

ក្រសួងអប់រំយុវជន និងកីឡា

វិទ្យាល័យមេតូឌីស្តិកម្ពុជា

ប្រឡងសញ្ញាប័ត្រមធ្យមសិក្សាឧត្តមគ្រូ

ឈ្មោះ និងឋានភូមិសាស្ត្រ

លេខបន្ទប់៖ .....

លេខគុះ៖ .....

មណ្ឌលប្រឡង៖ .....

សម័យបណ្ណៈ ១៧ ឧសភា ២០១៩

នាមត្រកូលនិងនាមខ្លួន៖ .....

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖ .....

ឋានភូមិសាស្ត្រ៖ .....

លេខសម្ងាត់៖

បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើសន្លឹកប្រឡងឡើយ។ សន្លឹកប្រឡងដែលមានសញ្ញាសម្គាល់នឹងត្រូវបានដកចេញពីប្រឡង។

-----

វិទ្យាសាស្ត្រ៖ គណិតវិទ្យាឆ្នាំកំណត់វិទ្យាសាស្ត្រ រយៈពេល៖ ១២០ នាទី ពិន្ទុ៖ ១២៥

លេខសម្ងាត់៖



បទបញ្ជា៖

១. បេក្ខជនមិនត្រូវអនុញ្ញាតឱ្យប្រើឯកសារណាមួយនៅពេលប្រឡង។

២. បេក្ខជនមិនត្រូវអនុញ្ញាតឱ្យលួចប្លន់សន្លឹកកិច្ចការណ៍ឡើយ សូមអភ័យទោសដល់ការប្រកាសនេះ និងសេចក្តីថ្លែងថ្កុលរបស់ខ្លួន។

ប្រធាន ០១

I. (១៥ ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖

ក.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{1 - x^2}$

ខ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 4x}{\sqrt{4-x} - \sqrt{4+x}}$

គ.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{3x^2 - 9x}$

ឃ.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{1 - x^2}$

II. (១៥ ពិន្ទុ) គេមានចំនួនកុំផ្លិច  $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$  និង  $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

ក. គណនា  $z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1 \times z_2$  និង  $\frac{z_1}{z_2}$  ។

ខ. ចូរសរសេរ  $z_1, z_2$  និង  $z_1 \times z_2$  ជាចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ. បង្ហាញថា  $z_1$  ជាឫសនៃសមីការ  $z^3 + 8 = 0$  ។

III. (១៥ ពិន្ទុ) ក្នុងប្រអប់មួយមានបូល ៥ ដោយក្នុងនោះមានបូលពណ៌ខ្មៅ ៣ ត្រូវបានគេចុះលេខពី ១ ដល់ ៣ និងបូលពណ៌ស ២ ត្រូវបានគេចុះលេខពី ១ ដល់ ២ ។ គេចាប់យកបូល ២ ព្រមគ្នាក្នុងពេលតែមួយដោយចៃដន្យចេញពីក្នុងប្រអប់នោះ ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដូចខាងក្រោម៖

ក. A : "គេចាប់បានបូលមានពណ៌ដូចគ្នា"

ខ. B : "គេចាប់បានបូលដែលមានផលបូកលេខស្មើ ៣"

គ. C : "គេចាប់បានបូលមានពណ៌ខុសគ្នា"

IV. 1. (១០ ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល៖  $I = \int_1^2 \left( \frac{x^2}{2} + x - 3 \right) dx$  និង  $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x + \cos 2x) dx$  ។

2. (៥ ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍  $f(x) = -\frac{4-x}{(x-3)^2}$  កំណត់ចំពោះគ្រប់  $x \neq 3$  បង្ហាញថា  $f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{(x-3)^2}$  ។

គណនា  $K = \int_0^2 f(x) dx$  ។

V. ក. (៥ ពិន្ទុ) ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) :  $y'' - 3y' + 2y = 0$  ។

ខ. (៥ ពិន្ទុ) រកចម្លើយពិសេសមួយនៃ (E) បើ  $y(0) = 1$  និង  $y'(0) = 0$  ។

VI. 1. (១០ ពិន្ទុ) ក. គេឱ្យខ្សែកោង (E) :  $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  ។ បញ្ជាក់ប្រភេទនៃខ្សែកោង (E) ។

