

ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
សម័យប្រឡង: ១៩ សីហា ២០១៩  
វិញ្ញាសា: គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)  
រយៈពេល: ១៥០ នាទី  
ពិន្ទុ: ១២៥  
ប្រធាន:

មន្ត្រីប្រឡង .....  
លេខបន្ទប់ ..... លេខតុ .....  
ឈ្មោះបេក្ខជន .....  
ហត្ថលេខាបេក្ខជន .....

ប្រធានទី០១

I. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 3x}{\sin 4x + \sin 5x}$

ខ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{1 - \sqrt{x} + 1}$

គ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2e^x - 2)(1 - \cos 2x)}{x^3}$

II. ក. ដោះស្រាយសមីការ  $Z^2 - 2\sqrt{2}Z + 4 = 0$  ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច។ រកម៉ូឌុល និងអាក្យុយម៉ង់នៃឫសនីមួយៗរបស់សមីការនេះ។

ខ. សរសេរ  $W = \left( \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}} \right)^2$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

III. ក. គណនាអាំងតេក្រាល  $I = \int_0^2 (6x^2 - 3x - 1) dx$  និង  $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\sin^2 x) dx$  ។

ខ. គេមាន  $f$  កំណត់លើ  $\mathbb{R}^*$  ដោយ  $f(x) = -2 \left( \frac{x+1}{x^2} \right)$  ។ បង្ហាញថា  $f(x) = -\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}$  ។

គណនា  $K = \int_1^e f(x) dx$  ។  $\ln e = 1$

IV. ក្នុងផង់មួយមានប៊ូល 15 ដែលចែកជាប៊ូលពណ៌បៃតងចំនួន 7 និងគេសរសេរលើប៊ូលទាំង 7 នេះតាមលេខរៀងពី 1 ដល់ 7 រួចប៊ូលខៀវចំនួន 5 និងគេសរសេរលើប៊ូលទាំង 5 នេះតាមរៀងពី 1 ដល់ 5 ចុងក្រោយប៊ូលពណ៌ក្រហមចំនួន 3 និងគេសរសេរលេខលើប៊ូលទាំង 3 តាមលេខរៀងពីលេខ 1 ដល់ 3 ។ គេចាប់យកប៊ូលមួយចេញពីក្នុងផង់ដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃប្រតិការណ៍ខាងក្រោម ៖

- ក. A : ប៊ូលដែលចាប់បានមានពណ៌បៃតង  
ខ. B : ប៊ូលដែលចាប់បានមានលេខសេស  
គ. C : ប៊ូលដែលចាប់បានមានពណ៌បៃតង និងលេខសេស

V. 1. គេមានសមីការ  $18x^2 + 10y^2 = 90$  ។

- ក. បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប ។ រកប្រវែងអ័ក្សធំ ប្រវែងអ័ក្សតូច និងកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ។  
ខ. សង់អេលីបនេះ ។

2. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  គេមានចំណុច  $M(2, 3, 4), N(3, 5, 6), P(4, 6, 7), Q(3, 4, 5)$  ។

- ក. រកវ៉ិចទ័រ  $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{QP}$   
ខ. ទាញបង្ហាញថាចតុកោណ MNPQ ជាប្រលេឡូក្រាម រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណកែងនេះ ។

VI. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) :  $y'' + 2y' - 3y = 0$

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ដែល  $y(0) = 1, y'(1) = e$  ។ ( $e$  ជាចំនួនពិតដែល  $\ln e = 1$ )

VII. គេមានអនុគមន៍  $f$  កំណត់លើ  $\mathbb{R}$  ដោយ  $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}$  ។

គេតាងក្រាបរបស់វាក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណម៉ាល់  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. ក. គណនាលីមីតនៃ  $f$  ត្រង់  $-\infty$  និង  $+\infty$   
ខ. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់  $d_1$  ដែលមានសមីការ  $y = x + 2$  ។

- ## ပြောဆိုမှု

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.

ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
សម័យប្រឡង: ១៩ សីហា ២០១៩  
វិញ្ញាសា: គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)  
រយៈពេល: ១៥០ នាទី  
ពិន្ទុ: ១២៥  
ប្រធាន:

មន្ត្រីប្រឡង .....  
លេខបន្ទប់ .....លេខតុ .....  
ឈ្មោះបេក្ខជន .....  
ឈ្មោះលេខាបេក្ខជន .....

