

ក្រសួងអប់រំយុវជន និងកីឡា  
វិទ្យាល័យមេតូឌីស្ទកម្ពុជា  
ប្រឡងសញ្ញាប័ត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
ឈ្មោះ: និងហត្ថលេខាអនុវត្ត៖

លេខបន្ទប់៖ .....  
លេខគុះ .....  
មណ្ឌលប្រឡង៖ .....

សម័យបច្ចុប្បន្ន៖ ២០ សីហា ២០១៨  
នាមត្រកូលនិងនាមខ្លួន៖ .....  
ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖ .....  
ហត្ថលេខា៖ .....

លេខសម្ងាត់៖

បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើសន្លឹកប្រឡងឡើយ។ សន្លឹកប្រឡងដែលមានសញ្ញាសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្តរស្យា។



វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យាថ្នាក់សង្គម រយៈពេល៖ ៩០ នាទី ពិន្ទុ៖ ៧៥

លេខសម្ងាត់៖



- សេចក្តីណែនាំ៖ ១. បេក្ខជនត្រូវគូសខ្សែនៅទីពឹងទី២ ផ្នែកខាងលើដែលត្រូវកាត់ចេញ។  
២. បេក្ខជនត្រូវសរសេរចម្លើយនៃសំណួរបន្តនៅលើទីពឹងទី២ ទី៣ និងទី៤។

### វិញ្ញាសាទី១ ( ពាក់គុណ ២០១៧ ថ្នាក់សង្គម )

#### I. គណនាលីមីត៖

ក.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$

ខ.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt{x} + 6 - 3}$

គ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

#### II. ក្នុងចំណោមមួយមានប៉ូលពណ៌សចំនួន៣ និងប៉ូលពណ៌ក្រហមចំនួន៦។ គេចាប់យកប៉ូល៣ ក្នុងពេលតែមួយចេញពីចង្កោយចែងដូចខាងក្រោម៖ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

- A: ប៉ូលទាំងបីមានពណ៌ស  
B: ប៉ូលទាំងបីមានពណ៌ក្រហម  
C: មានប៉ូលមួយពណ៌ក្រហម និងពីរទៀតពណ៌ស

#### III. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក.  $I = \int_1^3 (3x^2 + 2x + 1) dx$

ខ.  $J = \int_0^1 (2e^x - 1) dx$

គ.  $K = \int_1^2 \left( x + \frac{1}{x^2} \right) dx$

#### IV. គេមានសមីការ $9x^2 + 25y^2 = 225$ ។

- ក. បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប។ រកប្រវែងអ័ក្សតូច ប្រវែងអ័ក្សធំ និងកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ។  
ខ. សង់អេលីបនេះ។

#### V. គេមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់លើ $\mathbb{R} - \{2\}$ ដោយ $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$ ។ យើងតាង $C$ ជាក្រាបរបស់វា លើតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(0, \vec{i}, \vec{j})$ ។

- សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍  $f$  ត្រង់  $-\infty$  និងត្រង់  $+\infty$  ។
- សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍  $f$  ។
- a. រកចំនួនពិត  $a, b, c$  ដែលគ្រប់  $x \neq 2$ ;  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$  ។  
b. គេតាង  $d$  ដែលមានសមីការ  $y = x + 1$ ។ បង្ហាញថា  $d$  ជាអាស៊ីមតូតនៃ  $C$  ត្រង់  $+\infty$  និង  $-\infty$ ។  
សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប  $C$  ធៀបនឹងបន្ទាត់  $d$  ។  
c. សង់ក្រាប  $C$  និង បន្ទាត់  $d$  ។

I. គណនាលីមីត៖

ក.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$  (មានរាងមិនកំណត់  $\frac{\infty}{\infty}$ )

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1+0+0}{1+0} = 1 \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = 1}$$

ខ.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt{x+6} - 3}$  (មានរាងមិនកំណត់  $\frac{0}{0}$ )

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^3 - 3^3)(\sqrt{x+6} + 3)}{(\sqrt{x+6} - 3)(\sqrt{x+6} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)(\sqrt{x+6} + 3)}{(x+6) - 9}$$

$$= (3^2 + 3 \cdot 3 + 9)(\sqrt{3+6} + 3) = 27 \times 6 = 162$$

ដូចនេះ:  $\boxed{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt{x+6} - 3} = 162}$

គ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$  ដូចនេះ:  $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1}$

II. ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

A: ប៊ូលទាំងបីមានពណ៌ស

តាមរូបមន្ត  $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$  ដោយ  $n(A) = C(3,3) = \frac{3!}{(3-3)!3!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1$

$$n(S) = C(9,3) = \frac{9!}{(9-3)!3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3 \times 2 \times 1} = 84$$

