$f(x)$

អាចារ្យ សូត្រ សឿម

សាលាពុទ្ធិកមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិពោធិ៍សាត់

គណិតវិទ្យាអូឡាំពិច

Mathematical Olympic

ភាគទី I

New

Old and New Methods-Old and New Problems

ផ្នែកវិសមភាព

Internaltional Mathematical Olympic
Asian Pacific Mathematical Olympic
IMO Problem Shortlist with Solutions

Group Old and New

សេចក្តីផ្តើម

សៀវភៅនេះបកប្រែនិងរៀបរៀងដោយខ្ញុំករុណាខ្ញុំបាទ

អាចារ្យ សូត្រ សឿម SOT SEURM

អតីតសមណៈសិស្សពុទ្ធិកមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិពោធិ៍សាត់

និងអតីតសមណៈនិស្សិតមហាវិទ្យាល័យគណិតវិទ្យា RUPP

បច្ចុប្បន្ន ជានិស្សិតមហាវិទ្យាល័យស្ថាបត្យកម្មហាណូយ VN

Old and New Methods-Old and New Problems

គណិតវិទ្យាអូឡាំពិចផ្នែកវិសមភាពថ្មីនិងចាស់

E-mail: sotsoeurm@gmail.com

Tel:(+84)01697985711 (Viet Nam)

សៀវភៅនេះបានយកចេញពីបណ្តា

+ យកច្រើនជាងគេតាម Internet www.mathlinks.ro សូមចូលបើចង់ឃើញច្បាប់ដើម

Up until today 19771 problems from 199 competitions have been posted. Out of these, 1232 problems have solutions.

View who posted the problems

និងមានលំហាត់ដែលបានដាក់ចូលដោយអ្នកគណិតវិទ្យាជាច្រើនប្រទេសនិងច្រើននាក់ រួមមាន : Total posts 2551469 | Total topics 412810 | Total members 104792 |

និងមានលំហាត់របស់បណ្តាប្រទេសមួយចំនួននោះគឺ : http://www.imo-official.org/countries.aspx

+សៀវភៅវៀតណាម

+សៀវភៅភាសាអង់គ្លេស

ឯកសារពិគ្រោះដើម

-វចនានុក្រមខ្មែរ របស់សម្តេចព្រះសង្ឃរាជ ជួន ណាត ឆ្នាំ 1967-1968

-វចនានុក្រមវៀតណាម-បារាំង-ខ្មែរ របស់សាកវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ 1988

-វចនានុក្រម វៀតណាម-ខ្មែរ ភាគទី I និង I ឆ្នាំ 1977

-សៀវភៅក្រសួងអរំទាំងចាស់និងកម្មវិធីថ្មី

-Internet

-Vẽ Đẹp Bất Đẳng Thức Trong Các Kì Thi OLYMPIC toán học (Trần Phương –chủ biên+Võ Quốc Bá Cẩn+Trần Quốc Anh)
-40 Năm OLYMPIC toán học quốc tế (PGS.TS Vũ Dương Thụy-chủ biên+ThS. Nguyễn Văn Nho)
-OLYMPIC TOÁN HỌC CHÂU Á THÁI BÍNH DƯƠNG ThS.Nguyễn Văn Nho
-TUYỂN TẬP CÁC BÀI TOÁN TỪ NHỮNG CUỘC THI TẠI TRUNG QUỐC Của ThS.NGUYỄN VĂN NHO

-TỦ SÁCH TOÁN HỌC &TUỔI TRẺ CÁC BÀI THI OLYMPIC TOÁN TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VIỆT NAM(1990-2006)
-TUYỂN CHỌN CÁC BÀI THI VÔ ĐỊNH TOÁN Ở CÁC ĐỊA PHƯƠNG-QUỐC GIA-QUỐC TẾ sách đùng cho học sinh khá;giòi-học sinh chuyên toán
របស់អ្នករៀបរៀង PGS.TS NGUYỄN VĂN LỘC (chủ biên)+TS.NGUYỄN VIẾT ĐÔNG+
BÙI HƯU ĐỨC +HÀN MINH TOÀN+ThS.HỒ ĐIỆN BIÊN+ThS.HOÀNG NGỌC CẢNH
-CÁC DỀ THI VÔ ĐỊNH TOÁN 19 NƯỚC TRONG ĐÓ CÓ VIỆT NAM
Tài liệu tham khóa cho học sinh giỏi toán thi vô định toán quốc gia &quốc tế tập I-II

-Tuyển Tập Dề Thi Olympic lớp 10-11:30-4 ; 1999
-Tuyển Tập Dề Thi Olympic lớp 10-11:30-4 ; 2000
-Tuyển Tập Dề Thi Olympic lớp 10-11: 30-4 ; 2001
-Tuyển Tập Dề Thi Olympic lớp 10-11:30-4 ; 2002
-Tuyển Tập Dề Thi Olympic lớp 10-11:30-4 ; 2003
-Tuyển Tập Dề Thi Olympic lớp 10-11:30-4 ; 2004
-Tuyển Tập Dề Thi Olympic lớp 10-11:30-4 ; 2005
-Tuyển Tập Dề Thi Olympic lớp 10-11:30-4 ; 2006
-Tuyển Tập Dề Thi Olympic lớp 10-11:30-4 ; 2007
-Tuyển Tập Dề Thi Olympic lớp 10-11:30-4 ; 2008
-Tuyển Tập Dề Thi Olympic lớp 10-11:30-4 ; 2009
-Tuyển Tập Dề Thi Olympic lớp 10-11:30-4 ; 2010
-Tuyển Tập Dề Thi Olympic lớp 10-11:30-4 ; 2011
-Tuyển Tập Dề Thi Olympic lớp 10-11:30-4 ; 2012

អារម្ភកថា

ព្រះសម្មាសម្ពុទ្ធ ទ្រង់ត្រាស់សម្តែងថា **រូបំ ជីរត្តិ មច្ចានំ នាម គោត្តំ នជីរត្តិ** ប្រែថា រូបរាងកាយយើងគ្រប់ៗគ្នានិងស្លាប់ជានិច្ច តែ នាមនិងកូត របស់យើងនិងបាត់បងឡើយ។

មកពីព្រះពុទ្ធដីកានេះយើងបានជាធ្វើឲ្យខ្ញុំករណាខ្ញុំសរសេររៀបរៀងសៀវភៅនេះឡើងគឺ ដើម្បីឲ្យកូនខ្មែរយើងមានឯកសាជាភាសាជាតិឲ្យកាន់តែច្រើននិងអ្វីដែលខ្ញុំបានធ្វើនេះសូមឲ្យ មានតម្លៃជាយូរដល់អ្នកសិក្សាជំនាន់ក្រោយៗទៀត។

សៀវភៅនេះវាគឺជាសៀវភៅទ្រឹស្តីបទនិងលំហាត់គណិតវិទ្យាដែលពិបាកបំផុត។ ដែល គេលើមកទៅប្រឡងលំដាប់អន្តរជាតិរួមហើយនិងលំហាត់ដែលបំរុងក្នុងពេលប្រឡងនោះ ហើយក៏មានលំហាត់ប្រឡងលំដាប់ជាតិក៏ច្រើននោះដែរ។ ដែលបណ្តាលលំហាត់មួយចំនួន មានរបៀបដោះស្រាយច្រើន ដែររបៀបទាំងនោះគឺជាគំនិត្យរបស់អ្នកគណិតវិទ្យាធំៗបានដោះ ស្រាយ។ ហើយខ្ញុំក៏បានប្រែយកមកពី Internet និងបណ្តាលសៀវភៅបរទេសជាច្រើនដូចជា សៀវភៅ វៀត ណាម និង សៀវ ភៅ ភាសា អង់គ្លេស ។ គំនិត្យរៀបរៀងសៀវភៅនេះគឺខ្ញុំចាប់ ផ្តើមចង់រៀបរៀង កាលពីខ្ញុំនៅជាព្រះសង្ឃនៅឡើង តែដោយកាលនោះផ្នែខាងភាសាគេនៅ មានកំរិតទាបណាស់ដូចនេះមិនធ្វើបាន។ ទើបតែមកដល់ឆ្នាំ 2012 នេះទើបខ្ញុំអាចសរសេរវា ឲ្យចេញមកបាន។ ហើយខ្ញុំសូមអរគុណដល់បងប្អូនដែលបានជួយឲ្យជាយោបល់បន្ថែមទៀង ដល់សៀវភៅនេះឲ្យកាន់តែមានតម្លៃថែមទៀត។ និងសូមឧទ្ទិសបុណ្យកុសលដែលខ្ញុំករណា ខ្ញុំបានបួសអស់រយៈ ពេលជិត 10 ឆ្នាំ ជូនដល់ មាតាបីតារបស់ខ្ញុំនិងបន្ទាប់មកឧទ្ទិសដល់ ឧបជ្ឈាយ៍របស់ខ្ញុំនិងលោកគ្រូអាចារ្យទាំងអស់ទាំងសាលាបាលីនិងសាលាអាណាចក្រ។ ហើយខ្ញុំសូមធ្វើនូវសេចក្តីគោរពដល់លោកគ្រូអ្នកដែលបានបង្រៀនខ្ញុំករណាខ្ញុំរហូតមក ជាពិសេសដូចជាលោកគ្រូអ្នកគ្រូដែលបង្រៀននៅខេត្តពោធិ៍សាត់និងនៅភ្នំពេញដូចជានៅ ពោធិ៍សាត់ អ្នកគ្រូ គឹម សុធី (OLYMPIC – អធិការគណិតវិទ្យាខេត្តពោធិ៍សាត់) លោកគ្រូ គង់ ចន្ថា លោកគ្រូ ជាលេង យួន ... នៅភ្នំពេញមានដូចជា លោកគ្រូ ជ័យ ថាវី, សិន ដារ៉ាស៊ី, និង ណៃស៊ីតទាង ប៉ាង , ហៃន គួយ , ជា សៃ , ជា លាង និងផ្នែកគណិតវិទ្យា ដូចជាលោកគ្រូ ជួន សុវណ្ណជន លោកគ្រូ សួន សុវណ្ណ និងលោកគ្រូ ហ៊ត ស៊ីអាត (OLYMPIC – អធិការគណិ តវិទ្យាភ្នំពេញ) .... និងលោកគ្រូអ្នកគ្រូជាច្រើនទៀត។

បណ្តារូបមន្តគ្រឹះមួយចំនួនរបស់វិសមភាព

■វិសមភាពតម្លៃដាច់ខាត

1. $|a+b| \leq |a|+|b|$ សមភាពកើតមាននៅពេល $ab \geq 0$
2. $||a|-|b|| \leq |a-b|$
3. $|a_1+a_2+\cdots+a_n| \leq |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$ សមភាពកើតមាននៅពេល $a_i a_j \geq 0$

■វិសមភាព Cauchy

1) គេឲ្យ $a; b \geq 0$ យើងមាន $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ករណីស្មើពេល $a=b$

2) គេឲ្យ n ចំនួន $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$

■វិសមភាព Bunhiacopski

គេឲ្យ $a_1; a_2; \ldots; a_n$ និង $b_1; b_2; \ldots; b_n$ ណាក៏ដោយយើងមាន

$$(a_1 b_1+a_2 b_2+\cdots+a_n b_n)^2 \leq (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$$

ករណីស្មើកើតមានពេល $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$

■វិសមភាព Schwarz

គេឲ្យ $a_1; a_2; \ldots; a_n$ និង $b_1; b_2; \ldots; b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ នោះយើងបាន

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$$ សមភាពនៅពេល $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$

■វិសមភាព Bernoulli

គេឲ្យ $a>-1$ និង $r \in \mathbb{Q}^+$

បើ $r \geq 1$ នោះ $(1+a)^r \geq 1+ra$ សមភាពពេល $a=0$ ឬ $r=1$

បើ $0<r<1$ នោះ $(1+a)^r < 1+ra$

■វិសមភាព Jensen

* គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)$កំណត់លើ $(a;b)$ និង $f(x)$ អនុគមន៍ប៉ោងលើ $(a;b)$នោះយើងមាន $x_1;x_2 \in (a;b)$ យើងបាន $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \leq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ សមភាពកើតមានពេល $x_1=x_2$

បើ $f(x)$ ផតលើ $(a;b)$ និង $x_1;x_2 \in (a;b)$ នោះយើងបាន $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \geq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

** ឧបមាថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍ប៉ោងលើ $(a;b)$ និង $\forall x_1;x_2;\dots;x_n \in (a;b); \forall n \geq 2$

យើងបាន $\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \leq f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$

*** ឧបមាថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍ផតលើ $(a;b)$និង $\forall x_1;x_2;\dots;x_n \in (a;b)$ $\forall n \geq 2$ យើងបាន

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$$

វិសមភាពទាំងពីរនេះសមភាពកើតមានពេល $x_1=x_2=\cdots=x_n$

■វិសមភាព Minkowski

$(a_1;a_2;\dots;a_n);(b_1;b_2;\dots;b_n)$ និង $(l_1;l_2;\dots;l_n)$ ជាចំនួនពិតណាក៏ដោយ

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2+l_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2+l_2^2}+\cdots+\sqrt{a_n^2+b_n^2+l_n^2} \geq$$

$$\sqrt{(a_1+b_1+l_1)^2+(a_2+b_2+l_2)^2+\cdots+(a_n+b_n+l_n)^2}$$

■វិសមភាព Chebyschev

គេឲ្យស្វីតពីររៀបតាមលំដាប់ដូចគ្នា

$a_1<a_2<\cdots<a_n$ និង $b_1<b_2<\cdots<b_n$ នោះយើងបាន

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n} \leq \frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n}$$

$a_1>a_2>\cdots>a_n$ និង $b_1>b_2>\cdots>b_n$នោះយើងបាន

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\geq\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n}$$

ករណីស្មើនៅពេល $a_1=a_2=\cdots=a_n;b_1=b_2=\cdots=b_n$

■លក្ខណះវិសេសរបស់វិសមភាពចំនួនពិត

គេឲ្យ $a;b;c;d\in\mathbb{R}$ យើងមាន

$$\frac{a}{b}<1\Rightarrow\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$$

$$\frac{a}{b}>1\Rightarrow\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+c}$$

$$\frac{a}{a+b}>\frac{a}{a+b+c}$$

$$\frac{a}{b}>\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+c}>\frac{c}{d}$$

ការសិក្សាសង្កេតពិនិត្យគឺជាគ្រូនៅជាប់ជាមួយនិងខ្លួនលោកអ្នកជានិច្ច។

ពីជគណិតនិងវិភាគ

បណ្តារូបមន្តវិសមភាពមួយចំនួនដែលយើងធ្លាប់បានជួប

1.បណ្តានិយមន័យ

a) យើងនិយាយអំពីមធ្យមបូក(ឬមធ្យមនព្វន្ត- **arithmetic mean**) របស់បណ្តាចំនួនពិត

$$a_1;a_2;\dots;a_n \text{ គឺ } \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

មធ្យមគុណ(ឬមធ្យមធរណីមាត្រ-geometric mean)របស់បណ្តាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន

$$a_1;a_2;\dots;a_n \text{ គឺ } \sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}$$

និងមធ្យមអាម៉ូនិច(***harmonic mean***)របស់បណ្តាចំនួនពិត $a_1; a_2; \dots ; a_n$ គឺ

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

b) អនុគមន៍ $f(x)$កំណត់លើ$[a; b]$បានហៅថាប៉ោងលើចន្លោះនោះបើចំពោះគ្រប់ ចំនួនពិតគឺ

$$x_1; x_2 \in [a; b] \text{ យើងមាន } f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

សញ្ញាស្មើកើតមាននៅពេលដែល $x_1 = x_2$ យើងក៏អាចនិយាយបានថាបើfផតលើចន្លោះ$[a; b]$ វិញនោះគឺយើងបានវិសមភាពមានសញ្ញាផ្ទុយនិងវិសមភាពខាងលើនេះ។

2. បណ្តាវិសមភាព

1.11 ទ្រឹស្តីបទ(ករណីវិសេសរបស់វិសមភាព Jensen)

បើ$f(x)$គឺជាអនុគមន៍ប៉ោងលើ$[a, b]$ គឺចំពោះគ្រប់ $x_1; x_2; \dots ; x_n \in [a; b]$

យើងមាន $f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \le \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$

សមភាពកើតមាននៅពេលដែល $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$

រាងទូទៅ

គេឲ្យ $p_1; p_2; \dots ; p_n \ge 0$ និង $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ និងមាន f គឺជាអនុគមន៍ប៉ោងលើ I ។

ពេលនោះចំពោះគ្រប់ $a_1; a_2; \dots ; a_n \in I$ នោះយើងបានវិសមភាពដូចខាងក្រោម

$$p_1 f(a_1) + p_2 f(a_2) + \cdots + p_n f(a_n) \ge f(p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n)$$

1.12 **វិបាកទី 1(វិសមភាពមធ្យមស្វ័យគុណឲ្យបីចំនួនវិជ្ជមាន)**

$$\left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\frac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

ពិនិត្យមើលអនុគមន៍ $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ ពេល $x > 0$ យើងមាន $f''(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} > 0$

ពេល $x>0$ នោះ$f(x)$ ជាអនុគមន៍ប៉ោង បើតាមវិសមភាព ***Jensen***

ចំពោះគ្រប់ចំនួនវិជ្ជមាន $z_1;z_2;z_3$ យើងមាន

$$f\left(\frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)\le\frac{f(z_1)+f(z_2)+f(z_3)}{3}$$

ឥឡូវនេះយើងឲ្យ $z_1=x_1^2;z_2=x_2^2;z_3=x_3^2$ យើងមាន

$$\left(\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\le\frac{x_1^3+x_2^3+x_3^3}{3}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(\frac{x_1^3+x_2^3+x_3^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

** សំគាល់ វិសមភាពមធ្យមស្វ័យគុណទូទៅ

គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a_1;a_2;\dots;a_n$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=1$$

ចំពោះបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $x_1;x_2;\dots;x_n$ យើងអាចតាងដូចនេះ

$$M_{-\infty}=\min\{x_1;x_2;\dots;x_n\};\ M_{+\infty}=\max\{x_1;x_2;\dots;x_n\}$$

$$M_s=x_1^{a_1}x_2^{a_2}\dots x_n^{a_n};\ M_t=(a_1x_1^t+a_2x_2^t+\cdots+a_nx_n^t)^{\frac{1}{t}}$$

ចំពោះ t ជាចំនួនពិតខុសពី 0 ពេលនោះ បើ $s\le t$ យើងមាន

$$M_{-\infty}\le M_s\le M_t\le M_{+\infty}.$$

1.13 វិបាកទី2 វិសមភាពស្តីអំពីមធ្យមនព្វន្តនិងមធ្យមធរណីមាត្រ

ចំពោះបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a_1;a_2;\dots;a_n$ យើងមាន

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}$$

ក្លាយជាសមភាពពេល $a_1=a_2=\cdots=a_n$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

ពិនិត្យមើលអនុគមន៍$f(x)=\ln x$ យើងសង្កេតឃើញថាអនុគមន៍ $f(x)$ នោះប៉ោងលើដែនវា

តាមវិសមភាព ***Jensen*** យើងក៏អាចទាញបាន

$$\frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n} \le \ln \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

តាមរយៈវិសមភាពនេះយើងអាចទាញបានវិសមភាពខាងលើ

យើងប្រើលក្ខណះរបស់លោការីតនេពៃដែលធ្លាប់បានដឹងជាការស្រេចវិសមភាពខាងលើនេះ

គេតែងហៅថាវិសមភាព $\boldsymbol{Cauchy}$ ($\boldsymbol{Augustin\, Louis\, Cauchy\ \ 1789 - 1857}$)

2.4.វិបាកទី3 វិសមភាពមធ្យមធរណីមាត្រនិងមធ្យមអាម៉ូនិច

ឧបមាថា $x_1; x_2; \dots; x_n$ ជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ពេលនោះយើងបាន

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \ge \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

ក្លាយជាសមភាពនៅពេល $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

អនុវត្តន៍វិបាកទី2ឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $\frac{1}{x_1}; \frac{1}{x_2}; \dots; \frac{1}{x_n}$ យកមកជំនួសក្នុងវិសមភាពខាង

ក្រោមនេះយើងបានអ្វីដែលត្រូវស្រាយ

$$\frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n} \le \ln \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

1.14 វិសមភាព $\boldsymbol{Cauchy\ Schwarz}$

គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិត $a_1; a_2; \dots; a_n$ និង $b_1; b_2; \dots; b_n$ ពេលនោះយើងបាន

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \ge (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2$$

សមភាពកើតមានឡើងនៅពេលដែល $b_i = k a_i \ \ (i = 1; 2; 3; \dots; n); k \in \mathbb{R}$

មួយក្នុងបណ្តារបៀបស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាពខាងលើនេះគឺតាង

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2$$

យើងប្តូរ $f(x)$ ដោយ $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ ក្នុងនោះយើងមាន

$$A=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\ ;B=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\ ;C=\sum_{i=1}^{n}b_i^2$$

ពីនោះយើងបានដើរដល់ល័ក្ខខ័ណ្ឌដែលត្រូវស្រាយបញ្ជាក់ដោយរបៀបសំគាល់ឃើញថា

$$f(x)\geq 0;\forall x\Leftrightarrow B^2-AC\leq 0\Rightarrow B^2\leq AC\ \Leftrightarrow\left(\sum_{i-1}^{n}a_ib_i\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right).\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)$$

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពគឺ $b_i=ka_i;\ (i=1;2;\ldots;n)$

* សំគាល់: មានអ្នកសិក្សាមួយចំនួនតែងហៅវិសមភាពខាងលើនេះថា ***Schwarz*** (***Hermann Amandus Schwarz*** , **1843 – 1921**) តែមានអ្នកសិក្សាយើងសព្វថ្ងៃនេះមួយចំនួនហៅផ្សេងជាពិសេស *Russia* គឺតែងតែហៅថាវិសមភាព ***Cauchy – Buniakowski*** (***Buniakowski* 1804 – 1889**)***Cauchy*** ត្រូវបានគេស្គាល់ពីឆ្នាំ 1821, *Buniakowski* 1859 រីឯវិសមភាព *Schawrz* ត្រូវបានគេស្គាល់ពីឆ្នាំ 1884 ដូចនេះវិសមភាពគឺគេហៅថាវិសមភាព ***Cauchy – Buniakowski – Schwarz*** តែឥឡូវនេះសល់ត្រឹមតែ ***Cauchy – Schwarz*** នេះបើតាមសៀវភៅ *cf. S. M. Nikolsky, A Cours of MathematicalAnalysis, V*1
Mir Publishers, Moscow, p. 183.

1.15 វិសមភាព *Bernoulli*

(***Danil Bernoulli*** ជាអ្នកប្រាជ្ញគណិតវិទ្យាស្វីស 1700 – 1782)

យើងឧបមាថា $x_1;x_2;\ldots;x_n$ ជាបណ្តាចំនួនពិតមានសញ្ញាដូចគ្នានិងធំជាង -1

ពេលនោះយើងមាន: $\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)\geq 1+\sum_{i=1}^{n}x_i$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

ដើម្បីឃើញវិសមភាពដែលយើងត្រូវស្រាយថាពិតនោះ

ចំពោះ $n=1;2;\ldots;n$ ឧបមាថាវាពិតគ្រប់ចំពោះ n មានន័យថា

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)\geq 1+\sum_{i=1}^{n}x_i$$ យើងមាន

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1+x_i)=(1+x_{n+1})\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)\geq\left(1+\sum_{i=1}^{n}x_i\right)(1+x_{n+1})$$

$$=\left(1+\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)+x_{n+1}\sum_{i=1}^{n}x_i\geq\left(1+\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)$$

នៅត្រង់នេះដោយ $x_1;x_2;\ldots;x_n$ ជាបណ្ដាចំនួនពិតមានសញ្ញាដូចគ្នា

និងធំជាង -1 នោះ $x_{n+1}\sum_{i=1}^{n}x_i\geq 0$ ដូចនេះវិសមភាពត្រូវបានស្រាយ

1.16 វិបាកទី4

បើ $a>-1$ គឺចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n គឺបាន $(1+a)^n\geq 1+na$

1.17 វិសមភាព*Karamata*

(**Karamata** ជាអ្នកប្រាជ្ញគណិតវិទ្យាទំនើបជនជាតិ **Serbia, 1902-1967**)

គេឲ្យ 2 ក្រុមមាន n ចំនួនពិត $(a)=(a_1;a_2;\ldots;a_n)$ និង $(b)=(b_1;b_2;\ldots;b_n)$

ក្នុងនោះ $a_i\geq a_{i+1}$ និង $b_i\geq b_{i+1}$

យើងនិយាយថាក្រុម (a) គឺមានលើសលុបក្រុម (b)

គេកំណត់សរសេរ $(a)\gg(b)$ បើ

$$\sum_{k=1}^{i}a_k\geq\sum_{k=1}^{i}b_k\,, i=1;2;\ldots;n-1 \text{ និង } \sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}b_k$$

គេឲ្យអនុគមន៍ f ប៉ោងលើចន្លោះ I ណានោះ (a) និង (b) គឺជា 2 ក្រុមក្នុងបណ្ដាចំនួន

$x'\in I$ ដែលធ្វើយ៉ាងណាឲ្យ $(a)\gg(b)$ ពេលនោះ

$$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)\geq f(b_1)+f(b_2)+\cdots+f(b_n)$$

បើ f ផតវិញយើងបានវិសមភាពមានសញ្ញាផ្ទុយពីវិសមភាពខាងលើនេះ

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

លទ្ធផលគឺត្រូវទាញបានអំពីគន្លឹះពីរខាងក្រោមនេះ

<u>**គន្លឹះទី 1**</u>

បើ f ជាអនុគមន៍ប៉ោងនិងឧបមាថា $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$

$y_1 \geq x_1 \geq x_2 \geq y_2$ គឺ $f(y_1) + f(y_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$

មិត្តអ្នកអានអនុវត្តន៍ស្រាយវិសមភាពខាងលើនេះ

ពិនិត្យមើលមួយក្រុម n ចំនួនពិត $(x) = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ ក្នុងក្រុមចំនួននេះ

បើយើងដូរ $x_i; x_j$ ណានោះដោយ $x_i' = x_i + \alpha$ និង $x_j' = x_j + \alpha$

ដែលធ្វើយ៉ាងណាឲ្យ $x_i' > x_j'$ ក្នុងនោះ $\alpha > 0$ គឺយើងនិយាយបានថាវា

សម្រេចបានតាមច្បាប់វិវត្តន៍ចំពោះក្រុមចំនួនដែលបានឲ្យ។

<u>**គន្លឹះទី 2**</u>

លក្ខ័ណ្ឌចាំបាច់និងគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីឲ្យ $(a) \gg (b)$ គឺយើងក៏អាច

បញ្ចូលក្រុម (b) ត្រឡប់ក្រុម (a) គឺប្រើច្បាប់វិវត្តន៍ទំនាក់ទំនង

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

ល័ក្ខខ័ណ្ឌចាំបាច់គឺជាក់ស្តែងពីព្រោះក្រោយពីច្បាប់វិវត្តន៍យើងទទួល

បានក្រុមថ្មីគឺលើសលុបជាងក្រុមដំបូង

ល័ក្ខខ័ណ្ឌគ្រប់គ្រាន់ត្រូវបានស្រាយតាមអនុមានរួមគណិតវិទ្យាដូចខាងក្រោម

ចំពោះ $n = 1$ គឺគន្លឹះរបស់យើងគឺពិត ឥឡូវនេះយើងឧបមាថា $k < n$

គន្លឹះពិត យើងនិងស្រាយថាគន្លឹះនេះពិតចំពោះ $k = n$

យើងត្រឡប់ក្រុម (b) ទំនាក់ទំនង់ចំពោះ b_1និង b_n. ពេលនោះផ្នែកខាងស្តាំ

របស់ (1) និងកើន និងដល់ពេលណានោះនិងមាន

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_h = b_1^* + b_2 + \cdots + b_h$$

តាមសម្មតិកម្មអនុមានរួមយើងមាន

$$\begin{cases} a_1 \ge b_1^* \\ a_1 + a_2 \ge b_1^* \ge b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_1 + \dots + a_h = b_1^* + \dots + b_h \end{cases} \text{ និង } \begin{cases} a_{h+1} \ge b_{h+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{h+1} + \dots + a_n = b_{h+1} + \dots + b_n^* \end{cases}$$

ពីនោះតាមអនុមានរួមក្រុម $(b') = (b_1^*; \dots; b_h)$ ក៏អាចវិវត្តន៍ពីក្រុម

$(a') = (a_1; a_2; ..; a_h)$ និង $(b'') = (b_{h+1}; \dots; b_n^*)$ ត្រូវបានវិវត្តន៍ពី

$(a'') = (a_{h+1}; \dots; a_n)$ ពេលនោះ (b) ក៏អាចវិវត្តន៍ពី (a)

<u>លំហាត់ឧទាហរណ៍អនុវត្តន៍</u>

2.1) គេឲ្យ $x_1; x_2; \dots; x_n \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$ ស្រាយថា:

$$\cos(2x_1 - x_2) + \cos(2x_2 - x_3) + \dots + \cos(2x_n - x_1) \le cosx_1 + cosx_2 \dots + cosx_n$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

ដោយ $f(x) = \cos x$ ជាអនុគមន៍ផតលើ $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ នោះយើងគ្រាន់តែ

ពិនិត្យពីក្រុម $(a) = (2x_1 - x_2; \dots; 2x_n - x_1)$ និង $(b) = (x_1; x_2; \dots; x_n)$

គឺយើងអាចឲ្យ $2x_{m_1} - x_{m_1+1} \ge 2x_{m_2} - x_{m_2+1} \ge \dots \ge 2x_{m_n} - x_{m_n+1}$

និង $x_{k_1} \ge x_{k_2} \ge \dots \ge x_{k_n}$ នៅត្រង់នេះយើងឲ្យ $x_{n+1} = x_1$ យើងបាន

$$2x_{m_1} - x_{m_1+1} \ge 2x_{k_1} - x_{k_1+1} \ge x_{k_1}$$

$$(2x_{m_1} - x_{m_1+1}) + (2x_{m_2} - x_{m_2+1}) \ge (2x_{k_1} - x_{k_1+1}) + (2x_{k_2} - x_{k_2+1}) \ge x_{k_1} + x_{k_2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(2x_{m_1} - x_{m_1+1}) + \dots + (2x_{m_h} - x_{m_h+1}) \ge x_{k_1} + \dots + x_{k_h}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.$$

$$(2x_{m_1} - x_{m_1+1}) + \dots + (2x_{m_n} - x_{m_n+1}) = x_{k_1} + \dots + x_{k_n}$$

ពេលនោះបណ្តាលលក្ខ័ណ្ឌរបស់វិសមភាព ***Karamata*** ត្រូវបានផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះយើងបាន

$$\cos(2x_1 - x_2) + \cos(2x_2 - x_3) + \dots + \cos(2x_n - x_1) \le cosx_1 + cosx_2 \dots + cosx_n$$

លំហាត់ឧទាហរណ៍អនុវត្តន៍

គេឲ្យ $a_1; a_2; \dots; a_n$ ជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \le \left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\dots\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right)$$

ណែនាំ វិសមភាពដែលត្រូវស្រាយគឺ

$$\ln(a_1^2+a_1)+\dots+\ln(a_n^2+a_n) \le \ln(a_1^2+a_2)+\dots+\ln(a_n^2+a_1)\,.(1)$$

ដោយ $y=\ln x$ ជាអនុគមន៍ផតនោះដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ (1) យើងនឹង

អនុវត្តន៍វិសមភាព ***Karamata*** ចំពោះបណ្តាក្រុមចំនួន

$$(a_1^2+a_1; \dots; a_n^2+a_n) \text{ និង } (a_1^2+a_2, a_2^2+a_3; \dots; a_n^2+a_1)$$

បន្តទៀតយើងបង្កើតពីរក្រុមចំនួនថ្មីដោយរបៀបរៀបពីរក្រុមចំនួនខាងលើ

ធ្វើយ៉ាងណាឲ្យល័ក្ខខ័ណ្ឌរបស់វិសមភាព ***Karamata***

បានផ្ទៀងផ្ទាត់ពី (1) ពិតនិងពេលនោះយើងបានអ្វីដែលត្រូវស្រាយ

1.18 វិសមភាព*Shur*

1.18.2 និមិត្តសញ្ញាផលបូកផ្លុះ($\sum_{sym}$)

និមិត្តសញ្ញា $\sum_{sym} Q(x_1; x_2; \dots; x_n) = \sum_{\sigma} Q(x_{\sigma_1}; x_{\sigma_2}; \dots; x_{\sigma_n})$

ក្នុងនោះ σត់លើបណ្តាលឯកតា $1; 2; \dots; n$ (មានទាំងអស់$n!$ ចំនួនតួ)

ឧទាហរណ៍ $n=3$ យើងសរសេរ $x; y; z$ ជំនួសឲ្យ $x_1; x_2; x_3$ យើងមាន

$$\sum_{sym} 2x^3 = 2x^2+2y^3+2z^3; \sum_{sym} x^2y = x^2y+y^2z+z^2x+y^2x+z^2y \text{ និង } \sum_{sym} xyz = 6xyz$$

1.18.3 វិសមភាព*Schur*

គេឲ្យ $x; y; z$ ជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ពេលនោះចំពោះគ្រប់ $r>0$

$$x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-z)(y-x)+z^r(z-x)(z-y) \ge 0$$

ករណីស្មើពេល $x=y=z$ ឬក៏បើពីរក្នុងបីចំនួន $x; y; z$ មានពីរស្មើគ្នានិងចំនួនទីបីស្មើ 0

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

ដោយវិសមភាពត្រូវស្រាយផ្ទុះចំពោះបីអញ្ញាត់នោះមិនបាត់បង់លក្ខណះ

ទូទៅយើងឧបមាថា $x \geq y \geq z$ ពេលនោះវិសមភាពអាចសរសេរបាន

$$(x-y)[x^r(x-z)-y^r(y-z)]+z^r(x-z)(y-z) \geq 0$$

យើងឃើញថាគ្រប់កត្តាផ្នែកខាងឆ្វេងមិនអវិជ្ជមាននោះយើងទាញបាន

វិសមភាពខាងលើនេះពិត

ករណីប្រើច្រើនគឺនៅពេល $r=1$ ពេលនោះវិសមភាព ***Schur*** ក្លាយជា

$$\sum_{sym} x^3-2x^2y+xyz \geq 0$$

2.10.វិសមភាពតំរៀបឡើងវិញ *rearrangement inequality*)

1.18.4 ពំណានានិងស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាពតំរៀបឡើងវិញ

បើ $a_1<a_2<\cdots<a_n;\ b_1<b_2<\cdots<b_n$ ជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

និង $\alpha=\min\{a_{i+1}-a_i\};\ \beta=\min\{b_{i+1}-b_i\}$ គឺចំពោះគ្រប់ចំលាស់មិន

ដូចគ្នា π របស់$\{1;2;\ldots;k\}$ យើងមាន

$$\sum b_i a_{\pi_i} \leq \sum b_i a_i-\alpha\beta$$

<u>របៀបពណ៌នាផ្សេង</u>

ឧបមាថា $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n;\ b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$

តាង $A=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n;\ B=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$

Aហៅថាផលបូកលំដាប់(***ordered sum***)និងBហៅថាផលបូកត្រឡប់

(***reverse sum***)យើងបង្កើតផលបូកចំរុះ(***mixed sum***) ខាងក្រោមនេះ

$X=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$ ក្នុងនោះ $x_1;x_2;\ldots;x_n$ គឺជាចំលាស់ណា

មួយរបស់បណ្តាចំនួន $b_1;b_2;\ldots;b_n$

ពេលនោះយើងបាន $A \geq X \geq B$.

ក្នុងករណី $a_1 < a_2 < \cdots < a_n;\ b_1 < b_2 < \cdots < b_n$

សមភាពកើតមានពេល $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$

1.18.5 វិបាក(វិសមភាព $\boldsymbol{Chebyshev}$)

P.L. Chebyshev*, 1821 – 1894 *Russia ជាអ្នកប្រាជ្ញគណិតវិទ្យា***Russia*** លោកបានរួមចំណែកយ៉ាងច្រើនឲ្យតម្លៃទៅលើទ្រឹស្តីចំនួន(***Theory of Numbers***) ឈ្មោះរបស់លោកនៅក្នុងសៀវភភាសាអង់គ្លេសសរសេរថា ***Tschebychef*** ដូចនេះគេសរសេរ$T(x)$សំគាល់ពហុធារបស់***Chebyshev*** គឺច្រើនប្រើនៅក្នុងសៀវភៅដែលសរសេរអំពីសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (***differetial equations***)ចំពោះបណ្តាសម្មតិកម្មខាងលើយើងមាន

$$A \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)}{n} \geq B$$

ចំលាស់ជុំវិញបណ្តា b_i យើងបាន n ផលបូកចំរុះ

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

$$a_1 b_2 + a_2 b_3 + \cdots + a_n b_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_1 b_n + a_2 b_1 + \cdots + a_n b_{n-1}$$

តាមវិសមភាពតំរៀបឡើងវិញរាល់មួយក្នុងផលបូកខាងលើគឺនៅក្នុងចន្លោះ A និង B នោះមធ្យមរបស់ n ផលបូកនោះក៏ដូច្នោះដែរ

ដូចនេះយើងក៏ទាញបានវិសមភាពខាងលើនេះត្រូវបានស្រាយរួច

** សំគាល់ ៖ យើងក៏អាចពណ៌នាវិសមភាពរបស់ **Chebyshev**

គេឲ្យពីរស្ទីតកំណត់បណ្តាចំនួនពិត $a_1; a_2; \ldots; a_n$ និង $b_1; b_2; \ldots; b_n$

$a)$ បើស្ទីតទាំងពីរកើនឬក៏ចុះដូចគ្នានោះយើងបាន

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{n} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{n}$$

b)បើពីរស្វ៊ីតមានមួយកើននិងមួយទៀតចុះនោះយើងបាន

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{n} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{n}$$

a)និងb)កើតមានសញ្ញាស្មើពេល $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ ឬ $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$

2.11. បណ្ដាវិសមភាពមួយចំនួនផ្សេងទៀត

1.18.6 វិសមភាព$Holder$

គេឲ្យបណ្ដាចំនួនពិត p, q ផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $p, q > 1$ និង $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

ពេលនោះគ្រប់ $2n$ ចំនួនពិតណាក៏ដោយ $a_1; b_1; a_2; b_2; \dots; a_n; b_n$

យើងមាន $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$

រាងទូទៅទី1

គេឲ្យ x_{ij} $(i = 1; 2; \dots; m; j = 1; 2; \dots; n)$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន។ពេលនោះគឺ

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right)^{\frac{1}{m}} \ge \sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n} x_{ij}^{\frac{1}{m}}\right)$$

រាងទូទៅទី 2

បើ $p_1; p_2; \dots; p_n$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$

$$\text{យើងមាន :} \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right)^{p_j} \ge \sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n} x_{ij}^{p_j}\right)$$

1.18.7 វិសមភាព$Minkovski$

គេឲ្យចំនួនគត់វិជ្ជមានn និងមួយចំនួនពិត $r \ge 1$និងបណ្ដាចំនួន

ពិតវិជ្ជមាន $a_1; b_1; a_2; b_2; \dots; a_n; b_n$ យើងបាន

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^r\right)^{\frac{1}{r}} \le \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^r\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

រាងទូទៅ

គេឲ្យ $x_{ij}\,(i=1;2;\dots;m\,;j=1;2;\dots;n)$គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ បើ $p \ge 1$ យើងបាន

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}x_{ij}^p\right)^{\frac{1}{p}} \ge \left[\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

1.18.8 វិសមភាព *Maclaurin*

គេឲ្យ $a_1; a_2; \dots; a_n$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានណាក៏ដោយ។ ពេលនោះយើងមាន លក្ខណះដូចខាងក្រោមនេះ។

$S_1 \ge S_2 \ge \cdots \ge S_n$ ចំពោះ S_k កំណត់ដោយ

$$S_k = \sqrt[k]{\frac{\sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n} a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}}{\binom{n}{k}}}$$

1.18.9 វិសមភាព *Abel*

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a_1; a_2; \dots; a_n; b_1; b_2; \dots; b_n$ យើងតាង $S_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$ និងចំពោះគ្រប់ $i = 1; 2; \dots; n$ ពេលនោះ $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} S_i(b_i - b_{i+1}) + S_n b_n$

1.18.10 សមភាព *Lagrange*

គេឲ្យស្ទីតពីរជាស្ទីតចំនួនពិត $a_1; a_2; \dots; a_n$ និង $b_1; b_2; \dots; b_n$ ពេលនោះយើងមាន

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2 = \sum_{1\le i\le j\le n}\left(a_ib_j - a_jb_i\right)^2$$

■ទ្រឹស្តីបទ $Muihard$

បើក្រុម $(a) = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$ លើសលុបក្រុម $(b) = (b_1; b_2; \ldots; b_n)$

គឺចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $x_1; x_2; \ldots; x_n$ យើងតែងបាន

$$\sum_{(\pi(1),\pi(2),\ldots,\pi(n))} x_1^{a_{\pi(1)}} x_2^{a_{\pi(2)}} \ldots x_n^{a_{\pi(n)}} \geq \sum_{(\pi(1),\pi(2),\ldots,\pi(n))} x_1^{b_{\pi(1)}} x_2^{b_{\pi(2)}} \ldots x_n^{b_{\pi(n)}}$$

ផលបូកខាងលើយកទាំងអស់បណ្តាស្ទីតចំលាស់ខាងក្រោមនេះ

$$\big(\pi(1); \pi(2); \ldots; \pi(n)\big) \text{ របស់ } (1; 2; \ldots; n)$$

ម្យ៉ាងវិញទៀតបើឲ្យ $(a), (b)$ ជាពីរក្រុមចំនួនណាក៏ដោយយ៉ាងណាឲ្យ

វិសមភាពខាងលើផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រប់ស្ទីតចំនួនពិត$(x_1; x_2; \ldots; x_n)$

នោះគឺយើងត្រូវតែមាន $(a) \gg (b)$

■ លក្ខណះវិនិច្ឆ័យមួយចំនួននៃSOS

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a \geq b \geq c$ យើងពិនិត្យមើលវិសមភាពខាងក្រោមនេះ

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

ក្នុងនោះ $S_a; S_b; S_c$ រៀងគ្នាគឺជាអនុគមន៍បីអញ្ញាត់ $a; b; c$ ហើយវិសមភាពនេះវាពិតបើវាបំពេលល័ក្ខខ័ណ្ឌណាមួយក្នុង 5 ខាងក្រោមនេះ។

1^0: $S_b \geq 0; S_b + S_c \geq 0; S_b + S_a \geq 0$

2^0: $S_b \geq 0; S_c \geq 0; a^2 S_b + b^2 S_a \geq 0$ បើ $a; b; c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

3^0: $S_b \geq 0; S_c \geq 0; (a-c)S_b + (b-c)S_a \geq 0$

4^0: $(a-c)S_b + (a-b)S_c \geq 0; (a-c)S_b + (b-c)S_a \geq 0$

5^0: $S_a + S_b + S_c > 0\,; S_a S_b + S_b S_c + S_c S_a \geq 0$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

សម្រាយបញ្ជាក់ទី 1^0:

ដោយយើងមាន $a \ge b \ge c$ នោះយើងមាន

$$(a-c)^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + 2(a-b)(b-c) \ge (a-b)^2 + (b-c)^2$$

នោះយើងនិងទៅដល់

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \ge (S_a + S_b)(b-c)^2 + (S_b + S_c)(a-b)^2 \ge 0$$

សម្រាយបញ្ជាក់ទី 2^0:

យើងមាន $(a-c) - \frac{a}{b}(b-c) = \frac{c(a-b)}{b} \ge 0$ និង $S_c(a-b)^2 \ge 0$ នោះយើងមាន

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \ge S_a(b-c)^2 + S_b.\frac{a^2}{b^2}(b-c)^2$$

$$= \frac{a^2 S_b + b^2 S_a}{b^2}(b-c)^2 \ge 0$$

សម្រាយបញ្ជាក់ទី 3^0: 4^0:

យើងកន្សោមបំរែបំរួលដូចខាងក្រោមនេះ

$$\begin{aligned}
S &= S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \\
&= (S_a + S_b)(b-c)^2 + (S_b + S_c)(a-b)^2 + 2S_b(a-b)(b-c) \\
&= (b-c)[(S_a + S_b)(b-c) + S_b(a-b)] + (a-b)[(S_b + S_c)(a-b) + S_b(b-c)] \\
&= (b-c)[(a-c)S_b + (b-c)S_a] + (a-b)[(a-c)S_b + (a-b)S_c]
\end{aligned}$$

ដោយសម្មតិកម្មរបស់ 3^0 និង 4^0 នោះយើងបានកន្សោមមិនអវិជ្ជមាន។គឺយើងទាញបាន

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \ge 0$$

សម្រាយបញ្ជាក់ទី 5^0:

ពីសម្មតិកម្មយើងទាញបាន $\max\{S_a + S_b; S_b + S_c; S_c + S_a\} \ge 0$ មិនបាត់លក្ខណៈទូទៅយើងឧបមាថា $S_b + S_c > 0$ ពេលនោះយើងឃើញថា

$$\begin{aligned}
S &= S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \\
&= (S_b + S_c)(a-b)^2 + 2S_b(a-b)(b-c) + (S_a + S_b)(b-c)^2
\end{aligned}$$

$$= (S_b + S_c)\left[(a-b) + \frac{S_b}{S_b + S_c}(b-c)\right]^2 + \frac{S_aS_b + S_bS_c + S_cS_a}{S_b + S_c}(b-c)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

បណ្តានិមិត្តិសញ្ញាផលបូកនិងផលគុណ

- $\sum_{cyc}$: ផលបូកចំលាស់។ ***cyc*** គឺការសរសេរកាតរបស់ ***cyclic***

ឧទាហរណ៍

ចំពោះបីអញ្ញាត់ $a; b; c$ យើងមាន $\sum_{cyc} a^2b = a^2b + b^2c + c^2a$

ចំពោះបួនអញ្ញាត់ $a; b; c; d$ យើងមាន $\sum_{cyc} a^2b = a^2b + b^2c + c^2d + d^2a$

ជំពូកទី *II*

2, 1 បណ្តាលំហាត់គំរូនិងការស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទមួយចំនួន

ការឧទេសសនាមស្តីអំពីវិសមភាពមួយចំនួននិងវិធីសាស្ត្រស្រាយដែលគួរចងចាំពេលអនុវត្តន៍នៅក្នុងការសិក្សាថ្នាក់មធ្យមសិក្សាបឋមភូមិនិងមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិយើងបានជួបវិសមភាពជាច្រើនដែលបណ្តាអ្នកនិពន្ធលើកយកមកដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់លំហាត់។

ដូចជាគេឲ្យបណ្តាចំនួន $x_1; x_2; \ldots; x_n$ ជាបណ្តាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន គឺយើងមាន

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2 \ldots x_n}$$

ករណីស្មើកើតមានពេលដែល $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$

វិសមភាពមានឈ្មោះប្រាកដថា វិសមភាពរវាង(ឬក៏ចន្លោះម)ធ្យមនព្វន្តនិងមធ្យមធរណីមាត្រ (***Inequality of Arithmetic Mean and Geometric Mean***) នៅច្រើនប្រទេសនៅលើសកលលោកគេតែងហៅវិសមភាពនេះតាមការសរសេរអក្សរកាត់ថា **AM-GM**

($Arithetic\ Mean - Geometric\ Mean$)

ហើយនៅប្រទេសយើងក៏មានលោកគ្រូនិងអ្នកគ្រូជាច្រើនតែងហៅវិសមភាពទៅតាមឈ្មោះរបស់អ្នកប្រាជ្ញគណិតវិទ្យាជនជាតិបារាំង $Augustin - Louis\ Cauchy$ $(1789 - 1857)$គឺតែហៅថា វិសមភាព $Cauchy$ នេះក៏ជាការហៅមិនជាលក្ខណៈទូទៅទេ។ ពីព្រោះ $Cauhcy$គាត់មិនមែនជាអ្នកបង្កើតរូបន្តនេះទេ គឺគាត់គ្រាន់ជាអ្នកបង្កើតវិធីសាស្រ្តស្រាយបញ្ជាក់ដ៏វិសេសម្នាក់នូវរូបមន្តនេះ។ ដូចនេះថាតើវិសមភាព **AM-GM** នេះបង្កើតឡើងនិងវារីកចំរើនឡើយដូចម្តេច?

សំនួរដែលស្តីអំពីប្រវត្តិនិងការបង្កើតនេះត្រូវបានស្រង់ចេញពីបណ្តាអ្នកប្រាជ្ញគណិតវិទ្យាជាច្រើនដែលមានការចាប់អារម្មណ៍យ៉ាងខ្លាំងរបស់អ្នកគណិតវិទ្យាសព្វថ្ងៃនេះ។

$G.H.\ hardy\ (1877 - 1447)$

2,2 លំហាត់គំរូដែលបានប្រឡង IMO និងតាមបណ្តាប្រទេសមួយចំនួន

---វិសមភាពស្តីអំពីត្រីកោណមាត្រក្នុងការប្រឡងគណិតវិទ្យា **IMO 1961**

ចំពោះលំហាត់នេះជាលំហាត់មួយដែលជាគំរូនៃលំហាត់ច្រើនទៀតហើយមានការស្រាយបញ្ជាក់បានច្រើនរបៀប។ ហើយក៏ជាទ្រឹស្តីដែលគួរយកចិត្តទុកដាក់ផងដែរព្រោះយើងនិងអាចជួបលំហាត់ប្រភេទនេះច្រើនទៀតនៅក្នុងសៀវភៅរបស់យើងខ្ញុំនិងសៀវភៅដ៏ទៃទៀតជាច្រើន។ ព្រោះថាមានលំហាត់ជាច្រើនដែលមានការស្រាយបញ្ជាក់និងគំរូស្រដៀងគ្នាហើយវាក៏ជាបច្ចេកទេសមួយផងដែរសម្រាប់បងប្អូនដែលចូលចិត្តផ្នែកវិទ្យាសាស្រ្តពិត។ ហើយការលើឡើងយកមកស្រាយបញ្ជាក់នេះមិនមែនជាគំនិតរបស់ខ្ញុំទាំងអស់នោះទេ វាគឺជាគំនិតរបស់អ្នកគណិតវិទ្យាល្បីៗនៅលើសកលលោកយើងនេះហើយអ្នកទាំងនោះបានសរសេរយ៉ាងច្រើននិងនិពន្ធលំហាត់ជាច្រើនដែលមានលក្ខណៈពាក់ពន់និងការស្រាយបញ្ជាក់ជាគំរូនេះ។ហើយស្របពេលនេះដែរប្រទេសយើងក៏បានចូលរួមប្រឡងជើងឯកលំដាប់សក

លលោកផងដែរ។ដែលបានចូលរួមនៅឆ្នាំ២០០៧ដែលពេលនោះបានដាក់មណ្ឌលប្រឡងនៅប្រទេសវៀតណាម។ ដូចនេះយើងឃើញថាប្រទេសយើងក៏បានធ្វើឲ្យបណ្ដាប្រទេសនៅលើសកលលោកដឹងថាប្រទេសមានការរើកចំរើនខ្លាំងហើយផ្នែកសិក្សាអប់រំ។ ហើយប្រទេសយើងមានផ្នែកសិក្សាអប់រំមានពីរផ្នែកសំខាន់សម្រាប់អភិវឌ្ឍន៍ប្រទេស។ គឺផ្នែកពុទ្ធិកសិក្សាដែលជាសាលាមានអាយុកាលយូរមកហើយនៅលើទឹកដីសុវណ្ណភូមិ(ខ្មែរ)យើងនេះ ហើយសាលានេះជាគ្រឹះដ៏សំខាន់ផ្នែកអក្សរសាស្ត្រសង្គមនិងវប្បធម៌សាសនាប្រពៃណីទំនៀមទំលាប់របស់ជាតិយើង។ហើយក៏មានផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រផងដែរគឺលើកលែងតែមហាវិទ្យាល័យវេជ្ជសាស្ត្រមួយទេដែលសមណៈមិនអាចសិក្សាបាននោះ។

ហើយបើផ្នែកអាណាចក្រវិញយើងឃើញថាមានការរើកចំរើនខាំងណាស់នាពេលបច្ចុប្បន្ននេះគឺមានមហាវិទ្យាល័យរហូតដល់តាមបណ្ដាខេត្តក្រុងនាៗលើផ្ទៃប្រទេសនេះមកពីគំនិតរបស់បញ្ញាវន្តខ្មែរហើយដែលមានគំនិតជាតិនិយមខ្លាំងនិងបណ្ដាអគ្គមគទេសន៍ថ្នាក់ដឹកនាំប្រទេសយើងចាប់តាំងពីបុព្វកាលនៃទឹកដីខ្មែរយើងរៀងមកដល់ពេលបច្ចុប្បន្នកាលនេះ។ ហើយយើងមានវាសនាណាស់ដែលបានកើតមកលើទឹកដីដែលមានសន្តិភាព ។ ដូចនេះយើងគួរនាំគ្នាធ្វើយ៉ាងណាឲ្យជាប្រយោជន៍ដល់សង្គម។ ដូចមានពុទ្ធភាសិតមួយថា

រូបំ ជីរតិ មច្ចានំ នាមគោត្តំ នជីរតិ

ប្រែថា ជីវិតរបស់យើងគ្រប់គ្នានឹងស្លាប់ជាប្រាកដតែនាមនិងកូតរបស់យើងមិនស្លាប់ទេ។ មានន័យថាអ្វីៗដែលជាប្រយោជន៍ដល់សង្គមជាតិយើងមិនងាយនិងរលត់បាត់ដោយងាយៗនោះទេដូចជាសម្តេចព្រះសង្ឃរាជ្យជួនណាតជាដើមនិងអ្នកដែលបានប្រែព្រះត្រៃបិដកជាដើមនោះកេរ្តិ៍ឈ្មោះរបស់លោករលត់បានលុះត្រាណាតែប្រទេសយើងមិនប្រើអក្សរខ្មែរដូចសព្វថ្ងៃនេះនិងប្រទេសយើងមិនមានសាសនាព្រះពុទ្ធនោះ។

ហើយបើយើងមិនបានសិក្សាឲ្យបានច្រើននោះយើងនឹងច្រឡំថាប្រទេសយើងមិនទាន់មានអ្នកប្រាជ្ញនោះទេ។តាមពិតទៅប្រទេសយើងមានអ្នកប្រាជ្ញច្រើនណាស់ហើយមានចំណេះដឹងទូលំទូលាយណាស់ដូចជាគម្ពីព្រះត្រៃបិដកជាដើមយើងបានប្រែសម្រេចបានមុខគេបង្អស់ដែលមានសរុប១១០ភាគហើយបើការប្រែវិញទៀតសោតគឺពិតជាវិសេសណាស់គឺភាសាបាលីមួយទំព័រសេចក្តីខ្មែរក៏មួយទំព័រដែរ។ហើយភាសាបាលីមានវេយ្យាករណ៍ពិបាកជាភាសាបារាំងនិងអង់គ្លេសច្រើនណាស់នេះបញ្ជាក់ឲ្យឃើញថាខ្មែរយើងគឺជាប្រទេសមួយដ៏មហិមាដែលមានអក្សរប្រើហើយមិនមានប្រទេសណាប្រើដូចឡើយនេះបញ្ជាក់ឲ្យយើងឃើញថាខ្មែរយើងមានអ្នកប្រាជ្ញលំដាប់ណា?ហើយបើផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រវិញក៏មានដែរតែនៅតិចនៅឡើងដោយខ្មែរបានជួបនៅមហាមហន្តរាយជាច្រើនដូចជាធម្មជាតិនិងសង្គម។តែនាពេលខាងមុខនេះនិងមានជាប្រាកដជាក់មិនខានឡើយ។

II. 1 លំហាត់ [IMO 1961]

គេឲ្យ ΔABC និងបណ្តាជ្រុង $a;b;c$ និងមានផ្ទៃក្រលា S ។

$$\text{ចូរបង្ហាញថា } a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S \qquad (1)$$

<u>របៀបទី1</u>

ប្រើរូបមន្តរបស់ ***Heron*** យើងមាន

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$

$$\Rightarrow 16S^2=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)$$

ឥឡូវនេះយើងនិងសរសេរម្តងទៀតវិសមភាព (1) $(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3.16S^2$

យើងជំនួសចូលនូវវិសមភាពដែលយើងមានខាងលើនោះយើងនិងបានវិសមភាពខាងក្រោម

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3[2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)]$$

ឬក៏ $a^4+b^4+c^4 \geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ នេះជាលទ្ធផលដែលជួបច្រើនហើយ។

<u>របៀប2</u>

យើងអនុវត្តន៍ទ្រឹស្តីបទ sin និង $cosine$ យើងបាន $sinC=\dfrac{2S}{ab}$ និង $cosC=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

ដោយ $\sin^2 C+\cos^2 C=1$ នោះ $\dfrac{4S^2}{a^2b^2}+\dfrac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2b^2}=1$

ពីនេះយើងទាញបាន $16S^2=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)$ ដល់នេះ

យើងនិងឃើញវាក៏ដូចទៅនិងរបៀបទី 1 ដែរ ដូចនេះវិសមភាពនេះវានិងពិតតាមរបៀបទី1 ។

<u>របៀបទី3</u>

យើងឃើញថា $\sqrt{3}sinC+cosC=2\sin(C+30^0)\leq 2 \Rightarrow \sqrt{3}\left(\dfrac{2S}{ab}\right)+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\leq 2$

យើងនិងទទួលបាន $c^2-a^2-b^2+4ab\geq 4\sqrt{3}S$ ហើយស្រាយដូចគ្នាដែរយើងបាន

$$a^2-b^2-c^2+4bc\geq 4\sqrt{3}S \quad \text{និង} \quad b^2-c^2-a^2+4ca\geq 4\sqrt{3}S$$

យើងបូកវិសមភាពទាំងបីនេះតាមទិសដៅដូចគ្នាយើងបាន

$$4(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)\geq 12\sqrt{3}S$$

ម្យ៉ាងវិញទៀតយើងមាន $ab+bc+ca\leq a^2+b^2+c^2$ (វិសមភាពនេះពិត)

<u>របៀបទី4</u>

យើងជំនួស $c^2=a^2+b^2-2abcosC$ និង $S=\dfrac{1}{2}absinC$ ចូលនោះវិសមភាពដែលត្រូវ

ស្រាយក្លាយជា $a^2+b^2+(a^2+b^2-2abcosC)\geq 2\sqrt{3}absinC$

ហើយវាសមូលនិង $a^2-ab\left(cosC+\sqrt{3}sinC\right)+b^2\geq 0$

តាង $a=tb\,;t>0$ វិសមភាពចុងក្រោយយើងអាចសរសេរបានរាង $b^2f(t)\geq 0$

ចំពោះ $f(t)=t^2-t\left(cosC+\sqrt{3}sinC\right)+1$

យើងមាន $f(t)$ ជាត្រីធាដឺក្រេទីពីរចំពោះអញ្ញាត់ t និងមេគុណអញ្ញាត់ដឺក្រេខ្ពស់អវិជ្ជមាន

យើងមាន$\Delta_f=\left(cosC+\sqrt{3}sinC\right)^2-4\leq(1+3)(\cos^2 C+\sin^2 C)-4=0$

នោះជាក់ស្តែង $f(t)\geq 0$ ដូចនេះវិសមភាពត្រូវបានស្រាយរួច។

<u>របៀបទី5</u>

ដោយ $a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}S=a^2+b^2+(a^2+b^2-2abcosC)-2\sqrt{3}absinC$

$$=2(a-b)^2+4ab[1-\cos(C+60^0)]\geq 0$$

នោះវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយគឺវាពិត។

<u>របៀបទី6</u>

យើងអនុវត្តន៍វិសមភាព **Heron** និង **AM-GM Cauchy Schwarz** យើងបាន

$$S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)=p\sqrt{(p-a)(p-b)}\sqrt{(p-b)(p-c)}\sqrt{(p-c)(p-a)}$$

$$\leq p.\frac{(p-a)+(p-b)}{2}.\frac{(p-b)+(p-c)}{2}.\frac{(p-c)+(p-a)}{2}=\frac{p}{8}abc$$

$$\leq\frac{p}{8}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\frac{(a+b+c)^4}{16.27}\leq\frac{[(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)]^2}{16.27}=\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{16.3}$$

បើយើងបំពាក់ឫសការេលើវាយើងនិងបានវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយបញ្ជាក់។

<u>របៀបទី7</u>

ដូចខាងលើដែរយើងអនុវត្តន៍វិសមភាព **Heron** និង **AM-GM ,Cauchy Schwarz** យើងបាន

$$4\sqrt{3}S=4\sqrt{3}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\leq 4\sqrt{3p}\sqrt{\left[\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right]^3}$$

$$=\frac{4p^2}{3}=\frac{(a+b+c)^2}{3}\leq\frac{(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)}{3}=a^2+b^2+c^2$$

នោះវាជាវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយបញ្ជាក់។

<u>របៀបទី 8</u>

តាង $a=y+z\,;b=z+x\,;c=x+y$ ចំពោះ $x;y;z>0$

ពេលនោះយើងអនុវត្តន៍វិសមភាពគ្រឹះ

$u^2+v^2+w^2\geq uv+vw+wu$ និង $(u+v+w)^2\geq 3(uv+vw+wu)$ យើងបាន

$$(a^2+b^2+c^2)^2=[(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2]^2\geq 16(yz+zx+xy)^2$$
$$\geq 16.3(xy.yz+yz.zx+xy.yz)=48xyz(x+y+z)=48S^2$$

បើយើងបំពាក់ឫសការេលើអង្គទាំងពីរយើងនិងបានវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយបញ្ជាក់។

<u>របៀបទី 9</u>

សន្មតិ p ជាកន្លះបរិមាត្ររបស់ត្រីកោណ និងតាង $p-a=x\,;p-b=y\,;p-c=z$

យើងទាញបាន $p=x+y+z$

បន្ទាប់មកយើងអនុវត្តន៍វិសមភាពគ្រឹះយើងនិងបានដូចខាងក្រោម

$u^2+v^2+w^2\geq uv+vw+wu$ និង $uv+vw+wu\geq\sqrt{3uvw(u+v+w)}$ $\forall u;v;w>0$

នោះ$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca=(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)+(x+y)(y+z)$

$$\geq\sqrt{3(x+y)(y+z)(z+x)[(x+y)+(y+z)+(z+x)]}$$
$$\geq\sqrt{3.2\sqrt{xy}.2\sqrt{yz}.2\sqrt{zx}.2(x+y+z)}=4\sqrt{3xyz(x+y+z)}=4\sqrt{3}S$$

នោះជាវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយបញ្ជាក់។

<u>របៀបទី 10</u>

មុនដំបូងយើងនិងស្រាយបញ្ជាក់ថា $8(p-a)(p-b)(p-c)\leq abc$

បើតាមវិសមភាពរបស់ **AM-GM** យើងមាន

$$8(p-a)(p-b)(p-c)=2\sqrt{(p-a)(p-b)}.2\sqrt{(p-b)(p-c)}.2\sqrt{(p-c)(p-a)}$$
$$\leq[(p-a)+(p-b)].[(p-b)+(p-c)].[(p-c)+(p-a)]=abc$$

ឥឡូវនេះយើងអនុវត្តន៍វិសមភាពខាងលើយើងនិងបាន

$$48S^2=48p(p-a)(p-b)(p-c)\leq 48pabc=3abc(a+b+c)$$

ដូច្នេះយើងនិងត្រូវស្រាយថា $(a^2+b^2+c^2)^3\geq 3abc(a+b+c)$

ប្រើវិសមភាព *Cauchy Schwarz* យើងមាន

$$3(a^2+b^2+c^2)=(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)\geq(a+b+c)^2$$

ម្យ៉ាងទៀតបើតាមវិសមភាព **AM-GM** យើងមាន

$$(a^2+b^2+c^2)^3 \geq \left(3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\right)^3 = 27a^2b^2c^2$$

យើងគុណវិសមភាពទាំងពីរខាងនេះយើងនិងបានវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយបញ្ជាក់

<u>របៀបទី 11</u>

ប្រើវិសមភាព ***Cauchy Schwarz*** ជាមួយនិងវិសមភាពដែលបានស្គាល់

$$\text{sinA} + \text{sinB} + \text{sinC} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

យើងបាន $\frac{1}{sinA}+\frac{1}{sinB}+\frac{1}{sinC} \geq \frac{9}{sinA+sinB+sinC} \geq 2\sqrt{3}$

យើងទាញបាន $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca = 2S\left(\frac{1}{sinA}+\frac{1}{sinB}+\frac{1}{sinC}\right) \geq 4\sqrt{3}S$ (ពិត)

<u>របៀបទី 12</u>

យើងប្រើវិសមភាពដែលយើងបានស្គាល់ $\text{sinA} + \text{sinB} + \text{sinC} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ នោះយើងទាញបាន

$$a+b+c = 2R(sinA+sinB+sinC) \leq 3\sqrt{3}R$$

ពីនោះយើងអនុវត្តន៍វិសមភាព **AM-GM** យើងបាន

$$a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq \frac{9abc}{3\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{9abc}{a+b+c} \geq \frac{9abc}{3\sqrt{3}R} = 4\sqrt{3}S$$

<u>របៀបទី 13</u>

មិនបាត់លក្ខណះទូទៅយើងឧបមាថា $a \geq b \geq c$ យើងទាញបាន

$$ab \geq ac \geq bc \text{ និង } \sin A \geq \sin B \geq \sin C$$

ពីលក្ខណះនេះយើងប្រើវិសមភាព ***Chebyshev*** ឲ្យពីរស៊ុីត

ម៉ូណូតូន $ab \geq ac \geq bc$ និង $\sin A \leq \sin B \leq \sin C$ យើងមាន

$$(ab+bc+ca)(\sin A + \sin B + \sin C) \geq 3(ab\sin C + ac\sin B + bc\sin A) \geq 18S$$

ដោយ $ab+bc+ca \le a^2+b^2+c^2$ និង $\sin A+\sin B+\sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$ នោះយើងទាញបាន

$$(a^2+b^2+c^2)\frac{3\sqrt{3}}{2} \ge 18S \text{ ឬក៏ } a^2+b^2+c^2 \ge 4\sqrt{3}S$$

<u>របៀបទី 14</u>

តាមទ្រឹស្តីបទ cosine ក្នុងត្រីកោណ យើងមាន

$$a^2 = b^2+c^2-2ba\cos A = b^2+c^2-4S\operatorname{cotg} A$$
$$b^2 = c^2+a^2-2ca\cos B = c^2+a^2-4S\operatorname{cotg} B$$
$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C = a^2+b^2-4S\operatorname{cotg} C$$

ពីសមភាពនេះយើងទាញបាន $a^2+b^2+c^2 = 4S(\operatorname{cotg} A+\operatorname{cotg} B+\operatorname{cotg} C)$

ម្យ៉ាងទៀតតាមវិសមភាពដែលយើងបានស្គាល់ $\operatorname{cotg} A+\operatorname{cotg} B+\operatorname{cotg} C \ge \sqrt{3}$

នោះការស្រាយបញ្ជាក់របស់យើងខាងលើនេះជាការស្រេច។

<u>របៀបទី 15</u>

យើងសន្មតិថា r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណនោះយើងមាន

$$r = (p-a)\tan\frac{A}{2} = (p-b)\tan\frac{B}{2} = (p-c)\tan\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow R^3 = (p-a)(p-b)(p-c)\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

តែ $(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{S^2}{p} = \frac{p^2r^2}{p} = pr^2$

នោះយើងទាញបាន $r = p\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$

តាមវិសមភាព **AM-GM** យើងបាន

$$1 = \sum \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} \ge 3\sqrt[3]{\tan^2\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}}$$

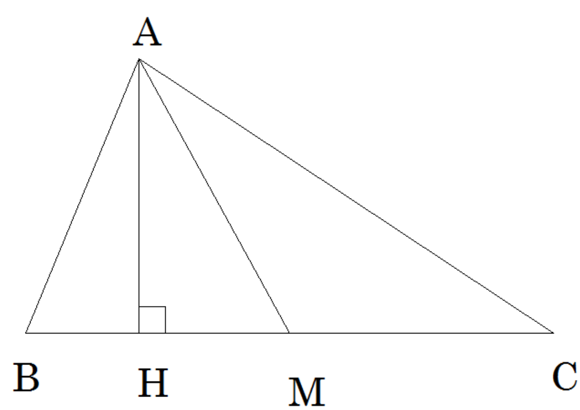
$$\Rightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} \le \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

តាម ***Cauchy Schwarz*** ជាមួយនិងវិសមភាពខាងលើនេះយើងបានដូចខាងក្រោមនេះ

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{4}{3}p^2=4\sqrt{3}p^2.\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\geq 4\sqrt{3}p^2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=4\sqrt{3}pr=4\sqrt{3}S$$

<u>របៀបទី16</u>

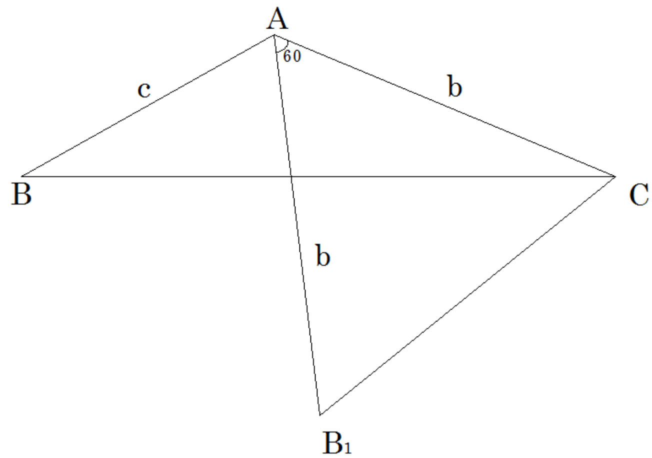


ពិនិត្យមើលត្រីកោណ ABC សន្មតិ M គឺជាចំណុចកណ្តាល BC ។ គូសកំពស់ $AH \perp BC$

យើងមាន $a^2+b^2+c^2=BC^2+AB^2+AC^2=BC^2+2AM^2+\frac{BC^2}{2}$

$$\geq \frac{3BC^2}{2}+2AH^2 \geq 2\sqrt{\frac{3BC^2}{2}.2AH^2}=2\sqrt{3}BC.AH=4\sqrt{3}S$$

<u>របៀបទី**17**</u>



ប្រើត្រីកោណសម្ប៉ង AB_1C ដែលធ្វើយ៉ាងណាឲ្យ B, B_1 នៅរួមមួយផ្នែកចំពោះ AC ។

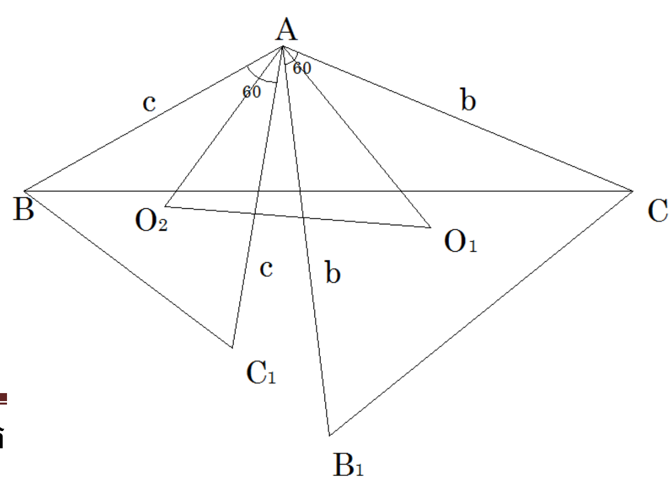
និងមាន $AC = AB_1 = b; AB = c$

ប្រើទ្រឹស្ដីបទ $cosine$ ឲ្យត្រីកោណ AB_1C យើងមាន

$$\begin{aligned} BB_1^2 &= BA^2 + B_1A^2 - 2BA.B_1A\cos\angle BAB_1 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos|A - 60^0| = b^2 + c^2 - 2bc(\cos A\cos 60^0 + \sin A\sin 60^0) \\ &= b^2 + c^2 - \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) - \sqrt{3}bc\sin A = \frac{1}{4}\left[(a^2 + b^2 + c^2) - 4\sqrt{3}S\right] \end{aligned}$$