ប្រធានទី០២

- I. គេមានចំនួនកុំផ្លិច  $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$  និង  $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$  ។
- ក. គណនា  $z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1 \times z_2$  និង  $\frac{z_1}{z_2}$  ។
- ខ. សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច  $z_1 - z_2, z_1 \times z_2$  និង  $\frac{z_1}{z_2}$  ។
- គ. គណនា  $z_1^{2018} + z_2^{2018}$  រួចទាញការសន្និដ្ឋាន។
- II. គណនាលីមីត
- ក.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x} + 2 - 2}$       ខ.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt{x} + 6 - 3}$       គ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$       ឃ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 3x}{x}$       ង.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-5 \sin 5x}{8x}$
- III. ក្នុងស្បែងមួយមានប៊ូលពណ៌ស 3 ពណ៌ខៀវ 3 និងក្រហម 2 ។ គេចាប់យកប៊ូលម្តង 3 ក្នុងពេលតែមួយចេញពីស្បែងដោយចៃដន្យ។ គេសន្និដ្ឋានថាប្រូបាបដែលចាប់បានប៊ូលមួយៗជាសមប្រូបាប។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖
- ក. A : «យ៉ាងតិចមានប៊ូល 2 ពណ៌ខៀវ»។
- ខ. B : «ប៊ូលទាំង 3 មានពណ៌ខុសៗគ្នា»។
- គ. C : «ប៊ូល 1 គត់មានពណ៌ក្រហម»។
- IV. ក. គណនាអាំងតេក្រាល  $I = \int_1^2 \left( \frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} + 3 \right) dx$  និង  $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 4x + \cos 2x) dx$  ។
- ខ. គេមានអនុគមន៍  $f(x) = -\frac{2-x}{(x-1)^2}$  បង្ហាញថា  $f(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}$  ។ គណនា  $K = \int_{-1}^0 f(x) dx$  ។
- V. 1. គេមានវ៉ិចទ័រ  $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, \vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}, \vec{w} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$  ។ រកវ៉ិចទ័រ
- ក.  $\vec{u} + \vec{v}$       ខ.  $\vec{u} - \vec{v}$       គ.  $\vec{u} \times \vec{u}$       ឃ.  $\vec{v} \times \vec{v}$       ង.  $\vec{u} \times \vec{v}$       ច.  $\vec{v} \times \vec{u}$
2. រកសមីការស្តង់ដារនៃអេលីបដែលមានកំណុំមួយមានកូអរដោនេ  $(-1, 0)$  និងចំណុចកំពូលពីរមានកូអរដោនេ  $(-3, 0)$  និង  $(3, 0)$  ។ សង់អេលីបនេះ។
- VI. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) :  $y' + 2y = 2\frac{e^{-x}}{1 + 2e^x}$  ។
- ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាអនុគមន៍  $f$  ដែល  $f(x) = e^{-2x} \ln(1 + 2e^x)$  ជាចម្លើយនៃ (E) ។
- ខ. បង្ហាញថាអនុគមន៍  $\psi$  ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ  $(\psi - f)$  ជាចម្លើយនៃសមីការ (E') :  $y' + 2y = 0$  ។
- VII. A គេមានអនុគមន៍  $g$  កំណត់លើ  $(0, +\infty)$  ដោយ  $g(x) = x^2 + \ln x$  ។
1. ក. បង្ហាញថា  $g$  ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ  $(0, +\infty)$  ។
- ខ. គណនា  $g(1)$  ។
2. ក. ទាញលទ្ធផលពីសំនួរទី១ បញ្ជាក់ថា បើ  $x \geq 1$  នោះ  $x^2 + \ln x \geq 1$  និងបើ  $0 < x \leq 1$  នោះ  $x^2 + \ln x \leq 1$  ។
- ខ. កំណត់សញ្ញានៃកន្សោម  $x^2 + \ln x - 1$  កាលណា  $x$  នៅចន្លោះ  $(0, +\infty)$  ។



ប្រឡងសញ្ញាបត្របឋមសិក្សាទុតិយភូមិ  
សម័យប្រឡង: ១៩ សីហា ២០១៩  
វិញ្ញាសា: គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)  
រយៈពេល: ១៥០ នាទី  
ពិន្ទុ: ១២៥  
ប្រធាន:

មន្ត្រីប្រឡង .....  
លេខបន្ទប់ .....លេខតុ .....  
ឈ្មោះបេក្ខជន .....  
ឋានៈលេខាបេក្ខជន .....

ប្រធានទី០៣

- I. គណនាលីមីត
- ក.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^3}{x^3 - x^2 + x - 1}$       ខ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{-x}$       គ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 3 \cos 4x}{\sin^2 x}$       ឃ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{\sin 2x}$
- II. ក្នុងថ្នាក់រៀនមួយមានសិស្ស៧៩នាក់ ដែលក្នុងនោះ ៤ នាក់ជាសិស្សស្រី និង ៦ ជាសិស្សប្រុស។ គេរៀបចំសិស្សជាក្រុមក្នុងមួយក្រុមមានសិស្ស ៤ នាក់ដោយចៃដន្យ យកទៅប្រកួតជាមួយក្រុមសិស្សដទៃ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖
- ក. A : «ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានសុទ្ធតែស្រី»។  
ខ. B : «ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានសុទ្ធតែប្រុស»។  
គ. C : «ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបាន ៥០% ជាសិស្សប្រុស»។
- III. គេមានចំនួនកុំផ្លិច  $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$  និង  $z_2 = 6 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$  ។
- ក. សរសេរ  $z_1$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។  
ខ. រកម៉ូឌុល និងអាកុយម៉ង់នៃ  $z_1^3$  ។  
គ. សរសេរផលគុណ  $z_1 \times z_2$  ជាទម្រង់ពីជគណិត។
- IV. 1. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយ  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  គេមានចំណុច  $A(-2, 1, 0), B(0, 1, 1), C(1, 2, 2)$  និង  $D(0, 3, -4)$  ។
- ក. រកវ៉ិចទ័រ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$  ។  
ខ. គណនាប្រវែង  $AB, AC, AD, BC, CD$ ។ ទាញបញ្ជាក់ថាត្រីកោណ  $ABC$  និង  $ACD$  កែងត្រង់  $A$ ។  
រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណទាំងពីរនេះ ។
2. គេមានសមីការ  $9y^2 - 16x^2 = 144$  ។ បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអ៊ីពែបូល។ រកកូអរដោនេកំពូលទាំងពីរ និងកុំណុំទាំងពីរនៃអ៊ីពែបូល។ រកសមីការអាស៊ីមតូតរបស់អ៊ីពែបូល និងសង់អ៊ីពែបូលនេះ ។
- V. 1. គណនាអាំងតេក្រាល  $I = \int_1^3 (x - 2 + 3x^3) dx$  និង  $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2x - \cos x) dx$  ។
2. គេមានអនុគមន៍  $K = \int_0^1 \frac{x^3 + (x+1)^2}{x^2 + 1} dx$  កំណត់លើ  $\mathbb{R}$  ។  
ដើម្បីគណនា  $K$  យើងត្រូវបង្ហាញថា  $\frac{x^3 + (x+1)^2}{x^2 + 1} = x + 1 + \frac{x}{x^2 + 1}$  ។
- VI. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) :  $y'' - 3y' + 2y = 0$  ។
- ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ដែល  $y(0) = 1$  និង  $y'(1) = e^2$  ។
- VII. គេមានអនុគមន៍  $f$  កំណត់លើ  $\mathbb{R}$  ដោយ  $f(x) = x + \frac{1 - 3e^x}{1 + e^x}$  គេតាងដោយ  $C$  ក្រាបរបស់វានៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ។
1. បង្ហាញថា  $f(x) = x + 1 - \frac{4e^x}{1 + e^x}$  និងគណនាលីមីតនៃ  $f$  ត្រង់  $-\infty$ ។ ស្រាយបំភ្លឺថាបន្ទាត់  $d_1$  ដែលមានសមីការ  $y = x + 1$  អាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប  $C$  ត្រង់  $-\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប  $C$  ធៀបនឹងបន្ទាត់  $d_1$  ។



ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
សម័យប្រឡង: ១៩ សីហា ២០១៩  
វិញ្ញាសា: គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)  
រយៈពេល: ១៥០ នាទី  
ពិន្ទុ: ១២៥  
ប្រធាន:

មន្ត្រីប្រឡង .....  
លេខបន្ទប់ .....លេខតុ .....  
ឈ្មោះបេក្ខជន .....  
ឈ្មោះលេខាបេក្ខជន .....