គេបាន  $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{84}$  ដូចនេះ:  $\boxed{P(A) = \frac{1}{84}}$

B: ប៊ូលទាំងបីមានពណ៌ក្រហម

តាមរូបមន្ត  $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$  ដោយ  $n(S) = 84$

$$n(B) = C(6,3) = \frac{6!}{(6-3)!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3 \times 2 \times 1} = 20$$

គេបាន  $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{20}{84} = \frac{5}{21}$  ដូចនេះ:  $\boxed{P(B) = \frac{5}{21}}$

C: មានប៊ូលមួយពណ៌ក្រហម និងពីរទៀតពណ៌ស

តាមរូបមន្ត  $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)}$  ដោយ  $n(S) = 84$

$$n(C) = C(6,1) \times C(3,2) = \frac{6!}{(6-1)!1!} \times \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{6 \times 5!}{5! \times 1!} \times \frac{3 \times 2 \times 1}{1! \times 2 \times 1} = 18$$

គេបាន  $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{18}{84} = \frac{3}{14}$  ដូចនេះ:  $\boxed{P(C) = \frac{3}{14}}$

### III. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } I = \int_1^3 (3x^2 + 2x + 1) dx = \left[ 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + x \right]_1^3 = 3^3 + 3^2 + 3 - (1^3 + 1^2 + 1) = 27 + 9 + 3 - 3 = 36$$

ដូចនេះ:  $I = 36$

$$\text{ខ. } J = \int_0^1 (2e^x - 1) dx = [2e^x - x]_0^1 = 2e^1 - 1 - (2e^0 - 0) = 2e - 1 - 2 = 2e - 3 \quad \text{ដូចនេះ: } J = 2e - 3$$

$$\text{គ. } K = \int_1^2 \left( x + \frac{1}{x^2} \right) dx = \int_1^2 (x + x^{-2}) dx = \left[ \frac{x^2}{2} + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} \right]_1^2 = \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} \right]_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1}{2} - \left( \frac{1^2}{2} - \frac{1}{1} \right) = 2 - \frac{1}{2} + 1 = 2$$

ដូចនេះ:  $K = 2$

### IV. ក. បង្ហាញថាសមីការ $9x^2 + 25y^2 = 225$ ជាសមីការអេលីប

$$\begin{aligned} \text{ដោយ } 9x^2 + 25y^2 = 225 &\Leftrightarrow \frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = \frac{225}{225} \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-0)^2}{5^2} + \frac{(y-0)^2}{3^2} = 1 \quad \text{ជាសមីការអេលីបដែលមានផ្ចិត(0,0)} \end{aligned}$$

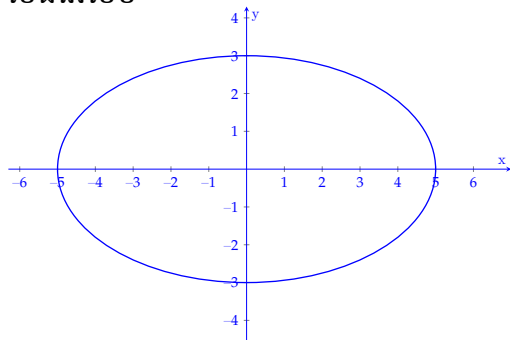
ដូចនេះ:  $\text{សមីការ } 9x^2 + 25y^2 = 225 \text{ ជាសមីការអេលីប}$

រកប្រវែងអ័ក្សតូច ប្រវែងអ័ក្សធំ និងកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ

ដោយសមីការអេលីបមានរាង  $\frac{(x-0)^2}{5^2} + \frac{(y-0)^2}{3^2} = 1$  គេបាន  $h = 0, k = 0, \quad a = 5, b = 3$

- ប្រវែងអ័ក្សតូច  $= 2b = 2(3) = 6$
- ប្រវែងអ័ក្សធំ  $= 2a = 2(5) = 10$
- កំពូល  $V_1(h + a, k) \Rightarrow V_1(5, 0)$
- កំពូល  $V_2(h - a, k) \Rightarrow V_2(-5, 0)$

### ខ. សង់អេលីប



### V. 1. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ $f$ ត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left( 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{x \left( 1 - \frac{2}{x} \right)} = -\infty \frac{(1-0-0)}{1-0} = -\infty \quad \text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left( 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{x \left( 1 - \frac{2}{x} \right)} = +\infty \frac{(1-0-0)}{1-0} = +\infty \quad \text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