ខ. កំណត់កូអរដោនេ ផ្ចិត កំពូល កំណុំ ប្រវែងអ័ក្សធំ និងប្រវែងអ័ក្សតូចនៃ (E) រួចសង់ខ្សែកោង (E) ។

មានទទួលបង្រៀនគ្នា ជាប្រភេទពិសេសកម្ពុជា

2. (១០ ពិន្ទុ) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសទៅវិជ្ជមាន  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  គេមានចំណុចបី  $A(1, 2, 1), B(4, 2, 4), C(5, 3, 0)$  ។

ក. រកប្រវែង  $AB, AC, BC$  រួចធ្វើការសន្និដ្ឋាននៃប្រភេទត្រីកោណ  $ABC$  ។

ខ. គណនាផលគុណ  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$  រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ  $ABC$  ។

VII. (៣៥ ពិន្ទុ) ផ្នែក A គេមានអនុគមន៍  $g$  កំណត់លើចន្លោះ  $(0, +\infty)$  ដោយ  $g(x) = x^2 + 2 \ln x$  ។

1. ក. បង្ហាញថា  $g$  ជាអនុគមន៍កើនជាប់ខាត់លើ  $(0, +\infty)$  ។

ខ. គណនា  $g(1)$  ។

2. ក. ទាញលទ្ធផលពីសំនួរទី 1 បញ្ជាក់ថា បើ  $x \geq 1$  នោះ  $x^2 + 2 \ln x \geq 1$  និងបើ  $0 < x \leq 1$  នោះ  $x^2 + 2 \ln x \leq 1$  ។

ខ. កំណត់សញ្ញានៃកន្សោម  $x^2 - 1 + 2 \ln x$  កាលណា  $x$  នៅចន្លោះ  $(0, +\infty)$  ។

ផ្នែក B គេមានអនុគមន៍  $f$  កំណត់លើ  $(0, +\infty)$  ដោយ  $f(x) = \frac{x^2 - 1 - 2 \ln x}{x}$  មានក្រាប  $C$  ។

ក. ចូររកលីមីតនៃ  $f$  ត្រង់  $0$  និង  $+\infty$  ។ ទាញបញ្ជាក់នៃសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប  $C$  ។

ខ. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ពុះទីមួយ  $\Delta : y = x$  នៃអ័ក្សកូអរដោនេជាអាស៊ីមតូតទ្រេតរបស់ក្រាប  $C$  ខាង  $+\infty$  ។ សិក្សាទីតាំងរាងក្រាប  $C$  ធៀបនឹងបន្ទាត់  $\Delta$  ។ រួចរកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប  $C$  នឹង បន្ទាត់  $\Delta$  ។

គ. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាគ្រប់  $x > 0$  គេបាន  $f'(x) = \frac{x^2 - 1 + 2 \ln x}{x^2}$  ។

ឃ. ដោយប្រើលទ្ធផលផ្នែក A សិក្សាសញ្ញានៃ  $f'(x)$  និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ  $f$  លើ  $(0, +\infty)$  ។

ង. ចូរគណនា  $f\left(\frac{1}{e}\right)$  និង  $f(e)$  រួចសង់បន្ទាត់  $\Delta$  និងក្រាប  $C$  ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ។

គេឲ្យ៖  $e = 2.7$  និង  $\frac{1}{e} = 0.37$  ។

[សូមសំណាងល្អគ្រប់ៗគ្នា!]

មានទទួលបង្រៀនគ្នា ជាក្រុមពិសេសតម្លៃសមរម្យ

ក្រសួងអប់រំយុវជន និងកីឡា

វិទ្យាល័យមេតូឌីស្តកម្ពុជា

ប្រឡងសញ្ញាប័ត្រមធ្យមសិក្សាឧត្តមគ្រួសារ

ឈ្មោះ និងឋានភូមិសាស្ត្រ

លេខបន្ទប់៖ .....

លេខគុះ៖ .....

មណ្ឌលប្រឡង៖ .....

សម័យបច្ចុប្បន្ន៖ ១៧ ឧសភា ២០១៩

នាមត្រកូលនិងនាមខ្លួន៖ .....