ប្រធានទី០៤

- I. (១៥ ពិន្ទុ) គណនាលីមីត ៖
- ក.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{1 - x^2}$       ខ.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \sin x}}$       គ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 2x}{x \sin 3x}$       ឃ.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x - 6}{x^2 + 3x - 4}$
- II. (១៥ ពិន្ទុ) គេមានចំនួនកុំផ្លិច  $z = 1 + i\sqrt{3}$  និង  $w = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)^3$
- ក. ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា  $z$  ជាឫសនៃសមីការ  $z^2 - 2z + 4 = 0$  រួចទាញរកឫសមួយទៀតនៃសមីការនេះ ។
- ខ. ចូរសរសេរឫសទាំងពីរនៃសមីការ  $z^2 - 2z + 4 = 0$  និង  $w$  ជាចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។
- គ. ចូរសរសេរ  $w$  ជាចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិត រួចស្រាយបញ្ជាក់ថា  $\frac{z}{w} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + i \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$  ។
- III. (១៥ ពិន្ទុ) ក្នុងប្រអប់មួយមានប៊ូល ៥ ដោយក្នុងនោះមានប៊ូលពណ៌ខ្មៅ ៣ ត្រូវបានគេចុះលេខពី ១ ដល់ ៣ និងប៊ូលពណ៌ស ២ ត្រូវបានគេចុះលេខពី ១ ដល់ ២ ។ គេចាប់យកប៊ូល ២ ព្រមគ្នាក្នុងពេលតែមួយដោយចៃដន្យចេញពីក្នុងប្រអប់នោះ ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដូចខាងក្រោម ៖
- ក. A : "គេចាប់បានប៊ូលមានពណ៌ដូចគ្នា"
- ខ. B : "គេចាប់បានប៊ូលដែលមានផលបូកលេខស្មើ ៣"
- គ. C : "គេចាប់បានប៊ូលដែលមានផលបូកលេខស្មើ ៣ ដោយដឹងថាវាមានពណ៌ដូចគ្នា"
- IV. 1. (១០ ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល ៖  $I = \int_1^2 \left( \frac{x^2}{2} + x - 3 \right) dx$  និង  $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{1 - \sin 4x}{4x + \cos 4x} \right) dx$  ។
2. (៥ ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍  $f(x) = -\frac{4-x}{(x-3)^2}$  កំណត់ចំពោះគ្រប់  $x \neq 3$  បង្ហាញថា  $f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{(x-3)^2}$  ។
- គណនា  $K = \int_0^2 f(x) dx$  ។
- V. ក. (៥ ពិន្ទុ) គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) :  $y'' - 3y' + 2y = 0$  ។
- ខ. (៥ ពិន្ទុ) រកចម្លើយពិសេសមួយនៃ (E) ដោយដឹងថាក្រាបនៃចម្លើយរបស់វាប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់ដេក  $y = 1$  ត្រង់  $x = 0$  ។
- VI. 1. (១០ ពិន្ទុ) ក. គេឲ្យខ្សែកោង (E) :  $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  ។ បញ្ជាក់ប្រភេទនៃខ្សែកោង (E) ។
- ខ. កំណត់កូអរដោនេ ផ្ចិត កំពូល កំណុំ ប្រវែងអ័ក្សធំ និងប្រវែងអ័ក្សតូចនៃ (E) រួចសង់ខ្សែកោង (E) ។
2. (១០ ពិន្ទុ) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសទៅវិជ្ជមាន  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  គេមានចំណុចបី  $A(1, 2, 1), B(4, 2, 4), C(5, 3, 0)$  ។
- ក. រកប្រវែង  $AB, AC, BC$  រួចធ្វើការសន្និដ្ឋាននៃប្រភេទត្រីកោណ  $ABC$  ។
- ខ. គណនាផលគុណ  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$  រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ  $ABC$  ។
- VII. (៣៥ ពិន្ទុ) ផ្នែក A គេមានអនុគមន៍  $g$  កំណត់លើ  $(0, +\infty)$  ដោយ  $g(x) = -x^2 + 1 - 2 \ln x$  ។
- ក. ចូរគណនាដេរីវេ  $g'(x)$  រួចទាញថាអនុគមន៍  $g$  ជាអនុកម្មន៍ចុះដាច់ដាច់លើចន្លោះ  $(0, +\infty)$  ។
- ខ. ចូរគណនាតម្លៃ  $g(1)$  ។ ចូរបញ្ជាក់សញ្ញានៃ  $g(x)$  លើ  $(0, +\infty)$  ។

**ផ្នែក B** គេឲ្យអនុគមន៍  $f$  កំណត់លើចន្លោះ  $(0, +\infty)$  ដោយ  $f(x) = \frac{9x^2 + 6 \ln x - 1}{2x^3}$  មានក្រាបតាង  $C$  ។

ក. ចូររកលីមីតនៃ  $f$  ត្រង់  $0$  និង  $+\infty$  ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងដេកនៃក្រាប  $C$  ។

2. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់  $x > 0$  គេបាន  $f'(x) = kg(x)$  ដែល  $k$  ជាចំនួនពិតត្រូវកំណត់ ។  
គូសតារាងអថេរភាពនៃ  $f$  ដោយប្រើលទ្ធផលផ្នែក A ។

គ. ចូរគណនា  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  រួចទាញថា  $f(x) = 0$  មានឫសតែមួយគត់ស្ថិតនៅចន្លោះ  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

**ឃ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ T ប៉ះទៅនឹងក្រាប C ត្រង់អាប៊ីស៊ីស 1 ។**

ង. គណនា  $f(2)$  រួចសង្ខេប  $C$  និងបង្ហាត់  $T$  ក្នុងតម្រូវអវត្តណរម៉ាល់  $(O, i, j)$  ។

## ප්‍රශ්න

[illegible]



ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

សម័យប្រឡង: ១៩ សីហា ២០១៩

វិញ្ញាសា: គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

រយៈពេល: ១៥០ នាទី

ពិន្ទុ: ១២៥

ប្រធាន:

មន្ត្រីប្រឡង .....