ដោយ $BB_1^2 \geq 0$ នោះពីខាងលើយើងទាញបាន $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$

<u>របៀបទី18</u>



ប្រើបណ្តាត្រីកោណសម្ព័ង $ACB_1; ABC_1$ ដែលធ្វើយ៉ាងណាឲ្យ $B; B_1$ នៅដូចគ្នាមួយផ្នែកចំពោះ AC និង $C; C_1$ ហើយក៏នៅមួយផ្នែកចំពោះ AB សន្មតិ $O_1; O_2$ គឺជាផ្ចិតរបស់ត្រីកោណ ACB_1 និង ABC_1 ហើយមាន $AC = AB_1 = b; AB = c$ ពិនិត្យមើលត្រីកោណ O_2AO_1

យើងមាន $O_1A = \dfrac{AC}{2\sin 60^0} = \dfrac{b}{\sqrt{3}}; O_2A = \dfrac{AB}{2\sin 60^0} = \dfrac{c}{\sqrt{3}}$

និង $\angle O_1AO_2 = |A - 60^0|$ ពីនេះយើងទាញបាន

$$\begin{aligned}
O_1O_2^2 &= O_1A^2 + O_2A^2 - 2O_1A.O_2A.\cos\angle O_1AO_2\\
&= \frac{1}{3}(b^2+c^2) - 2O_1A.O_2A.\cos|A - 60^0|\\
&= \frac{1}{3}(b^2+c^2) - \frac{2bc}{3}(\cos A\cos 60^0 + \sin A\sin 60^0)\\
&= \frac{1}{3}(b^2+c^2) - \frac{2bc}{3}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}sinA\right) = \frac{1}{6}\left(a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}S\right)
\end{aligned}$$

ដោយ $O_1O_2^2 \geq 0$ នោះពីខាងលើយើងទាញបាន $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S$ ដូចនេះពិត។

ក្រោយនេះជាលំហាត់ទូទៅដែលគួរឲ្យចាប់អារម្មណ៍

លំហាត់ទូទៅទី1

គេឲ្យ $a; b; c$ ជាជ្រុងនៃត្រីកោណមួយនិង S ជាផ្ទៃនៃត្រីកោណនោះ។ចូរបង្ហាញថា

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \qquad (2)$$

(វិសមភាព ***Hadwinger − Finsler***)

<u>របៀបទី1</u>

វិសមភាពដែលត្រូវស្រាយវាសមូលនិងវិសមភាពដែលមានរាងដូចខាងក្រោមនេះ

$$2(ab+bc+ca) - (a^2+b^2+c^2) \geq 4\sqrt{3}S$$

$$4S\left(\frac{1}{\sin C}+\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}\right)-4S(\operatorname{cotg} A+\operatorname{cotg} B+\operatorname{cotg} C)\geq 4\sqrt{3}S$$

$$\frac{1-\cos A}{\sin A}+\frac{1-\cos B}{\sin B}+\frac{1-\cos C}{\sin C}\geq\sqrt{3}$$

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geq\sqrt{3}$$

ប្រើសមភាព $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$ និងជាមួយនិងវិសមភាពដែលយើងបានស្គាល់គឺ $x+y+x\geq\sqrt{3(xy+yz+zx)}$ ពេលនោះយើងនិងបានដូចក្រោមនេះគឺ

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geq\sqrt{3\sum\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\sqrt{3}$$

ដូចនេះវិសមភាពលើយើងបានស្រាយបញ្ជាក់ថាវាពិតហើយ។

<u>របៀបទី2</u>

វិសមភាពដែលត្រូវវាសមូលនិងវិសមភាពខាងក្រោមនេះ

$$[a^2-(b-c)^2]+[b^2-(c-a)^2]+[c^2-(a-b)^2]\geq 4\sqrt{3}S$$

$$\Leftrightarrow (p-b)(p-c)+(p-c)(p-a)+(p-a)(p-b)\geq\sqrt{3p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad (3)$$

តាង $x=p-a; y=p-b\,; z=p-c$ វិសមភាព (3)ក្លាយជា

$xy+yz+zx\geq\sqrt{3xyz(x+y+z)}$ នេះវាជាវិសមភាពយើងបានស្គាល់។

<u>របៀបទី 3</u>

អនុវត្តន៍លទ្ធផលលំហាត់ដើម ។ ឲ្យត្រីកោណ MNP ក្នុង

នោះ $M; N; P$ រៀងគ្នាគឺជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង

បណ្តាលមុំ $A; B; C$ របស់ត្រីកោណដំបូង។

<u>លំហាត់ទូទៅទី :</u>

$$ab+bc+ca\geq 4\sqrt{3}S$$

<u>លំហាត់ទូទៅទី3:</u>

$$ab+bc+ca\geq 4\sqrt{3}S+\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$

លំហាត់ទូទៅទី4:

$$a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}\geq 3\left(\frac{4S}{\sqrt{3}}\right)^n+[(a-b)^{2n}+(b-c)^{2n}+(c-a)^{2n}]\ :\forall n\in\mathbb{N}$$

លំហាត់ទូទៅទី5:

$$a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ca)+\frac{18abc}{a+b+c}\geq 4\sqrt{3}S$$

លំហាត់ទូទៅទី6:

$$a^\alpha b^\alpha+b^\alpha c^\alpha+c^\alpha a^\alpha\geq 2^\alpha\sqrt{3^{2-\alpha}}S^\alpha\quad ,\forall\alpha\geq 1 \qquad (4)$$

ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព(4)

យើងមាន $\left(\frac{2S}{\sin C}\right)^\alpha+\left(\frac{2S}{\sin A}\right)^\alpha+\left(\frac{2S}{\sin B}\right)^\alpha\geq 4^\alpha\sqrt{3^{2-\alpha}}S^\alpha$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\sin^\alpha A}+\frac{1}{\sin^\alpha B}+\frac{1}{\sin^\alpha C}\geq\sqrt{3^{2-\alpha}}$$

តាមវិសមភាពរបស់ **AM-GM** ជាមួយនិងវិសមភាពដែលយើងបានស្គាល់

$$\sin A+\sin B+\sin C\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$$ នោះយើងបាន

$$\frac{1}{\sin^\alpha A}+\frac{1}{\sin^\alpha B}+\frac{1}{\sin^\alpha C}\geq 3.\sqrt[3]{\frac{1}{\sin^\alpha A}.\frac{1}{\sin^\alpha B}.\frac{1}{\sin^\alpha C}}=\frac{3}{\sqrt[3]{(\sin A\sin B\sin C)^\alpha}}$$

$$\geq\frac{3}{\sqrt[3]{\left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\right)^{3\alpha}}}\geq\frac{3}{\sqrt{3^\alpha}}=\sqrt{3^{2-\alpha}}$$

នោះវិសមភាពរបស់យើងត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់រួច។

លំហាត់ទូទៅទី7:

គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាជ្រុងបីរបស់ត្រីកោណមួយនិងមានផ្ទៃ S ឧបមាថា $x;y;z$

គឺជាបណ្តាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x+y>0;y+z>0\,;z+x>0$

និង $xy+yz+zx>0$ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: $xa^2+yb^2+xc^2\geq 4\sqrt{xy+yz+zx}S$ (5)

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

ជំនួស $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ និង $2S=ab\sin C$ ចូលវិសមភាព (5) និងក្លាយជា

$$xa^2+yb^2+x(a^2+b^2-2ab\cos C)\geq 2\sqrt{xy+yz+zx}ab\sin C$$

$$\Leftrightarrow (x+z)\frac{a}{b}+(y+z)\frac{b}{a}\geq 2\left(z\cos C+\sqrt{xy+yz+zx}\sin C\right) \qquad (6)$$

អនុវត្តន៍វិសមភាពរបស់ **AM-GM** យើងមាន

$$(x+z)\frac{a}{b}+(y+z)\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{(x+z)\frac{a}{b}.(y+z)\frac{b}{a}}=2\sqrt{(x+z)(y+z)}$$

ម្យ៉ាងទៀតតាមវិសមភាព ***Cauchy Schwarz*** គឺយើងមាន

$$z\cos C+\sqrt{xy+yz+zx}\sin C\leq\sqrt{(z^2+xy+yz+zx)(\cos^2 C+\sin^2 C)}$$
$$=\sqrt{(x+z)(y+z)}$$

តាមទំនាក់ទំនងពីរខាងលើនេះយើងទាញបាន (6) និងសមភាពកើតមាននៅពេលដែល

$$\begin{cases}(x+y)\frac{a}{b}=(y+z)\frac{b}{a}\\ \frac{\cos C}{z}=\frac{\sin C}{\sqrt{xy+yz+zx}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{a}{\sqrt{y+z}}=\frac{b}{\sqrt{x+z}}\Rightarrow b^2=\frac{a^2(x+z)}{y+z}\\ \frac{\cos^2 C}{z^2}=\frac{\sin^2 C}{xy+yz+zx}=\frac{1}{(x+z)(y+z)}\end{cases}$$

ជំនួស $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ ចូលយើងមាន

$$c^2=a^2+a^2.\frac{x+z}{y+z}-2a^2.\frac{\sqrt{x+z}}{\sqrt{y+z}}.\frac{z}{\sqrt{(x+z)(y+z)}}\Rightarrow\frac{a}{\sqrt{y+z}}=\frac{c}{\sqrt{x+y}}$$

ដូចនេះសមភាពកើតមានពេលដែល $\frac{a}{\sqrt{y+z}}=\frac{b}{\sqrt{z+x}}=\frac{c}{\sqrt{x+y}}$

អនុវត្តន៍របស់លំហាត់ទូទៅ 7 ក្នុងត្រីកោណចំពោះជ្រុងបីគឺ $a;b;c$

<u>លំហាត់7.1 :</u>

$$a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

សម្រាយបញ្ជាក់

វិសមភាពខាងលើ $\Leftrightarrow a^2\dfrac{b+c-a}{a}+b^2\dfrac{c+a-b}{b}+c^2\dfrac{a+b-c}{c}\geq 4\sqrt{3}S$

អនុវត្តន៍វិសមភាពទូទៅ 7 ទាញបានត្រូវបន្តគឺ $\sum\dfrac{(b+c-a)(v+a-b)}{ab}\geq 3$

ឬក៏សម្មូលទៅនិង $a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\geq 0$

វិសមភាពនេះវាជាវិសមភាព ***Schur*** លំដាប់ 3

លំហាត់7.2

$$a^2b+b^2c+c^2a\geq 8\sqrt[4]{27}.S\sqrt{S}$$

សម្រាយបញ្ជាក់

ពីវិសមភាព ***Hadwiger – Finsler*** ទាញបាន $ab+bc+ca\geq 4\sqrt{3}S$

អនុវត្តន៍លំហាត់ទូទៅ7

ជាមួយនិងវិសមភាពខាងលើនេះយើងបាន

$$a^2b+b^2c+c^2a\geq 4\sqrt{ab+bc+ca}S\geq 8\sqrt[4]{27}S\sqrt{S}$$

លំហាត់7.3

$$3abc\geq 4\sqrt{a^2+b^2+c^2}.S$$

សម្រាយបញ្ជាក់

អនុវត្តន៍លំហាត់ទូទៅ 7 យើងមាន $a^2\dfrac{bc}{a}+b^2\dfrac{ca}{b}+c^2\dfrac{ab}{c}\geq 4\sqrt{a^2+b^2+c^2}S$

ពីនោះយើងទាញបាន $3abc\geq 4\sqrt{a^2+b^2+c^2}S$

លំហាត់7.4:

$$(b+c-a)a^2+(c+a-b)b^2+(a+b-c)c^2\geq 8\sqrt[4]{3}S\sqrt{S}$$

សម្រាយបញ្ជាក់

អនុវត្តន៍លំហាត់ទូទៅ 7 យើងមាន

$$(b+c-a)a^2+(c+a-b)b^2+(a+b-c)c^2\geq 4\sqrt{2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2}S$$

ម្យ៉ាងទៀតតាមវិសមភាព ***Hadwiger − Finsler*** គឺយើងមាន

$$2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2\ge 4\sqrt{3}S$$

ជាមួយនិងវិសមភាពខាងលើយើងនិងបានវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយបញ្ជាក់។

លំហាត់ទី 8

ឧមានថា a,b,c ជាប្រវែងជ្រុងបីនៃត្រីកោណនិងមានផ្ទៃ S

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះ $x;y;z>0$ យើងបាន : $\frac{x}{y+z}.a^2+\frac{y}{z+x}.b^2+\frac{z}{x+y}.c^2\ge 2\sqrt{3}S$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

អនុវត្តន៍លំហាត់ទទូទៅ 7 យើងមាន

$$\frac{x}{y+z}.a^2+\frac{y}{z+x}.b^2+\frac{z}{x+y}.c^2\ge 4\sqrt{\frac{x}{y+z}.\frac{y}{z+x}+\frac{y}{z+x}.\frac{z}{x+y}+\frac{z}{x+y}.\frac{x}{y+z}}S$$

ទាញបានវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយ $\frac{xy}{(y+z)(z+x)}+\frac{yz}{(z+x)(x+y)}+\frac{zx}{(x+y)(y+z)}\ge\frac{3}{4}$

វិសមភាពនេះសម្មូលនិង $x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2\ge 6xyz$

វិសមភាពវាពិតតាមវិសមភាព **AM-GM**

លំហាត់ទី9

ឧបមាថា a,b,c ជាជ្រុងបីនៃត្រីកោណមួយនិងមានផ្ទៃ S ។ ចូរបង្ហាញថា

$$4\sqrt{3}S+3\sum(a-b)^2\ge a^2+b^2+c^2 \tag{7}$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

តាង $a=x+y\,;b=z+x\,;c=x+y$ ចំពោះ $x;y;z>0$ នោះវិសមភាពដែលត្រូវក្លាយជា

នោះយើងនិងត្រូវស្រាយថា $4\sqrt{3}S\ge 6(ab+bc+ca)-5(a^2+b^2+c^2)$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{3xyz(x+y+z)}\ge 6\sum(y+z)(z+x)-5\sum(y+z)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3xyz(x+y+z)}\ge 2(xy+yz+zx)-(x^2+y^2+z^2) \tag{8}$$

ដល់នេះយើងតាង $x = p^2\ ; y = q^2\ ; z = r^2$ ចំពោះ $p; q; r > 0$ វិសមភាព (8) ក្លាយជា

$$\sqrt{3p^2q^2r^2(p^2+q^2+r^2)} \geq (p+q+r)(p+q-r)(r+p-q)(q+r-p)$$

$$\Leftrightarrow pqr\sqrt{3(p^2+q^2+r^2)} \geq (p+q+r)(p+q-r)(r+p-q)(q+r-p)$$

ដោយ $\sqrt{3(p^2+q^2+r^2)} \geq p+q+r$ នោះយើងត្រូវស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$pqr \geq (p+q-r)(r+p-q)(q+r-p)$$

វិសមភាពនេះក្រោយអំពីយើងពន្លាតនិងសម្រួលវានិងក្លាយជាវិសមភាព $Schur$ លំដាប់ 3 ។

<u>សំគាល់</u> ពីបណ្តាលវិសមភាព(2)និង (7) យើងទទូលបានវិសមភាព

$$4\sqrt{3}S + 3\sum(a-b)^2 \geq a^2+b^2+c^2 \geq 1.\sum(a-b)^2 + 4\sqrt{3}S \qquad (9)$$

យើងនិងស្រាយលទ្ធផល (9) គឺបណ្តាប្រពន្ធចំនួន 3 និង 1 របស់ $\sum(a-b)^2$

គឺជាតម្លៃល្អបំផុតដូចនេះយើងនិងស្រាយវាជាទូទៅដូចខាងក្រោមនេះ។

<u>លំហាត់ទូទៅទី10</u>

ឧបមានថា a, b, c ជាបណ្តាជ្រុងបីនៃត្រីកោណនិងមានផ្ទៃ S ។ នោះយើងមាន

$$4\sqrt{3}S + \alpha.\sum(a-b)^2 \geq a^2+b^2+c^2 \geq \beta.\sum(a-b)^2 + 4\sqrt{3}S$$

គឺ $\alpha \geq 3$ និង $\beta \leq 1$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

តាង $a = y+z;\ b = z+x\ ; c = x+y$ ចំពោះ $x; y; z > 0$ ពេលនោះយើងបាន

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{xyz(x+y+z)}$$

យើងតាងនិមិត្តសញ្ញាសម្គាល់

$T_\alpha = 4\sqrt{3}S + \alpha.\sum(a-b)^2 - a^2+b^2+c^2$ យើងមាន

$$T_\alpha = 4\sqrt{3}S + (2\alpha-1)(a^2+b^2+c^2) - 2\alpha(ab+bc+ca)$$

$$= 4\sqrt{3}S + (2\alpha-1)\sum(y+z)^2 - 2\alpha\sum(y+z)(z+x)$$

$$= 4\sqrt{3}S + 2(\alpha-1)(x^2+y^2+z^2) - 2(\alpha+1)(xy+yz+zx)$$

យើងតាងទៀត $a' = yz\,; b' = zx\,; c' = xy$ យើងបាន

$$\frac{1}{2}T_\alpha = 2\sqrt{3xyz(x+y+z)} + (\alpha-1)(x^2+y^2+z^2) - (\alpha+1)(xy+yz+zx)$$

$$= 2\sqrt{3(a'b'+b'c'+c'a')} + (\alpha-1)\left(\frac{b'c'}{a'}+\frac{c'a'}{b'}+\frac{a'b'}{c'}\right) - (\alpha+1)(a'+b'+c')$$

ដល់នេះយើងតាងម្តងទៀត $\bar{a} = b' + c'\,; \bar{b} = c' + a'\,; \bar{c} = a' + b'$ ទាញបាន $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$

ក៏ជាជ្រុងបីនៃត្រីកោណមួយដែរ។ បន្តទៀតបំរែលបំរួលយើងបាន

$$T'_\alpha = \frac{1}{2}T_\alpha = 2\sqrt{3\sum(\bar{p}-\bar{a})(\bar{p}-\bar{b})} + (\alpha-1)\prod(\bar{p}-\bar{a})\sum\frac{1}{(\bar{p}-\bar{a})^2} - (\alpha+1)\bar{p}$$

$$= 2\sqrt{3(\bar{a}.\bar{b}+\bar{b}.\bar{c}+\bar{c}.\bar{a}-\bar{p}^2)} + (\alpha-1)\frac{\bar{r_a}^2+\bar{r_b}^2+\bar{r_c}^2}{\bar{p}} - (\alpha+1)\bar{p}$$

$$= \sqrt{3\left(2\sum\bar{a}.\bar{b}-\sum\bar{a}^2\right)} + (\alpha-1)\,\bar{p}\sum\tan^2\frac{\bar{A}}{2} - (\alpha+1)\,\bar{p}$$

$$= \sqrt{12\,\bar{S}\sum\tan\frac{\bar{A}}{2}} + (\alpha-1)\,\bar{p}\sum\tan^2\frac{\bar{A}}{2} - (\alpha+1)\,\bar{p}$$

$$= 2\sqrt{3\bar{p}\,.\bar{r}\sum\tan\frac{\bar{A}}{2}} + (\alpha-1)\,\bar{p}\sum\tan^2\frac{\bar{A}}{2} - (\alpha+1)\,\bar{p}$$

ទាញបាន $\frac{T'_\alpha}{\bar{p}} = 2\sqrt{3\tan\frac{\bar{A}}{2}\tan\frac{\bar{B}}{2}\tan\frac{\bar{C}}{2}\sum\tan\frac{\bar{A}}{2}} + (\alpha-1)\sum\tan^2\frac{\bar{A}}{2} - (\alpha+1)$

តាង $u = \tan\frac{\bar{A}}{2}\,; v = \tan\frac{\bar{B}}{2}\,; w = \tan\frac{\bar{C}}{2}$ គឺយើងបាន $uv+vw+wu = 1$ ដោយ $T_\alpha \geq 0$ នោះ

$$\frac{\bar{T}_\alpha^2}{\bar{p}} = 2\sqrt{3uvw(u+v+w)} + (\alpha-1)(u^2+v^2+w^2) - (\alpha+1) \geq 0 \qquad (*)$$

យើងឲ្យ $u \to 0$ និង $v; w \to 1$ គឺ $\frac{\bar{T}_\alpha^2}{\bar{p}} \to 2(\alpha-1)-(\alpha+1) = \alpha-3$ បើ $\alpha < 3$

គឺមាន u_0, v_0, w_0 និងផ្ទៀងផ្ទាត់ $u_0v_0+v_0w_0+w_0u_0 = 1$ ជាក់ស្តែង $\frac{\bar{T}'_{\alpha_0}}{\bar{p}_0} > 0$

វាផ្ទុយនិង $(*)$ ដូចនេះ $\alpha \geq 3$ ដូចគ្នា

$$\frac{\bar{T}_{\beta}^{2}}{\bar{p}} = 2\sqrt{3uvw(u+v+w)} + (\beta-1)(u^2+v^2+w^2) - (\beta+1) \geq 0 \qquad (**)$$

បើ $\beta > 1$ គឺឲ្យ $u \to +\infty$ និង $v; w \to 0$ យើងបាន $\frac{\bar{T}'_{\beta_0}}{\bar{p}_0} \to +\infty$ ទាញបានមាន $u_1; v_1; w_1$

ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $u_1v_1 + v_1w_1 + w_1u_1 = 1$ ជាក់ស្តែង $\frac{\bar{T}'_{\beta_1}}{\bar{p}_1} > 0$

វាផ្ទុយនិង $(**)$ ដូចនេះ $\beta \leq 1$

សង្ខេបមកយើងបាន $4\sqrt{3}S + 3\sum(a-b)^2 \geq a^2+b^2+c^2 \geq 1.\sum(a-b)^2 + 4\sqrt{3}S$

វាជាវិសមភាពល្អបំផុតមួយ(ពីព្រោះវាមានលក្ខណះស្មុកស្មាញច្រើននិងល្បិចច្រើន)។

II. 2 លំហាត់ [*Olympic Mathematique Iran 1996*]

លំហាត់គំរូ

គេឲ្យ $x; y; z$ គឺជាបណ្តាចំនួនមិនអវិជ្ជមានដែលមិនធ្វើឲ្យមានពីរចំនួនណាក្នុងបណ្តាចំនួននោះស្មើនិង 0 ព្រមគ្នា ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(xy+yz+zx)\left[\frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} + \frac{1}{(x+y)^2}\right] \geq \frac{9}{4}$$

សម្រាយបញ្ជាក់

នេះវាជាលំហាត់មួយដ៏ល្បីល្បាញនៅលើសកលលោក។ ចំពោះការហៅឈ្មោះវិសមភាពនេះគេតែងហៅថា(វិសមភាព ***Iran 96***) វាគឺជាលំហាត់របស់អ្នកនិពន្ធ ***Ji Chen*** វាជាសំណើរវិញ្ញាសាដើម្បីដាក់ឲ្យបឡ្បង *Crux* របស់ប្រទេស ***Canada*** ឆ្នាំ 1992 យ៉ាងប្រាកដ។តែលំហាត់នេះបានលើកយកមកប្រឡងម្តងទៀតក្នុការប្រឡង ***Olympic mathematical Iran*** ឆ្នាំ1996 លំហាត់នេះយើងឃើញថាវាជាប្រភេទលំហាត់វិសមភាពដ៏ពិបាកបំផុតដែលបានលើកយក

មកដាក់ដើម្បីប្រឡង ជាលក្ខណៈ ***Mathematique Olympic*** ។ ព្រោះវាជាលំហាត់ល្អនិង មានលំហាត់ជាច្រើនដែលលើកយករូបមន្តនេះមកប្រើយ៉ាងច្រើនសម្រាប់ការស្រាយបញ្ហាក់ លំហាត់ដែលពិបាកៗជាច្រើនទៀតហើយអ្នកគណិតវិទ្យាសម័យទំនើបនេះតែហៅថា (វិសមភាព ***Iran 96***) ។ ពីពេលដែលបង្កើតវាមកវិធីដោះស្រាយដ៏អស្ចារ្យបំផុតនោះគឺប្រើ ច្បាប់ពន្លាតបន្តទៀតរួចហើយជាមួយនិងបណ្តាវិសមភាព ***Schur*** និងវិសមភាព **AM-GM** ដើម្បីទាញបានលទ្ធផលវា។ នៅពេលនេះខ្ញុំសុំឲ្យបងប្អូនធ្វើការចាប់អារម្មណ៍ជាមួយ និងការឧទេស៍មានបន្ថែមមួយចំនួនឲ្យវាដែលធ្វើឲ្យមានការចាប់អារម្មណ៍បំផុត។

សូមបងប្អូនជួយពិនិត្យជាមួយនិងយើងខ្ញុំ!!!

<u>របៀបទី 1</u>

តាមការសំរួលនិងតំរៀបវាទៅយើងបាន

$$\sum_{sym} 4x^5y - x^4y^2 - 3x^3y^3 + x^4yz - 2x^3y^2z + x^2y^2z^2 \geq 0$$

យើងឃើញថាផលបូកឆ្លុះចំពោះអញ្ញាត់ $x; y; z$ ចំណុចពិសេសក្នុងផលបូកខាងលើ។មេគុណ របស់ x^3y^3 ក្នុងកន្សោមចុងក្រោយពេលពន្លាតខាងលើគឺ -6 និងមេគុណរបស់ $x^2y^2z^2$ គឺ 6 យើងមានតាមវិសមភាព ***Schur*** យើងមាន

$$\sum_{sym} x^4yz - 2x^3y^2z + x^2y^2z^2 \geq 0 \quad (1)$$

និងយើងមានមួយទៀតតាមវិសមភាព ***Cauchy*** យើងមាន

$$\sum_{sym} (x^5y - x^4y^2) + 3(x^5y - x^3y^3) \geq 0 \quad (2)$$

តាមវិសមភាព (1) និង (2) វិសមភាពរបស់យើងគឺពិត។

<u>របៀបទី2</u>

មិនបាត់លក្ខណៈទូទៅ យើងឧបមាថា $x \geq y \geq z$ យើងនិងតាងដូចខាងក្រោមនេះ

$$P(x;y;z)=\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}+\frac{1}{(x+y)^2}-\frac{9}{4(xy+yz+zx)}$$

យើងស្រាយថា $P(x;y;z)\geq 0$ សំគាល់ថា $P(t;t;z)=\dfrac{z(z-t)^2}{2t^2(2z+t)(z+t)^2}\geq 0\ \forall t\geq z\geq 0$

ដល់ទីនេះការសង្កេតរបស់យើងគឺកំណត់ឲ្យយើងរក $t\geq z$ សមស្របមួយដែល

ដើម្បីឲ្យវិសមភាពផ្ទៀងផ្ទាត់គឺ $P(x;y;z)\geq P(t;t;z)$ គឺលំបាត់និងត្រូវបានដោះស្រាយរួច។

មានការជ្រើសរើសច្រើនចំពោះចំនួន t ដូចនេះ។ ការកំណត់របស់យើងគឺយក $t=\dfrac{x+y}{2}$

គឺយើងនិងស្រាយបញ្ជាក់ថាវាផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមភាពខាងលើ គឺថា

$$\frac{1}{(x+z)^2}+\frac{1}{(x+z)^2}-\frac{2}{(t+z)^2}\geq\frac{9}{4(xy+yz+zx)}-\frac{9}{4(t^2+2zt)}$$

<u>ចំពោះការសំគាល់</u>

$$\frac{1}{(x+z)^2}+\frac{1}{(x+z)^2}-\frac{2}{(t+z)^2}=\left(\frac{1}{x+z}-\frac{1}{y+z}\right)^2+\frac{2}{(x+z)(y+z)}-\frac{2}{(t+z)^2}$$

$$=\frac{(x-y)^2}{(x+z)^2(y+z)^2}+\frac{(x-y)^2}{2(x+z)(y+z)(t+z)^2}$$

និង $\dfrac{9}{4(xy+yz+zx)}-\dfrac{9}{4(t^2+2zt)}=\dfrac{9(x-y)^2}{16(t^2+2tz)(xy+yz+zx)}$

យើងក៏អាចសរសេរម្តងទៀតបានដូចខាងក្រោមនេះ

$$\frac{(x-y)^2}{(x+z)^2(y+z)^2}+\frac{(x-y)^2}{2(x+z)(y+z)(t+z)^2}\geq\frac{9(x-y)^2}{16(t^2+2tz)(xy+yz+zx)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{(x+z)^2(y+z)^2}+\frac{1}{2(x+z)(y+z)(t+z)^2}\geq\frac{9}{16(t^2+2tz)(xy+yz+zx)}$$

ម្យ៉ាងទៀត $4(xy+yz+zx)-3(x+z)(y+z)=xy+yz+zx-3x^2\geq 0$ នោះ

$$(x+z)(y+z)\leq\frac{4}{3}(xy+yz+zx)$$

ពីនោះយើងទាញបាន

$$\frac{1}{(x+z)^2(y+z)^2}\geq\frac{9}{16(xy+yz+zx)^2}\geq\frac{9}{16(xy+yz+zx)(t^2+2zt)}$$

ដូចនេះវិសមភាពត្រូវតែពិតនិងល័ក្ខខ័ណ្ឌនេះក៏មានន័យគឺលំហាត់របស់យើងដែលបានឲ្យត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់រួច។ ដើម្បីឲ្យសមភាពកើតមានគឺគ្រាន់តែពេលដែល $x = y = z$ ។

របៀបទី 3

យើងក៏និងស្រាយដូចទៅនិងរបៀបទី 1 ដែរគឺថាយើងនិងរកមួយចំនួន $t \geq z$ សមស្របឲ្យវិសមភាពរបស់យើងវាពិត គឺ $f(x;y;z) \geq f(t;t;z)$

លើកនេះយើងនិងជ្រើសរើស $t = \sqrt{(x+z)(y+z)} - z$ ពេលនោះ $xy + yz + zx = t^2 + 2tz$

នោះវិសមភាព

$$f(x;y;z) \geq f(t;t;z) \Leftrightarrow \frac{1}{(x+z)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} - \frac{2}{(x+z)(y+z)} \geq \frac{1}{4t^2} - \frac{1}{(x+y)^2}$$

ដោយ $(x+y)^2 - 4t^2 = (x+y-2t)(x+y+2t) = \left(\sqrt{x+z} - \sqrt{y+z}\right)^2 (x+y+2t)$

នោះយើងក៏អាចសរសេរបាន $\dfrac{(x-y)^2}{(x+z)^2(y+z)^2} \geq \dfrac{(x-y)^2(x+y+2t)}{4t^2(x+y)^2\left(\sqrt{x+z} - \sqrt{y+z}\right)^2}$ ឬក៏

$$4t^2(x+y)^2\left(\sqrt{x+z} - \sqrt{y+z}\right)^2 \geq (x+z)^2(y+z)^2(x+y+2t)$$

យើងមាន $2t = 2\sqrt{(x+z)(y+z)} - 2z \geq \sqrt{(x+z)(y+z)}$ នោះ $4t^2 \geq (x+z)(y+z)$

មួយទៀត

$$\left(\sqrt{x+z} - \sqrt{y+z}\right)^2 = x + y + 2z + 2\sqrt{(x+z)(y+z)} = x + y + 2t + 4z \geq x + y + 2t$$

និង $(x+y)^2 \geq (x+z)(y+z)$ ជាមួយនិងល័ក្ខខ័ណ្ឌនេះម្តងទៀតយើងទាញបានវិសមភាពចុងក្រោយរបស់យើងពិត ដូចនេះការស្រាយរបស់យើងត្រូវបានបញ្ចប់។

របៀបទី4

ដោយវាមានល័ក្ខខ័ណ្ឌឆ្លុះគ្នានោះយើងក៏អាចឧបមាថា $x \geq y \geq z > 0$

ឥឡូវនេះយើងសំគាល់ថា $\dfrac{xy + yz + zx}{(y+z)^2} = \dfrac{x}{y+z} + \dfrac{yz}{(y+z)^2}$

ដូចនេះវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយយើងអាចសរសេរបានដូចខាងក្រោមនេះ

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}+\frac{xy}{(x+z)^2}+\frac{yz}{(y+z)^2}+\frac{zx}{(z+x)^2}\geq\frac{9}{4}$$

ដោយ $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}=(x+y+z)\left(\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}\right)-1$ នោះវិសមភាពសមមូលចំពោះនិង

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}\right)+\frac{z}{x+y}+\frac{xy}{(x+z)^2}+\frac{yz}{(y+z)^2}+\frac{zx}{(z+x)^2}\geq\frac{17}{4}$$

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}-\frac{4}{x+y+2z}\right)+\frac{4(x+y+z)}{x+y+2z}+\frac{z}{x+y}+$$

$$\frac{xy}{(x+z)^2}+\frac{yz}{(y+z)^2}+\frac{zx}{(z+x)^2}\geq\frac{17}{4}$$

ដល់នេះយើងក៏អាចងាយស្រួចសរសេរម្តងទៀតមានរាង $M(x-y)^2+Nz\geq 0$ ក្នុងនោះ

$$M=\frac{x+y+z}{(x+z)(y+z)(x+y+2z)}-\frac{1}{4(x+y)^2}$$

$$\geq\frac{x+y+z}{(x+y)(y+x)(x+y+2z)}-\frac{1}{4(x+y)^2}=\frac{3x+3y+2z}{4(x+y)^2(x+y+2z)}\geq 0$$

និង $N=\frac{1}{x+y}+\frac{x}{(x+z)^2}+\frac{y}{(y+z)^2}-\frac{4}{x+y+2z}$

$$=\left(\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}-\frac{4}{x+y+2z}\right)+\frac{1}{x+y}-\frac{z}{(x+z)^2}-\frac{z}{(y+z)^2}$$

$$=\frac{(x-y)^2}{(x+z)(y+z)(x+y+2z)}+\frac{1}{x+y}-\frac{z}{(x+z)^2}-\frac{z}{(y+z)^2}$$

ដោយ $\frac{z}{(x+z)^2}-\frac{y}{(x+y)^2}=-\frac{(y-z)(x^2-yz)}{(x+y)^2(x+z)^2}\leq 0$ នោះយើងទាញបាន

$$N\geq\frac{(x-y)^2}{(x+y)(y+y)(x+y+2y)}+\frac{1}{x+y}-\frac{y}{(x+y)^2}-\frac{z}{4yz}$$

$$=\frac{(x-y)^2}{2y(x+y)(x+3y)}-\frac{(x-y)^2}{4y(x+y)^2}=\frac{(x-y)^3}{4y(x+y)^2(x+3y)}\geq 0$$

ដូច្នេះទាំងពីរតម្លៃ M; N ក្នុងវិសមភាព

$M(x-y)^2+Nz\geq 0$ ល័ក្ខខ័ណ្ឌមិនអវិជ្ជមាននោះវិសមភាព

របស់យើងពិត។ ដូចនេះវិសមភាពរបស់យើងត្រូវបានស្រាយរួច។

<u>របៀបទី5</u>

មិនបាត់លក្ខណៈទូទៅយើងឧបមាថា $x \geq y \geq z$ ពេលនោះយើងនិងស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(x+z)^2}+\frac{1}{(x+y)^2} \geq \frac{2}{(x+z)(y+z)}+\frac{1}{4xy} \qquad (1)$$

ដូចនេះយើងបាន $\Leftrightarrow \frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(x+z)^2} \pm \frac{2}{(x+z)(y+z)} \geq \frac{1}{4xy}-\frac{1}{(x+y)^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{(x+z)^2(y+z)^2} \geq \frac{(x-y)^2}{4xy(x+y)^2}$$

យើងមាន $(x-y)^2 \geq 0; (x+y)^2 \geq (x+z)^2$ និង $4xy \geq 4y^2 \geq (y+z)^2$

នោះវិសមភាពនេះពិតនិង (1) បានស្រាយបញ្ជាក់។

ឥឡូវនេះអនុវត្តន៍(1) យើងនិងស្រាយបញ្ជាក់បានថា

$$(xy+yz+zx)\left[\frac{2}{(x+z)(y+z)}+\frac{1}{4xy}\right] \geq \frac{9}{4}$$

យើងមានគំនិត្យ

$\frac{xy+yz+zx}{4xy}=\frac{1}{4}+\frac{z(x+y)}{4xy}$ និង $\frac{2(xy+yz+zx)}{(x+z)(y+z)}=2-\frac{2z^2}{(x+z)(y+z)}$

នោះវិសមភាពនេះក៏អាចសរសេរបានដូចខាងក្រោមនេះ

$$\frac{z(x+y)}{4xy} \geq \frac{2z^2}{(x+z)(y+z)} \quad \text{ឬក៏} \quad (x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$$

វិសមភាពចុងក្រោយនេះវាពិតតាមរូបមន្ត **AM-GM** ដូចច្បាប់ស្រាយបញ្ជាក់របស់យើងគឺពិត។

<u>របៀបទី6</u>

យើងគុណវិសមភាពនិង $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{ab+bc+ca}$ នោះយើងបានវិសមភាពថ្មី

$$\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}+\frac{(b+c)(b+a)}{c+a}+\frac{(c+a)(c+b)}{a+b} \geq \frac{9(a+b)(b+c)(c+a)}{4(ab+bc+ca)}$$

ដោយយើងមាន $\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}=\frac{a^2+bc}{b+c}+a$ និង

$$\frac{9(a+b)(b+c)(c+a)}{4(ab+bc+ca)}=\frac{9}{4}(a+b+c)-\frac{9abc}{4(ab+bc+ca)}$$

នោះវិសមភាពយើងសមមូលនិង

$$\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}+\frac{9abc}{4(ab+bc+ca)}\geq\frac{5}{4}(a+b+c)$$

ឬក៏យើងអាចសរសេរបានម្យ៉ាងទៀតគឺ

$$(a+b+c)\left(\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}\right)+\frac{9abc(a+b+c)}{4(ab+bc+ca)}\geq\frac{5}{4}(a+b+c)^2$$

ដោយ $\frac{(a^2+bc)(a+b+c)}{b+c}=a^2+bc+\frac{a^3+abc}{b+c}\,;\sum\frac{a^3+abc}{b+c}\geq a^2+b^2+c^2$ និង

$$\frac{9abc(a+b+c)}{4(ab+bc+ca)}\geq\frac{27abc}{4(a+b+c)}$$

នោះយើងត្រូវស្រាយថា

$$\sum(a^2+bc)+(a^2+b^2+c^2)+\frac{27abc}{4(a+b+c)}\geq\frac{5}{4}(a+b+c)^2$$

សំរួលម្តងទៀតយើងនៅត្រឹមតែ

$$a^2+b^2+c^2+\frac{9abc}{a+b+c}\geq 2(ab+bc+ca)$$ (ពិតតាម ***Schur***)

សមភាពកើតមានពេលដែល $a=b=c; a=b; c=0$ និងបណ្តាចំលាស់។

<u>របៀបទី7</u>

ដំបូងនេះយើងនិងស្រាយបញ្ជាក់គន្លឹះមិនសិន

<u>គន្លឹះ</u>

យើងឧបមថា $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានណាក៏ដោយដែលធ្វើឲ្យមានពីរចំនួនណាក្នុងស្មើនិងសូន្យព្រមគ្នាពេលនោះយើងមាន

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{c+a}\right)+\frac{6(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}\geq\frac{13}{2}$$

<u>ស្រាយបញ្ជាក់គន្លឹះ</u>

យើងប្រើសមភាពដែលយើងបានស្គាល់

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{c+a}\right)-\frac{9}{2}=\sum\frac{(b-c)^2}{2(a+b)(a+c)}$$

និងមួយទៀតគឺ : $\dfrac{6(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}-2=-\dfrac{\sum(b-c)^2}{(a+b+c)^2}$

យើងអាចសរសេរបានវិសមភាពចុងក្រោយ

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\geq 0$$

ក្នុងនោះ $S_a=\dfrac{1}{(a+b)(a+c)}-\dfrac{2}{(a+b+c)^2}$ និងដូចគ្នា $S_b;S_c$ ដូច្នេះមិនបាត់លក្ខណៈទូទៅ

យើងឧបមាថា $a\geq b\geq c$ ពេលនោះយើងឃើញថា $S_c\geq S_b\geq S_a$ ដូចនេះយើងបាន

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\geq(S_a+S_b)(b-c)^2+S_c(a-b)^2\geq 0$$

ដូចនេះគន្លឹះរបស់ត្រូវបានស្រាយរួច។ យើងឃើញថាសមភាពកើតមានពេលដែល

$a=b=c$ ឬក៏ $a=b;c=0$ និងបណ្តាចំលាស់វា។

យើងត្រឡប់មកលំហាត់របស់យើងគឺមាន

$$\frac{ab+bc+ca}{(b+c)^2}=\frac{a}{b+c}+\frac{bc}{(b+c)^2}$$

នោះវិសមភាពរបស់យើងក្លាយជា

$$\sum\frac{a}{b+c}+\sum\frac{bc}{(b+c)^2}\geq\frac{9}{4}$$

ចំពោះវិសមភាពនេះយើងអាចឲ្យ $a+b+c=1$ ពេលនោះយើងបាន

$$\sum\frac{1-(b+c)}{b+c}+\sum\frac{bc}{(1-a)^2}\geq\frac{9}{4}\Leftrightarrow\sum\frac{1}{b+c}+\sum\frac{bc}{(1-a)^2}\geq\frac{21}{4}$$

ចំពោះគ្រប់ $x\in[0;1]$ យើងមាន $\dfrac{1}{(1-x)^2}-\left(9x^2+\dfrac{3}{4}x+1\right)=\dfrac{x(5-4x)(1-3x)^2}{4(1-x)^2}\geq 0$

ពេលនោះយើងត្រូវស្រាយថា

$$\sum \frac{1}{b+c} + \sum bc\left(9a^2 + \frac{3}{4}a + 1\right) \geq \frac{21}{4} \Leftrightarrow \sum \frac{1}{b+c} + \sum bc + \frac{45}{4}abc \geq \frac{21}{4}$$

ម្យ៉ាងទៀតតាមគន្លឹះខាងលើគឺ $\sum \frac{1}{b+c} \geq \frac{13}{2} - 6(ab+bc+ca)$ នោះយើងទាញបាន

$$\frac{13}{2} - 5(ab+bc+ca) + \frac{45}{4}abc \geq \frac{21}{4} \Leftrightarrow 1 - 4(ab+bc+ca) + 9abc \geq 0$$

វាពិតតាមវិសមភាព ***Schur*** លំដាប់ 3 ចំពោះ $a+b+c=1$

<u>របៀបទី8</u>

យើងឧបមាថា $a = \max\{a;b;c\}$ ពេលនោះតាមវិសមភាព ***Cauchy Schwarz*** យើងមាន

$$\sum \frac{1}{(b+c)^2} \geq \frac{(3a+6b+6c)^2}{(3a+b+c)^2(b+c)^2 + (b+4c)^2(a+b)^2 + (4b+c)^2(a+c)^2}$$

ដូចនេះវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយបន្តទៀតនោះគឺ

$$\frac{4(a+2b+2c)^2(ab+bc+ca)}{(3a+b+c)^2(b+c)^2 + (b+4c)^2(a+b)^2 + (4b+c)^2(a+c)^2} \geq 1$$

ឥឡូវនេះយើងកំណត់ $b+c=k$ និងតាង $x=bc$ ពេលនោះវិសមភាពខាងលើរបស់យើង អាចសរសេរបានរាង: $f(a;k;x) \geq 0$ ក្នុងនោះ $f(a;k;x)$ គឺអនុគមន៍មួយដឺក្រេទី 2 នៃ x ចំពោះមេគុណខ្ពស់បំផុតរបស់ថា $-18 < 0$ ដូចនេះ $f(a;k;x)$ គឺជាអនុគមន៍ផតរបស់ x លើ $\mathbb{R}$ តែពីសម្មតិកម្មនិងការតាងរបស់ x គឺ $\max\{0; a(b+c-a)\} \leq x \leq \frac{(b+c)^2}{4}$ នោះ

$$f(a;k;x) \geq \min\left\{f(a;k;\max\{0;a(b+c-a)\}); f\left(a;k;\frac{(b+c)^2}{4}\right)\right\}$$

ដូច្នេះយើងត្រូវស្រាយថា

$$\min\left\{f(a;k;\max\{0;a(b+c-a)\}); f\left(a;k;\frac{(b+c)^2}{4}\right)\right\} \geq 0$$

យើងឃើញថាការស្រាយ $f(a;k;\max\{0;a(b+c-a)\}) \geq 0$ វាសមភាពចំពោះការពិនិត្យក្នុង ពីរចំនួន $b;c$ មានមួយស្មើនិង 0 ឬក៏ មានមួយចំនួនស្មើនិង a ។ ការស្រាយមួយទៀតគឺ $f\left(a;k;\frac{(b+c)^2}{4}\right) \geq 0$ សម្មូលនិងចំពោះការពិនិត្យ $b=c$ នោះដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ខាងលើ

យើងត្រូវពិនិត្យ 3 ករណីគឺគ្រប់គ្រាន់។

+ បើ $a \geq b > 0; c = 0$ គឺវិសមភាពក្លាយជា $\dfrac{4(a+2b)^2ab}{(3a+b)^2b^2 + b^2(a+b)^2 + 16a^2b^2} \geq 1$

+ បើ $a = b \geq c > 0$ គឺវិសមភាពក្លាយជា

$$\frac{4(3a+2c)^2(a^2+2ac)}{(4a+c)^2(a+c)^2 + 4a^2(a+4c)^2 + (4a+c)^2(a+c)^2} \geq 1$$

វាសមូលនិងវិសមភាព $2c(4a-c)(a-c)^2 \geq 0$ (ពិត)

+ បើ $a \geq b = c$ គឺវិសមភាពក្លាយជា

$$\frac{4(a+4b)^2(2ab+b^2)}{4b^2(3a+2b^2) + 50b^2(a+b)^2} \geq 1 \Leftrightarrow 2b(4a-b)(a-b)^2 \geq 0 \text{ (ពិត)}$$

ដូច្នេះវិសមភាពរបស់យើងពិត។ ការស្រាយរបស់រួច។

■ តទៅនេះជាបណ្តាលំហាត់ដែលគួឲ្យចាប់អារម្មណ៍ដែលមានការស្រាយដូចទៅនិងវិសមភាពរបស់ **Iran 96** ។ហើយក៏ជាលំហាត់ដែលអនុវត្តន៍តាមវិសមភាព **Iran 96**

■ លំហាត់ឧទាហរណ៍ទី ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a; b; c$ យើងបាន

$$\frac{1}{b^2+bc+c^2} + \frac{1}{c^2+ca+a^2} + \frac{1}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{9}{(a+b+c)^2}$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

វិសមភាពដ៏ល្អនេះជារបស់ក្រុមអ្នកនិពន្ធ **Vasile Cirtoaje** ត្រូវបានឧទ្ទេសមាននៅក្នុងសៀវភៅ[***Old and New Methods***] ត្រូវបានសរសេរដោយលោកនិងបណ្តាអ្នកនិពន្ធផ្សេងទៀតដែររីឯការស្រាយបញ្ជាក់និងត្រូវបានពរណ៌នាក្នុងសៀវភៅគឺប្រើច្បាប់បំរែបំរួលសមូលដើម្បីទាញបានលទ្ធផល។ ហើយបងប្អូនប្រហែលជាបានជួបច្រើនដងហើយមើលទៅ។ ហើយលំហាត់វាគ្រាន់តែជាការស្រាយបន្តដោយប្រើវិសមភាព **Iran 96** ជាការស្រេច។

ដូចនេះយើងអនុវត្តន៍វិសមភាព **AM-GM** យើងមាន

$$\frac{1}{b^2+bc+c^2}=\frac{ab+bc+ca}{(ab+bc+ca)(b^2+bc+c^2)}$$

$$\geq\frac{4(ab+bc+ca)}{(b^2+bc+c^2+ab+bc+ca)^2}=\frac{4(ab+bc+ca)}{(b+c)^2(a+b+c)^2}$$

ដូចនេះយើងត្រូវស្រាយថា $\sum\frac{4(ab+bc+ca)}{(b+c)^2(a+b+c)^2}\geq\frac{9}{(a+b+c)^2}$

ឬក៏មានរាងដូចខាងក្រោម

$$(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}+\frac{1}{(a+b)^2}\right]\geq\frac{9}{4}$$

នេះជាលំហាត់ដែលយើងមានគឺវិសមភាព ***Iran 96*** ។

▪ លំហាត់ឧទាហរណ៍ទី

គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន $a;b;c$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{2a^2+bc}{b^2+c^2}+\frac{2b^2+ca}{c^2+a^2}+\frac{2c^2+ab}{a^2+b^2}\geq\frac{9}{2}$$

សម្រាយបញ្ជាក់

នៅក្នុងច្រើនសៀវភៅពិគ្រោះ

របៀបដោះស្រាយលំហាត់ខាងលើនេះយើងនិងត្រូវវិភាគតាមវិធី **SOS**

ជាទៅទៅក្នុងបណ្តាកន្សោម $S_a;S_b;S_c$ វាពិបាកច្រងែងច្រង៉ាង។ ដូចនេះយើងនិងស្រាយ

តាមវិធីផ្សេងវិញ។

តាង $a^2=x;\ b^2=y\,;c^2=z$ ពេលនោះវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយក្លាយជាវិសមភាព

$$2\sum\frac{x}{y+z}+\sum\frac{\sqrt{xy}}{x+y}\geq\frac{9}{2}$$

ម្យ៉ាងទៀតយើងមានគំនិត $\frac{\sqrt{xy}}{x+y}\geq\frac{2xy}{(x+y)^2}$ ពេលនោះយើងបែរជាត្រូវស្រាយថា

$$2\sum\frac{x}{y+z}+2\sum\frac{xy}{(x+y)^2}\geq\frac{9}{2}$$

ឬក៏ $(xy+yz+zx)\left[\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right]\geq\frac{9}{4}$

លើកនេះយើងបានវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយបញ្ជាក់វាជាវិសមភាព ***Iran* 96**

ករណីស្មើកើតមានពេលដែល $a=b=c$ ឬក៏ $a=b;c=0$ និងបណ្តាចំលាស់។

■ លំហាត់ឧទាហរណ៍ទី

ឧបមាថា $a;b;c$ ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $ab+bc+ca=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{5}{2}$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

<u>របៀបទី1</u>

អនុវត្តន៍វិសមភាព ***Iran* 96** យើងមាន

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)^2&=\sum\frac{1}{(b+c)^2}+2\sum\frac{1}{(a+c)(b+c)}\\&\geq\frac{9}{4(ab+bc+ca)}+\frac{4(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\&=\frac{9}{4}+\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\end{aligned}$$

ម្យ៉ាងទៀតយើងមាន

$$\frac{4(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{4(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=4+\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 4$$

នោះជាក់ស្តែងយើងបាន $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\frac{5}{2}$

ដូចនេះលំហាត់របស់គឺត្រូវបានស្រាយរួច។

និងសមភាពកើតមានពេលដែល $a = b = 1; c = 0$ និងបណ្ដាចំលាស់។

<u>របៀបទី2</u>

ដំបូងយើងពិនិត្យមើលគន្លឹះខាងក្រោមនេះ

ចំពោះ $a; b; c \geq 0$ យើងមាន $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} \geq \dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$

នោះលំហាត់ដែលត្រូវស្រាយគឺ $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} \geq \dfrac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}}$ ឬក៏

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{5(a+b+c)}{2\sqrt{ab+bc+ca}} \quad (1)$$

ពេលនោះសមភាពកើតមានពេលដែល $a = b = 1; c = 0$ គឺនោះ $\dfrac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} = 4$

នោះអនុវត្តន៍វិសមភាព **AM-GM** យើងមាន

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} + 4 \geq \frac{4(a+b+c)}{\sqrt{ab+bc+ca}} \quad \text{ឬក៏} \quad \frac{5(a+b+c)^2}{8(ab+bc+ca)} + \frac{5}{2} \geq \frac{5(a+b+c)}{2\sqrt{ab+bc+ca}}$$

នោះយើងឃើញថាដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ (1) យើងគ្រាន់តែត្រូវស្រាយថា

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{5(a+b+c)^2}{8(a^2+b^2+c^2)} + \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{5(a^2+b^2+c^2)}{8(ab+bc+ca)} + \frac{3}{4} \quad (2)$$

– ពិនិត្យ $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \geq 2$ អនុវត្តន៍គន្លឹះខាងលើវាពិត

– ពិនិត្យ $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \leq 2$ យើងអនុវត្តន៍វិសមភាព ***Cauchy Schwarz*** យើងមាន

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} &\geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \\ &= \frac{5(a^2+b^2+c^2)}{8(ab+bc+ca)} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8}\left(2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\right) \\ &\geq \frac{5(a^2+b^2+c^2)}{8(ab+bc+ca)} + \frac{3}{4}\end{aligned}$$

<u>សំគាល់</u>

វិសមភាព(2) មានច្រើនវិធីសាស្ត្រដោះស្រាយដូចជាវិធី SOS ឬក៏ប្រើវិសមបត្តបន្ទាប់

2 គន្លឹះ ៖ ចំពោះបណ្តាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន $a;b;c$ គឺយើងបាន

$$(I): \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$(II): \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 2$$

■ លំហាត់ឧទាហរណ៍ទី

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ យើងបាន

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{9}{a+b+c+\sqrt{3(ab+bc+ca)}}$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

តាមវិសមភាព **AM-GM** យើងមាន

$$a+b+c+\sqrt{3(ab+bc+ca)}\geq 2\sqrt{(a+b+c)\sqrt{3(ab+bc+ca)}}$$

ដូច្នេះក្រោយពីអនុវត្តន៍វិសមភាព **AM-GM** យើងនិងត្រូវស្រាយថា

$$\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{(b+c)}+\frac{1}{c+a}\right)^2\geq\frac{27\sqrt{3}}{4(a+b+c)\sqrt{ab+bc+ca}}$$

ឬក៏ $$\sum\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{4(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq\frac{27\sqrt{3}}{4(a+b+c)\sqrt{ab+bc+ca}}$$

ប្រើវិសមភាព ***Iran 96***

$$\sum\frac{1}{(b+c)^2}\geq\frac{9}{4(ab+bc+ca)}\geq\frac{9\sqrt{3}}{4(a+b+c)\sqrt{ab+bc+ca}}$$

នោះយើងត្រូវស្រាយថា $\frac{4(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq\frac{18\sqrt{3}}{4(a+b+c)\sqrt{ab+bc+ca}}$ ឬក៏

$$(a+b+c)^2\sqrt{ab+bc+ca} \ge \frac{9\sqrt{3}}{8}(a+b)(b+c)(c+a) \qquad (*)$$

ប្រើលក្ខណៈងាយយើងឲ្យ $a+b+c=3$ និងតាង $q=ab+bc+ca$ $(0\le q\le 3)$

និង $r=abc$ ពេលនោះ $(*)$ ក្លាយជា $f(r)=\sqrt{q}+\frac{\sqrt{3}}{8}(r-3q)\ge 0$

យើងឃើញថាចំពោះ $\sqrt{q}\le \frac{8}{3\sqrt{3}}$ វិសមភាពនេះជាក់ស្តែងវាពិត

ពិនិត្យមើលករណី $\sqrt{3}\le q\le \frac{8}{3\sqrt{3}}$ ពេលនោះយើងប្រើវិសមភាព ***Schur*** លំដាប់ 3

$a^3+b^3+c^3+3abc\ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$ យើងទទួលបាន $r\ge \frac{4q-9}{3}$

ពីនោះយើងទាញបាន $f(r)=f\left(\frac{4q-9}{3}\right)=\frac{5\sqrt{2}}{24}(\sqrt{3}-\sqrt{q})\left(\sqrt{q}-\frac{3\sqrt{3}}{5}\right)\ge 0$

ដូចនេះលំហាត់ត្រូវបានស្រាយរួច។

<u>សំគាល់</u>

ឆ្លងកាត់លំហាត់នេះបងប្អូនមានឃើញផ្នែកណាមួយអនុវត្តន៍វិសមភាព ***Iran 96*** ទេ? ក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់បីអញ្ញាត់ឆ្លុះ។ក្នុងផ្នែកបន្តទៀតយើងខ្ញុំនិងឧទេសនាមបងប្អូនឲ្យបានឃើញបណ្តាលទ្ធផលដ៏អច្ឆារ្យមួយដែលទាញចេញពីវិសមភាព ***Iran 96*** ។

គំនិត្យគឺ វិសមភាព *Iran* 96 ត្រូវបានសរសេរមានរាងដូចតទៅនេះក្រោយពេលបំលែងគឺ

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{ab}{(a+b)^2}+\frac{bc}{(b+c)^2}+\frac{ca}{(c+a)^2}\ge\frac{9}{4}$$

មួយលក្ខណៈដែលសំខាន់ពេលដែលយើងប្តូរតម្លៃ $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ ដោយស្មើនិង

តម្លៃនៃ $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}$ គឺវិសមភាពរបស់នៅតែពិតដដែល។

■លំហាត់ឧទាហរណ៍5

[$Tran\ Quoc\ Anh$] ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ $a;b;c$ មិនអវិជ្ជមានគឺ

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}+\frac{ab}{(a+b)^2}+\frac{bc}{(b+c)^2}+\frac{ca}{(c+a)^2}\geq\frac{9}{4}$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

យើងនិងស្រាយបញ្ជាក់លំហាត់នេះដូចខាងក្រោម គឺអនុវត្តន៍វិសមភាព ***Holder*** យើងមាន

$$\left(\sum\sqrt{\frac{a}{b+c}}\right)^2\left[\sum a^2(b+c)\right]\geq(a+b+c)^3$$

$$\Leftrightarrow\sum\sqrt{\frac{a}{b+c}}\geq\sqrt{\frac{(a+b+c)^3}{\sum a^2(b+c)}}\geq\sqrt{\frac{(a+b+c)^3}{\sum a^2(b+c)+3abc}}=\frac{a+b+c}{\sqrt{ab+bc+ca}}$$

ម្យ៉ាងទៀតយើងអនុវត្តន៍បន្តទៀតនូវវិសមភាប **AM-GM** និង **Cauchy Schwarz** យើងមាន

$$\sum\frac{ab}{(a+b)^2}\geq\sum\frac{ab}{2(a^2+b^2)}=\sum\frac{(a+b)^2}{4(a^2+b^2)}-\frac{3}{4}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}-\frac{3}{4}$$

នោះដើម្បីស្រាយវិសមភាពដែលបានឲ្យយើងគ្រាន់តែត្រូវស្រាយថា

$$\frac{a+b+c}{\sqrt{ab+bc+ca}}+\frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}\geq 3$$

ម្យ៉ាងទៀតតាមវិសមភាពរបស់ **AM-GM** យើងមាន

$$\frac{a+b+c}{\sqrt{ab+bc+ca}}+\frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

$$=\frac{a+b+c}{2\sqrt{ab+bc+ca}}+\frac{a+b+c}{2\sqrt{ab+bc+ca}}+\frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{(a+b+c)^4}{8(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)}}\geq 3\sqrt[3]{\frac{(a+b+c)^4}{2\sum ab+\sum a^2}}=3$$

ដូចនេះវិសមភាពរបស់យើងត្រូវស្រាយ។

សមភាពកើតមានពេលដែល $a=b;c=0$ និងចំលាស់។

<u>សំគាល់</u>

មួយរៀបតាមតាមលក្ខណៈធម្មជាតិ។លំហាត់គឺចង់ឲ្យយើងរកចំនួនពិត k ដែលធ្វើឲ្យ

វិសមភាពនេះពិតគឺ : $\sqrt[k]{\frac{a}{b+c}}+\sqrt[k]{\frac{b}{c+a}}+\sqrt[k]{\frac{c}{a+b}}+\frac{ab}{(a+b)^2}+\frac{bc}{(b+c)^2}+\frac{ca}{(c+a)^2}\ge\frac{9}{4}$

លំហាត់នេះជាការដូរ $\sum\frac{1}{(b+c)^2}$ ដោយ $\sum\frac{1}{(b-c)^2}$ និងមួយលំហាត់យ៉ាងវិសេសប្លែក។

■លំហាត់ឧទាហរណ៍ទី

ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន $a;b;c$ យើងតែងតែបាន

$$\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}+\frac{1}{(a-b)^2}\ge\frac{4}{ab+bc+ca}\quad(*)\qquad[Tran\ Nam\ ;vn\ 2008]$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

មិនបាត់លក្ខណៈទូទៅយើងឧបមាថា $c=\min\{a;b;c\}$ យើងសំគាល់ឃើញសមភាព

$(a-b)^2+(b-c)^2=(a-b)^2+2(a-c)(b-c)$ និងប្រើវិសមភាព **AM-GM** យើងមាន

$$\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}+\frac{1}{(a-b)^2}=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{(a-c)^2+(b-c)^2}{(a-b)^2(b-c)^2}$$

$$\ge\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{(a-b)^2}{(b-c)^2(a-c)^2}+\frac{2}{(a-c)(b-c)}$$

$$\ge\frac{2}{(a-c)(b-c)}+\frac{2}{(a-c)(b-c)}=\frac{4}{(a-c)(b-c)}$$

យើងត្រូវស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{4}{(a-c)(b-c)}\ge\frac{4}{ab+bc+ca}$

សមមូលចំពោះនិង $c(2a+2b-c)\ge 0$ (ពិតដោយ $c=\min\{a;b;c\}$)

នោះវិសមភាពរបស់យើងត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់រួច។

ករណីស្មើកើតមានពេលដែល $(a;b;c)=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};1;0\right)$ ឬក៏បណ្តាចំលាស់របស់វា។

■លំហាត់ឧទាហរណ៍ទី

$[Tran\ Quoc\ Anh]$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតមិន

អវិជ្ជមាន $a;b;c$ យើងតែងបាន : $\frac{5}{(a+b)^2}+\frac{16}{(b+c)^2}+\frac{27}{(c+a)^2}\geq\frac{24}{ab+bc+ca}$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

យើងឲ្យ $ab+bc+ca=2$ យើងត្រូវស្រាយថា: $\frac{5}{(a+b)^2}+\frac{16}{(b+c)^2}+\frac{27}{(c+a)^2}\geq 12$

តាង $x=\frac{1}{a+b};y=\frac{1}{b+c};z=\frac{1}{c+a}$ នោះយើងទទួលបាន $xy+yz+zx\geq 1$

យើងត្រូវស្រាយថា: $5x^2+16y^2+27z^2\geq 12$ ដោយ $xy+yz+zx\geq 1$

នោះយើងត្រូវស្រាយបញ្ជាក់ថា: $5x^2+16y^2+27z^2\geq 12(xy+yz+zx)$

វិសមភាពនេះវានិងសមូលនិងវិសមភាពដែលពិតមានរាងដូចខាងក្រោមនេះគឺ

$$3(x-2y)^2+(2y-3z)^2+2(x-3z)^2\geq 0$$

ដូចនេះពិត។ សមភាពកើតមានពេល $(a;b;c)=(1;0;2)$

■ លំហាត់ឧទាហរណ៍ទី8

គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{(a+2b)^2}+\frac{1}{(b+2c)^2}+\frac{1}{(c+2a)^2}\geq\frac{1}{ab+bc+ca}$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

<u>របៀបទី1</u>

យើងឧបមាថា $a=\max\{a;b;c\}$ យើងមានពីរករណីដែលត្រូវកើតឡើង

<u>ករណីទី1</u>

$a\leq 3b+c$ តាង $a+2b=x+y;b+2c=y+z;c+2a=z+x$ យើងបាន

$$x=\frac{3a+b-c}{2}>0\,;y=\frac{3b+c-a}{2}>0\,;z=\frac{3c+a-b}{2}>0$$

និង $a=\frac{5x-y+2z}{9};b=\frac{5y-z+2x}{9};c=\frac{5z-x+2y}{9}$

ពេលនោះវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយបញ្ជាក់ក្លាយជាមានរាងដូចខាងក្រោមនេះ

$$\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\geq\frac{27}{x^2+y^2+z^2+11(xy+yz+zx)}$$

ឥឡូវនេះយើងប្រើវិសមភាព $Iran$ 96 និងវិសមភាពដែលយើងស្គាល់គឺ

$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$ យើងមាន

$$\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\geq\frac{9}{4(xy+yz+zx)}\geq\frac{27}{x^2+y^2+z^2+11(xy+yz+zx)}$$

<u>ករណីទី2</u>

$a>3b+c$ នោះ $c+2a<3a<3(2b+a)$ នោះ $\dfrac{1}{(c+2a)^2}>\dfrac{1}{9(a+2b)^2}$

ដូចនេះយើងគ្រាន់តែត្រូវស្រាយថា $\dfrac{10}{9(a+2b)^2}+\dfrac{1}{(b+2c)^2}\geq\dfrac{1}{ab+bc+ca}$

តាមវិសមភាព **AM-GM** យើងមាន

$$\frac{10}{9(a+2b)^2}+\frac{1}{(b+2c)^2}\geq\frac{2\sqrt{10}}{3(a+2b)(b+2c)}>\frac{21}{10(a+2b)(b+2c)}$$

ដូចនេះយើងត្រូវស្រាយថា: $\dfrac{21}{10(a+2b)(b+2c)}\geq\dfrac{1}{ab+bc+ca}$

ឬក៏ $21(ab+bc+ca)\geq 10(a+2b)(b+2c)\Leftrightarrow a(11b+c)\geq 20b^2+19bc$

យើងមាន $a(11b+c)-20b^2-19bc>(3b+c)(11b+c)-20b^2-20bc$

$$=13b^2-6bc+c^2=4b^2+(3b-c)^2>0$$

នោះវិសមភាពចុងក្រោយពិតនិងសមភាពកើតមានឡើងពេលដែល $a=b=c$

<u>របៀបទី2</u>

យើងមានពីរករណីដូចខាងក្រោមនេះ

<u>ករណីទី1</u>

ពិនិត្យ $4(ab+bc+ca)\geq a^2+b^2+c^2$

ក្នុងករណីនេះយើងប្រើវិសមភាព ***Cauchy Schwarz***

យើងមាន $\sum \frac{1}{(a+2b)^2} \geq \frac{9(\sum a)^2}{\sum (a+2b)^2(a+2c)^2}$

នោះយើងត្រូវស្រាយថា $9\left(\sum a\right)^2\left(\sum ab\right) \geq \sum (a+2b)^2(a+2c)^2$

ដោយ $\sum (a+2b)^2(a+2c)^2 = \left(\sum a\right)^4 + 18\left(\sum ab\right)^2$ នោះវិសមភាពនេះសមមូលនិង

វិសមភាព $9\left(\sum a\right)^2\left(\sum ab\right) \geq \left(\sum a\right)^4 + 18\left(\sum ab\right)^2$ ឬក៏

$$\left(\sum a^2 - \sum ab\right)\left(4\sum ab - \sum a^2\right) \geq 0$$

វិសមភាពនេះពិតដោយ $4(ab+bc+ca) \geq a^2+b^2+c^2$ និង $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

ករណីទី2

ពិនិត្យ $a^2+b^2+c^2 \geq 4(ab+bc+ca)$ ឧបមាថា $a = \max\{a;b;c\}$ ដោយ

$$a(a-2b-2c) = a^2+b^2+c^2-4(ab+bc+ca)+b(a-b)+c(a-c)+4bc \geq 0$$

នោះយើងមាន $a \geq 2(b+c)$ ឥឡូវនេះយើងប្រើវិសមភាព **AM-GM** យើងមាន

$$\frac{1}{(a+2b)^2} + \frac{1}{(b+2c)^2} \geq \frac{2}{(a+2b)(b+2c)}$$

ដូចនេះវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយគឺ $\frac{2}{(a+2b)(b+2c)} \geq \frac{1}{ab+bc+ca}$

វិសមភាពនេះវាពិតតាម $\frac{b(a-2b-2c)}{(a+2b)(b+2c)(ab+bc+ca)} \geq 0$

ជាក់ស្តែងវាពិតដោយមាន $a \geq 2(b+c)$ ដូចនេះការស្រាយបញ្ជាក់របស់យើងគឺពិត។

សង្កេត

លំហាត់ទូទៅនៅតែមិនមានដំណោះស្រាយជាក់លាក់ឲ្យវានៅឡើយ

គេឲ្យបណ្តាចំនួនវិជ្ជមាន $a;b;c$ និងចំនួនថេរ $k>0$ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{(a+kb)^2} + \frac{1}{(b+kc)^2} + \frac{1}{(c+ka)^2} \geq \frac{9}{(1+k)^2}$$

បើសិន ចំពោះ $a;b;c$ ជាជ្រុងបីនៃត្រីកោណ។ នោះយើងនិងមានលទ្ធផលដូចខាងក្រោម

លំហាត់ឧទាហរណ៍ទី ១

[*Tran Quoc Anh*] គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជាជ្រុងបីនៃត្រីកោណមួយ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}\geq\sqrt{\frac{3}{ab+bc+ca}}$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

លំហាត់នេះគឺត្រូវបានដោះស្រាយតាមវិសមភាព *Iran* 96 ដូចនេះយើងតាងដូចខាងក្រោម

$a+2b=x+y\,;b+2c=y+z\,;c+2a=z+x$ យើងមាន

$$x=\frac{3a+b-c}{2}>0\,;y=\frac{3b+c-a}{2}>0\,;z=\frac{3c+a-b}{2}>0$$

វិសមភាពដែលត្រូវស្រាយវាក្លាយជា

$$\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\geq\frac{9}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+11(xy+yz+zx)}}$$

លើកជាការេលើអង្គទាំងពីរយើងបាន

$$\sum\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{4(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}\geq\frac{81}{x^2+y^2+z^2+11(xy+yz+zx)}$$

ប្រើវិសមភាព ***Iran 96*** យើងត្រូវស្រាយថា

$$\frac{9}{4(xy+yz+zx)}+\frac{4(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}\geq\frac{81}{x^2+y^2+z^2+11(xy+yz+zx)}$$

ប្រើលក្ខណៈមួយដោយឲ្យ $a+b+c=1$ តាង $q=ab+bc+ca$ $\left(0\leq q\leq\frac{1}{3}\right)$ និង $r=abc$

វិសមភាពដែលត្រូវស្រាយបញ្ជាក់ក្លាយជា $\frac{9}{4q}+\frac{4}{q-r}\geq\frac{81}{1+9q}$

ប្រើវិសមភាពរបស់ ***Schur*** លំដាប់ 3 យើងមាន

$$x^3+y^3+z^3+3xyz\geq xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$$

យើងបាន $r\geq\frac{4q-1}{9}$ ពីនោះយើងទាញបាន $q-r\leq q-\frac{4q-1}{9}=\frac{5q+1}{9}$

ដូចនេះយើងត្រូវស្រាយ $\frac{9}{4q}+\frac{36}{5q+1}\geq\frac{81}{1+9q}$ ឬក៏ $9(3q-1)^2\geq 0$ (ពិត)

ដូចនេះវិសមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។ សមភាពកើតមានពេល $a=b=c$

តទៅនេះជាឧទាហរណ៍ក៏គួរឲ្យចាប់អារម្មណ៍ដែរ

លំហាត់ឧទាហរណ៍ទី10

$[Rachid\ Benchikha]$ ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a;b;c>0$ យើងតែងតែមាន

$$\frac{1}{(3a+2b+c)^2}+\frac{1}{(3b+2c+a)^2}+\frac{1}{(3c+2a+b)^2}\leq\frac{1}{4(ab+bc+ca)}$$

សម្រាយបញ្ជាក់

ប្រើវិសមភាព **AM-GM** យើងបាន

$$\frac{1}{(x+y)^2}\leq\frac{1}{4xy}\quad\text{យើងមាន}\quad\frac{1}{(3a+2b+c)^2}\leq\frac{1}{4(a+2b)(b+2c)}$$

ពេលនោះយើងត្រូវស្រាយថា

$$\frac{1}{(a+2b)(c+2a)}+\frac{1}{(b+2c)(a+2b)}+\frac{1}{(c+2a)(b+2c)}\leq\frac{1}{ab+bc+ca}$$

$$\text{ឬក៏}\ (a+2b)(b+2c)(c+2a)\geq 3(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