## 2. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

### • ដេរីវេ

$$f'(x) = \left( \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} \right)' = \frac{(x^2 - x - 1)'(x - 2) - (x - 2)'(x^2 - x - 1)}{(x - 2)^2}$$

$$= \frac{(2x - 1)(x - 2) - (x^2 - x - 1)}{(x - 2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - x + 2 - x^2 + x + 1}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \text{មានឫស } x_1 = 1; \quad x_2 = 3$$

### • តារាងសញ្ញាដេរីវេ f'(x)

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	-	0	+

### • បរមាធៀប

- ត្រង់  $x = 1$ ;  $f'(x) = 0$  ហើយប្លូសញ្ញាពី + ទៅ - គេបាន f មានអតិបរមាធៀបមួយ គឺ  $f(1) = \frac{1^2 - 1 - 1}{1 - 2} = 1$
- ត្រង់  $x = 3$ ;  $f'(x) = 0$  ហើយប្លូសញ្ញាពី - ទៅ + គេបាន f មានអប្បបរមាធៀបមួយ គឺ  $f(3) = \frac{3^2 - 3 - 1}{3 - 2} = 5$

### • តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	-	0	+
f(x)	$-\infty$	1	$-\infty$	$+\infty$	5	$+\infty$

## 3. a. រកចំនួនពិត a, b, c ដែលគ្រប់ $x \neq 2$ ; $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2} \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = ax + b + \frac{c}{x - 2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x - 2)(x + 1) + 1}{x - 2} = ax + b + \frac{c}{x - 2}$$

$$\Leftrightarrow x + 1 + \frac{1}{x - 2} = ax + b + \frac{c}{x - 2}$$

ដោយធ្វើមេគុណ យើងបាន  $\boxed{a = 1; b = 1; c = 1}$

### b. បង្ហាញថា d : $y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតនៃ C ត្រង់ $+\infty$ និង $-\infty$

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ x + 1 + \frac{1}{x - 2} - (x + 1) \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x - 2} = 0$$

ដូចនេះ:  $\boxed{\text{បន្ទាត់ } d : y = x + 1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតនៃ } C}$

សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d

$$C : y = x + 1 + \frac{1}{x - 2} ; d : y = x + 1 \Rightarrow y_c - y_d = x + 1 + \frac{1}{x - 2} - (x + 1) = \frac{1}{x - 2}$$

•  $y_c - y_d > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x - 2} > 0 \Leftrightarrow x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$  ដូចនេះ:  $\boxed{(c) \text{ ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ } (d) \text{ ពេល } x > 2}$

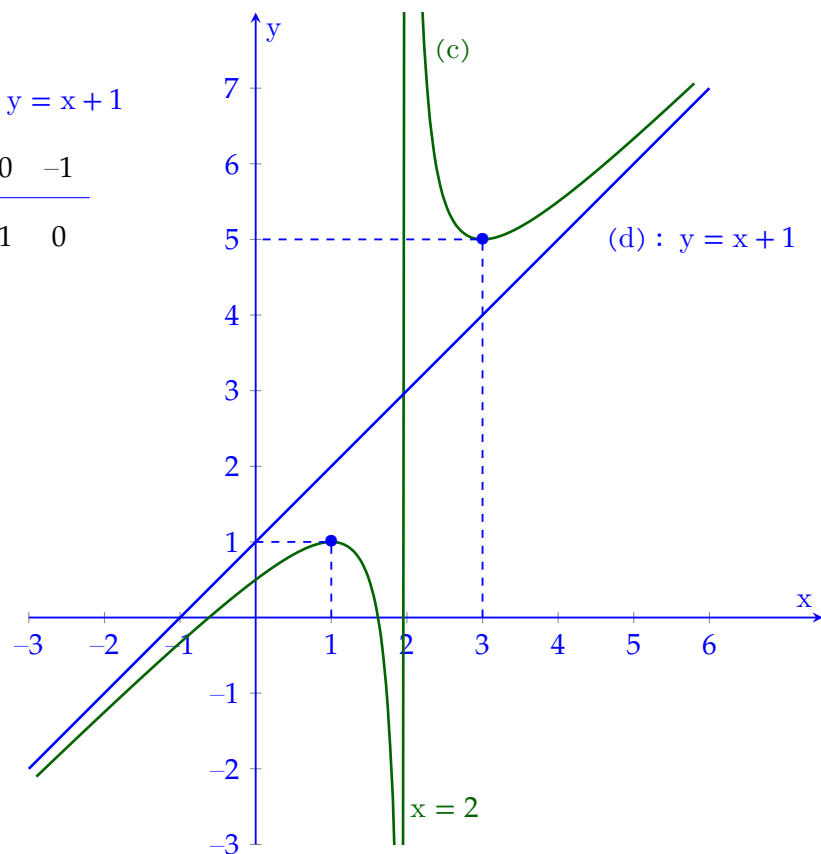
•  $y_c - y_d < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x - 2} < 0 \Leftrightarrow x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$  ដូចនេះ:  $\boxed{(c) \text{ ស្ថិតនៅក្រោមបន្ទាត់ } (d) \text{ ពេល } x < 2}$