លេខបន្ទប់ ..... លេខគុ .....

ឈ្មោះបេក្ខជន .....

ឋានៈលេខាបេក្ខជន .....

ប្រធានទី០៥

I. ក្នុងចំណោមមួយមានឃ្លីពណ៌សចំនួន 2 ឃ្លីពណ៌ក្រហមចំនួន 4 និងឃ្លីពណ៌ខៀវចំនួន 4 ។ គេចាប់យកឃ្លី 3 ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យ ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

A: ឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ក្រហម; B: យ៉ាងតិចមានឃ្លី 2 មានពណ៌ខៀវ; C: ឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ខុសៗគ្នា ។

II. គណនាលីមីត

ក.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x-2) + x^2 + x - 1}{1-x}$

ខ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{\sin 3x}$

គ.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x}{2(\pi - 3x)}$

III. គេមានចំនួនកុំផ្លិច  $z_1 = 3 + 3i\sqrt{3}$  និង  $z_2 = \sqrt{3} + i$  ។

ក. គណនា  $z_1 \times z_2$  និង  $\frac{z_1}{z_2}$

គ. សរសេរ  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3$  ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ. សរសេរ  $z_1 \times z_2$  និង  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

IV. គណនាអាំងតេក្រាល:  $I = \int_1^2 (2-x+x^2) dx$ ;  $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[ \cos 2x - \frac{1}{2} \cos 4x \right] dx$ ;  $K = \int_2^3 \left( 3x-2 + \frac{1}{x-1} \right) dx$  ។

V. 1. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  គេមានចំណុច A (1;2;3), B (3;0;1), C (-1;0;1) និង D (2;1;2) ។

a. រកវ៉ិចទ័រ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$  ។

b. បង្ហាញថាចំណុច A, B និង C មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។

c. បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ  $n(0;1;-1)$  ជារ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទៅនឹងប្លង់ (ABC) ។

2. គេមានសមីការ  $(2x+3y)^2 = 12(xy+3)$  ។

បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប ។ រកប្រវែងអ័ក្សតូច អ័ក្សធំ កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ និងសង់អេលីបនេះ ។

VI. a. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល: (E) :  $y'' + 4y' = 5y$  ។

b. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) បើគេដឹងថាក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ចម្លើយនេះកាត់តាមចំណុច (0;3) ហើយបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចនេះមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ -3 ។

VII. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ  $(1; +\infty)$  ដោយ  $f(x) = -x + 4 + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$  ។ គេតាងដោយ (C) ក្រាបរបស់វានៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់  $(o; \vec{i}; \vec{j})$  ។

1. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ 1 និងត្រង់  $+\infty$  ។

2. ស្រាយបំភ្លឺថានៅលើ  $(1; +\infty)$  គេបានដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ  $f'(x) = \frac{-(x^2+1)}{(x+1)(x-1)}$  ។ សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f លើ  $(1; +\infty)$  ។

3. a. បង្ហាញថាបន្ទាត់  $d_1$  ដែលមានសមីការ  $y = -x + 4$  ជាអាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់  $+\infty$  ។

b. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ x លើ  $(1; +\infty)$   $\frac{x+1}{x-1} > 1$  និងទាញយកការប្រៀបធៀបទីតាំងនៃ (C) ធៀបនឹង  $d_1$  ។

- កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចនៅលើ (C) ដែលបង្គាត់ប៉ះ  $d_2$  ទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចនេះមានមេគុណប្រាប់ទិស  $-\frac{5}{3}$  និងសរសេរសមីការបង្គាត់ប៉ះ  $d_2$  នេះ។
- សង់ក្រាប (C) អាស៊ីមតូត  $d_1$  និងបង្គាត់ប៉ះ  $d_2$  ។ ប្រើតម្លៃប្រហែល  $\ln 3 = 1.1$  និងក្រាប (C) កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុច  $(4.5; 0)$  ។

5. សង់ក្រាប (C) អាស៊ីមតូត  $d_1$  និងបង្ហាត់ប៉ះ  $d_2$  ។ ប្រើតម្លៃប្រហែល  $\ln 3 = 1.1$  និងក្រាប (C) កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុច  $(4.5; 0)$  ។

## အဖြေ

[illegible]

.....

---

ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
សម័យប្រឡង: ១៩ សីហា ២០១៩  
វិញ្ញាសា: គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)  
រយៈពេល: ១៥០ នាទី  
ពិន្ទុ: ១២៥  
ប្រធាន:

មណ្ឌលប្រឡង .....  
លេខបន្ទប់ .....លេខតុ .....  
ឈ្មោះបេក្ខជន .....  
ឋានៈលេខាបេក្ខជន .....