ពន្លាតនិងសម្រួលយើងទទួលបានវិសមភាពថ្មីមួយទៀតគឺ

$$ab^2+bc^2+ca^2\geq a^2b+b^2c+c^2a$$

យើងរកជុំវិញចំលាស់របស់វា។ យើងឧបមាថា b គឺចំនួននៅចន្លោះ a និង c ពេលនោះឲ្យតម្លៃ $ab^2+bc^2+ca^2\geq a^2b+b^2c+c^2a$ ពិតពេលនិងគ្រាន់ $c\geq b\geq a$ ដូចនេះបើ $c\geq b\geq a$ គឺលំហាត់របស់យើងនិងត្រូវបានស្រាយរួច។

ពិនិត្យមើលករណី $a\geq b\geq c$ ពេលនេះយើងនិងប្រើវិសមភាព **AM-GM** ដូចខាងក្រោម

$$\frac{1}{(3a+2b+c)^2}\leq\frac{1}{4(a+b+c)(2a+b)}$$

ចំពោះការប្រើការឲ្យតម្លៃយើងត្រូវស្រាយ

$$\frac{1}{a+b+c}\left(\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{2b+c}+\frac{1}{2c+a}\right)\leq\frac{1}{ab+bc+ca}$$

$$\Leftrightarrow (2a+b)(2b+c)(2c+a)(a+b+c)$$
$$\geq (ab+bc+ca)[2(a^2+b^2+c^2)+7(ab+bc+ca)]$$

ដោយ $a\geq b\geq c$ នោះ $(2a+b)(2b+c)(2c+a)\geq 3(a+b+c)(ab+bc+ca)$

យើងត្រូវស្រាយ $3(a+b+c)^2\geq 2(a^2+b^2+c^2)+7(ab+bc+ca)$

ម្តងទៀតយើងទទួលបានវិសមភាបនេះពិតតាម **AM-GM** សមភាពពេល $a=b=c$

<u>សង្កេត</u>

ពីវិសមភាពនេះយើងអាចបង្កើវិសមភាពមួយទៀតនិងមានលក្ខណះស្រួលជាងគឺ

បើ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $abc=1$ គឺយើងបាន

$$\frac{1}{(3a+2b+c)^2}+\frac{1}{(3b+2c+a)^2}+\frac{1}{(3c+2a+b)^2}\leq\frac{1}{12}$$

លំហាត់ឧទាហរណ៍ទី11

[*Tran Quoc Anh*] ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a;b;c>0$ យើងតែងតែបាន

$$\frac{9(a^2+b^2+c^2)}{4(ab+bc+ca)}\geq\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}+\frac{1}{(a+b)^2}$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

វិសមភាពខាងលើនេះគឺបានមកពីរវិសមភាពពីរខាងក្រោមនេះគឺ

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\geq\frac{4}{2}\left(\frac{ab}{(a+b)^2}+\frac{bc}{(b+c)^2}+\frac{ca}{(c+a)^2}\right)$$

និង $$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\geq\frac{2}{3}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$

ដោយវិធីប្រើវិសមភាព ***Chebychev*** ដូចខាងក្រោមនេះ

យើងឃើញថា ៖

$$a^2+b^2+c^2=(ab+ca)^2\frac{1}{(b+c)^2}+(bc+ba)^2\frac{1}{(c+a)^2}+(ca+cb)^2\frac{1}{(a+b)^2}$$

មិនបាត់លក្ខណៈទូទៅយើងឧបមថា $a\ge b\ge c\ge 0$ ពេលនោះប្រើ ***Chebychev*** យើងមាន

$$(ab+ac)^2\ge(bc+ba)^2\ge(ca+cb)^2 \text{ និង } \frac{1}{(b+c)^2}\ge\frac{1}{(c+a)^2}+\frac{1}{(a+b)^2}$$

យើងបាន $a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{3}\sum(ab+ac)^2\sum\frac{1}{(b+c)^2}\ge\frac{9}{4}(ab+bc+ca)^2\sum\frac{1}{(b+c)^2}$

ឬក៏ $\frac{9(a^2+b^2+c^2)}{4(ab+bc+ca)}\ge\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}+\frac{1}{(a+b)^2}$

លំហាត់ឧទាហរណ៍ទី12

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន $a;b;c$ គឺយើងតែងបានដូចខាងក្រោម

$$\frac{(a+b+c)^4}{4(ab+bc+ca)^3}\ge\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

យើងគុណវិសមភាពនិង $ab+bc+ca$ យើងបាន

$$\frac{(a+b+c)^4}{4(ab+bc+ca)^2}\ge\sum\frac{a}{b+c}+\sum\frac{ab}{(a+b)^2}$$

ម្យ៉ាងទៀតបើតាមវិសមភាព **AM-GM** យើងមាន

$$\frac{(a+b+c)^4}{4(ab+bc+ca)^2}+\frac{9}{4}\ge\frac{3(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}=\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{2(ab+bc+ca)}+3$$

ឬក៏ $\frac{(a+b+c)^4}{4(ab+bc+ca)^2}\ge\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{2(ab+bc+ca)}+\frac{3}{4}$ ដូចនេះយើងគ្រាន់ត្រូវស្រាយថា

$$\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{2(ab+bc+ca)}+\frac{3}{4}\ge\sum\frac{a}{b+c}+\sum\frac{ab}{(a+b)^2}$$

នេះវាងាយស្រួលព្រោះថាវាជាវិសមភាពដែលយើងបានស្គាល់ពីខាងលើនោះគឺ

$$\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{2(ab+bc+ca)}\ge\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \text{ និង } \frac{3}{4}\ge\sum\frac{ab}{(a+b)^2}$$

សមភាពកើតមានឡើងនៅពេលដែល $a=b=c>0$

លំហាត់ឧទាហរណ៍ទី13

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន $a;b;c$ គឺយើងបាន

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+2\left[\frac{ab}{(a+b)^2}+\frac{bc}{(b+c)^2}+\frac{ca}{(c+a)^2}\right]\geq\frac{5}{2}$$

សម្រាយបញ្ជាក់

ដោយវិធីវិភាគយើងអាចសរសេរលំហាត់ឲ្យមានរាងដូចខាងក្រោមនេះគឺ

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\geq 0$$

ចំពោះ $S_a=1-\dfrac{ab+bc+ca}{(b+c)^2};S_b=1-\dfrac{ab+bc+ca}{(c+a)^2};S_c=1-\dfrac{ab+bc+ca}{(a+b)^2}$

យើងឧបមាថា $a\geq b\geq c\geq 0$ ពេលនោះ $S_a;S_b$ វិជ្ជមាន។និងមួយវិញទៀតយើងនិងស្រាយ

$$S_a\geq\frac{b-a}{b+c};S_b\geq\frac{a-b}{c+a}$$

នោះយើងទាញបាន:

$$\begin{aligned}S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2&\geq S_a(b-c)^2+S_b(a-c)^2\\&\geq\frac{(b-a)(b-c)^2}{b+c}+\frac{(a-b)(a-c)^2}{a+c}\\&=\frac{(a-b)(ab+bc+ca-3c^2)}{(a+c)(b+c)}\geq 0\end{aligned}$$

សមភាពកើតមានឡើងគឺ $a=b=c>0$ឬក៏ $a=b;c=0$ និងបណ្តាចំលាស់វា។

វិសមភាពល្បីៗរបស់ Japan MO

លំហាត់គំរូ [Japan 1997]

គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2}+\frac{(c+a-b)^2}{b^2+(c+a)^2}+\frac{(a+b-c)^2}{c^2+(a+b)^2}\geq\frac{3}{5}$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

តាង $m=a+b+c\,;x=\frac{a}{m};y=\frac{b}{m};z=\frac{c}{m}$ ពេលនោះ $x+y+z=1$

ពេលនោះវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយបញ្ជាក់វាប្រែក្លាយទៅជាវិសមភាពខាងក្រោមនេះ

$$\frac{(y+z-x)^2}{x^2+(y+z)^2}+\frac{(x+z-y)^2}{y^2+(x+z)^2}+\frac{(x+y-z)^2}{z^2+(x+y)^2}\geq\frac{3}{5}$$

ឬក៏ $$\frac{(1-2x)^2}{x^2+(1-x)^2}+\frac{(1-2y)^2}{y^2+(1-y)^2}+\frac{(1-2z)^2}{z^2+(1-z)^2}\geq\frac{3}{5}$$

យើងនិងស្រាយថា $\frac{(1-2x)^2}{x^2+(1-x)^2}\geq\frac{23-54y}{25}$ ចំពោះគ្រប់ x នៅក្នុងចន្លោះ $[0;1]$

ដូចនេះវិសមភាពយើងក្រោយពេលសំរួលនិងដាក់ជាកត្តាមកគឺ $2(3x-1)^2(6x+1)\geq 0$

ដូចនេះវិសមភាពរបស់យើងគឺវាពិត។ និងពីរផ្សេងទៀតស្រាយបញ្ជាក់ដូចគ្នាដែលហើយ

យើងបូកវានោះយើងនិងបានវាពិតតាមសម្មតិកម្មរបស់យើងគឺ $x+y+z=1$

<u>សំគាល់</u>

យើងឃើញថាវិសមភាពនេះឲ្យយើងងាយនិងស្រាយវាគឺយើងឲ្យតម្លៃវាដូចជា $abc=k$ ឬក៏ $a+b+c=k;ab+bc+ca=k;\ldots$ តែដើម្បីងាយជាងគេនោះគឺ $a+b+c=k$

<u>លំហាត់ឧទាហរណ៍ទី</u> [Pham Kim Hung]

គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c=3$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+c+a}+\frac{1}{c^2+a+b}\leq 1$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

តាមសម្មតិកម្មរបស់យើងគឺ $a+b+c=3$ នោះយើងជំនួសចូលវិសមភាពយើងវាក្លាយជា

$$\frac{1}{a^2-a+3}+\frac{1}{b^2-b+3}+\frac{1}{c^2-c+3}\le 1$$

យើងនិងរកចំនួនពិត k ដែលធ្វើឲ្យ $\frac{1}{a^2-a+3}\le\frac{1}{3}+k(a-1)$

$$\text{ឬ } (a-1)\left[k+\frac{a}{3(a^2-a+3)}\right]\ge 0$$

ពេលយើងឲ្យ $a=1$ យើងនិងទទួលបាន $k=-\frac{1}{9}$ ដូចនេះយើងស្រាយវិសមភាពដែលជំនួស k ចូលនោះគឺ $\frac{1}{a^2-a+3}\ge\frac{1}{3}-\frac{1}{9}(a-1)$ ដូចនេះក្រោយពីពេលសំរួលនិងដាក់ជាកត្តាយើងបាន $\frac{(a-1)(3-a)}{9(a^2-a+3)}\ge 0$ (វិសមភាពនេះវាពិតតាម $a+b+c=3$)

ដូចនេះយើងបូកវិសមភាពទាំងអស់យើងបានវិសមភាពដែលត្រូវរក។ និងសមភាពកើតមានឡើងនៅពេលដែល $a=b=c=1$

លំហាត់ឧទាហរណ៍ទី2

គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន $a;b;c$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a(b+c)}{3a^2+(b+c-a)^2}+\frac{b(c+a)}{3b^2+(c+a-b)^2}+\frac{c(a+b)}{3c^2+(a+b-c)^2}\le\frac{3}{2}$$

លំហាត់ឧទាហរណ៍ទី3

គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c=3$ ចូរបង្ហាញថា

(i): $\frac{a^2}{a+(b+c)^2}+\frac{b^2}{b+(c+a)^2}+\frac{c^2}{c+(a+b)^2}\ge\frac{3}{5}$

(ii): $\sqrt{\frac{7b+c}{a^2+7}}+\sqrt{\frac{7c+a}{b^2+7}}+\sqrt{\frac{7a+b}{c^2+7}}\le 3$

លំហាត់ឧទាហរណ៍ទី4

គេឲ្យ $a;b;c\ge 0$ និងបំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a^2+b^2+c^2=3$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{(b+c)^2+32}+\frac{b}{(c+a)^2+32}+\frac{c}{(a+b)^2+32}\ge\frac{1}{12}$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

យើងមានគំនិត្យថាវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយគឺ $\sum \frac{\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+1}{a^3+1} \geq 3$

ប្រើវិសមភាព $t^5+1 \geq t^4+t$ ចំពោះ $t=\frac{b+c}{2}$ និងប្រើវិសមភាព **AM-GM** យើងនិងបាន

$$\left(\frac{b+c}{2}\right)^5+1 \geq \left(\frac{b+c}{2}\right)^4+\frac{b+c}{2} \geq \frac{bc(b^2+c^2)+b+c}{a^3+1}$$

ដូចនេះយើងក៏អាចបង្វៃវិសមភាពយើងមកជាការស្រាយ $\sum \frac{bc(b^2+c^2)+b+c}{a^3+1} \geq 6$

វិសមភាពផ្នែកខាងឆ្វេងគឺយើងអាចសរសេរបានជា

$$\sum \frac{bc(b^2+c^2)+b+c}{a^3+1} = \sum a\left(\frac{b^3+1}{c^3+1}+\frac{c^3+1}{b^3+1}\right) \geq 2(a+b+c)$$

ជាក់ស្តែងវាពិតតាមវិសមភាព **AM-GM** ដូចនេះវិសមភាពរបស់យើងត្រូវបានស្រាយរួច។

សមភាពកើតមានឡើងនៅពេលដែល $a=b=c=1$

<u>**លំហាត់ឧទាហរណ៍ទី**6</u> [**Pham Kim Hung**]

គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $abc=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $81(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \leq 8(a+b+c)^4$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

វិសមភាពយើងក្រោយពេលបំលែងវានោះវានិងក្លាយជាវិសមភាពមួយថ្មីគឺ

$$81\left(\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{b^2c^2}\right)\left(\sqrt[3]{b^4}+\sqrt[3]{c^2a^2}\right)\left(\sqrt[3]{c^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}\right) \leq 8(a+b+c)^4$$

បន្ទាប់មកសម្មតិកម្ម $abc=1$ លែងមានឥទ្ធិពលដល់វាទៀតហើយ។ដូចនេះយើងអាចឲ្យសម្មតិកម្មថ្មីមួយទៀតគឺ $a+b+c=3$ ពេលនោះវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយនោះគឺ

$$\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{b^2c^2}\right)\left(\sqrt[3]{b^4}+\sqrt[3]{c^2a^2}\right)\left(\sqrt[3]{c^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}\right)} \leq 2$$

ប្រើវិសមភាព **AM-GM** យើងឃើញថាតម្លៃរបស់វាគឺតែងតែមិនលើសពី

$$\frac{\sum\left(\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{b^2c^2}\right)}{3}\le\frac{\sum\left(\frac{a^2+a+a}{3}+\frac{bc+bc+1}{3}\right)}{3}=\frac{(\sum a)^2+2\sum a+3}{9}=2$$

សមភាពកើតមានឡើងនៅពេលដែល $a=b=c=1$

លំហាត់ឧទាហរណ៍ទី7

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ គឺយើងមាន

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{3}{5}}+\left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\frac{3}{5}}+\left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{3}{5}}\ge 3$$

[Micheal Rozenberg; Tran Quoc Anh]

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

យើងបង្កើតសម្មតិកម្មឲ្យវាគឺ $a+b+c=3$ ក្រោយមកយើងអនុវត្តន៍វិសមភាព **AM-GM**

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{3}{5}}=\frac{2a}{\sqrt[5]{[a(b+c)]^2.(b+c).2^2}}\ge\frac{10a}{2a(b+c)+(b+c)+2.2}$$

ដូចនេះយើងត្រូវស្រាយថា: $10\sum\frac{a}{2a(b+c)+b+c+4}\ge 3$

ឥឡូវនេះប្រើវិសមភាព ***Cauchy − Schwarz*** យើងបាន

$$\sum\frac{a}{2a(b+c)+b+c+4}\ge\frac{(\sum a)^2}{\sum a[2a(b+c)+b+c+4]}=\frac{9}{2[\sum a^2(b+c)+\sum ab+6]}$$

ដូចនេះលំហាត់មកជាការស្រាយថា: $\sum a^2(b+c)+\sum ab\le 9$

ឬក៏យើងអាចសរសេរបានមួយទៀតគឺ $\sum a^3+3abc\ge\sum ab(a+b$

វិសមភាពនេះវាពិតតាម ***Schur*** លំដាប់ 3 និងសមភាពកើតមានពេល $a=b=c$

■វិសមភាពនេះគឺទាញមកពីវិសមភាពមួយដែលមានលក្ខណៈទូទៅនោះគឺ

បើ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាននិងបើ $r \geq r_0 = \frac{\ln 3}{\ln 2} - 1 \approx 0{,}585\ldots$ នោះគឺ

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^r + \left(\frac{2b}{c+a}\right)^r + \left(\frac{2c}{a+b}\right)^r \geq 3$$

លំហាត់ឧទាហរណ៍ទី

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន $x;y;z$ គឺយើងមាន

$$\left(x^{\frac{4}{5}} + y^{\frac{4}{5}} + z^{\frac{4}{5}}\right)^5 \geq \frac{27}{8}[x^2+y^2+z^2+7(xy+yz+zx)](xy+yz+zx)$$

Tran Quoc Anh

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

តាង $a = x^{\frac{4}{5}}; b = y^{\frac{4}{5}}; c = z^{\frac{4}{5}}$ ពេលនោះវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយបញ្ជាក់ក្លាយជា

$$(a+b+c)^5 \geq \frac{27}{8}\left(\sum a^2\sqrt{a} + 7\sum ab\sqrt[4]{ab}\right)\left(\sum ab\sqrt[4]{ab}\right)$$

យើងបង្កើតសម្មតិកម្មថ្មីគឺ $a+b+c=3$ និងតាមវិសមភាពរបស់ **AM-GM** យើងមាន

$$\sum a^2\sqrt{a} \leq \sum \frac{a^2(a^2+1)}{2} = \frac{\sum a^3 + \sum a^2}{2}$$

$$\sum ab\sqrt[4]{ab} \leq \sum \frac{ab(a+b+2)}{4} = \frac{\sum ab(a+b) + 2\sum ab}{4}$$

ពេលនោះការស្រាយបញ្ជាក់របស់យើងគឺ

$$\left[2\sum a^3 + 2\sum a^2 + 7\sum ab(a+b) + 14\sum ab\right].\left[\sum ab(a+b) + 2\sum ab\right] \leq 1152$$

តាង $ab+bc+ca = q$ $(0 \leq q \leq 3)$ និង $abc = r$ គឺវិសមភាពយើងក្លាយជា

$$f(r) = (72+13q-15r)(5q-3r) - 1152 \leq 0$$

តាមវិសមភាព **Schur** លំដាប់ 3 យើងមាន

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

យើងមាន $r \geq \frac{4q-9}{3}$ ពីនោះយើងទាញបាន

$$f(r) \le (72+13q-15r)[5q-(4q-9)]-1152 = (72+13q-15r)(9+q)-1152$$
$$\le [72+13q-5(4q-9)](9+q)-1152 = (q-3)(33-7q) \le 0$$

សមភាពកើតមានឡើងពេលដែល $x=y=z$

លំហាត់គំរូ IMO 2001

[លំហាត់ *IMO* 2001]

គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \ge 1$$

សម្រាយបញ្ជាក់

របៀបទី1

ប្រើវិសមភាព ***Holder*** យើងមាន

$$\left(\sum\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\right)^2\left[\sum a(a^2+8bc)\right] \ge (a+b+c)^3$$

លំហាត់របស់យើងមកជាការស្រាយ

$$(a+b+c)^3 \ge \sum a(a^2+8bc) = a^3+b^3+c^3+24abc$$

ក្រោយពេលពន្លាតនិងសម្រួលយើងនិងទទួលបានវិសមភាពដែលមានរាងដូចតទៅនេះ

$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2 \ge 0$ វិសមភាពនេះគឺវាតែងតែពិត។

បើតាម SOS គឺវាមានរាង $S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2 \ge 0$; $a;b;c>0$

របៀបទី2

តាមវិសមភាព **AM-GM** យើងមាន

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} = \frac{2a(a+b+c)}{2(a+b+c)\sqrt{a^2+8bc}} \ge \frac{2a(a+b+c)}{(a+b+c)^2+a^2+8bc}$$

វិសមភាពពីរទៀតយើងស្រាយដូចគ្នាពេលនោះយើងនិងបាន

$$\sum\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\geq 2(a+b+c)\sum\frac{a}{(a+b+c)^2+a^2+8bc}$$

ម្យ៉ាងទៀតតាមវិសមភាព ***Cauchy Schwarz*** គឺយើងបាន

$$\sum\frac{a}{(a+b+c)^2+a^2+8bc}=\sum\frac{a^2}{a(a+b+c)^2+a^3+8bc}$$

$$\geq\frac{(a+b+c)^2}{\sum[a(a+b+c)^2+a^3+8bc]}=\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^3+a^2+b^3+c^3+24abc}$$

តាមពីរវិសមភាពខាងលើនេះយើងបាន

$$\sum\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\geq\frac{2(a+b+c)^3}{(a+b+c)^3+a^3+b^3+c^3+24abc}$$

ដើម្បីស្រាយវិសមភាពដើមនោះគឺត្រូវស្រាយ $\dfrac{2(a+b+c)^3}{(a+b+c)^3+a^3+b^3+c^3+24abc}\geq 1$

ឬក៏ $(a+b+c)^3\geq a^3+b^3+c^3+24abc$

ជាក់ស្តែងវិសមភាពនេះពិតបើតាមវិសមភាព **AM-GM** គឺយើងមាន

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)\geq a^3+b^3+c^3+24abc$$

ដូចនេះវាពិតនិងសមភាពកើតមានឡើងនៅពេលដែល $a=b=c$

<u>របៀបទី3</u>

ដំបូងយើងនិងស្រាយថា $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\geq\dfrac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$ ឬក៏ $\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)^2\geq a^{\frac{2}{3}}(a^2+8bc)$

តាមវិសមភាព **AM-GM** យើងមាន

$$\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)^2-a^{\frac{8}{3}}=\left(b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)\geq 2b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}}.4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}=8a^{\frac{2}{3}}bc$$

ដោយ $\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)^2\geq a^{\frac{8}{3}}+8a^{\frac{2}{3}}bc=a^{\frac{2}{3}}(a^2+8bc)$

ដូចនេះវិសមភាពយើងគឺពិត។ និងពីរផ្សេងទៀតស្រាយដូចគ្នានោះគឺ

$$\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}\geq\frac{b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}\quad\text{និង}\quad\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq\frac{c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$$

យើងបូកវិសមភាពនេះតាមទិសដៅដូចគ្នានោះយើងនិងបាន

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+9ab}}\geq 1$$

<u>របៀបទី4</u>

ក្នុងរបៀបនេះយើងចង់ធ្វើឲ្យវាបាត់រ៉ាឌីកាល់ដើម្បីឲ្យងាយក្នុងការស្រាយបញ្ជាក់វា

យើងតាង $x=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\,;y=\dfrac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}\,;z=\dfrac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$ គឺ $x;y;z\in(0;1)$ និងលំហាត់នេះទៅជាការស្រាយថា $x+y+z\geq 1$ វិញ។ដំបូងយើងបង្កើតប្រពន្ធ័មានរាងដូចខាងក្រោម

$$\frac{a^2}{8bc}=\frac{x^2}{1-x^2}\,;\frac{b^2}{8ca}=\frac{y^2}{1-y^2}\,;\frac{c^2}{8ab}=\frac{z^2}{1-z^2}\Leftrightarrow\frac{1}{512}=\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)\left(\frac{y^2}{1-y^2}\right)\left(\frac{z^2}{1-z^2}\right)$$

ដូច្នេះយើងត្រូវស្រាយថា: $x+y+z\geq 1$ ចំពោះ $0<x;y;z<1$ និងមួយទៀតនោះគឺ $(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)=512(xyz)^2$ បូកអ្វីដែលយើងបង្កើតនោះជាផ្នែកដែលស្រាយ

ឧបមាថាមានចំនួនពិត $x;y;z$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $0<x;y;z<1$

$(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)=512(xyz)^2$ និង $x+y+z<1$ ពី $1>x+y+z$ ទាញបាន

$$\begin{aligned}(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)&>[(x+y+z)^2-x^2][(x+y+z)^2-y^2][(x+y+z)^2-z^2]\\&=(x+x+y+z)(y+z)(x+y+y+z)(z+x)(x+y+z+z)(x+y)\\&\geq 4(x^2yz)^{\frac{1}{4}}.2(yz)^{\frac{1}{2}}.4(y^2zx)^{\frac{1}{4}}.2(zx)^{\frac{1}{2}}.4(z^2xy)^{\frac{1}{4}}.2(xy)^{\frac{1}{2}}=512(xyz)^2\end{aligned}$$

តែបើតាមការឧបមាគឺ $(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)=512(xyz)^2$ (វាផ្ទុយ)

ដូចនេះការឧបមារបស់យើងខុសគឺត្រូវមាន $x+y+z\geq 1$ ជាអ្វីដែលយើងចង់បាន។

<u>របៀបទី5</u>

ដំបូងនេះយើងមានវិសមភាព $\boldsymbol{Cauchy-Schwarz}$ ដូចខាងក្រោមនេះ

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2\leq\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}y_i^2$$

ឥឡូវនេះយើងតាង : $a' = \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}; b' = \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}; c' = \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$

$$x_1^2 = \frac{a}{a'}; x_1^2 = \frac{b}{b'}; x_3^2 = \frac{c}{c'}; y_1^2 = a.a'; y_2^2 = b.b'; y_3^2 = c.c'$$

យើងទាញបាន : $x_1y_1 = a; x_2y_2 = b; x_3y_3 = c$

ពេលនោះពីវិសមភាព ***Cauchy − Schwarz***

ពីខាងលើយើងបាន : $(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2) \ge (x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\frac{c}{c'} \ge \frac{(a+b+c)^2}{aa'+bb'+cc'} \qquad (1)$$

បន្តទៀតយើងតាង : $X_1 = \sqrt{a}; X_2 = \sqrt{b}; X_3 = \sqrt{c}; Y_1 = \sqrt{a}a'; Y_2 = \sqrt{b}b'; Y_3 = \sqrt{c}c'$

ហើយតាមវិសមភាព ***Cauchy − Schwarz*** ដែរយើងបាន

$$(X_1Y_1+X_2Y_2+X_3Y_3)^2 \le (X_1^2+X_2^2+X_3^2)(Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2)$$

$$\Leftrightarrow (aa'+bb'+cc') \le \sqrt{a+b+c}.\sqrt{aa'^2+bb'^2+cc'^2} \qquad (2)$$

តាម (1) និង (2) យើងបាន

$$\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\frac{c}{c'} \ge \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{a+b+c}..\sqrt{aa'^2+bb'^2+cc'^2}} \Leftrightarrow \frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\frac{c}{c'} \ge \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{aa'^2+bb'^2+cc'^2}} \quad (3)$$

ម្យ៉ាងទៀតយើងមាន $(a+b+c)^{\frac{3}{2}} \ge \sqrt{aa'^2+bb'^2+cc'^2}$ (4)

ដូច្នេះ (4) សមមូលនិង $(a+b+c)^3 \ge aa'^2+bb'^2+cc'^2$ ពីវិសមភាពយើងជំនួស $a'; b'; c'$

ក្រោយពេលពន្លាតនិងដាក់ជាផលគុណកត្តាយើងបាន

$$3(ab^2+ac^2+ba^2+bc^2+ca^2+cb^2) \ge 18abc$$

$$\Leftrightarrow a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2 \ge 0$$

វិសមភាពខាងលើនេះពិត។

សំគាល់

យើងអាចស្រាយបាននូវវិសមភាពទូទៅបានតាមរបៀបទី 1 និងទី 2 គឺវិសមភាពខាងក្រោម

■: ចំពោះចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a; b; c$ និងចំនួនថេរ $k \ge 8$ គឺយើងតែងតែបាន

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+kbc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+kca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+kab}}\geq\frac{3}{\sqrt{k+1}}$$

ឆ្លងកាត់ការអនុវត្តន៍តម្លៃតូចបំផុតរបស់ k ដើម្បីឲ្យវិសមភាពខាងលើពិតនោះគឺ $k=8$ ចំពោះ $k<8$ គឺវិសមភាពនេះមិនត្រូវបានពិតទៀតទេ។ ដូចនេះវាផ្ទុយសញ្ញាគឺ

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+kbc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+kca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+kab}}\leq\frac{3}{\sqrt{k+1}}$$

តើវាពិតក្នុងករណីណា? គួរឲ្យស្តាយ លក្ខណៈនេះវាមិនពិតចំពោះ $0<k<8$ យើងអាចផ្ទៀងផ្ទាត់ករណី $k=7$ គឺយើងមិនអាចប្រៀបធៀបបានទាំងពីរផ្នែកឆ្វេងនិងខាងស្តាំក្នុងវិសមភាពក្នុងរកណីនេះ។ ដូចនេះក្នុងសំនួរនេះគឺយើងនិងបានឃើញដូចខាងក្រោមនេះ។

លំហាត់ឧទាហរណ៍ទី 1[Vasile Cirtoaje]

ចូររកតម្លៃធំបំផុតរបស់ k ដើម្បីឲ្យវិសមភាពពិតចំពោះ $\forall a;b;c>0$ គឺ

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+kbc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+kca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+kab}}\leq\frac{3}{\sqrt{k+1}}$$

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងឲ្យ $a=b=1;c\to 0$ គឺយើងអាចទាញរកបាន $k\leq\frac{5}{4}$ យើងនិងស្រាយថា $k=\frac{5}{4}$ គឺជាតម្លៃដែលត្រូវរកគឺ: $\frac{a}{\sqrt{4a^2+5bc}}+\frac{b}{\sqrt{4b^2+5ca}}+\frac{c}{\sqrt{4c^2+5ab}}\leq 1$

គឺយើងត្រូវស្រាយវិសមភាពដែលជំនួសនូវតម្លៃថ្មីនេះ

ឧបមាថាមាន $a;b;c>0$ ដែលធ្វើឲ្យ $\sqrt{\frac{a^2}{4a^2+5bc}}+\sqrt{\frac{b^2}{4b^2+5ca}}+\sqrt{\frac{c^2}{4c^2+5ab}}>1$

យើងអាចតាង $x=\sqrt{\frac{a^2}{4a^2+5bc}}\,;y=\sqrt{\frac{b^2}{4b^2+5ca}}\,;z=\sqrt{\frac{c^2}{4c^2+5ab}}$

យើងឃើញថា $x;y;z<\frac{1}{2}$ និង $\frac{bc}{a^2}=\frac{1-4x^2}{5x^2}\,;\frac{ca}{b^2}=\frac{1-4y^2}{5y^2}\,;\frac{ab}{c^2}=\frac{1-4z^2}{5z^2}$ យើងទាញបាន

$$(1-4x^2)(1-4y^2)(1-4z^2)=5^3x^2y^2z^2$$

ដោយ $x;y;z<\frac{1}{2}$ និង $x+y+z>1$ នោះ

$$
\begin{aligned}
&(1-4x^2)(1-4y^2)(1-4z^2)\\
&\quad<[(x+y+z)^2-4x^2][(x+y+z)^2-4y^2][(x+y+z)^2-4z^2]\\
&\quad=(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)(3x+y+z)(x+3y+z)(x+y+3z)\\
&\quad\le(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z).\frac{5^3(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)}{9}\\
&\quad=\frac{5^3}{9}[2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)-(x^4+y^4+z^4)](x^2+y^2+z^2)
\end{aligned}
$$

តាមវិសមភាព $Schur$ លំដាប់ 3 គឺ

$$[2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)-(x^4+y^4+z^4)](x^2+y^2+z^2)\le 9x^2y^2z^2$$

តាមទំនាក់ទំនងនេះជាមួយនិងទំនាក់ទំនងខាងលើយើងអាចទាញបានគឺ

$$5^3x^2y^2z^2=(1-4x^2)(1-4y^2)(1-4z^2)=5^3x^2y^2z^2<5^3x^2y^2z^2 \text{ (មិនពិត)}$$

ល័ក្ខខ័ណ្ឌនេះមិនអាចកើតឡើងបានក្នុងករណីនេះនោះ

$$\sqrt{\frac{a^2}{4a^2+5bc}}+\sqrt{\frac{b^2}{4b^2+5ca}}+\sqrt{\frac{c^2}{4c^2+5ab}}>1$$

នោះយើងអាចនិយាយបានថាមាន $a;b;c$ វិជ្ជមានដែលធ្វើវិសមភាពខាងក្រោមនេះពិតគឺ

$$\sqrt{\frac{a^2}{4a^2+5bc}}+\sqrt{\frac{b^2}{4b^2+5ca}}+\sqrt{\frac{c^2}{4c^2+5ab}}\le 1$$

ករណីសមភាពកើតមានឡើងនៅពេលដែល $a=b=c$

■លំហាត់នេះយើងអាចបង្កើតបានមួយទៀតដែលមើលទៅគួឲ្យលើកយកមកពិចារណាគឺ

$$a\sqrt{4a^2+5bc}+b\sqrt{4b^2+5ca}+c\sqrt{4c^2+5ab}\ge(a+b+c)^2$$

Vasile Cirtoaje

លំហាត់ឧទាហរណ៍ទី2[Tran Quoc Anh]

គេឲ្យ $a;b;c \ge 0$ និងមិនមានពីរចំនួនណាស្មើនិងសូន្យ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{a+\sqrt{a^2+3bc}}+\frac{b}{b+\sqrt{b^2+3ca}}+\frac{c}{c+\sqrt{c^2+3ab}} \le 1$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

ចំពោះ $abc=0$ វិសមភាពរបស់ក្លាយជាសមភាព។ ដូចនេះយើងត្រូវពិនិត្យមើល $a;b;c>0$ គឺគ្រប់គ្រាន់

ឧបមាថា $a;b;c>0$ ដែលធ្វើឲ្យ: $\frac{a}{a+\sqrt{a^2+3bc}}+\frac{b}{b+\sqrt{b^2+3ca}}+\frac{c}{c+\sqrt{c^2+3ab}} > 1$

តាង $x=\frac{a}{a+\sqrt{a^2+3bc}}$; $y=\frac{b}{b+\sqrt{b^2+3ca}}$; $z=\frac{c}{c+\sqrt{c^2+3ab}}$

គឺយើងឃើញថា $x;y;z<\frac{1}{2}$ និង $\frac{bc}{a^2}=\frac{1-2x}{3x^2};\frac{ca}{b^2}=\frac{1-2y}{3y^2};\frac{ab}{c^2}=\frac{1-2z}{3z^2}$

ពីនោះយើងទាញបាន

$$(1-2x)(1-2y)(1-2z)=27x^2y^2z^2$$ ដោយ $x;y;z<\frac{1}{2}$ និង $x+y+z>1$

នោះ

$$\begin{aligned}(1-2x)(1-2y)(1-2z) &< [(x+y+z)-2x][(x+y+z)-2y][(x+y+z)-2z]\\ &=(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)\\ &<(x+y+z)^3(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)\\ &<3(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)\\ &=3(x^2+y^2+z^2)[2(x^2y^2+y^2z^2+z^2y^2)-(x^4+y^4+z^4)]\end{aligned}$$

តាមវិសមភាព $Schur$ លំដាប់ 3 គឺ

$$(x^2+y^2+z^2)[2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)-(x^4+y^4+z^4)] \le 9x^2y^2z^2$$

ជាមួយនិងទំនាក់ទំនងខាងលើយើងទាញបាន

$$27x^2y^2z^2=(1-2x)(1-2y)(1-2z)=27x^2y^2z^2<3.9x^2y^2z^2=27x^2y^2z^2$$

មិនពិត។ដូចនេះការឧបមារបស់យើងគឺវាខុស។សមភាពកើតមានពេល $a=b=c$ ឬក៏មានមួយក្នុងនោះស្មើនិងសូន្យ។ដូចនេះ

$$\frac{a}{a+\sqrt{a^2+3bc}}+\frac{b}{b+\sqrt{b^2+3ca}}+\frac{c}{c+\sqrt{c^2+3ab}}\le 1$$

<u>សំគាល់</u>

ពីលំហាត់នេះ យើងក៏អាចទាញបានមួយវិសមភាពដ៏ស្អាតដែលមានរាងដូចខាងក្រោមនេះ

ជារបស់ $Vasile\ Cirtoaje$ ៖ $a\sqrt{a^2+3bc}+b\sqrt{b^2+3ca}+c\sqrt{c^2+3ab}\ge 2(ab+bc+ca)$

<u>លំហាត់ឧទាហរណ៍ទី3</u>

គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាប្រវែងជ្រុងបីនៃត្រីកោណមួយ។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{\sqrt{5a^2+13bc}}+\frac{b}{\sqrt{5b^2+13ca}}+\frac{c}{\sqrt{5c^2+13ab}}\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

តាមវិសមភាព **Holder** យើងមាន

$$\left(\sum\frac{a}{\sqrt{5a^2+13bc}}\right)\left[\sum a(5a^2+13bc)\right]\ge(a+b+c)^3$$

នោះលំហាត់នេះទៅជាការស្រាយ $2(a+b+c)^3\ge\sum a(5a^2+13bc)=5\sum a^3+39abc$

ឬក៏ $2\sum ab(a+b)\ge a^3+b^3+c^3+9abc$

ដោយ $a;b;c$ គឺជាជ្រុងនៃត្រីកោណនោះយើងអាច

តាង $a=y+z;b=z+x;c=x+y$

យើងទាញបាន $x=\dfrac{b+c-a}{2};y=\dfrac{c+a-b}{2};z=\dfrac{a+b-c}{2}$

ពេលនោះក្រោយពេលជំនួសនិងពន្លាតយើងនិងឃើញថា វាក្លាយទៅជា

$$x^3+y^3+z^3+3xyz\ge xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$$

វិសមភាពនេះវាពិតតាមវិសមភាព **Schur** លំដាប់3 ។

លំហាត់គំរូ Russia IMO 2002 និងការបង្កើតវិសមភាពថ្មីៗ

លំហាត់គំរូ [**Russia 2002**]

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់បណ្តាលចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a; b; c$ ដែល $a+b+c=3$

យើងតែងតែបាន ៖ $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geq ab+bc+ca$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

<u>របៀបទី1</u>

យើងអនុវត្តន៍បច្ចេកទេសថែមថយៗវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយក្លាយទៅជា

$$a^2+b^2+c^2+2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right) \geq (a+b+c)^2=9$$

ម្យ៉ាងទៀតអនុវត្តន៍តាមវិសមភាព **AM-GM** លំដាប់ 3 យើងមាន

$$a^2+\sqrt{a}+\sqrt{a} \geq 3a; b^2+\sqrt{b}+\sqrt{b} \geq 3b; c^2+\sqrt{c}+\sqrt{c} \geq 3c$$

បូកវាមកយើងនិងបានវាពិតៗសមភាពកើតមានឡើងពេលដែល $a=b=c=1$

<u>របៀបទី2</u>

យើងក៏និងត្រូវអនុវត្តន៍តាមវិសមភាព **Holder** យើងមាន

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^3=27$$

យើងគ្រាន់តែត្រូវស្រាយថា ៖ $(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)^2 \leq 27$

វិសមភាពនេះវាពិតតាមវិសមភាព **AM-GM** ដោយយើងមាន

$$(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)^2 \leq \left[\frac{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}{3}\right]^3$$
$$=\left[\frac{(a+b+c)^2}{3}\right]^3=27$$

*តាមលំហាត់គំរូនេះយើងអាចបង្កើតបានវិសមភាពយ៉ាងច្រើន(ប៉ុន្តែសម្មតិកម្មផ្សេងគ្នា)

លំហាត់ឧទាហរណ៍ទី1[**Tran Quoc Anh**]

គេឲ្យបណ្តាលចំនួនវិជ្ជមាន $x;y;z$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ : $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $(xy+yz+zx)\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)^2\geq 27$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

ដំបូងពេលដែលយើងឃើញវាភ្លាមលំហាត់នេះ យើងមានអារម្មណ៍ថាដូចជាមិនបាច់ប្រើឲ្យវាមានទំនាក់ទំនង់អ្វីនិងលំហាត់គំរូ **Russia 2002** ។ ប៉ុន្តែយើងសំគាល់យើងនិងប្រើវាឲ្យមានទំនង់និងវិសមភាពនោះ។

យើងតាង $x=\sqrt{\frac{bc}{a}};y=\sqrt{\frac{ca}{b}};z=\sqrt{\frac{ab}{c}}$ ពេលនោះយើងឃើញថា $a=yz;b=zx;c=xy$

ម្យ៉ាងទៀតពីសម្មតិកម្មយើងគឺ

$$\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}=\sqrt{\frac{a}{bc}}+\sqrt{\frac{b}{ca}}+\sqrt{\frac{c}{ab}}\Leftrightarrow a+b+c=ab+bc+ca$$

ដូចនេះយើងត្រូវស្រាយថា : $(a+b+c)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2\geq 27$ វាសម្មូលនិង

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{a+b+c}} \text{ ឬក៏ } \sum\sqrt{\frac{a}{a+b+c}}\geq\frac{3\sqrt{3}}{a+b+c}=\frac{3\sqrt{3}(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}\ (*)$$

ដល់នេះយើងនិងស្រាយ $(*)$ ពិតចំពោះ $a;b;c$ វិជ្ជមាន។ ដោយ $(*)$ គឺជាវិសមភាពមួយដែលយើងអាចឲ្យយើងឧបមាថា : $a+b+c=3$ ពេលនោះ $(*)$ ក្លាយជា

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq ab+bc+ca$$

នេះពិតជាវិសមភាពដែលពិតតាមវិសមភាពគំរូ។

***

ឆ្លងកាត់តាមលំហាត់ឧទាហរណ៍ពីរនេះយើងអាចបង្កើតបានលំហាត់ទូទៅដូចខាង

ចូររកតម្លៃ k តូចបំផុតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ : $a^k+b^k+c^k\geq ab+bc+ca$

ចំពោះគ្រប់តម្លៃ $a;b;c$ វិជ្ជមានដែលផ្ទៀតផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c=3$

–យើងប្រើវិធីសាស្ត្រផ្គុំអញ្ញាត។យើងអាចរកបានចំនួនថេរ $k=\dfrac{\ln 9-\ln 8}{\ln 3-\ln 2}\approx 0{,}2905$

លំហាត់ឧទាហរណ៍ទី2

គេឲ្យបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c=3$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖ $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\ge ab+bc+ca$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

<u>របៀបទី**1**</u>

តាមវិសមភាព **Holder** យើងមាន

$$\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)^3(a+b+c)^5\ge\left(a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{4}}+c^{\frac{3}{4}}\right)^8$$

យើងត្រូវស្រាយបញ្ជាក់ថា៖ $\left(a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{4}}+c^{\frac{3}{4}}\right)^8\ge 3^5(ab+bc+ca)^3$

ឬក៏រាងជា $(x^3+y^3+z^3)^8\ge 3^5(x^4y^4+y^4z^4+z^4x^4)^3$ ចំពោះ $x=\sqrt[4]{a};y=\sqrt[4]{b};z=\sqrt[4]{c}$

នេះជាវិសមភាពទូទៅមួយដែលយើងចោលសម្មតិកម្មចាស់របស់វា។ហើយយើងក៏អាចបង្កើតសម្មតិកម្មថ្មីទៀតគឺឲ្យ $x^3+y^3+z^3=3$ ពេលនោះវិសមភាពដែលយើងត្រូវស្រាយបន្តនោះគឺមានរាងមួយទៀតគឺ $x^4y^4+y^4z^4+z^4x^4\le 3$ $(*)$

តាមវិសមភាព **AM-GM** យើងមាន

$$x^3+y^3+1\ge 3xy\Rightarrow x^3y^3(x^3+y^3+1)\ge 3x^4y^4$$

ពេលនោះដើម្បីស្រាយ $(*)$ យើងត្រូវស្រាយ $\sum x^3y^3(x^3+y^3+1)\le 9$

ចំពោះ $x^3+y^3+z^3=1$ ឬក៏អាចសរសេរបានម្យ៉ាងទៀតគឺ

យើងឲ្យ $a;b;c$ វិជ្ជមានដែល $a+b+c=3$ ។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$ab(a+b+1)+bc(b+c+1)+ca(c+a+1)\le 9$$

វិសមភាពនេះវាពិតតាមវិសមភាព **Schur** លំដាប់ 3

របៀបទី2

តាមវិសមភាព **AM-GM** យើងមាន

$$\sqrt[3]{a}=\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}\geq\frac{3a}{2a+1};\sqrt[3]{b}\geq\frac{3b}{2b+1};\sqrt[3]{c}\geq\frac{3c}{2c+1}$$

ដូច្នេះយើងត្រូវស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $3\left(\frac{a}{2a+1}+\frac{b}{2b+1}+\frac{c}{2c+1}\right)\geq ab+bc+ca$

យើងតាង $q=ab+bc+ca\ (0<q\leq 3)$ និង $r=abc$

ក្រោយពេលជំនួសនិងពន្លាតវាទៅយើងបាន

$$f(r)=4q^2-5q-9+r(8q-36)\leq 0$$

យើងឃើញថាវិសមភាពនេះពិតចំពោះ $q\leq\frac{9}{4}$

យើងនិងត្រូវពិនិត្យមើលករណី $\frac{9}{4}\leq q\leq 3$ តាមវិសមភាព **Schur** លំដាប់3 យើងមាន

$$a^3+b^3+c^3+3abc\geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

យើងទាញបាន $r\geq\frac{4q-9}{3}$ នោះយើងសំគាល់ឃើញថា $8q-36<0$ យើងទាញបាន

$$f(r)\leq 4q^2-5q-9+\frac{4q-9}{3}(8q-36)=\frac{11}{3}(4q-9)(q-3)\leq 0$$

ដូច្នេះវិសមភាពត្រូវបានស្រាយរួចៗចំពោះសមភាពកើតមានពេលដែល $a=b=c=1$

លំហាត់ឧទាហរណ៍ទី3

[Tran Quoc Anh] គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែលផ្ទៀតផ្ទាត់ $ab+bc+ca=3$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $\sqrt[3]{5a^3+3a}+\sqrt[3]{5b^3+3b}+\sqrt[3]{5c^3+3c}\geq 6$

សម្រាយបញ្ជាក់

តាមវិសមភាព **Holder** យើងមាន

$$\sqrt[3]{5a^3+3a}=\sqrt[3]{5.(a)^3+3.\left(\sqrt[3]{a}\right)^3}\geq\frac{5a+3\sqrt[3]{a}}{4}$$

ស្រាយដូចគ្នាដែរយើងបាន $\sqrt[3]{5b^3+3b} \geq \frac{5b+3\sqrt[3]{b}}{4}; \sqrt[3]{5c^3+3c} \geq \frac{5c+3\sqrt[3]{c}}{4}$

ដូច្នេះវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយនោះគឺ $5(a+b+c)+3(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}) \geq 24$

យើងអនុវត្តន៍វិសមភាព **AM-GM** 8 តួយើងមាន

$$(a+b+c)^5\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)^3 \geq 3^8 = 3^5(ab+bc+ca)^3 \qquad (1)$$

តាម (1) គឺជាវិសមភាពទូទៅ។យើងអាចឲ្យ $a+b+c=3$

ដូច្នេះយើងត្រូវស្រាយថា ៖ $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c} \geq ab+bc+ca$

ខាងលើនេះវាជាវិសមភាពគំរូ។ សមភាពកើតមានពេលដែល $a=b=c=1$

សំគាល់

តាមវិសមភាព (1) យើងអាចបង្កើតវិសមភាពបានដែលមានលក្ខណះដូចខាងក្រោមនេះ

គេឲ្យបណ្តាចំនួនវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែល $ab+bc+ca=3$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$a+b+c+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geq 6$$

លំហាត់ឧទាហរណ៍ទី4 [Tran Quoc Anh]

គេឲ្យបណ្តាចំនួនវិជ្ជមាន $a;b;c$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt{\frac{a}{3a+b}}+\sqrt{\frac{b}{3b+c}}+\sqrt{\frac{c}{3c+a}} \geq \frac{3}{4}\frac{7(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}$$

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងឲ្យ $a+b+c=3$ យើងអនុវត្តន៍តាមវិសមភាព **AM-GM** យើងមាន

$$\sqrt{\frac{a}{3a+b}}+\sqrt{\frac{a}{3a+b}}+\frac{3a+b}{8} \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{a}$$

តាមវិសមភាពនេះនិងវិសមភាពឧទាហរណ៍ទី 2 យើងបាន

$$2\sum\sqrt{\frac{a}{3a+b}} \geq \sum\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{a}-\frac{3a+b}{8}\right) = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})-\frac{3}{2}$$

$$\geq \frac{3}{2}(ab+bc+ca)-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\frac{7(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}$$

សមភាពកើតមានពេលដែល $a=b=c$

លំហាត់ឧទាហរណ៍ទី5 [Tran Quoc Anh]

គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិត $x;y;z\geq 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $x+y+z=3$ ។ចូរស្រាយបញ្ជាក់

$$\sqrt[3]{x^2+xy+yz}+\sqrt[3]{y^2+yz+zx}+\sqrt[3]{z^2+zx+xy}\geq \sqrt[3]{3}(xy+yz+zx)$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

<u>របៀបទី1</u>

នេះក៏គឺជាការបង្កើតរបស់លំហាត់ ។វិសមភាពដែលត្រូវស្រាយវាសម្មូលនិងវិសមភាព

$$\sqrt[3]{\frac{x^2+xy+yz}{3}}+\sqrt[3]{\frac{y^2+yz+zx}{3}}+\sqrt[3]{\frac{z^2+zx+xy}{3}}\geq xy+yz+zx \qquad (1)$$

ដល់នេះយើងតាងដើម្បីឲ្យងាយស្រួលគឺ

$$T=\sqrt[3]{\frac{x^2+xy+yz}{3}}+\sqrt[3]{\frac{y^2+yz+zx}{3}}+\sqrt[3]{\frac{z^2+zx+xy}{3}}$$

$$a=\frac{x^2+xy+yz}{3};b=\frac{y^2+yz+zx}{3};c=\frac{z^2+zx+xy}{3}$$

$$a+b+c=\frac{(x+y+z)^2}{3}=3$$

នោះយើងនិងអនុវត្តន៍វិសមភាពឧទាហរណ៍ទី 2 : $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\geq ab+bc+ca$

យើងមាន

$$T\geq \sum\frac{(x^2+xy+yz)(y^2+yz+zx)}{9}=\frac{2(xy+yz+zx)^2+2\sum xy^3+\sum x^3y}{9}$$

ដូច្នេះយើងត្រូវស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{2(xy+yz+zx)^2+2\sum xy^3+\sum x^3y}{9}\ge xy+yz+zx$$
$$=\frac{(xy+yz+zx)(x+y+z)^2}{9}$$

ឬក៏ក្លាយជា $xy^3+yz^3+zx^3\ge xyz(x+y+z)\Leftrightarrow \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\ge x+y+z$

វិសមភាពខាងលើនេះវាពិតតាមវិសមភាព **Cauchy-Schwarz** យើងទាញបានពិត។

របៀបទី2 ក្រោយនេះយើងក៏និងមានរបៀបមួយដ៏ស្អាត់ផងដែរ។ ចូរមើលទាំងអស់គ្នា!!!

តាមវិសមភាព **AM-GM** យើងមាន

$$T\ge 3\sqrt[9]{\frac{(x^2+xy+yz)(y^2+yz+zx)(z^2+zx+xy)}{27}}$$

យើងត្រូវស្រាយថា ៖ $(x^2+xy+yz)(y^2+yz+zx)(z^2+zx+xy)\ge\frac{(xy+yz+zx)^9}{3^6}$

ជាក់ស្តែងដោយ $xy+yz+zx\le 3$ នោះយើងនិងត្រូវស្រាយវិសមភាពមួយងាយជាងគឺ

$$(x^2+xy+yz)(y^2+yz+zx)(z^2+zx+xy)\ge(xy+yz+zx)^3$$

ក្រោយពេលពន្លាតនិងសំរួលយើងនិងឃើញថាវិសមភាពយើងក្លាយជា

$$\sum a^2b^4-3a^2b^2c^2+abc(a^3+b^3+c^3-ab^2-bc^2-ca^2)\ge 0$$

វិសមភាពយើងក៏និងពិតតាមវិសមភាព **AM-GM** នោះវិសមភាពទាំងអស់ត្រូវបានស្រាយ។

លំហាត់គំរូទី 6 [Tran Quoc Anh]

គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិត $x;y;z\ge 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $x+y+z=3$ ។ចូរស្រាយបញ្ជាក់

$$\sqrt[3]{x^2+2yz}+\sqrt[3]{y^2+2zx}+\sqrt[3]{z^2+2xy}\ge\frac{1}{\sqrt[6]{3}}(xy+yz+zx)\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

សម្រាយបញ្ជាក់

លំហាត់មានរាងលំបាក់ដូចជាលំហាត់ឧទាហរណ៍ទី 5 ដែរ។នេះវាជាវិសមភាពដ៏លំបាក់។

ដូច្នេះបើយើងប្រើវិសមភាព **AM-GM** បន្តគ្នាដូចរបៀបទី2 នោះវិសមភាពយើងនិងក្លាយជា

$$(x^2+2yz)(y^2+2zx)(z^2+2xy) \ge (x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)^2$$

តែគួរឲ្យសោកស្តាយដោយសារវិសមភាពផ្ទុយ។ គឺថាយើងមាន

$$(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)^2 \ge (x^2+2yz)(y^2+2zx)(z^2+2xy)$$

ជាក់ស្តែង ពេលធ្វើតាមរៀបទីពីរ ងាយជាងពីគំនិត្យនេះតែមិនអាចឲ្យយើងរកលទ្ធផលបាន។

ឥឡូវនេះយើងនិងដើរតាមទិសដៅដំបូងវិញ។

វិសមភាពត្រូវស្រាយយើងអាចសរសេរបានជា

$$\sum \sqrt[3]{\frac{x^2+2yz}{3}} \ge \frac{1}{\sqrt{3}}(xy+yz+zx)\sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (1)$$

យើងមាន $\frac{x^2+2yz}{3}+\frac{y^2+2zx}{3}+\frac{z^2+2xy}{3}=\frac{(x+y+z)^2}{3}=3$

ដល់នេះយើងក៏អាចប្រើវិបាករបស់លំហាត់ឧទាហរណ៍ដើម្បីទទួលបាន

$$\sum \sqrt[3]{\frac{x^2+2yz}{3}} \ge \frac{1}{9}\sum (x^2+2yz)(y^2+2zx)$$

$$=\frac{1}{18}(xy+yz+zx)[3(x^2+y^2+z^2)+(x+y+z)^2]$$

ម្យ៉ាងទៀតតាមវិសមភាព **AM-GM** យើងមាន

$$3(x^2+y^2+z^2)+(x+y+z)^2 \ge 2\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)^2} = 6\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}$$

ដូច្នេះនាំឲ្យ (1) ពិត។សមភាពកើតមានពេលដែល $a=b=c=1$

វិសមភាពដែលគួរឲ្យចាប់អារម្មណ៍

លំហាត់ទី1

គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបីចំនួនពិតណាក៏ដោយ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $abc=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{b^2+b+1}+\frac{1}{c^2+c+1}\geq 1$ (*)

ឬក៏មានវិសមភាពមួយដែលមានរាងសមូលនិងវានោះគឺ

លំហាត់ទី 2 ៖ គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបីចំនួនណាក៏ដោយដែលមាន $abc=1$ ចូរស្រាយថា

$$\frac{a+1}{a^2+a+1}+\frac{b+1}{b^2+b+1}+\frac{c+1}{c^2+c+1}\leq 2 \qquad (**)$$

--- លំហាត់នេះត្រូវបានបណ្ដាក្រុមអ្នកនិពន្ធរួមមាន Vasile Cirtoaje បង្កើតជាយូរណាស់មកហើយ ពីពេលដែលបណ្ដាអ្នកនិពន្ធចាប់ផ្ដើមដោះស្រាយលំហាត់វិសមភាព។ វាត្រូវបានបណ្ដាអ្នកនិពន្ធដោះស្រាយវាពេលនោះតែមួយរបៀបដើម្បីដោះស្រាយវា។ នៅពេលដំបូងនោះវាក៏មិនមានអ្វីច្រើនដែលត្រូវយកទៅអនុវត្តន៍ផ្សេងនោះដែរ ហើយអ្នកនិពន្ធក៏មិនចាប់អារម្មណ៍ច្រើនអ្វីទៅលើវានោះដែរ។ ក្រោយពីលំហាត់នេះត្រូវបានបង្កើតឡើងរយះពេលប្រហែលជាក្រោយ 3 ឆ្នាំ អ្នកនិពន្ធទើបឃើញថាវិសមភាពនេះគឺអាចយកទៅអនុវត្តន៍បានយ៉ាងច្រើន។ ជាពិសេសគឺជាមួយនិបបណ្ដាលំហាត់មានបីអញ្ញាតិមានល័ក្ខខ័ណ្ឌទាក់ទង់និងផលគុណរបស់ចំនួននោះ ។ យើងអាចបង្កើតបានលំហាត់យ៉ាងច្រើនសម្រាប់ប្រឡងថ្នាក់ជាតិនិងអន្តរជាតិតាមគំរូលំហាត់នេះ គឺអាចដោះស្រាយតាមរបៀបវិសមភាពគំរូខាងលើនេះ។ យើងនិងធ្វើការស្រាយបញ្ជាក់ថាតើហេតុបានជាយើងអាចនិយាយបានដូច្នេះ

ដំបូងយើងនិងស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាពទី1។

យើងតាង $x^3=\frac{1}{a};y^3=\frac{1}{b};z^3=\frac{1}{c}$ នោះ $xyz=1\Rightarrow a=\frac{yz}{x^2};b=\frac{zx}{y^2};c=\frac{xy}{z^2}$

យើងជំនួសចូលនិងវិសមភាព (*) យើងអាចសរសេរបាន

$$\frac{x^4}{x^4+x^2yz+y^2z^2}+\frac{y^4}{y^4+y^2zx+z^2x^2}+\frac{z^4}{z^4+z^2xy+x^2y^2}\geq 1$$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$\sum \frac{x^4}{x^4+x^2yz+y^2z^2} \geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{\sum(x^4+x^2yz+y^2z^2)}$$

ដូច្នេះយើងត្រូវស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(x^2+y^2+z^2)^2 \geq (x^4+y^4+z^4)+(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+(x^2yz+y^2zx+z^2xy)$$

វិសមភាពនេះក្រោយពីសំរួលនៅសល់តែ $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \geq xyz(x+y+z)$

វិសមភាពនេះជាវិសមភាពដែលយើងបានស្គាល់វា ព្រោះវាពិតជានិច្ច។

ឥឡូវនេះក្នុងវិសមភាព $(*)$ យើងជំនួស $a;b;c$ ដោយ $\frac{1}{a};\frac{1}{b};\frac{1}{c}$ នោះយើងបាន

$$\frac{a^2}{a^2+a+1}+\frac{b^2}{b^2+b+1}+\frac{c^2}{c^2+c+1} \geq 1$$

ដល់នេះយើងបាន $\frac{a^2}{a^2+a+1} = 1-\frac{a+1}{a^2+a+1}$ នោះយើងបាន

$$\frac{a+1}{a^2+a+1}+\frac{b+1}{b^2+b+1}+\frac{c+1}{c^2+c+1} \leq 2$$

នេះគឺជាវិសមភាព (**) ដែលត្រូវស្រាយបញ្ជាក់

<u>ខាងក្រោមនេះជាការអនុវត្តន៍តាមវិសមភាពខាងលើនេះ</u>

<u>ឧទាហរណ៍ទី1</u>

ពិនិត្យមើល3ចំនួនពិត $a;b;c$ ណាក៏ដោយដែលធ្វើឲ្យ $abc=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{a^2-a+1}+\frac{1}{b^2-b+1}+\frac{1}{c^2-c+1} \leq 3$$

លំហាត់វិសមភាព

ភាគទី I

1. [*Olympic VN* 2000] គេឲ្យកន្សោម $M = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ac + bd$

ក្នុងនោះ $ad - bc = 1$ ស្រាយថា $M \geq \sqrt{3}$

2. [*Olympic VN* 2000] គេឲ្យបណ្ដាចំនួនពិត $a, b, c > 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$a^{2000} + b^{2000} + c^{2000} = 3$ រកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោម $T = a^2 + b^2 + c^2$

3. [*Olympic VN* 2000] គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = ax^2 + bx + c$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

$|f(x)| = h, \forall x \in [-1; 1]$ ស្រាយថា $|a| + |b| + |c| \leq 3h$

4. [*IMO_SL* 1990] គេឲ្យបួនចំនួនវិជ្ជមាន a, b, c, d ផ្ទៀងផ្ទាត់ $ab + bc + cd + da = 1$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{a^3}{b+c+d} + \dfrac{b^3}{c+d+a} + \dfrac{c^3}{d+a+b} + \dfrac{d^3}{a+b+c} \geq \dfrac{1}{3}$

5. [*Olypic VN 2000*] គេឲ្យចំនួនពិត $a,b,c\in\left[\frac{1}{2};1\right]$

$$\text{ស្រាយថា } \left|\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right|\le\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

6. គេឲ្យ 2000 ចំនួនវិជ្ជមាន $a_1,a_2,\dots,a_{2000}$ និង $a_1+a_2+\cdots+a_{2000}=1$

$$\text{ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា } \left(\frac{1}{a_1^2}-1\right)\left(\frac{1}{a_2^2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{a_{2000}^2}-1\right)\ge(3.999.999)^{2000}$$

7. [*Olympic VN 30, 4 2000*] ស្រាយបញ្ជាក់ថាក្នុងត្រីកោណΔABC យើងមាន

$$\frac{a.b}{m_a.m_b}+\frac{b.c}{m_b.m_c}+\frac{a.c}{m_a.m_b}\ge 4$$

8. [*Oly vn 2000*] គេឲ្យ $x>0;y>0;z>0;a>0;b>0;c\in\mathbb{R}$

$$\text{និង}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le a;9b>ca^2$$

$$\text{រកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម } P=b(x+y+z)+c\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

9. [*Olympic Vietnam 2000*] គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ដែល $a^2+b^2+c^2=1$

$$\text{រកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម } A=\frac{a^3}{a+2b+3c}+\frac{b^3}{b+2c+3a}+\frac{c^3}{c+2a+3b}$$

10. [*Olympic VN 2000HCM*] គេឲ្យ $a_1,a_2,\dots,a_{1999},a_{2000}$ ជាចំនួនធំជាង 1 ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\text{ចំពោះគ្រប់ចំនួនវិជ្ជមាន } r \text{ យើងតែងតែបាន } \sum_{i=1}^{2000}\left[\log_{a_i}\prod_{(i\ne j;j=1)}^{2000}a_j\right]^r\ge 2000.(1999)^r$$

11. [*Olympic Vietnam 1999*] ឲ្យសមីការ $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\ne 0)$

$$\text{មានឫសបីវិជ្ជមាន } x_1,x_2,x_3 \text{ ស្រាយថា } x_1^7+x_2^7+x_3^7\ge-\frac{b^3c^2}{81a^5}$$

12. គេឲ្យ $a>0,b>0,c>0,$ និងផ្ទៀងផ្ទាត់ $a+b+c=1$ ស្រាយថា

$$\sqrt{\frac{(1-a)(1-b)}{c}}+\sqrt{\frac{(1-b)(1-c)}{a}}+\sqrt{\frac{(1-c)(1-a)}{b}}\ge 2\sqrt{3}$$

13. [*Olympic VN Pt HCM 2003 − 2004*] ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$a): \frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{z}}+\frac{z}{\sqrt{x}} \ge 3\ \forall x,y,z>0; x+y+z\ge 3$$

$$b);\ x^2y+y^2z+z^2x \le \frac{4}{27}, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0; x+y+z=1$$

14. [*APMO*, 1989] គេឲ្យ $x_1, x_2, \dots, x_n$ គឺជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន តាង $s = x_1+x_2+\dots+x_n$

ស្រាយថា $(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \le 1+s+\frac{s^2}{2!}+\frac{s^3}{3!}+\dots+\frac{s^n}{n!}$

15. [*APMO*, 1990] គេឲ្យបណ្តានំនួនពិតវិជ្ជមាន $a_1, a_2, \dots, a_n$

សន្មតថា s_k ជាផលបូករបស់បណ្តាផលគុណរបស់ k ចំនួន

ជ្រើសរើសពី $a_1, a_2, \dots, a_n$ ស្រាយថា $s_k s_{n-k} \ge (C_n^k)^2 a_1 a_2 \dots a_n$ ចំពោះ $k = 1,2,3,\dots,n-1$

16. [*APMO* 1991] គេឲ្យ $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ គឺជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k \quad \text{ចូរស្រាយថា} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k^2}{a_k+b_k}\right) \ge \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{2}\right)$$

17. [*APMO* 1996] គេឲ្យ a, b, c ជាជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។ ស្រាយថា

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{c+a-b}+\sqrt{c+a-b} \le \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

និងសមភាពកើតមាននៅពេលណា?