c. សង់ក្រាប C និង បន្ទាត់ d

$$(C) \cap (x'ox) \text{ គឺ } y = 0; \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-1) = 5 \text{ មានឫស } x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$(d) : y = x + 1$$

x	0	-1
y	1	0



ស៊ី សំអុន

ក្រសួងអប់រំយុវជន និងកីឡា  
វិទ្យាល័យមេតូឌីស្ទកម្ពុជា  
ប្រឡងសញ្ញាប័ត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
ឈ្មោះ និងហត្ថលេខាអនុវត្ត៖

លេខបន្ទប់៖ .....  
លេខតុ៖ .....  
មណ្ឌលប្រឡង៖ .....

សម័យបច្ចុប្បន្ន៖ ២០ សីហា ២០១៨  
នាមត្រកូលនិងនាមខ្លួន៖ .....  
ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖ .....  
ហត្ថលេខា៖ .....

លេខសម្ងាត់៖

បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើសន្លឹកប្រឡងឡើយ។ សន្លឹកប្រឡងដែលមានសញ្ញាសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្តសូន្យ។



វិញ្ញាសា៖ ធនាគារវិទ្យាថ្នាក់សង្គម រយៈពេល៖ ៩០ នាទី ពិន្ទុ៖ ៧៥

លេខសម្ងាត់៖



សេចក្តីណែនាំ៖ ១. បេក្ខជនត្រូវគូសខ្សែនៅទីពឹងទី២ ផ្នែកខាងលើដែលត្រូវកាត់ចេញ។  
២. បេក្ខជនត្រូវសរសេរចម្លើយនៃសំណួរបន្តនៅលើទីពឹងទី២ ទី៣ និងទី៤។

វិញ្ញាសាទី២ ( ពាក់កណ្តាល ២០១៦ ថ្នាក់សង្គម )

I. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖

ក.  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^3 - 4x)$

ខ.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x} + 2 - 2}$

គ.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x^2)$

II. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល

ក.  $I = \int_1^2 (1 - 3x^2) dx$

ខ.  $J = \int_2^3 \frac{1}{x^2} dx$

គ.  $K = \int_0^1 \left( \frac{1}{x + e} - 1 \right) dx$

ស្តីសំអុន

III. (១០ពិន្ទុ) ប្រអប់មួយមានឃ្លីពណ៌ក្រហមចំនួន៣ និងឃ្លីពណ៌ខៀវចំនួន៥។ គេចាប់ឃ្លី២ចេញពីប្រអប់ដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

- A: ឃ្លីទាំងពីរមានពណ៌ក្រហម
- B: ឃ្លីទាំងពីរមានពណ៌ខៀវ
- C: ឃ្លីមួយក្នុងមួយពណ៌

IV. (១០ពិន្ទុ) រកសមីការស្តង់ដារនៃអេលីបដែលមានកំណុំមួយស្ថិតក្នុងចំណុច  $F_1(-2,0)$  និង កំពូលពីរស្ថិតក្នុង ចំណុច  $A(-3,0)$  និង  $B(3,0)$ ។

V. (៣០ពិន្ទុ)  $f$  ជាអនុគមន៍កំណត់លើ  $I = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$  ដោយ  $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 4}$  ។

- ក. សិក្សាលីមីតនៃ  $f$  ត្រង់  $-\infty, -2, 2$  និង  $+\infty$  ។  
ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេក និង អាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបតាង  $f$  ។
- ខ. សិក្សាអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃ  $f$  ។
- គ. សង់នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់  $(0, i, j)$  ក្រាបតាង  $f$  ។

I. គណនាលីមីត៖

ក.  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^3 - 4x) = 3(1)^3 - 4(1) = 3 - 4 = -1$  ដូចនេះ:  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^3 - 4x) = -1$

ខ.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x+2} - 2}$  (មានរាងមិនកំណត់  $\frac{0}{0}$ )

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^3 - 2^3)}{(\sqrt{x+2} - 2)} \times \frac{(\sqrt{x+2} + 2)}{(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)(\sqrt{x+2} + 2)}{(x+2) - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4)(\sqrt{x+2} + 2) = (2^2 + 2 \cdot 2 + 4)(\sqrt{2+2} + 2) = 48$$

ដូចនេះ:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x+2} - 2} = 48$

គ.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x^2)$  (មានរាងមិនកំណត់  $+\infty - \infty$ )