ប្រធានទី០៦

- I. (១៥ ពិន្ទុ) គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច  $z = (1 + i)^{10} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^{20}$  ។
- ក. សរសេរ  $z$  ជាទម្រង់ពីជគណិត និងទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ 2. កំណត់ចំនួនពិត  $x$  និង  $y$  ដើម្បីឲ្យ  $xz + y\bar{z} = \sqrt{3}$  ។
- II. (១៥ ពិន្ទុ) គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:
- ក.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2\sqrt{x} - 3}{x - 5\sqrt{x} + 4}$  2.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3} \cos x - \sin x}{6x - 2\pi}$  គ.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 + x - 1 + x^2(x - 2)}$
- III. (១៥ ពិន្ទុ) ក្នុងចង្កូមមានបីចំណុចពណ៌ស 5 ដើម កូនបីចំណុចខៀវ 3 ដើម និងកូនបីចំណុចក្រហម 4 ដើម ។ គេចាប់យកបីចំណុច 3 ចេញព្រមគ្នាដោយចៃដន្យ ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:
- ក. A : “ចាប់បានបីចំណុចទាំង 3 មានពណ៌ដូចគ្នា” គ. C : “ចាប់បានបីចំណុចទាំង 3 មានពណ៌ខុសគ្នា” ។
2. B : “ចាប់បានបីចំណុចខៀវ 2 គត់”
- IV. (១៥ ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:
១. ក.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \sin 2x}{\sin x + \cos x} dx$  2.  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos^2 2x} dx$  គ.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + 1) \sin 2x dx$
២. គេឲ្យអនុគមន៍  $f$  កំណត់ដោយ  $f(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2}$  ចំពោះ  $x \neq 1$  ។
- កំណត់ចំនួនពិត  $a$  និង  $b$  ដើម្បីឲ្យ  $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2}$  ចំពោះ  $x \neq 1$  រួចគណនា  $K = \int_0^2 f(x) dx$  ។
- V. (១៥ ពិន្ទុ) គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) :  $y' - 2y = 4 \cos x$  ។
- ក. កំណត់ចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (F) :  $y' - 2y = 0$  ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់  $y(0) = 1$  ។
2. កំណត់ចំនួនពិត  $a$  និង  $b$  ដែលអនុគមន៍  $g$  កំណត់លើ  $\mathbb{R}$  ដោយ  $g(x) = a \cos x + b \sin x$  ផ្ទៀងផ្ទាត់ (E) ។
- គ. ទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ។
- VI. ១. (១០ ពិន្ទុ) គេឲ្យសមីការនៃកោនិច (P) :  $(1 - 2x)^2 - 8(y + 1) + 7 + 4x = 0$  ។ បង្ហាញថា (P) ជាប៉ារ៉ាបូល ។
- កំណត់កូអរដោនេកំពូល កំណុំ បន្ទាត់ប្រាប់ទិស និងសង់ក្រាបវា ។
២. (១០ ពិន្ទុ) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ប្រដាប់ដោយទិសដៅវិជ្ជមាន  $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  គេមានចំណុច  $A(-1; 2; 1)$ ,  $B(-1; 2; 3)$  និង  $\overrightarrow{BC} = 3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$  ។
- ក. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច C ។ គណនាផលគុណស្កាលែ  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$  និងទាញរកកូស៊ីនុសនៃមុំ B ។
2. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ  $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA}$  និងកំណត់សមីការប្លង់កាត់តាម A; B; C ។
- VII. (៣៥ ពិន្ទុ) ផ្នែក A : អនុគមន៍  $g$  កំណត់លើ  $\mathbb{R}$  ដោយ  $g(x) = (2 - x)e^{-x} - 2$  ។
- ក. គណនា  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  និង  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  ។
2. គណនាដេរីវេ  $g'(x)$ ,  $g(0)$  រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃ  $g(x)$  ។ ទាញរកសញ្ញានៃ  $g$  ទៅតាមតម្លៃនៃ  $x$  ។

**ផ្នែក B :** អនុគមន៍  $f(x) = \frac{2e^x + 1}{(x-3)e^x}$  មានក្រាប  $C$  ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  ។

ក. រកដែនកំណត់  $D_f$  នៃអនុគមន៍  $f$  រួចគណនាលីមីតនៃ  $f$  ត្រង់ចុងដែនកំណត់។

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងអស់នៃក្រាប  $C$ ។

ខ. ចំពោះគ្រប់  $x \in D_f$  គេបាន  $f'(x) = \frac{(2-x)e^{-x}-2}{(x-3)^2 e^{2x}}$  ។ រួចបង្ហាញថា  $f'(x)$  មានសញ្ញាដូច  $g(x)$  ។

គ. គូសតារាងអថេរភាពនៃ  $f$  និងសង់ក្រាប  $C$ ។

**បន្ថែម**

សូមសំណាងល្អ!