18. [*APMO* 1997] គេឲ្យ $S = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}+\dots+\frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\dots+\frac{1}{1993006}}$

ក្នុងនោះបណ្តាគំរូនៃចំនួនមានរាង $1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{u_{k-1}}+\frac{1}{u_k}+\dots$

ចំពោះ $u_1 = 1, u_2 = 2+u_1, u_3 = 3+u_2 = 6, \dots, u_k = k+u_{k-1}, \dots$ ស្រាយថា $S > 1001$

19. [*Olympic VN*] គេឲ្យ $a_1, a_2, \dots, a_n$ ជាបណ្តាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$a_1a_2+a_2a_3+\dots+a_na_1 = 1\ ; s = a_1+a_2+\dots+a_n$$

$$\text{បង្ហាញថា :} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{s-a_i} \geq \frac{1}{n-1}, \forall n \geq 2$$

20. [*Olympic VN*] A_1, B_1, C_1ជាចំណុចប៉ះរៀងគ្នារបស់រង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណΔABC ជាមួយជ្រុង $BC; CA; AB$; តាង $BC = a; CA = b; AB = c;\ A_1B_1 = c_1; B_1C_1 = a_1; C_1A_1 = b_1$

$$\text{បង្ហាញថា} \quad \frac{a^2}{a_1^2} + \frac{b^2}{b_1^2} + \frac{c^2}{c_1^2} \geq 12$$

21. [*IMO* 19561] បង្ហាញថា $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S \ \ \forall \Delta ABC$

22. [*IMO* 1964] គេឲ្យ a, b, c ជាប្រវែជ្រុងបីនៃត្រីកោណមួយ ចូរបង្ហាញថា

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc$$

23. [*IMO* 1969] គេឲ្យ $x_1, x_2 > 0$, $x_1y_1 > z_1^2$ និង $x_2y_2 > z_2^2$ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2} \geq \frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2) - (z_1+z_2)^2}$$

24. [*IMO* 1971]គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិត $a_1; a_2; \dots; a_n$ ចូរបង្ហាញថា:

វិសមភាពខាងក្រោមនេះវាពិតចំពោះតែ $n = 3$ និង $n = 5$

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n) + (a_2-a_1)(a_2-a_3)\dots(a_2-a_n) + \cdots$$
$$+(a_n-a_1)(a_n-a_2)\dots(a_n-a_n) \geq 0 \quad (*)$$

25. [*IMO* 1974] គេឲ្យ $a; b; c; d > 0$ រកតម្លៃទាំងអស់របស់កន្សោមខាងក្រោមនេះ

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}$$

26. [*IMO* 1975]គេឲ្យ $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ និង $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$

យើងសន្មតិថា $z_1; z_2; \dots; z_n$ គឺមួយចំលាស់ណាក៏ដោយរបស់ $y_1; y_2; \dots; y_n$ ។

$$\text{ចូរបង្ហាញថា:} \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 \quad (1)$$

27. [*IMO* 1977] គេឲ្យ $a,b,A,B\in R$ និងអនុគមន៍ $f:R\to R$ បានកំណត់ដោយ

$$f(x)=1-acosx-bsinx-Acos2x-Bsin2x$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ $f(x)\geq 0,\forall x$ គឺយើងមាន $a^2+b^2\leq 2$ និង $A^2+B^2\leq 1$

28. [*IMO* 1978] គេឲ្យ $\emptyset:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ គឺជាមួយអនុវត្តន៍។ បង្ហាញថា: $\sum_{k=1}^{n}\frac{\emptyset(k)}{k^2}\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\ ;\forall n$

29. [*USA* 1980] ស្រាយថា $\sum\left(\frac{a}{b+c+1}\right)+(1-a)(1-b)(1-c)\leq 1;\forall a,b,c\in[0;1]$

30. [*China* 1983] គេឲ្យ $f(x)=|\cos^2 x+2sinxcosx-\sin^2 x+Ax+B|$ យើងសន្មតិថា

$M=maxf(x)$ លើដែនកំណត់ $0\leq x\leq\frac{3\pi}{2}$ គឺជាអនុគន៍មួយតាមអញ្ញាត់ A និង B

ចូររក A និង B ដើម្បីឲ្យ M មានតម្លៃតូចបំផុត។

31. [*IMO* 1983] គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0$$

32. [*UK* 1983] គេឲ្យបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a,b,c,d,e,$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{cd}{c+d}+\frac{ef}{e+f}\leq\frac{(a+c+e)(b+d+f)}{a+b+c+d+e+f}$$

33. [*China* 1984] គេឲ្យ $n\geq 2$ និង $a_1;a_2;\dots;a_n>0$ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_n}+\frac{a_n^2}{a_1}\geq a_1+a_2+\cdots+a_n$$

34. [*IMO* 1984] គេឲ្យ $x,y,z\geq 0;x+y+z=1$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$0\leq xy+yz+zx-2xyz\leq\frac{7}{27}$$

35. [*Russia* 1984] ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{a+b}{4}\geq a\sqrt{b}+b\sqrt{a}\,;\forall\in a,b>0$

36. [UK 1985] គេឲ្យ $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0;2]$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j| \le n^2$

37. [*IMO Shorlist* 1986] រកតម្លៃតូចបំផុតរបស់ c ធ្វើយ៉ាងណាឲ្យ

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \cdots + \sqrt{x_n} \le c\sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n};\ \forall x_1; x_2; \dots; x_n > 0$$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_{k+1} \ge x_1 + x_2 + \cdots + x_k; \forall k = 1; 2; 3; \dots; n-1$

38. [*IMO_SL* 1990] គេឲ្យបួនចំនួនវិជ្ជមាន a, b, c, d ផ្ទៀងផ្ទាត់ $ab + bc + cd + da = 1$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{a^3}{b+c+d} + \dfrac{b^3}{c+d+a} + \dfrac{c^3}{d+a+b} + \dfrac{d^3}{a+b+c} \ge \dfrac{1}{3}$

39. [*Russia*, 1986] ស្រាយថា $|\sin 1| + |\sin 2| + \cdots + |\sin 3n| > \frac{8}{5}n\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

40. [*Russia* 1986] ស្រាយថា $\forall a_1, a_2, \dots, a_n$ យើងមាន

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1 + a_2} + \cdots + \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \le 4\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)$$

41. [*UK* 1986] គេឲ្យ $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \end{cases}$ រកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោម $x^2y + y^2x + z^2x$

42. [*IMO* 1987] គេឲ្យ $x; y; z \in \mathbb{R}$ និង $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ បង្ហាញថា: $x + y + z \le xyz + 2$

43. [*Russia* 1987] គេឲ្យ $\begin{cases} a, b, c, A, B, C \ge 0 \\ a + A = b + B = c + C = k \end{cases}$ បង្ហាញថា $aB + bC + cA \le k^2$

44. [*Ireland* 1988] បង្ហាញថា:

$$(1+x)^n \ge (1-x)^n + 2nx(1-x^2)^{\frac{n-1}{2}} : \forall x \in [0;1]; n \in \mathbb{N}^*$$

45. [*Russia* 1988] បង្ហាញថា: $2\left(\dfrac{\sin A}{A} + \dfrac{\sin B}{B} + \dfrac{\sin C}{C}\right) \le \sum \left(\dfrac{1}{B} + \dfrac{1}{C}\right)\sin A\ ; \forall \Delta ABC$

46. [*APMO* 1989] គេឲ្យ $x_1; x_2; \dots; x_n$ តាង $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ ចូរបង្ហាញថា

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) \le 1 + S + \frac{S^2}{2!} + \frac{S^3}{3!} + \cdots + \frac{S^n}{n!}$$

47. [*Iberoamerica* 1989] គេឲ្យ $0 < x < y < z < \frac{\pi}{2}$ បង្ហាញថា

$$\frac{\pi}{2}+2sinxcosy+2sinycosz>\sum sin2x$$

48. [*Iberoamerica*1989] គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ

ចូរបង្ហាញថា: $\left|\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right|\leq\frac{1}{16}$

49. [*Russia* 1989] គេឲ្យ $x,y,z\in\mathbb{R}$ និង $xyz(x+y+z)=1$ រក $Min(x+y)(y+z)$

50. [*IMO_SL* 1990] គេឲ្យ $a,b,c,d>0$; និង $ab+bc+cd+da=1$

ស្រាយថា $\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c}\geq\frac{1}{3}$

51. [*Russia* 1990] បង្ហាញថា: $x^4>x-\frac{1}{2}\ \forall x$

52, [*Russia* 1990] គេឲ្យ $x_1;x_2;\dots;x_n>0$ និង $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$

ចូរបង្ហាញថា: $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{x_i+x_{i+1}}\geq\frac{1}{2}\quad(x_{n+1}=x_1)$

53. [*UK* 1990] គេឲ្យបណ្ដាចំនួនពិត $x;y;z$ ចូរបង្ហាញថា

$$\sqrt{x^2-xy+y^2}+\sqrt{y^2-yz+z^2}\geq\sqrt{z^2+zx+x^2}$$

54. [*APMO* 1991] គេឲ្យ $a_i>0\,;b_i>0\ \ \forall i=\overline{1;n}$ និងបំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n}\geq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{2}$$

55. [*Mongolia* 1991] គេឲ្យ $a;b;c\in\mathbb{R}$ និង $a^2+b^2+c^2=2$

បង្ហាញថា: $|a^3+b^3+c^3-abc|\leq 2\sqrt{2}$

56. [*Russia* 1991] គេឲ្យ $a;b;c>0\,;a+b+c=1$ បង្ហាញថា: $\prod(1+a)$

$\geq 8\prod(1-a)$

57. [*Russia* 1991] បង្ហាញថា: $\frac{(x+y+z)^2}{3}\geq x\sqrt{yz}+y\sqrt{zx}+z\sqrt{xy}\,;\forall x;y;z\geq 0$

58. $[Russia\ 1991]$ គេឲ្យ $\sum_{i=1}^{1990} |x_i - x_{i+1}| = 1991$ តាង $s_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$

រកតម្លៃតូចបំផុតរបស់ $|s_1 - s_2| + |s_2 - s_3| + \cdots + |s_{1990} - s_{1991}|$

59. $[U\ K\ 1991]$ គេឲ្យ a, b, c ជាជ្រុងនៃត្រីកោណនិងបរិមាត្រស្មើនិង 2

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$

60. $[Vietnam\ 1991]$ ស្រាយថា $\frac{x^2\ y}{z} + \frac{y^2 z}{x} + \frac{z^2\ x}{y} \geq x^2 + y^2 + z^2, \forall x \geq y \geq z > 0$

61. $[China\ 1992]$ $\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ រកចំនួន $\lambda = \lambda(n)$ តូចបំផុតដែល

$0 \leq a_1, a_2, \dots, a_n \leq \frac{1}{2}, b_1, b_2, \dots, b_n > 0$, និង $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 1$

គឺយើងមាន $b_1 b_2 \dots b_n \leq \lambda(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)$

62. $[Hungary - Isrel\ Competition\ 1992]$

គេឲ្យ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ និងចំនួនពិតវិជ្ជមាន $c \neq 1$ ណាមួយ។ ស្រាយថា $n^2 \leq \frac{c^n + c^{-n} - 2}{c + c^{-1} - 2}$

63. $[Poland\ 1992]$ បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a; b; c$ យើងតែងតែបាន

$(b + c - a)^2(c + a - b)^2(a + b - c)^2 \geq (b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)$

64. $[Russia\ 1992]$ ឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន x, y, z ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$x^4 + y^4 + z^2 \geq 2\sqrt{2}xyz$$

65. $[Russia\ 1992]$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall x, y > 1$ $\quad \frac{x^2}{y - 1} + \frac{y^2}{x - 1} \geq 8$

66. $[Taiwan\ 1992]$ គេឲ្យចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n > 2$ និងបណ្តាចំនួនពិត $x_1; x_2; \dots; x_n > 0$

និងផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ បង្ហាញថា: $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + \cdots + x_n^2 x_1 \leq \frac{4}{27}$

67. $[Ukriane\ 1992]$ ស្រាយថា $\forall a \geq b \geq c > 0$

$$\frac{a^2 - b^2}{c} + \frac{c^2 - b^2}{a} + \frac{a^2 - c^2}{b} \geq 3a - 4b + c$$

68. $[United\ Kingdom\ 1992]$ គេឲ្យ $x; y; z; w$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

ចូរបង្ហាញថា : $\frac{12}{x + y + z + w} \leq \sum_{sym} \frac{1}{x + y} \leq \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w}\right)$

69. [*IMO _SL 1993*] គេឲ្យ a, b, c, d ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}\geq\frac{2}{3}$$

70. [*Italia 1993*] គេឲ្យ $a, b, c \in [0; 1]$ ស្រាយថា $a^2+b^2+c^2\leq a^2b+b^2c+c^2a+1$

71. [*Poland 1993*] គេឲ្យ $x; y; u; v > 0$ បង្ហាញថា: $\frac{xy+xv+yu+uv}{x+y+u+v}\geq\frac{xy}{x+y}+\frac{uv}{u+v}$

72. [*Tournament of the Towns 1993*] ឧបមាថាសមីការនេះ

$x^4+ax^3+2x^2+bx+1=0$ មានឬសតិចបំផុតមួយជាចំនួនពិត

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^2+b^2\geq 8$

73. [*Vietnam 1993*] រកតម្លៃធំបំផុតនិងតូចបំផុតរបស់អនុគមន៍

$f(x)=x\left(1993+\sqrt{1995-x^2}\right)$ លើដែនកំណត់របស់វា

74. [*Vietnam 1993*] គេឲ្យ $x_1; x_2; x_3; x_4 \in \mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$\frac{1}{2}\leq x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\leq 1$ រកតម្លៃតូចបំផុតនិងតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោមខាងក្រោម

$$A=(x_1-2x_2+x_3)^2+(x_2-2x_3+x_4)^2+(x_2-2x_1)^2+(x_3-2x_4)^2$$

75. [*Hungary – Israel Competition 1994*] គេឲ្យ $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n > 0$

$(k<n)$ ឧបមាថា $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n$ គឺជាចំនួនថេរមិនប្រែប្រួល

រកតម្លៃរបស់ $a_1, a_2, \dots, a_k$ ដើម្បីផលបូក $\sum_{i,j;i\neq j}\frac{a_i}{a_j}$ ជាចំនួនតូចបំផុត

76. [*Poland 1994*] គេឲ្យ $n\in\mathbb{N}^*$ រកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោមខាងក្រោម

$$x_1+\frac{x_2^2}{2}+\frac{x_3^3}{3}+\cdots+\frac{x_n^n}{n}$$

ដោយដឹងថា $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ និងផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=n$

77. [*USA 1994*] គេឲ្យ $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_1+a_2+\cdots+a_n\geq\sqrt{k}$

$\forall k=1,2,\dots,n.$ បង្ហាញថា $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2>\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$

78. [*Austrian Polish Competition 1995*] បង្ហាញថា:

គេឲ្យចំពោះគ្រប់ $x; y\in\mathbb{R}$ និង $m; n\in\mathbb{N}^*$ យើងតែងតែបាន

$$(m-1)(n-1)(x^{m+n}+y^{m+n})+(m+n-1)(x^m y^n+x^n y^m)\geq mn(x^{m+n-1}y+xy^{m+n-1})$$

79. $[\textit{Baltic Way } 1995]$ គេឲ្យa,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a+c}{a+b}+\frac{b+d}{b+c}+\frac{c+a}{c+d}+\frac{d+b}{d+a}\geq 4$$

80. $[\textit{Canada } 1995]$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $x;y;z$ បង្ហាញថា: $x^x y^y z^z\geq (xyz)^{\frac{x+y+z}{3}}$

81. $[\textit{Hungary}-\textit{Israel Competition } 1995]$ គេឲ្យពហុធា

$f(x)=ax^2+bx+c$ដែលបំពេញលក្ខណ៍ $|f(x)|\leq 1\ \forall x\in[0;1]$

រកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម $|a|+|b|+|c|$

82. $[\textit{IMO } 1995]$ គេឲ្យ $a;b;c>0$ និង $abc=1$ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$$

83. $[\textit{India } 1995]$ គេឲ្យ $x_1,x_2,\dots,x_n\in R$ ផ្ទៀតផ្ទាត់ទាំងពីរលក្ខណះខាងក្រោម

$$|x_i-x_{i+1}|<1, x_i\geq 1, \forall i=1,2,\dots,n(x_{n+1}=x_1)$$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_n}{x_1}<2n-1$

84. $[\textit{United Kingdom } 1995]$ គេឲ្យ $0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1$ និង $0\leq z\leq 1$

រកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោមខាងក្រោម

$$(a): x^2y-y^2x\quad (b): x^2y+y^2z+z^2x-y^2x-z^2y-x^2z$$

85. $[\textit{United Kingdom } 1995]$ គេឲ្យ $0<a<b<c$

ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c=6, ab+bc+ca=9$

ស្រាយថា $0<a<1<b<3<c<4$

86. $[\textit{Vietnam}(\textit{IMO training camp})1995]$ **គេឲ្យចំនួនគត់ធម្មជាតិ n មិនមែនជាការប្រា**

កដ។ រកចំនួនថេរ $\boldsymbol{k}$ ធំបំផុតដែលធ្វើឲ្យ ៖ $|(\mathbf{1}+\sqrt{\boldsymbol{n}})\sin(\boldsymbol{\pi}\sqrt{\boldsymbol{n}})| > k$

87 [*APMO*] គេឲ្យបណ្តាលចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\boldsymbol{m}$ និង $\boldsymbol{n}$ ដែល $\boldsymbol{n} \le \boldsymbol{m}$

$$\text{បង្ហាញថា: } \mathbf{2}^{n}\,\boldsymbol{n}! \le \frac{(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})!}{(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})!} \le (\boldsymbol{m}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{m})^{n}$$

88. [*APMO* 1996] គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាប្រវែជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b} \le \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$ និងកំណត់សមភាពវា

89. [*Austian – Polish Competition* 1996] គេឲ្យ $x,y,z,t \in \mathbb{R}$ និងផ្ទៀងផ្ទាត់ពីរល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$x+y+z+t=0; x^2+y^2+z^2+t^2=1$ បង្ហាញថា $-1 \le xy+yz+zt+tx \le 0$

90. [*Belarus* 1996] គេឲ្យ a,b,c ជាបណ្តាលចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c=\sqrt{abc}$ ស្រាយថា $ab+bc+ca \ge 9(a+b+c)$

91. [*China* 1996] គេឲ្យ $n \in \mathbb{N}, x_0=0, x_i>0, \forall i=1,2,\dots,n$ និង $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$

$$\text{ស្រាយថា ៖ } 1 < \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1+x_0+\cdots+x_{i-1}}.\sqrt{x_i+\cdots+x_n}} < \frac{\pi}{2}$$

92. [*France* 1996] $a)$: រកតម្លៃតូចបំផុតរបស់ x^x ចំពោះ x គឺជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន
$b)$: គេឲ្យ $x;y$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ បង្ហាញថា ៖ $x^y+y^x>1$

93. [*IMO_SL* 1996] ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះ $a;b;c>0$ និង $abc=1$

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca} \le 1$$

94. [*Hungary* 1996] គេឲ្យ $a,b>0$ និង $a+b=1$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{a^2}{a+1}+\dfrac{b^2}{b+1} \ge \dfrac{1}{3}$

95. [*Hungary – Israel Competition* 1996] គេឲ្យ $a_1,a_2,\dots,a_n; b_1,b_2,\dots,b_n \in \mathbb{R}$ និង $1 \ge b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n \ge 0$ ស្រាយបញ្ជាក់ថាមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន $k \le n$ ដែលធ្វើឲ្យ $|\,a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\,| \le |\,a_1+a_2+\cdots+a_k\,|$

96. [*Iran* 1996] បង្ហាញថា: $(xy+yz+zx)\left[\dfrac{1}{(y+z)^2}+\dfrac{1}{(z+x)^2}+\dfrac{1}{(x+y)^2}\right] \ge \dfrac{9}{4}$

ចំពោះគ្រប់ $\forall x;y;z>0$

97. [*Moldova* 1996] គេឲ្យ $a_1,a_2,\dots,a_{1996}\le 0$ ស្រាយថា
$$2^{a_1}+2^{a_2}+\cdots+2^{a_{1996}}\le 1995+2^{a_1+a_2+\cdots+a_{1996}}$$

98. [*Mongolia* 1996] ចំពោះ $a;b;c;d>0$ និង $a+b+c+d=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{1+\sqrt{a}}{1-a}+\dfrac{1+\sqrt{b}}{1-b}+\dfrac{1+\sqrt{c}}{1-c}+\dfrac{1+\sqrt{d}}{1-d}\ge 8$

99. [*Poland* 1996] គេឲ្យ $n\ge 2$ និង $a_1,a_2,\dots,a_n$ គឺជាបណ្តុលចំនួនវិជ្ជមាន ដែលមានផលបូកស្មើនិង 1 ស្រាយបញ្ជាក់ថា
$$2\sum_{1\le i\le j\le n}x_ix_j\le\frac{n-2}{n-1}+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ix_i^2}{1-a_i},\quad\forall\begin{cases}x_1,x_2,\dots,x_n>0\\x_1+x_2+\cdots+x_n=1\end{cases}$$
និងកំណត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌដែលធ្វើឲ្យវិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាព

100. [*Poland* 1996] គេឲ្យ $\begin{cases}a,b,c\in\mathbb{R}\\a+b+c=1\end{cases}$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{a}{a^2+1}+\dfrac{b}{b^2+1}+\dfrac{c}{c^2+1}\le\dfrac{9}{10}$

101. [*Romania* 1996] គេឲ្យ $x_1,x_2,\dots,x_n,x_{n+1}$ ដែល $x_1+x_2+\cdots+x_n=x_{n+1}$

ស្រាយថា $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i(x_{n+1}-x_i)}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_{n+1}(x_{n+1}-x_i)}$

102. [*Romania* 1996] បង្ហាញថា: ពីរលក្ខណះខាងក្រោមនេះសមូល $\forall x;y;z\in\mathbb{R}$

$I: x>0;y>0;z>0$ និង $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\le 1$

II: ចំពោះគ្រប់ចតុកោណមានជ្រុង $a;b;c;d$ គឺ $a^2x+b^2y+c^2z\ge d^2$

103. [*Romania* 1996] គេឲ្យចំនួគត់ធម្មជាតិ $n\ge 3$ និង $x_1,x_2,\dots,x_{n-1}\in\mathbb{N}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ
$$x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}=n \text{ និង } x_1+2x_2+\cdots+(n-1)x_{n-1}=2n-n$$
រកតម្លៃតូចបំផុតរបស់ $F(x_1,\dots,x_{n-1})=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k(2n-k)x_k$

104. [*Romania* 1996] គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិត $a;b;c;d\in[0;1]$ និង $x;y;z;t\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c+d=x+y+z+t=1$ ចូរបង្ហាញថា

$(a): ax+by+cz+dt \geq \min\left\{\frac{a+b}{2};\frac{a+c}{2};\frac{a+d}{2};\frac{b+c}{2};\frac{b+d}{2};\frac{c+d}{2}\right\}$

$(b): ax+by+cz+dt \geq 45abcd$

105. [***Saint Petersburg 1996***] គេឲ្យ $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{n+1} = 0$ និង $b_1; b_2; \dots; b_n \in [0;1]$

$$\text{តាង } k = \left\lfloor \sum_{i=1}^{n} b_i \right\rfloor + 1 \text{ បង្ហាញថា: } \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sum_{i=1}^{k} a_i$$

106. [***Singapore 1996***] គេឲ្យ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ជាបណ្តាចំនួនពិតដែល

$a_0 = \frac{1}{2}$ និង $a_{k+1} = a_k + \frac{1}{n}a_k^2, \forall k = 0,1,2,\dots,n-1$ បង្ហាញថា $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$

107. [***Romania 1996***] ឲ្យបណ្តាចំនួនពិត $a,b,c,d \in [0;1]$ និង $x,y,z,t \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$

ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a+b+c+d = x+y+z+t = 1$ បង្ហាញ

$a): ax+by+cz+dt \geq \min\left\{\frac{a+b}{2};\frac{a+c}{2};\frac{a+d}{2};\frac{b+c}{2};\frac{b+d}{2};\frac{c+d}{2}\right\}$

$b): ax+by+cz+dt \geq 54abcd$

108. [***Spian 1996***] $\forall a,b,c > 0$ ស្រាយថា $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geq 3(b-c)(a-b)$

ករណីស្មើពេលណា?

109. [***Taiwan 1996***] គេឲ្យ $0 < a \leq 1$. និង $a_1, a_2, \dots, a_{1996}$ ជាចំនួនពិតដែល

$a \leq a_j \leq \frac{1}{a}$ $\forall j = 1,2,\dots,1996$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\left(\sum_{i=1}^{1996} \lambda_i a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{1996} \frac{\lambda_i}{a_i}\right) \leq \frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2, \forall \begin{cases} \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{1996} \geq 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{1996} = 1 \end{cases}$$

110. [***Turkey 1996***] គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិត $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_{2n} < x_{2n+1} = 1$

ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_{i+1} - x_i \leq h. \forall 1 \leq i \leq 2n$

$$\text{ស្រាយបញ្ជាក់ថា : } \frac{1-h}{2} < \sum_{i=1}^{n} x_{2i}(x_{2i+1} - x_{2i-1}) < \frac{1+h}{2}$$

111. [***United Kingdom 1996***] គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ចូរបង្ហាញថា

(a): $4(a^3+b^3) \geq (a+b)^3$

(b): $9(a^3+b^3+c^3) \geq (a+b+c)^3$

112. [***Vietnam* 1996**] គេឲ្យ $a;b;c;d$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)+abc+bcd+cda+dab=16$$

ចូរបង្ហាញថា: $a+b+c+d\geq\frac{2}{3}(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$

113. [***Vietnam* 1996**] ចំពោះ$\forall a,b,c\in\mathbb{R}$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(a+b)^4+(b+c)^4+(c+a)^4\geq\frac{4}{7}(a^4+b^4+c^4)$$

114. [***Belarus* 1996**] គេឲ្យ $a;x;y;z$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a+y}{a+z}.x+\frac{a+z}{a+y}.y+\frac{a+x}{a+y}.z\geq x+y+z\geq\frac{a+z}{a+x}.x+\frac{a+x}{a+y}.y+\frac{a+y}{a+z}.z$$

115. [***Bulgaria* 1997**] គេឲ្យ a,b,c គឺជាបនណ្តាចំពិតវិជ្ជមាននិងមានផលគុណស្មើ 1

ស្រាយថា $\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}\leq\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}$

116. [***Canada* 1997**] ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{64}<\frac{1}{2}.\frac{3}{4}\dots.\frac{1997}{1998}<\frac{1}{44}$

117. [***China* 1997**]គេឲ្យx,y,z ជាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោម

$x\geq y\geq z\geq\frac{\pi}{12}$ និង $x+y+z=\frac{\pi}{2}$ រក $Max(cosxsinycosz)$ និង $Min(cosxsinycosz)$

118. [***Czech – Slovak* 1997**]ចំពោះ$\forall n\in\mathbb{N},n\geq 2$ រកតម្លៃធំបំផុតរបស់

$$V_n=sinx_1cosx_2+sinx_2cosx_3+\cdots+sinx_ncosx_1$$

ក្នុងនោះ $x_1,x_2,\dots,x_n$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតណាក៏ដោយ

119. [***Hong Kong* 1997**] ចំពោះ$\forall x,y,z>0$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{xyz\left(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)}\leq\frac{3+\sqrt{3}}{9}$$

120. [***Hong Kong* 1997**]គេឲ្យ $f(x)$

$=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ គឺជាពហុធាដឺក្រេទី

$n\geq 2$ ជាមួយបណ្តាឬសពិត $b_1,b_2,\dots,b_n$ ស្រាយថា

$$f(x+1)\left(\frac{1}{x-b_1}+\frac{1}{x-b_2}+\cdots+\frac{1}{x-b_n}\right)\geq 2n^2,\forall x>b_1,b_2,\dots,b_n$$

121. [***Iran* 1997**]គេឲ្យ$x_1;x_2;x_3;x_4$គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $x_1x_2x_3x_4=1$

បង្ហាញថា $x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3\geq\max\left\{x_1+x_2+x_3+x_4,\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right\}$

122. [*Ireland 1997*] គេឲ្យ $a,b,c \ge 0$ ដែល $a+b+c \ge abc$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^2+b^2+c^2 \ge abc$

123. [*Japan 1997*] គេឲ្យ $\forall a,b,c > 0$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \ge \frac{3}{5}$$

124. [*Russia 1997*] គេឲ្យ $1<a<b<c$ ចូលស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\log_a(\log_a b)+\log_b(\log_b c)+\log_c(\log_c a) > 0$$

125. [*Korea 1997*] គេឲ្យបណ្ដាលចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a_1,a_2,\dots,a_n$

តាង $A=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}, G=\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}, H=\dfrac{n}{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}$

(a): ចំពោះ n សេស ចូរស្រាយថា $\dfrac{A}{H} \le -1+2\left(\dfrac{A}{G}\right)^n$

(b): ចំពោះ n គូរ ចូរស្រាយថា $\dfrac{A}{H} \le -\dfrac{n-2}{n}+\dfrac{2(n-1)}{n}\left(\dfrac{A}{G}\right)^n$

126. [*Romania 1997*] គេឲ្យ $a,b,c>0.$ ដែល $abc=1; \forall x,y>0$

យើងតាង $S(x,y)=\dfrac{a^xb^x}{a^y+b^y+a^xb^x}+\dfrac{b^xc^x}{b^y+c^y+b^xc^x}+\dfrac{c^xa^x}{c^y+a^y+c^xa^x}$

ស្រាយថាបើ $x \le 2y$ គឺ $S(x,y) \le 1$ និងបើ $x > 2y$ គឺ $S(x,y) \ge 1$

127. [*Romania 1997*] គេឲ្យ x,y,z គឺជាបណ្ដាលចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $xyz=1$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}+\dfrac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}+\dfrac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6} \ge 2$

128. [*Romania 1997*] គេឲ្យ a,b,c ជាបណ្ដាលចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^2}{a^2+2ab}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab} \ge 1 \ge \frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ca}+\frac{ab}{c^2+2ab}$$

129. [*Saint Peterdburg 1997*] គេឲ្យ $x,y,z \ge 2$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(y^3+x)(z^3+y)(x^3+z) \ge 125xyz$$

130. [*Singapore 1997*] គេឲ្យ $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_{n+1}=0$ ចូរបង្ហាញថា

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k} \le \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\left(\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k+1}}\right)$$

131. [*Turkey 1997*] ចំពោះគ្រាប់ចំនួនគត់ $n \ge 2$ រកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម(តាម n)

$$\frac{x_1^5}{x_2+x_3+\cdots+x_n}+\frac{x_2^5}{x_3+\cdots+x_n+x_1}+\cdots+\frac{x_n^5}{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}$$

ដោយដឹងថា $x_1,\ldots,x_n$ ជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខ័ណ្ឌ

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$$

132. [***United Kingdom* 1997**] គេឲ្យx,y,zគឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន សួរថាអាចមានឬអត់?

$a)$: បើ $x+y+z\geq 3$ នោះ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leq 3$? ត្រូវឬទេ?

$b)$:បើ$x+y+z\leq 3$ នោះ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 3$? ត្រូវឬតេ?

133. [***USA* 1997**] ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ $\forall a,b,c>0$ នោះ

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\frac{1}{abc}$$

134. [***APMO* 1998**]ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $\forall a,b,c>0$

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\geq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$

135. [***Austrian − Polish Competition* 1998**]គេឲ្យ $x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $x_1^2+x_2^2\leq 1$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(x_1y_1+x_2y_2-1)^2\geq(x_1^2+x_2^2-1)(y_1^2+y_2^2-1)$$

136. [***Balkan* 1998**] គេឲ្យចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n\geq 2$ និង $0<a_1<a_2<\cdots<a_{2n+1}\in\mathbb{R}$ បង្ហាញថា:

$$\sqrt[n]{a_1}-\sqrt[n]{a_2}+\sqrt[n]{a_3}-\cdots-\sqrt[n]{a_{2n}}+\sqrt[n]{a_{2n+1}}<\sqrt[n]{a_1-a_2+a_3-\cdots-a_{2n}+a_{2n+1}}$$

137. [***Belarus* 1998**] បង្ហាញថា: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}+1\,;\forall a;b;c>0$

138. [***Canada* 1998**]គេឲ្យចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n\geq 2$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)>\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

139. [***China* 1998**] គេឲ្យចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n\geq 2$ និង $x_1;x_2;\ldots;x_n$ គឺជានួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

លក្ខខ័ណ្ឌ $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} = 1$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $k; 1 \le k \le n$

ចូររកតម្លៃធំបំផុតដែលកើតមានរបស់ $|x_k|$

140. [*Hong Kong* 1998] គេឲ្យ $a, b, c \ge o$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} \le \sqrt{c(ab+1)}$$

141. [*IMO_LS* 1998; *Vn Olympic* 2012] គេឲ្យ $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ និង $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 1$

ស្រាយថា $$\frac{a_1 a_2 \dots a_n (1 - a_1 - a_2 - \cdots - a_n)}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n)} \le \frac{1}{n^{n+1}}$$

142. [*IMO_SL* 1998] គេឲ្យ a, b, c ជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc = 1$

ស្រាយថា: $$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+a)(1+c)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \ge \frac{3}{4}$$

143. [*Iran* 1998] គេឲ្យ $x, y, z > 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 2$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\sqrt{x+y+z} \ge \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}$

144. [Iran 1998] គេឲ្យ $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ គឺជាចំនួនពិតណាក៏ដោយ។ ចូរបង្ហាញថា

$$a_1 a_2^4 + a_2 a_3^4 + \cdots + a_{n-1} a_n^4 + a_n a_1^4 \ge a_2 a_1^4 + a_3 a_2^4 + \cdots + a_n a_{n-1}^4 + a_1 a_n^4$$

145. [*Ireland* 1998] ស្រាយថា $x^8 - x^5 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} \ge 0, \forall x \ne 0$

146. [*Ireland* 1998] គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, c ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{9}{a+b+c} \le 2\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \le \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

147. [*Korea* 1998] គេឲ្យ $x; y; z > 0$ និង $x + y + z = xyz$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា : $$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \le \frac{3}{2}$$

148. [*Poland* 1998] គេឲ្យបណ្តាចំនួន $a, b, c, d, e, f > 0$ និងមានផលបូកស្មើនិង 1

និងផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខ័ណ្ឌ $ace + bdf \ge \frac{1}{108}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $abc + bcd + cde + def + efa + fab \le \frac{1}{36}$

149. [*Serbia* 1998] គេឲ្យ $a, x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ និង $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$

ស្រាយថា : $\dfrac{a^{x_1 - x_2}}{x_1 + x_2} + \dfrac{a^{x_2 - x_3}}{x_2 + x_3} + \dots + \dfrac{a^{x_n - x_1}}{x_n - x_1} \geq \dfrac{n^2}{2}$

150. [*Ukriane* 1998] គេឲ្យ $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \end{cases}$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\dfrac{1 + ab}{1 + a} + \dfrac{1 + bc}{1 + b} + \dfrac{1 + ca}{1 + a} \geq 3$

151. [*Ukriane* 1998] គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិត $x, y, z \in (0; 1]$ ស្រាយថា

$$\frac{x}{1 + y + zx} + \frac{y}{1 + z + xy} + \frac{z}{1 + x + yz} \leq \frac{3}{x + y + z}$$

152. [*Vietnam* 1998] គេឲ្យ x, y ជាពីរចំនួនពិតណាក៏ដោយ។ចូររក $minF(x; y)$

$$F(x; y) = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2} + \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} + \sqrt{(x + 2)^2 + (y + 2)^2}$$

153. [*Vietnam* 1998] គេឲ្យ $n \geq 2$ និង $x_1, x_2, \dots, x_n$ ជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល

$\dfrac{1}{x_1 + 1998} + \dfrac{1}{x_2 + 1998} + \dots + \dfrac{1}{x_n + 1998} = \dfrac{1}{1998}$ ស្រាយថា: $\dfrac{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}{n - 1} \geq 1998$

154. [*APMO* 1999] គេឲ្យ $\{a_n\}$ គឺជាស្វ៊ីតមិនកំណត់ចំនួនពិតដែលធ្វើឲ្យ $a_{i+j} \leq a_i + a_j\ \forall i; j$

ចូរបង្ហាញថា: $a_1 + \dfrac{a_2}{2} + \dfrac{a_3}{3} + \dots + \dfrac{a_n}{n} \geq a_n$

155. [*Belarus* 1999] គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$kabc > a^3 + b^3 + c^3$$

ចូររកចំនួនពិត k ធំបំផុតដែលធ្វើឲ្យ $a; b; c$ គឺជាប្រវែងជ្រុងបីនៃត្រីកោណមួយ។

156. [*Belarus* 1999] $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 3 \end{cases}$ ស្រាយថា: $\dfrac{1}{1 + ab} + \dfrac{1}{1 + bc} + \dfrac{1}{1 + ca} \geq \dfrac{3}{2}$

157. [*Canada* 1999] គេឲ្យ $x; y; z \geq 0$ និងបំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌ $x + y + z = 1$

ចូរបង្ហាញថា: $x^2 y + y^2 z + z^2 x \leq \dfrac{4}{27}$

158. [*China* 1999] គេឲ្យពហុធា $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ មានឫសបីជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

រកតម្លៃធំបំផុតរបស់ចំនួនថេរ λ ដែលធ្វើឲ្យ $f(x) \geq \lambda(x - a)^3\ ; \forall x \geq 0$

និងល័ក្ខខ័ណ្ឌដើម្បីឲ្យសមភាពកើតមាន។

159. [*Olympic VN* 1999] គេឲ្យចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

ចំពោះគ្រាប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $m \in (0; 1999)$ មានចំនួនគត់ k ដែល

$$\frac{m}{1999}<\frac{k}{n}<\frac{m+1}{2000}$$ ស្រាយថា $n\geq 1999$

160. [*Olympic VN 1999*] ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ $0\leq x\leq \frac{\pi}{2};\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$

គឺយើងមាន $tg\left(\frac{\pi sinx}{4sin\alpha}\right)+tg\left(\frac{\pi cosx}{4cos\alpha}\right)>1$

161. [*Olympic VN 1999*] គេឲ្យបណ្តាមិនអវិជ្ជមាន p,q,x,y,z ចូលស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{x^{2000}}{py+qz}+\frac{y^{2000}}{pz+qx}+\frac{z^{2000}}{px+qy}\geq \frac{x^{1999}+y^{1999}+z^{1999}}{p+q}$$

162. [*Olympic VN 1999*] គេឲ្យត្រីកោណ ABC មិនកែង ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$3tg^2Atg^2Btg^2C-5(tg^2A+tg^2B+tg^2C)\leq 9+tg^2Btg^2C+tg^2Ctg^2A$$

163. [*Olympic VN 1999*] គេឲ្យ x,y,z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ស្រាយថា

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)\geq 2\left(1+\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\right)$$

164. [*Czech − Slovak 1999*] ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\geq 1.\forall a,b,c>0$

165. [*IMO 1999*] គេឲ្យចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n\geq 2$ រកចំនួនថេរ C តូចបំផុតដែល

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n}x_ix_j\left(x_i^2+x_j^2\right)\leq C(x_1+x_2+\cdots+x_n)^4,\forall x_1,x_2,\dots,x_n\geq 0$$

ជាមួយនិងតម្លៃ C ដែលរកបាននោះ។ ចូលរកល័ក្ខខ័ណ្ឌដើម្បីឲ្យក្លាយជាសមភាព

166. [*Ireland 1999*] គេឲ្យ $a;b;c;d>0$ និង $a+b+c+d=1$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+d}+\frac{d^2}{d+a}\geq\frac{1}{2}$$

ចំពោះសមភាពកើតមានពេលនិងគ្រាន់ពេលដែល $a=b=c=d=\frac{1}{4}$

167. [*Korea 1999*] គេឲ្យ $a_1,a_2,\dots,a_n$ ជាបណ្តាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាននិង

$(a): a_1+a_2+\cdots+a_{1999}=2$

$(b): a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{1998}a_{1999}+a_{1999}a_1=1$

តាង $S=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{1999}^2$ រក $MaxS$ និង $MinS$

168. [*Korea 1999*] គេឲ្យ $a;b;c>0$ និង $abc=1$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{a+b^4+c^4}+\frac{1}{a^4+b+c^4}+\frac{1}{a^4+b^4+c}\leq 1$$

169. [*Macedonia 1999*] គេឲ្យ $a;b;c>0$ និង $a^2+b^2+c^2=1$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a+b+c+\frac{1}{abc}\geq 4\sqrt{3}$

170. [*Moldova 1999*] គេឲ្យ a,b,c ជាបណ្តាលចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{ab}{c(c+a)}+\frac{bc}{a(a+b)}+\frac{ca}{b(b+c)}\geq\frac{a}{c+b}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}$$

171. [*Poland 1999*] គេឲ្យ $a,b,c>0$ និងផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c=1$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc}\leq 1$

172. [*Romania 1999*] គេឲ្យ a,b,c ជាជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(b+c-a)(c+a-b)+(a+b-c)(b+c-a)+(c+a-b)(a+b-c)$$
$$\leq\sqrt{abc}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$$

173. [*Vasile Cirtoaje, Romania 1999*] គេឲ្យ $a_1,a_2,\dots,a_n>0$ និងផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$a_1a_2\dots a_n=1$$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{1}{a_1+n-1}+\frac{1}{a_2+n-1}+\cdots+\frac{1}{a_n+n-1}\leq 1$

174. [*Russia 1999*] គេឲ្យ $x,y,z>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោមនេះ

$xyz=1$ និង $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq x+y+z$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{x^k}+\frac{1}{y^k}+\frac{1}{z^k}\geq x^k+y^k+z^k\ \ \forall k\in\mathbb{N}^*$

175. [*Russia 1999*] គេឲ្យ $x,y>0$ និង $x^2+y^3\geq x^3+y^4$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $x^3+y^3\leq 2$

176. [*Russia 1999*] គេឲ្យបីចំនួន a,b,c

≥ 0 ធ្វើយ៉ាងណាកុំឲ្យមានពីរចំនួនស្មើនឹង 0 ព្រមគ្នា

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+2ca}{c^2+a^2}+\frac{c^2+2ab}{a^2+b^2}\geq 3$

177. [*Turkey* 1999] គេឲ្យ $0 \le a \le b \le c$ ចូរបង្ហាញថា: $(a+3b)(b+4c)(c+2a) \ge 60abc$

178. [*Ukraine* 1999] គេឲ្យ 6 ចំនួនពិត $x_1, x_2, \dots, x_6 \in [0;1]$ ស្រាយថា

$$\frac{x_1^3}{x_2^5+x_3^5+x_4^5+x_5^5+x_6^5+5}+\cdots+\frac{x_6^3}{x_1^5+x_2^5+x_3^5+x_4^5+x_5^5+5} \le \frac{3}{5}$$

179. [*United Kingdom* 1999] គេឲ្យ $p, q, r \ge 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$p+q+r=1$ ស្រាយថា $7(pq+qr+rp) \le 2+9pqr$

180. [*USA* 1999] គេឲ្យចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n>3$ និង $a_1, a_2, \dots, a_n$

គឺជាបណ្តាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_1+a_2+\cdots+a_n \ge n$ និង

$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 \ge n^2$ ស្រាយថា $max\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \ge 2$

181. [*USA* 1999] គេឲ្យ $a_0, a_1, \dots, a_n$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតដែលនៅក្នុងចន្លោះ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

និងផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោមនេះ

$$tan\left(a_o-\frac{\pi}{4}\right)+tan\left(a_1-\frac{\pi}{4}\right)+\cdots+tan\left(a_n-\frac{\pi}{4}\right) \ge n-1$$

ស្រាយថា $tan\, a_0\, tan\, a_1 \dots tan\, a_n \ge n^{n+1}$

182. [*USA* (*Shortlist*)1999] គេឲ្យ $x, y, z > 1$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$x^{x^2+2yz}y^{y^2+2zx}z^{z^2+2xy} \ge (xyz)^{xy+yz+zx}$$

183. [*Austria* 2000] គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិត a, b ចំពោះ $a \ne 0$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{b}{a} \ge \sqrt{3}$

184. [*Austrian Polish Competition* 2000] គេឲ្យ $a, b, c \ge 0$ និង $a+b+c=1$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $2 \le (1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2 \le (1+a)(1+b)(1+c)$

185. [*Belarus 2000*]ស្រាយថា $\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z}\geq\frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}\ \forall a,b,c,x,y,z>0$

186. [*Canada 2000*] គេឲ្យ $a_1,a_2,\dots,a_{100}$ គឺជាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$(i).\ a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_{100}\geq 0$

$(ii).\ a_1+a_2\leq 100$

$(iii).\ a_3+a_4+\cdots+a_{100}\leq 100$

រកតម្លៃធំបំផុតដែលអាចមានរបស់កន្សោម $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{100}^2$

និងកំណត់តម្លៃទាំងអស់របស់ស្វីត $a_1,a_2,\dots,a_{100}$ ដែលអាចក្លាយជាសមភាព

187. [*Czech Slovak 2000*]ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}\geq\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\ \ \forall a,b>0$

និងរកល័ក្ខខ័ណ្ឌដើម្បីឲ្យសមភាពកើតមាន។

188. [*Hong Kong 2000*]គេឲ្យ $a,b,c>0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $abc=1$ ស្រាយថា

$$\frac{1+ab^2}{c^3}+\frac{1+bc^2}{a^3}+\frac{1+ca^2}{b^3}\geq\frac{18}{a^3+b^3+c^3}$$

189. [*Hong Kong 2000*] គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិត $a_1,a_2,\dots,a_n$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

$a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$ និង $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+2na_1a_n\leq 0$

190. [*Hungary 2000*]គេឲ្យ $x,y,z\in(0;4)$ ស្រាយថាតិចបំផុតមួយក្នុងបីចំនួន

$\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y};\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}$ និង $\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}$ មានតម្លៃមិនតូចជាង 1

191. [*Hungdary Isreal Competition*]គេឲ្យ k,l គឺជាពីរចំនួនគត់វិជ្ជមាននិង a_{ij}គឺ kl ចំនួន

ពិតវិជ្ជមានណាមួយ $(1\leq i\leq k,1\leq j\leq l)$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\left[\sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{k}a_{ij}^{p}\right)^{\frac{q}{p}}\right]^{\frac{1}{q}} \le \left[\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{l}a_{ij}^{q}\right)^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{1}{p}}, \forall q \ge p > 0$$

192. [*IMO 2000*] គេឲ្យ $a;b;c > 0$ និងផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ $abc = 1$

$$\text{ស្រាយបញ្ជាក់ថា:}\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\left(b+\frac{1}{c}-1\right)\left(c+\frac{1}{a}-1\right) \le 1$$

193. [*Ireland 2000*] គេឲ្យ $x, y \ge 0$ ដែល $x + y = 2$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $x^2y^2(x^2+y^2) \le 2$

194. [*Korea 2000*] គេឲ្យ $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខ័ណ្ឌ

$a \ge b \ge c > 0, x \ge y \ge z > 0$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា:

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)} + \frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)} + \frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \ge \frac{3}{4}$$

195. [*Macedonia* 2000] ស្រាយបញ្ជាក់ថា $x^2 + y^2 + z^2 \ge \sqrt{2}(xy + yz) \quad \forall x, y, z$

196. [*MOSP* 2000] គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, x, y, z ស្រាយថា

$$\frac{x}{ay+bz} + \frac{y}{az+bx} + \frac{z}{ax+by} \ge \frac{3}{a+b} \quad \forall a, b > 0$$

197. [*MOSP* 2000] គេឲ្យ $a, b, c > 0$ និង $min\{a; b\} \ge c$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \le \sqrt{ab}$$

198. [*MOSP* 2000] គេឲ្យ A, B, C ជាមុំស្រួចនៃត្រីកោណមួយ

$$\text{ស្រាយបញ្ជាក់ថា:} \left(\frac{cosA}{cosB}\right)^2 + \left(\frac{cosB}{cosC}\right)^2 + \left(\frac{cosC}{cosA}\right)^2 + 8cosAcosBcosC \ge 4$$

199. [*MOSP* 2000] គេឲ្យ $a_1, a_2, \dots, a_n$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជាមានណាក៏ដោយ ស្រាយថា

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} - \sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n} \ge \frac{1}{2}min\left\{(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2, (\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3})^2, \dots, (\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1})^2\right\}$$

200. $[MOSP\ 2000]$គេឲ្យ(a_n)ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតវិជ្ជមានចុះដែល

$$\frac{a_1}{1}+\frac{a_4}{2}+\cdots+\frac{a_{k^2}}{k}\leq 1 \quad \forall k$$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n}<2 \quad \forall n$

201. $[MOSP\ 2000]$គេឲ្យ$\begin{cases} a,b,c\geq 0 \\ ab+bc+ca=1 \end{cases}$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា:$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\geq\frac{5}{2}$

202. $[MOSP\ 2000]$គេឲ្យ $a_1,a_2,\dots,a_n>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោម

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\leq 1$$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $(a_1^k-1)(a_2^k-1)\dots(a_n^k-1)\geq(n^k-1)^n, \forall k\in\mathbb{N}^*$

203. $[MOSP\ 2000]$គេឲ្យ a,b,c ជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{2\sqrt[3]{abc}}\geq\frac{\left(a+b+c+\sqrt[3]{abc}\right)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

204. $[Romania\ 2000]$ចំពោះគ្រាប់ចំនួនគត់ $n\geq 2$ ពិនិត្យមើល $n-1$ចំនួនពិតវិជ្ជមាន

$a_1,a_2,\dots,a_{n-1}$ មានផលបូកស្មើ 1 និងចំនួនពិត n ណាក៏ដោយ $b_1,b_2,\dots,b_n$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $b_1^2+\frac{b_2^2}{a_1}+\frac{b_3^2}{a_2}+\cdots+\frac{b_n^2}{a_{n-1}}\geq 2b_1(b_2+b_3+\cdots+b_n)$

205. $[Russia\ 2000]$គេឲ្យ $a;b;c>0$ និងផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $abc=1$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$x^2+y^2+z^2+x+y+z\geq 2(xy+yz+zx)$$

206. $[Russia\ 2000]$ឲ្យចំនួនគត់ $n\geq 2$ និង $x_1,x_2,\dots,x_n$

ជាបណ្តាលចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$-1<x_1<x_2<\cdots<x_n<1$ និង $x_1^{13}+x_2^{13}+\cdots+x_n^{13}=x_1+x_2+\cdots+x_n$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$x_1^{13}y_1 + x_2^{13}y_2 + \cdots + x_n^{13}y_n < x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n;\ \forall y_1 < y_2 < \cdots < y_n$$

207. [$Russia$ 2000]គេឲ្យ $n \in \mathbb{N}$ ចូលបង្ហាញថា: $sin^n 2x + (sin^n x - cos^n x)^2 \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$

208. [$Saint\ Petersburg$ 2000]គេឲ្យចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n \ge 3$ និង $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$

ចូលស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{a_1 + a_2}{2} . \frac{a_2 + a_3}{2} \dots \frac{a_n + a_1}{2} \le \frac{a_1 + a_2 + a_3}{2\sqrt{2}} \dots \frac{a_n + a_1 + a_2}{2\sqrt{2}}$

209. [$Siant\ Petersburg$ 2000]គេឲ្យចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n \ge 3$ និង $0 < x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{x_n x_1}{x_2} + \frac{x_1 x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}x_n}{x_1} \ge x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

210. [$Singapore$ 2000]គេឲ្យ$a, b, c, d > 0$ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$c^2 + d^2 = (a^2 + b^2)^3$ ស្រាយថា:$\frac{a^3}{c} + \frac{b^3}{d} \ge 1$

211. [$Singapore$ 2000]រកបណ្ដាចំនួនគត់n ទាំងអស់ $n > 1$ដែលធ្វើឲ្យ

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ge x_n \sum_{i=1}^{n-1} x_i \ \ \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

212. [$United\ Kingdom$ 2000] គេឲ្យ x, y, z គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $xyz = 32$ រកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោមខាងក្រោមនេះ

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2$$

213. [USA 2000] គេឲ្យ $a_1; a_2; \dots; a_n$ និង $b_1; b_2; \dots; b_n$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន

ណាក៏ដោយ។ ចូរបង្ហាញថា: $\sum_{i;j=1}^{n} \min\{a_i a_j; b_i b_j\} \le \sum_{i;j=1}^{n} \min\{a_i b_j; a_j b_i\}$

214. [USA 2000]គេឲ្យ a, b, c ជាបណ្ដាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ចូលស្រាយថា

$$\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} \le max\left\{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2; \left(\sqrt{b} - \sqrt{c}\right)^2; \left(\sqrt{c} - \sqrt{a}\right)^2\right\}$$

215. $[Vo\ Quoc\ Ba\ Can\ vn]$ គេឲ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c;d$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$a+b+c+d=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$$

ចូរបង្ហាញថា: $a+b+c+d\geq\sqrt{\frac{a^2+1}{2}}+\sqrt{\frac{b^2+1}{2}}+\sqrt{\frac{c^2+1}{2}}+\sqrt{\frac{d^2+1}{2}}$

216. $[vn]$ឧបមាថា $a;b;c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{a^2+ab+bc}+\frac{1}{b^2+bc+ca}+\frac{1}{c^2+ca+ab}\leq\left(\frac{a+b+c}{ab+bc+ca}\right)^2$$

217. $[VN]$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ យើងមាន

$$\frac{ab}{a^2+ab+bc}+\frac{bc}{b^2+ca+ab}+\frac{ca}{c^2+ab+bc}\leq\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$$

218. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $x_1;x_2;\dots;x_n$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$x_1+x_2+\cdots+x_n=n$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{x_1^2-x_1+n}+\frac{1}{x_2^2-x_2+n}+\cdots+\frac{1}{x_n^2-x_n+n}\leq 1$$

219. $[Pham\ Van\ Thuan]$ គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$ab+bc+ca=3$ បើ $k\geq 1$ គឺ: $\frac{1}{a^2+b^2+k}+\frac{1}{b^2+c^2+k}+\frac{1}{c^2+a^2+k}\leq\frac{3}{2+k}$

220. $[VN]$ គេឲ្យបីចំនួនវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a+b+c=3$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{a^3+b^2+c}+\frac{b}{b^3+c^2+a}+\frac{c}{c^3+a^2+b}\leq 1$$

221. $[Vo\ Quoc\ Ba\ Can]$ គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{(3a-b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(3b^2-c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(3c-a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\geq\frac{9}{2}$$

222. $[Vasile\ Cirtoaje]$ គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$

$$\text{ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: } \frac{1}{1+a+b^2}+\frac{1}{1+b+c^2}+\frac{1}{1+c+a^2}\le 1$$

223. $[Tran\ Quoc\ Anh]$ គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{3a+b}{2a+c}+\frac{3b+c}{2b+a}+\frac{3c+a}{2c+b}\ge 4$$

224. $[Vo\ Quoc\ Ba\ Can\ , Vasile\ Cirtoaje]$ គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។

$$\text{ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: } \frac{a(b+c)}{a^2+2bc}+\frac{b(c+a)}{b^2+2ca}+\frac{c(a+b)}{c^2+2ab}\le 2$$

225. $[Vu\ Dinh\ Quy]$ គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $abc=1$

$$\text{ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: } \frac{1}{a^2-a+1}+\frac{1}{b^2-b+1}+\frac{1}{c^2-c+1}\le 3$$

226. $[Vsile\ Cirtoaje]$ បើ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $abc=1$

$$\text{ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : } \frac{12a+7}{2a^2+1}+\frac{12b+7}{2b^2+1}+\frac{12c+7}{2c^2+1}\le 19$$

227. $[Vo\ Quoc\ Ba\ Can]$ គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $abc=1$

$$\text{ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: } \frac{a}{(a+3)^2}+\frac{b}{(b+3)^2}+\frac{c}{(c+3)^2}\le\frac{3}{16}$$

228. $[Vasile\ Cirtoaje]$ គេឲ្យបណ្តាចំនួនមិនអវិជ្ជមាន $a;b;c;d$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$a+b+c+d=4$ និង $a^2+b^2+c^2+d^2=7$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$a^3+b^3+c^3+d^3\le 16$$

229. $[Vo\ Quoc\ Ba\ Can\ ; Pham\ Van\ Thuan\ ]$ គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិត $a;b;c;d$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$a^2+b^2+c^2+d^2=1 \text{ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: } \frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-cd}+\frac{1}{1-da}\le\frac{16}{3}$$

230. $[Vasile\ Cirtoaje]$ គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a+b}{a+7b+c}+\frac{b+c}{b+7c+a}+\frac{c+a}{c+7a+b}\geq\frac{2}{3}$$

231. $[Vo\ Quoc\ Ba\ Can\ ]$ ឧបមាថា $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$a+b+c=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\dfrac{a^2}{9a+1}+\dfrac{b^2}{9b+1}+\dfrac{c^2}{9c+1}\leq\dfrac{1}{12\sqrt{3(ab+bc+ca)}}$

232. $[B\ M\ Olympic\ 1998]$ គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}+1$$

233. $[Japanese\ Mathematical\ Olympic\ 2004]$ ឧបមាថា $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c=1$ ។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)\geq\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}$$

234. $[Vo\ Quoc\ Ba\ Can\ ]$ គេឲ្យចំនួនពិត $a;b;c$ ដែល $a^2+b^2+c^2>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^2-bc}{2a^2+2b^2+5c^2}+\frac{b^2-ca}{2b^2+2c^2+5a^2}+\frac{c^2-ab}{2c^2+2a^2+5b^2}\geq 0$$

235. $[\ Nguyen\ Van\ Thach]$ គេឲ្យបណ្តាចំនួន $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $\dfrac{a^3}{a^3+abc+b^3}+\dfrac{b^3}{b^3+abc+c^3}+\dfrac{c^3}{c^3+abc+a^3}\geq 1$

236. $[VN\ Olympic]$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា។ ចំពោះគ្រប់ $a;b;c$ វិជ្ជមានយើងបាន

$$\frac{a^4}{a^3+b^3}+\frac{b^4}{b^3+c^3}+\frac{c^4}{c^3+a^3}\geq\frac{a+b+c}{2}$$

237. $[Vasile\ Cirtoaje]$ គេឲ្យ $a;b;c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{b^2+bc+c^2}+\frac{1}{c^2+ca+a^2}+\frac{1}{a^2+ab+b^2}\geq\frac{9}{(a+b+c)^2}$$

238. គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^2+b^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2+c^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2+a^2}{c^2+ca+a^2}\le\frac{6(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}$$

239. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a; b; c$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^2+bc}{a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2+ca}{b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2+ab}{c^2+(a+b)^2}\le\frac{18}{5}.\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}$$

240. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាវិសមភាពនេះពិតចំពោះគ្រប់ $a; b; c$ ពិតវិជ្ជមាន

$$\frac{a^4}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^4}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^4}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}$$

241. គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានដែល $a^2+b^2+c^2=1$ ចូរស្រាយថា

$$\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}+\frac{1}{1-c^2}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-ca}+\frac{1}{1-ab}\ge 9$$

242. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a; b; c$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sum\frac{ab}{a^2+ab+b^2}\le\sum\frac{a}{2a+b}$$

243. គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជាជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0$$

244. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a; b; c$ ដែល $a+b+c=3$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{a^2+b^2+2}+\frac{1}{b^2+c^2+2}+\frac{1}{c^2+a^2+2}\le\frac{3}{4}$$

245. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a; b; c$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+a}{c+a}+\frac{c+b}{a+b}$$

246. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a; b; c$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a+b+c\geq\frac{6(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$$

247. បើ $a;b;c$ គឺបណ្តាជ្រុងនៃត្រីកោណមួយនោះគឺយើងតែងតែបាន

$$a^2\left(\frac{b}{c}-1\right)+b^2\left(\frac{c}{a}-1\right)+c^2\left(\frac{a}{b}-1\right)\geq 0$$

248. គេឲ្យបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c>0$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ $k>0$ គឺយើងបានវិសមភាពខាងក្រោមនេះពិត

$$\frac{a}{ka+k^2b+c}+\frac{b}{kb+k^2c+a}+\frac{c}{kc+k^2a+b}\leq\frac{1}{k}$$

249. គេឲ្យបំចំនួនវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a+b+c=3$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{4a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{4b^2+c^2+a^2}+\frac{1}{4c^2+a^2+b^2}\leq\frac{1}{2}$$

250. គេឲ្យ $x_1;x_2;\dots;x_n$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1x_2\dots x_n=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{1}{x_1+n-1}+\frac{1}{x_2+n-1}+\cdots+\frac{1}{x_n+n-1}\leq 1$

251. គេឲ្យ $a_1;_2;\dots;a_n$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a_1a_2\dots a_n=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+n}{4}$$

252. គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $ab+bc+ca>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\geq\frac{ab}{b^2+bc+c^2}+\frac{bc}{c^2+ca+a^2}+\frac{ca}{a^2+ab+b^2}$$

253. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c;d$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^2-bd}{b+2c+d}+\frac{b^2-ca}{c+2d+a}+\frac{c^2-db}{d+2a+b}+\frac{d^2-ab}{a+2b+c}\geq 0$$

254. គេឲ្យបីចំនួនវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែល $ab+bc+ca>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{2a^2-bc}{b^2-bc+c^2}+\frac{2b^2-ca}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^2-ab}{a^2-ab+b^2}\geq 3$$

255. គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន។និងមិនមានពីរចំនួនពីរណាស្មើសូន្យ

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{a^2-bc}{2b^2-3bc+2c^2}+\frac{b^2-ca}{2c^2-3ca+2a^2}+\frac{c^2-ab}{2a^2-3ab+2b^2}\geq 0$

256. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែល $a+b+c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{a+b+7c}+\frac{b}{b+c+7a}+\frac{c}{c+a+7b}+\frac{2}{3}.\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\leq 1$$

257. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិត $a;b;c$ ដែល $a^2+b^2+c^2=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{5-6bc}+\frac{1}{5-6ca}+\frac{1}{5-6ab}\leq 1$$

258. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិត $a;b;c$ ដែល $a+b+c=3$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^2+9}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2+9}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2+9}{2c^2+(a+b)^2}\leq 5$$

259. [*Singapore IMO Team Selection Test* 2003] គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{bc}{2a+b+c}+\frac{ca}{2b+c+a}+\frac{ab}{2c+a+b}\leq\frac{a+b+c}{4}$

260. [*Marin Bancos*] គេឲ្យ $a;b;c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+a(b+c)}+\frac{(c+a)^2}{c^2+a^2+b(c+a)}+\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+c(a+b)}\leq 3$$

261. [*Vasile Cirtoaje*] គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a+b+c=3$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{1}{4a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{a^2+4b^2+c^2}+\frac{1}{a^2+b^2+4c^2}\leq\frac{1}{2}$

262. [*Pham Kim Hung*] គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតដែល $a^2+b^2+c^2=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{bc}{a^2+1}+\frac{ca}{b^2+1}+\frac{ab}{c^2+1}\leq\frac{3}{4}$

263. [$Vasile\ Cirtoaje$] គេឲ្យ $n \geq 3$ គឺជាចំនួនគត់និង $a_1; a_2; \dots; a_n$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានណាក៏ដោយ។តាង $a_0 = a_n$ និង $a_{n+1} = a_1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_{i-1} + 2a_i + a_{i+1}} \leq \frac{n}{4}$$

264. [$Vasile\ Cirtoaje$] ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ $a; b; c; k > 0$ យើងបានដូចខាងក្រោម

$$\frac{a^2 - bc}{2ka^2 + k^2b^2 + c^2} + \frac{b^2 - ca}{2kb^2 + k^2c^2 + a^2} + \frac{c^2 - ab}{2kc^2 + k^2a^2 + b^2} \geq 0$$

265. [$Pham\ Kim\ Hung$] បើ $a; b; c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a + b + c > 0$ គឺមាន

$$\frac{a}{4a + 4b + c} + \frac{b}{a + 4b + 4c} + \frac{c}{4a + b + 4c} \leq \frac{1}{3}$$

266. [$Hojoo\ Lee$] ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ $a; b; c > 0$ នោះគឺយើងបាន

$$\frac{b + c}{a^2 + bc} + \frac{c + a}{b^2 + ca} + \frac{a + b}{c^2 + ab} \leq a + b + c$$

267. [$Vo\ Quoc\ Ba\ Can$] គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a; b; c$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^2(b + c)^2}{a^2 + bc} + \frac{b^2(c + a)^2}{b^2 + ca} + \frac{c^2(a + b)^2}{c^2 + ab} \leq a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca$$

268. [$Tigran\ Sloyan$] គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^2}{(2a + b)(2a + c)} + \frac{b^2}{(2b + c)(2b + a)} + \frac{c^2}{(2c + a)(2c + b)} \leq \frac{1}{3}$$

269. [$Vasile\ Cirtoaje$] គេឲ្យ $a; b; c \geq 0$ និង $ab + bc + ca = 3$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} \geq \frac{3}{2}$$

270. [$Vo\ Quoc\ Ba\ Can$] គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^2}{5a^2 + (b + c)^2} + \frac{b^2}{5b^2 + (c + a)^2} + \frac{c^2}{5c^2 + (a + b)^2} \leq \frac{1}{3}$$

271. $[\,Olympic\ VN]$ គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $\dfrac{ab}{3ab+2b+c}+\dfrac{bc}{3bc+2c+a}+\dfrac{ca}{3ca+2a+b}\le\dfrac{1}{4}$

272. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a; b; c$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{ab}{a+3b+2c}+\frac{bc}{b+3c+2a}+\frac{ca}{c+3a+2b}\le\frac{a+b+c}{6}$$

273. បើ $a; b; c>0$ នោះគឺ

$$\frac{ab^2}{a^2+2b^2+c^2}+\frac{bc^2}{b^2+2c^2+a^2}+\frac{ca^2}{c^2+2a^2+b^2}\le\frac{a+b+c}{4}$$

274. គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{ab^3}{a^3+2b^3+c^3}+\frac{bc^3}{b^3+2c^3+a^3}+\frac{ca^3}{c^3+2a^3+b^3}\le\frac{a+b+c}{4}$$

275. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a; b; c; d$ ដែល $a+b+c+d=3$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\sum\dfrac{ab}{3b+c+d+3}\le\dfrac{1}{3}$

276. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a; b; c; d$ ដែល $a+b+c+d=3$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{ab}{c+d+4}+\frac{bc}{d+a+4}+\frac{cd}{a+b+4}+\frac{da}{b+c+4}+\frac{\sqrt{abcd}}{3}\le 1$$

277. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a; b; c$ ដែល $a+b+c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^2}{3a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{3b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{3c^2+(a+b)^2}\le\frac{1}{2}$$

278. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិត $a; b; c; d$ ដែល $a^2+b^2+c^2+d^2=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{a+c}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{a+d}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{b+d}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{c+d}{2}\right)^2}\le 8$$

279. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែល $a+b+c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{2}\leq\frac{a^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{2c^2+(a+b)^2}\leq\frac{2}{3}$$

280. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែល $a+b+c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{ab}{a+9b+6c}+\frac{bc}{b+9c+6a}+\frac{ca}{c+9a+6b}\leq\frac{a+b+c}{16}$$

281. គេឲ្យ $A;B;C$ គឺជាមុំបីនៃត្រីកោណមួយ។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{2-\cos A}+\frac{1}{2-\cos B}+\frac{1}{2-\cos C}\geq 2$$

282. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែល $a^2+b^2+c^2=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a+b}{1-ab}+\frac{b+c}{1-bc}+\frac{c+a}{1-ca}\leq 3(a+b+c)$$

283. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែល $a+b+c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{ab}{3a+4b+5c}+\frac{bc}{3b+4c+5a}+\frac{ca}{3c+4a+5b}\leq\frac{a+b+c}{12}$$

284. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែល $a+b+c=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{6a^2}+\frac{1}{1+6b^2}+\frac{1}{1+6c^2}\geq\frac{9}{5}$$

285. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែល $a+b+c=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1+2a}{1+2a+6a^2}+\frac{1+2b}{1+2b+6b^2}+\frac{1+2c}{1+2c+6c^2}\geq\frac{15}{7}$$

286. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែល $a+b+c=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1+a}{1+a+6a^2}+\frac{1+b}{1+b+6b^2}+\frac{1+c}{1+c+6c^2}\geq 2$$

287. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែល $a+b+c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{2c^2+(a+b)^2}\le\frac{2}{3}$$

288. គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន $x; y; z$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt{\frac{2x}{x+y}}+\sqrt{\frac{2y}{y+z}}+\sqrt{\frac{2z}{z+x}}\le 3$$

[Vasile Cirtoaje ; Chinese Western Mathematical Olympic 2004]

289. $[Tran\ Quoc\ Anh]$ គេឲ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន $x; y; z$ ណាក៏ដោយ។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt{\frac{x}{x+y+2z}}+\sqrt{\frac{y}{y+z+2x}}+\sqrt{\frac{z}{z+x+2y}}\le\frac{3}{2}$$

290. $[Pham\ Kim\ Hung\ ]$គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}}+\frac{b}{\sqrt{b+2c}}+\frac{c}{\sqrt{c+2a}}\le\sqrt{\frac{3}{2}(a+b+c)}$$

291. $[Pham\ Kim\ Hung\ ]$ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ $a; b; c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c=3$ នោះគឺយើងមាន

$$(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)\le 12$$

292. $[Vo\ Quoc\ Ba\ Can]$ គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a; b; c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}}\le\frac{3}{\sqrt{2}}$

293. $[Chinese\ IMO\ Team\ Selectin\ Test\ 2006]$ គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $x; y; z$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $x+y+z=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{xy}{\sqrt{xy+yz}}+\frac{yz}{\sqrt{yz+zx}}+\frac{zx}{\sqrt{zx+xy}}\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$$

294. $[Zhao\ Bin]$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ $a;b;c>0$ យើងបាន

$$\sqrt{\frac{a^2}{4a^2+ab+4b^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{4b^2+bc+4c^2}}+\sqrt{\frac{c^2}{4c^2+ca+4a^2}}\leq 1$$

295. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt{\frac{a}{a+2b+3c}}+\sqrt{\frac{b}{b+2c+3a}}+\sqrt{\frac{c}{c+2a+3b}}\leq\sqrt{\frac{3}{2}}$$

296. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt{\frac{a}{2a+3b+4c}}+\sqrt{\frac{b}{2b+3c+4a}}+\sqrt{\frac{c}{2c+3a+4b}}\leq 1$$

297. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ $a;b;c>0$ យើងមាន

$$\sqrt{\frac{a}{4a+4b+c}}+\sqrt{\frac{b}{4b+4c+a}}+\sqrt{\frac{c}{4c+4a+b}}\leq 1$$

298. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+c}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\geq\frac{3}{4}$$

299. ចំពោះ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2+(c+a)^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{c^2+(a+b)^2}}+\sqrt{\frac{c^2}{a^2+(b+c)^2}}\leq\frac{3}{\sqrt{5}}$$

300. គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{\sqrt{2a+b+3c}}+\frac{b}{\sqrt{2b+c+3a}}+\frac{c}{\sqrt{2c+a+3b}}<\sqrt{\frac{8}{15}(a+b+c)}$$

301. គេឲ្យបួនចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c;d$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt{\frac{a}{a+b+c}}+\sqrt{\frac{b}{b+c+d}}+\sqrt{\frac{c}{c+d+a}}+\sqrt{\frac{d}{d+a+b}}\le\frac{4}{\sqrt{3}}$$

302. គេឲ្យ $a;b;c\ge 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+2b+3c=4$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(2a^2+bc)(2b^2+ca)(2c^2+ab)\le 32$$

303. $[Vietnam]$ គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $ab+bc+ca=`1$

ចូរបង្ហាញថា: $(a^2+2b^2+3)(b^2+2c^2+3)(c^2+2a^2+3)\ge 64$

304. $[Nguyen\ Anh\ Cuong]$ គេឲ្យបណ្តាចំនួនវិជ្ជមាន $x;y;z$ ដែល $x+y+z=2$

ចូរបង្ហាញថា: $\sqrt{x^3y+y^3z+z^3x}+\sqrt{xy^3+yz^3+zx^3}\le 2$

305. $[VN]$ គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{(a^2-bc)(b^2-ca)}{a+b}+\frac{(b^2-ca)(c^2-ab)}{b+c}+\frac{(c^2-ab)(a^2-bc)}{c+a}\le 0$$

306. $[Tran\ Quoc\ Anh]$ គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែល $a+b+c=3$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $\frac{a^2+bc}{b+ca}+\frac{b^2+ca}{c+ab}+\frac{c^2+ab}{a+bc}\ge 3$

307. $[Vo\ Quoc\ Ba\ Can]$ គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c;d$ ដែល $a+b+c+d=4$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{cd}+\frac{1}{da}\ge a^2+b^2+c^2+d^2$

308. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c;d$ និង $a^2+b^2+c^2+d^2=4$

នោះយើងមាន ៖ $a^3bc+b^3cd+c^3da+d^3ab\le 4$

309. ឧបមាថា $a;b;c\ ;d$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a^2+b^2+c^2+d^2=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $a^3+b^3+c^3+d^3+abc+bcd+cda+dab\le 1$

Vasile Cirtoaje ; Pham Kim Hung

310. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ $a;b;c$ វិជ្ជមាន។យើងតែងតែបាន

$$\sum\frac{ab\sqrt{(a+c)(b+c)}}{c(a+b)}\ge\sqrt{3(ab+bc+ca)}$$

311. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ យើងតែងតែបាន

$$\left(a^2+\frac{b^2c}{a}\right)\left(b^2+\frac{c^2a}{b}\right)\left(c^2+\frac{a^2b}{c}\right)\ge(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)$$

Tran Quoc Anh

312. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\left(a+\frac{bc}{a}\right)\left(b+\frac{ca}{b}\right)\left(c+\frac{ab}{c}\right)\ge 4\sqrt[3]{(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3)}$$

Tran Quoc Anh

313. ឧបមាថា $a;b;c$ គឺជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a+b}{\sqrt[3]{a^3+abc}}+\frac{b+c}{\sqrt[3]{b^3+abc}}+\frac{c+a}{\sqrt[3]{c^3+abc}}\ge 3\sqrt[3]{4}$$

314. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c=2$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $\frac{11-a}{a^3+3}+\frac{11-b}{b^2+3}+\frac{11-c}{c^2+3}\le 9$

Tran Quoc Anh

315. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែល $a+b+c=3$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{(1+a)^2(1+b)^2}{1+c^2}+\frac{(1+b)^2(1+c)^2}{1+a^2}+\frac{(1+c)^2(1+a)^2}{1+b^2}\geq 24$$

Tran Quoc Anh

316. [*Olympic vn* 2012] គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលទីពីលើ $\mathbb{R}$ ឧបមាថាមាន $f(1)=0$ និង $\int_0^1 f(x)dx=0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ $\alpha\in(0;1)$ យើងមាន

$$\left|\int_0^\alpha f(x)dx\right|\leq\frac{2}{81}\max_{0\leq x\leq 1}|f''(x)|$$

317. [*Olympic vn* 2012] គេឲ្យ $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ គឺជាអនុគមន៍ផត (ឬក៏ហៅថាអនុគមន៍ប៉ោងផ្នែកខាងលើ) ។និងមានឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែល $f(0)=f(1)=0$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $\sqrt{1+4\max\limits_{0\leq x\leq 1}f^2(x)}\leq\int_0^1\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx\leq 1+2\max\limits_{0\leq x\leq 1}f(x)$

318. គេឲ្យបណ្តាចំនួន $0\leq a\leq b\leq c\leq d$ និង $x;y;z;t\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$a+b+c+d=x+y+z+t=1$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $ax+by+cz+dt\geq 54abcd$

វៀតណាមឆ្នាំ 2009

319. ឧបមាថា $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានណាក៏ដោយ។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^3}{a^3+abc+b^3}+\frac{b^3}{b^3+abc+c^3}+\frac{c^3}{c^3+abc+a^3}\geq 1$$

Nguyen Van Trach

320. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c;d$ ដែល $a+b+c+d=a^2+b^2+c^2+d^2$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $2(a^3+b^3+c^3+d^3)+a+b+c+d\leq 12$

Vo Quoc Ba Can

321. គេឲ្យបណ្តាចំនួនគត់វិជ្ជមាន $a; b; c$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$a^3+b^3+c^3+9abc+4(a+b+c)\geq 8(ab+bc+ca)$$

Le Huu Dien Khue

322. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a; b; c$ ដែល $a+b+c=3$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(2+ab^2)^2(2+bc^2)^2(2+ca^2)^2\leq 3456$$

323. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a; b; c; d$ ដែល $abcd=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(b+c)}+\frac{1}{c(c+d)}+\frac{1}{d(d+a)}\geq 2$$

Vasile Cirtoaje

324. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a; b; c; d$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\sqrt[3]{5}\min\{a; b; c; d\}>\max\{a; b; c; d\}$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{5a^3-bcd}+\frac{1}{5b^3-cda}+\frac{1}{5c^3-dab}+\frac{1}{5d^3-abc}\geq\frac{64}{(a+b+c+d)^3}$$

325. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a; b; c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $abc=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{(a+1)(b+2)}+\frac{b}{(b+1)(c+2)}+\frac{c}{(c+1)(a+2)}\geq\frac{1}{2}$$

326. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ $x; y; z>0$ យើងបាន

$$\frac{x^3}{x^3+(x+y)^3}+\frac{y^3}{y^3+(y+z)^3}+\frac{z^3}{z^3+(z+x)^3}\geq\frac{1}{3}$$

327. គេឲ្យបណ្តាលចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a; b; c$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt{\frac{a^2}{a^2+7ab+b^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{b^2+7bc+c^2}}+\sqrt{\frac{c^2}{c^2+7ca+a^2}}\geq 1$$

328. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c;d$ ដែល $r=\sqrt[4]{abcd}\geq 1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+cd}{1+c}+\frac{1+da}{1+d}\geq\frac{4(1+r^2)}{1+r}$$

329. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c;d$ ដែល $abcd=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+d)}+\frac{1}{d(1+a)}\geq 2$$

330. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ $a;b;c;d>0$ នោះគឺយើងបាន

$$\frac{a+b+c+d}{3}\geq\frac{abc}{ab+bc+ca}+\frac{bcd}{bc+cd+db}+\frac{cda}{cd+da+ad}+\frac{dab}{da+ab+bd}$$

331. គេឲ្យ $a;b;c;d>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{1}{2+a^2}+\frac{1}{2+b^2}+\frac{1}{2+c^2}+\frac{1}{2+d^2}=\frac{1}{2}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $abcd\geq ab+ac+ad+bc+bd+cd$

332. គេឲ្យ $a;b;c;d>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{1}{1+a^4}+\frac{1}{1+b^4}+\frac{1}{1+c^4}+\frac{1}{1+d^4}=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\right)\leq\frac{4}{\sqrt{3}}$

333. គេឲ្យ $n\geq 2$ គឺជាចំនួនគត់ធម្មជាតិនិងឲ្យ $x_1;x_2;\dots;x_n$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតដែល

$$\frac{1}{x_1+1998}+\frac{1}{x_2+1998}+\dots+\frac{1}{1+x_n+1998}=\frac{1}{1998}$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $\frac{\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}}{n-1}\geq 1998$

334. គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន $x;y;z$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt{\frac{2x}{x+y}}+\sqrt{\frac{2y}{y+z}}+\sqrt{\frac{2z}{z+x}}\leq 3$$

335. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x_1; x_2; \dots; x_n$ យើងតែងតែបាន

$$x_1^2 + \cdots + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \le \frac{1}{4\sin^2 \frac{\pi}{4n+2}}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$$

336. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a_1; a_2; \dots; a_n$ យើងមាន

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1 + a_2} + \cdots + \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} < 2\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)$$

337. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ $x_1; x_2; \dots; x_n$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានគឺ

$$x_1^2 + \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^2 < 4(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$$

Korea 2005

338. ចំពោះ $a; b; c\,; d$ គឺជាបួចំនួនវិជ្ជមានណាក៏ដោយ។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a-b}{a+2b+c} + \frac{b-c}{b+2c+d} + \frac{c-d}{c+2d+a} + \frac{d-a}{d+2a+b} \ge 0$$

339. បើ $a; b; c; d$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt[3]{(a+b+c)(a+b+d)} \ge \sqrt[3]{ac} + \sqrt[3]{bd}$$

340. គេឲ្យ $a; b; c; d$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$ បង្ហាញថា

$$\frac{a}{2b+c+2} + \frac{b}{2c+d+2} + \frac{c}{2d+a+2} + \frac{d}{2a+b+2} \ge \frac{4}{5}$$

341. គេឲ្យ $a; b; c; d$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a + b + c + d = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}$

ចូរបង្ហាញថា ៖ $2(a+b+c+d) \ge \sqrt[3]{a^3+7} + \sqrt[3]{b^3+7} + \sqrt[3]{c^3+7} + \sqrt[3]{d^3+7}$

342. គេឲ្យ $a; b; c; d$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1) = 16$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $abc + bcd + cda + dab \le 4$

343. គេឲ្យបួនចំនួនណាក៏ដោយ $a;b;c;d$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$6(a^2+b^2+c^2+d^2)+(a+b+c+d)^2 \geq 12(ab+bc+cd)$$

344. គេឲ្យ $a;b;c;d$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c+d=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(1-abcd)\left(a^2+b^2+c^2+d^2-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}-\frac{1}{d^2}\right) \geq 0$$

345. គេឲ្យ $a;b;c;d$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abcd=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2) \geq (a+b+c+d)^2$$

346. បើ $a;b;c;d$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abcd=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$4^4(a^4+1)(b^4+1)(c^4+1)(d^4+1) \geq \left(a+b+c+d+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)^4$$

357. គេឲ្យ $a;b;c;d$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abcd=1$ ។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$2^8(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1) \leq (a+b+c+d)^6$$

348. ឧបមថា $a;b;c;d$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a^2+b^2+c^2+d^2=1$ ចូរបង្ហាញថា

$$\sqrt{1-a}+\sqrt{1-b}+\sqrt{1-c}+\sqrt{1-d} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$$

349. គេឲ្យ $a;b;c;d$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោមនេះ

$$a+b+c+d=abc+bcd+cda+dab$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$a+b+c+d+\frac{2a}{a+1}+\frac{2b}{b+1}+\frac{2c}{c+1}+\frac{2d}{d+1} \geq 8$$

350. គេឲ្យ $a;b;c;d$ ជាបណ្តាចំពិតណាក៏ដោយ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(a-c)^2(b-d)^2+4(a-b)(b-c)(c-d)(d-a) \geq 0$$

351. គេឲ្យ $a;b;c;d$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោមនេះ

$$a+b+c+d=abc+bcd+cda+dab$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\left(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}\right)^2+\left(\sqrt{c^2+1}+\sqrt{d^2+1}\right)^2\le(a+b+c+d)^2$$

352. គេឲ្យ $a;b;c;d\ge 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $(a+b+c+d)^2=3(a^2+b^2+c^2+d^2)$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(a+b+c+d)^3\le 27(abc+bcd+cda+dab)$$

353. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ $a;b;c;d$ វិជ្ជមាននោះយើងបាន

$$\sum\frac{a^3}{(a+b)(a+c)(a+d)}\ge\frac{1}{2}$$

354. គេឲ្យ $a;b;c;d$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c+d=4$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$1+2(abc+bcd+cda+dab)\ge 9\min\{a;b;c;d\}$$

355. គេឲ្យបួនចំនួនមិនអវិជ្ជមាន $a;b;c;d$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a^2+b^2+c^2+d^2=4$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $a+b+c+d-4\ge\left(2-\sqrt{2}\right)(ab+bc+cd+da-4)$

356. គេឲ្យ $a;b;c;d$ គឺជាបណ្តាចំពិតដែល $abcd=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$2+\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2)}\ge ab+ac+ad+bd+bd+cd$$

357. គេឲ្យ $a;b;c;d$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c+d=4$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{cd}+\frac{1}{da}\ge a^2+b^2+c^2+d^2$$

358. $[Pham\ Kim\ Hung\ ]$ គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$a^2+b^2+c^2=3$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{a^2+2b+3}+\frac{b}{b^2+2c+3}+\frac{c}{c^2+2a+3}\le\frac{1}{2}$$

359. បើ $a\ge b\ge c\ge d\ge 0$ និង $a+b+c+d=2$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$ab(b+c)+bc(c+d)+cd(d+a)+da(a+b)\le 1$$

360. បើ $a;b;c;d$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{(a-b)(a-c)}{a+b+c}+\frac{(b-c)(b-d)}{b+c+d}+\frac{(c-d)(c-a)}{c+d+a}+\frac{(d-a)(d-b)}{d+a+b}\ge 0$$

361. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ $a;b;c;d$ វិជ្ជមានយើងមាន

$$(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)\left(1+\sqrt[4]{abcd}\right)^4\ge 16abcd(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)$$

Ukraine 2008

362. គេឲ្យ $a;b;c;d$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{b+c+d}\right)^2+\left(\frac{c}{c+d+a}\right)^2+\left(\frac{d}{d+a+b}\right)^2\ge\frac{4}{9}$$

363. បើ $a;b;c;d$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd\ge a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2$$

364. គេឲ្យ $a;b;c;d$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$a^4+b^4+c^4+d^4+4abcd\ge 2(a^2bc+b^2cd+c^2da+d^2ab)$$

365. បើ $a\ge b\ge c\ge d\ge 0$ គឺយើងបាន $a+b+c+d-4\sqrt[4]{abcd}\ge\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-2\sqrt{c}\right)^2$

366. បើ $a;b;c;d$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a^2+b^2+c^2+d^2=4$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a+b+c+d}{2}\le\sqrt[3]{(1+abcd)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)}$$

367. គេឲ្យ $a;b;c;d$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abcd=1$ ចូរស្រាយបញ្ញជាក់ថា

$$\frac{1}{1+ab+bc+ca}+\frac{1}{1+bc+cd+db}+\frac{1}{1+cd+da+ac}+\frac{1}{1+da+ab+bd}\le 1$$

368. បើ $a;b;c;d$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(a+b+c+d)^3\ge 4[a(c+d)^2+b(d+a)^2+c(a+b)^2+d(b+c)^2]$$

369. គេឲ្យ $a;b;c;d$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានដែល $a+b+c+d=1$ ចូរស្រាយថា

$$\sqrt{1-ab}+\sqrt{1-bc}+\sqrt{1-cd}+\sqrt{1-da}\ge 3+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

370. គេឲ្យ $a;b;c;d$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានដែល $a^2-ab+b^2=c^2-cd+d^2$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $(a+b)(c+d)\ge 2(ab+cd)$

371. គេឲ្យ $a;b;c\,;x;y$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $x+y=2(a+b+c)$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $ax^3+by^3+c\ge 27abc$

372. គេឲ្យបណ្ដាចំនួនពិត $a;b;c;d;e$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $a\ge b\ge c\ge d\ge e$ ចូរស្រាយថា

$$(a+b+c+d+e)^2\ge 8(ac+bd+ce)$$

373. គេឲ្យ $a;b;c;d;e$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានដែល $a+b+c+d+e=5$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+d^2)(d^2+e^2)(e^2+a^2)\le\frac{729}{2}$$

374. គេឲ្យ $a;b;c;d;e$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c+d+e=5$ ចូរស្រាយថា

$$abc+bcd+cde+dea+eab\le 5$$

375. គេឲ្យ $a;b;c;d;e\in\mathbb{R}$ ដែល $a+b+c+d+e=0$ និង $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2>0$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{ab+bc+cd+de+ea}{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2} \le \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

376. បើ $a;b;c;d;e$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានដែល $a \neq b \neq c \neq d \neq e \neq a$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{|b-c|}+\frac{b}{|c-d|}+\frac{c}{|d-e|}+\frac{d}{|e-a|}+\frac{e}{|a-b|} \ge 3$$

377. គេឲ្យ $a;b;c;d;e$ គឺជាបណ្ដាចំមិនអវិជ្ជមានដែល $a+b+c+d+e=5$ ចូរស្រាយថា

$$31(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2) \ge a^4+b^4+c^4+d^4+e^4+150$$

378. គេឲ្យ $a;b;c;d;e$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=5$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{c+d+e}+\frac{c^2}{d+e+a}+\frac{d^2}{e+a+b}+\frac{e^2}{a+b+c} \ge \frac{5}{3}$$

379. គេឲ្យ $a;b;c;d;e$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}=\frac{4}{e^2}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ $e \ge 2$ នោះគឺ

$$(a-1)(b-1)(c-1)(d-1) \ge (e-1)^4$$

380. គេឲ្យ $a;b;c;d;e$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានដែល $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=5$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{7-2a}+\frac{1}{7-2b}+\frac{1}{7-2c}+\frac{1}{7-2d}+\frac{1}{7-2e} \le 1$$

381. គេឲ្យ $a;b;c;x;y$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោមនេះ

$$(a+b+c)(x+y+z)=3\,;(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=4$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$ax + by + cz \geq 0$$

382. គេឲ្យ $a; b; c; x; y; z$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a + b + c = x + y + z$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{b + x} + \frac{b}{c + y} + \frac{c}{a + z} \geq 1$$

383. គេឲ្យ $a; b; c; x; y; z$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតដែល $a + x \geq b + y \geq c + z \geq 0$ និងមួយទៀត

$a + b + c = x + y + z$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $ay + bx \geq ac + xz$

384. បើ $a; b; c$ និង $x; y; z$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{2}{(a + b)(x + y)} + \frac{2}{(b + c)(y + z)} + \frac{2}{(c + a)(z + x)} \geq \frac{9}{(b + c)x + (c + a)y + (a + b)z}$$

385. គេឲ្យ $a; b; c$ និង $x; y; z$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$(a + b + c)(x + y + z) = (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = 4$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$abcxyz < \frac{1}{36}$$

386. គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជាបីជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។ បើ $x; y; z$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតដែល

$x + y + z = 0$ នោះចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$yza(b + c - a) + zxb(c + a - b) + xyc(a + b - c) \leq 0$$

387. គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជាប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។បើ $x; y; z$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតនោះគឺ

$$(ya^2 + zb^2 + xc^2)(za^2 + xb^2 + yc^2) \geq (xy + yz + zx)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

388. គេឲ្យបណ្ដាចំនួនពិត $a;b;c$ ដែល $a+b+c=a^2+b^2+c^2$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$-\frac{1}{8}\le ab+bc+ca\le 3$$

389. គេឲ្យបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែល $ab+bc+ca=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(a^2+2b^2+3)(b^2+2c^2+3)(c^2+2a^2+3)\ge 64$$

390. គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបីចំនួនមិនអវិជ្ជមានដែល $a^2+4b^2+9c^2=14$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $3b+8c+abc\le 12$

391. គេឲ្យអនុគមន៍ $F(x)=\sum_{k=0}^{2011}(k-2011x)^2C_{2011}^k x^k(1-x)^{2011-k}$

ចូររកតម្លៃធំបំផុតរបស់អនុគមន៍លើចន្លោះ $[0;1]$

392. គេឲ្យ $x;y;z$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\le 1 \text{ និង } \frac{4}{z}+y\le 2$$

ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម $P(x;y;z)=x+9y+z$

393. គេឲ្យ ; $a;b;c$ គឺជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)\ge\frac{9}{2}$$

394. គេឲ្យបណ្ដាចំនួនពិត $a;b;c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$0<a\le b\le c;c\ge 9;8c\ge 36+bc;12c\ge 36+bc+4ca$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\le 0$ និងសមភាពកើតមានពេលណា?

395. គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{(a+b+c)^3}{abc}+\left(\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\right)^2\ge 28$$

396. គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាជ្រុងនៃត្រីកោណមួយនិង S គឺជាក្រលាផ្ទៃរបស់ត្រីកោណនោះ

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\sqrt{a^4+b^4+c^4} \geq 4S$ និងសមភាពកើតមានពេលណា?

397. គេឲ្យ 3 ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a^2+b^2+c^2=1$

ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម $P=\dfrac{a}{b^2+c^2}+\dfrac{b}{c^2+a^2}+\dfrac{c}{a^2+b^2}$

398. គេឲ្យ $a;b;c$ ជាបណ្តាចំនួនពិតខុសពី 0 ដែល $ab+bc+ca \geq 0$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\dfrac{ab}{a^2+b^2}+\dfrac{bc}{b^2+c^2}+\dfrac{ca}{c^2+a^2} \geq -\dfrac{1}{2}$

399. គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a^2+b^2+c^2=12$

ចូររកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោម $S=a\sqrt[3]{b^2+c^2}+b\sqrt[3]{c^2+a^2}+c\sqrt[3]{a^2+b^2}$

400. គេឲ្យត្រីកោណ 2 $\Delta A_1B_1C_1$ និង $\Delta A_2B_2C_2$ និងផ្ទៃ S_1 និង S_2 និងមានបណ្តាជ្រុងរៀងគ្នាគឺ $a_1;b_1;c_1$ និង $a_2;b_2;c_2$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$a_1^2(c_2^2+b_2^2-a_2^2)+b_1^2(a_2^2+c_2^2-b_2^2)+c_1^2(b_2^2+a_2^2-c_2^2) \geq 16S_1S_2$$

401. គេឲ្យ $x;y;z$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $xyz \geq 10+6\sqrt{3}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{y}{x+y^3+z^2}+\frac{z}{y+z^3+x^2}+\frac{x}{z+x^3+y^2} \leq \frac{1}{2}$$

402. គេឲ្យ $x;y;z$ ជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $x+3y+5z \leq 3$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$3xy\sqrt{625z^4+4}+15yz\sqrt{x^4+4}+5zx\sqrt{81y^4+4} \geq 45\sqrt{5}xyz$$

403. គេឲ្យ $m;n;p$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{m}{(n+p)^2}+\frac{n}{(p+m)^2}+\frac{p}{(m+n)^2}\geq\frac{9}{4(m+n+p)}$$

404. គេឲ្យ $0<a;b;c<\frac{1}{2}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+2b+3c=2$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{a(4b+6c-3)}+\frac{2}{b(3c+a-1)}+\frac{9}{c(2a+4b-1)}\geq 54$$

405. គេឲ្យ $a;b;c\neq 0$ ចូររកតម្លៃធំបំផុតនៃកន្សោមខាងក្រោមនេះ

$$T=\frac{a^2}{a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{b^2+(a+c)^2}+\frac{c^2}{c^2+(a+b)^2}$$

406. គេឲ្យ $a;b;c>0$ និង $a+b+c=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\geq 30$$

407. គេឲ្យត្រីកោណ ΔABC មានមុំជាមុំស្រួច។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{1+\tan A+\tan B}+\frac{1}{1+\tan B+\tan C}+\frac{1}{1+\tan C+\tan A}\leq\frac{3}{1+2\sqrt{3}}$$

408. គេឲ្យ $a;b;c;d$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=4$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}}\leq 2(a+b+c)-4$$

Palond 2007

409. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនវិជ្ជមាន $a;b;c;d$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$a+b+c+d=4$ យើងមាន

$$\frac{a}{1+b^2c}+\frac{b}{1+c^2d}+\frac{c}{1+d^2a}+\frac{d}{1+a^2b}\geq 2$$

410. គេឲ្យ ΔABC មានមេដ្យាននិងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅរៀងគ្នាគឺ $m_a; m_b; m_c; R$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $m_a + m_b + m_c \leq \frac{9R}{2}$

411. គេឲ្យត្រីកោណ ΔABC ជាត្រីកោណមិនទាលចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O និងកាំស្មើនិង 1 ។ យើងសន្មិត G គឺជាទីប្រជុំទំងន់របស់ត្រីកោណ ΔABC និងមាន $A_0; B_0; C_0$ រៀងគ្នាគឺជា ចំណោលរបស់ G លើ $BC; CA; AB$ បណ្ដាបន្ទាត់ដែលកាត់តាម $A; B; C$ កែងរៀងគ្នាជាមួយនិង $GA; GB; GC$ និងកាត់គ្នាត្រង់ $A_1; B_1; C_1$ $(A \in B_1C_1; B \in A_1C_1; C \in A_1B_1)$ និងសន្មតិ $S_0; S_1$ រៀងគ្នាជាផ្ទៃនៃ $\Delta A_0B_0C_0; \Delta A_1B_1C_1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $\frac{32}{27} \leq S_0S_1 \leq \frac{27}{16}$

412. គេឲ្យ $a_1; a_2; \dots; a_n \in (0; p)$ ចំពោះ $p > 0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{p^{n+1}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \geq \frac{p^n}{n} + (p - a_1)(p - a_2)\dots(p - a_n)$$

ចំពោះ $n \in \mathbb{N}^*$

413. គេឲ្យបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a; b; c$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{a^2 + ab + bc} + \frac{b}{b^2 + bc + ca} + \frac{c}{c^2 + ca + ab} \geq \frac{9(ab + bc + ca)}{(a + b + c)^3}$$

414. គេឲ្យត្រីកោណ ABC មានផ្ទៃ S និង $R\,; r$ រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនិងក្រៅត្រីកោណ ΔABC ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $27R + 2r \geq 12\sqrt[4]{2}\sqrt{S}$

415. គេឲ្យ $x; y; z$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{x + y}{y + z} + \frac{z + y}{x + z} + \frac{x + z}{y + x} \geq \frac{x + y + 2z}{x + 2y + z} + \frac{2x + 3y + 3z}{x + y + 2z}$$

416. គេឲ្យ $x; y; z$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $xy + yz + zx + 9 \geq 4(x + y + z)$

417. ចូររកតម្លៃធំបំផុតនិងតូចបំផុតរបស់កន្សោម $P = \dfrac{x(1 + y^{10}) - (1 + x^2)y^5}{(1 + x)^2(1 + 2y^5 + y^{10})}$ $(x; y > 0)$

418. M គឺជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ ABC ។ បណ្ដាបន្ទាត់ $AM; BM; CM$ កាត់ $BC; CA; AB$

រៀងគ្នាគឺ $A_1; B_1; C_1$ ។ចូររកទីតាំង M ដើម្បីឲ្យកន្សោម $P = \dfrac{AM}{AM_1}.\dfrac{BM}{BM_1}.\dfrac{CM}{CM_1}$ ធំបំផុត។

419. គេឲ្យ $a; b; c; r; R$ រៀងគ្នាគឺជាបណ្ដាជ្រុង កាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនិងក្រៅត្រីកោណ ABC

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា:

$$a(b + c - a)^2 + b(c + a - b)^2 + c(a + b - c)^2 \leq 6\sqrt{3}R^2(2R - r)$$

420. គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}}{3} \leq \sqrt[3]{a.\frac{a + b}{2}.\frac{a + b + c}{2}}$$

421. គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a + b + c = 3$

ចូររកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោម

$$P = \sqrt{a^2 + a + 4} + \sqrt{b^2 + b + 4} + \sqrt{c^2 + c + 4}$$

422. គេឲ្យ $0 < a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n; 0 < b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតដែល

$\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sum_{i=1}^{n} b_i$ យើងឧបមាថាតាម $1 \leq k \leq n$ ដែលធ្វើឲ្យ $b_i \leq a_i$ ចំពោះ $1 \leq i \leq k$

និង $b_i \geq a_i$ ចំពោះ $i > k$.

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $a_1 a_2 \ldots a_n \geq b_1 b_2 \ldots b_n$

423. គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមានប្រែប្រួល។ចូររកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោម

$$P=\frac{\sqrt{bc}}{a+3\sqrt{bc}}+\frac{\sqrt{ca}}{b+3\sqrt{ca}}+\frac{\sqrt{ab}}{c+3\sqrt{ab}}$$

424. គេឲ្យស្វ៊ីត (u) កំណត់ដូចខាងក្រោម

$$(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})u_n=\frac{2}{2n+1}\ ;n=1;2;\ldots$$

$$u_1+u_2+\cdots+u_{2011}<\frac{1005}{1006}$$

425. គេឲ្យ 3 ចំនួនណាក៏ដោយដែល $a;b;c\in\left(0;\frac{23}{22}\right)$ ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម

$$T=\frac{(a+b-3c)^2}{(a+b)^2+5c^2}+\frac{(a-3b+c)^2}{(a+c)^2+5b^2}+\frac{(b-3a+c)^2}{(b+c)^2+5a^2}$$

426. គេឲ្យ $x;y;z$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានប្រែប្រួលដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖ $x+y+z=3$

ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម ៖ $P=\frac{x}{y^3+16}+\frac{y}{z^3+16}+\frac{z}{x^3+16}$

427. គេឲ្យ $x;y;z>0$ ដែលបំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌ $x^8+y^8+z^8=\frac{1}{27}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{x^7}{y^2+z^2}+\frac{y^7}{x^2+z^2}+\frac{z^7}{x^2+y^2}\geq\frac{\sqrt{3}}{18}$$

428. [*Vasile Cirtoaje ; Vo Quoc Ba Can; Tran Quoc Anh* 2010] ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ យើងបាន

$$\frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{2\sqrt{3}b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\frac{2\sqrt{3}c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}<5$$

429. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $abc=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{b+c-a}{bc(b+c)}+\frac{c+a-b}{ca(c+a)}+\frac{a+b-c}{ab(a+b)} \leq \frac{2}{(a+b)(b+c)}+\frac{2}{(b+c)(c+a)}+\frac{2}{(c+a)(a+b)}$$

430. គេឲ្យ $x; y; z; t > 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $x^3y^3 + y^3z^3 + z^3t^3 = 1 \ (*)$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{x^9}{yzt}+\frac{y^9}{xzt}+\frac{z^9}{xyt}+\frac{t^9}{xyz} \geq 1 \qquad (1)$

431. គេឲ្យ $x; y; z$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $xyz = 1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{x^4y^4}{x^5+y^5+x^4y^4}+\frac{y^4z^4}{y^5+z^5+y^4z^4}+\frac{z^4x^4}{z^5+x^5+z^4x^4} \leq 1$$

432. គេឲ្យ $a; b; c > 0$ ដែល $abc = 1$ ចូររកតម្លៃធំបំផុតនៃកន្សោម

$$P = \frac{1}{2a^3+b^3+c^3+2}+\frac{1}{a^3+2b^3+c^3+2}+\frac{1}{a^3+b^3+2c^3+2}$$

433. ពិនិត្យមើលបណ្តាចំនួនពិត $v; l; t$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោមនេះ

$$\begin{cases} \frac{2}{5} \leq t \leq \min\{v; l\} \\ vt \geq \frac{4}{15} \\ lt \geq \frac{1}{5} \end{cases}$$

ចូររកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោម $E(v; l; t) = \frac{1}{v}+\frac{2}{l}+\frac{3}{t}$

434. គេឲ្យបណ្តាចំនួនវិជ្ជមាន $x; y; z$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$x^{2009}+y^{2010}+z^{2011} \leq x^{2008}+y^{2009}+z^{2010}$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $x + y + z \leq 3$

435. គេឲ្យចតុមុខ $ABCD$ មាន $AB = CD = a; AD = BC = b; AC = BD = c$ និងតាង S គឺជាផ្ទៃទាំងអស់របស់ចតុមុខ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{c^2a^2}\leq\frac{9}{S^2}$$

436. គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^3}{(a+b)^3}+\frac{b^3}{(b+c)^3}+\frac{c^3}{(c+a)^3}\geq\frac{3}{8}$$

437. គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបីចំនួនវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c\geq 3abc$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $a^2+b^2+c^2\geq 3abc$

438. គេឲ្យ $a;b;c>0$ ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោមខាងក្រោមនេះ

$$Q=\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{2}\left[\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}-\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\right] \qquad (1)$$

439. គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតនៅក្នុងចន្លោះ $(1;2)$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{b\sqrt{a}}{4b\sqrt{c}-c\sqrt{a}}+\frac{c\sqrt{b}}{4c\sqrt{a}-a\sqrt{b}}+\frac{a\sqrt{c}}{4a\sqrt{b}-b\sqrt{c}}\geq 1$$

440. គេឲ្យពីរ៉ាមីតដែលមានជ្រុងកែងគ្នាត្រង់កំពូល។ សន្មតិ $\alpha;\beta;\gamma$ គឺជាមុំកើតឡើងពីកំពស់

និងជ្រុងដែលគូសចេញពីកំពូល។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)}+\frac{\cos^2\beta}{1-\cos(\gamma+\alpha)\cos(\gamma-\alpha)}+\frac{\cos^2\gamma}{1-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}\leq\frac{3}{4}$$

441. គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោម

$$3(a^4+b^4+c^4)-7(a^2+b^2+c^2)+10=0$$

ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម ៖ $P=\frac{a^2}{b+2c}+\frac{b^2}{c+2a}+\frac{c^2}{a+2b}$

442. គេឲ្យ $y=\sqrt{2\sin x-1}+\sqrt{2\cos x-1}$

ចូររកតម្លៃតូចបំផុតនិងតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោម

443. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ យើងមាន

$$\frac{ab}{3a+4b+2c}+\frac{bc}{3b+4c+2a}+\frac{ca}{3c+4a+2b}\leq\frac{a+b+c}{9}$$

តើសមភាពកើតមានពេលណា?

444. គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់

$$\frac{1}{a\sqrt{a+b}}+\frac{1}{b\sqrt{b+c}}+\frac{1}{c\sqrt{c+a}}\geq\frac{3}{\sqrt{2abc}}$$

445. ពិនិត្យបណ្ដាចំនួនពិត $a;b$ ដែលធ្វើឲ្យសមីការ $ax^3-x^2+bx-1=0$ មានឫស3វិជ្ជមាន (បណ្ដាឫសអាចស្មើគ្នា) ចូរកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម

$$P=\frac{5a^2-3ab+2}{a^2(b-a)}$$

446. $[IMO\ VN\ 2009-2010]$គេឲ្យបីចំនួនវិជ្ជមាន $x;y;z$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{36}{9+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}$$

447. $[IMO\ VN\ 2009-2010]$ គេឲ្យត្រីកោណ ABC មិនទាល។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}\geq\frac{10\sqrt{3}}{9}$$

តើសមភាពកើតមាននៅពេលណា?

448. $[IMO\ VN\ 2009-2010]$ $a)$ រកតម្លៃធំបំផុតនិងតូចបំផុតរបស់អនុគមន៍

$$f(x)=2\cos\frac{x}{2}+\sqrt{6}\sin x \text{ លើចន្លោះ } [0;\pi]$$

$b)$ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ត្រីកោណ ABC យើងមាន

$$\sin A+\sin B+\sqrt{6}\sin C\leq\frac{5\sqrt{10}}{4}$$

449. $[IMO\ VN\ 2009-2010]$ គេឲ្យ 3 ចំនួនវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$abc+a+c=b$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{2}{a^2+1}-\frac{2}{b^2+1}+\frac{3}{c^2+1}\leq\frac{10}{3}$$

450. $[IMO\ VN\ 2009-2010]$ គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិត $x;y;z$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$x^2+y^2+z^2=3$ ចូររកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោមខាងក្រោមនេះ

$$F=\sqrt{3x^2+7y}+\sqrt{5y+5z}+\sqrt{7z+3x^2}$$

451. $[IMO\ VN\ 2009-2010]$ ចូររកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោម។ចំពោះ $-1\leq a\leq\frac{5}{4}$

$$P=\frac{\sqrt{5-4a}-\sqrt{1+a}}{\sqrt{5-4}+2\sqrt{1+a}+6}$$

452. $[IMO\ VN\ 2009-2010]$ គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិត $a;b;c$ ដែល $\begin{cases}1\leq a;b;c\leq 4\\ abc\leq 8\end{cases}$

$a)$: រកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម $A=\frac{2}{b}+\frac{4}{c}$

$b)$: រកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោម $B=a+b+c$

453. គេឲ្យឆកោណប៉ោង $ABCDEF$ មាន $AB=BC;CD=DE;EF=FA$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\geq\frac{3}{2}$

454. $[IMO\ VN\ 2008]$ គេឲ្យ $x;y;z$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន។ ដែលមាន1 និងមួយមិន

ដូចគ្នា។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$(xy+yz+zx)\left[\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\right]\geq 4$$

សមភាពកើតមានពេលណា?

455. $[Korea\ 1999]$ គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែល $abc\geq 1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{a+b^4+c^4}+\frac{1}{a^4+b+c^4}+\frac{1}{a^4+b^4+c}\leq 1$$

456. គេឲ្យ $x_1;x_2;\dots;x_{2012}\in(0;1)$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt[2011]{x_1x_2\dots x_{2012}}+\sqrt[2011]{(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_{2012})}<1$$

457. គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c=3$ ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម $M=\sqrt{4^a+9^b+16^c}+\sqrt{9^a+16^b+4^c}+\sqrt{16^a+4^b+9^c}$

OLYMPIC Viet Nam 30/4/2012

458. ឧបមាថា M គឺជាចំណុចនៅក្នុង ΔABC សន្មតិ $A';B';C'$ រៀងគ្នាជាចំណោលកែងរបស់ M លើបន្ទាត់ $BC;CA;AB$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\left(\frac{MA}{MB'+MC'}\right)^2+\left(\frac{MB}{MC'+MA'}\right)^2+\left(\frac{MC}{MA'+MB'}\right)^2\geq 3$$

$Olympic\ Vietnam\ 2012$

459. គេឲ្យ ΔABC និងមានបណ្តាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំដែលចេញពីកំពូល $A;B;C$ ទៅកាត់រង្វង់ចារឹកក្រៅ ΔABC ត្រង់ $A';B';C'$ រៀងគ្នា។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $AA'.BB'.CC'\geq 16R^2r$

OLYMPIC Viet Nam 30/4/2012

460. គេឲ្យត្រីកោណ ABC មានបណ្តាមេដ្យាន $AA_1;BB_1;CC_1$ កាត់គ្នាត្រង់ G

($A_1;B_1;C_1$ ជាចំណុចនៅលើជ្រុងនៃត្រីកោណ ABC)

គូស $AA_1;BB_1;CC_1$ កាត់រង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC រៀងគ្នាត្រង់ $A_2;B_2;C_2$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $\frac{GA_2}{GA}+\frac{GB_2}{GB}+\frac{GC_2}{GC}\geq 3$

OLYMPIC Viet Nam 30/4/2012

ភាគទី II

1. $[IMO\_SL\ 2010]$ គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិត a, b, c, d ដែលបំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$a + b + c + d = 6, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 12.$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$36 \leq 4(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - (a^4 + b^4 + c^4 + d^4) \leq 48(Ukraine)$$

2. $[Balkan\ 2001]$ គេឲ្យ $a, b, c > 0$ ដែល $a + b + c \geq abc$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}abc$

3. $[Belarus\ 2001]$ គេឲ្យ $x_1; x_2; x_3 \in [-1; 1]$ និង $y_1; y_2; y_3 \in [0; 1)$

ចូររកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោម $\dfrac{1 - x_1}{1 - x_2y_3} . \dfrac{1 - x_2}{1 - x_3y_1} . \dfrac{1 - x_3}{1 - x_1y_2}$

4. $[China\ 2001]$ គេឲ្យត្រីកោណΔABC និង x ជាចំនួនពិតមួយណាក៏ដោយ

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^x \cos A + b^x \cos B + c^x \cos C \leq \dfrac{1}{2}(a^x + b^x + c^x)$

5. $[China\ 2001]$ ស្រាយថា $3(x + y + 1)^2 + 1 \geq 3xy \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

តើល័ក្ខខ័ណ្ឌណារបស់ x, y ដើម្បីឲ្យក្លាយជាសមភាព?

6. $[Olympic\ Vietnam\ 2006]$ គេឲ្យ $a, b, c > 0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^4}{a^4 + \sqrt[3]{(a^6 + b^6)(a^3 + b^3)^2}} + \frac{b^4}{b^4 + \sqrt[3]{(b^6 + c^6)(b^3 + c^3)^2}} + \frac{c^4}{c^4 + \sqrt[3]{(c^6 + a^6)(c^3 + a^3)^2}} \leq 1$$

7. $[Olympic\ Vietnam\ 2006]$ គេឲ្យសមីការដូចខាងក្រោម

$$a + \sqrt{1 - x^{2006}} + \frac{x^{2004} + 16}{a + \sqrt{1 - x^{2006}}} \leq 2\sqrt{x^{2004} + 16}$$

ចូររកតម្លៃ a ធំបំផុតដើម្បីវិសមីការមានឫសពីរ

8. $[Olympic\ Vietnam\ 2006]$ រកបណ្តាតម្លៃទាំងអស់របស់ $a;b;c;d;e\in[0;1]$ ដែល

$$A=\frac{a}{1+bcde}+\frac{b}{1+cdea}+\frac{c}{1+deab}+\frac{d}{1+eabc}+\frac{e}{1+abcd}=4$$

9. $[Olympic\ Vietnam\ 2006]$ គេឲ្យ $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

ដែល $|f(x)|\le 1.\forall x\in[-1;1]$ (1)

ចូររកចំនួនថេរ k តូចបំផុតដែលធ្វើយ៉ាងណាឲ្យ

$$|3ax^2+2bx+c|\le k,\forall[-1;1],\forall f \text{ ផ្ទៀងផ្ទាត់}(1)$$

10. $[Olympic\ Vietnam\ 2006]$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $xy+yz+zx\le\frac{2}{7}+\frac{9xyz}{7}$

ក្នុងនោះ x,y,z ជាបណ្តាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x+y+z=1$

11. $[Olympic\ Vietnam\ 2006]$ គេឲ្យបីចំនួនវិជ្ជមាន a,b,c ដែល $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{b^3}+\sqrt[4]{c^3}\ge\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}$

12. $[Olympic\ Vietnam\ 2006]$ ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n យើងបាន

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3.\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{4.\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{(1+n).\sqrt[3]{n}}<3$$

13. $[Olympic\ Vietnam\ 2006]$ គេឲ្យ a,b,c ជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$2006ac+ab+bc=2006$$

ចូររកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោម $P=\frac{2}{a^2+1}-\frac{2b^2}{b^2+2006^2}+\frac{3}{c^2+1}$

14. $[Olympic\ Vietnam\ 2006]$ គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិត a,b,c,d ដែលផ្ទៀតផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$\begin{cases}0 < a \le b \le c \le d \\ \dfrac{1}{\mathrm{a}} + \dfrac{2}{\mathrm{b}} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{c}} \ge 3 \\ \dfrac{2}{\mathrm{b}} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{c}} \ge 2\end{cases}$$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^4 + b^4 + c^4 - d^4 \le 17$

15. $[Olympic\ Vietnam\ 2006]$គេឲ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, cដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$ ចូររកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោមខាងក្រោម

$$T = \frac{1}{1 - a^2} + \frac{1}{1 - b^2} + \frac{1}{1 - c^2} - (a^2 + b^2 + c^2)$$

16. $[Olympic\ Vietnam\ 2006]$គេឲ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, c ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$a + b + c = 1$ ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម $M = \dfrac{1}{1 - 2(ab + bc + ca)} + \dfrac{1}{abc}$

17. $[Olympic\ Vietnam\ 2006]$គេឲ្យពហុធាដឺក្រេទី4

$$p(x) = 2006x^4 + 2004x^3 + 2007x^2 + 2003x + 2005$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $p(x) > 0. \forall x \in \mathbb{R}$

18. $[Olympic\ Vietnam\ 2006]$គេឲ្យ x, y, z ជាបណ្តាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$x + y > 0; x + z > 0; y + z > 0; xy + yz + zx > 0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$x.a^2 + y.b^2 + z.c^2 \ge 4\sqrt{xy + yz + zx}.S$ $\left(a, b, c\right.$ ជាជ្រុងនៃត្រីកោណនិងSជាផ្ទៃ$\left.\right)$

19. $[Olympic\ Vietnam\ 2006\&USA\&APMO\ 2002]$គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិត a, b, c

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{(2a + b + c)^2}{2a^2 + (b + c)^2} + \dfrac{(2b + c + a)^2}{2b^2 + (c + a)^2} + \dfrac{(2c + a + b)^2}{2c^2 + (a + b)^2} \le 8$

20. $[Olympic\ Vietnam\ 2006]$ គេឲ្យ $f(x) = |ax^2 + bx + c|\sqrt{1 - x^2} \le 1\ \ \forall x \in [-1; 1]$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$a)\ |a| \le 4$ និង

$b)\ |ax^2+bx+c|\le 3$

21. $[Olympic\ Vietnam\ 2006]$ គេឲ្យ a,b,c ជាបណ្ដាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានដែល

ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c=3$ ចូររកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោមខាងក្រោមនេះ

$$A=9ab+10ac+22bc$$

22. $[Olympic\ VN\ 2006]$ គេឲ្យ n ចំនួនពិត $x_1,x_2,\dots,x_n$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2=1$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}+\cdots+\frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}<\sqrt{\frac{n}{2}}$$

23. $[Olympic\ VN\ 2006]$ រកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោម $P(x)=x^3y+y^3x,\forall x,y\in\mathbb{R}$

ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $x^2+xy+y^2=1$

24. $[Olympic\ VN\ 2006\ ]$ គេឲ្យ $a,b,c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c=1$

ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់ $T=\dfrac{ab}{c(b+c)}+\dfrac{bc}{c(c+a)}+\dfrac{ca}{a(a+b)}$

[ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែខេត្តពោធិ៍សាត់ឆ្នាំ 2007]

25. $[Olympic\ VN\ 2006\ ]$ គេឲ្យ $s,t,u,v\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ និងបំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោមនេះ

$s+t+u+v=\pi$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{\sqrt{2}sins-1}{coss}+\frac{\sqrt{2}sint-1}{cost}+\frac{\sqrt{2}sinu-1}{cosu}+\frac{\sqrt{2}sinv-1}{cosv}\ge 0$$

26. $[Olympic\ vn\ 2006]$ រកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោម

$$F=\frac{x^3+y^3+z^3}{xyz}\quad \text{ចំពោះ } \forall x,y,z\in[1003;2006]$$

27. $[Olympic\ vn\ 2006]$

$a)$ គេឲ្យ $x, y > 0, x + y \geq 1$ រកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម

$$P = 51x + 23y + \frac{9}{x} + \frac{48}{7y}$$

$b)$ គេឲ្យ $a, b, c > 0$ ស្រាយបញ្ជាក់ថាវិសមភាពខាងក្រោម

$$(a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ca + a^2) \geq (ab + bc + ca)^3$$

28. $[Olympic\ vn\ 2006]$ផលបូករបស់ m ចំនួនវិជ្ជមានគូផ្សេងគ្នានិង n ចំនួនសេសវិជ្ជមានផ្សេងគ្នាគឺ 2001 ចូររកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោម $A = 5m + 2n$

29. $[Olympic\ vn\ 2006]$ គេឲ្យសំនុំ $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ យើងបង្កើតបណ្តាសំនុំ

$B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}$ ចំពោះ $b_i = \dfrac{(a_i + a_{i+1})}{2}$ $(i = 1,2, \dots, 2006), a_{2007} = a_1$

$C = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_n\}$ ចំពោះ $c_i = \dfrac{b_i + b_{i+1}}{2}$ $(i = 1,2, \dots, 2006), b_{2007} = b_1$

$D = \{d_1, d_2, d_3, \dots, d_n\}$ ចំពោះ $d_i = \dfrac{c_i + c_{i+1}}{2}$ $(i = 1,2, \dots, 2006), c_{2007} = c_1$

ដោយដឹងថា $A = D$ និង $a_1 = 1$ ចូរគណនា $a_2, a_3, \dots, a_{2006}$

សិស្សពូកែរាជធានីឆ្នាំ 2006

30. $[Olympic\ vn\ 2006]$គេឲ្យត្រីកោណ ABC. និង m_a, m_b, m_c រៀងគ្នាជាមេដ្យាន និង h_a, h_b, h_c រៀងគ្នាជាកំពស់ពីកំពូល A, B, C របស់ត្រីកោណ ABCមួយ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{m_a}{h_a} + \dfrac{m_b}{h_b} + \dfrac{m_c}{h_c} \leq 1 + \dfrac{1}{4 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}}$

31. $[Olympic\ vn\ 2006]$គេឲ្យត្រីកោណ ABC និង O ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណABC តាមចំណុច O គូសបន្ទាត់ d_1, d_2, d_3 រៀងគ្នាដោយកាត់ AB, BC ត្រង់ M, N កាត់ BC, CA ត្រង់ P, Q និងកាត់ CA, AB ត្រង់ R, T ហើយតាង S_1, S_2, S_3 និង S ជាផ្ទៃក្រាលារៀងគ្នានៃត្រីកោណ

$\Delta OPN, \Delta ORQ, \Delta OMT$ និង ΔABC

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}\geq\frac{18}{S}$

32. [$Olympic\ vn$ 2006]ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ a,b,cជាជ្រុងបីនៃត្រីកោណមួយនិងមាន

បរិមាត្រស្មើនិង 1 គឺ $\frac{13}{27}\leq a^2+b^2+c^2+4abc<\frac{1}{2}$

33. [$Olympic\ vn$ 2006] ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោមខាងក្រោមនេះ

$$A=\frac{a_1^8}{(a_1^2+a_2^2)^2}+\frac{a_2^8}{(a_2^2+a_3^2)^2}+\cdots+\frac{a_n^8}{(a_n^2+a_1^2)^2}$$

ចំពោះ $a_1,a_2,\dots,a_n$ ជាបណ្ដាចំនួនវិជ្ជមាននិង $a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1=K, K\in\mathbb{R}$

34. [$Olympic\ vn$ 2006] គេឲ្យ $a,b,c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{a^{2006}}+\frac{1}{b^{2006}}+\frac{1}{c^{2006}}\geq 2^{2006}\left[\frac{1}{(2a+b+c)^{2006}}+\frac{1}{(a+2b+c)^{2006}}+\frac{1}{(a+b+2c)^{2006}}\right]$$

35. [$Olympic\ vn$ 2006]គេឲ្យΔABC មានមុំស្រួច ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{cosBcosC}{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}+\frac{cosCcosA}{\cos\left(\frac{C-A}{2}\right)}+\frac{cosAcosB}{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}\leq\frac{3}{4}$$

36. [$Olympic\ vn$ 2006]គេឲ្យ x,y,zជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$x+y+z=1$ ចូររកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោមខាងក្រោម

$$P=\frac{x}{x+yz}+\frac{y}{y+xz}+\frac{\sqrt{xyz}}{z+xy}$$

37. [$Olympic\ vn$2006]គេឲ្យΔABCចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត I និងឲ្យ $BC=a; CA=b; AB=c$

ចូរស្រាយថា $\frac{IA.IB.IC}{a.IA^2+b.IB^2+c.IC^2}\leq\frac{1}{3\sqrt{3}}$

38. [$Olympic\ vn$ 2006]គេឲ្យa,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2}+\frac{b(c+a)}{(c+a)^2+b^2}+\frac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2}\leq\frac{6}{5}$$

សិស្សពូកែពោធិ៍សាត់ឆ្នាំ 2008

39. $[Olympic\ vn\ 2006]$ រកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោមបើ $a,b,c\in\left[\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right]$

$$T=\left(\frac{a+b}{c+d}\right)\left(\frac{a+c}{a+d}+\frac{b+d}{b+c}\right)$$

40. $[Olympic\ vn\ 2006]$ គេឲ្យ x,y,z,t ជាបណ្តាចំនួនពិតនៅក្នុង $-\frac{\pi}{2}$ និង $\frac{\pi}{2}$ និងដែល

$$\begin{cases}sinx+siny+sinz+sint=1\\ cos2x+cos2y+cos2z+cos2t\geq\frac{10}{3}\end{cases}$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $0\leq x,y,z,t\leq\frac{\pi}{6}$

41. $[Olympic\ vn\ 2006]$ គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) $n\in\mathbb{N}$ កំណត់ដោយ

$$\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=u_n+\frac{2}{u_n},n=1,2,\ldots\end{cases}$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $k\geq 2$ យើងមាន $\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{u_n^4}<\frac{5}{4}$

42. $[Olympic\ vn2006]$. គេឲ្យΔABC មានមុំបីជាមុំស្រួច ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(sinA)^{sinA}(sinB)^{sinB}(sinC)^{sinC}\geq\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

43, $[Olympic\ vn\ 2006]$ គេឲ្យបីចំនួនវិជ្ជមាន a,b,c ដែល $abc=1$

ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម $F=\frac{a^5}{b^3+c^2}+\frac{b^5}{c^3+a^2}+\frac{c^5}{a^3+b^2}+\frac{1}{4}(a^4+b^4+c^4)$

44. $[Olympic\ vn\ 2006]$ គេឲ្យត្រីកោណ ΔABC មានបណ្តាមុំស្រួចនិងចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត 0

កាំ R សន្មត R_1, R_2, R_3 រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ $\Delta OBC, \Delta OAC, \Delta OAB$

P ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណΔABCចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $R_1R_2R_3 \geq \frac{729R^7}{16P^4}$

45. $[Olympic\ vn\ 2006]$គេឲ្យត្រីកោណ ΔABC មានផ្ទៃ S និងជ្រុង $a = BC, b = CA, c = AB$

និងត្រីកោណ $\Delta A_1B_2C_3$ មានផ្ទៃ S_1 និងជ្រុង $a_1 = B_1C_1, b_1 = C_1A_1, c_1 = A_1B_1$

ចូរស្រាយថា $a^2(b_1^2 + c_1^2 - a_1^2) + b^2(c_1^2 + a_1^2 - b_1^2) + c^2(a_1^2 + b_1^2 - c_1^2) \geq 16SS_1$

46.$[Olympic\ vn\ 2006]$ គេឲ្យបួនចំនួនពិត $a, b, c, d \neq 1$និង $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$

ចូររកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោម $P = \frac{abcd}{(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)}$

47. $[Olympic\ vn\ 2006]$ គេឲ្យប្រលេពីប៉ែតកែង $ABCD.A'B'C'D'$ មាន $a = AB, b = AD$

និង $c = AA'$ អង្កត់ទ្រូង AC' ជាមួយនិងជ្រុង AB, AD, AA' រៀងគ្នាបង្កើតបានមុំ α, β, γ

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a^{12}}{\cos^{18}\alpha} + \frac{b^{12}}{\cos^{18}\beta} + \frac{c^{12}}{\cos^{18}\gamma} \geq 59049V^4$

(Vជាមាឌនៃប្រលេពីប៉ែតកែងនោះ)

48. $[Olympic\ vn\ 2007]$ គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិត a, b, x, y ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ

$ax - by = \sqrt{3}$ ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោ $F = a^2 + b^2 + x^2 + y^2 + bx + ay$

49. $[Olympic\ vn\ 2007]$ គេឲ្យត្រីកោណ ΔABC មានរង្វង់ចារឹកក្នុងកាំ I សន្មត m_a, m_b, m_c

ជាមេដ្យានរៀងគ្នាដែលគូសពីបណ្តាកំពូល A, B, C

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{IA^2}{m_a^2} + \frac{IB^2}{m_b^2} + \frac{IC^2}{m_c^2} \leq \frac{4}{3}$

50. $[Olympic\ vn\ 2007]$គេឲ្យ x, y, z ជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមាន

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{x}{y+z}+\frac{25y}{z+x}+\frac{4z}{x+y}\geq 2$

51. $[Olympic\ vn\ 2007]$ គេឲ្យបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$\begin{cases}4\geq a\geq b\geq c>0\\3abc\leq \min\{6a+8b+12c;72\}\\2ab\leq \min\{3a+4b;24\}\end{cases}$$

ចូររកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោម $P=a^2+b^2+c^2+a+b+c$

52. $[Olympic\ vn2007]$ គេឲ្យ a,b,c ជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែល $a+b+c=abc$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{c^2}}\geq 2\sqrt{3}$

53. $[Olympic\ vn2007]$ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាក្នុងត្រីកោណ ΔABCយើងមាន

$$\sqrt{\frac{15}{4}+\cos(A-B)+\cos(B-C)+\cos(C-A)}\geq sinA+sinB+sinC$$

54. $[Olympic\ vn2007]$ គេឲ្យ $a.b.c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\sqrt[3]{abc}\geq\frac{10}{9(a^2+b^2+c^2)}$

55. $[0lympic\ vn\ 2007]$គេឲ្យ a,b,c ដែល $abc=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^4}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^4}{(1+a)(1+c)}+\frac{c^4}{(1+a)(1+b)}\geq\frac{3}{4}$$

56. $[Olympic\ vn\ 2007]$គេឲ្យបណ្ដាចំនួនពិត a,b,c,d ដែល $\begin{cases}a^2+b^2=1\\c+d=3\end{cases}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $ac+bd+cd\leq\frac{9+6\sqrt{2}}{4}$

57. $[Olympic\ vn\ 2007]$គេឲ្យត្រីកោណ ΔABC មានផ្ទៃ $S=\frac{1}{4}$ និងជ្រុង a,b,c នៃត្រីកោណ

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{3}{\pi}\left(\frac{A}{tgA}+\frac{B}{tgB}+\frac{C}{tgC}\right) \le a^2+b^2+c^2$

58. $[Olympic\ vn 2007]$ គេឲ្យ a,b,c ជាជ្រុងនៃត្រីកោណមួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$a^2+b^2+c^2+1=2(ab+bc+ca)$$

ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម $P=9(a^2+b^2+c^2)-2ab-2bc-14ca$

59. $[Olympic\ vn\ 2007]$ គេឲ្យ a,b,c ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c=1$

ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម $T=\frac{a}{\sqrt{1-a}}+\frac{b}{\sqrt{1-b}}+\frac{c}{\sqrt{1-c}}$

60. $[Olympic\ vn\ 2007]$ គេឲ្យបីចំនួន $a,b,c \ge 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$a^2+b^2+c^2 \le 3$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $a+b+c \ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

61. $[Olympic\ vn\ 2007]$ ចូររកតម្លៃតូចនិងធំបំផុតរបស់កន្សោមដែល $x,y,z \in \left[\frac{1}{2};1\right]$

$maxP=\frac{x+y}{1+z}+\frac{y+z}{1+x}+\frac{z+x}{1+y}$ និង $minP=\frac{x+y}{1+z}+\frac{y+z}{1+x}+\frac{z+x}{1+y}$

62. $[Olympic\ vn\ 2007]$ ចូររកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោម $A=sinx_1.sinx_2\dots sinx_{2007}$

ដោយដឹកថា $tgx_1.tgx_2\dots tgx_{2007}=1$

63. $[Olympic\ vn\ 2007]$ គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (a_n)

a). ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k គឺយើងបាន

$$\sqrt[k]{a_1.a_2\dots a_n} \le \frac{1}{k(k+1)}\left(2a_1+\frac{3^2}{2}a_2+\frac{4^3}{3^2}a_3+\dots+\frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}a_k\right)$$

b). ដោយដឹកថា $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} a_i = a \quad (a\in\mathbb{R})$

តាង $b_n=a_1+\sqrt{a_1a_2}+\sqrt[3]{a_1a_2a_3}+\dots+\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}$ ចំពោះ $n\ge 1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាស្វ៊ីត (b_n)មានលីមីត

64. $[Olympic\ vn\ 2007]$ គេឲ្យចតុមុខ $ABCD$ មាន $AB = CD, AC = BD, AD = BC$

ហើយសន្មត α, β, γ ជាបណ្តាមុំដែលកើតឡើងដោយប្លង់ (BCD) ជាមួយនិងប្លង់

$(ABD), (ABC), (ACD)$ និង H ជាចំណោលកែងពីកំពូល A លើប្លង់ (BCD)

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{3^{cos\alpha + cos\beta} + 3^{cos\beta + cos\gamma} + 3^{cos\gamma + cos\alpha}}{cos\alpha.3^{cos\beta + cos\gamma} + cos\beta.3^{cos\gamma + cos\alpha} + cos\gamma.3^{cos\beta + cos\alpha}} \geq 3$$

65. $[Olympic\ vn\ 2007\ ]$ គេឲ្យពីរស្វ៊ីត $a_0, a_1, a_2, \ldots$ និង $b_0, b_1, b_2, \ldots$ ចំពោះ $a_0, b_0 > 0$

និង $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2b_n}, b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2a_n}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $Max\{a_{2006}; b_{2006}\} > \sqrt{2007}$

56. $[Olympic\ vn\ 2007]$គេឲ្យចតុមុខ $ABCD$ មានផ្ទៃទាំងអស់ S និងមាឌ V និងមានកាំស្វ៊ែ

ចារឹកក្នុង r និង S_1, S_2, S_3, S_4 រៀងគ្នាជាផ្ទៃរបស់មុខ BCD, CDA, DAB, ABC។ សន្មត M ជា

ចំណុចណាក៏ដោយនៅក្នុងចតុមុខនិង A', B', C', D' រៀងគ្នាជាចំណោលកែងពីចំណុច M

លើបណ្តាប្លង់ $(BCD), (CDA), (DAB), (ABC)$. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{S_1}{MA'} + \frac{S_2}{MB'} + \frac{S_3}{MC'} + \frac{S_4}{MD'} \geq \frac{S}{r}$$

67. $[Olympic\ vn\ 2007]$ ពិនិត្យទាំងអស់បណ្តាពហុកោណប៉ោង $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ចារឹក

ក្នុងរង្វង់ $(O; R)$ ។ សន្មត M គឺជាចំណុចនៅក្នុងពហុកោណប៉ុន្តែមិននៅក្នុងបណ្តារង្វង់

ដែលមានកាំ A_iA_{i+1} $(i = \overline{1,2007}, A_{2008} \equiv A_1)$ ។

រកតម្លៃតូចបំផុតដែលអាចមានរបស $S = \sum_{i=1}^{2007} \frac{AA_{i+1}^2}{MA_i.MA_{i+1}}$

68. $[Olympic\ vn\ 2007]$ ឧបមាថា r និង R ជាកាំស្វ៊ែរចារឹកក្នុងនិងចារឹកក្រៅនៃចតុមុខ

ដែលមានមាឌ V ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{R^2 r}{V} \geq \frac{3\sqrt{3}}{8}$

69. $[Olympic\ vn\ 2007]$ គេឲ្យចតុមុខ $SABC$ តាង $\widehat{ASB} = \alpha, \widehat{BSC} = \beta, \widehat{CSA} = \gamma$ និងដឹង

ថា $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ និង $SA = SB = SC = d$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $S_{\Delta ABC} \leq \frac{d^2.\sqrt{3}}{4}$

70. $[Olympic\ vn\ 2007]$ គេឲ្យ a, b, c ជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a + b + c = abc$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{c^2}} \geq 2\sqrt{3}$

71. $[Olympic\ vn\ 2007]$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ $a, b, c \geq 0$ និង $abc = 1$ គឺយើងបាន

$$\frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c} \leq 1$$

72. $[Czech - Slovak - Polish\ 2001]$ គេឲ្យចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n \geq 2$

និង $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(a_1^3 + 1)(a_2^3 + 1) \dots (a_n^3 + 1) \geq (a_1^2 a_2 + 1)(a_2^2 a_3 + 1) \dots (a_n^2 a_1 + 1)$$

73. $[France\ 2001]$ គេឲ្យបីចំណុចនៅក្នុងរង្វង់ដែលមានកាំស្មើនិង $\frac{\sqrt{3}}{3}$ សន្មត a, b, c

ជាបណ្តាជ្រុងរបស់ត្រីកោណ ABC ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) \leq a^4 b^4 c^4$$

74. $[Hong\ Kong\ 2001]$ គេឲ្យបណ្តាចំនួន $\forall a, b, c > 0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(a+b)^2 + (a+b+4c)^2 \geq \frac{100abc}{a+b+c}$$

75. $[IMO\ 2001]$ ចំពោះ $a; b; c > o\ L$ ចូរបង្ហាញថា $\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$

76. $[India\ 2001]$ គេឲ្យ $a;b;c > L0$ ដែល $abc = 1$ ចូរបង្ហាញថា: $a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b} \le 1$

77. $[India\ 2001]$ គេឲ្យ $x,y,z > 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $xyz \ge xy + yz + zx$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $xyz \ge 3(x + y + z)$

78. $[Japan\ 2001]$ ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a,b,c យើងបានដូចខាងក្រោមនេះ

$$(b + c - a)^2(c + a - b)^2(a + b - c)^2 \ge (b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)$$

79. $[Japan\ 2001]$ គេឲ្យ a,b,c ជាជ្រុងនៃត្រីកោណដែលមុំជាមុំស្រួច។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)(a^3 + b^3 + c^3) \ge 4(a^6 + b^6 + c^6)$$

80. $Korea\ 2001]$ គេឲ្យ $x_1,x_2,\dots,x_n$ និង $y_1,y_2,\dots,y_n$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

លក្ខខ័ណ្ឌ $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = 1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \le 2\left(1 - \sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)$

81. $[Korea\ 2001]$ គេឲ្យ a,b,c ជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt{(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2)} \ge abc + \sqrt[3]{(a^3 + abc)(b^3 + abc)(c^3 + abc)}$$

82. $[Korea\ 2001]$ គេឲ្យ a,b,c ជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមា។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt{a^4 + b^4 + c^4} + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \ge \sqrt{a^3b + b^3c + c^3a} + \sqrt{ab^3 + bc^3 + ca^3}$$

83. [MOSP 2001] គេឲ្យ $a,b,c > 0$ និង $abc = 1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(a + b)(b + c)(c + a) \ge 4(a + b + c - 1)$$

84. $[Poland\ 2001]$ គេឲ្យចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n \ge 3$ និង $x_1;x_2;\dots;x_n > 0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា មានតិចបំផុតក្នុងពីរវិសមភាពខាងក្រោមនេះពិត។

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} \ge \frac{n}{2} ; \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i-1} + x_{i-2}} \ge \frac{n}{2}$$

ចំពោះសម្មតិកម្ម $x_{n+1}=x_1;x_{n+2}=x_2;x_0=x_n$ និង $x_{-1}=x_{n-1}$

85. $[Poland\ 2001]$ គេឲ្យ $x_1;x_2;\dots;x_n\ge 0\ (n\ge 2)$ចូរបង្ហាញថា: $\sum_{i=1}^{n} ix_i\le\binom{n}{2}+\sum_{i=1}^{n}x_i^i$

86. $[Russia\ 2001]$ គេឲ្យ $a,b\in(0;1]$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\le\frac{2}{\sqrt{1+ab}}$

87. $[Saint\ Petersburg\ 2001]$ គេឲ្យ $x_1,x_2,\dots,x_{10}\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

និង $\sin^2x_1+\sin^2x_2+\cdots+\sin^2x_{10}=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$3(sinx_1+sinx_2+\cdots+sinx_{10})\le cosx_1+cosx_2+\cdots+cosx_{10}$$

88. $[Singapore\ 2001]$ គេឲ្យ x_1,x_2,x_3 ជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមាៗ

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^3}{(x_1^3+x_2^3+x_3^3)^2}\le 3$

89. $[Ukriane\ 2001]$ គេឲ្យ a,b,c,x,y,z ជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$x+y+z=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$ax+by+cz+2\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)}\le a+b+c$$

90. $[Ukriane\ 2001]$ គេឲ្យ $a_1,a_2,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ ដែផ្ទៀងផ្ទាត់ពីរល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោមនេះ

$a_1+a_2+\cdots+a_n\ge n^2$ និង $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\le n^3+1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: $n-1\le a_k\le n+1;\forall k$

91. $[USA\ 2001]$ គេឲ្យ a,b,c ជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a+b+c\ge abc$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាមានតិចបំផុតពីរក្នុងបីវិសមភាពខាងក្រោមនេះពិត

$$\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{6}{c}\ge 6;\frac{2}{b}+\frac{3}{c}+\frac{6}{a}\ge 6;\frac{2}{c}+\frac{3}{a}+\frac{6}{b}\ge 6$$

92. $[Vietnam\ 2001]$ គេឲ្យ $x;y;z>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោមនេះ

$(i)\ \ \frac{1}{\sqrt{2}} \le z \le \frac{1}{2}\min\{x\sqrt{2}; y\sqrt{3}\}$

$(ii)\ \ x + z\sqrt{3} \ge \sqrt{6}$

$(iii)\ y\sqrt{3} + z\sqrt{10} \ge 2\sqrt{5}$

ចូររកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោម $P(x;y;z) = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{y^2} + \frac{3}{z^2}$

93. $[Vietnam\ 2001]$ គេឲ្យ $x;y;z \in \mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោម

$(i)\ \ \frac{2}{5} \le z \le \min\{x;y\}$

$(ii)\ xz \ge \frac{4}{15}$

$(iii) yz \ge \frac{1}{5}$

ចូររកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោម $P(x;y;z) = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z}$

94. $[Vietnam\ 2001]$ គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$21ab + 2bc + 8ca \le 12$ ចូររកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោម $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$

95. $[Yugoslavia\ 2001]$ គេឲ្យ $x_1, x_2, \dots, x_{2001}$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$x_i^2 \ge x_1^2 + \frac{x_2^2}{2^3} + \cdots + \frac{x_{i-1}^2}{(i-1)^3}$ ចំពោះគ្រប់ $2 \le i \le 2001$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\sum_{i=2}^{2001} \frac{x_i}{x_1 + x_2 + \cdots + x_{i-1}} > 1{,}999$

96. $[USA\ 2001]$ គេឲ្យ $a, b, c \ge 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: $0 \le ab + bc + ca - abc \le 2$

97. $[APMO\ 2002]$ គេឲ្យ $x, y, z \geq 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\sqrt{x+yz}+\sqrt{y+zx}+\sqrt{z+yx} \geq \sqrt{xyz}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$

98. $[Balkan(Shortlisted)2002]$ គេឲ្យបណ្តាចំនួន $a, b, c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$$

99. $[Balkan(Shortlist)2002]$ គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, c ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$abc=2$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^3+b^3+c^3 \geq a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}$

100. $[Bosnia\ and\ Herzegovina\ 2002]$ គេឲ្យ a, b, c ផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a^2+b^2+c^2=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{a^2}{1+2bc}+\frac{b^2}{1+2ca}+\frac{c^2}{1+2ab} \geq \frac{3}{5}$

101. $[Canada\ 2002]$ ចូរស្រាយថា: $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab} \geq a+b+c, \forall a, b, c>0$

102. $[China\ 2002]$ គេឲ្យ $(P_1, P_2, \ldots, P_n),(n \geq 2)$

គឺជាមួយចំលាស់ណាក៏ដោយរបស់ $(1,2, \ldots, n)$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{1}{P_1+P_2}+\frac{1}{P_2+P_3}+\cdots+\frac{1}{P_{n-1}+P_n}>\frac{n-1}{n+2}$

103. $[Greece 2002]$ គេឲ្យ a, b, c ជាបណ្តាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានដែល $a^2+b^2+c^2=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1} \geq \frac{3}{4}(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2$

104. $[Hong\ Kong\ 2002]$ គេឲ្យ $a \geq b \geq c \geq 0$ និង $a+b+c=3$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$ab^2+bc^2+ca^2 \leq \frac{27}{8}$ ពេលណាករណីស្មើកើតមាន?

105. $[IMO\ Shortlist\ 2002]$ គេឲ្យ $a_1, a_2, \ldots$ គឺជាស្វ៊ីតបណ្តាចំនួនពិតមិនកំណត់ដែលមាន

មួយចំនួន $c, 0 \leq a_i \leq c\ \forall i$ និងផ្ទៀងផ្ទាត់ $|a_i - a_j| \geq \frac{1}{i+j}$ ចំពោះ $i \neq j$ ចូរស្រាយថា: $c \geq 1$

106. $[India\ 2002]$ គេឲ្យ $x, y \geq 0$ ដែល $x + y = 2$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $x^3y^3(x^3 + y^3) \leq 2$

107. $[India\ 2002]$ គេឲ្យ $a, b, c > 0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{c+a}{c+b} + \frac{a+b}{a+c} + \frac{b+c}{b+a}$

108. $[India\ 2002]$ គេឲ្យ $x_1, x_2, \dots, x_n$ ជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមាន។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \cdots + \frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2} < \sqrt{n}$$

109. $[India\ 2002]$ គេឲ្យ $a, b, c > 0$ ដែល $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$a + b + c \leq 3$$

110. $[Ireland\ 2002]$ គេឲ្យ $0 < a, b, c < 1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} \geq \frac{3\sqrt[3]{abc}}{1-\sqrt[3]{abc}}$$ និងកំណត់ករណីស្មើកើតមាននៅពេលណា?

111. $[Japan\ 2002]$ គេឲ្យចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n \geq 3$ និង $a_1, a_2, \dots, a_n$ $b_1, b_2, \dots, b_n$ ជា $2n$ ចំនួន

គត់វិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ និង $b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 = 1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $a_1(b_1 + a_2) + a_2(b_2 + a_3) + \cdots + a_{n-1}(b_{n-1} + a_n) + a_n(b_n + a_1) < 1$

112. $[Kazakhstan\ 2002]$ រកតម្លៃតូចបំផុតនិងធំបំផុតរបស់កន្សោម $a + b + c$ ដោយដឹងថា

$$a^2 + b^2 \leq c \leq 1$$

113. $[Latvia\ 2002]$ គេឲ្យ $a, b, c, d > 0$ និងផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{1}{1+a^4} + \frac{1}{1+b^4} + \frac{1}{1+c^4} + \frac{1}{1+d^4} = 1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: $abcd \geq 3$

114. $[Moldova\ 2002]$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+c} + \frac{c}{2c+a} \leq 1\ \forall a, b, c > 0$

115. $[Moldova\ 2002]$ គេឲ្យ $\alpha, \beta, x_1, x_2, \dots, x_n > 0 (n \geq 1)$ ដែល $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$

$$\text{ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា:}\frac{x_1^3}{\alpha x_1+\beta x_2}+\frac{x_2^3}{\alpha x_2+\beta x_3}+\cdots+\frac{x_n^3}{\alpha x_n+\beta x_1}\geq\frac{1}{n(\alpha+\beta)}$$

116. $[MOSP\ 2002]$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{2}{3}}\geq 3\ ;\forall a,b,c>0$

<u>លំហាត់លំនាំដូចគ្នា</u>

យើងមានមួយលំហាត់ពិបាកដូចខាងក្រោម

បើ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាលចំនួនពិតវិជ្ជមានគឺ $\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{3}{5}}+\left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\frac{3}{5}}+\left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{3}{5}}\geq 3$

$[Michea\ Rozenberg, Tran\ Quoc\ Anh\ ]$

<u>យើងអាចទាញបានលំហាត់ទូទៅគឺ</u>

បើ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមាននិងមាន $r\geq r_0=\frac{\ln 3}{\ln 2}-1\approx 0{,}585\ldots.$ គឺយើងបាន

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{r}+\left(\frac{2b}{c+a}\right)^{r}+\left(\frac{2c}{a+b}\right)^{r}\geq 3$$

117. $[Romania\ 2002]$ គេឲ្យ $a,b,c\in(0;1)$ ចូរស្រាយថា $\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1$

118. $[Romania\ 2002]$ គេឲ្យ $a_1,a_2,\ldots,a_n>0\ (n\geq 4)$ និងផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$

$$\text{ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា:}\frac{a_1}{a_2^2+1}+\frac{a_2}{a_3^2+1}+\cdots+\frac{a_n}{a_1^2+1}\geq\frac{4}{5}\left(a_1\sqrt{a_1}+a_2\sqrt{a_2}+\cdots+a_n\sqrt{a_n}\right)^2$$

119. $[Russia\ 2002]$ គេឲ្យ $a,b,c,x,y,z>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$a+x=b+y=c+z=1\ \text{ចូរស្រាយថា}\ (abc+xyz)\left(\frac{1}{ax}+\frac{1}{by}+\frac{1}{cz}\right)\geq 3$$

120. $[Russia\ 2002]$ គេឲ្យ $x,y,z>0$ និង $x+y+z=3$

$$\text{ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា}\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\geq xy+yz+zx$$

121. $[Singapore\ 2002]$ គេឲ្យ $a_1,a_2,\ldots,a_n;b_1,b_2,\ldots,b_n\in(1001;2002)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\leq\frac{17}{10}\sum_{i=1}^{n}a_i^2$

ករណីស្មើកើតមាននៅពេលណា?

