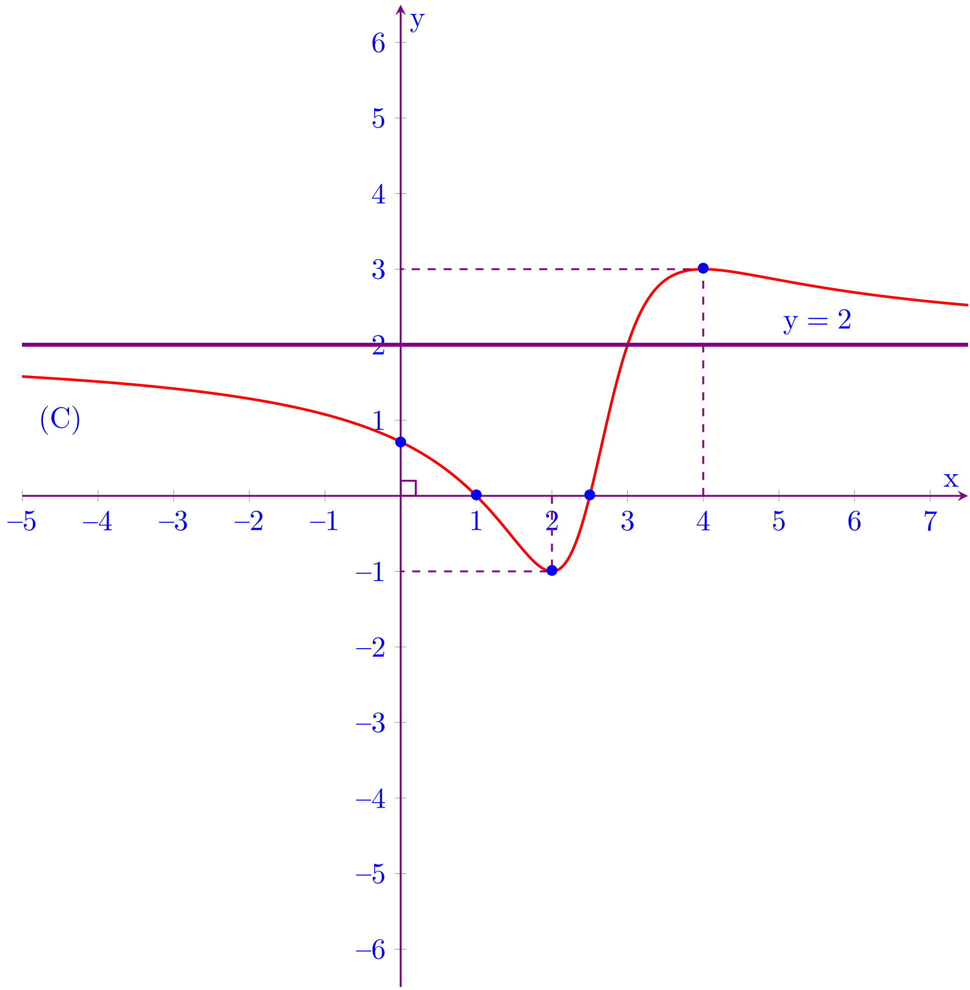
$$(C) \cap (x'ox) \Leftrightarrow y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 7x + 5 = 0$$

មានរាង $a + b + c = 0$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 1,\ x_2 = \frac{c}{a} = \frac{5}{2}$$

$$(C) \cap (y'oy) \Leftrightarrow x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2(0)^2 - 7(0) + 5}{(0)^2 - 5(0) + 7} = \frac{5}{7}$$

$$(C) \cap (d) : y = 2 \Leftrightarrow 2 = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 5x + 7} \quad \Rightarrow \quad x = 3$$


y
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−6
x
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
y = 2
(C)