ប្រធានទី០៧

- I. (១៥ ពិន្ទុ) គណនាលីមីត:  $A = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3x^2 - 2x + 1}{x} - \frac{1}{x} \right)$ ,  $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - \sin 3x}{\sin^2 x + 4x}$ ,  $C = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{\frac{\pi}{6} - x}$
- II. (១៥ ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល:  $I = \int \left( \frac{4x - 5x^2 + 6x^3}{x^3} \right) dx$ ,  $J = \int_0^1 \left( \frac{1}{x^2 - 4x + 4} \right) dx$ ,  $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \sqrt{1 - \cos x}) dx$
- III. (១៥ ពិន្ទុ) គេមានចំនួនកុំផ្លិច  $z_1 = 2\sqrt{3} + 2i$  និង  $z_2 = 3 + 3\sqrt{3}i$  ។ ក. គណនា  $z_1 \times z_2$  និង  $\frac{z_1}{z_2}$  ។  
ខ. សរសេរស  $z_1 \times z_2$  និង  $\frac{z_1}{z_2}$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ គ. បង្ហាញថា  $x = \left( \frac{9i}{4} \right)^{1008} \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^{2016}$  ជាចំនួនពិត ។
- IV. (១០ ពិន្ទុ) ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) :  $y'' + 3y' = 4y$  ។  
ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ដោយដឹងថាក្រាបតាងអនុគមន៍ចម្លើយប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់ T ដែលមានសមីការ  $y + 4x = 0$  ត្រង់ចំណុច A (0,6) ។
- V. (១០ ពិន្ទុ) ក្នុងចង្កូមមានឃ្លីក្រហមចំនួន 3 ឃ្លីសចំនួន 2 និងឃ្លីខ្មៅចំនួន 4 ។ គេចាប់យកឃ្លីមួយចំនួន 3 ចេញមិនដាក់ចូលវិញដោយចៃដន្យ ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែលចាប់បាន:  
A : ឃ្លីទាំង 3 ជាឃ្លីពណ៌ដូចគ្នា, B : ឃ្លីទី 1 និង 2 ជាឃ្លីពណ៌ស, C : ឃ្លីទាំង 3 ជាឃ្លីពណ៌ខុសគ្នា
- VI. (៣៥ ពិន្ទុ) ក្នុងតម្រុយ  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  អនុគមន៍  $f$  កំណត់  $x \in (-1, +\infty)$  ដោយ  $f(x) = x + \frac{\ln(1+x)}{1+x}$  មានក្រាប (C) ។  
១. អនុគមន៍  $g$  កំណត់  $x \in (-1, +\infty)$  ដោយ  $g(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$  ។  
ក. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍  $g(x)$  ។ គណនា  $g(0)$  ។  
ខ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍  $g$  ដោយមិនចាំបាច់គណនាលីមីត រួចសិក្សាសញ្ញា  $g(x), x \in (-1, +\infty)$  ។  
២. ក. គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់នៃអនុគមន៍  $f$  ដោយប្រើ  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$  និង  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  ។  
រួចទាញបញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C) ។  
ខ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា  $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)^2}, x \in (-1, +\infty)$  រួចសិក្សាសញ្ញា  $f'(x)$  ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍  $f$  ។  
គ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ L មានសមីការ  $y = x$  ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ខាង  $+\infty$  រួចសិក្សាទីតាំងធៀប ។  
ឃ. សង់ក្រាប (C) និង L ក្នុងតម្រុយតែមួយ ។  
គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកនៃប្លង់ខណ្ឌដោយក្រាប (C) និង L បន្ទាត់ឈរ  $x = 1$  និង  $x = 3$  ។
- VII. (២៥ ពិន្ទុ) ១. ក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  គេមានចំណុច A (1,3,-1), B (3,0,1), C (2,1,-3) និងបន្ទាត់ L ដែលមានសមីការ  $x = 2 - t, y = 2t$  និង  $z = 1 - t, t \in \mathbb{R}$  ។  
ក. បង្ហាញថាចំណុច A, B និង C កំណត់បានប្លង់ ABC មួយ រួចកំណត់សមីការប្លង់ ABC ។  
ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC ។ រកកូអរដោនេចំណុច M ប្រសព្វរវាងប្លង់ ABC និងបន្ទាត់ L ។  
២. បញ្ជាក់សមីការ (E) :  $4x^2 - 100 = 25y^2$  ជាអ៊ីពែបូល ។ រកកូអរដោនេផ្ចិត កំពូល កំណុំ និងសមីការអាស៊ីមតូត រួចសង់ ។

[illegible]

ប្រធានទី០៨

I. (១០ ពិន្ទុ) គេមានចំនួនកុំផ្លិច  $z_1 = -\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$  និង  $z_2 = 1 + i$  ។

ក. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច  $z_1$  និង  $z_2$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ ខ. រកម៉ូឌុល និងអាក្យុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច  $w = \frac{z_1}{z_2}$  ។

II. (១៥ ពិន្ទុ) គណនាលីមីត:  $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 - \sqrt{x+15}}{x^2 - 1}$  ;  $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{\sin^2 5x}$  ;  $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x^2 - 5x + 6) - \ln x]$

III. (១៥ ពិន្ទុ) ១. គណនាអាំងតេក្រាល:  $I = \int_1^2 (1 - 3x + 2x^2) dx$  ;  $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} dx$

២. ក. កំណត់ចំនួនពិត  $a, b$  និង  $c$  ដើម្បីឲ្យ  $\frac{3x^2 + 6x + 7}{(x+2)(x+3)} = a + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+3}$  ចំពោះគ្រប់  $x \in \mathbb{R} - \{-2; -3\}$  ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាល  $K = \int \frac{3x^2 + 6x + 7}{(x+2)(x+3)} dx$  ។

IV. (១០ ពិន្ទុ) ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) :  $y'' + 4y' + 4y = 0$  ។

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃ (E) បើគេដឹងថាខ្សែកោង (H) តាងអនុគមន៍ចម្លើយនេះកាត់តាមចំណុច  $M(-1; 1)$  ហើយបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចនេះស្របនឹងបន្ទាត់ដែលមានសមីការ  $y = 2x + 3$  ។

V. (១៥ ពិន្ទុ) ក្នុងចង់មួយមានបីចំណុចខៀវ 5 ដើម បីចំណុចក្រហម 4 ដើម និងបីចំណុចខ្មៅ 3 ដើម ។

គេចាប់យកបីចំណុច 4 ដើមព្រមគ្នាចេញពីចង់ដោយចៃដន្យ ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

ក. A : បីចំណុចខៀវទាំង 4 ដើម ខ. B : បីចំណុចខៀវទាំង 4 ដើមមានចំណុចដូចគ្នា គ. C : យ៉ាងតិចមានបីចំណុច 3 ដើមពណ៌ដូចគ្នា ។

VI. (២៥ ពិន្ទុ) ១. គេមានសមីការ  $4(5y - 2x)(2x + 5y) = -400$  ។ បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអ៊ីពែបូល ។ រកកូអរដោនេផ្ចិតកំពូល កំណុំ និងសមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរ រួចសង់អ៊ីពែបូលនេះ ។

២. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន  $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  គេមាន  $A(3; 2; -1), B(-6; 1; 1); C(4; -3; 3), D(-1; -5; -1)$  និង  $H(1; -1; 3)$  ។

ក. គណនាប្រវែង AH ។ សរសេរសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច H ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ (AH) ។

ខ. បង្ហាញថា B; C; D ស្ថិតនៅលើប្លង់ (P) ។

គ. គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ  $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}$  រួចគណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ BCD ។