122. $[Taiwan\ 2002]$ គេឲ្យ a,b,c,d ជាបណ្តាចំនួននៅចន្លោះ $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^4+b^4+c^4+d^4}{abcd}\geq\frac{(1-a)^4+(1-b)^4+(1-c)^4+(1-d)^4}{(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)}$$

123. $[Tuymaada\ 2002]$ គេឲ្យ $a;b;c>0$ និង $abc=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+cd}{1+c}+\frac{1+da}{1+d}\geq 4$$

124. $[Ukraine\ 2002]$ គេឲ្យ $a_1,a_2,a_3,\dots,a_n\geq 1$ និង $x_k\ (0\leq k\leq n)$ បានកំណត់ដោយ

$x_0=1$ និង $x_k=\dfrac{1}{1+a_kx_{k-1}}$ ចំពោះ $1\leq k\leq n$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$x_1+x_2+\cdots+x_n>\dfrac{n^2A}{n^2+A^2}$ ចំពោះ $A=1+a_1+a_2+\cdots+a_n$

125. $[United\ Kingdom\ 2002]$ គេឲ្យ $a;b;c>0$ និង $x^2+y^2+z^2=1$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$x^2yz+y^2zx+z^2xy\leq\frac{1}{3}$$

126. $[USA\ 2002]$ គេឲ្យត្រីកោណ ΔABC ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sin\frac{3A}{2}+\sin\frac{3B}{2}+\sin\frac{3C}{2}\leq\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{C-A}{2}+\cos\frac{A-B}{2}$$

127. $[Vietnam\ 2002\ ]$ គេឲ្យ $a;b;c\in\mathbb{R}$ ដែល $a^2+b^2+c^2=9$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$2(a+b+c)-abc\leq 10$$

128. $[Olympic\ VN\ 2002]$ គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $abc+a+c=b$

ចូររកតម្លៃធំបមផុតរបស់កន្សោម $P=\dfrac{2}{1+a^2}-\dfrac{2}{1+b^2}+\dfrac{3}{1+c^2}$

129. $[Vojtech\,Jarnik\ 2002]$ គេឲ្យ $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ ដែល $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i} = 1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: $$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i} \geq (n-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x_i}}$$

130. $[Yugoslavia\ 2002]$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a^{n+k}}{b^n} + \frac{b^{n+k}}{c^n} + \frac{c^{n+k}}{a^n} \geq a^k + b^k + c^k$

ចំពោះ $\forall \begin{cases} a, b, c \in \mathbb{R}^+ \\ n, k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

131. $[Laurentiu\,Panaitopol\ , Balkan\ 2003]$ គេឲ្យ $a, b, c > -1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1+a^2}{1+b+c^2} + \frac{1+b^2}{1+c+a^2} + \frac{1+c^2}{1+a+b^2} \geq 2$$

132. $[Bulgaria\ 2003]$ គេឲ្យ $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a+b+c = 3 \end{cases}$ ចូរស្រាយថា $\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1} \geq \frac{3}{2}$

133. $[\ China\ 2003]$ គេឲ្យ $a, b, c, d > 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $ab + cd = 1$

ហើយ x_1, x_2, x_3, x_4 និង y_1, y_2, y_3, y_4 ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = x_3^2 + y_3^2 = x_4^2 + y_4^2 = 1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4)^2 + (ax_4 + bx_3 + cx_2 + dx_1)^2 \leq 2\left(\frac{a^2+b^2}{ab} + \frac{c^2+d^2}{cd}\right)$$

134. $[China\ 2003]$ គេឲ្យ $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ គឺជាបណ្តាចំនួនដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$\sum_{i=1}^{2n-1} (a_i - a_{i+1})^2 = 1$$

ចូររកតម្លៃធំរបស់កន្សោម $(a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$

135. $[China\ 2003]$ គេឲ្យចំនួនពិត $x \in \left[\frac{3}{2}; 5\right]$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $2\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{15-3x} < 2\sqrt{19}$

136. [$China$ 2003] គេឲ្យ $x_1, x_2, \dots, x_5 \geq 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{1+x_i} = 1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $\sum_{i=1}^{5} \frac{x_i}{x_i^2+4} \leq 1$

137. [$IMO\ Shortlist$ 2003] គេឲ្យ $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)$ និង $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ ជាបណ្តា

ចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $z_{i+j}^2 \geq x_i y_i \ \forall (1 \leq i, j \leq n)$

តាង $M = \max\{z_2, \dots z_{2n}\}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\left(\frac{M + z_2 + \cdots + z_{2n}}{2n}\right)^2 \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)\left(\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}\right)$$

138. [IMO 2003] គេឲ្យចំនួនគត់ធម្មជាតិ n និង $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ ជាបណ្តាចំនួនពិត។

(1): ស្រាយថា $\left(\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j|\right)^2 \leq \frac{2(n^2-1)}{3} \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_j)^2$

(2): ស្រាយថាសមភាពកើតមានឡើងពេលនិងគ្រាន់តែពេល $x_1, x_2, \dots, x_n$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

139. [$Japan$ 2003] រកចំនួនពិត k ធំបំផុតដែលធ្វើឲ្យចំពោះគ្រប់ $a, b, c > 0$ និង $a^2 \geq bc$

យើងមាន $(a^2 - bc)^2 > k(b^2 - ca)(c^2 - ab)$

140. [$MOSP$ 2003] គេឲ្យត្រីកោណ ΔABC មានមុំជាមុំស្រួច។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\operatorname{cotg}^3 A + \operatorname{cotg}^3 B + \operatorname{cotg}^3 C + 6 \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C \geq \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} C$$

141. [$Vasile\ Cirtoaje, MOSP$ 2003] គេឲ្យ $a_1, a_2, \dots, a_n$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល

ផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{n-1+a_1} + \frac{1}{n-1+a_2} + \cdots + \frac{1}{n-1+a_n} \leq 1$

142. $[Faruk\ Zejnulahi\ , MOSP\ 2003\ ]$ គេឲ្យ $a,b,c \geq 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$a^2+b^2+c^2=1$: ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $1 \leq \dfrac{a}{1+bc}+\dfrac{b}{1+ca}+\dfrac{c}{1+ab} \leq \sqrt{2}$

143. $[Romania\ 2003]$ គេឲ្យ $\begin{cases} a,b,c>0 \\ abc=1 \end{cases}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$1+\frac{3}{a+b+c} \geq \frac{6}{ab+bc+ca}$$

144. $[Singapore\ 2003]$ រកចំនួនថេរ k តូចបំផុតដែលធ្វើយ៉ាងណាឲ្យបំពេញលក្ខខណ្ឌ

$$\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{c+a+2b}+\frac{ab}{a+b+2c} \leq k(a+b+c)\ , \forall a,b,c>0$$

145. $[Thailand\ 2003]$ គេឲ្យ $a,b,c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $a+b+c \geq \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^3+b^3+c^3 \geq a+b+c$

146. $[Tuymaada\ 2003]$ គេឲ្យ $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{sin\alpha_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{cos\alpha_i}\right) \leq 2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{sin2\alpha_i}\right)^2$$

147. $[USA\ 2003]$; $[Vietnan\ 2006]$ គេឲ្យ $\forall a,b,c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8$$

148. $[USA\ 2003]$ គេឲ្យ $a,b,c \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sum \frac{sina.\sin(a-b).\sin(a-c)}{\sin(b+c)} \geq 0$$

149. $[Vietnam\ 2003]$ សន្មតិ $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍មួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$f(cotx)=cos2x+sin2x\ \ \forall 0<x<\pi$ តាង $g(x)=f(x)f(1-x)$ ចំពោះ $-1 \leq x \leq 1$

ចូររកតម្លៃធំបំផុតនិងតូចបំផុតរបស់ $g(x)$ នៅចន្លោះ $[-1;1]$

150. $[APMO\ 2004]$ ចូរស្រាយថា $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 9(ab+bc+ca)\ \forall a,b,c>0$

151. $[Austria\ 2004]$ គេឲ្យ a,b,c,d គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

(a): ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^6+b^6+c^6+d^6-6abcd\geq -2$

(b): ចំពោះបណ្តាចំនួនគត់វិជ្ជមានណារបស់ k ដើម្បីឲ្យមានវិសមភាពខាងក្រោម

$$a^k+b^k+c^k+d^k-kabcd\geq M_k?$$

កំណត់តម្លៃធំបំផុតរបស់ M_k ចំពោះគ្រប់ k និងសមភាពកើតមានពេលណា?

152. $[Balkan\ 2004]$ គេឲ្យ x និង y មិនស្មើនិង 0 ព្រមគ្នា។

$$\text{ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : } \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\leq\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

153. $[Brazil\ 2004]$ គេឲ្យ $a,b,c,x>0$

$$\text{ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា } \frac{a^{x+2}+1}{a^xbc+1}+\frac{b^{x+2}+1}{b^xca+1}+\frac{c^{x+2}+1}{c^xab+1}\geq 3$$

154. $[Bulgaria\ 2004]$ គេឲ្យ $a_1,a_2,\dots,a_n;b_1,b_2,\dots,b_n\geq 0$ និង $c_k=\prod_{i=1}^{k}b_i^{\frac{1}{k}};1\leq k\leq n$

$$\text{ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា } nc_n+\sum_{k=1}^{n}k(a_k-1)c_k\leq\sum_{k=1}^{n}a_k^kb_k$$

155. $[Bulgaria\ 2004]$ គេឲ្យ $\begin{cases}a,b,c>0\\a+b+c=1\end{cases}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{9}{10}\leq\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}<1$$

156. $[China\ 2004]$ គេឲ្យ $x,y,z,t>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $xyzt=1$

$$\text{ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: } \frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}\geq 1$$

157. $[China\ 2004]$ គេឲ្យ $a,b,c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$1<\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}}\le\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

158. $[China\ 2004]$ គេឲ្យចំនួនគត់ $n\ge 1$ និង $a_1,a_2,\dots,a_n$ ជាបណ្តាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល

ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $a_1<a_2<\dots<a_n$ និង $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}\le 1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\left(\frac{1}{a_1^2+x^2}+\frac{1}{a_2^2+x^2}+\dots+\frac{1}{a_n^2+x^2}\right)^2\le\frac{1}{2}.\frac{1}{a_1(a_1-1)+x^2};\forall x\in\mathbb{R}$$

159. $[China\ 2004]$ គេឲ្យ $a,b,c,d\ge -1$ ចូររកបណ្តាតម្លៃរបស់ k ដែលធ្វើឲ្យ

$$a^3+b^3+c^3+d^3+1\ge k(a+b+c+d)$$

160. $[China\ 2004]$ រកចំនួនថេរធំបំផុតរបស់ λ ដែល $x+y+z\ge\lambda$ ក្នុងនោះ x,y,z

ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $x\sqrt{yz}+y\sqrt{zx}+z\sqrt{xy}\le 1$

161. $[\ China\ 2004]$ គេឲ្យ $a,b,c>0$ ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោមខាងក្រោមនេះ

$$\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}$$

162. $[Hellenic\ 2004]$ រកចំនួនថេរ M ធំបំផុតដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត

x,y,z យើងមាន $x^4+y^4+z^4+xyz(x+y+z)\ge M(xy+yz+zx)^2$

163. $[IMO\ SL2004]$ គេឲ្យបណ្តាចំនួន $a_1,a_2,\dots,a_n>0\ (n>1)$ មានមធ្យមធរណីមាត្រ g_n

សន្មតិ $A_1,A_2,\dots,A_N$ ជាស៊ីតបណ្តាមធ្យមនព្វន្តកំណត់ដូចខាងក្រោមនេះ

$$A_k=\frac{a_1+a_2+\dots+a_k}{k}\ ;k=1,2,3,\dots,n$$ ។

ហើយសន្មតិ G_n ជាមធ្យមនព្វន្តរបស់ $A_1,A_2,\dots,A_n$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: $n\sqrt[n]{\dfrac{G_n}{A_n}}+\dfrac{g_n}{G_n}\le n+1$ ហើយកំណត់ករណីសមភាព។

164. $[IMO\ 2004]$ គេឲ្យចំនួនគត់ $n>3$ និង $t_1,t_2,\dots,t_n$ ជាបណ្តាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$n^2+1>(t_1+t_2+\cdots+t_n)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_n}\right)$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $t_i;t_j;t_k$ ជាបណ្តាជ្រុងនៃត្រីកោណមួយចំពោះ $1\le i\le j\le k\le n$

165. $[India\ 2004]$ គេឲ្យ $a,b,c>0$ រកតម្លៃតូចបំផុតរបស់ $\dfrac{b^2+c^2}{a^2+bc}+\dfrac{c^2+a^2}{b^2+ca}+\dfrac{a^2+b^2}{c^2+ab}$

166. $[India\ 2004]$ គេឲ្យ $x_1,x_2,\dots,x_n\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{\prod_{i=1}^{n}x_i}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^n}\le\frac{\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)}{\left[\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)\right]^n}$$

167. $[Ireland\ 2004]$ គេឲ្យ $a,b>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt{2a(a+b)^3}+b\sqrt{2(a^2+b^2)}\le 3(a^2+b^2)$$

168. $[Japan\ 2004]$ គេឲ្យ $\begin{cases}a,b,c>0\\a+b+c=1\end{cases}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}\le 2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)$$

169. $[Lithuania\ 2004]$ គេឲ្យ $a,b\in[0;1]$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{a}{\sqrt{2b^2+5}}+\dfrac{b}{\sqrt{2a^2+5}}\le\dfrac{2}{\sqrt{7}}$

170. $[Moldova\ 2004]$ គេឲ្យ a,b,c គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\left|\frac{a^3-b^3}{a+b}+\frac{b^3-c^3}{b+c}+\frac{c^3-a^3}{c+a}\right|\le\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{4}$$

171. $[MOSP\ 2004]$ គេឲ្យ $x;y;z;a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $xy+yz+zx=3$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{a}{b+c}(y+z)+\dfrac{b}{c+a}(z+x)+\dfrac{c}{a+b}(x+y)\geq 3$

172. $[MOSP\ 2004]$ គេឲ្យ $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $(cosx)^{cosx}>(sinx)^{sin\,x}$

173. $[MOSP\ 2004]$ គេឲ្យចំនួនគត់ $n>1$ និង $a_1,a_2,\dots,a_n;b_1,b_2,\dots,b_n\geq 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$a_1a_2\dots a_n=b_1b_2\dots b_n;b_1+b_2+\cdots+b_n=1$ និង $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n}|a_i-a_j|\leq\sum_{1\leq i\leq j\leq n}|b_i-b_j|$

ចូរកំណត់តម្លៃធំបំផុតរបស់ $a_1+a_2+\cdots+a_n$

174. $[Gabriel\ Dospinescu\ ;Romania\ 2004]$ គេឲ្យ n ចំនួនពិត $a_1,a_2,\dots,a_n$ $(n\geq 2)$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់សំណុំរងមិនទទេ $S\subset\{1,2,\dots,n\}$

វិសមភាពខាងក្រោមតែងពិតគឺ

$$\left(\sum_{i\in S}a_i\right)^2\leq\sum_{1\leq i\leq j\leq n}\left(a_i+\cdots+a_j\right)^2$$

175. $[Russia\ 2004]$ គេឲ្យ $n>3$ និង $x_1,x_2,\dots,x_n>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1x_2\dots x_n=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{1}{1+x_1+x_1x_2}+\dfrac{1}{1+x_2+x_2x_3}+\cdots+\dfrac{1}{1+x_n+x_nx_1}>1$

176. $[Spian\ 2004]$ គេឲ្យ $x;y\in(-1;1)$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left|\dfrac{x-y}{1-xy}\right|\leq\dfrac{|x|+|y|}{1+|xy|}$

177. $[United\ Kingdom\ 2004]$ (a): គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិត a,b,c ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$a^3+b^3+c^3>0$ ពេលនោះគឺ $a^5+b^5+c^5>0$

(b): គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិត a,b,c,d ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c+d=0$

ចូរស្រាយថា បើ $a^3+b^3+c^3+d^3>0$ នោះ $a^5+b^5+c^5+d^5>0$

178. $[USA\ 2004]$ គេឲ្យ $a,b,c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(a^5-a^2+3)(b^5-b^2+3)(c^5-c^2+3)\geq (a+b+c)^3$$

179. $[Vietnam\ 2004]$ គេឲ្យ x,y,z គឺជាបណ្តាពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$(x+y+z)^3=32xyz$$

រកតម្លៃតូចនិងធំបំផុតរបស់កន្សោម $\dfrac{x^4+y^4+z^4}{(x+y+z)^4}$

180. $[APMO\ 2005]$ គេឲ្យ a,b,c ជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=8$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^2}{\sqrt{(a^3+1)(b^3+1)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(b^3+1)(c^3+1)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(c^3+1)(a^3+1)}}\geq\frac{4}{3}$$

181. $[Austria\ \ 2005]$ គេឲ្យ $a,b,c,d>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}\geq\frac{a+b+c+d}{abcd}$$

182. $[Balkan\ 2005]$ គេឲ្យ $a,b,c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c+\frac{4(a-b)^2}{a+b+c}$$

183. $[Baltic\ Way\ 2005]$ គេឲ្យ $\begin{cases}a,b,c>0\\abc=1\end{cases}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\leq 1$$

184. $[Belarus\ 2005]$ គេឲ្យ a,b ជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\left(a^2+b+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\frac{3}{4}\right)\geq\left(2a+\frac{1}{2}\right)\left(2b+\frac{1}{2}\right)$$

185. $[Bosnia\ and\ Hercegovina\ 2005]$ គេឲ្យ $\begin{cases}a,b,c>0\\a+b+c=1\end{cases}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{a}\le\frac{1}{\sqrt{3}}$$

186. $[China\ 2005]$ គេឲ្យ $x,y>0$ ដែល $x^3+y^3=x-y$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $x^2+4y^2<1$

187. $[China\ 2005\ ]$ គេឲ្យ $a;b;c$ ជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$ab+bc+ca=\frac{1}{3}$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{1}{a^2-bc+1}+\dfrac{1}{b^2-ca+1}+\dfrac{1}{c^2-ab+1}\le 3$

188. $[China\ 2005]$ គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ដែលបំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$a+b+c=1$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $10(a^3+b^3+c^3)-9(a^5+b^5+c^5)\ge 1$

189. $[China\ 2005]$ គេឲ្យ $x_1,x_2,\dots,x_n$ $(n>2;x_i\in\mathbb{R};i=1,2,\dots,n)$ និងផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right|>1;|x_i|\le 1\ (i=1,2,\dots,n)$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន k ដែលធ្វើឲ្យ $\left|\sum_{i=1}^{k}x_i-\sum_{i=k+1}^{n}x_i\right|\le 1$

190. $[China\ 2005]$គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណដែលមានស្រួច។ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម

$$P=\frac{\cos^2 A}{cosA+1}+\frac{\cos^2 B}{cosB+1}+\frac{\cos^2 C}{cosC+1}$$

191. $[Croatia\ 2005]$ គេឲ្យ $a,b,c>0$ និងបំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $(a-1)(b-1)(c-1)\ge 8$

192. $[Czech-Slonak\ 2005]$ គេឲ្យ $a,b,c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $abc=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)}\geq\frac{3}{4}$

193. [$France$ 2005] គេឲ្យ $a,b,c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a^2+b^2+c^2=3$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\geq 3$

194. [$Gemany$2005] គេឲ្យ $a_1,a_2,\dots,a_n;b_1,b_2,\dots,b_n>0$

ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោម

$a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n$ និង $b_1\geq a_1;b_1b_2\geq a_1a_2;b_1b_2b_3\geq a_1a_2a_3;\dots;b_1b_2\dots b_n\geq a_1a_2\dots a_n$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $b_1+b_2+\cdots+b_n\geq a_1+a_2+\cdots+a_n$

195. [$Germany$ 2005] គេឲ្យ $\begin{cases}a,b,c>0\\ab+bc+ca=1\end{cases}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a}\leq\frac{1}{abc}$

196. [IMO 2005] គេឲ្យ $x,y,z>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $xyz\geq 1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+x^2+z^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\geq 0$

197. [$Iran$ 2005] គេឲ្យ $1\geq m>0$ និង $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$ ជាបណ្តាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល

ផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}=1$ និង $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=m$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ i ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_i\leq m$ យើងមាន $n-i\geq n(m-a_i)^2$

198. [$Iran$ 2005] គេឲ្យ $a,b,c\geq 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}=2$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $ab+bc+ca\leq\frac{3}{2}$

199. [$Iran$ 2005] គេឲ្យ $x;y;z$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតដែល $xyz=-1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$x^4+y^4+z^4+3(x+y+z)\geq \frac{y^2+z^2}{x}+\frac{z^2+x^2}{y}+\frac{x^2+y^2}{z}$$

200. $[Japan2005]$ គេឲ្យ a,b,c ជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$a+b+c=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}\leq 1$

201. $[Korea\ 2005]$ គេឲ្យ $x_1,x_2,\dots,x_n$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$x_1^2+\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2\leq 4(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)$$

202. $[Korea\ 2005];[Olympic\ VN\ 2006]$គេឲ្យ n ចំនួនពិត $x_1,x_2,\dots,x_n$

ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2=1$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}+\cdots+\frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}<\sqrt{\frac{n}{2}}$$

203. $[Moldova\ 2005]$ គេឲ្យ $p=\sqrt{4+3\sqrt{2}}$ និងគេឲ្យ $x,y,z\in\left[\frac{1}{p};p\right]$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$9(xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2)\geq (x+y+z)^4$$

204. $[Moldova\ \ 2005]$ គេឲ្យ $\begin{cases}a,b,c>0\\a^4+b^4+c^4=3\end{cases}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{4-ab}+\frac{1}{4-bc}+\frac{1}{4-ca}\leq 1$$

205. $[Poland\ 2005]$ គេឲ្យ $a,b,c\in[0;1]$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ca+1}+\frac{c}{ab+1}\leq 2$

206. $[Republic\ of\ Srpska\ 2005]$ គេឲ្យ $a,b,c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt{ab(1-c)}+\sqrt{bc(1-a)}+\sqrt{ca(1-b)}\leq\sqrt{\frac{2}{3}}$

207. $[Romania\ 2005]$ គេឲ្យ $\begin{cases}a,b,c>0\\abc\geq 1\end{cases}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}\leq 1$$

208. [$Russia$ 2005] គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមា។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$1+x^{n+1}\geq\frac{(2x)^n}{(1+x)^{n-1}};\forall x\in\mathbb{R}^+$$

209. [\`$Serbia\ and\ Montenegro$ 2005] គេឲ្យ a,b,c ជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}\geq\sqrt{\frac{3}{2}(a+b+c)}$

210. [$Slovenia$ 2005] គេឲ្យ $\begin{cases}a,b,c>0\\ab+bc+ca=1\end{cases}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}+6(a+b+c)}\leq\frac{\sqrt[3]{3}}{abc}$$

211. [$Taiwan$ 2005] រកបណ្តាចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n\geq 3$ ដែលអាចមានមួយចំនួនថេរ M_n

ដើម្បីឲ្យវិសមភាពខាងក្រោមពិតចំពោះគ្រប់ n ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a_1;a_2;\dots;a_n$

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{\sqrt[n]{a_1a_2,\dots,a_n}}\leq M_n\left(\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_3}{a_2}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n-1}}+\frac{a_1}{a_n}\right)$$

ក្រោយពីចំពោះគ្រប់ n ដែលរកបាន។ចូររកតម្លៃតូចបំផុតដែលអាចមានរបស់ M_n

212. [$Taiwan$ 2005] គេឲ្យ $a_1,a_2,\dots,a_{95}>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sum_{k=1}^{95}a_k\leq 94+\prod_{k=1}^{95}\max\{1;a_k\}$$

213. [$Thailand$ 2005] គេឲ្យ $a,b,c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $1+\frac{3}{ab+bc+ca}\geq\frac{6}{a+b+c}$

214. [$Tuymaada$ 2005] គេឲ្យ x,y,z ដែលបំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌ $\begin{cases}x,y,z>0\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\dfrac{x}{x^3+yz}+\dfrac{y}{y^3+zx}+\dfrac{z}{z^3+xy}\geq 3$

215. $[Ukraine\ 2005]$ គេឲ្យ $a,b,c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^3}{c^2}+\dfrac{c^4}{a^3}\geq -a+2b+2c$

216. $[UK\ 2005]$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\right)^2\geq (a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right);\ \forall a,b,c>0$

217. $[Vietnam\ 2005]$ គេឲ្យ $a,b,c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^3+\left(\frac{b}{b+c}\right)^3+\left(\frac{c}{c+a}\right)^3\geq\frac{3}{8}$$

218. $[Balkan\ Shortlist\ 2006]$ គេឲ្យ $x,y,z>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $x+2y+3z=\dfrac{11}{12}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $6(3xy+4xz+2yz)+6x+3y+4z+72xyz\leq\dfrac{107}{18}$

219. $[Balkan\ Shortlist\ 2006]$ គេឲ្យត្រីកោណដែលមានមុំជាមុំស្រួច ABC មានជ្រុង a,b,c

និងមានប្រវែងនៃមេដ្យានរៀងគ្នា $m_a;m_b;m_c$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{m_a^2}{b^2+c^2-a^2}+\frac{m_b^2}{c^2+a^2-b^2}+\frac{m_c^2}{a^2+b^2-c^2}\geq\frac{9}{4}$$

220. $[Bulgaria\ 2006]$ រកតម្លៃធំបំផុតរបស់អនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{lgx.lgx^2+lgx^3+3}{\lg^2 x+lgx^2+2}$

221. $[Bulgaria\ 2006]$ គេឲ្យ $a,x,y\in(0;1)$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{|x-y|}{(1-xy)}\leq\dfrac{|x^a-y^a|}{(1-x^ay^a)}$

222. $[Bulgaria\ 2006]$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $t^2(xy+yz+zx)+2t(x+y+z)+3\geq 0$

ដែលបំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌ $\forall x,y,z,t\in[-1;1]$

223. $[Bulgaria\ 2006]$ គេឲ្យ $b^3+b\leq a-a^3$ រកតម្លៃធំបំផុតរបស់ $a+b$

224. $[Bulgaria\ 2006]$ គេឲ្យ a,b,c ជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{ab}{3a+4b+5c}+\frac{bc}{3b+4c+5a}+\frac{ca}{3c+4a+5b}\leq\frac{a+b+c}{12}$$

225. $[China\ 2006]$ គេឲ្យ $x_1,x_2,\dots,x_n>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+x_i}}\right)\leq\frac{n^2}{\sqrt{n+1}}$$

226. $[China\ 2006]$ គេឲ្យ $\begin{cases}a,b,c>0\\a+b+c=1\end{cases}$ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{ab}{\sqrt{ab+bc}}+\frac{bc}{\sqrt{bc+ca}}+\frac{ca}{\sqrt{ca+ab}}\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$$

227. $[China\ 2006]$ គេឲ្យ $a_1,a_2,\dots,a_n$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតដែលមានផលបូកស្មើនិង 0

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\max_{1\leq i\leq n} a_i^2\leq\frac{n}{3}\sum_{i=1}^{n-1}(a_i-a_{i+1})^2$

228. $[Costa\ Rica\ 2006]$ គេឲ្យ a,b,c ជាប្រវែងជ្រុងបីរបស់ត្រីកោណមួយ

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{3(a^4+b^4+c^4)}{(a^2+b^2+c^2)^2}+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\geq 2$

229. $[Germany\ 2006]$ ឲ្យ n ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាននិងឲ្យ $b_1,b_2,\dots,b_n$ គឺ n បណ្តាចំនួនពិត

តាង $a_1=\frac{b_1}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$ និង $a_k=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_k}{b_1+b_2+\cdots+b_{k-1}}$ ចំពោះគ្រប់ $k>1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $a_1+a_2+\cdots+a_n\leq\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$

230. $[IMO\_SL\ 2006]$ ឲ្យ a,b,c គឺជាប្រវែងជ្រុងបីនៃត្រីកោណមួយ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}\leq 3$$

231. $[Hong\ Kong\ 2006]$ គេឲ្យ $a_1,a_2,\dots$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតវិជ្ជមាន។

ឧបមាថាមានចំនួនពិតវិជ្ជមាន M

ដែលធ្វើឲ្យ $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\le Ma_{n+1}^2$ ចំពោះគ្រប់ $n=1,2,3,\ldots$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

មានចំនួនវិជ្ជមាន M' ដែលធ្វើឲ្យ $a_1+a_2+\cdots+a_n<M'a_{n+1}$ ចំពោះគ្រប់ $n=1,2,3,\ldots$

232. [IMO 2006 $Ireleand$] រកចំនួនពិតតូចបំផុត M ដែលធ្វើឲ្យ

$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)|\le M(a^2+b^2+c^2)$$ ចំពោះគ្រប់ a,b,c

233. [$Japan$ 2006] គេឲ្យ $x_1;x_2;x_3;y_1;y_2;y_3;z_1;z_2;z_3$ ជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

តាង $M=(x_1^3+x_2^3+x_3^3+1)(y_1^3+y_2^3+y_3^3+1)(z_1^3+z_2^3+z_3^3+1)$

និង $N=A(x_1+y_1+z_1)(x_2+y_2+z_2)(x_3+y_3+z_3)$

រកចំនួនធំបំផុតរបស់ A ដែលធ្វើឲ្យ $M\ge N$ និងរកល័ក្ខខ័ណ្ឌដែលសមភាពកើតមានឡើង

234. [$Kazakhstan$ 2006] គេឲ្យ a,b,c,d ជាបណ្តាចំនួនពិតដែលបំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$a+b+c+d=0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(ab+ac+ad+bc+bd+cd)^2+12\ge 6(abc+abd+acd+bcd)$$

235. [$Moldova$ 2006] គេឲ្យ a,b,c ជាបណ្តាជ្រុងបីនៃត្រីកោណមួយ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$a^2\left(\frac{b}{c}-1\right)+b^2\left(\frac{c}{a}-1\right)+c^2\left(\frac{a}{b}-1\right)\ge 0$$

236. [$Moldova$ 2006] គេឲ្យ a,b,c ជាជ្រុងនិង p ជាកន្លះបរិមាត្ររបស់ត្រីកោណមួយ

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $a\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}+b\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}}+c\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}\ge p$

237. [$Moldova$ 2006] គេឲ្យ $\begin{cases}a,b,c>0\\abc=1\end{cases}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a+3}{(a+1)^2}+\frac{b+3}{(b+1)^2}+\frac{c+3}{(c+1)^2}\ge 3$$

238. [$Mongolia$ 2006] គេឲ្យ x,y,z គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$x+y+z=1$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sum(1+x)\sqrt{\frac{1-x}{x}} \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}.\frac{(1+x)(1+y)(1+z)}{\sqrt{(1-x)(1-y)(1-z)}}$

239. [$Poland$ 2006] គេឲ្យ a,b,c ជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$ab+bc+ca=abc$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)}+\frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)}+\frac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)} \geq 1$

240. [$Romania$ 2006] គេឲ្យ $x+y=1$ រកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោម $(x^3+1)(y^3+1)$

241. [$Romania$ 2006] គេឲ្យ $a_1,a_2,\dots,a_n$ ជាបណ្តាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$a_1+a_2+\cdots+a_n=0$ និង $|a_i| \leq 1$ ចំពោះ $i=1,2,\dots,n$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$a)$: មានបណ្តាចំនួន $k \in \{1,2,\dots,n\}$ ដែលធ្វើឲ្យ $|a_1+2a_2+\cdots+ka_k| \leq \frac{2k+1}{4}$

$b)$: ចំពោះ $n>2$ ទំហំ $\frac{2k+1}{4}$ ក្នុងការឲ្យតម្លៃខាងលើគឺតម្លៃធំបំផុតដែលអាចមាន

(គឺថាយើងមិនអាចជំនួសតម្លៃណាដែលមានទំហំតូចជា)

242. [$Romania$ 2006] គេឲ្យ $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geq a^2+b^2+c^2$$

243. [$Calin\ Popescu$; $Romania$ 2006] គេឲ្យ n ចំនួនពិត $a_0;a_1;a_2;\dots;a_n$ $(n \geq 2)$

ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_0=0; a_1 \geq 0; a_n=1$ និង $a_k \leq \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$ $\quad k=1,2,,\dots,n-1$

គេឲ្យ $p;q \in \mathbb{N}$ និង $q \geq p \geq 0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $(p+1)\sum_{k=1}^{n-1} a_k^p \geq (q+1)\sum_{k=1}^{n-1} a_k^q$

244. $[Romania\ 2006]$ ឲ្យ $a,b,c \in \left[\frac{1}{2};1\right]$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$2 \le \frac{a+b}{1+c}+\frac{b+c}{1+a}+\frac{c+a}{1+b} \le 3$$

245. $[Romania\ 2006]$ ឲ្យ $x_1,x_2,\dots,x_n \in \mathbb{R}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sum_{1\le i\le j\le n}\left|x_i+x_j\right| \ge \frac{n-2}{2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

246. $[Russia\ 2006]$ ឲ្យ $\begin{cases} a,b,c,d>0 \\ a+b+c+d=4 \end{cases}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+d^2}+\frac{d}{1+a^2} \ge 2$$

247. $[Serbia\ 2006]$ ឲ្យ $\begin{cases} x,y,z>0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{x}{y^2+z}+\frac{y}{z^2+x}+\frac{z}{x^2+y} \ge \frac{9}{4}$

248. $[Singapore\ 2006]$ ឲ្យចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n>1$ និង $x_1,x_2,\dots,x_n$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិត ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|=1$ និង $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left|\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{2}+\cdots+\frac{x_n}{n}\right| \le \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$

249. $[Thailand\ 2006]$ ឲ្យ a,b ជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ចូរកំណត់ចំនួនថេរ M ធំបំផុត ដែលធ្វើឲ្យ

$$\frac{1}{ka+b}+\frac{1}{kb+a} \ge \frac{M}{a+b}$$ ចំពោះគ្រប់ $k \in [0;\pi]$

250. $[Turkey\ 2006]$ ឲ្យ x,y,z ជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $xy+yz+zx=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{27}{4}(x+y)(y+z)(z+x) \ge \left(\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}\right)^2 \ge 6\sqrt{3}$

251. $[Ukraine\ 2006]$ គេឲ្យ $a,b,c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$3(a^3+b^3+c^3+abc) \ge 4(a^2b+b^2c+c^2a)$$

252. $[Ukraine\ 2006]$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $|cosx| + |cosy| + |\cos(x+y)| \geq 1\ ;\quad x, y \in \mathbb{R}$

253. $[USA\ 2006]$ គេឲ្យ x, y, z មិនវិជ្ជមានព្រមគ្នារកចំនួនពិត k តូចបំផុតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ

$$k(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1)(z^2 - z + 1) \geq (xyz)^2 - xyz + 1$$

254. $[Vietnam\ 2006]$ គេឲ្យ $x; y; z \in [1; 2]$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 6\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)$$ និងសមភាពកើតមានពេលណា?

255. $[VMEO\ 2006]$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sum \sqrt{(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)} \geq a^2 + b^2 + c^2$

ចំពោះគ្រប់ $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

256. $[APMO\ 2007]$ គេឲ្យ x, y, z គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{x^2 + yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}} + \dfrac{y^2 + zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}} + \dfrac{z^2 + xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}} \geq 1$

257. $[Austria\ 2007]$ គេឲ្យ $0 \leq x_0, x_1, \dots, x_{669} < 1$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតផ្សេងគ្នាមួយៗ

ចូរស្រាយមានផ្ទាក់ចំនួន $(x_i; x_j)$ ដែលធ្វើឲ្យ $0 < x_i x_j (x_i - x_j) < \dfrac{1}{2007}$

258. $[Belarus\ 2007]$ គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាននិង $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} > 0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1 x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{x_{n+1}} \geq 4(1 - x_1 x_2 \dots x_{n+1})$$

259. $[Brazil\ 2007]$ គេឲ្យ $a, b, c \in \mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ $abc = 1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sum a^2 + \sum \frac{1}{a^2} + 2\left(\sum a + \sum \frac{1}{a}\right) \geq 6 + 2\sum \frac{b+c}{a}$$

260. $[Bulgaria\ 2007]$ គេឲ្យចំនួនគត់ $n \geq 2$ និង $x_1, x_2, \dots, x_n \in (0; 1)$

ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$(1-x_i)(1-x_j) \geq \frac{1}{4}$ ចំពោះ $1 \leq j \leq i \leq n$ ចូររកចំនួនថេរធំបំផុត $C(n)$ ដែលធ្វើឲ្យ

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq C(n) \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} \left(2x_i x_j + \sqrt{x_i x_j}\right)$$

261. $[China\ 2007]$ គេឲ្យ a, b, c គឺជាជ្រុងបីនៃត្រីកោណមួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a+b+c=3$

រកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម $a^2+b^2+c^2+\frac{4abc}{3}$

262. $[China\ 2007]$ គេឲ្យ α, β ជាមុំស្រួច។ ចូររកតម្លៃធំបំផុតរបស់ $P = \frac{\left(1-\sqrt{tan\alpha tan\beta}\right)^2}{cot\alpha + cot\beta}$

263. $[China\ 2007]$ គេឲ្យ $\begin{cases} a,b,c>0 \\ abc=1 \end{cases}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^k}{a+b}+\frac{b^k}{b+c}+\frac{c^k}{c+a} \geq \frac{3}{2} \quad \forall k \geq 2$$

264. $[China\ 2007]$ គេឲ្យ $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$

ចូរបង្ហាញថា $(a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1)\left(\frac{a_1}{a_2^2+a_2}+\frac{a_2}{a_3^2+a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_1^2+a_1}\right) \geq \frac{n}{n+1}$

265. $[China\ 2007]$ គេឲ្យ $\begin{cases} 0<a,b,c \leq 1 \\ a^2+b^2+c^2=2 \end{cases}$ ចូរបង្ហាញថា $\frac{1-a^2}{c}+\frac{1-c^2}{b}+\frac{1-c^2}{a} \leq \frac{5}{4}$

266. $[Croatia\ 2007]$ គេឲ្យ $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c=1 \end{cases}$ បង្ហាញថា $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq 3(a^2+b^2+c^2)$

267. $[Czech\ Slovak\ 2007]$ គេឲ្យ $x, y, z \in (-1; 1)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $xy+yz+zx=1$

ចូរបង្ហាញថា $6\sqrt[3]{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)} \leq 1+(x+y+z)^2$

268. $[France\ 2007]$ គេឲ្យ a, b, c, d ជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c+d=1$

ចូរបង្ហាញថា $6(a^3+b^3+c^3+d^3) \geq a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{1}{8}$

269. $[Gemany\ 2007]$ គេឲ្យ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sum_{1\le i\le j\le n} \frac{a_i a_j}{a_i + a_j} \le \frac{n}{2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)} . \sum_{1\le i\le j\le n} a_i a_j$$

270. $[Greece\ 2007]$ គេឲ្យ a, b, c ជាបណ្តាជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)} + \frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)} + \frac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)} \ge ab + bc + ca$$

271. $[Hungary\ Isarel\ 2007]$ គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិត a, b, c, d ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$a^2 \le 1; a^2 + b^2 \le 5; a^2 + b^2 + c^2 \le 14; a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \le 30$$

ចូរបង្ហាញថា $a + b + c + d \le 10$

272. $[IMO\_SL\ 2007]$ គេឲ្យ $a_1, a_2, \ldots, a_{100} \ge 0$ ដែលបំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{100}^2 = 1$ ចូរបង្ហាញថា $a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + \cdots + a_{100}^2 a_1 < \dfrac{12}{25}$

273. $[IMO\_SL\ 2007]$ គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាននិង $x, y > 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x^n + y^n = 1$

ចូរបង្ហាញថា $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}}\right) < \frac{1}{(1-x)(1-y)}$

274. $[IMO\ 2007]$ គេឲ្យ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ជាបណ្តាចំនួនពិត។ ចំពោះគ្រប់ $i\ (0 \le i \le n)$

តាង $d_i = \max\{a_j : 1 \le j \le i\} - \min\{a_j : i \le j \le n\}$ និង $d = \max\{d_i : 1 \le i \le n\}$

$a)$: ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះបណ្តាចំនួនពិត $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$ ណាក៏ដោយយើងមាន

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \le i \le n\} \ge \frac{d}{2} \quad (*)$$

$b)$: ចូរបង្ហាញមានចំនួនពិត $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$ ដែលធ្វើឲ្យ $(*)$ ក្លាយជាសមភាព។

275. $[India\ 2007]$ គេឲ្យ x, y, z គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ចូរបង្ហាញថា

$$(x+y+z)^2(yz+zx+xy)^2 \le 3(y^2+yz+z^2)(z^2+zx+x^2)(x^2+xy+y^2)$$

276. $[India\ 2007]$ គេឲ្យ $a,b,c \in \mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$\max\{b+c-a; a+b-c; c+a-b\} \le 1$ ចូរបង្ហាញថា $a^2+b^2+c^2 \le 2abc+1$

277. $[Indonesia\ 2007]$

ចូរបង្ហាញថា $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \ge (ab+bc+ca-1)^2\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}$

278. $[Iran\ 2007]$ គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតផ្សេងគ្នា $a,b,c > 0$

ចូរបង្ហាញថា $\left|\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{b+c}{b-c}+\dfrac{c+a}{c-a}\right| > 1$

279. $[Iran\ 2007]$ គេឲ្យ $a,b,c,d,e \ge 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$a+b=c+d+e$ ចូររកចំនួនថេរ T ធំបំផុត

ដែលធ្វើឲ្យ $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2} \ge T\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}\right)^2$

280. $[Ireland\ 2007]$ បង្ហាញថា $\dfrac{a+b+c}{3} \le \sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}} \le \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}+\dfrac{ab}{c}\right)\ \forall a,b,c > 0$

281. $[Italy\ 2007]$ គេឲ្យចំនួនធម្មជាតិ $n \ge 2$ និង $a_1; a_2; \dots; a_n > 0$

ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_1a_2 \dots a_n = 1$

(a): កំណត់ចំនួនពិតតូចបំផុត c_n ដែលធ្វើឲ្យ $\dfrac{1}{1+a_1}+\dfrac{1}{1+a_2}+\cdots+\dfrac{1}{1+a_n} \ge c_n$

(b): កំណត់ចំនួនពិតតូចបំផុត d_n ដែលធ្វើឲ្យ $\dfrac{1}{1+2a_1}+\dfrac{1}{1+2a_2}+\cdots+\dfrac{1}{1+2a_n} \ge d_n$

282. $[Kiev\ 2007]$ គេឲ្យ $a,b > 0$ និង $ab \ge 1$ បង្ហាញថា $\dfrac{1}{(2a+3)^2}+\dfrac{1}{(2b+3)^2} \ge \dfrac{2}{5(2ab+3)}$

283. $[Korea\ 2007]$ គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។ រកបណ្តាលតម្លៃ $k > 0$

ដែលធ្វើឲ្យ $\dfrac{a}{a+kb}+\dfrac{b}{b+kc}+\dfrac{c}{c+ka} \ge \dfrac{1}{2007}$

284. [$Middle\ Europe$ 2007] គេឲ្យ $a,b,c,d \geq 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c+d=4$

ចូរបង្ហាញថា $a^2bc+b^2cd+c^2da+d^2ab \leq 4$

285. [$Middle\ Europe$ 2007] គេឲ្យ $a;b;c;d \in \left[\frac{1}{2};2\right]$ និង $abcd=1$

ចូររកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោម $\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right)\left(d+\frac{1}{d}\right)$

286. [$Moldova$ 2007] គេឲ្យ $a_1,a_2,\dots,a_n \in \mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_i \geq \frac{1}{i}\ \forall i=1;2;\dots;n$

ចូរបង្ហាញថា $(a_1+1)\left(a_2+\frac{1}{2}\right)\dots\left(a_n+\frac{1}{n}\right) \geq \frac{2^n}{(n+1)!}(1+a_1+2a_2+\dots+na_n)$

287. [$Moldova$ 2007] គេឲ្យ $a_1,a_2,\dots,a_n \in [0;1]$ តាង $S=a_1^3+a_2^3+\dots+a_n^3$ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a_1}{2n+1+S-a_1^3}+\frac{a_2}{2n+1+S-a_2^3}+\dots+\frac{a_n}{2n+1+S-a_n^3} \leq \frac{1}{3}$$

288. [$MOSP$ 2007] គេឲ្យ $a,b,c,x,y,z>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $ax+by+cz=xyz$

ចូរបង្ហាញថា $x+y+z \geq \sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}$

289. [$Mongolia$ 2007] គេឲ្យ a,b,c គឺជាបណ្ដាលពិតវិជ្ជមាន។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq 3\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}}$

290. [$Peru$ 2007] គេឲ្យ $a,b,c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

ចូរបង្ហាញថា $a+b+c \geq \frac{3}{a+b+c}+\frac{2}{abc}$

291. [$Poland$ 2007] គេឲ្យ $a,b,c,d>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=4$

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}} \leq 2(a+b+c+d)-4$

292. $[Romania\ 2007]$ គេឲ្យ $x,y,z \geq 0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq xyz + \frac{3}{4}|(x-y)(y-z)(z-x)|$$

293. $[Romania\ 2007]$ គេឲ្យ $x_1, x_2, \dots, x_n > 0\ (n \geq 2)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$

រកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោម $(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_n)$

294. $[Romania\ 2007]$ គេឲ្យ $a,b,c > 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \geq 1$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $a+b+c \geq ab+bc+ca$

295. $[C.Lupu\ and\ T.Lupu\ , Romania\ 2007]$ គេឲ្យ $a_1, a_2, \dots, a_n\ \ b_1, b_2, \dots, b_n\ \ (n \geq 2)$

ដែលបំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1\ ; b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 = 1 \text{ និង } a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = 0$$

ចូរបង្ហាញថា $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \leq n$

296. $[Turkey\ 2007]$ គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a+b+c=1$

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{1}{ab+2c^2+2c} + \dfrac{1}{bc+2a^2+2a} + \dfrac{1}{ca+2b^2+2b} \geq \dfrac{1}{ab+bc+ca}$

297. $[Ukraine\ 2007]$ គេឲ្យ a,b,c ជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $abc \geq 1$

បង្ហាញថា

$$\left(a+\frac{1}{a+1}\right)\left(b+\frac{1}{b+1}\right)\left(c+\frac{1}{c+1}\right) \geq \frac{27}{8}$$

និង $27\prod(a^3+a^2+a+1) \geq 64\prod(a^2+a+1)$

298. $[UK\ 2007]$ បង្ហាញថា $(a^2+b^2)^2 \geq (a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R}$$

299. $[Vietnam\ 2007]$ គេឲ្យត្រីកោណ ΔABC កំណត់តម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោមខាងក្រោម

$$\frac{\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}}{\cos^2\frac{C}{2}}+\frac{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{\cos^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}}$$

300. $[Yugoslavia\ 2007]$ គេឲ្យ x,y,z ជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $x+y+z=1$

ចូរបង្ហាញថា $\frac{x^{k+2}}{x^{k+1}+y^k+z^k}+\frac{y^{k+2}}{y^{k+1}+z^k+x^k}+\frac{z^{k+2}}{z^{k+1}+x^k+y^k}\geq\frac{1}{7}\ \forall k\in\mathbb{N}$

301. $[Austria\ 2008]$ បង្ហាញថា $\sqrt{\sum a^2bc}+\sqrt{\sum(1-a)^2(1-b)(1-c)}<\sqrt{3}$

$$\forall a,b,c\in(0;1)$$

302. $[Baltic\ Way\ 2008]$ គេឲ្យ a,b,c ជាបណ្តាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a^2+b^2+c^2=3$

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a^2}{2+b+c^2}+\frac{b^2}{2+c+a^2}+\frac{c^2}{2+a+b^2}\geq\frac{(a+b+c)^2}{12}$

303. $[Bosnia\ 2008]$ គេឲ្យ a,b,c ជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a^2+b^2+c^2=1$

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a^5+b^5}{ab(a+b)}+\frac{b^5+c^5}{bc(b+c)}+\frac{c^5+a^5}{ca(c+a)}\geq 3(ab+bc+ca)-2$

304. $[Bosnia\ 2008]$ គេឲ្យ x,y,z ជាបណ្តាចំនួនពិត។ ចូរបង្ហាញថា

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\geq\max\left\{\frac{3(x-y)^2}{4};\frac{3(y-z)^2}{4};\frac{3(z-x)^2}{4}\right\}$$

305. $[Bosnia\ 2008]$ គេឲ្យ $a,b,c>0$ បង្ហាញថា $\left(1+\frac{4a}{b+c}\right)\left(1+\frac{4b}{c+a}\right)\left(1+\frac{4c}{a+b}\right)>25$

306. $[Brazil\ 2008]$ គេឲ្យ x,y,z ជាបណ្តាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$x+y+z=xy+yz+zx$$

ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម $p=\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1}$

307. $[Bulgaria\ 2008]$ គេឲ្យ $n \in \mathbb{N}^*$ និង $a,b > 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b=2$

រកទាំងអស់បណ្តាចំនួន $m \in \mathbb{N}^*$ ដែលធ្វើឲ្យ $\dfrac{1}{a^n}+\dfrac{1}{b^n} \geq a^m+b^m$

308. $[Canada\ 2008]$ គេឲ្យ $a;b;c > 0$ និងដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c=1$

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{a-bc}{a+bc}+\dfrac{b-ca}{b+ca}+\dfrac{c-ab}{c+ab} \leq \dfrac{3}{2}$

309. $[China\ 2008]$ គេឲ្យ $a;b;c \geq 0$ និងដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c=1$

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{a+\dfrac{(b-c)^2}{4}}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \leq \sqrt{3}$

310. $[Costa\ Rica\ 2008]$ គេឲ្យ $x,y,z \geq 0$ និងមិនមានពីរចំនួនស្មើនិង 0 ព្រមគ្នា ។

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{x+y}{y+z}+\dfrac{y+z}{x+y}+\dfrac{y+z}{z+x}+\dfrac{z+x}{y+z}+\dfrac{z+x}{x+y}+\dfrac{x+y}{z+x} \geq 5+\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}$

311. $[Germany\ 2008]$ គេឲ្យ x,y,z ជាចំនួនវិជ្ជមាន ។ ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់

$(a)\!: \dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz}$ $\qquad (b)\!: \dfrac{x^2+y^2+2z^2}{xy+yz}$

312. $[Germany\ 2008]$ កំណត់ចំនួនតូចបំផុត C ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌវិសមភាព

$1+(x+y)^2 \leq C(1+x^2)(1+y^2)$ ចំពោះគ្រប់ $x,y \in \mathbb{R}$

313. $[Greece\ 2008]$ គេឲ្យ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ គឺជាបណ្តាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

តាង $k=\max\{a_1;a_2;\ldots;a_n\}$ និង $t=\min\{a_1;a_2;\ldots;a_n\}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$\left(\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right)^{\frac{kn}{t}} \geq a_1a_2\ldots a_n$ និងសមភាពកើតមាននៅពេលណា?

314. $[Greece\ 2008]$ គេឲ្យ $x;y;z > 0$ និងដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $x^2+y^2+z^2=1$

ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{3}{2}<\frac{1+y^2}{2+x}+\frac{1+z^2}{2+y}+\frac{1+x^2}{2+z}<3$$

315. [*Darij Grinberg IMO_SL* 2008] គេឲ្យ $a,b,c,d>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{(a-b)(a-c)}{a+b+c}+\frac{(b-c)(b-d)}{b+c+d}+\frac{(c-d)(c-a)}{c+d+a}+\frac{(d-a)(d-b)}{d+a+b}\geq 0$$

316. [*IMO_SL* 2008] គេឲ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c,d ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $abcd=1$ និង

$a+b+c+d>\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}$ ចូរបង្ហាញថា: $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}>a+b+c+d$

317. [*Indonesia* 2008] គេឲ្យចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n\geq 3$ និងបណ្តាចំនួនពិត $x_1,x_2,\ldots,x_n>1$

ចូរបង្ហាញថា: $\frac{x_1x_2}{x_3-1}+\frac{x_2x_3}{x_4-1}+\cdots+\frac{x_{n-1}x_n}{x_1-1}+\frac{x_nx_1}{x_2-1}\geq 4n$

318. [*Iran* 2008] គេឲ្យ $a,b,c\geq 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $ab+bc+ca=1$

ចូរបង្ហាញថា: $\sqrt{a^3+a}+\sqrt{b^3+b}+\sqrt{c^3+c}\geq 2\sqrt{a+b+c}$

319. [*Iran* 2008] គេឲ្យ x,y,z គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x+y+z=3$

ចូរបង្ហាញថា: $\frac{x^3}{y^3+8}+\frac{y^3}{z^3+8}+\frac{z^3}{x^3+8}\geq\frac{1}{9}+\frac{2}{27}(xy+yz+zx)$

320. [*Iran* 2008] រកចំនួនពិតតូចបំផុត k ដែលធ្វើឲ្យចំពោះគ្រប់ $x,y,z>0$

ដែធ្វើឲ្យវិសមភាពពិតគឺវិសមភាពដែលមានរាង

$$x\sqrt{y}+y\sqrt{z}+z\sqrt{x}\leq k\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

321. [*Ireland* 2008] គេឲ្យ $a,b,c,d>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a^2+b^2+c^2+d^2=1$

ចូរបង្ហាញថា: $a^2b^2cd+b^2c^2da+c^2d^2ab+d^2a^2bc+c^2a^2db+d^2b^2ac\leq\frac{3}{32}$

322. [*Kazakhstan* 2008] គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $abc=1$

បង្ហាញថា:

$$\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(c+a)}\geq\frac{3}{2}$$

323. [$Macedonia$ 2008] គេឲ្យ $a,b,c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$(a+b)(b+c)(c+a)=8$$

ចូរបង្ហាញថា: $\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[27]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}$

324. [$MathLinks\ Contest$ 2008] គេឲ្យ $a\geq b\geq c>0$ និងផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $abc=1$

ចូរបង្ហាញថា: $\frac{1}{a^3+1}+\frac{1}{b^3+1}+\frac{1}{c^3+1}\geq\frac{3}{abc+1}$

325. [$Math\ Links\ Contest$ 2008] គេឲ្យ $a,b,c\geq 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$ab+bc+ca=3$$

ចូរបង្ហាញថា: $\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\leq\frac{3}{1+2abc}$

326. [$Moldova$ 2008] គេឲ្យ $a,b,c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c\leq\frac{3}{2}$

ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម $P=abc+\frac{1}{abc}$

327. [$Moldova$ 2008] គេឲ្យ $a_1,a_2,\dots,a_n>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\leq\frac{n}{2}$$

ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម $A=\sqrt{a_1^2+\frac{1}{a_2^2}}+\sqrt{a_2^2+\frac{1}{a_3^2}}+\cdots+\sqrt{a_n^2+\frac{1}{a_1^2}}$

328. [$Mongolia$ 2008] គេឲ្យ $x,y,z\geq 0$ ចូររកតម្លៃធំបំផុតរបស់ចំនួនថេរ C

ដែលបំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$x^3+y^3+z^3+C(xy^2+yz^2+zx^2)\geq(1+C)(x^2y+y^2z+z^2x)$$

329. $[Poland\ 2008]$ គេឲ្យ $a,b,c\geq 0$ បង្ហាញថា

$$4\left(\sqrt{a^3b^3}+\sqrt{b^3c^3}+\sqrt{c^3a^3}\right)\leq 4c^3+(a+b)^3$$

330. $[Romania\ 2008]$ គេឲ្យចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n\geq 2$ និង $x_1,x_2,\dots,x_n>1$

ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $\dfrac{x_i^2}{x_i-1}\geq S=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}x_j\quad\forall i=1,2,\dots,n$ ចូររក $supS$

331. $[Romania\ 2008]$ គេឲ្យចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n\geq 1$ ចូរបង្ហាញថា

$$n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\geq(n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)$$

332. $[Romania\ 2008]$ គេឲ្យ a,b,c ជាចណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$ab+bc+ca=3$$

ចូរបង្ហាញថា: $\dfrac{1}{1+a^2(b+c)}+\dfrac{1}{1+b^2(c+a)}+\dfrac{1}{1+c^2(a+b)}\leq\dfrac{1}{abc}$

333. $[Romania\ 2008]$ គេឲ្យ $a,b,c\geq 0$ និង $a+b+c=ab+bc+ca$

ចូររកតម្លៃធំបំផុតរបស់ k ដែលធ្វើឲ្យ $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}-k\right)\geq k$

334. $[Romania\ 2008]$ គេឲ្យ $a,b\in[0;1]$ បង្ហាញថា $\dfrac{1}{1+a+b}\leq 1-\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{ab}{3}$

335. $[Romania\ 2008]$ គេឲ្យចំនួនគត់ធម្មជាតិសេស $n\geq 3$ និង $x_1,x_2,\dots,x_n\in[0;1]$

ចូរកំណត់តម្លៃធំបំផុតរបស់ $E=\sqrt{|x_1-x_2|}+\sqrt{|x_2-x_3|}+\cdots+\sqrt{|x_n-x_1|}$

336. $[Romania\ 2008]$ គេឲ្យ $a,b,c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $abc=8$

$$\text{ចូរបង្ហាញថា: } \frac{a-2}{a+1}+\frac{b-2}{b+1}+\frac{c-2}{c+1}\le 0$$

337. [$Romania$ 2008] គេឲ្យ $a_1,a_2,\dots,a_n>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=1$$

$$\text{ចូរបង្ហាញថា: } \sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{1+a_1+a_2+\cdots+a_j}\le\frac{1}{\sqrt{2}}$$

338. [$Serbia$ 2008] គេឲ្យ $x,y,z>0\,;x+y+z=1$ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{yz+x+\frac{1}{x}}+\frac{1}{xz+y+\frac{1}{y}}+\frac{1}{xy+z+\frac{1}{z}}\le\frac{27}{31}$$

339. [$United\ Kingdom$ 2008] គេឲ្យ x,y,z ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=1$$

ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម $x^2+y^2+z^2$

340. [$Ukraine$ 2008] គេឲ្យ a,b,c,d គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមាន ចូរបង្ហាញថា

$$(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)\left(1+\sqrt[4]{abcd}\right)^4\ge 16abcd(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)$$

341. [$Ukraine$ 2008] គេឲ្យ a,b,c ជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$a^2+b^2+c^2=3$$

$$\text{ចូរបង្ហាញថា: } \sqrt{\frac{a^2}{a^2+b+c}}+\sqrt{\frac{b^2}{b^2+c+a}}+\sqrt{\frac{c^2}{c^2+a+b}}\le\sqrt{3}$$

342. [$Vietnam$ 2008] គេឲ្យ x,y,z គឺជាចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្សេងគ្នា ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\ge\frac{4}{xy+yz+zx}$$

343. [$Argentina$ 2009] គេឲ្យ $a_1,a_2,\dots,a_{300}\ge 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$a_1 + a_2 + \cdots + a_{300} = 1$ ចូររកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោម $S = \sum_{i \neq j; i/j} a_i a_j$

344. $[Bulgaria\ 2009]$ គេឲ្យ $3n$ ចំនួនពិត $a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$C_i > 0\ \forall i = 1,2,\ldots,n$ ចូរបង្ហាញថា $\left(\sum_{i;j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{C_i + C_j}\right)\left(\sum_{i;j=1}^{n} \frac{b_i b_j}{C_i + C_j}\right) \geq \left(\sum_{i;j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{C_i + C_j}\right)^2$

345. $[China\ 2009]$ គេឲ្យ $a_1, a_2, a_3, a_4 \geq 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$

បង្ហាញថា:

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{4} \sqrt{a_i^2 + a_i a_{i-1} + a_{i-1}^2 + a_{i-1} a_{i-2}}\,; \sum_{i=1}^{4} \sqrt{a_i^2 + a_i a_{i+1} + a_{i+1}^2 + a_{i+1} a_{i+2}}\right\} \geq 2$$

ក្នុងនោះសម្មតិកម្ម $a_{i+4} = a_i$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ i

346. $[China\ 2009]$ គេឲ្យ $x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_n > 0$ តាង $X = \sum_{i=1}^{m} x_i$ និង$Y = \sum_{i=1}^{n} y_i$

បង្ហាញថា: $2XY \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |x_i - y_j| \geq X^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |y_i - y_j| + Y^2 \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} |x_i - x_j|$

347. $[Vo\ Quoc\ Ba\ Can, China\ (CSEMO) 2009]$ គេឲ្យ $x, y, z \geq 0$ ដែលធ្វើឲ្យ $x + y + z = 1$

យើងតាង $f(x; y; z) = \frac{x(2y - z)}{1 + x + 3y} + \frac{y(2z - x)}{1 + y + 3z} + \frac{z(2x - y)}{1 + z + 3x}$

ចូររកតម្លៃធំបំផុតនិងតូចបំផុតរបស់កន្សោម $f(x; y; z)$

348. $[China\ 2009]$ គេឲ្យ $x, y, z > 0$ តាង $\sqrt{a} = x(y - z)^2$; $\sqrt{b} = y(z - x)^2$; $\sqrt{c} = z(x - y)^2$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(ab + bc + ca)$

349. $[China\ 2009]$ គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិត x, y, z ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $x, y, z \geq 1$

បង្ហាញថា: $(x^2-2x+2)(y^2-2y+2)(z^2-2z+2)\le x^2y^2z^2-2xyz+2$

350. $[Hungary\_Israel\ Competition\ 2009]$ គេឲ្យ x,y,z ជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

$$\text{ចូរបង្ហាញថា :}\ \frac{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx}{6}\le\frac{x+y+z}{3}.\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$$

351. $[India\ 2009]$ គេឲ្យ $a,b,c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a^3+b^3=c^3$

$$\text{បង្ហាញថា}\ \ a^2+b^2-c^2>6(c-a)(c-b)$$

352. $[Indonesia\ 2009]$ គេឲ្យ a,b,c ជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $ab+bc+ca=3$

$$\text{ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា}\ 3+\sum(a-b)^2\ge\frac{a+b^2c^2}{b+c}+\frac{b+c^2a^2}{c+a}+\frac{c+a^2b^2}{a+b}\ge 3$$

353. $[Indonesia\ 2009]$ គេឲ្យ x គឺជាមួយចំនួនពិតណាក៏ដោយ។

ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់អនុគមន៍

$$f(x)=x^{2008}-2x^{2007}+3x^{2006}-4x^{2005}+\cdots-2006x^3+2007x^2-2008x+2009$$

354. $[Iran\ 2009]$ គេឲ្យ $a,b,c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c=3$

$$\text{ចូរបង្ហាញថា:}\frac{1}{a^2+b^2+2}+\frac{1}{b^2+c^2+2}+\frac{1}{c^2+a^2+2}\le\frac{3}{4}$$

355. $[Middle\ Europe\ 2009]$ គេឲ្យ x,y,z ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x^2+y^2+z^2+9=4(x+y+z)$

$$\text{ចូរបង្ហាញថា:}\ x^4+y^4+z^4+16(x^2+y^2+z^2)\ge 8(x^3+y^3+z^3)+27$$

356. $[Moldova\ 2009]$ គេឲ្យ $m,n\in\mathbb{R}\ (n\ge 2): a_1,a_2,\dots,a_n>0$ និង $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$

$$\text{បង្ហាញថា:}\quad \frac{a_1^{2-m}+a_2+\cdots+a_{n-1}}{1-a_1}+\cdots+\frac{a_n^{2-m}+a_1+\cdots+a_{n-2}}{1-a_n}\ge n+\frac{n^m-n}{n-1}$$

357. $[Moldova\ 2009]$ គេឲ្យ $x,y,z\in\left[\frac{1}{2};2\right]$ និង a,b,c គឺជាមួយចំលាស់ណាក៏ដោយ

របស់ពួកវា ចូរបង្ហាញថា: $\frac{60a^2-1}{4xy+5z}+\frac{60b^2-1}{4yz+5x}+\frac{60c^2-1}{4zx+5y}\geq 12$

358. $[Poland\ 2009]$ គេឲ្យ $n\geq 1$ និង $a,b,c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^{n+1}}{b+c}+\frac{b^{n+1}}{c+a}+\frac{c^{n+1}}{a+b}\geq\left(\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\right)\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n+c^n}{3}}$$

359. $[Serbia\ 2009]$ គេឲ្យបណ្ដាចំនួនវិជ្ជមាន x,y,z ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$x+y+z=xy+yz+zx$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{1}{x^2+y+1}+\frac{1}{y^2+z+1}+\frac{1}{z^2+x+1}\leq 1$

360. $[Serbia\ 2009]$ គេឲ្យ x,y,z ជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{2}$ ចូរបង្ហាញថា: $\frac{1}{x^3+2}+\frac{1}{y^3+2}+\frac{1}{z^3+2}<\frac{1}{3}$

361. $[Thailand\ 2009]$ គេឲ្យ a,b,c ជាបណ្ដាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sum a\sqrt{6a+21b}\leq\sqrt{8\sum a^3+30\sum a^2b+15\sum ab^2+84abc}$$

362. $[USA\ 2009]$ គេឲ្យ $a_1,a_2,\dots,a_n>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\leq\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\max\{a_i\}\leq min4\{a_i\}$

363. $[Zarathustra\ Brady\ USA\ 2009]$ គេឲ្យ x,y,z ជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ចូរបង្ហាញថា

$$x^3(y^2+z^2)^2+y^3(z^2+x^2)^2+z^3(x^2+y^2)^2\geq xyz[xy(x+y)^2+yz(y+z)^2+zx(z+x)^2]$$

364. $[Vietnam\ 2009]$ គេឲ្យ $a,b,c>0$

ចូររកចំនួនពិត k ដែលធ្វើឲ្យផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោម

$$\left(k+\frac{a}{b+c}\right)\left(k+\frac{b}{c+a}\right)\left(k+\frac{c}{a+b}\right)\geq\left(k+\frac{1}{2}\right)^3$$

365. $[Vo\ Quoc\ Ba\ Can\ , Vietnam\ (IMO\ training\ camp\ 2009)]$ គេឲ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលបំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{3}\leq\frac{a^2}{3a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{3b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{3c^2+(a+b)^2}\leq\frac{1}{2}$$

366. $[Vietnam\ (IMO\ training\ camp\ )2009]$ គេឲ្យចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n\geq 2$

និង $x_1, x_2, \dots, x_n$ ជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានណាក៏ដោយ។

តាង $S_n=\min\left\{x_1; \frac{1}{x_1}+x_2, \dots, \frac{1}{x_{n-1}}+x_n; \frac{1}{x_n}\right\}$ ចូរកំណត់តម្លៃធំបំផុតរបស់ S_n តាម n

367. $[Vietnam\ (IMO\ training\ camp\ )2009]$ គេឲ្យបណ្តាចំនួន $a, b, c\geq 0$

គឺមិនមានពីរចំនួនណាស្មើនិង 0 និង $a+b+c=1$

ចូរបង្ហាញថា: $\left(bc+\frac{a}{b+c}\right)\left(ca+\frac{b}{c+a}\right)\left(ab+\frac{c}{a+b}\right)\leq\frac{1}{4}$

368. $[Macedonia\ National\ Olympic\ 2012-Problem2]$

គេឲ្យ $a; b; c; d$ ជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលបំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌ $abcd=1$ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{bc+cd+da-1}+\frac{1}{ab+cd+da-1}+\frac{1}{ab+bc+da-1}+\frac{1}{ab+bc+cd-1}\leq 2$$

369. $[Balkan\ MO\ 2010]$ គេឲ្យ $a; b; c$ ជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+\frac{c^2a(a-b)}{c+a}\geq 0$$

370. $[Balkan\ Mathematicals\ Olympic\ , Romania\ 2011]$ គេឲ្យ $x; y; z$ ដែល $x+y+z=0$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{x(x+2)}{2x^2+1}+\frac{y(y+2)}{2y^2+1}+\frac{z(z+2)}{2z^2+1}\geq 0$

371. $[Balkan\ Mathematicals\ Olympic\ 2012]$ គេឲ្យ $x; y; z$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\sum_{cyc}(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} \geq 4(xy+yz+zx)$

372. [*Asian Pacific Mathematical Oympic ; APMO* 2012] គេឲ្យ n គឺជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែលធំជាង 2 ។ និងឲ្យ $a_1; a_2; \ldots; a_n$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=n$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{1}{n-a_ia_j} \leq \frac{n}{2}$

373. [*Junior Balkan MO* 2011] គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $abc=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\prod(a^5+a^4+a^3+a^2+a+1) \geq 8(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)$$

374. [*Baltic way* 2010] គេឲ្យ x គឺជាចំនួនពិតដែល $0<x<\frac{\pi}{2}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\cos^2 x\cot x+\sin^2 x\tan x \geq 1$$

375. [*Baltic way* 2010] គេឲ្យ $x_1; x_2; \ldots; x_n$ $(n\geq 2)$ គឺជាចំនួនពិតដែលធំជាង 1 និងផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $|x_i-x_{i+1}|<1$ ចំពោះ $i=1;2;\ldots;n-1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}<2n-1$$

376. [*Mediterranean Mathematics Olympic* 2010] គេឲ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a_1; a_2; \ldots; a_n$ ដែល $n>2$ និងផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a_2a_3\ldots a_n}{a_1+n-2}+\frac{a_1a_3\ldots a_n}{a_2+n-2}+\frac{a_1a_2\ldots a_{n-1}}{a_n+n-2} \leq \frac{1}{(n-1)^2}$$

377. [*Baltic Way* 2011] គេឲ្យ $a; b; c; d$ ជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a+b+c+d=4$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{a}{a^2+8}+\frac{b}{b^3+8}+\frac{c}{c^3+8}+\frac{d}{d^3+8} \leq \frac{4}{9}$

378. [$Middle\ European\ Mathematical\ Oympic$ 2010] ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$ ចូរកតម្លៃធំបំផុត់របស់ C_n ដែលធ្វើឲ្យចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a_1; a_2; \dots; a_n$ នោះយើងបាន

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 + C_n(a_1 - a_n)^2$$

4th Middle European Mathematical Olympic . Team Competition Problem 2

379. [$Germany\ Team\ Selection\ Tests$ 2010] គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $ab + bc + ca \leq 3abc$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a + b}} + \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{b + c}} + \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{c + a}} + 3 \leq \sqrt{2}\left(\sqrt{a + b} + \sqrt{b + c} + \sqrt{c + a}\right)$$

Proposed by Dzianis Pirshtuk; student

Belarusian State University ; Belarus

380. [$Kazakhstan\ NMO$ 2011] គេឲ្យ $x; y \geq 0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់

$$\sqrt{x^2 - x + 1}\sqrt{y^2 - y + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1}\sqrt{y^2 + y + 1} \geq 2(x + y)$$

381. [$Kosovo\ Team\ Selection\ Tests$ 2011] គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\displaystyle\sum_{cyc} \sqrt{\frac{5a^2 + 5c^2 + 8b^2}{4ac}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{8(a + b)^2(b + c)^2(c + a)^2}{(abc)^2}}$

382. [$Kosovo\ National\ Mathematical\ Olympic$ 2011] បើសិន $a; b; c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\sqrt{\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2}} + \sqrt{\frac{b^3 + c^3}{b^2 + c^2}} + \sqrt{\frac{c^3 + a^3}{c^2 + a^2}} \geq \frac{6(ab + bc + ca)}{(a + b + c)\sqrt{(a + b)(b + c)(c + a)}}$$

383. [$Malaysia\ National\ Olympic$ 2010] គេឲ្យ $a; b; c$ ជាបណ្តាចំនួនពិតធំជាង 1

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\log_a bc + \log_b ca + \log_c ab \geq 4(\log_{ab} c + \log_{bc} a + \log_{ca} b)$

384. [*Moldova Team Selection Test* 2011] គេឲ្យ $x_1; x_2; \dots; x_n$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ ចូររកផ្នែកគត់របស់ E

$$E = x_1 + \frac{x_2}{\sqrt{1 - x_2^2}} + \frac{x_3}{\sqrt{1 - (x_1 + x_2)^2}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{1 - (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})^2}}$$

385. [*Moldova Team Selectin Test* 2011] គេឲ្យ n គឺជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n \geq 2$

ចូររកចំនួនធំបំផុតរបស់កន្សោម $E = 1 + \sqrt{1 + \frac{2^2}{3!}} + \sqrt[3]{1 + \frac{3^2}{4!}} + \cdots + \sqrt[n]{1 + \frac{n^2}{(n+1)!}}$

386. [*Morocco National Olympic* 2011] គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a; b; c$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) \geq 8$

387. [*Morocco National Olympic* 2011] ចូរបង្ហាញថា

$$2010 < \frac{2^2 + 1}{2^2 - 1} + \frac{3^2 + 1}{3^2 - 1} + \cdots + \frac{2010^2 + 1}{2010^2 - 1} < 2010 + \frac{1}{2}$$

388. [*Switzerland Final Round* 2010] គេឲ្យ $x; y; z \in \mathbb{R}^+$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $abc = 1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{(x + y - 1)^2}{z} + \frac{(y + z - 1)^2}{x} + \frac{(z + x - 1)^2}{y} \geq x + y + z$

389. [*Switzerland Final Round* 2011] គេឲ្យ $a; b; c; d$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a + b + c + d = 1$ ចូរបង្ហាញថា: $\frac{2}{(a + b)(c + d)} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{cd}}$

390. [*Turkey Team Selectin Tests* 2010] គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

ចូរបង្ហាញថា: $\sum_{cyc} \sqrt[4]{\frac{(a^2 + b^2)(a^2 - ab + b^2)}{2}} \leq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a}\right)$

391. [*Turkey Team Selectin Tests* 2011] គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a^2+b^2+c^2\geq 3$ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{(a+1)(b+2)}{(b+1)(b+5)}+\frac{(b+1)(c+2)}{(c+1)(c+5)}+\frac{(c+1)(a+2)}{(a+1)(a+5)}\geq\frac{3}{2}$$

392. [*Turkey Team Selection Tests* 2012] ចំពោះគ្រប់បណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល ផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $ab+bc+ca\leq 1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$a+b+c+\sqrt{3}\geq 8abc\left(\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\right)$$

393. [*Turkey National Olympic* 2012] គេឲ្យ $a_1;a_2;\ldots;a_n>0$ ដែល $a_1a_2\ldots a_n=1$

ចូរបង្ហាញថា: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\sqrt{a_i^4+3}}\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2a_i}$

394. [*Turkey National Olympic* 2012] គេឲ្យ $x;y;z$ ជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល ផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $xyz=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{x+y^{20}+z^{11}}+\frac{1}{y+z^{20}+x^{11}}+\frac{1}{z+x^{20}+y^{11}}\leq 1$$

395. [*USA* 2010] គេឲ្យ $a;b;c$ ជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{a^5(b+2c)^2}+\frac{1}{b^5(c+2a)^2}+\frac{1}{c^5(a+2b)^2}\geq\frac{1}{3}$$

396. [*USA* 2011] គេឲ្យ $a;b;c$ ជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2\leq 4$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2}+\frac{bc+1}{(b+c)^2}+\frac{ca+1}{(c+a)^2}\geq 3$$

397. [*USA USAJMO* 2012]គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a^3+3b^3}{5a+b}+\frac{b^3+3c^3}{5b+c}+\frac{c^3+3a^3}{5c+a}\geq\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

398. [*Vietnam National Olympic* 2011] ចូរបង្ហាញថាបើ $x>0$ និង $n\in\mathbb{N}$ យើងបាន

$$\frac{x^n(x^{n+1}+1)}{x^n+1}\leq\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n+1}$$

399. [*Vietnam National Olympic* 2012] គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $16(a+b+c)\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sum_{cyc}\left(\frac{1}{a+b+\sqrt{2a+2c}}\right)^3\leq\frac{8}{9}$$

400. [*Vietnam National Olympic* 2012] ចំពោះ $a;b;c>0$ និងដែល $abc=1$ ចូរបង្ហាញថា

$$a^3+b^3+c^3+6\geq(a+b+c)^2$$

401. [*Bosnia Herzegovina Team Selection Test* 2011] គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c=1$ ចូរបង្ហាញថា

$$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}\leq 1$$

402. [*China TST* 2011] គេឲ្យ n គឺជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ ចូរកចំធំបំផុតរបស់ λ ដែលបំពេលល័ក្ខខ័ណ្ឌលំហាត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនវិជ្ជមាន $x_1;x_2;\dots;x_{2n}$ ដែល $\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}(x_i+2)^{2n}\geq\prod_{i=1}^{2n}x_i$

ចំពោះតម្លៃនោះវាផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមភាព $\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}(x_i+1)^{n}\geq\lambda\prod_{i=1}^{2n}x_i$

403. [*China STS* 2011]គេឲ្យ $n\geq 3$ ជាចំនួនគត់។ចូររកចំធំបំផុត M ដែលចំពោះចំនួនពិតវិជ្ជមានណាក៏ដោយ $x_1;x_2;\dots;x_n$ ដែលរៀបតាមលំដាប់ $y_1;y_2;\dots;y_n$ នៃចំនួនពិតដែលធ្វើឲ្យ

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{y_{i+1}^2 - y_{i+1}y_{i+2} + y_{i+2}^2} \geq M$$

នៅពេលដែល $y_{n+1} = y_1; y_{n+2} = y_2$

404. [*Croatia National Olympic* 2005] គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតដែលធំជាង 1

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត r ណាក៏ដោយយើងបាន $(\log_a bc)^r + (\log_b ca)^r + (\log_c ab)^r \geq 3.2^r$

405. [*Greec National Olympic* 2010] គេឲ្យ $x; y$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $x + y = 2a$

ចូរបង្ហាញថា $x^3y^3(x^2 + y^2)^2 \leq 4a^{10}$ សមភាពកើតមាននៅពេលណា?