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖ .....

ឋានភូមិសាស្ត្រ៖ .....

លេខសម្ងាត់៖

បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើសន្លឹកប្រឡងឡើយ។ សន្លឹកប្រឡងដែលមានសញ្ញាសម្គាល់នឹងត្រូវបានដកចេញពីប្រឡង។

-----

វិទ្យាសាស្ត្រ៖ គណិតវិទ្យាឆ្នាំទី១ រយៈពេល៖ ១២០ នាទី ពិន្ទុ៖ ១២៥

លេខសម្ងាត់៖

ពិន្ទុសរុប

បទបញ្ជា៖

១. បេក្ខជនមិនត្រូវអនុញ្ញាតឱ្យប្រើឯកសារណាមួយឡើយ។

២. បេក្ខជនមិនត្រូវអនុញ្ញាតឱ្យលួចប្លង់សន្លឹកកិច្ចការណ៍ឡើយ សូមរក្សាភាពស្ងៀមស្ងាត់ និងសេចក្តីថ្លៃថ្នូររបស់ខ្លួន។

## ប្រធាន ០២

### I. គណនាលីមីត៖

ក.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{3x^2 - 9x}$

ខ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 4x}{\sqrt{4-x} - \sqrt{4+x}}$

គ.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{1 - x^2}$

ឃ.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{4 \cos^2 x + 4 \cos x - 3}{2 \cos x - 1}$

II.  $Z$  ជាចំនួនកុំផ្លិចដែល  $Z = (\sqrt{2} - i\sqrt{2}) \left( \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right)$  ។

ក. សរសេរ  $Z$  ជាទម្រង់ពិជគណិត។

ខ. សរសេរ  $Z^2$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

គ. គណនា  $\cos \frac{5\pi}{12}$  និង  $\sin \frac{5\pi}{12}$  ។

III. ក្នុងប្រអប់មួយមានបិទខ្សែចំនួន ៧ដើម និងបិទក្រហមចំនួន ៥ដើម។ គេចាប់យកបិទ ៤ ដើមចេញពីប្រអប់ដោយចៃដន្យ។

ក. រកប្រូបាបដែលចាប់បានបិទខ្សែទាំង ៤។

ខ. រកប្រូបាបដែលចាប់បានបិទខ្សែចំនួន ៣ដើម និងចាប់បានបិទក្រហមចំនួន ១ដើម។

គ. រកប្រូបាបដែលចាប់បានបិទក្រហមយ៉ាងតិចមួយដើម។

IV. ក. ដោះស្រាយសមីការ  $2y'' - 3y' + y = 0$  (E) ។

ខ. រកចម្លើយមួយនៃ (E) ដោយដឹងថាក្រាបនៃចម្លើយនោះប៉ះនឹងបន្ទាត់  $L : y = 2x + 1$  ត្រង់ចំណុច  $A(0;1)$  ។

V.  $f$  ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះគ្រប់  $x \in \mathbb{R}$  ដោយ  $f(x) = x + 2 - \ln(1 + e^{2x})$  មានក្រាប  $C$  ក្នុងតម្រុយ  $(O, i, j)$  ។

1. ក. គណនាលីមីតនៃ  $\ln(1 + e^{2x})$  កាលណា  $x \rightarrow -\infty$  រួចទាញរកលីមីតនៃ  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ។

ខ. បង្ហាញថា បន្ទាត់  $d_1$  ដែលមានសមីការ  $y = x + 2$  ជាសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប  $C$  ។

2. ក. បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់  $x \in \mathbb{R}$ ;  $f(x) = 2 - x - \ln(1 + e^{-2x})$  ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតទៀត  $d_2$  នៃក្រាប  $C$  ។

ខ. សិក្សាទីតាំងរាងក្រាប  $C$  ធៀបនឹងអាស៊ីមតូត  $d_1$ ;  $d_2$  ។

3. ក. ចូរបង្ហាញថា  $\forall x \in \mathbb{R}$ ;  $f'(x) = \frac{(1 + e^x)(1 - e^x)}{1 + e^{2x}}$  ។