VII. (៣៥ ពិន្ទុ) គេឲ្យអនុគមន៍  $f$  កំណត់លើ  $I = (4; +\infty)$  ដោយ  $f(x) = -2x + 5 + 3 \ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$  និង (C) ជាក្រាបតំណាងអនុគមន៍  $f$  ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ  $(o; \vec{i}; \vec{j})$  ដែលមានឯកតាលើអ័ក្ស  $1cm$  ។

១. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍  $f$  ត្រង់ 4 និង  $+\infty$  ។

២. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់  $x \in I$  គេបាន  $f'(x) = \frac{-2x^2 + 6x - 7}{(x+1)(x-4)}$  ។ សិក្សាសញ្ញា  $f'(x)$  ចំពោះគ្រប់  $x \in I$  ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍  $f$  ។

៣. ក. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (D) ដែលមានសមីការ  $y = -2x + 5$  ជាអាស៊ីមតូតនៃ (C) ។

ខ. ចំពោះគ្រប់  $x > 4$  ចូរបង្ហាញថា  $\frac{x+1}{x-4} > 1$  រួចសិក្សាទីតាំងធៀបរវាង (C) និង (D) ។

គ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចស្ថិតនៅលើខ្សែកោង (C) ដែលបន្ទាត់ ( $\Delta$ ) ប៉ះខ្សែកោង (C)

ត្រង់ចំណុចនោះមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើនឹង  $-\frac{9}{2}$  រួចសរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (Δ) ។

ឃ. សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (D), (Δ) នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ។ (គេឲ្យ  $\ln 6 = 1.8$ )

សូមអានប្រធានលំហាត់ឲ្យបានច្បាស់មុនធ្វើលំហាត់!

បង្ហាញ

សូមសំណាងល្អ!



ប្រឡងសញ្ញាបត្របឋមសិក្សាទុតិយភូមិ

សម័យប្រឡង: ១៩ សីហា ២០១៩

វិញ្ញាសា: គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

រយៈពេល: ១៥០ នាទី

ពិន្ទុ: ១២៥

ប្រធាន:

មន្ត្រីប្រឡង .....

លេខបន្ទប់ .....លេខតុ .....

ឈ្មោះបេក្ខជន .....

ឈ្មោះលេខាបេក្ខជន .....

ប្រធានទី០៩

I. (១៥ ពិន្ទុ) ក្នុងកាបូបមួយមានប៊ិច 4 ដើម ខ្មៅ 3 ដើម និងបន្ទាត់ 2 ដើម។ សិស្សម្នាក់លូកចាប់យកវត្ថុ 3 ព្រមគ្នាចេញពីកាបូប ដោយចៃដន្យ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

ក. A : ចាប់បានប៊ិចទាំង 3 ដើម។ 2. B : ចាប់បានបន្ទាត់មួយដើមយ៉ាងតិច។ គ. C : ចាប់បានវត្ថុមួយមុខមួយដើម។

II. (១០ ពិន្ទុ) ក. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច  $z_1 = \sqrt{3} + i$  និង  $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

2. គណនា  $z_1^6 + z_2^6$ ។

III. (១៥ ពិន្ទុ) គណនាលីមីត: ក.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 16}{\sqrt{2x} - 2}$  2.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2x - \pi)}{x - \frac{\pi}{2}}$  គ.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x+1} - e^{1-2x})$

IV. (១៥ ពិន្ទុ) ១. ចូរគណនាអាំងតេក្រាល:  $I = \int_1^2 \frac{(x-1)^2}{x^2} dx$  និង  $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 - 2 \sin 2x}{(\sin x - \cos x)^2} dx$ ។

2. ក. កំណត់ចំនួនពិត A; B និង C ដើម្បីឲ្យ  $\frac{3x^2}{x^3 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}, x \neq 1$ ។ 2. គណនាអាំងតេក្រាល  $K = \int \frac{3x^2}{x^3 - 1} dx$

V. (១០ ពិន្ទុ) ១. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) :  $y'' - 3y' - 4y = 0$ ។

2. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃ (E) បើគេដឹងថាខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ចម្លើយកាត់តាមចំណុច (0;1) ហើយប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់ត្រង់ចំណុចនេះមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើនឹង 9។

VI. (២៥ ពិន្ទុ) ១. ក. រកកូអរដោនេនៃកំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃប៉ារ៉ាបូល  $P : 2y^2 + 8y + 3x - 4 = 0$ ។

2. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងប៉ារ៉ាបូល P និងបន្ទាត់មានសមីការ  $x = -2$  រួចសង់ប៉ារ៉ាបូល P។

2. គេមានកូអរដោនេនៃចំណុច M (2,1,0) ; N (1,-2,2) និង P (0,-2,1)។

ក. បង្ហាញថាចំណុច M, N និង P ជាកំពូលទាំងបីនៃត្រីកោណសមបាត។

2. សរសេរសមីការប្លង់ ( $\alpha$ ) ដែលកាត់តាមចំណុច M, N និង P។

គ. រកសមីការទូទៅស្វ៊ែរ (S) មួយដែលមានផ្ចិត A (1,2,-3) ហើយប៉ះទៅនឹងប្លង់ ( $\alpha$ )។

VII. (៣៥ ពិន្ទុ) ផ្នែក A គេឲ្យអនុគមន៍ g កំណត់លើ  $(0; +\infty)$  ដោយ  $g(x) = 4x^2 + 1 - \ln x$ ។

ក. គណនាដេរីវេ  $g'(x)$  និងសិក្សាសញ្ញានៃដេរីវេ  $g'(x)$  លើចន្លោះ  $(0; +\infty)$ ។

2. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍  $g(x)$  (ដោយមិនចាំបាច់គណនាលីមីតត្រង់ 0 និង  $+\infty$ ) រួចទាញរកសញ្ញានៃ  $g(x)$ ។

ផ្នែក B គេមានអនុគមន៍  $f(x) = 4x - 4 + \frac{\ln x}{x}$  ហើយមានខ្សែកោង (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណូម  $(0; \frac{7}{4})$

ដែលមានឯកតាលើអ័ក្សស្មើនឹង 2cm។

ក. រកលីមីត  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  និង  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  រួចទាញរកអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C)។

2. គណនាដេរីវេ  $f'(x)$  និងបញ្ជាក់ថា  $f'(x)$  មានសញ្ញាដូច  $g(x)$  លើចន្លោះ  $(0; +\infty)$ ។ គូសតារាងអថេរភាពនៃ  $f(x)$ ។

គ. បង្ហាញថាបន្ទាត់  $\Delta : y = 4x - 4$  ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) រួចសិក្សាទីតាំងធៀបនៃក្រាប (C) និងបន្ទាត់  $\Delta$ ។

ឃ. សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់  $\Delta$  ក្នុងតម្រុយអរតូណូម  $(0; \frac{7}{4})$ ។

ង. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្ទៃក្នុងដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ឈរ  $x = 1$  និង  $x = e$ ។ (គេឲ្យ:  $\ln 2 = 0.7$ )

សូមសំរោងឡ!

**ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ**

**សម័យប្រឡង: ១៩ សីហា ២០១៩**

**វិញ្ញាសា: គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)**

**រយៈពេល: ១៥០ នាទី**

**ពិន្ទុ: ១២៥**

**ប្រធាន:**

**មណ្ឌលប្រឡង** .....

**លេខបន្ទប់** ..... **លេខតុ** .....

**ឈ្មោះបេក្ខជន** .....

**ឈ្មោះលេខាបេក្ខជន** .....

**១. (១៥ ពិន្ទុ)** គណនាលីមីត:  $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)^2 - 2x + 2}{1-x^2}$ ,  $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-9 \sin 3x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$ ,  $C = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{1 - \sqrt{2} \cos x}$

**២. (១៥ ពិន្ទុ)** គេមានចំនួនកុំផ្លិច  $z_1 = (\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1)$  និង  $z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$  ។

ក. គណនា  $z = z_1 \times z_2$  ជាទម្រង់ពីជគណិត។

ខ. សរសេរ  $z$  និង  $z_2$  ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ ទាញរកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ  $z_1$  ។

**៣. (១០ ពិន្ទុ)** ក្នុងថង់មួយមានប៊ូលទាំងអស់ 12 ដែលក្នុងនោះមានប៊ូលក្រហម 3 ប៊ូលខៀវ 4 និងប៊ូលបៃតង 5 ។

គេចាប់យកប៊ូលម្តងមួយៗចំនួន 3 ចេញដោយមិនដាក់ចូលវិញដោយចៃដន្យ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែលចាប់បាន:

ក. A : ប៊ូលទាំង 3 មានពណ៌ដូចគ្នា។    ខ. B : ប៊ូលពីរដំបូងមានពណ៌ដូចគ្នា។    គ. C : ប៊ូលទាំង 3 មានពណ៌ខុសគ្នា។

**៤. (១៥ ពិន្ទុ)** ក. គណនាអាំងតេក្រាល  $I = \int_1^2 \left( 6x^2 + 4x - \frac{1}{x} + 4 \right) dx$  និង  $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2 \cos 2x - 4 \sin 2x) dx$  ។

ខ. គេឲ្យ  $f(x) = \frac{3x-1}{(x-2)^2}$  កំណត់ចំពោះគ្រប់  $x \neq 2$ ។ បង្ហាញថា  $f(x) = \frac{3}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2}$ ,  $x \neq 2$  ។ ទាញរក  $K = \int_1^4 f(x) dx$  ។

**៥. (១០ ពិន្ទុ)** ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) :  $y'' - y = 2(y - y')$  ។

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃ (E) ដោយក្រាបនៃចម្លើយរបស់វាប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់ (L) :  $2y - 4x - 1 = 0$  ត្រង់ចំណុច P (0, 6) ។

**៦. (២៥ ពិន្ទុ)** ១. គេមានសមីការ  $2(6y - 3x)(3x + 6y) = -648$  ។ បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអ៊ីបេរបូល។

រកកូអរដោនេផ្ចិត កំពូល កំណុំ និងសមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរ រួចសង់អ៊ីបេរបូលនេះ។

២. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន  $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  គេមានចំណុច A (0; 4; 1), B (2; 0; 5); C (2; 2; 1), D (0; 6; -3) ។

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ABCD ជាប្រលេឡូក្រាម។

ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$  ។ រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃប្រលេឡូក្រាម ABCD ។

**៧. (៣៥ ពិន្ទុ)** គេឲ្យអនុគមន៍  $f$  កំណត់លើ  $\mathbb{R}$  ដោយ  $f(x) = x + 2 - \frac{2(e^x - 1)}{e^x + 1}$  មានក្រាបតាង (C) ។

1. ក. គណនាលីមីតនៃ  $f$  ត្រង់  $-\infty$  និង  $+\infty$

ខ. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ ( $\Delta$ ) ដែលមានសមីការ  $y = x + 2$  ។

2. ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត  $x$ ,  $f'(x) = \left( \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$  ។

ខ. សិក្សាអថេរភាពនៃ  $f$  លើ  $\mathbb{R}$  និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ  $f$  ។

3. ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត  $x$ ,  $f(x)$  អាចសរសេរជាពីរទម្រង់គឺ  $f(x) = x + \frac{4}{e^x + 1}$  និង  $f(x) = x + 4 - \frac{4e^x}{e^x + 1}$  ។ ទាញបញ្ជាក់ថា (C) មានអាស៊ីមតូតទ្រេតគឺ:  $(d_1) : y = x$  ខាង  $+\infty$  និង  $(d_2) : y = x + 4$  ខាង  $-\infty$  ។

ខ. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងអាស៊ីមតូតទាំងពីរ  $(d_1)$  និង  $(d_2)$  ។

4. ក. គណនា  $f(-x) + f(x)$  ។ ទាញថាចំណុច I (0, 2) ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) ។

ខ. គណនា  $f(1)$  និង  $f(2)$  ។ រួចសង់ក្រាប (C), ( $\Delta$ ),  $(d_1)$  និង  $(d_2)$  ។ បើ  $\frac{e-1}{e+1} = 0.5$ ,  $\frac{e^2-1}{e^2+1} = 0.8$

សូមសំរាប់អ្នក!