

លំហាត់ទី៨

គេអោយអនុគមន៍ f មួយ កំណត់លើ $\mathbb{R} - \{1, 3\}$ ដោយ $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 4x + 3}$ ។

តាង (C) ជាក្រាបតាងអនុគមន៍ f ក្នុងតម្រុយ (O, \vec{i}, \vec{j}) ។

ក. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $y = 1$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ត្រង់ $\pm\infty$ ។
រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរ ។

ខ. ចូរបង្ហាញថា $f'(x) = -\frac{8(x^2 - 3)}{(x^2 - 4x + 3)^2}$ ចំពោះគ្រប់ $\mathbb{R} - \{1, 3\}$ ។

គ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f រួចសង់ក្រាប (C) ។

ឃ. ដោយប្រើក្រាប (C) ពិភាក្សាតាមតម្លៃ k នូវចំនួនឫសរបស់សមីការ

$$(k-1)x^2 - 4(k+1)x + 3(k-1) = 0 \quad (1)$$

រួចប្រៀបធៀបឫសរបស់ (1) ទៅនឹងចំនួន $-3, -\sqrt{3}, -1, 0, 1, \sqrt{3}$ និង 3 ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $y = 1$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ត្រង់ $\pm\infty$

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right)} = 1$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $y = 1$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ត្រង់ $\pm\infty$

រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរ

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 4x + 3} = \pm\infty$$

$$\text{ហើយ } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 4x + 3} = \pm\infty$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $x = 1$ និង $x = 3$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C)

ខ. បង្ហាញថា $f'(x) = -\frac{8(x^2-3)}{(x^2-4x+3)^2}$ ចំពោះគ្រប់ $\mathbb{R} - \{1, 3\}$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3} \right)' = \frac{(2x+4)(x^2-4x+3) - (2x-4)(x^2+4x+3)}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$= \frac{-8x^2+24}{(x^2-4x+3)^2} = -\frac{8(x^2-3)}{(x^2-4x+3)^2}$$

ដូចនេះ $f'(x) = -\frac{8(x^2-3)}{(x^2-4x+3)^2}$ ចំពោះគ្រប់ $\mathbb{R} - \{1, 3\}$

គ. សិក្សាអថិរភាព

ដោយ $f'(x) = -\frac{8(x^2-3)}{(x^2-4x+3)^2}$

យើងបាន $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -8(x^2-3) = 0 \Leftrightarrow -8x^2+24 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

តារាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	-

- $f'(x) > 0$ ឬ អនុគមន៍ f កើន ពេល $x \in (-\sqrt{3}, 1) \cup (1, \sqrt{3})$
- $f'(x) < 0$ ឬ អនុគមន៍ f ថុះ ពេល $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 3) \cup (3, +\infty)$

បរមាធៀប

- ត្រង់ $x = -\sqrt{3}$; $f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី-ទៅ+ នោះ f មានអប្បបរមាធៀបមួយគឺ

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{(-\sqrt{3})^2 + 4(-\sqrt{3}) + 3}{(-\sqrt{3})^2 - 4(-\sqrt{3}) + 3} = 4\sqrt{3} - 7$$

- ត្រង់ $x = \sqrt{3}$; $f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី+ទៅ- នោះ f មានអតិបរមាធៀបមួយគឺ

$$f(\sqrt{3}) = \frac{(\sqrt{3})^2 + 4(\sqrt{3}) + 3}{(\sqrt{3})^2 - 4(\sqrt{3}) + 3} = -4\sqrt{3} - 7$$

សង់តារាងអថិរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	-
f(x)	1	$4\sqrt{3}-7$	$+\infty$	$-4\sqrt{3}-7$	$+\infty$	1

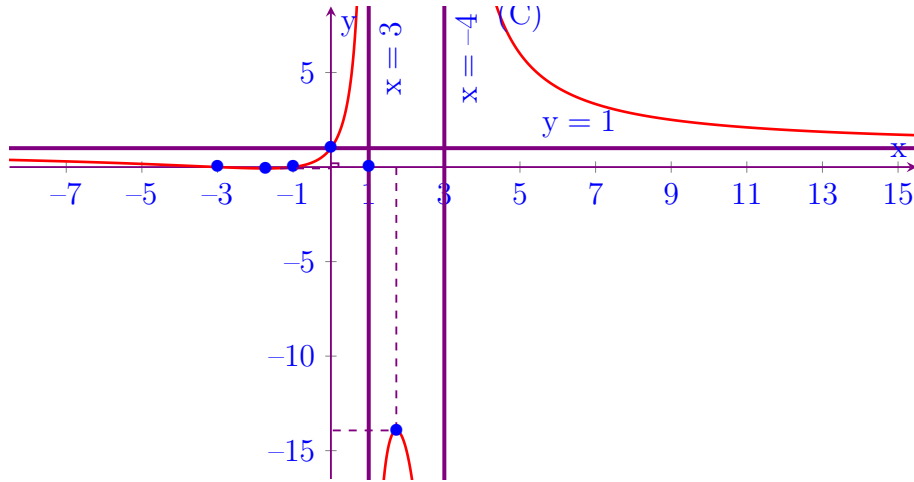
សង់ក្រាប(C)

$$(C) \cap (x'ox) \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -3$$

$$(C) \cap (y' \circ y) \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = \frac{0^2 + 4(0) + 3}{0^2 - 4(0) + 3} = 1$$

$$(C) \cap (d) : y = 1 \Leftrightarrow 1 = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 4x + 3}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = x^2 + 4x + 3 \Rightarrow x = 0$$



ឃ. ពិភាក្សាតាមតម្លៃ k នូវចំនួនឫសរបស់សមីការ $(k-1)x^2 - 4(k+1)x + 3(k-1) = 0$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow kx^2 - x^2 - 4kx - 4x + 3k - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow k(x^2 - 4x + 3) - (x^2 + 4x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 4x + 3}$$

$$\Leftrightarrow k = f(x) \text{ ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងក្រាប}(C)\text{និងបន្ទាត់ } y = k$$

តាមក្រាប(C)

- បើ $k \in (-\infty, -4\sqrt{3} - 7)$ \Rightarrow (1) មានឫសពីរផ្សេងគ្នាដែល $1 < x_1 < x_2 < 3$
- បើ $k = -4\sqrt{3} - 7$ \Rightarrow (1) មានឫសតែមួយគត់ $x = \sqrt{3}$
- បើ $k \in (-4\sqrt{3} - 7, 4\sqrt{3} - 7)$ \Rightarrow (1) គ្មានឫស
- បើ $k = 4\sqrt{3} - 7$ \Rightarrow (1) មានឫសតែមួយគត់គឺ $x = -\sqrt{3}$
- បើ $k \in (4\sqrt{3} - 7, 1)$ \Rightarrow (1) មានឫសពីរផ្សេងគ្នា ដែល $x_1 < x_2 < 0$
- បើ $k = 1$ \Rightarrow (1) មានឫសតែមួយគត់ គឺ $x = 0$
- បើ $k \in (1, +\infty)$ \Rightarrow (1) មានឫសពីរផ្សេងគ្នាដែល $0 < x_1 < 1$; $3 < x_2$