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \frac{\ln x}{x^2} - 1 \right) = +\infty(0 - 1) = -\infty$$

ដូចនេះ:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x^2) = -\infty$

II. គណនាអាំងតេក្រាល

ក.  $I = \int_1^2 (1 - 3x^2) dx = \left[ x - \frac{3x^3}{3} \right]_1^2 = 2 - 2^3 - (1 - 1^3) = 2 - 8 = -6$  ដូចនេះ:  $I = -6$

ខ.  $J = \int_2^3 \frac{1}{x^2} dx = \int_2^3 x^{-2} dx = \left[ \frac{x^{-2+1}}{-2+1} \right]_2^3 = \left[ -\frac{1}{x} \right]_2^3 = -\frac{1}{3} - \left( -\frac{1}{2} \right) = \frac{-2+3}{6} = \frac{1}{6}$  ដូចនេះ:  $J = \frac{1}{6}$

គ.  $K = \int_0^1 \left( \frac{1}{x+e} - 1 \right) dx = [\ln|x+e| - x]_0^1 = \ln|1+e| - 1 - (\ln|0+e| - 0) = \ln(1+e) - 1 - \ln e$

$$= \ln(1+e) - 1 - 1 = \ln(1+e) - 2$$

ដូចនេះ:  $K = \ln(1+e) - 2$

III. ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

A: ឃើញទាំងពីរមានពណ៌ក្រហម

តាមរូបមន្ត  $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$  ដោយ  $n(A) = C(3, 2) = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3 \times 2!}{1!2!} = 3$

$$n(S) = C(8, 2) = \frac{8!}{(8-2)!2!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6! \times 2 \times 1} = 28$$

គេបាន  $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{28}$  ដូចនេះ:  $P(A) = \frac{3}{28}$

B: ឃើញទាំងពីរមានពណ៌ខៀវ

តាមរូបមន្ត  $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$  ដោយ  $n(S) = 28$ ;  $n(B) = C(5, 2) = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 1} = 10$

គេបាន  $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$  ដូចនេះ:  $P(B) = \frac{5}{14}$

C: ឃើញមួយក្នុងមួយពណ៌

តាមរូបមន្ត  $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)}$  ដោយ  $n(S) = 28$ ;  $n(C) = C(3, 1) \times C(5, 1) = \frac{3!}{2!1!} \times \frac{5!}{4!1!} = 3 \times 5 = 15$

គេបាន  $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{15}{28}$  ដូចនេះ:  $P(C) = \frac{15}{28}$

#### IV. រកសមីការស្តង់ដារនៃអេលីប

ដោយ អរដោនេនៃកំណុំ និងកំពូលរបស់អេលីប គឺ ថេរ គេបានសមីការស្តង់ដារនៃអេលីបគឺ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

• កំពូល  $A(-3,0)$  គឺ  $V_1(h-a,k)$  គេបាន  $h-a = -3$  ;  $k = 0$

• កំពូល  $B(3,0)$  គឺ  $V_2(h+a,k)$  គេបាន  $h+a = 3$  ;  $k = 0$

គេបាន

$$\begin{cases} h-a = -3 \\ h+a = 3 \end{cases}$$

$$\frac{2h = 0}{2h = 0} \Rightarrow h = 0; a = 3$$

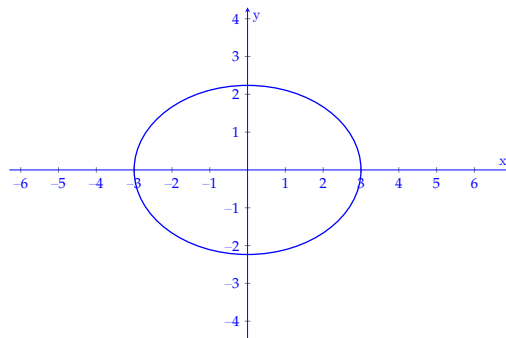
• កំណុំ  $F_1(-2,0)$  គឺ  $F(h-c,k)$  គេបាន  $h-c = -2 \Rightarrow c = 2$

• ដោយ  $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$

គេបាន សមីការអេលីប គឺ  $\frac{(x-0)^2}{3^2} + \frac{(y-0)^2}{5} = 1$  ដូចនេះ: សមីការស្តង់ដារអេលីប គឺ  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

សង់អេលីប

ផ្ចិតនៃអេលីបគឺ  $I(0,0)$



#### V. ក. សិក្សាលីមីតនៃ $f$ ត្រង់ $-\infty, -2, 2$ និង $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2 \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} = \frac{2}{1-0} = 2 \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \pm\infty \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \pm\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \pm\infty \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} = \frac{2}{1-0} = 2 \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2}$$