406. [*Greec National Olympic* 2011] គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a + b + c = 6$

ចូររកតម្លៃធំបំផុតនៃកន្សោម $S = \sqrt[3]{a^2 + 2bc} + \sqrt[3]{b^2 + 2ca} + \sqrt[3]{c^2 + 2ab}$

407. [*Romanian National Olympic* 2012] គេឲ្យ $n \geq 2$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិនិង បណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $x_1; x_2; \dots; x_n$ ចូរបង្ហាញថា

$$4\left(\frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1 + x_2} + \frac{x_2^3 - x_3^3}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}^3 - x_n^3}{x_{n-1} + x_n} + \frac{x_n^3 - x_1^3}{x_n + x_1}\right)$$
$$\leq (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2$$

408. [*Slovenia* 2010] គេឲ្យ $x; y; z$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតដែល $0 \leq x; y; z \leq 1$ ចូរបង្ហាញថា

$$xyz + (1 - x)(1 - y)(1 - z) \leq 1$$

409. [*Spain Mathematical Olympic* 2010] គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

ចូរបង្ហាញថា ៖ $\dfrac{a + b + 3c}{3a + 3b + 2c} + \dfrac{a + 3b + c}{3a + 2b + 3c} + \dfrac{3a + b + c}{2a + 3b + 3c} \geq \dfrac{15}{8}$

410. [*Spain Mathematical Olympic* 2012] គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} + \sqrt{\frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2}} \geq \frac{5}{2}$$

411. $[Uzbekistan\ NMO\ 2011]$ គេឲ្យ $a;b;c$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c\geq 6$

$$\text{ចូររក } minimim \text{ នៃ } A=\sum a^2+\sum\frac{a}{b^2+c+1}$$

412. $[India\ Regional\ Mathematical\ Olympic\ 2011]$ រកចំធំបំផុតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$\frac{\lambda abc}{a+b+c}\leq (a+b)^2+(a+b+4c)^2$$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$

413. $[India\ and\ Germany\ 2010]$ គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $ab+bc+ca\leq 3abc$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{b+c}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{c+a}}+3\leq\sqrt{2}\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\right)$$

Proposed by Dzianis Pirshtuk; student

Belarusian State University ; Belarus

414. $[India\ 2011]$ គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិត $a;b;c>0$ ដែល $abc=1$ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{a(a+1)+ab(ab+1)}+\frac{1}{b(b+1)+bc(bc+1)}+\frac{1}{c(c+1)+ca(ca+1)}\geq\frac{3}{4}$$

415. $[Iran\ 2011]$ ចំគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែល $a+b+c=3$ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a}{1+(b+c)^2}+\frac{b}{1+(a+c)^2}+\frac{c}{1+(a+b)^2}\leq\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2+12abc}$$

416. $[Iran\ 2011]$ ចូររកតម្លៃ k ធំដែលបំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌចំពោះគ្រប់ $a;b;c;d\in\mathbb{R}$ យើងបាន

$$\sum\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}\geq 2(ab+bc+cd+da+ac+bd)-k$$

417. $[Korea\ 2012]$ គេឲ្យ $x;y;z$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{2x^2+xy}{\left(y+\sqrt{zx}+z\right)^2}+\frac{2y^2+yz}{\left(z+\sqrt{xy}+x\right)^2}+\frac{2z^2+zx}{\left(x+\sqrt{yz}+y\right)^2}\geq 1$$

418. $[Kyrgyzstan\ 2011]$ គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែល $a+b+c=1$ ចូរបង្ហាញថា

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c}}+\sqrt{\frac{bc}{bc+a}}+\sqrt{\frac{ca}{ca+b}}\le\frac{3}{2}$$

419. $[Kyrgyzstan\ 2011]$ គេឲ្យចំនួនវិជ្ជមាន $a_1;a_2;\dots;a_n$ ដែល $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$

ចូរបង្ហាញថា : $\left(\frac{1}{a_1^2}-1\right)\left(\frac{1}{a_2^2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{a_n^2}-1\right)\ge(n^2-1)^n$

420. $[Macedonia\ 2010]$ គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c=3$

ចូរបង្ហាញថា: $\frac{a^3+2}{b+2}+\frac{b^3+2}{c+2}+\frac{c^3+2}{a+2}\ge3$

421. $[Macedonia\ 2011]$ គេឲ្យ $a;b;c;d>0$ ដែល $a+b+c+d=1$ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{4a+3b+c}+\frac{1}{3a+b+4d}+\frac{1}{a+4c+3d}+\frac{1}{4b+3c+d}\ge2$$

422. $[Macodonia\ 2012]$បើសិន $a;b;c;d$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមាដែល $abcd=1$ ចូរបង្ហាញ

$$\frac{1}{bc+cd+da-1}+\frac{1}{ab+cd+da-1}+\frac{1}{ab+bc+da-1}+\frac{1}{ab+bc+cd-1}\le2$$

423. $[Madonia\ 2000]$ នៅក្នុងត្រីកោណមួយមានជ្រុង $a;b;c$ និងមេដ្យានរៀងគ្នា $t_a;t_b;t_c$

និងមាន D គឺជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ។ចូរបង្ហាញថា: $\frac{a^2+b^2}{t_c}+\frac{b^2+c^2}{t_a}+\frac{c^2+a^2}{t_b}\le6D$

424. $[Madonia\ 2010]$ បើសិន $a_1;a_2;\dots;a_n$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។

ចូររកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោម $\frac{a_1a_2\dots a_{n-1}a_n}{(1+a_1)(a_1+a_2)\dots(a_{n-1}+a_n)(a_n+2^{n+1})}$

425. គេឲ្យ n ចំនួនពិត $a_1;a_2;\dots;a_n>0$ ដែល $\sum_{i=1}^{n}a_i<1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a_1a_2\dots a_n\big(1-(a_1+a_2+\cdots+a_n)\big)}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n)}\le\frac{1}{n^{n+1}}\qquad(*)$$

Vietnam 2009

426. [*Vietnam* 2012] ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះ $C = 10\sqrt{24}$ គឺជាចំនួនធំបំផុតដែលចំពោះ

បណ្តាចំនួនវិជ្ជមាន $a_1; a_2; \ldots; a_{17}$ នោះគឺបាន: $\sum_{i=1}^{17} a_i^2 = 24; \sum_{i=1}^{17} a_i^3 + \sum_{i=1}^{17} a_i < C$

ចំពោះគ្រប់ចំនួន $i; j; k$ ដែល $1 \le i < j < k \le 17$ យើងមាន $x_i; x_j; x_k$ គឺជាជ្រុងនៃត្រីកោណ

427. [*www.mathlinks.ro* 2012]ចំពោះ $a; b; c > 0$ ចូរបង្ហាញថា:

$$\frac{a+b}{c(c^2+2ab)} + \frac{b+c}{a(a^2+2bc)} + \frac{c+a}{b(b^2+2ca)} \ge \frac{18}{(a+b+c)^2}$$

428. [*www.mathlinks.ro* 2012]គេឲ្យ $a; b; c > 0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt{\prod_{cyc}\left(2a^2+b+^2+c^2\right)} \ge \frac{216abc\prod_{cyc}(a+b)}{\prod_{cyc}(3a+b+2c)}$$

429. [*www.mathlinks.ro* 2012]គេឲ្យត្រីកោណ ΔABC និង $\mu \ge 0$ ចូរស្រាយថា

$$\cos A \cos B\,(\cos C + \mu) \le \frac{(1+\mu)^2}{8}$$

430. [*www.mathlinks.ro* 2012] គេឲ្យ $x; y; z$ គឺជាចំនួនពិតដែល $x + y + z = 3$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{y^2 - y + 1} + \sqrt{z^2 - z + 1} \ge 3$$

431. [*www.mathlinks.ro* 2012] គេឲ្យ $a; b; c > 0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{2ab+bc+ca}{ab(a^2+ab+b^2)} + \frac{ab+2bc+ca}{bc(b^2+bc+c^2)} + \frac{ab+bc+2ca}{ca(c^2+ca+a^2)} \ge \frac{12}{a^2+b^2+c^2}$$

432. [*www.mathlinks.ro* 2012] គេឲ្យ $a; b; c > 0$ និងដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$a^2 + b^2 + c^2 = 3$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}(a^3+abc)}+\frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{c}(b^3+abc)}+\frac{\sqrt{c}+\sqrt{a}}{\sqrt{a}(c^3+abc)}\geq 3$$

433. $[www.mathlinks.ro\ 2012]$ គេឲ្យ $a;b;c>0$ និង $a+b+c=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{3(ab+c)+4}{(b+c)(c^2+5ca)}+\frac{3(bc+a)+4}{(c+a)(a^2+5ab)}+\frac{3(ca+b)+4}{(a+b)(b^2+5bc)}\geq 36$$

434. $[Italy\ 2012]$គេឲ្យ $a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{\pi n}{2}$ រកតម្លៃតូចបំផុតរបស់

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n-a_k}{\sin(a_k)}$$

Italy 2012

435. $[Romania\ 2012]$ គេឲ្យ $a;b;c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{3a+b+2c}{a^2(b+c)}+\frac{3b+c+2a}{b^2(c+a)}+\frac{3c+a+2b}{c^2(a+b)}\geq\frac{27}{ab+bc+ca}$$

436. $[Iran\ 2012]$គេឲ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែល $ab+bc+ca=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt{3}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\leq\frac{a\sqrt{a}}{bc}+\frac{b\sqrt{b}}{ca}+\frac{c\sqrt{c}}{ab}$$

Moteza Saghatian

437. $[www.mathlinks.ro\ 2012]$គេឲ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a(a^2+b^2)(a^2+c^2)}{b^2+c^2}+\frac{b(b^2+c^2)(c^2+a^2)}{c^2+a^2}+\frac{c(c^2+a^2)(c^2+b^2)}{a^2+b^2}\geq a^3+b^3+c^3+3abc$$

438. គេឲ្យបណ្តាចំនួនវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែល $a^2+b^2+c^2=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^3}{b^2+c}+\frac{b^3}{c^2+a}+\frac{c^3}{a^2+b}\geq\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

439. $[Austrian\ Federal\ Competition\ for\ Advanced\ Students\ 2012\ ]$ ចូររកតម្លៃធំបំផុត

របស់ m ដើម្បីឲ្យ : $\left(a^2+4(b^2+c^2)\right)\left(b^2+4(a^2+c^2)\right)\left(c^2+4(a^2+b^2)\right)\geq m$

ចំពោះគ្រប់ $a;b;c\in\mathbb{R}^*$ និងបំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌ $\left|\frac{1}{a}\right|+\left|\frac{1}{b}\right|+\left|\frac{1}{c}\right|=3$ និងសមភាពពេលណា?

440. $[Brazilan\ Olympic\ Revenge\ 2012]$ គេឲ្យ $x_1;x_2;\dots;x_n$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\sum_{cyc}\frac{1}{x_i^3+x_{i-1}x_ix_{i+1}}\leq\sum_{cyc}\frac{1}{x_ix_{i+1}(x_i+x_{i+1})}$

441. $[www.mathlinks.ro\ 2012]$គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោមនេះគឺ

$a+2b+3c\geq 20$ ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម

$$S=a+b+c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}$$

442. $[www.mathlinks.ro\ 2012]$ ចំពោះ $a;b;c>0$ និងមាន $abc=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^2+ab+c+1}{c(a+1)}+\frac{b^2+bc+a+1}{a(b+1)}+\frac{c^2+ca+b+1}{b(c+1)}\geq\frac{36}{ab+bc+ca+3}$$

443. $[www.mathlinks.ro\ 2012]$ គេឲ្យ $a;b;c\geq 0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^2}{2a^2+(b+c-a)^2}+\frac{b^2}{2b^2+(a+c-b)^2}+\frac{c^2}{2c^2+(a+b-c)^2}\leq 1$$

443. $[www.mathlinks.ro\ 2012]$ គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោម

$a^2+b^2+c^2=3$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{9-a^2}{bc(8b+c^2)}+\frac{9-b^2}{ca(8c+a^2)}+\frac{9-c^2}{ab(8a+b^2)}\geq\frac{8}{3}$

ដោយ: BUCURESTI GEMANY

444. $[www.mathlinks.ro\ 2012]$ចំពោះ $a;b;c>0$ និង $a+b+c=3;m;n\in\mathbb{N}$ ចូរបង្ហាញថា

$$a\left[\frac{m}{b(ma+n)^2}+\frac{n}{c(nc+m)^2}\right]+b\left[\frac{m}{c(mb+n)^2}+\frac{n}{a(an+m)^2}\right]+c\left[\frac{m}{a(mc+n)^2}+\frac{n}{b(nb+m)^2}\right]\geq\frac{6mn}{(m+n)(m^2+n^2)}$$

ដោយ: BUCURESTI GEMANY

445. $[www.mathlinks.ro\ 2012]$គេឲ្យ $a;b;c>0$ និង $a+b+c=3$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{ab(a+1)^2}+\frac{1}{bc(b+1)^2}+\frac{1}{ca(c+1)^2}\geq\frac{27}{2(a^2+b^2+c^2)(a^4+b^4+c^4+3)}$$

ដោយ: BUCURESTI GEMANY

446. $[www.mathlinks.ro\ 2012]$គេឲ្យ $a;b;x;y$ ជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $1\geq a^{11}+b^{11}$ និង $1\geq x^{11}+y^{11}$ ចូរបង្ហាញថា ៖ $1\geq a^5x^6+b^5y^6$

447. $[www.mathlinks.ro\ 2012]$ គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោមនេះ

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)=a^3+b^3+c^3+2abc+1$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $\frac{a^2}{a+b-c}+\frac{b^2}{b+c-a}+\frac{c^2}{c+a-b}\geq 3$

448. $[www.mathlinks.ro\ 2012]$ គេឲ្យ $a_1=1$ និង $a_n=n(a_{n-1}+1)$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 2$ និង

$$P_n=\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)$$ ចូរគណនា ៖ $\lim_{n\to\infty}P_n$

449. $[Olympic\ VN\ 2012]$ គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនមិនអវិជ្ជមានដែលបំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c=1006$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt{2012a+\frac{(b-c)^2}{2}}+\sqrt{2012b+\frac{(c-a)^2}{2}}+\sqrt{2012c+\frac{(a-b)^2}{2}}\leq 2012\sqrt{2}$$

450. [Mathematical invitational tournament in noth of China 2012]

គេឲ្យត្រីកោណ ABC ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{1+\cos^2 B+\cos^2 C}+\frac{1}{1+\cos^2 C+\cos^2 A}+\frac{1}{1+\cos^2 A+\cos^2 B}\le 2$$

451. [$Centroamerican$ 2012] គេឲ្យ $a;b;c$ ជាបណ្តាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=1$$ និង $ab+bc+ca>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$a+b+c-\frac{abc}{ab+bc+ca}\ge 4$$

452. [$www.mathlinks.ro$ 2012] បើ $n\in\mathbb{N}\,;n\ge 2$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$1+2\sqrt{2^2}+3\sqrt{3^3}+\cdots+n\sqrt{n^n}<(n+1)!$$

453. [$Olympic\ VN$ 2008] ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n និងចំពោះគ្រប់ចំ

នួនពិត $x\in(0;1)$ គឺយើងបាន $x^2.\sqrt[n]{1-x}\le\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^2.\frac{1}{\sqrt[n]{2n+1}}$

454. [$Olympic\ VN$ 2008] គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជា3ចំនួនវិជ្ជមានដែល $a+b+c+1=4abc$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{1}{a^4+b+c}+\frac{1}{b^4+c+a}+\frac{1}{c^4+a+b}\le\frac{3}{a+b+c}$

455. [$Olympic\ VN$ 2008] ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម: $\frac{x^{30}}{y^4}+\frac{y^{30}}{z^4}+\frac{z^{30}}{t^4}+\frac{t^{30}}{x^4}$

ក្នុងនោះ $x;y;z;t$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $x+y+z+t=2008$

456. [$Olympic\ VN$ 2008] គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=1$ ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម $T=a+b+c$

457. [$Olympic\ Viet\ Nam$ 2008] គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$abc+6a+3b+2c=24$ ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម

$$M=abc(a^2+3)(b^2+12)(c^2+27)$$

458. $[Olympic\ Viet\ Nam\ 2008]$ គេឲ្យរង្វង់ពីរផ្ចិត O កាំ r និង R (ចំពោះ $r < R$) ; ΔABC ចារឹកក្នុងរង្វង់ $(O;r)$ ។ គូរបន្លាយ $CA; AB; BC$ កាត់រង្វង់ $(O;R)$ ត្រង់ $B_1; C_1; A_1$ សន្មតិ $S_{\Delta A_1B_1C_1}; S_{\Delta ABC}$

គឺជាផ្ទៃរបស់ត្រីកោណ $\Delta A_1B_1C_1; \Delta ABC$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $\frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}} \geq \left(\frac{R}{r}\right)^2$

459. $[Olympic\ Viet\ Nam\ 2008]$ គេឲ្យបណ្តាចំនួន $x; y; z$ គឺជាចំនួនវិជ្ជមានដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $x + y + z = \frac{3}{2}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{\sqrt{x^2+xy+y^2}}{4yz+1} + \frac{\sqrt{y^2+yz+z^2}}{4zx+1} + \frac{\sqrt{z^2+zx+x^2}}{4xy+1} \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

460. $[Olympic\ Viet\ Nam\ 2008]$ ក្នុងប្លង់គេឲ្យត្រីកោណ ABC និងចំណុច M ណាក៏ដោយ។

តាង $a = BC; b = AC; c = AB$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $\frac{MA}{a} + \frac{MB}{b} + \frac{MC}{c} \geq \sqrt{3}$

461. $[Olympic\ Viet\ Nam\ 2008]$គេឲ្យ $x; y; z$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានណាក៏ដោយ។

ចូររកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោមខាងក្រោម

$$P = \frac{x^2}{4x^3+3yz+2} + \frac{y^2}{4y^3+3zx+2} + \frac{z^2}{4z^3+3xy+2}$$

462. $[Olympic\ Viet\ Nam\ 2008]$គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមាន។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^3+abc}{b+c} + \frac{b^3+abc}{c+a} + \frac{c^3+abc}{a+b} \geq a^2+b^2+c^2 \qquad (1)$$

463. $[Olympic\ Viet\ Nam\ 2008]$គេឲ្យ $x; y; z; t$ គឺជាឫសរបស់ប្រព័ន្ធសមីការ

$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z^2+t^2=2 \\ xt+yz \geq \sqrt{2} \end{cases}$ ចូររកឫសនោះដែលធ្វើឲ្យ $y + t$ មានតម្លៃតូចបំផុត

464. $[Olympic\ Viet\ Nam\ 2008]$គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a; b; c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$$\frac{1}{a+2}+\frac{2007}{2008+b}\leq\frac{c+1}{2007+c}$$

ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម $P=(a+1)(b+1)(c+1)$

465. [$Olympic\ Viet\ Nam$ 2008]គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$a+b+c=3$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\dfrac{a}{a^2+2b+3}+\dfrac{b}{b^2+2c+3}+\dfrac{c}{c^2+2c+3}\leq\dfrac{1}{2}$

466. [$Olympic\ Viet\ Nam$ 2008]គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែល $abc=1$ ចូររកតម្លៃធំបំផុតកន្សោម

$$P=\frac{1}{2a^3+b^3+c^3+2}+\frac{1}{a^3+2b^3+c^3+2}+\frac{1}{a^3+b^3+2c^3+2}$$

467. [$Olympic\ Viet\ Nam$ 2008]ពិនិត្យមើល $a;b;c>0$ ណាក៏ដោយ។ចូររកតម្លៃធំបំផុត

$$T=\frac{\sqrt{abc}}{(1+a)(1+a+b)(1+a+b+c)}$$

468. [$Olympic\ Viet\ Nam$ 2008]គេឲ្យចំនួនពិត $a\neq0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt{a^2+\sqrt{a^2+\cdots+\sqrt{a^2}}}<\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\left(\sqrt{1+16a^2}+\sqrt{9+16a^2}\right)$$

មាន n ឫសការេ

469. [$Olympic\ Viet\ Nam$ 2008]គេឲ្យបីចំនួនវិជ្ជមាន $a;b;c$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}\geq\frac{a+b}{a+c}+\frac{b+c}{b+a}+\frac{c+a}{c+b}$$

470. [$Olympic\ Viet\ Nam$ 2008]គេឲ្យបីចំនួនវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$ab+bc+ca=6abc$ ចូររកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោម

$$M=\frac{1}{a+2b+3c}+\frac{1}{2a+3b+c}+\frac{1}{3a+b+2c}$$

471. [$Olympic\ Viet\ Nam$ 2008]គេឲ្យបណ្តាចំនួនដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោម

$$\begin{cases} x^2 + xy + \dfrac{y^2}{3} = 25 \\ \dfrac{y^2}{3} + z^2 = 9 \\ z^2 + zx + x^2 = 16 \end{cases}$$ ចូររកតម្លៃនៃកន្សោម $P = xy + 2yz + 2zx$

472. $[Olympic\ Viet\ Nam\ 2008]$ គេឲ្យ $x; y; z \neq 0$ និង $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់ $P = \dfrac{1}{x^4 + y^4 + z^4} + \dfrac{1}{x^2 y^2} + \dfrac{1}{y^2 z^2} + \dfrac{1}{z^2 x^2}$

473. $[Olympic\ Viet\ Nam\ 2008]$គេឲ្យបណ្តាចំនួនវិជ្ជមាន $a; b; c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)} = 1$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $abc \geq 1$

474. $[Olympic\ Viet\ Nam\ 2008]$គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់

$$\sqrt{abc}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right) + (a + b + c)^2 \geq 4\sqrt{3abc(a + b + c)}$$

475. $[Olympic\ Viet\ Nam\ 2008]$គេឲ្យ $x; y; z \geq -1$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x + y + z = 1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $\dfrac{x}{1 + x^2} + \dfrac{y}{1 + y^2} + \dfrac{z}{1 + z^2} \leq \dfrac{9}{10}$

476. $[singapor\ 2012]$គេឲ្យ $x; y; z > 0$ ដែល $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} < \dfrac{1}{xyz}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា:

$$\frac{2x}{\sqrt{1 + x^2}} + \frac{2y}{\sqrt{1 + y^2}} + \frac{2z}{\sqrt{1 + z^2}} < 3$$

477. $[singapor\ 2010]$ គេឲ្យ $a; b; c; x_1; x_2; \dots; x_5$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលបំពេញ

ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a + b + c = 1$ និង $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 = 1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(ax_1^2 + bx_1 + c)(ax_2^2 + bx_2 + c) \dots (ax_5^2 + bx_5 + c) \geq 1$$

478. [Junior Balkan MO 2012] គេឲ្យ $a; b; c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a + b + c = 1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+6\geq 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{1-b}{b}}+\sqrt{\frac{1-c}{c}}\right)$

តើសមភាពកើតមាននៅពេលណា?

479. គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលបំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌ $abc=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{\sqrt{3a^4+5b^4+4b+24}}+\frac{1}{\sqrt{3b^4+5c^4+4c+24}}+\frac{1}{\sqrt{3c^4+5a^4+4a+24}}\leq\frac{1}{2}$$

www.mathlinks.ro

480. គេឲ្យ $x;y;z>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $xy+yz+zx=3xyz$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{y}{xy^2+3x}+\frac{z}{yz^2+3y}+\frac{x}{zx^2+3z}\leq\frac{3}{4}$$

www.mathlinks.ro

481. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c>0$ និង $abc=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^9}{a^2b^2+a+b}+\frac{b^9}{b^2c^2+b+c}+\frac{c^9}{c^2a^2+c+a}\geq 1$$

482. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c;d>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $abcd=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{a^2(d^2+1)}{d+1}+\frac{b^2(c^2+1)}{c+1}+\frac{c^2(b^2+1)}{b+1}+\frac{d^2(a^2+1)}{a+1}\geq 4$

Greemany 2012

483. www.mathlinks.ro បើ $a;b;c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq\sqrt{27(a^3+a+1)(b^3+b+1)(c^3+c+1)}$$

Nguyen Van Huyen : Ho Chi Minh City University of Transport

484. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c\leq 3$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{a+1}{a(a+2)}+\frac{b+1}{b(b+2)}+\frac{c+1}{c(c+2)}\geq 2$

China Fujian Mathematics league

485. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}+9\geq 4\sqrt{3}.\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\right)^3+\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+1}$$

Nguyen Van Huyen ; Ho Chi Min City University of Transport

486. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមាន។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{ab}{a^{18}b^9+3b^3+14}+\frac{bc}{b^{18}c^9+3c^3+14}+\frac{ca}{c^{18}a^9+3a^3+14}\leq\frac{1}{6}$$

សមភាពកើតមាននៅពេលណា?

487.www.mathlinks.ro

គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $abc=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^3+bc^2}{(c+a)^2}+\frac{b^3+ca^2}{(a+b)^2}+\frac{c^3+ab^2}{(b+c)^2}\geq\frac{9}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

488. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{(2a+1)(b+c+3)+1}+\frac{b}{(2b+1)(c+a+3)+1}+\frac{c}{(2c+1)(a+b+3)+1}\leq\frac{3}{16}$$

489.www.mathlinks.ro គេឲ្យ $x;y;z$ គឺជាចំនួនពិតដែលនោះក្នុងចន្លោះ $]-1;1[$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)}+\frac{1}{(1+x)(1+y)(1+z)}\geq 2$

490 www.mathlinks.ro

ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a_1; a_2; a_3; \dots; a_n; x_1; x_2; x_3; \dots; x_n$ ចំពោះ $n\in\mathbb{N}$

គឺយើងមាន : $\frac{a_1^3}{x_1}+\frac{a_2^3}{x_2}+\cdots+\frac{a_n^3}{x_n}\geq 1$ បើ $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\geq\sqrt[3]{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$

491. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែល $a+b+c=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{(1+b)}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}\leq 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$$

492. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c\geq 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $ab+bc+ca=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\sqrt{a^3+a}+\sqrt{b^3+b}+\sqrt{c^3+c}\geq(a+b+c)\sqrt{a+b+c}$

493. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a+b+c}{3\sqrt{3}}\geq\frac{ab+bc+ca}{\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2}}$$

494.www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $abc=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a}{a^2+b^2+1}+\frac{b}{b^2+c^2+1}+\frac{c}{c^2+a^2+1}\leq 1$

495. [$Olympic\ Viet\ Nam\ 2012$]គេបីចំនួនវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$6a+2b+3c=11$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{2b+3c+16}{1+6a}+\frac{6a+3c+16}{1+2b}+\frac{6a+2b+16}{1+3c}\geq 15$$

Toan Quoc 2012

496. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c;d$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abcd=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $a+b+c+d-\frac{1}{a+1}-\frac{1}{b+1}-\frac{1}{c+1}-\frac{1}{d+1}\geq 2$

Japan

497.www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c\in\mathbb{R}^{+}$ ដែល $abc=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{a^2+2b^2+3}+\frac{1}{b^2+2c^2+3}+\frac{1}{c^2+2a^2+3}\leq\frac{1}{2}$$

View Blog

498. www.mathlinks.ro

គេឲ្យ $a;b;c;d>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c+d=4$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{ab(4c^2+23ab)}+\frac{1}{bc(4d^2+23bc)}+\frac{1}{cd(4a^2+23cd)}+\frac{1}{da(4b^2+23da)}\geq\frac{4}{27}$$

Bucuresti: Gremany

499. www.mathlinks.ro

គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $abc=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^{12}}{5a^2+(a+b)(b^2+c^2)}+\frac{b^{12}}{5b^2+(b+c)(c^2+a^2)}+\frac{c^{12}}{5c^2+(c+a)(a^2+b^2)}\geq\frac{1}{3}$$

500. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c$ ជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានដែល $a^2+b^2+c^2=$ 1 ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{2+a(2b+2c-a)}+\frac{1}{2+b(2c+2a-b)}+\frac{1}{2+c(2a+2b-c)}\leq\frac{1}{9}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$$

Gremany

501. www.mathlinks.ro

គេឲ្យ $a;b;c;d;e$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោម

$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-cd}+\frac{1}{1-de}+\frac{1}{1-ea}\le\frac{25}{4}$$

Viet Nam

502. www.mathlinks.ro

គេឲ្យ $x;y;z$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមាន។ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$$

Micheal Rozenderg

503. [Tuymaada Olympic 2012] ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a;b;c$ ដែល

$abc=1$ យើងបាន: $\frac{1}{2a^2+b^2+3}+\frac{1}{2b^2+a^2+3}+\frac{1}{2c^2+a^2+3}\le\frac{1}{2}$

Proposed by :V.Aksenov

<u>លំហាត់លំនាំ</u>

a: គេឲ្យ $n\in\mathbb{N};n\ge 2$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a;b;c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$abc=1$ នោះយើងបាន : $\frac{1}{2a^n+b^n+3n-3}+\frac{1}{2b^n+c^n+3n-3}+\frac{1}{2c^n+a^n+3n-3}\le\frac{1}{n}$

$b)$: គេឲ្យ $n\in\mathbb{N};n\ge 2$ និង $k\in$ គេឲ្យ $n\in\mathbb{N}^*$ និងបណ្តាចំនួនពិត $a;b;c$ ណាក៏ដោយដែល

ផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $abc=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{2ka^n+kb^n+3n-3k}+\frac{1}{2kb^n+kc^n+3n-3k}+\frac{1}{2kc^n+ka^n+3n-3k}\le\frac{1}{n}$$

504.[USA TSTS 2012] គេឲ្យចំនួនពិត $x;y;z$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោម

$$xyz+xy+yz+zx=x+y+z+1$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1+x}}+\sqrt{\frac{1+y^2}{1+y}}+\sqrt{\frac{1+z^2}{1+z}}\right)\le\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{\frac{5}{8}}$

506. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c\ge 0$ ដែល $a+b+c=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{64}{27}\le(3a^2+1)(3b^2+1)(3c^2+1)\le 4$$

Viet Nam

507. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $ab+bc+ca=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{a^2+b^2}{c\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)}+\frac{b^2+c^2}{a\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)}+\frac{c^2+a^2}{b\left(c+\sqrt{c^2+1}\right)}\ge 2$

Turkey

508. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{a^2+b^2+2}{(1+a)(b+c)}+\frac{b^2+c^2+2}{(1+b)(c+a)}+\frac{c^2+a^2+2}{(1+c)(a+b)}\ge\frac{15}{2}$

509. [IMO 2012]

គេឲ្យ $n\ge 3$ គឺជាចំនួនគត់ៗ និង $a_2;a_3;\dots;a_n$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល

ផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a_2a_3\dots a_n=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3\dots(1+a_n)^n>n^n$$

Proposed by Anggelo Di Pasguale ; Australia

510.[Viet Nam 2012]

គេឲ្យ $x_1; x_2; \dots; x_n$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \text{ និង } a \geq 1; t; n \geq 2$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $(a + x_1^t)(a + x_2^t) \dots (a + x_n^t) \geq \left(a + \frac{1}{n^t}\right)^n$

លំហាត់ត្រូវបានតាក់តែងឡើងដោយលោក Quong

511.[Viet Nam] គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជាបណ្ដាចំនួនវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{\sqrt{b^2 + 7bc + c^2}} + \frac{b}{\sqrt{c^2 + 7ca + a^2}} + \frac{c}{\sqrt{a^2 + 7ab + b^2}} \geq 1$$

Nguyen Van Hueyn : Ho Chi Minh City University of Transport

512.[Turkey NMO 2003] គេឲ្យ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោម

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \text{ ចំពោះ } x_1; x_2 \in \mathbb{R} \text{ និង } t \in (0; 1)$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $\sum_{k=1}^{2003} f(a_{k+1})a_k \geq \sum_{k=1}^{2003} f(a_k)a_{k+1}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a_1; a_2; \dots; a_{2004}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{2003}$ និង $a_{2004} = a_1$

513.[Turkey NMO 2004]

គេឲ្យ $ABCD$ គឺជាចតុកោណប៉ោងនិងមាន $K; L; M; N$ ជាចំណុចកណ្ដាល

នៅលើជ្រុង $[AB]; [BC]; [CD]; [DA]$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $\sqrt[3]{S_1} + \sqrt[3]{S_2} + \sqrt[3]{S_3} + \sqrt[3]{S_4} \leq 2\sqrt[3]{S}$

ចំពោះ $S_1 = S_{\Delta AKN}; S_2 = S_{\Delta BKL}; S_3 = S_{\Delta CLM}; S_4 = S_{\Delta DMN}; S = S_{ABCD}$

514. [Tumaada 2000] គេឲ្យ $x_1; x_2; \dots; x_n$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $0 < x_k \le \frac{1}{2}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\left(\dfrac{n}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} - 1\right)^n \le \left(\dfrac{1}{x_1} - 1\right)\left(\dfrac{1}{x_2} - 1\right)\dots\left(\dfrac{1}{x_n} - 1\right)$

515. គេឲ្យ $n \ge 2$ គឺជាចំនួនគត់វិជ្ជមាននិង $a_1; a_2; \dots; a_n$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

ដែលផ្ទៀងផ្ទៀត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a_1}{1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n} + \frac{a_2}{1 + a_1 + a_3 + \cdots + a_n} + \cdots + \frac{a_n}{1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}} \ge \frac{n}{2n - 1}$$

www.mathlinks.ro

516. គេឲ្យ $a; b; c; d > 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $abcd = 1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a + 1}{abc + ab + 1} + \frac{b + 1}{bcd + bc + 1} + \frac{c + 1}{cda + cd + 1} + \frac{d + 1}{dab + da + 1} \ge \frac{8}{3}$$

www.mathlinks.ro

517.[Turkey] គេឲ្យបណ្ដាចំនួនវិជ្ជមាន $a; b; c$ ដែល $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^5 + 1}{b + 2} + \frac{b^5 + 1}{c + 2} + \frac{c^5 + 1}{a + 2} \ge 2$$

518.[Baltic Way 1992] ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនវិជ្ជមាន $x_1; x_2; \dots; x_n; y_1; y_2; \dots; y_n$

យើងបាន

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i y_i} \ge \frac{4n}{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i + y_i\right)^2}$$

519. [2004;40;43] Proposed by Mihaly Bencze; Brosov;Romania

គេឲ្យ $a; b; c > 1$ និង $\alpha > 0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$a^{\sqrt{\alpha\log_a b}+\sqrt{\alpha\log_a c}} + b^{\sqrt{\alpha\log_b a}+\sqrt{\alpha\log_b c}} + c^{\sqrt{\alpha\log_c a}+\sqrt{\alpha\log_c b}} \le \sqrt{abc}\left(a^{\alpha-\frac{1}{2}} + b^{\alpha-\frac{1}{2}} + c^{\alpha-\frac{1}{2}}\right)$$

520. គេឲ្យត្រីកោណ ABC ។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{h_a}{h_a+h_b+h_c}(\cos B+\cos C) + \frac{h_b}{h_a+h_b+h_c}(\cos C+\cos A) + \frac{h_c}{h_a+h_b+h_c}(\cos A+\cos B) \le 1$$

439. [*Austrian Federal Competition for Advanced Students* 2012] ចូររកតម្លៃធំបំផុត

របស់ m ដើម្បីឲ្យ : $\left(a^2+4(b^2+c^2)\right)\left(b^2+4(a^2+c^2)\right)\left(c^2+4(a^2+b^2)\right) \ge m$

ចំពោះគ្រប់ $a; b; c \in \mathbb{R}^*$ និងបំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌ $\left|\frac{1}{a}\right| + \left|\frac{1}{b}\right| + \left|\frac{1}{c}\right| = 3$ និងសមភាពពេលណា?

440. [*Brazilan Olympic Revenge* 2012] គេឲ្យ $x_1; x_2; \dots; x_n$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\sum_{cyc}\frac{1}{x_i^3+x_{i-1}x_ix_{i+1}} \le \sum_{cyc}\frac{1}{x_ix_{i+1}(x_i+x_{i+1})}$

441. [*www.mathlinks.ro* 2012]គេឲ្យ $a; b; c > 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោមនេះគឺ

$a+2b+3c \ge 20$ ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម

$$S = a+b+c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}$$

442. [*www.mathlinks.ro* 2012] ចំពោះ $a; b; c > 0$ និងមាន $abc = 1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^2+ab+c+1}{c(a+1)} + \frac{b^2+bc+a+1}{a(b+1)} + \frac{c^2+ca+b+1}{b(c+1)} \ge \frac{36}{ab+bc+ca+3}$$

443. [*www.mathlinks.ro* 2012] គេឲ្យ $a; b; c \ge 0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^2}{2a^2+(b+c-a)^2}+\frac{b^2}{2b^2+(a+c-b)^2}+\frac{c^2}{2c^2+(a+b-c)^2}\leq 1$$

443. [$www.mathlinks.ro$ 2012] គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោម

$a^2+b^2+c^2=3$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{9-a^2}{bc(8b+c^2)}+\frac{9-b^2}{ca(8c+a^2)}+\frac{9-c^2}{ab(8a+b^2)}\geq\frac{8}{3}$

ដោយ: BUCURESTI GEMANY

444. [$www.mathlinks.ro$ 2012]ចំពោះ $a;b;c>0$ និង $a+b+c=3;m;n\in\mathbb{N}$ ចូរបង្ហាញថា

$$a\left[\frac{m}{b(ma+n)^2}+\frac{n}{c(nc+m)^2}\right]+b\left[\frac{m}{c(mb+n)^2}+\frac{n}{a(an+m)^2}\right]+c\left[\frac{m}{a(mc+n)^2}+\frac{n}{b(nb+m)^2}\right]\geq\frac{6mn}{(m+n)(m^2+n^2)}$$

ដោយ: BUCURESTI GEMANY

445. [$www.mathlinks.ro$ 2012]គឲ្យ $a;b;c>0$ និង $a+b+c=3$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{ab(a+1)^2}+\frac{1}{bc(b+1)^2}+\frac{1}{ca(c+1)^2}\geq\frac{27}{2(a^2+b^2+c^2)(a^4+b^4+c^4+3)}$$

ដោយ: BUCURESTI GEMANY

446. [$www.mathlinks.ro$ 2012]គឲ្យ $a;b;x;y$ ជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $1\geq a^{11}+b^{11}$ និង $1\geq x^{11}+y^{11}$ ចូរបង្ហាញថា : $1\geq a^5x^6+b^5y^6$

447. [$www.mathlinks.ro$ 2012] គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោមនេះ

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)=a^3+b^3+c^3+2abc+1$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{a^2}{a+b-c}+\frac{b^2}{b+c-a}+\frac{c^2}{c+a-b}\geq 3$

448. [$www.mathlinks.ro$ 2012] គេឲ្យ $a_1=1$ និង $a_n=n(a_{n-1}+1)$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 2$ និង

$$P_n=\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)$$ ចូរគណនា : $\lim\limits_{n\to\infty}P_n$

449. $[Olympic\ VN\ 2012]$ គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនមិនអវិជ្ជមានដែលបំពេញ

លក្ខខណ្ឌ $a+b+c=1006$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt{2012a+\frac{(b-c)^2}{2}}+\sqrt{2012b+\frac{(c-a)^2}{2}}+\sqrt{2012c+\frac{(a-b)^2}{2}}\le 2012\sqrt{2}$$

450. [Mathematical invitational tournament in noth of China 2012]

គេឲ្យត្រីកោណ ABC ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{1+\cos^2B+\cos^2C}+\frac{1}{1+\cos^2C+\cos^2A}+\frac{1}{1+\cos^2A+\cos^2B}\le 2$$

451. $[Centroamerican\ 2012]$ គេឲ្យ $a;b;c$ ជាបណ្តាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=1$$ និង $ab+bc+ca>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$a+b+c-\frac{abc}{ab+bc+ca}\ge 4$$

452. $[www.mathlinks.ro\ 2012]$ បើ $n\in\mathbb{N}\,;n\ge 2$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$1+2\sqrt{2^2}+3\sqrt{3^3}+\cdots+n\sqrt{n^n}<(n+1)!$$

453. $[Olympic\ VN\ 2008]$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n និងចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x\in(0;1)$ គឺយើងបាន $x^2.\sqrt[n]{1-x}\le\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^2.\frac{1}{\sqrt[n]{2n+1}}$

454. $[Olympic\ VN\ 2008]$ គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជា3ចំនួនវិជ្ជមានដែល $a+b+c+1=4abc$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{1}{a^4+b+c}+\frac{1}{b^4+c+a}+\frac{1}{c^4+a+b}\le\frac{3}{a+b+c}$

455. $[Olympic\ VN\ 2008]$ ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម: $\frac{x^{30}}{y^4}+\frac{y^{30}}{z^4}+\frac{z^{30}}{t^4}+\frac{t^{30}}{x^4}$

ក្នុងនោះ $x;y;z;t$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $x+y+z+t=2008$

456. $[Olympic\ VN\ 2008]$ គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=1$ ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម $T=a+b+c$

457. $[singapor\ 2012]$គេឲ្យ $x;y;z>0$ ដែល $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{xyz}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា:

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{2z}{\sqrt{1+z^2}}<3$$

458. $[singapor\ 2010]$ គេឲ្យ $a;b;c;x_1;x_2;\dots;x_5$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលបំពេញ

ល័ក្ខខ័ណ្ឌ$a+b+c=1$ និង $x_1x_2x_3x_4x_5=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(ax_1^2+bx_1+c)(ax_2^2+bx_2+c)\dots(ax_5^2+bx_5+c)\ge 1$$

459. [Junior Balkan MO 2012] គេឲ្យ$a;b;c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+6\ge 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{1-b}{b}}+\sqrt{\frac{1-c}{c}}\right)$

តើសមភាពកើតមាននៅពេលណា?

<u>សំគាល់</u> យើងអាចបង្កើតបានលំហាត់គំរូខាងក្រោមនេះ

460. $a)$: គេឲ្យ $x;y;z\ge 0$ និង $a;b;c;\alpha;\beta;\gamma$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\beta\frac{a}{b+y}+\gamma\frac{a}{c+z}+\beta\frac{c}{b+y}+\alpha\frac{c}{a+x}+\gamma\frac{b}{c+z}+\alpha\frac{b}{a+x}+2\left(\frac{\alpha}{1+3x}+\frac{\beta}{1+3y}+\frac{\gamma}{1+3z}\right)$$
$$\geq 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{1+3x}.\frac{1-a}{x+a}}+\sqrt{\frac{\beta^2}{1+3y}.\frac{1-b}{y+b}}+\sqrt{\frac{\gamma^2}{1+3z}.\frac{1-c}{z+c}}\right)$$

សមភាពកើតមាននៅពេលណា?

461.b): គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{b+1}+\frac{a}{c+1}+\frac{c}{b+1}+\frac{c}{a+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{b}{a+1}+3\geq\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}+\sqrt{\frac{1-b}{1+b}}+\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}\right)$$

462. គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលបំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌ $abc=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{\sqrt{3a^4+5b^4+4b+24}}+\frac{1}{\sqrt{3b^4+5c^4+4c+24}}+\frac{1}{\sqrt{3c^4+5a^4+4a+24}}\leq\frac{1}{2}$$

463. គេឲ្យ $x;y;z>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $xy+yz+zx=3xyz$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{y}{xy^2+3x}+\frac{z}{yz^2+3y}+\frac{x}{zx^2+3z}\leq\frac{3}{4}$$

www.mathlinks.ro

464.www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c>0$ និង $abc=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^9}{a^2b^2+a+b}+\frac{b^9}{b^2c^2+b+c}+\frac{c^9}{c^2a^2+c+a}\geq 1$$

465. គេឲ្យ $a;b;c;d>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $abcd=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\dfrac{a^2(d^2+1)}{d+1}+\dfrac{b^2(c^2+1)}{c+1}+\dfrac{c^2(b^2+1)}{b+1}+\dfrac{d^2(a^2+1)}{a+1}\geq 4$

Greemany 2012

466. បើ $a;b;c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq\sqrt{27(a^3+a+1)(b^3+b+1)(c^3+c+1)}$$

Nguyen Van Huyen : Ho Chi Minh City University of Transport

467. គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c\leq 3$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{a+1}{a(a+2)}+\frac{b+1}{b(b+2)}+\frac{c+1}{c(c+2)}\geq 2$

China Fujian Mathematics league

468. គេឲ្យ $a;b;c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}+9\geq 4\sqrt{3}.\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\right)^3+\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+1}$$

Nguyen Van Huyen ; Ho Chi Min City University of Transport

469. គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមាន។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{ab}{a^{18}b^9+3b^3+14}+\frac{bc}{b^{18}c^9+3c^3+14}+\frac{ca}{c^{18}a^9+3a^3+14}\leq\frac{1}{6}$$

សមភាពកើតមាននៅពេលណា?

470. គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $abc=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^3+bc^2}{(c+a)^2}+\frac{b^3+ca^2}{(a+b)^2}+\frac{c^3+ab^2}{(b+c)^2}\geq\frac{9}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

471. គេឲ្យ $a;b;c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{(2a+1)(b+c+3)+1}+\frac{b}{(2b+1)(c+a+3)+1}+\frac{c}{(2c+1)(a+b+3)+1}\le\frac{3}{16}$$

472. គេឲ្យ $x; y; z$ គឺជាចំនួនពិតដែលនោះក្នុងចន្លោះ $]-1;1[$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\dfrac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)}+\dfrac{1}{(1+x)(1+y)(1+z)}\ge 2$

473. ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a_1; a_2; a_3; \dots; a_n; x_1; x_2; x_3; \dots; x_n$

ចំពោះ $n\in\mathbb{N}$

គឺយើងមាន : $\dfrac{a_1^3}{x_1}+\dfrac{a_2^3}{x_2}+\cdots+\dfrac{a_n^3}{x_n}\ge 1$ បើ $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\ge\sqrt[3]{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$

475. គេឲ្យ $a; b; c>0$ ដែល $a+b+c=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{(1+b)}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}\le 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$$

476. គេឲ្យ $a; b; c\ge 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $ab+bc+ca=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\sqrt{a^3+a}+\sqrt{b^3+b}+\sqrt{c^3+c}\ge(a+b+c)\sqrt{a+b+c}$

477. គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a+b+c}{3\sqrt{3}}\ge\frac{ab+bc+ca}{\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2}}$$

478.គេឲ្យ $a; b; c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $abc=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{a}{a^2+b^2+1}+\dfrac{b}{b^2+c^2+1}+\dfrac{c}{c^2+a^2+1}\le 1$

479. *Olympic Viet Nam* 2012 គេបីចំនួនវិជ្ជមាន $a; b; c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$6a+2b+3c=11$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{2b+3c+16}{1+6a}+\frac{6a+3c+16}{1+2b}+\frac{6a+2b+16}{1+3c}\ge 15$$

Toan Quoc 2012

480. គេឲ្យ $a;b;c;d$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abcd=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $$a+b+c+d-\frac{1}{a+1}-\frac{1}{b+1}-\frac{1}{c+1}-\frac{1}{d+1}\geq 2$$

Japan

481. គេឲ្យ $a;b;c\in\mathbb{R}^+$ ដែល $abc=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{a^2+2b^2+3}+\frac{1}{b^2+2c^2+3}+\frac{1}{c^2+2a^2+3}\leq\frac{1}{2}$$

View Blog

482.www.mathlinks.ro

គេឲ្យ $a;b;c;d>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c+d=4$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{ab(4c^2+23ab)}+\frac{1}{bc(4d^2+23bc)}+\frac{1}{cd(4a^2+23cd)}+\frac{1}{da(4b^2+23da)}\geq\frac{4}{27}$$

Bucuresti: Gremany

483.www.mathlinks.ro

គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ $abc=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^{12}}{5a^2+(a+b)(b^2+c^2)}+\frac{b^{12}}{5b^2+(b+c)(c^2+a^2)}+\frac{c^{12}}{5c^2+(c+a)(a^2+b^2)}\geq\frac{1}{3}$$

484.www.mathlinks.ro

គេឲ្យ $a;b;c$ ជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានដែល $a^2+b^2+c^2=1$ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{2+a(2b+2c-a)}+\frac{1}{2+b(2c+2a-b)}+\frac{1}{2+c(2a+2b-c)}\leq\frac{1}{9}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$$

Gremany

485.www.mathlinks.ro

គេឲ្យ $a;b;c;d;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោម

$$\sum a^2 = 1$$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-cd}+\frac{1}{1-de}+\frac{1}{1-ea} \le \frac{25}{4}$$

Viet Nam

486.www.mathlinks.ro

គេឲ្យ $x;y;z$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមាន។ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$$

Micheal Rozenderg

487.www.mathlinks.ro

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a;b;c$ ដែល $abc=1$ យើងបាន

$$\frac{1}{2a^2+b^2+3}+\frac{1}{2b^2+a^2+3}+\frac{1}{2c^2+a^2+3} \le \frac{1}{2}$$

488.[USA TSTS 2012] គេឲ្យចំនួនពិត $x;y;z$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោម

$$xyz+xy+yz+zx = x+y+z+1$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1+x}}+\sqrt{\frac{1+y^2}{1+y}}+\sqrt{\frac{1+z^2}{1+z}}\right) \le \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{\frac{5}{8}}$

489.www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c \geq 0$ ដែល $a+b+c=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{64}{27} \leq (3a^2+1)(3b^2+1)(3c^2+1) \leq 4$$

Viet Nam

490.www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $ab+bc+ca=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{a^2+b^2}{c\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)}+\frac{b^2+c^2}{a\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)}+\frac{c^2+a^2}{b\left(c+\sqrt{c^2+1}\right)} \geq 2$

Turkey

491.www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{a^2+b^2+2}{(1+a)(b+c)}+\frac{b^2+c^2+2}{(1+b)(c+a)}+\frac{c^2+a^2+2}{(1+c)(a+b)} \geq \frac{15}{2}$

492.[IMO 2012]

គេឲ្យ $n \geq 3$ គឺជាចំនួនគត់។ និង $a_2;a_3;\dots;a_n$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល

ផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a_2a_3\dots a_n=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3\dots(1+a_n)^n > n^n$$

Proposed by Anggelo Di Pasguale ; Australia

493.[Viet Nam 2012]

គេឲ្យ $x_1;x_2;\dots;x_n$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=1 \text{ និង } a \geq 1;t;n \geq 2$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $(a+x_1^t)(a+x_2^t)\dots(a+x_n^t)\geq\left(a+\frac{1}{n^t}\right)^n$

លំហាត់ត្រូវបានតាក់តែងឡើងដោយលោក Quong

IMO_SL 1970 គេឲ្យ $u_1;u_2;\dots;u_n;v_1;v_2;\dots;v_n$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិត។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$1+\sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)^2\leq\frac{4}{3}\left(1+\sum_{i=1}^{n}u_i^2\right)\left(1+\sum_{i=1}^{n}v_i^2\right)$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

យើងមាន

$$1+\sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)^2\leq\frac{4}{3}\left(1+\sum_{i=1}^{n}u_i^2\right)\left(1+\sum_{i=1}^{n}v_i^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{i=1}^{n}u_iv_i\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}(u_i^2+v_i^2)+\frac{4}{3}\sum_{i=1}^{n}u_i^2\sum_{i=1}^{n}v_i^2$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{i=1}^{n}u_iv_i\leq\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{n}u_iv_i+\frac{4}{3}\sum_{i=1}^{n}u_i\sum_{i=1}^{n}v_i$$

$$\Leftrightarrow 0\leq\frac{1}{3}\left(1-2\sum_{i=1}^{n}u_iv_i\right)^2$$

IMO_SL 1967 គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

យើងមាន

$$a^2b^3c^3 + b^2c^3a^3 + c^2a^3b^3 \le a^8 + b^8 + c^8$$

តាមវិសមភាព AM-GM យើងមាន

$$a^2b^3c^3 = aabbbccc = \sqrt[4]{a^8a^8b^8b^8b^8c^8c^8c^8} \le \frac{a^8 + a^8 + b^8 + b^8 + b^8 + c^8 + c^8 + c^8}{8}$$

$$\le \frac{2}{8}a^8 + \frac{3}{8}b^8 + \frac{3}{8}c^8$$

ស្រាយដូចគ្នាយើងបាន ៖ $b^2c^3a^3 \le \frac{2}{8}b^8 + \frac{3}{8}c^8 + \frac{3}{8}a^8; c^2a^3b^3 \le \frac{2}{8}c^8 + \frac{3}{8}a^8 + \frac{3}{8}b^8$

យើងបូកវាមកនោះយើងបាន

$$a^2b^3c^3 + b^2c^3a^3 + c^2a^3b^3 \le \frac{2}{8}a^8 + \frac{3}{8}b^8 + \frac{3}{8}c^8 + \frac{2}{8}b^8 + \frac{3}{8}c^8 + \frac{3}{8}a^8 + \frac{2}{8}c^8 + \frac{3}{8}a^8 + \frac{3}{8}b^8$$

$$\le a^8 + b^8 + c^8$$

គេឲ្យ $x; y; z > 0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$1): \frac{(y+z)(z+x)}{(z+x)(x+y)+(x+y+z)y} + \frac{(z+x)(x+y)}{(x+y)(y+z)+(x+y+z)z} + \frac{(x+y)(y+z)}{(y+z)(z+x)+(x+y+z)x} \ge \frac{12}{7}$$

$$2): \frac{(y+z)(z+x)}{(z+x)^2+(x+y+z)y} + \frac{(z+x)(x+y)}{(x+y)^2+(x+y+z)z} + \frac{(x+y)(y+z)}{(y+z)^2+(x+y+z)x} \le \frac{12}{7}$$

$$3): \frac{(y+z)^2}{(z+x)^2+(x+y+z)y} + \frac{(z+x)^2}{(x+y)^2+(x+y+z)z} + \frac{(x+y)^2}{(y+z)^2+(x+y+z)x} \ge \frac{12}{7}$$

$$4): \frac{(z+x)z}{(y+z)(z+2x)} + \frac{(x+y)x}{(z+x)(x+2y)} + \frac{(y+z)y}{(x+y)(y+2z)} \ge 1$$

www.mathlinks.ro Turkey : គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានដែល $abc=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$47(a^7+b^7+c^7)+36\left(\frac{1}{a^7}+\frac{1}{b^7}+\frac{1}{c^7}\right)+777\geq 147(a^4+b^4+c^4)+196\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)$$

439. [***Austrian Federal Competition for Advanced Students 2012***] ចូររកតម្លៃធំបំផុតរបស់ m ដើម្បីឲ្យ : $\left(a^2+4(b^2+c^2)\right)\left(b^2+4(a^2+c^2)\right)\left(c^2+4(a^2+b^2)\right)\geq m$

ចំពោះគ្រប់ $a;b;c\in\mathbb{R}^*$ និងបំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌ $\left|\frac{1}{a}\right|+\left|\frac{1}{b}\right|+\left|\frac{1}{c}\right|=3$ និងសមភាពពេលណា?

440. [***Brazilan Olympic Revenge 2012***] គេឲ្យ $x_1;x_2;\dots;x_n$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\sum_{cyc}\frac{1}{x_i^3+x_{i-1}x_ix_{i+1}}\leq\sum_{cyc}\frac{1}{x_ix_{i+1}(x_i+x_{i+1})}$

441. [***www.mathlinks.ro 2012***] គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោម

នេះគឺ $a+2b+3c\geq 20$ ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម

$$S=a+b+c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}$$

442. [***www.mathlinks.ro 2012***] ចំពោះ $a;b;c>0$ និងមាន abc
$=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^2+ab+c+1}{c(a+1)}+\frac{b^2+bc+a+1}{a(b+1)}+\frac{c^2+ca+b+1}{b(c+1)}\geq\frac{36}{ab+bc+ca+3}$$

443. [***www.mathlinks.ro 2012***] គេឲ្យ $a;b;c\geq 0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^2}{2a^2+(b+c-a)^2}+\frac{b^2}{2b^2+(a+c-b)^2}+\frac{c^2}{2c^2+(a+b-c)^2}\leq 1$$

443. [***www.mathlinks.ro 2012***] គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោម

$a^2+b^2+c^2=3$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{9-a^2}{bc(8b+c^2)}+\frac{9-b^2}{ca(8c+a^2)}+\frac{9-c^2}{ab(8a+b^2)}\geq\frac{8}{3}$

ដោយ: **BUCURESTI GEMANY**

444. [*www.mathlinks.ro* 2012]ចំពោះ $a;b;c>0$ និង $a+b+c=3; m;n\in\mathbb{N}$

ចូរបង្ហាញថា

$$a\left[\frac{m}{b(ma+n)^2}+\frac{n}{c(nc+m)^2}\right]+b\left[\frac{m}{c(mb+n)^2}+\frac{n}{a(an+m)^2}\right]+c\left[\frac{m}{a(mc+n)^2}+\frac{n}{b(nb+m)^2}\right]\geq\frac{6mn}{(m+n)(m^2+n^2)}$$

ដោយ: **BUCURESTI GEMANY**

445. [*www.mathlinks.ro* 2012]គឲ្យ $a;b;c>0$ និង $a+b+c=3$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{ab(a+1)^2}+\frac{1}{bc(b+1)^2}+\frac{1}{ca(c+1)^2}\geq\frac{27}{2(a^2+b^2+c^2)(a^4+b^4+c^4+3)}$$

ដោយ: **BUCURESTI GEMANY**

446. [*www.mathlinks.ro* 2012]គឲ្យ $a;b;x;y$ ជាបណ្ដាចំនួនវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $1\geq a^{11}+b^{11}$ និង $1\geq x^{11}+y^{11}$ ចូរបង្ហាញថា : $1\geq a^5x^6+b^5y^6$

447. [*www.mathlinks.ro* 2012] គេឲ្យ $a;b;c>0$

ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោមនេះ

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)=a^3+b^3+c^3+2abc+1$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{a^2}{a+b-c}+\frac{b^2}{b+c-a}+\frac{c^2}{c+a-b}\geq 3$

448. [*www.mathlinks.ro* 2012] គេឲ្យ $a_1=1$ និង $a_n=n(a_{n-1}+1)$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 2$

និង $P_n=\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)$ ចូរគណនា : $\lim_{n\to\infty}P_n$

449. [*Olympic VN* 2012] គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជាបណ្តាចំនួនមិនអវិជ្ជមានដែលបំពេញ

ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a + b + c = 1006$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt{2012a + \frac{(b-c)^2}{2}} + \sqrt{2012b + \frac{(c-a)^2}{2}} + \sqrt{2012c + \frac{(a-b)^2}{2}} \leq 2012\sqrt{2}$$

450. [Mathematical invitational tournament in noth of China 2012]
គេឲ្យត្រីកោណ ABC ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{1 + \cos^2 B + \cos^2 C} + \frac{1}{1 + \cos^2 C + \cos^2 A} + \frac{1}{1 + \cos^2 A + \cos^2 B} \leq 2$$

451. [*Centroamerican* 2012] គេឲ្យ $a; b; c$ ជាបណ្តាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = 1$ និង $ab + bc + ca > 0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$a + b + c - \frac{abc}{ab + bc + ca} \geq 4$$

452. [*www.mathlinks.ro* 2012] បើ $n \in \mathbb{N}\,; n \geq 2$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$1 + 2\sqrt{2^2} + 3\sqrt{3^3} + \cdots + n\sqrt{n^n} < (n+1)!$$

453. [*Olympic VN* 2008] ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n និងចំពោះ

គ្រប់ចំនួនពិត $x \in (0; 1)$ គឺយើងបាន $x^2.\sqrt[n]{1-x} \leq \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^2 . \frac{1}{\sqrt[n]{2n+1}}$

454. [*Olympic VN* 2008] គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជា3ចំនួនវិជ្ជមានដែល $a + b + c + 1 = 4abc$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{1}{a^4 + b + c} + \frac{1}{b^4 + c + a} + \frac{1}{c^4 + a + b} \leq \frac{3}{a + b + c}$

455. [*Olympic VN* 2008] ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម: $\frac{x^{30}}{y^4} + \frac{y^{30}}{z^4} + \frac{z^{30}}{t^4} + \frac{t^{30}}{x^4}$

ក្នុងនោះ $x;y;z;t$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $x+y+z+t=2008$

456. [***Olympic VN* 2008**] គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=1$ ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម $T=a+b+c$

457. [***Olympic Viet Nam* 2008**] គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$abc+6a+3b+2c=24$ ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម

$$M=abc(a^2+3)(b^2+12)(c^2+27)$$

458. [***Olympic Viet Nam* 2008**] គេឲ្យរង្វង់ពីរផ្ចិត O កាំ r និង R (ចំពោះ $r<R$)

ΔABC ចារឹកក្នុងរង្វង់ $(O;r)$ ។ គូរបន្លាយ $CA;AB;BC$ កាត់រង្វង់ $(O;R)$ ត្រង់ $B_1;C_1;A_1$

សន្មតិ $S_{\Delta A_1B_1C_1};S_{\Delta ABC}$ គឺជាផ្ទៃរបស់ត្រីកោណ $\Delta A_1B_1C_1;\Delta ABC$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $\frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}}\geq\left(\frac{R}{r}\right)^2$

459. [***Olympic Viet Nam* 2008**] គេឲ្យបណ្តាចំនួន $x;y;z$ គឺជាចំនួនវិជ្ជមានដែលបំពេញ

ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $x+y+z=\frac{3}{2}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{\sqrt{x^2+xy+y^2}}{4yz+1}+\frac{\sqrt{y^2+yz+z^2}}{4zx+1}+\frac{\sqrt{z^2+zx+x^2}}{4xy+1}\geq\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

460. [***Olympic Viet Nam* 2008**] ក្នុងប្លង់គេឲ្យត្រីកោណ ABC និងចំណុច M ណាក៏ដោយ។

តាង $a=BC;b=AC;c=AB$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $\frac{MA}{a}+\frac{MB}{b}+\frac{MC}{c}\geq\sqrt{3}$

461. [***Olympic Viet Nam* 2008**] គេឲ្យ $x;y;z$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានណាក៏ដោយ។

ចូររកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោមខាងក្រោម

$$P=\frac{x^2}{4x^3+3yz+2}+\frac{y^2}{4y^3+3zx+2}+\frac{z^2}{4z^3+3xy+2}$$

462. [*Olympic Viet Nam* **2008**] គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្ដាចំនួនវិជ្ជមាន។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^3+abc}{b+c}+\frac{b^3+abc}{c+a}+\frac{c^3+abc}{a+b}\geq a^2+b^2+c^2 \qquad (1)$$

463. [*Olympic Viet Nam* **2008**] គេឲ្យ $x;y;z;t$ គឺជាឫសរបស់ប្រពន្ធ័សមីការ

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z^2+t^2=2 \\ xt+yz\geq\sqrt{2} \end{cases}$$ ចូររកឫសនោះដែលធ្វើឲ្យ $y+t$ មានតម្លៃតូចបំផុត

464. [*Olympic Viet Nam* **2008**] គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$\frac{1}{a+2}+\frac{2007}{2008+b}\leq\frac{c+1}{2007+c}$$

ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម $P=(a+1)(b+1)(c+1)$

465. [*Olympic Viet Nam* **2008**] គេឲ្យបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c=3$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{a}{a^2+2b+3}+\frac{b}{b^2+2c+3}+\frac{c}{c^2+2c+3}\leq\frac{1}{2}$$

466. [*Olympic Viet Nam* **2008**] គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែល abc
$=1$ ចូររកតម្លៃធំបំផុតកន្សោម

$$P=\frac{1}{2a^3+b^3+c^3+2}+\frac{1}{a^3+2b^3+c^3+2}+\frac{1}{a^3+b^3+2c^3+2}$$

467. [*Olympic Viet Nam* **2008**] ពិនិត្យមើល $a;b;c>0$ ណាក៏ដោយ។ចូររកតម្លៃធំបំផុត

$$T=\frac{\sqrt{abc}}{(1+a)(1+a+b)(1+a+b+c)}$$

468. [*Olympic Viet Nam* **2008**] គេឲ្យចំនួនពិត $a\neq 0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt{a^2+\sqrt{a^2+\cdots+\sqrt{a^2}}}<\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\left(\sqrt{1+16a^2}+\sqrt{9+16a^2}\right)$$

មាន n ឫសការេ

469. [*Olympic Viet Nam* 2008] គេឲ្យបីចំនួនវិជ្ជមាន $a;b;c$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}\geq\frac{a+b}{a+c}+\frac{b+c}{b+a}+\frac{c+a}{c+b}$$

470. [*Olympic Viet Nam* 2008] គេឲ្យបីចំនួនវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$ab+bc+ca=6abc$ ចូររកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោម

$$M=\frac{1}{a+2b+3c}+\frac{1}{2a+3b+c}+\frac{1}{3a+b+2c}$$

471. [*Olympic Viet Nam* 2008] គេឲ្យបណ្តាចំនួនដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោម

$$\begin{cases}x^2+xy+\dfrac{y^2}{3}=25\\ \dfrac{y^2}{3}+z^2=9\\ z^2+zx+x^2=16\end{cases}$$ ចូររកតម្លៃនៃកន្សោម $P=xy+2yz+2zx$

472. [*Olympic Viet Nam* 2008] គេឲ្យ $x;y;z\neq 0$ និង $x^2+y^2+z^2=1$

ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់ $P=\dfrac{1}{x^4+y^4+z^4}+\dfrac{1}{x^2y^2}+\dfrac{1}{y^2z^2}+\dfrac{1}{z^2x^2}$

473. [*Olympic Viet Nam* 2008] គេឲ្យបណ្តាចំនួនវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)}=1$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $abc\geq 1$

474. [*Olympic Viet Nam* 2008] គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់

$$\sqrt{abc}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+(a+b+c)^2\geq 4\sqrt{3abc(a+b+c)}$$

475. **[*Olympic Viet Nam* 2008]** គេឲ្យ $x;y;z \ge -1$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x+y+z=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2} \le \frac{9}{10}$

476. **[*singapor* 2012]** គេឲ្យ $x;y;z>0$ ដែល $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{xyz}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា:

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{2z}{\sqrt{1+z^2}}<3$$

477. **[*singapor* 2010]** គេឲ្យ $a;b;c;x_1;x_2;\dots;x_5$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b+c=1$ និង $x_1x_2x_3x_4x_5=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(ax_1^2+bx_1+c)(ax_2^2+bx_2+c)\dots(ax_5^2+bx_5+c)\ge 1$$

478. **[Junior Balkan MO 2012]** គេឲ្យ $a;b;c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $a+b+c=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+6\ge 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{1-b}{b}}+\sqrt{\frac{1-c}{c}}\right)$

តើសមភាពកើតមាននៅពេលណា?

479. គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $abc=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{\sqrt{3a^4+5b^4+4b+24}}+\frac{1}{\sqrt{3b^4+5c^4+4c+24}}+\frac{1}{\sqrt{3c^4+5a^4+4a+24}}\le\frac{1}{2}$$

www.mathlinks.ro

480. គេឲ្យ $x;y;z>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $xy+yz+zx=3xyz$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{y}{xy^2+3x}+\frac{z}{yz^2+3y}+\frac{x}{zx^2+3z}\le\frac{3}{4}$$

www.mathlinks.ro

481. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c>0$ និង $abc=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^9}{a^2b^2+a+b}+\frac{b^9}{b^2c^2+b+c}+\frac{c^9}{c^2a^2+c+a}\geq 1$$

482. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c;d>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $abcd=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{a^2(d^2+1)}{d+1}+\frac{b^2(c^2+1)}{c+1}+\frac{c^2(b^2+1)}{b+1}+\frac{d^2(a^2+1)}{a+1}\geq 4$

Greemany 2012

483. www.mathlinks.ro បើ $a;b;c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq\sqrt{27(a^3+a+1)(b^3+b+1)(c^3+c+1)}$$

Nguyen Van Huyen : Ho Chi Minh City University of Transport

484. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c\leq 3$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{a+1}{a(a+2)}+\frac{b+1}{b(b+2)}+\frac{c+1}{c(c+2)}\geq 2$

China Fujian Mathematics league

485. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}+9\geq 4\sqrt{3}.\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\right)^3+\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+1}$$

Nguyen Van Huyen ; Ho Chi Min City University of Transport

486. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមាន។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{ab}{a^{18}b^9+3b^3+14}+\frac{bc}{b^{18}c^9+3c^3+14}+\frac{ca}{c^{18}a^9+3a^3+14}\leq\frac{1}{6}$$

សមភាពកើតមាននៅពេលណា?