ខ. ដោះស្រាយវិសមីការ  $1 - e^x > 0$  ។ រួចសិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃ  $f$  ។

មានទទួលបានបង្រៀនគ្នា ជាប្រភេទសិស្សសម្រាប់ប្រឡង

4. គណនាតម្លៃនៃ  $f(-1)$  និង  $f(1)$  ។ (យក  $\ln 2 = 0.7$  ;  $\ln(1 + e^2) = 2.1$ )

5. សង់បន្ទាត់  $d_1$ ;  $d_2$  និងក្រាប  $C$  ក្នុងតម្រុយតែមួយ ។

VI. ផ្នែក A គេមានអនុគមន៍  $g$  កំណត់លើ  $(0, +\infty)$  ដោយ  $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$  ។

ក. គណនាដេរីវេនៃ  $g$  រួចសិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍  $g$  លើ  $(0, +\infty)$  ។

ខ. សង់តារាងអថេរភាពនៃ  $g$  រួចទាញរកសញ្ញានៃ  $g(x)$  លើ  $(0, +\infty)$  ។ (ដោយមិនចាំបាច់គណនាលីមីត)

ផ្នែក B គេមានអនុគមន៍  $f$  កំណត់លើ  $(0, +\infty)$  ដោយ  $f(x) = x - 1 + 2\frac{\ln x}{x}$  មានក្រាបតាង  $C$  ក្នុងតម្រុយ អរតូណរម៉ាល់  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ។

ក. គណនាលីមីតនៃ  $f$  ត្រង់  $0$  និង  $+\infty$  រួចបកស្រាយតាមក្រាបនូវលទ្ធផលដែលទទួលបាននេះ ។

ខ. បង្ហាញថា  $\Delta : y = x - 1$  ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប  $C$  ខាង  $+\infty$  ។

គ. សិក្សាទីតាំងរាងក្រាប  $C$  ធៀបនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេត  $\Delta$  ។

ឃ. បង្ហាញថា  $f'(x)$  មានសញ្ញាដូច  $g(x)$  រួចទាញរកសញ្ញានៃ  $f'(x)$  លើ  $(0, +\infty)$  ។

ង. សង់តារាងអថេរភាពនៃ  $f$  រួចសង់ក្រាប  $C$  និងបន្ទាត់  $\Delta$  ក្នុងតម្រុយតែមួយ ។

VII. ផ្នែក A  $g$  ជាអនុគមន៍កំណត់លើ  $(0, +\infty)$  ដោយ  $g(x) = -x + 1 - 2\ln x$  ។

ក. បង្ហាញថា  $g$  ជាអនុគមន៍ចុះលើ  $(0, +\infty)$  ។

ខ. គណនា  $g(1)$  រួចកំណត់សញ្ញានៃ  $g(x)$  លើ  $(0, +\infty)$  ។

ផ្នែក B  $f$  ជាអនុគមន៍គ្រប់  $x > 0$  ដែល  $f(x) = \frac{x + \ln x}{x^2}$  ។

ក. គណនាលីមីតនៃ  $f$  ត្រង់  $0$  និង  $+\infty$  ។

ខ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប  $C$  ។

គ. បង្ហាញថាអនុគមន៍  $f'(x)$  យកសញ្ញាដូច  $g(x)$  ។ កំណត់សញ្ញានៃ  $f'(x)$  រួចទាញថា  $f$  មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់  $x = 1$  ។

ឃ. គណនា  $f(1)$  ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ  $f$  ។

ង. សង់ក្រាប  $C$  និងអាស៊ីមតូតដែលមាន ក្នុងតម្រុយតែមួយ ។

VIII. (៣៥ ពិន្ទុ) ផ្នែក A គេមានអនុគមន៍  $g$  កំណត់លើ  $(0, +\infty)$  ដោយ  $g(x) = -x^2 + 1 - 2\ln x$  ។

ក. ចូរគណនាដេរីវេ  $g'(x)$  រួចទាញថាអនុគមន៍  $g$  ជាអនុគមន៍ចុះជានិច្ចលើចន្លោះ  $(0, +\infty)$  ។