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេក និង អាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបតាង  $f$

• ដោយ  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$  ដូចនេះ: បន្ទាត់  $y = 2$  ជាអាស៊ីមតូតដេក

• ដោយ  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \pm\infty$  ហើយ  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm\infty$  ដូចនេះ: បន្ទាត់  $x = -2$  និង  $x = 2$  ជាអាស៊ីមតូតឈរ



ខ. សិក្សាអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃ  $f$

- ដេរីវេ

$$f'(x) = \left( \frac{2x^2}{x^2-4} \right)' = \frac{(2x^2)'(x^2-4) - (x^2-4)'(2x^2)}{(x^2-4)^2} = \frac{4x(x^2-4) - 2x(2x^2)}{(x^2-4)^2} = \frac{4x^3 - 16x - 4x^3}{(x^2-4)^2} = \frac{-16x}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -16x = 0 \Rightarrow x = 0$$

- តារាងសញ្ញាដេរីវេ  $f'(x)$

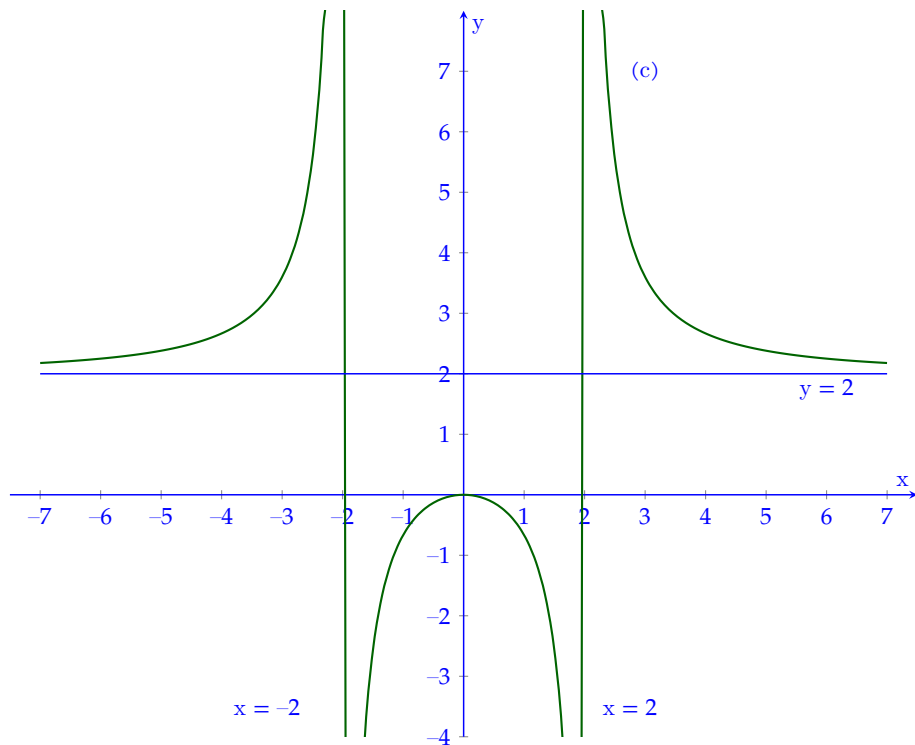
x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-	-

- ត្រង់  $x = 0$ ;  $f'(x) = 0$  ហើយប្តូរសញ្ញាពី - ទៅ + គេបាន  $f$  មានអតិបរមាច្រើនបំផុត គឺ  $f(0) = \frac{2(0)^2}{0^2-4} = 0$

- តារាងអថេរភាពនៃ  $f$

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-	-
$f(x)$	$2 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 2$		

គ. សង់នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់  $(0, 1, j)$  ក្រាបតាង  $f$



ទូរស័ព្ទ: ០៩៦៩៤០៥៨៤០

I. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

ក. «គេចាប់បានឃ្លីពណ៌ខៀវទាំងពីរ» តាង A : «គេចាប់បានឃ្លីពណ៌ខៀវទាំងពីរ»

$$\text{តាមរូបមន្ត } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \quad \text{ដោយ } n(A) = C(5, 2) = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 1} = 10$$

$$n(S) = C(8, 2) = \frac{8!}{(8-2)!2!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6! \times 2 \times 1} = 28$$

$$\text{គេបាន } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14} \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{P(A) = \frac{5}{14}}$$