487.www.mathlinks.ro

គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $abc=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^3+bc^2}{(c+a)^2}+\frac{b^3+ca^2}{(a+b)^2}+\frac{c^3+ab^2}{(b+c)^2}\geq\frac{9}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

488. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{(2a+1)(b+c+3)+1}+\frac{b}{(2b+1)(c+a+3)+1}+\frac{c}{(2c+1)(a+b+3)+1}\le\frac{3}{16}$$

489.www.mathlinks.ro គេឲ្យ $x;y;z$ គឺជាចំនួនពិតដែលនោះក្នុងចន្លោះ $]-1;1[$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $\frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)}+\frac{1}{(1+x)(1+y)(1+z)}\ge 2$

490 www.mathlinks.ro

ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a_1;a_2;a_3;\dots;a_n;x_1;x_2;x_3;\dots;x_n$ ចំពោះ $n\in\mathbb{N}$

គឺយើងមាន ៖ $\frac{a_1^3}{x_1}+\frac{a_2^3}{x_2}+\cdots+\frac{a_n^3}{x_n}\ge 1$ បើ $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\ge\sqrt[3]{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$

491. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែល $a+b+c=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{(1+b)}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}\le 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$$

492. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c\ge 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $ab+bc+ca=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $\sqrt{a^3+a}+\sqrt{b^3+b}+\sqrt{c^3+c}\ge(a+b+c)\sqrt{a+b+c}$

493. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a+b+c}{3\sqrt{3}}\ge\frac{ab+bc+ca}{\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2}}$$

494.www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $abc=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a}{a^2+b^2+1}+\frac{b}{b^2+c^2+1}+\frac{c}{c^2+a^2+1}\le 1$

495. [*Olympic Viet Nam 2012*]គេបីចំនួនវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$6a+2b+3c=11$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{2b+3c+16}{1+6a}+\frac{6a+3c+16}{1+2b}+\frac{6a+2b+16}{1+3c}\geq 15$$

Toan Quoc 2012

496. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c;d$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abcd=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖ $$a+b+c+d-\frac{1}{a+1}-\frac{1}{b+1}-\frac{1}{c+1}-\frac{1}{d+1}\geq 2$$

Japan

497.www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c\in\mathbb{R}^+$ ដែល $abc=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{a^2+2b^2+3}+\frac{1}{b^2+2c^2+3}+\frac{1}{c^2+2a^2+3}\leq\frac{1}{2}$$

View Blog

498. www.mathlinks.ro

គេឲ្យ $a;b;c;d>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c+d=4$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{ab(4c^2+23ab)}+\frac{1}{bc(4d^2+23bc)}+\frac{1}{cd(4a^2+23cd)}+\frac{1}{da(4b^2+23da)}\geq\frac{4}{27}$$

Bucuresti: Gremany

499. www.mathlinks.ro

គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $abc=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^{12}}{5a^2+(a+b)(b^2+c^2)}+\frac{b^{12}}{5b^2+(b+c)(c^2+a^2)}+\frac{c^{12}}{5c^2+(c+a)(a^2+b^2)}\geq\frac{1}{3}$$

500. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c$ ជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានដែល $a^2+b^2+c^2=1$ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{2+a(2b+2c-a)}+\frac{1}{2+b(2c+2a-b)}+\frac{1}{2+c(2a+2b-c)}\leq\frac{1}{9}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$$

Gremany

501. www.mathlinks.ro

គេឲ្យ $a;b;c;d;e$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោម

$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-cd}+\frac{1}{1-de}+\frac{1}{1-ea}\le\frac{25}{4}$$

Viet Nam

502. www.mathlinks.ro

គេឲ្យ $x;y;z$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមាន។ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$$

Micheal Rozenderg

503. [Tuymaada Olympic 2012] ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a;b;c$ ដែល

$abc=1$ យើងបាន: $\frac{1}{2a^2+b^2+3}+\frac{1}{2b^2+a^2+3}+\frac{1}{2c^2+a^2+3}\le\frac{1}{2}$

Proposed by :V.Aksenov

<u>លំហាត់លំនាំ</u>

a: គេឲ្យ $n\in\mathbb{N};n\ge 2$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a;b;c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$abc=1$ នោះយើងបាន : $\frac{1}{2a^n+b^n+3n-3}+\frac{1}{2b^n+c^n+3n-3}+\frac{1}{2c^n+a^n+3n-3}\le\frac{1}{n}$

$b)$: គេឲ្យ $n\in\mathbb{N};n\ge 2$ និង $k\in$ គេឲ្យ $n\in\mathbb{N}^*$ និងបណ្តាចំនួនពិត $a;b;c$ ណាក៏ដោយដែល

ផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $abc=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{2ka^n+kb^n+3n-3k}+\frac{1}{2kb^n+kc^n+3n-3k}+\frac{1}{2kc^n+ka^n+3n-3k}\le\frac{1}{n}$$

504.[USA TSTS 2012] គេឲ្យចំនួនពិត $x;y;z$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោម

$$xyz+xy+yz+zx=x+y+z+1$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1+x}}+\sqrt{\frac{1+y^2}{1+y}}+\sqrt{\frac{1+z^2}{1+z}}\right)\le\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{\frac{5}{8}}$

506. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c \geq 0$ ដែល $a+b+c=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{64}{27} \leq (3a^2+1)(3b^2+1)(3c^2+1) \leq 4$$

Viet Nam

507. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $ab+bc+ca=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{a^2+b^2}{c\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)}+\frac{b^2+c^2}{a\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)}+\frac{c^2+a^2}{b\left(c+\sqrt{c^2+1}\right)} \geq 2$

Turkey

508. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $a+b+c=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{a^2+b^2+2}{(1+a)(b+c)}+\frac{b^2+c^2+2}{(1+b)(c+a)}+\frac{c^2+a^2+2}{(1+c)(a+b)} \geq \frac{15}{2}$

509. [IMO 2012]

គេឲ្យ $n \geq 3$ គឺជាចំនួនគត់។ និង $a_2;a_3;\dots;a_n$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល

ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $a_2a_3\dots a_n=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3\dots(1+a_n)^n > n^n$$

Proposed by Anggelo Di Pasguale ; Australia

510.[Viet Nam 2012]

គេឲ្យ $x_1;x_2;\dots;x_n$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$$x_1+x_2+\dots+x_n=1 \text{ និង } a \geq 1; t;n \geq 2$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $(a+x_1^t)(a+x_2^t)\dots(a+x_n^t) \geq \left(a+\frac{1}{n^t}\right)^n$

លំហាត់ត្រូវបានតាក់តែងឡើងដោយលោក Quong

511.[Viet Nam] គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+7bc+c^2}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+7ca+a^2}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+7ab+b^2}} \geq 1$$

Nguyen Van Hueyn : Ho Chi Minh City University of Transport

512.[Turkey NMO 2003]

គេឲ្យ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោម

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \le tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \text{ ចំពោះ } x_1; x_2 \in \mathbb{R} \text{ និង } t \in (0;1)$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\sum_{k=1}^{2003} f(a_{k+1})a_k \ge \sum_{k=1}^{2003} f(a_k)a_{k+1}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a_1; a_2; \dots; a_{2004}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_1 \ge a_2 \ge \dots \ge a_{2003}$ និង $a_{2004} = a_1$

513.[Turkey NMO 2004]

គេឲ្យ $ABCD$ គឺជាចតុកោណប៉ោងនិងមាន $K; L; M; N$ ជាចំណុចកណ្ដាល

នៅលើជ្រុង $[AB]; [BC]; [CD]; [DA]$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\sqrt[3]{S_1} + \sqrt[3]{S_2} + \sqrt[3]{S_3} + \sqrt[3]{S_4} \le 2\sqrt[3]{S}$

ចំពោះ $S_1 = S_{\Delta AKN}; S_2 = S_{\Delta BKL}; S_3 = S_{\Delta CLM}; S_4 = S_{\Delta DMN}; S = S_{ABCD}$

514. [Tumaada 2000] គេឲ្យ $x_1; x_2; \dots; x_n$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $0 < x_k \le \frac{1}{2}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\left(\frac{n}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} - 1\right)^n \le \left(\frac{1}{x_1} - 1\right)\left(\frac{1}{x_2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{x_n} - 1\right)$

515. គេឲ្យ $n \ge 2$ គឺជាចំនួនគត់វិជ្ជមាននិង $a_1; a_2; \dots; a_n$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

ដែលផ្ទៀងផ្ទៀត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a_1}{1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n} + \frac{a_2}{1 + a_1 + a_3 + \dots + a_n} + \dots + \frac{a_n}{1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}} \ge \frac{n}{2n-1}$$

www.mathlinks.ro

516. គេឲ្យ $a; b; c; d > 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $abcd = 1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a+1}{abc+ab+1}+\frac{b+1}{bcd+bc+1}+\frac{c+1}{cda+cd+1}+\frac{d+1}{dab+da+1}\geq\frac{8}{3}$$

www.mathlinks.ro

517.[Turkey] គេឲ្យបណ្តាចំនួនវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែល $a^2+b^2+c^2=3$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^5+1}{b+2}+\frac{b^5+1}{c+2}+\frac{c^5+1}{a+2}\geq 2$$

518.[Baltic Way 1992]

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនវិជ្ជមាន $x_1;x_2;\dots;x_n:y_1;y_2;\dots;y_n$ យើងបាន

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_iy_i}\geq\frac{4n}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i+y_i\right)^2}$$

519. [2004;40;43] Proposed by Mihaly Bencze; Brosov;Romania

គេឲ្យ $a;b;c>1$ និង $\alpha>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$a^{\sqrt{\alpha\log_a b}+\sqrt{\alpha\log_a c}}+b^{\sqrt{\alpha\log_b a}+\sqrt{\alpha\log_b c}}+c^{\sqrt{\alpha\log_c a}+\sqrt{\alpha\log_c b}}\leq\sqrt{abc}\left(a^{\alpha-\frac{1}{2}}+b^{\alpha-\frac{1}{2}}+c^{\alpha-\frac{1}{2}}\right)$$

520. គេឲ្យត្រីកោណ ABC ។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{h_a}{h_a+h_b+h_c}(\cos B+\cos C)+\frac{h_b}{h_a+h_b+h_c}(\cos C+\cos A)+\frac{h_c}{h_a+h_b+h_c}(\cos A+\cos B)\leq 1$$

ភាគទី III

ngat 27/07/2012 :8h06

1. គេឲ្យពីរចំនួនមិនអវិជ្ជមាន $x;y$ ដែល $x+y=1$ ចូររកតម្លៃធំបំផុតនិងតូចបំផុតរបស់កន្សោម

$$S=(4x^2+3y)(4y^2+3x)+25xy$$

វិញ្ញាសាវៀតណាមឆ្នាំ 2009

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

តាមសម្មតិកម្មយើងមាន $x+y=1$ នោះយើងបាន

$$S=12(x^3+y^3)+16x^2y^2+34xy=12(x+y)(x^2+y^2-xy)+16x^2y^2+34xy$$

$$=12[(x+y)^2-3xy]+16x^2y^2+34xy=12(1-3xy)+16x^2y^2+34xy$$

$$=\left(4xy-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{191}{16}$$

ដោយ $x;y$ វិជ្ជមាននិង $x+y=1$ នោះយើងបាន $0\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ យើងទាញបាន

$-\frac{1}{4}\le 4xy-\frac{1}{4}\le\frac{3}{4}$ នោះយើងទាញបាន $0\le\left(4xy-\frac{1}{4}\right)^2\le\frac{9}{16}$

ដូច្នេះគឺយើងបាន $\frac{191}{16}\le S\le\frac{25}{2}$

2. គេឲ្យ $a;b$ គឺជាបណ្តាចំពិតវិជ្ជមានដែល $a^3+b^3=2$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$3(a^4+b^4)+2a^4b^4\le 8$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

តាមវិសមភាព AM-GM យើងមាន

$$a^3+b^3+1\geq 3ab; a^3+2\geq 3a \text{ និង } b^3+2\geq 3b \text{ ដោយ } a^3+b^3=2$$

នោះយើងបាន $ab\leq 1; 3a\leq 4-b^3; 3b\leq 4-a^3$

ដូច្នេះយើងបាន $3(a^4+b^4)+2a^4b^4=3a.a^3+3b.b^3+2a^3b^3.ab$

$$\leq (4-b^3)a^3+(4-a^3)b^3+2a^3b^3$$

$$=4(a^3+b^3)=8$$

សមភាពកើតមានពេលដែល $a=b=1$

3. គេឲ្យ $x;y;z>0$ និង $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4$ ចូររកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោមខាងក្រោមនេះ

$$P=\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

ដំបូងនេះយើងប្រវិសមភាពដែលយើងបានស្គាល់ គឺបើ $a;b>0$ គឺ $\frac{1}{a+b}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

តាមរបៀបខាងលើនេះយើងបាន $\frac{1}{2x+y+z}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{y+z}\right)\leq\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2x}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\right]$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{2z}\right)$$

ស្រាយដូចគ្នាយើងបាន $\frac{1}{x+2y+z}\leq\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{2z}\right);\frac{1}{x+y+2z}\leq\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{z}\right)$

បូកវាមកយើងបាន $P\leq 1$ ចំពោះសមភាពពេលដែល $x=y=z=\frac{4}{3}$

4. គេឲ្យ $x;y;z$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $xyz=1$ ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម

$$P=\frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

តាមវិសមភាព AM-GM យើងមាន

$$P\ge\frac{x^2.2\sqrt{yz}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{y^2.2\sqrt{zx}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{z^2.2\sqrt{xy}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$

$$=\frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$

យើងតាង $a=x\sqrt{x};b=y\sqrt{y};c=z\sqrt{z}$

នោះការស្រាយរបស់យើងនៅសល់ត្រឹមតែ $\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\ge 1$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងមាន

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\ge\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}=\frac{1}{3}.\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{2}{3}\ge 1$$

ដូច្នេះយើងបាន

$$P=\frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}\ge 2$$

សមភាពកើតមានពេលដែល $x=y=z=1$

5. គេឲ្យ $x;y;z$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលប្រែប្រួល។ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម

$$P = x\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{yz}\right)+y\left(\frac{y}{2}+\frac{1}{zx}\right)+z\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{xy}\right)$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

<u>របៀបទី1</u>

ប្រើវិសមភាព AM-GM និងវិសមភាពដែលយើងបានស្គាល់គឺ

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$$

យើងបាន

$$P = \frac{x^2+y^2+z^2}{2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz} \geq \frac{x^2+y^2+z^2}{2}+\frac{xy+yz+zx}{xyz}$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{y^2}{2}+\frac{1}{y}\right)+\left(\frac{z^2}{2}+\frac{1}{z}\right)$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x}\right)+\left(\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{2y}\right)+\left(\frac{z^2}{2}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{2z}\right)$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}.\frac{1}{2x}.\frac{1}{2x}}+3\sqrt[3]{\frac{y^2}{2}.\frac{1}{2y}.\frac{1}{2y}}+3\sqrt[3]{\frac{z^2}{2}.\frac{1}{2z}.\frac{1}{2z}}=\frac{9}{2}$$

សមភាពកើតមានឡើងពេលដែល $x=y=z=1$

<u>របៀបទ2</u>

យើងមាន

$$P = x\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{yz}\right)+y\left(\frac{y}{2}+\frac{1}{zx}\right)+z\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{xy}\right)$$

$$= \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}+\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}$$

$$= (x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{xyz}\right) = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)\left(1+\frac{1}{xyz}+\frac{1}{xyz}\right)$$

តាមវិសមភាព AM-GM យើងបាន

$$P \geq \frac{1}{2}.9\sqrt[3]{x^2y^2z^2}.\sqrt[3]{\frac{1}{x^2y^2z^2}} = \frac{9}{2}$$

6. គេឲ្យ $x;y;z$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $x(x+y+z)=3yz$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖ $(x+y)^3+(x+z)^3+3(x+y)(y+z)(z+x) \leq 5(y+z)^3$

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងនិងប្រើគំនិត្យដែលបានប្រើជាញឹកញាប់គឺការធ្វើវាពី 3 អញ្ញាត់ឲ្យទៅតែ1អញ្ញាត់ព្រោះថាវាងាយស្រួលក្នុងការស្រាយបញ្ជាក់។ យើងអាចឧបមាថា $a+b+c=3$ ពេលសម្មតិកម្មរបស់យើងសល់ត្រឹមតែ $x=yz$ ។ឥឡូវនេះយើងប្រើសមភាព

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ និង $a=x+y; b=x+z$ នោះយើងបាន

$$(x+y)^3+(x+z)^3 = (2x+y+z)^3-3(x+y)(x+z)(2x+y+z)$$
$$= (2x+y+z)^3-3[x(x+y+z)+yz](2x+y+z)$$
$$= (3+x)^3-3(3x+yz)(3+x) = (3+x)^3-12x(3+x)$$

ម្យ៉ាងទៀតយើងមាន

$$(x+y)(y+z)(z+x) = (x+y+z)[x(y+z)+yz]-xyz$$
$$= 3[x(3-x)+x]-x^2 = 12-4x^2$$

និង $5(y+z)^3 = 5(3-x)^3$

យើងទាញបានវិសមភាពដែលត្រូវសម្រួលទៅនិង

$$(3-x)^3 - 12x(3+x) + 3(12x - 4x^2) \le 5(3-x)^3$$

ក្រោយពីពេលដែលយើងពន្លាតនិងដាក់វាជាកន្សោមយើងបាន

$$(x-6)(x-3)(x-1) \le 0$$

តាមវិសមភាព AM-GM យើងមាន

$$x = yz \le \frac{(y+z)^2}{4} = \frac{(3-x)^2}{4} \Leftrightarrow (x-1)(x-9) \ge 0$$

យើងទាញបាន $x \le 1$ (ដោយ $x < 3$) និងជាមួយនិងលទ្ធផលនេះយើងអាចយើងថាវាពិត។

និងសមភាពកើតមានឡើងពេលដែល $x = y = z$

7. គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានដែល $a + b + c = 1$ ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម

$$M = 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 3(ab + bc + ca) + 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

សម្រាយបញ្ជាក់

ដោយ $1 = (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \ge a^2 + b^2 + c^2$

នោះយើងបាន $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \le 1$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{1}{3}$$

យើងទាញបាន ៖ $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \ge \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{3}$

ជាមួយនិងទំនាក់ទំនងខាងលើយើងបាន

$$\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}-1\right)\left(3\sqrt{a^2+b^2+c^2}-1\right)\leq 0$$

យើងទាញបាន

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}\geq\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)+\frac{1}{3}=\frac{3}{4}[1-2(ab+bc+ca)]+\frac{1}{3}$$

$$=1-\frac{3}{2}(ab+bc+ca)$$

ដូច្នេះយើងមាន

$$M\geq 3(ab+bc+ca)+2\sqrt{a^2+b^2+c^2}\geq 3(ab+bc+ca)+[2-3(ab+bc+ca)]=2$$

សមភាពកើតមានពេលដែល $a=1$និង $b=c=0$ឬក៏បណ្តាចំលាស់វា

8. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនវិជ្ជមាន $a;b;c$ យើងបាន

$$\frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{2\sqrt{3}b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\frac{2\sqrt{3}c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}<5$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

តាមវិសមភាព AM-GM យើងមាន

$$\frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\leq\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}$$

$$\frac{2\sqrt{3}b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}\leq\frac{b}{b+a}+\frac{3b}{b+c}$$

$$\frac{2\sqrt{3}c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}\leq\frac{c}{c+a}+\frac{3c}{b+c}$$

បូកវិសមភាពទាំងនេះយើងបាន

$$\frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{2\sqrt{3}b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\frac{2\sqrt{3}c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}\le 5$$

សមភាពកើតមានពេលដែល $\frac{a}{a+b}=\frac{a}{a+c};\frac{b}{b+a}=\frac{3b}{b+c};\frac{c}{c+a}=\frac{3c}{b+c}$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូច្នេះ $\frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{2\sqrt{3}b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\frac{2\sqrt{3}c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}<5$

9. គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្ដាចំនួនវិជ្ជមានដែល $ab+bc+ca=3$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$4+\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}\ge(1+a)(1+b)(1+c)$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

តាមវិសមភាព AM-GM យើងមាន

$3=ab+bc+ca\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ នោះ $abc\le 1$ និង $(1+a^2)(1+b^2)=(a+b)^2+(1-ab)^2$

និងមានមួយទៀត $2(1+c^2)=(1+c)^2+(c-1)^2$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងមាន

$$\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}\ge(a+b)(1+c)+(1-ab)(c-1)$$

យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}4+\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}&\ge 4+(a+b)(1+c)+(1-ab)(c-1)\\&\ge 2(1-abc)+(a+1)(b+1)(c+1)\end{aligned}$$

$$\geq (a+1)(b+1)(c+1)$$

សមភាពកើតមានពេលដែល $a=b=c=1$

10. គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{2+\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}}+\frac{1}{2+\frac{b(c+a)}{c^2+a^2}}+\frac{1}{2+\frac{c(a+b)}{a^2+b^2}}\geq 1$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងមាន

$$(b+c)^2\leq 2(b^2+c^2)$$

យើងទាញបាន $2+\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}\leq 2+\frac{2a}{b+c}=\frac{2(a+b+c)}{b+c}$

នោះយើងទាញបាន $\frac{1}{2+\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}}\geq\frac{b+c}{2(a+b+c)}$ ស្រាយដូចគ្នាហើយបូកវាមកយើងនិង

បានវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយ។សមភាពកើតមានពេលដែល $a=b=c$

11. គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានដែល $a+b+c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{3}\leq\frac{a^2}{3a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{3b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{3c^2+(a+b)^2}\leq\frac{1}{2}$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

យើងមាន $3a^2+(b+c)^2\leq 3a^2+2(b^2+c^2)\leq 3(a^2+b^2+c^2)$

នោះយើងបាន $\dfrac{a^2}{3a^2+(b+c)^2} \geq \dfrac{a^2}{3(a^2+b^2+c^2)}$

យើងទាញបាន $\dfrac{a^2}{3a^2+(b+c)^2}+\dfrac{b^2}{3b^2+(c+a)^2}+\dfrac{c^2}{3c^2+(a+b)^2} \geq \dfrac{a^2+b^2+c^2}{3(a^2+b^2+c^2)}=\dfrac{1}{3}$

សមភាពកើតមានពេលដែលពីរចំនួនក្នុងបីនោះស្មើនិង 0

យើងនិងស្រាយបញ្ជាក់ផ្នែកខាងស្តាំ

យើងនិងស្រាយថា $\dfrac{a^2}{3a^2+(b+c)^2} \leq \dfrac{a}{2(a+b+c)}$

បើ $a=0$ វិសមភាពរបស់យើងគឺពិត។រីឯចំពោះ $a>0$ តាមវិសមភាព AM-GM យើងបាន

$$\frac{a^2}{3a^2+(b+c)^2}=\frac{a^2}{2a^2+[a^2+(b+c)^2]} \leq \frac{a^2}{2a^2+2a(b+c)}=\frac{a}{2(a+b+c)}$$

ស្រាយដូចគ្នាហើយបូកវាទាំងបីនោះមកយើងនិងបានដូចខាងក្រោមនេះ

$$\frac{a^2}{3a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{3b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{3c^2+(a+b)^2} \leq \frac{a+b+c}{2(a+b+c)}=\frac{1}{2}$$

សមភាពកើតមានពេលដែល $a=b$ និង $c=0$ ឬក៏បណ្តាចំលាស់របស់វា។

12. គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា
$$8(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a+b+c)^2 \geq 3(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2(a^2+b^2+c^2)$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

វិសមភាពនេះយើងសរសេរបានជា

$$\frac{2(a^2+b^2)}{(a+b)^2}\cdot\frac{2(b^2+c^2)}{(b+c)^2}\cdot\frac{2(c^2+a^2)}{c+a} \geq \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}$$

ដោយ $\frac{2(a^2+b^2)}{(a+b)^2}=1+\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$ នោះយើងបាន

$$\left[1+\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}\right]\left[1+\frac{(b-c)^2}{(b+c)^2}\right]\left[1+\frac{(c-a)^2}{(c+a)^2}\right]\geq\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}$$

ម្យ៉ាងវិញទៀតចំពោះចំនួនវិជ្ជមាន $x;y;z$ យើងតែងតែបាន

$$(1+x)(1+y)(1+z)\geq 1+x+y+z$$

ដូច្នេះយើងបាន

$$\prod\left[1+\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}\right]\geq 1+\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}+\frac{(b-c)^2}{(b+c)^2}+\frac{(c-a)^2}{(c+a)^2}$$

$$\geq 1+\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{(a+b+c)^2}$$

$$=\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}$$

សមភាពកើតមានពេលដែល $a=b=c$

13. គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានដែល $a+b+c=3$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$a+ab+2abc\leq\frac{9}{2}$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

តាមវិសមភាព AM-GM យើងមាន

$$ab+2abc=2ab\left(c+\frac{1}{2}\right)\leq 2a\left(\frac{b+c+\frac{1}{2}}{2}\right)^2=2a\left(\frac{7-2a}{4}\right)^2$$

ដូចនេះយើងត្រូវស្រាយថា $a+2a\left(\frac{7-2a}{4}\right)^2\leq\frac{9}{2}\Leftrightarrow(4-a)(2a-3)^2\geq 0$ ពិត

សមភាពកើតមានពេលដែល $(a;b;c)=\left(\frac{3}{2};1;\frac{1}{2}\right)$

14. គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានដែល $a+b+c=3$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{ca}{\sqrt{b^2+3}}+\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}\le\frac{3}{2}$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

ពីវិសមភាពដែលយើងបានស្គាល់គឺ $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$ជាមួយនិងសម្មតិកម្ម

យើងទាញបាន $ab+bc+ca\le 3$ តាមវិសមភាពAM-GM យើងបាន

$$\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}\le\frac{bc}{\sqrt{a^2+ab+bc+ca}}=\frac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{c+a}\right)$$

ស្រាយដូចគ្នាហើយបូកវាទាំងអស់ចូលគ្នាមកយើងបាន

$$\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{ca}{\sqrt{b^2+3}}+\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{ab+ca}{b+c}+\frac{ca+bc}{a+b}+\frac{bc+ab}{c+a}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{3}{2}$$

សមភាពកើតមានពេលដែល $a=b=c=1$

15. គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានដែល $a^2+b^2+c^2>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(c+a-b)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(a+b-c)^2}{2c^2+(a+b)^2}\ge\frac{1}{2}$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

ដោយ $(b+c)^2\le 2(b^2+c^2)$ នោះយើងមាន

$$\frac{(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2}\ge\frac{(b+c-a)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

ស្រាយដូចគ្នាហើយបូកវាមកយើងបាន

$$\sum \frac{(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2} \geq \frac{(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

ដូច្នេះការស្រាយបញ្ជាក់បន្តរបស់យើងគឺនៅសល់ត្រឹមតែ

$$(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2 \geq a^2+b^2+c^2$$

វិសមភាពនេះពិតក្រោយពេលយើងពន្លាតវាមកយើងនិងឃើញ

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

សមភាពកើតាមពេលដែល $a=b=c$

16. គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានដែល $a^2+b^2+c^2=a+b+c$
ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \leq ab+bc+ca$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

ដោយការប្រើច្បាប់លើកវាជាការេ។យើងក៏អាចសរសេរវាបានដូចខាងក្រោមនេះ

$$a^4+b^4+c^4-a^2-b^2-c^2=2(ab+bc+ca-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2)$$

ពេលនោះយើងទាញបានវិសមភាពដែលបានឲ្យមានរាងដូចខាងក្រោមនេះ

$$a^4+b^4+c^4 \geq a^2+b^2+c^2$$

បើ $a=b=c=0$ នោះវិសមភាពនេះពិត។ ពិនិត្យពេល $a+b+c>0$ ពេលនេះយើងក៏អាចសរសេរវាបានជា $(a+b+c)^2(a^4+b^4+c^4) \geq (a^2+b^2+c^2)^3$

យើងឃើញថាវិសមភាពពិតតាមវិសមភាព Holder

សមភាពកើតមានពេលដែល $(a;b;c)=(0;0;0);(1;1;0);(1;1;1);(1;0;0)$

17. គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានដែល $(a+b)(b+c)(c+a)=2$
ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)\leq 1$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

មិនបាត់លក្ខណៈទូទៅយើងឧបមាថា $a\geq b\geq c$ ពេលនោះយើងបាន

$$\begin{aligned}4(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab) &\leq 4(a^2+ac)(b^2+ca)(bc+ab)\\ &= 4ab(b^2+ca)(a+c)^2\\ &\leq (b^2+ca+ab)^2(a+c)^2\\ &\leq (b^2+ca+ab+bc)^2(a+c)^2\\ &= (a+b)^2(b+c)^2(a+c)^2=4\end{aligned}$$

ចំពោះ $a\geq b\geq c$ សមភាពកើតមានពេលដែល $a=b=1;c=0$

18. គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{4a^2-b^2-c^2}{a(b+c)}+\frac{4b^2-c^2-a^2}{b(c+a)}+\frac{4c^2-a^2-b^2}{c(a+b)}\leq 3$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

វិសមភាពដែលត្រូវស្រាយបញ្ជាក់យើងអាចសរសេរបានជា

$$\sum\frac{b^2+c^2}{a(b+c)}+3\geq 4\sum\frac{a}{b+c}$$

តាមវិសមភាព AM-GM យើងមាន

$$\sum\frac{b^2+c^2}{a(b+c)}+3=\sum\frac{b(c+a)+c(c+a)}{a(b+c)}=\sum\frac{b(a+b)}{a(b+c)}+\sum\frac{c(c+a)}{a(b+c)}$$

$$=\sum\frac{a(c+a)}{c(a+b)}+\sum\frac{a(a+b)}{b(c+a)}\geq 2\sum\frac{a}{\sqrt{bc}}\geq 4\sum\frac{a}{b+c}$$

សមភាពកើតមានពេលដែល $a=b=c$

19. គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានដែល $a+b+c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{bc}{2a+b+c}+\frac{ca}{2b+c+a}+\frac{ab}{2c+a+b}\leq\frac{a+b+c}{4}$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$\sum\frac{bc}{2a+b+c}=\sum\frac{bc}{(a+b)+(a+c)}\leq\frac{1}{4}\sum bc\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sum\frac{bc}{a+b}+\sum\frac{bc}{c+a}\right)=\frac{1}{4}\left(\sum\frac{bc}{a+b}+\sum\frac{ca}{a+b}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\sum\frac{c(a+b)}{a+b}=\frac{a+b+c}{4}$$

សមភាពកើតមានពេលដែល $a=b=c$ ឬក៏ $a=0;b=c$ ឬក៏បណ្តាចំសាល់វា។

20. គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$a+b+c+\frac{1}{abc}\geq\frac{2(ab+bc+ca+1)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$\left(a+b+c+\frac{1}{abc}\right)(ab^2+bc^2+ca^2+abc)\geq(ab+bc+ca+1)^2$$

$$\left(a+b+c+\frac{1}{abc}\right)(ac^2+ba^2+cb^2+abc)\geq(ca+ab+bc+1)^2$$

យើងទាញបាន

$$a+b+c+\frac{1}{abc}\geq\frac{(ab+bc+ca+1)^2}{ab^2+bc^2+ca^2+abc}$$

$$a+b+c+\frac{1}{abc}\geq\frac{(ab+bc+ca+1)^2}{a^2b+b^2c+c^2a+abc}$$

យើងបូកវាតាមទិសដៅរបស់វិសមភាពនិងបន្ទាប់មកតាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz នោះ

$$2\left(a+b+c+\frac{1}{abc}\right)\geq(ab+bc+ca+1)^2\left(\frac{1}{\sum a^2b+abc}+\frac{1}{\sum ab^2+abc}\right)$$

$$\geq\frac{4(ab+bc+ca+1)^2}{\sum a^2b+abc+\sum ab^2+abc}$$

$$=\frac{4(ab+bc+ca+1)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

សមភាពកើតមានពេលដែល $a=b=c=1$

21. គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c=3$
ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{1}{4a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{4b^2+a^2+c^2}+\frac{1}{4c^2+a^2+b^2}\leq\frac{1}{2}$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$\frac{9}{4a^2+b^2+c^2}=\frac{(a+b+c)^2}{2a^2+(a^2+b^2)+(a^2+c^2)}\leq\frac{a^2}{2a^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2}$$

យើងទាញបាន

$$\sum\frac{9}{4a^2+b^2+c^2}\leq\frac{3}{2}+\sum\left(\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2}\right)=\frac{3}{2}+3=\frac{9}{2}$$

សមភាពកើតមានពេលដែល $a=b=c=1$

22. គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានដែល $a^2+b^2+c^2=1$ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{bc}{a^2+1}+\frac{ca}{b^2+1}+\frac{ab}{c^2+1}\le\frac{3}{4}$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

តាមវិសមភាព AM-GM និង Cauchy-Schwarz យើងមាន

$$\frac{bc}{a^2+1}\le\frac{(b+c)^2}{4(a^2+1)}=\frac{(b+c)^2}{4[(a^2+b^2)+(a^2+c^2)]}\le\frac{1}{4}\left(\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{c^2+a^2}\right)$$

យើងបូកវិសមភាពដែលស្រាយដូចគ្នានោះទាំងបីមកយើងបាន

$$\sum\left(\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{c^2+a^2}\right)=3$$

សមភាពកើតមានពេលដែល $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$

23. គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^2-bc}{4a^2+4b^2+c^2}+\frac{b^2-ca}{4b^2+4c^2+a^2}+\frac{c^2-ab}{4a^2+4a^2+b^2}\ge 0$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

នេះជាវិសមភាពមួយគួឲ្យធុញនិងលំបាកព្រោះថាក្រៅអំពីករណីដែលយើងបានស្គាល់ចំពោះ $a=b=c$ ។ ពេលនេះករណីស្មើកើតមានពេលដែល $4a=2b=c$ ឬក៏ $4b=2c=a$ ឬក៏ $4c=2a=b$ ដូច្នេះយើងត្រូវឲ្យតម្លៃយ៉ាងណាដើម្បីឲ្យវានៅតែរក្សាតម្លៃ? ដូចនេះសូមមិត្តអ្នកចូលចិត្តផ្នែកវិសមភាពដោះស្រាយលំហាត់នេះ។

ដោយ $1-\frac{4(a^2-bc)}{4a^2+4b^2+c^2}=\frac{(2b+c)^2}{4a^2+4b^2+c^2}$ នោះវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយក្លាយជា

$$\frac{(2b+c)^2}{4a^2+4b^2+c^2}+\frac{(2c+a)^2}{4b^2+4c^2+a^2}+\frac{(2a+b)^2}{4c^2+4a^2+b^2}\le 3$$

អនុវត្តន៍វិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងមាន

$$\frac{(2b+c)^2}{4a^2+4b^2+c^2}=\frac{(2b+c)^2}{2(a^2+2b^2)+(c^2+2a^2)}\le\frac{2b^2}{a^2+2b^2}+\frac{c^2}{c^2+2a^2}$$

ស្រាយដូចគ្នាយើងបាន

$$\frac{(2c+a)^2}{4b^2+4c^2+a^2}\le\frac{2c^2}{b^2+2c^2}+\frac{a^2}{a^2+2b^2};\frac{(2a+b)^2}{4c^2+4a^2+b^2}\le\frac{2a^2}{c^2+2a^2}+\frac{b^2}{b^2+2c^2}$$

បូកវាចូលគ្នាមកយើងនិងបានវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយបញ្ជាក់

24. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនវិជ្ជមាន $a;b;c$ យើងបាន

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\ge\frac{a^2}{a^2+ab+bc}+\frac{b^2}{b^2+bc+ca}+\frac{c^2}{c^2+ca+ab}$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងមាន

$$\frac{a^2}{a^2+ab+bc}=\frac{2a^2}{(a^2+2bc)+(a^2+2ab)}\le\frac{a^2}{2(a^2+2bc)}+\frac{a^2}{2(a^2+2ab)}$$

ស្រាយដូចគ្នាហើយបូកវាទាំងបីមកយើងនិងបានវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយបន្តគឺ

$$\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}\ge\sum\frac{a^2}{a^2+2bc}+\sum\frac{a}{a+2b}$$

វិសមភាពនេះគឺជាវិសមភាពទូទៅរបស់វិសមភាព 2 ខាងក្រោមនេះ

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \geq \sum \frac{a^2}{a^2+2bc}$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \geq \sum \frac{a}{a+2b}$$

វិសមភាពដំបូងយើងអាចសរសេរបានជា

$$\sum \left(\frac{a^2}{ab+bc+ca} - \frac{a^2}{a^2+2bc} \right) \geq 0$$

$$\sum \frac{a^2(a-b)(a-c)}{a^2+2bc} \geq 0$$

ចំពោះសម្មតិកម្ម $a \geq b \geq c$ យើងមាន $\frac{c^2(c-a)(c-b)}{c^2+2ab} \geq 0$ នោះយើងត្រូវស្រាយថា

$$\frac{a^2(a-b)(a-c)}{a^2+2bc} + \frac{b^2(b-c)(b-a)}{b^2+2ca} \geq 0$$

ក្រោយពេលពន្លាតវាពិតព្រោះ

$$(a-b)^2[a^2b^2 + 2a^3c + 2c(b-c)(a^2+ab+b^2)] \geq 0$$

ចំពោះវិសមភាពទីពីរយើងនិងសរសេរវាមានរាង

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + 2\sum \frac{b}{a+2b} \geq 3$$

បន្តទៀតនេះយើងប្រើតាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$\sum \frac{b}{a+2b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{b(a+2b)+c(b+2c)+a(c+2a)}$$

ដូច្នេះគឺគ្រាន់តែត្រូវស្រាយថា

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{2(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ca)} \geq 3$$

ក្រោយពេលពន្លាតយើងនិងឃើញថា

$$(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)(2a^2+2b^2+2c^2-ab-bc-ca)\geq 0$$

វានិងពិតបើតាមវិសមភាពដែលយើងបានស្គាល់គឺ $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$

សមភាពកើតមានឡើងពេលដែល $a=b=c$

25. គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}+\sqrt{\frac{a+b}{c}}\geq\sqrt{\frac{16(a+b+c)^3}{3(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

តាមវិសមភាព Holder យើងមាន

$$\left(\sum\sqrt{\frac{b+c}{a}}\right)^2\left[\sum\frac{1}{a^2(b+c)}\right]\geq\left(\sum\frac{1}{a}\right)^3$$

ពេលនោះវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយបញ្ជាក់នោះគឺ

$$\left(\sum\frac{1}{a}\right)^3\geq\frac{16(a+b+c)^3}{3(a+b)(b+c)(c+a)}\sum\frac{1}{a^2(b+c)}$$

តាង $a=\frac{1}{x};b=\frac{1}{y};c=\frac{1}{z}$ នោះវិសមភាពយើងក្លាយជា

$$(x+y+z)^3\geq\frac{16(xy+yz+zx)^3}{3(x+y)(y+z)(z+x)}\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)$$

ប្រើការឲ្យតម្លៃងាយៗគឺ

$$(x+y)(y+z)(z+x)\geq\frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx)$$

យើងបានលំហាត់ដែលត្រូវស្រាយគឺ

$$(x+y+z)^3 \geq \frac{6(xy+yz+zx)^2}{x+y+z}\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\right)$$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងមាន

$$6xyz\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\right) \leq 6xyz\left(\frac{1}{4x}+\frac{1}{4y}+\frac{1}{4z}+\frac{1}{4x}+\frac{1}{4y}+\frac{1}{4z}\right) = 3(xy+yz+zx)$$

ដូច្នេះយើងគ្រាន់តែត្រូវស្រាយថា

$$\frac{(x+y+z)^4}{xy+yz+zx} \geq 6(x^2+y^2+z^2)+3(xy+yz+zx)$$

ក្រោយពេលសំរួលមកយើងបាន

$$\frac{(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)^2}{xy+yz+zx} \geq 0$$

សមភាពកើតមានឡើងពេលដែល $a=b=c$

26. គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានដែល $ab+bc+ca=3$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{a^2+2}+\frac{1}{b^2+2}+\frac{1}{c^2+2} \leq 1$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

យើងប្រើបច្ចេកទេសថែមថយតួរយើងបាន

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{a^2+2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{b^2+2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{c^2+2}\right) \geq \frac{1}{2}$$

ឬក៏ក្លាយជា

$$\frac{a^2}{a^2+2}+\frac{b^2}{b^2+2}+\frac{c^2}{c^2+2}\geq 1$$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$\frac{a^2}{a^2+2}+\frac{b^2}{b^2+2}+\frac{c^2}{c^2+2}\geq \frac{(a+b+c)^2}{(a^2+2)+(b^2+2)+(c^2+2)}$$

$$=\frac{(a+b+c)^2}{(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)}=1$$

សមភាពកើតមានពេលដែល $a=b=c=1$

27. គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានដែល $a+b+c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{4a+4b+c}+\frac{b}{4b+4c+a}+\frac{c}{4c+4a+b}\leq\frac{1}{3}$$

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងគុណវិសមភាពនិង $4(a+b+c)$ ពេលនោះយើងបាន

$$\frac{4a(a+b+c)}{4a+4b+c}+\frac{4b(a+b+c)}{4b+4c+a}+\frac{4c(a+b+c)}{4c+4a+b}\leq\frac{4}{3}(a+b+c)$$

$$\left[\frac{4a(a+b+c)}{4a+4b+c}-a\right]+\left[\frac{4b(a+b+c)}{4b+4c+a}-b\right]+\left[\frac{4c(a+b+c)}{4c+4a+b}-c\right]\leq\frac{a+b+c}{3}$$

$$\frac{ca}{4a+4b+c}+\frac{ab}{4b+4c+a}+\frac{bc}{4c+4a+b}\leq\frac{a+b+c}{9}$$

យើងមានពីរចំនួនស្មើនិង 0ក្នុងបីចំនួន $a;b;c$ គឺវិសមភាពពិត។ យើងពិនិត្យមើលករណី

$(a+b)(b+c)(c+a)>0$ តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$\frac{ca}{4a+4b+c}=\frac{ca}{(2b+c)+2(2a+b)}\leq\frac{ca}{9}\left(\frac{1}{2b+c}+\frac{2}{2a+b}\right)$$

យើងទាញបាន

$$\sum \frac{ca}{4a+4b+c} \le \frac{1}{9}\sum\left(\frac{ca}{2b+c}+\frac{2ca}{2a+b}\right) = \frac{1}{9}\left(\sum\frac{ca}{2b+c}+\sum\frac{2ca}{2a+b}\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(\sum\frac{ca}{2b+c}+\sum\frac{2ab}{2b+c}\right) = \frac{a+b+c}{9}$$

សមភាពកើតមានពេលដែល $a=b=c$ ឬក៏ $a=2b; c=0$ ឬក៏បណ្តាចំលាស់វា

28. គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានដែលមិនមានចំនួនណាស្មើនិង 0 ព្រមគ្នា ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $\frac{1}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{b^2+bc+c^2}+\frac{1}{c^2+ca+a^2} \ge \frac{9}{(a+b+c)^2}$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

យើងគុណអង្គទាំងពីរនិង $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$ យើងឃើញថា

$$\frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{b^2+bc+c^2} = 1+\frac{a(a+b+c)}{b^2+bc+c^2}$$

យើងបាន

$$3+(a+b+c)\sum\frac{a}{b^2+bc+c^2} \ge \frac{9(\sum a^2+\sum ab)}{(a+b+c)^2}$$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងមាន

$$\sum\frac{a}{b^2+bc+c^2} \ge \frac{(a+b+c)^2}{\sum a(b^2+bc+c^2)} = \frac{a+b+c}{ab+bc+ca}$$

លំហាត់របស់យើងទៅជាការស្រាយ

$$3+\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \ge \frac{9(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}$$

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca = (a+b+c)^2-(ab+bc+ca)$

នោះវិសមភាពសមូលនិង

$$3+\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}\geq 9-\frac{9(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}$$

ឬក៏

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}+\frac{9(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}\geq 6$$

វិសមភាពនេះពិតតាម AM-GM និងសមភាពកើតមានឡើងពេល $a=b=c$

29. គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}\geq 1$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

ភាគទី I :460+ភាគទី II:493=953 Problems

■បណ្តាលំហាត់ទាំងនេះមានសម្រាយបញ្ជាក់ទាំងអស់និងមានលំហាត់គំរូជាច្រើនទៀត

ដែលចែកជា 3 ភាគដែលមាន ភាគទី I មានជាង 438 ទំព័រនិងភាគទី II មានជាង 447ទំព័រ

■ហើយមានលំហាត់ខ្លះមានការស្រាយបញ្ជាក់រហូតដល់ 18 របៀបផ្សេងគ្នា

នេះជាផ្នែកមួយនៃសៀវភៅរបស់ខ្ញុំដែលបានរៀបរៀងឡើង។ ដោយមិនទានអាចបោះពុម្ព

បាននោះដូចនេះហើយបានជាខ្ញុំដាក់លំហាត់ឲ្យអានសិននោះ។ ហើយបណ្តាលំហាត់ទាំង

អស់នេះមានសម្រាយបញ្ជាក់ទាំងអស់។ ដែលចែកជាពីរភាគ។ ហើយសៀវភៅក៏មិនទាន់បានកែឲ្យបានស្រួលដែលដូចនេះកំហុសនិងមានជាប្រាកដ ដូចនេះបើបងប្អូនបានឃើញសូមជួយកែសំរួលផង។ សូមអរគុណទុកជាមុន!!

439. [*Austrian Federal Competition for Advanced Students* 2012] ចូររកតម្លៃធំបំផុតរបស់ m ដើម្បីឲ្យ : $\left(a^2+4(b^2+c^2)\right)\left(b^2+4(a^2+c^2)\right)\left(c^2+4(a^2+b^2)\right)\geq m$

ចំពោះគ្រប់ $a;b;c\in\mathbb{R}^*$ និងបំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌ $\left|\frac{1}{a}\right|+\left|\frac{1}{b}\right|+\left|\frac{1}{c}\right|=3$ និងសមភាពពេលណា?

440. [*Brazilan Olympic Revenge* 2012] គេឲ្យ $x_1;x_2;\ldots;x_n$ គឺជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\sum_{cyc}\frac{1}{x_i^3+x_{i-1}x_ix_{i+1}}\leq\sum_{cyc}\frac{1}{x_ix_{i+1}(x_i+x_{i+1})}$

441. [*www.mathlinks.ro* 2012] គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោមនេះគឺ $a+2b+3c\geq 20$ ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម

$$S=a+b+c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}$$

442. [*www.mathlinks.ro* 2012] ចំពោះ $a;b;c>0$ និងមាន $abc=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^2+ab+c+1}{c(a+1)}+\frac{b^2+bc+a+1}{a(b+1)}+\frac{c^2+ca+b+1}{b(c+1)}\geq\frac{36}{ab+bc+ca+3}$$

443. [*www.mathlinks.ro* 2012] គេឲ្យ $a;b;c\geq 0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^2}{2a^2+(b+c-a)^2}+\frac{b^2}{2b^2+(a+c-b)^2}+\frac{c^2}{2c^2+(a+b-c)^2}\leq 1$$

443. [www.mathlinks.ro 2012] គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោម

$a^2+b^2+c^2=3$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\dfrac{9-a^2}{bc(8b+c^2)}+\dfrac{9-b^2}{ca(8c+a^2)}+\dfrac{9-c^2}{ab(8a+b^2)}\geq\dfrac{8}{3}$

ដោយ: **BUCURESTI GEMANY**

444. [www.mathlinks.ro 2012] ចំពោះ $a;b;c>0$ និង $a+b+c=3;m;n\in\mathbb{N}$

ចូរបង្ហាញថា

$$a\left[\frac{m}{b(ma+n)^2}+\frac{n}{c(nc+m)^2}\right]+b\left[\frac{m}{c(mb+n)^2}+\frac{n}{a(an+m)^2}\right]+c\left[\frac{m}{a(mc+n)^2}+\frac{n}{b(nb+m)^2}\right]\geq\frac{6mn}{(m+n)(m^2+n^2)}$$

ដោយ: **BUCURESTI GEMANY**

445. [www.mathlinks.ro 2012] គេឲ្យ $a;b;c>0$ និង $a+b+c=3$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{ab(a+1)^2}+\frac{1}{bc(b+1)^2}+\frac{1}{ca(c+1)^2}\geq\frac{27}{2(a^2+b^2+c^2)(a^4+b^4+c^4+3)}$$

ដោយ: **BUCURESTI GEMANY**

446. [www.mathlinks.ro 2012] គេឲ្យ $a;b;x;y$ ជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខ

ខ័ណ្ឌ $1\geq a^{11}+b^{11}$ និង $1\geq x^{11}+y^{11}$ ចូរបង្ហាញថា : $1\geq a^5x^6+b^5y^6$

447. [www.mathlinks.ro 2012] គេឲ្យ $a;b;c>0$

ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោមនេះ

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)=a^3+b^3+c^3+2abc+1$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\dfrac{a^2}{a+b-c}+\dfrac{b^2}{b+c-a}+\dfrac{c^2}{c+a-b}\geq 3$

448. [*www.mathlinks.ro* 2012] គេឲ្យ $a_1 = 1$ និង $a_n = n(a_{n-1}+1)$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$

និង $P_n = \left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)$ ចូរគណនា : $\lim_{n\to\infty} P_n$

449. [*Olympic VN* 2012] គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជាបណ្តាចំនួនមិនអវិជ្ជមានដែលបំពេញលក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c = 1006$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt{2012a+\frac{(b-c)^2}{2}}+\sqrt{2012b+\frac{(c-a)^2}{2}}+\sqrt{2012c+\frac{(a-b)^2}{2}} \leq 2012\sqrt{2}$$

450. [Mathematical invitational tournament in noth of China 2012]
គេឲ្យត្រីកោណ ABC ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{1+\cos^2 B+\cos^2 C}+\frac{1}{1+\cos^2 C+\cos^2 A}+\frac{1}{1+\cos^2 A+\cos^2 B} \leq 2$$

451. [*Centroamerican* 2012] គេឲ្យ $a; b; c$ ជាបណ្តាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ

$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} = 1$ និង $ab+bc+ca > 0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$a+b+c-\frac{abc}{ab+bc+ca} \geq 4$$

452. [*www.mathlinks.ro* 2012] បើ $n \in \mathbb{N}; n \geq 2$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$1+2\sqrt{2^2}+3\sqrt{3^3}+\cdots+n\sqrt{n^n} < (n+1)!$$

453. [*Olympic VN* 2008] ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n និងចំពោះ

គ្រប់ចំនួនពិត $x \in (0;1)$ គឺយើងបាន $x^2.\sqrt[n]{1-x} \leq \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^2.\frac{1}{\sqrt[n]{2n+1}}$

454. [*Olympic VN* 2008] គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជា3ចំនួនវិជ្ជមានដែល $a+b+c+1 = 4abc$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{1}{a^4+b+c}+\frac{1}{b^4+c+a}+\frac{1}{c^4+a+b}\le\frac{3}{a+b+c}$

455. [*Olympic VN* 2008] ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម: $\frac{x^{30}}{y^4}+\frac{y^{30}}{z^4}+\frac{z^{30}}{t^4}+\frac{t^{30}}{x^4}$

ក្នុងនោះ $x;y;z;t$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $x+y+z+t=2008$

456. [*Olympic VN* 2008] គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=1$ ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម $T=a+b+c$

457. [*Olympic Viet Nam* 2008] គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$abc+6a+3b+2c=24$ ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម

$$M=abc(a^2+3)(b^2+12)(c^2+27)$$

458. [*Olympic Viet Nam* 2008] គេឲ្យរង្វង់ពីរផ្ចិត O កាំ r និង R (ចំពោះ $r<R$)

ΔABC ចារឹកក្នុងរង្វង់ $(O;r)$ ។ គូរបន្លាយ $CA;AB;BC$ កាត់រង្វង់ $(O;R)$ ត្រង់ $B_1;C_1;A_1$

សន្មតិ $S_{\Delta A_1B_1C_1};S_{\Delta ABC}$ គឺជាផ្ទៃរបស់ត្រីកោណ $\Delta A_1B_1C_1;\Delta ABC$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}}\ge\left(\frac{R}{r}\right)^2$

459. [*Olympic Viet Nam* 2008] គេឲ្យបណ្តាចំនួន $x;y;z$ គឺជាចំនួនវិជ្ជមានដែលបំពេញ

ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $x+y+z=\frac{3}{2}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{\sqrt{x^2+xy+y^2}}{4yz+1}+\frac{\sqrt{y^2+yz+z^2}}{4zx+1}+\frac{\sqrt{z^2+zx+x^2}}{4xy+1}\ge\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

460. [*Olympic Viet Nam* 2008] ក្នុងប្លង់គេឲ្យត្រីកោណ ABC និងចំណុច M ណាក៏ដោយ។

តាង $a=BC;b=AC;c=AB$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{MA}{a}+\frac{MB}{b}+\frac{MC}{c}\ge\sqrt{3}$

461. [*Olympic Viet Nam 2008*]គេឲ្យ $x; y; z$ គឺជាបណ្ដាចំនួនវិជ្ជមានណាក៏ដោយ។

ចូររកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោមខាងក្រោម

$$P = \frac{x^2}{4x^3 + 3yz + 2} + \frac{y^2}{4y^3 + 3zx + 2} + \frac{z^2}{4z^3 + 3xy + 2}$$

462. [*Olympic Viet Nam 2008*]គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជាបណ្ដាចំនួនវិជ្ជមាន។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^3 + abc}{b + c} + \frac{b^3 + abc}{c + a} + \frac{c^3 + abc}{a + b} \geq a^2 + b^2 + c^2 \qquad (1)$$

463. [*Olympic Viet Nam 2008*]គេឲ្យ $x; y; z; t$ គឺជាឫសរបស់ប្រពន្ធ័សមីការ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z^2 + t^2 = 2 \\ xt + yz \geq \sqrt{2} \end{cases}$$ ចូររកឫសនោះដែលធ្វើឲ្យ $y + t$ មានតម្លៃតូចបំផុត

464. [*Olympic Viet Nam 2008*]គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a; b; c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$\frac{1}{a + 2} + \frac{2007}{2008 + b} \leq \frac{c + 1}{2007 + c}$$

ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម $P = (a + 1)(b + 1)(c + 1)$

465. [*Olympic Viet Nam 2008*]គេឲ្យបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a; b; c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

ល័ក្ខខ័ណ្ឌ$a + b + c = 3$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{a}{a^2 + 2b + 3} + \frac{b}{b^2 + 2c + 3} + \frac{c}{c^2 + 2c + 3} \leq \frac{1}{2}$$

466. [*Olympic Viet Nam 2008*]គេឲ្យ $a; b; c > 0$ ដែល abc
$= 1$ ចូររកតម្លៃធំបំផុតកន្សោម

$$P = \frac{1}{2a^3 + b^3 + c^3 + 2} + \frac{1}{a^3 + 2b^3 + c^3 + 2} + \frac{1}{a^3 + b^3 + 2c^3 + 2}$$

467. [*Olympic Viet Nam 2008*]ពិនិត្យមើល $a; b; c > 0$ ណាក៏ដោយ។ចូររកតម្លៃធំបំផុត

$$T = \frac{\sqrt{abc}}{(1+a)(1+a+b)(1+a+b+c)}$$

468. [*Olympic Viet Nam 2008*] គេឲ្យចំនួនពិត $a \neq 0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt{a^2 + \sqrt{a^2 + \cdots + \sqrt{a^2}}} < \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\left(\sqrt{1+16a^2} + \sqrt{9+16a^2}\right)$$

មាន n ឫសការេ

469. [*Olympic Viet Nam 2008*] គេឲ្យបីចំនួនវិជ្ជមាន $a;b;c$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{a+b}{a+c} + \frac{b+c}{b+a} + \frac{c+a}{c+b}$$

470. [*Olympic Viet Nam 2008*] គេឲ្យបីចំនួនវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$ab + bc + ca = 6abc$ ចូររកតម្លៃធំបំផុតរបស់កន្សោម

$$M = \frac{1}{a+2b+3c} + \frac{1}{2a+3b+c} + \frac{1}{3a+b+2c}$$

471. [*Olympic Viet Nam 2008*] គេឲ្យបណ្ដាចំនួនដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោម

$$\begin{cases} x^2 + xy + \dfrac{y^2}{3} = 25 \\ \dfrac{y^2}{3} + z^2 = 9 \\ z^2 + zx + x^2 = 16 \end{cases}$$ ចូររកតម្លៃនៃកន្សោម $P = xy + 2yz + 2zx$

472. [*Olympic Viet Nam 2008*] គេឲ្យ $x;y;z \neq 0$ និង $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់ $P = \dfrac{1}{x^4+y^4+z^4} + \dfrac{1}{x^2y^2} + \dfrac{1}{y^2z^2} + \dfrac{1}{z^2x^2}$

473. [*Olympic Viet Nam 2008*] គេឲ្យបណ្ដាចំនួនវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)} = 1$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $abc \geq 1$

474. **[*Olympic Viet Nam 2008*]** គេឲ្យ $a; b; c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់

$$\sqrt{abc}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+(a+b+c)^2 \geq 4\sqrt{3abc(a+b+c)}$$

475. **[*Olympic Viet Nam 2008*]** គេឲ្យ $x; y; z \geq -1$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x+y+z=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{y}{1+y^2}+\dfrac{z}{1+z^2} \leq \dfrac{9}{10}$

476. **[*singapor 2012*]** គេឲ្យ $x; y; z > 0$ ដែល $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} < \dfrac{1}{xyz}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា:

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{2z}{\sqrt{1+z^2}} < 3$$

477. **[*singapor 2010*]** គេឲ្យ $a; b; c; x_1; x_2; \dots; x_5$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b+c=1$ និង $x_1x_2x_3x_4x_5=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(ax_1^2+bx_1+c)(ax_2^2+bx_2+c)\dots(ax_5^2+bx_5+c) \geq 1$$

478. **[Junior Balkan MO 2012]** គេឲ្យ $a; b; c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $a+b+c=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{b}{a}+6 \geq 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}+\sqrt{\dfrac{1-b}{b}}+\sqrt{\dfrac{1-c}{c}}\right)$

តើសមភាពកើតមាននៅពេលណា?

479. គេឲ្យ $a; b; c > 0$ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $abc=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{\sqrt{3a^4+5b^4+4b+24}}+\frac{1}{\sqrt{3b^4+5c^4+4c+24}}+\frac{1}{\sqrt{3c^4+5a^4+4a+24}} \leq \frac{1}{2}$$

www.mathlinks.ro

480. គេឲ្យ $x; y; z > 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $xy+yz+zx=3xyz$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{y}{xy^2+3x}+\frac{z}{yz^2+3y}+\frac{x}{zx^2+3z}\le\frac{3}{4}$$

www.mathlinks.ro

481. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c>0$ និង $abc=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^9}{a^2b^2+a+b}+\frac{b^9}{b^2c^2+b+c}+\frac{c^9}{c^2a^2+c+a}\ge 1$$

482. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c;d>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $abcd=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{a^2(d^2+1)}{d+1}+\frac{b^2(c^2+1)}{c+1}+\frac{c^2(b^2+1)}{b+1}+\frac{d^2(a^2+1)}{a+1}\ge 4$

Greemany 2012

483. www.mathlinks.ro បើ $a;b;c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge\sqrt{27(a^3+a+1)(b^3+b+1)(c^3+c+1)}$$

Nguyen Van Huyen : Ho Chi Minh City University of Transport

484. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c\le 3$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{a+1}{a(a+2)}+\frac{b+1}{b(b+2)}+\frac{c+1}{c(c+2)}\ge 2$

China Fujian Mathematics league

485. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}+9\ge 4\sqrt{3}.\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\right)^3+\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+1}$$

Nguyen Van Huyen ; Ho Chi Min City University of Transport

486. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្ដាចំនួនវិជ្ជមាន។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{ab}{a^{18}b^9+3b^3+14}+\frac{bc}{b^{18}c^9+3c^3+14}+\frac{ca}{c^{18}a^9+3a^3+14}\le\frac{1}{6}$$

សមភាពកើតមាននៅពេលណា?

487.www.mathlinks.ro

គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $abc=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^3+bc^2}{(c+a)^2}+\frac{b^3+ca^2}{(a+b)^2}+\frac{c^3+ab^2}{(b+c)^2}\ge\frac{9}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

488. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{(2a+1)(b+c+3)+1}+\frac{b}{(2b+1)(c+a+3)+1}+\frac{c}{(2c+1)(a+b+3)+1}\le\frac{3}{16}$$

489.www.mathlinks.ro គេឲ្យ $x;y;z$ គឺជាចំនួនពិតដែលនោះក្នុងចន្លោះ $]-1;1[$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)}+\frac{1}{(1+x)(1+y)(1+z)}\ge 2$

490 www.mathlinks.ro

ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a_1;a_2;a_3;\dots;a_n;x_1;x_2;x_3;\dots;x_n$ ចំពោះ $n\in\mathbb{N}$

គឺយើងមាន : $\frac{a_1^3}{x_1}+\frac{a_2^3}{x_2}+\cdots+\frac{a_n^3}{x_n}\ge 1$ បើ $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\ge\sqrt[3]{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$

491. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែល $a+b+c=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{(1+b)}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}\le 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$$

492. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c\ge 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $ab+bc+ca=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\sqrt{a^3+a}+\sqrt{b^3+b}+\sqrt{c^3+c}\ge(a+b+c)\sqrt{a+b+c}$

493. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a+b+c}{3\sqrt{3}}\ge\frac{ab+bc+ca}{\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2}}$$

494.www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $abc=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a}{a^2+b^2+1}+\frac{b}{b^2+c^2+1}+\frac{c}{c^2+a^2+1}\le 1$

495. [***Olympic Viet Nam 2012***] គេឱ្យចំនួនវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ

$6a+2b+3c=11$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{2b+3c+16}{1+6a}+\frac{6a+3c+16}{1+2b}+\frac{6a+2b+16}{1+3c}\geq 15$$

Toan Quoc 2012

496. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c;d$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abcd=1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $$a+b+c+d-\frac{1}{a+1}-\frac{1}{b+1}-\frac{1}{c+1}-\frac{1}{d+1}\geq 2$$

Japan

497.www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c\in\mathbb{R}^+$ ដែល $abc=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{a^2+2b^2+3}+\frac{1}{b^2+2c^2+3}+\frac{1}{c^2+2a^2+3}\leq\frac{1}{2}$$

View Blog

498. www.mathlinks.ro

គេឲ្យ $a;b;c;d>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c+d=4$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{ab(4c^2+23ab)}+\frac{1}{bc(4d^2+23bc)}+\frac{1}{cd(4a^2+23cd)}+\frac{1}{da(4b^2+23da)}\geq\frac{4}{27}$$

Bucuresti: Gremany

499. www.mathlinks.ro

គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ $abc=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^{12}}{5a^2+(a+b)(b^2+c^2)}+\frac{b^{12}}{5b^2+(b+c)(c^2+a^2)}+\frac{c^{12}}{5c^2+(c+a)(a^2+b^2)}\geq\frac{1}{3}$$

500. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c$ ជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានដែល $a^2+b^2+c^2=1$ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{2+a(2b+2c-a)}+\frac{1}{2+b(2c+2a-b)}+\frac{1}{2+c(2a+2b-c)}\leq\frac{1}{9}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$$

Gremany

501. www.mathlinks.ro

គេឲ្យ $a;b;c;d;e$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោម

$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-cd}+\frac{1}{1-de}+\frac{1}{1-ea}\le\frac{25}{4}$$

Viet Nam

502. www.mathlinks.ro

គេឲ្យ $x;y;z$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមាន។ចូររកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$$

Micheal Rozenderg

503. [Tuymaada Olympic 2012] ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a;b;c$ ដែល

$abc=1$ យើងបាន: $\dfrac{1}{2a^2+b^2+3}+\dfrac{1}{2b^2+a^2+3}+\dfrac{1}{2c^2+a^2+3}\le\dfrac{1}{2}$

Proposed by :V.Aksenov

<u>លំហាត់លំនាំ</u>

a: គេឲ្យ $n\in\mathbb{N};n\ge 2$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a;b;c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$abc=1$ នោះយើងបាន : $\dfrac{1}{2a^n+b^n+3n-3}+\dfrac{1}{2b^n+c^n+3n-3}+\dfrac{1}{2c^n+a^n+3n-3}\le\dfrac{1}{n}$

$b)$: គេឲ្យ $n\in\mathbb{N};n\ge 2$ និង $k\in$ គេឲ្យ $n\in\mathbb{N}^*$ និងបណ្តាចំនួនពិត $a;b;c$ ណាក៏ដោយដែល

ផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $abc=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{2ka^n+kb^n+3n-3k}+\frac{1}{2kb^n+kc^n+3n-3k}+\frac{1}{2kc^n+ka^n+3n-3k}\le\frac{1}{n}$$

504.[USA TSTS 2012] គេឲ្យចំនួនពិត $x;y;z$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោម

$$xyz+xy+yz+zx=x+y+z+1$$

$$\text{ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : } \frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1+x}}+\sqrt{\frac{1+y^2}{1+y}}+\sqrt{\frac{1+z^2}{1+z}}\right) \le \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{\frac{5}{8}}$$

506. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c \ge 0$ ដែល $a+b+c=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{64}{27} \le (3a^2+1)(3b^2+1)(3c^2+1) \le 4$$

Viet Nam

507. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $ab+bc+ca=1$

$$\text{ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : } \frac{a^2+b^2}{c\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)}+\frac{b^2+c^2}{a\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)}+\frac{c^2+a^2}{b\left(c+\sqrt{c^2+1}\right)} \ge 2$$

Turkey

508. www.mathlinks.ro គេឲ្យ $a;b;c>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a+b+c=1$

$$\text{ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : } \frac{a^2+b^2+2}{(1+a)(b+c)}+\frac{b^2+c^2+2}{(1+b)(c+a)}+\frac{c^2+a^2+2}{(1+c)(a+b)} \ge \frac{15}{2}$$

509. [IMO 2012]

គេឲ្យ $n \ge 3$ គឺជាចំនួនគត់ ។ និង $a_2;a_3;\dots;a_n$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល

ផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a_2a_3\dots a_n=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3\dots(1+a_n)^n > n^n$$

Proposed by Anggelo Di Pasguale ; Australia

510.[Viet Nam 2012]

គេឲ្យ $x_1;x_2;\dots;x_n$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=1 \text{ និង } a \ge 1; t; n \ge 2$$

$$\text{ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : } (a+x_1^t)(a+x_2^t)\dots(a+x_n^t) \ge \left(a+\frac{1}{n^t}\right)^n$$

លំហាត់ត្រូវបានតាក់តែងឡើងដោយលោក Quong

511.[Viet Nam] គេឲ្យ $a;b;c$ គឺជាបណ្តាចំនួនវិជ្ជមាន។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+7bc+c^2}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+7ca+a^2}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+7ab+b^2}}\ge 1$$

Nguyen Van Hueyn : Ho Chi Minh City University of Transport

512.[Turkey NMO 2003]

គេឲ្យ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោម

$f(tx_1+(1-t)x_2)\le tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$ ចំពោះ $x_1;x_2\in\mathbb{R}$ និង $t\in(0;1)$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\sum_{k=1}^{2003} f(a_{k+1})a_k \ge \sum_{k=1}^{2003} f(a_k)a_{k+1}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a_1;a_2;\dots;a_{2004}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_{2003}$ និង $a_{2004}=a_1$

513.[Turkey NMO 2004]

គេឲ្យ $ABCD$ គឺជាចតុកោណប៉ោងនិងមាន $K;L;M;N$ ជាចំណុចកណ្តាល

នៅលើជ្រុង $[AB];[BC];[CD];[DA]$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\sqrt[3]{S_1}+\sqrt[3]{S_2}+\sqrt[3]{S_3}+\sqrt[3]{S_4}\le 2\sqrt[3]{S}$

ចំពោះ $S_1=S_{\Delta AKN};S_2=S_{\Delta BKL};S_3=S_{\Delta CLM};S_4=S_{\Delta DMN};S=S_{ABCD}$

514. [Tumaada 2000] គេឲ្យ $x_1;x_2;\dots;x_n$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $0<x_k\le\frac{1}{2}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\left(\frac{n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}-1\right)^n\le\left(\frac{1}{x_1}-1\right)\left(\frac{1}{x_2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{x_n}-1\right)$

515. គេឲ្យ $n\ge 2$ គឺជាចំនួនគត់វិជ្ជមាននិង $a_1;a_2;\dots;a_n$ គឺជាបណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

ដែលផ្ទៀងផ្ទៀត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a_1}{1+a_2+a_3+\cdots+a_n}+\frac{a_2}{1+a_1+a_3+\cdots+a_n}+\cdots+\frac{a_n}{1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}\ge\frac{n}{2n-1}$$

www.mathlinks.ro

516. គេឲ្យ $a;b;c;d>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ $abcd=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a+1}{abc+ab+1}+\frac{b+1}{bcd+bc+1}+\frac{c+1}{cda+cd+1}+\frac{d+1}{dab+da+1}\geq\frac{8}{3}$$

www.mathlinks.ro

517.[Turkey] គេឲ្យបណ្តាចំនួនវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែល $a^2+b^2+c^2=3$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a^5+1}{b+2}+\frac{b^5+1}{c+2}+\frac{c^5+1}{a+2}\geq 2$$

518.[Baltic Way 1992]

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនវិជ្ជមាន $x_1;x_2;\dots;x_n;y_1;y_2;\dots;y_n$ យើងបាន

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_iy_i}\geq\frac{4n}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i+y_i\right)^2}$$

519. [2004;40;43] Proposed by Mihaly Bencze; Brosov;Romania

គេឲ្យ $a;b;c>1$ និង $\alpha>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$a^{\sqrt{\alpha\log_a b}+\sqrt{\alpha\log_a c}}+b^{\sqrt{\alpha\log_b a}+\sqrt{\alpha\log_b c}}+c^{\sqrt{\alpha\log_c a}+\sqrt{\alpha\log_c b}}\leq\sqrt{abc}\left(a^{\alpha-\frac{1}{2}}+b^{\alpha-\frac{1}{2}}+c^{\alpha-\frac{1}{2}}\right)$$

520. គេឲ្យត្រីកោណ ABC ។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{h_a}{h_a+h_b+h_c}(\cos B+\cos C)+\frac{h_b}{h_a+h_b+h_c}(\cos C+\cos A)+\frac{h_c}{h_a+h_b+h_c}(\cos A+\cos B)\leq 1$$

បទពិចារណា

1.មិនអាចគ្រប់គ្រងខ្លួនឯងបានមិនមែនជាអ្នកធំពិតប្រាកដទេ។

2.អ្នកដែលស្ថិតនៅក្នុងការអប់រំត្រូវស្តាប់ឲ្យច្រើនជាងនិយាយ

ឲ្យដូចជាត្រចៀកពីរនិងមាត់មួយដូច្នោះដែរ។

3.មនុស្សយើងត្រូវរាប់អានខ្លួនឯងតែមិនត្រូវអួតខ្លួនឯងទេ។

+ការនិយាយដល់អ្នកដទៃក្នុងផ្លូវល្អក៏ដូចជាការនិយាយដល់ខ្លួនឯងក្នុងផ្លូវល្អដែរ

+យសរមែងចម្រើនដ៏ក្រៃលែងដល់បុគ្គលដែលមាននូវសេចក្តីព្យាយាមប្រឹងប្រែង មានស្មារតីមានការងារស្អាតល្អប្រពៃមានប្រក្រតីពិនិត្យពិចារណាហើយទើបធ្វើ ជាអ្នកសង្រួមហើយ(ដោយការសង្រួមកាយជាដើម)ចិញ្ចឹមជីវិតឲ្យរស់នៅប្រកបដោយធម៌និងជាអ្នកមិនប្រមាទ។

+រសជាតិនៃពាក្យសច្ចៈឆ្ងាញ់ជាងអស់រសទាំងពួង។

+បាលី **ចរន្តិ ពាលា ទុម្មេធា អមិត្តេនេវ អត្តនា ករោន្តា បាបកំ កម្មំ យំ ហោតិ កដុកប្ផលំ។**

ប្រែថា :ជនពាលទាំងឡាយអាប់ប្រាជ្ញាមានខ្លួនដូចជាសត្រូវ (នឹងខ្លួនឯង) ដើរសាងនូវបាបកម្មដែលមានផលក្តៅក្រហាយ។

+**សេលោ យថា ឯកឃនោ វាតេន ន សមីរតិ ឯវំ និន្ទាបសំសាសុ ន សមិញ្ជន្តិ បណ្ឌិតា។**

ភ្នំថ្មតាន់ មិនរំភើបព្រោះខ្យល់ដូចម្តេចមិញ បណ្ឌិតទាំងឡាយ ក៏មិនរំភើបព្រោះពាក្យតិះដៀលនិងពាក្យសរសើរ(ជាដើម)ដូច្នេះឯង។

+**ន អត្តហេតុ ន បរស្ស ហេតុ ន បុត្តមិច្ឆេ ន ធនំ ន រដ្ឋំ ន ឥច្ឆេយ្យ អធម្មេន សមិទ្ធិមត្តនោ ស សីលវា បញ្ញវា ធម្មិកោ សិយា។**

បណ្ឌិតមិនគួរធ្វើអាក្រក់ព្រោះហេតុនៃខ្លួនមិនគួរធ្វើអាក្រក់ព្រោះហេតុនៃអ្នកដទៃ មិនគួរប្រាថ្នាកូន មិនគួរប្រាថ្នាទ្រព្យមិនគួរប្រាថ្នារដ្ឋ មិនគួរប្រាថ្នាសិទ្ធិ ដើម្បីខ្លួន ដោយហេតុមិនមែនជាធម៌ឡើយលោកគួរជាអ្នកមានសីល មានប្រាជ្ញាប្រកបដោយធម៌៕

+សហស្សមបិ ចេ ថាថា អនត្ថបទសញ្ហិតា ឯកំ អត្ថបទំ សេយ្យោ យំ សុត្វា ឧបសម្មតិ។

ប្រែថា:

បើវាចាសួម្បីមួយពាន់ម៉ាត់ជាវាចាប្រកបដោយបទឥតប្រយោជន៍វាចានោះពុំប្រសើរឡើយអ្នកណាស្តាប់បទមានប្រយោជន៍ណាហើយរមែងស្ងប់រំងាប់បាន បទមានប្រយោជន៍នោះសួម្បីតែមួយបទក៏ឈ្មោះថាប្រសើរជាង។

រៀបរៀងដោយ អាចារ្យ: **សូត្រ សឿម**
អតីតសមណោះសិស្សពុទ្ធិកសិក្សាខេត្តពោធិ៍សាត់
អតីតសមណះនិស្សិតមហាវិទ្យាល័យគណិតវិទ្យា
សាកលវិទ្យាល័យ ភូមិន្ទភ្នំពេញ

Ha Noi 10/03/2012