ខ. ចូរគណនាតម្លៃ  $g(1)$  ។ ចូរបញ្ជាក់សញ្ញានៃ  $g(x)$  លើ  $(0, +\infty)$  ។

ផ្នែក B គេឲ្យអនុគមន៍  $f$  កំណត់លើចន្លោះ  $(0, +\infty)$  ដោយ  $f(x) = \frac{9x^2 + 6\ln x - 1}{2x^3}$  មានក្រាបតាង  $C$  ។

ក. ចូររកលីមីតនៃ  $f$  ត្រង់  $0$  និង  $+\infty$  ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងដេកនៃក្រាប  $C$  ។

ខ. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់  $x > 0$  គេបាន  $f'(x) = kg(x)$  ដែល  $k$  ជាចំនួនពិតត្រូវកំណត់ ។  
គូសតារាងអថេរភាពនៃ  $f$  ដោយប្រើលទ្ធផលផ្នែក A ។

គ. ចូរគណនា  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  រួចទាញថា  $f(x) = 0$  មានឫសតែមួយគត់ស្ថិតនៅចន្លោះ  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

ឃ. កំណត់សមីការបន្ទាត់  $T$  ប៉ះទៅនឹងក្រាប  $C$  ត្រង់អាប់ស៊ីស  $1$  ។

ង. គណនា  $f(2)$  រួចសង់ក្រាប  $C$  និងបន្ទាត់  $T$  ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ។

គេឲ្យ៖  $\ln 2 = 0.7$  និង  $\ln \frac{1}{2} = -0.7$  ។

IX. ផ្នែក A គេមានអនុគមន៍  $g$  កំណត់លើចន្លោះ  $(0, +\infty)$  ដោយ  $g(x) = x^2 + 2 \ln x$  ។

1. ក. បង្ហាញថា  $g$  ជាអនុគមន៍កើនជាប់ខាត់លើ  $(0, +\infty)$  ។

ខ. គណនា  $g(1)$  ។

2. ក. ទាញលទ្ធផលពីសំនួរទី 1 បញ្ជាក់ថា បើ  $x \geq 1$  នោះ  $x^2 + 2 \ln x \geq 1$  និងបើ  $0 < x \leq 1$  នោះ  $x^2 + 2 \ln x \leq 1$  ។

ខ. កំណត់សញ្ញានៃកន្សោម  $x^2 - 1 + 2 \ln x$  កាលណា  $x$  នៅចន្លោះ  $(0, +\infty)$  ។

ផ្នែក B គេមានអនុគមន៍  $f$  កំណត់លើ  $(0, +\infty)$  ដោយ  $f(x) = \frac{x^2 - 1 - 2 \ln x}{x}$  មានក្រាប  $C$  ។

ក. ចូររកលីមីតនៃ  $f$  ត្រង់  $0$  និង  $+\infty$  ។ ទាញបញ្ជាក់នៃសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប  $C$  ។

ខ. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ពុះទីមួយ  $\Delta : y = x$  នៃអ័ក្សកូអរដោនេជាអាស៊ីមតូតទ្រេតរបស់ក្រាប  $C$  ខាង  $+\infty$  ។ សិក្សាទីតាំងរាងក្រាប  $C$  ធៀបនឹងបន្ទាត់  $\Delta$  ។ ចូររកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប  $C$  នឹង បន្ទាត់  $\Delta$  ។

គ. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាគ្រប់  $x > 0$  គេបាន  $f'(x) = \frac{x^2 - 1 + 2 \ln x}{x}$  ។

ឃ. ដោយប្រើលទ្ធផលផ្នែក A សិក្សាសញ្ញានៃ  $f'(x)$  និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ  $f$  លើ  $(0, +\infty)$  ។

ង. ចូរគណនា  $f\left(\frac{1}{e}\right), f(\sqrt{e}), f(2)$  និង  $f(e)$  រួចសង់បន្ទាត់  $\Delta$  និងក្រាប  $C$  ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ។

គេឲ្យ៖  $e = 2.7, \sqrt{e} = 1.65, \frac{1}{e} = 0.37$  និង  $\frac{1}{\sqrt{e}} = 0.61$  ។

[បន្ថែម]

មានទទួលបង្រៀនគួរ ជាក្រុមពិសេសតម្លៃសមរម្យ