ខ. «គេចាប់បានឃ្លីមួយក្នុងមួយពណ៌» តាង B : «គេចាប់បានឃ្លីមួយក្នុងមួយពណ៌»

$$\text{តាមរូបមន្ត } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} \quad \text{ដោយ } n(S) = 28; \quad n(B) = C(3, 1) \times C(5, 1) = \frac{3 \times 2!}{2!1!} \times \frac{5 \times 4!}{4!1!} = 3 \times 5 = 15$$

$$\text{គេបាន } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{15}{28} \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{P(B) = \frac{15}{28}}$$

II. គណនាលីមីត៖

ក.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$  (មានរាងមិនកំណត់  $\frac{0}{0}$ )

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2} = \frac{1+1}{1-2} = -2 \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = -2}$$

ខ.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$  (មានរាងមិនកំណត់  $\frac{0}{0}$ )

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(\sqrt{x}-1)} \times \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1) = \sqrt{1}+1 = 2$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 2}$$

III. គណនាអាំងតេក្រាល៖

$$\text{ក. } I = \int_2^3 (3x^2 + 3x - 1) dx = \left[ 3 \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^2}{2} - x \right]_2^3 = 3^3 + 3 \frac{3^2}{2} - 3 - \left( 2^3 + 3 \frac{2^2}{2} - 2 \right) = 27 + \frac{27}{2} - 3 - 8 - \frac{12}{2} + 2$$

$$= 18 + \frac{15}{2} = \frac{36+15}{2} = \frac{51}{2} \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{I = \frac{51}{2}}$$

$$\text{ខ. } f(x) = \frac{1+2x}{(x^2-4x)+(4-x)}; \text{ បង្ហាញថា } f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{3}{4-x}$$

$$\text{ដោយ } \frac{1}{1-x} - \frac{3}{4-x} = \frac{4-x-3(1-x)}{(1-x)(4-x)} = \frac{4-x-3+3x}{4-x-4x+x^2} = \frac{1+2x}{(x^2-4x)+(4-x)} = f(x)$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{3}{4-x}}$$

$$\text{គណនា } J = \int_2^3 f(x) dx$$

$$J = \int_2^3 \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{4-x} \right) dx = \left[ -\ln|1-x| + 3\ln|4-x| \right]_2^3 = -\ln|1-3| + 3\ln|4-3| - (-\ln|1-2| + 3\ln|4-2|) \\ = -\ln 2 + 3\ln 1 + \ln 1 - 3\ln 2 = -4\ln 2$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{J = -4\ln 2}$$

IV. គេមានប៉ារ៉ាបូលមួយមានកំពូលនៅត្រង់ចំណុច  $o(0,0)$  និង កំណុំ  $F$  ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេ។

ក. រកសមីការស្វង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល

ដោយ កំពូល  $o(0,0)$  និង កំណុំ  $F$  ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេ គេបាន អ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរ

គេបាន សមីការស្វង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ  $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

• កំពូល  $(h,k)$  គឺ កំពូល  $o(0,0) \Rightarrow h=0, k=0$

• ប៉ារ៉ាបូលកាត់តាមចំណុច  $A(2,6)$  គេបាន  $(2-0)^2 = 4p(6-0) \Leftrightarrow 4 = 24p \Rightarrow p = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$

គេបាន សមីការប៉ារ៉ាបូលគឺ  $x^2 = \frac{4}{16}y \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4}y$  ដូចនេះ:  $\boxed{\text{ប៉ារ៉ាបូលមានសមីការ } x^2 = \frac{1}{4}y}$

ខ. រកតម្លៃនៃ  $x_1$

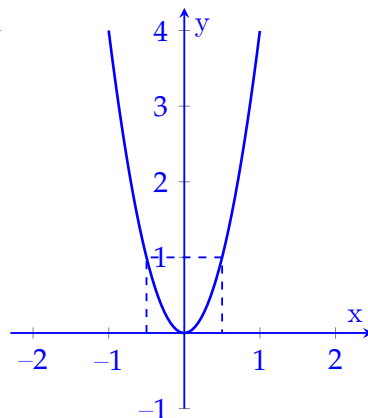
បើ  $B(x_1, \frac{3}{2})$  ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូលនេះ គេបាន  $x_1^2 = \frac{1}{4}(\frac{3}{2}) \Leftrightarrow x_1 = \pm\sqrt{\frac{3}{8}} \Leftrightarrow x_1 = \pm\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{8}}{8} \Leftrightarrow x_1 = \pm\frac{\sqrt{6}}{4}$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{x_1 = \pm\frac{\sqrt{6}}{4}}$$

សង់ប៉ារ៉ាបូល

$$\text{តារាងតម្លៃលេខចំពោះ: } x^2 = \frac{1}{4}y$$

$x$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$y$	$1$	$1$



V. ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍  $f$

ដោយ  $f(x) = \frac{x^2-x-3}{x+1}$ ;  $f(x)$  មានន័យលុះត្រាតែ  $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

ដូចនេះ:  $\boxed{\text{ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ } f \text{ គឺ } D_f = \mathbb{R} - \{-1\}}$

ខ. បង្ហាញថា  $f(x) = x-2-\frac{1}{x+1}$

$$\text{ដោយ } x-2-\frac{1}{x+1} = \frac{(x-2)(x+1)-1}{x+1} = \frac{x^2+x-2x-2-1}{x+1} = \frac{x^2-x-3}{x+1} = f(x)$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{f(x) = x-2-\frac{1}{x+1}}$$

គ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ដែលមានសមីការ  $y = x - 2$  ជាអាស៊ីមតូតទ្រូតនៃក្រាប (C)

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x-2)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ x-2 - \frac{1}{x+1} - (x-2) \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-1}{x+1} = 0$$

ដូចនេះ: បន្ទាត់  $y = x - 2$  ជាអាស៊ីមតូតទ្រូតនៃក្រាប C

ឃ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃ f

• ដេរីវេ

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{x^2 - x - 3}{x+1} \right)' \\ &= \frac{(x^2 - x - 3)'(x+1) - (x+1)'(x^2 - x - 3)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(2x-1)(x+1) - (x^2 - x - 3)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x - 1 - x^2 + x + 3}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 = 0; \quad \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(1)2 = -4 < 0 \text{ សញ្ញាយកតាមមេគុណ a}$$

• តារាងសញ្ញា  $f'(x)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+

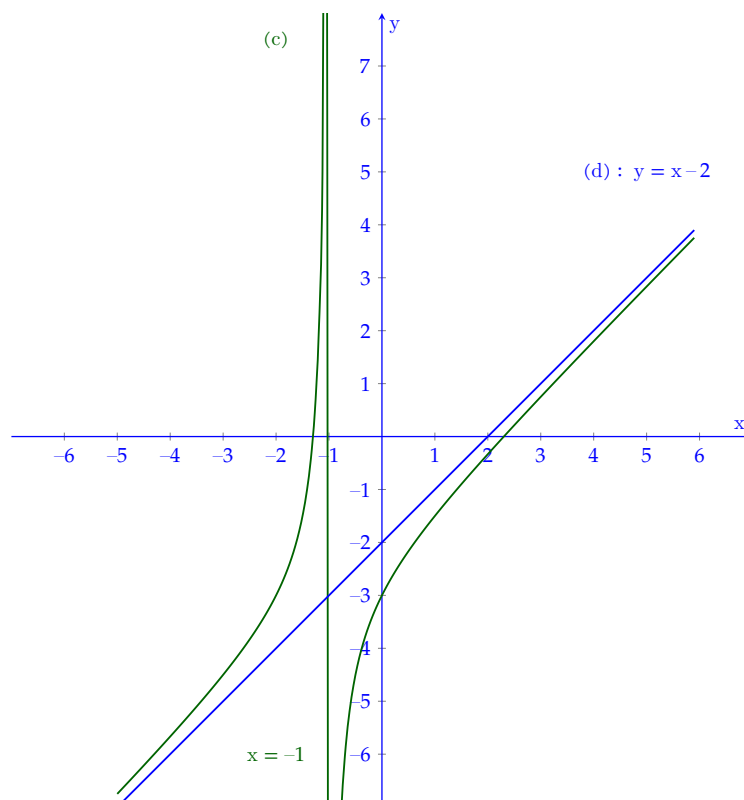
• តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
f(x)	$-\infty$ ↗ $+\infty$		$-\infty$ ↗ $+\infty$

• សង់ក្រាប

◦  $C \cap (y'oy)$  គឺ  $x = 0; \Rightarrow y = \frac{0^2 - 0 - 3}{0+1} = -3$

◦  $C \cap (x'ox)$  គឺ  $y = 0 \Rightarrow x^2 - x - 3 = 0; \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-3) = 13 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$



ក្រសួងអប់រំយុវជន និងកីឡា  
វិទ្យាល័យមេតូឌីស្ទកម្ពុជា  
ប្រឡងសញ្ញាប័ត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
ឈ្មោះ និងហត្ថលេខាអនុវត្ត៖

លេខបន្ទប់៖ .....  
លេខតុ៖ .....  
មណ្ឌលប្រឡង៖ .....

សម័យបច្ចុប្បន្ន៖ ២០ សីហា ២០១៨  
នាមត្រកូលនិងនាមខ្លួន៖ .....  
ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖ .....  
ហត្ថលេខា៖ .....

លេខសម្ងាត់៖

បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើសន្លឹកប្រឡងឡើយ។ សន្លឹកប្រឡងដែលមានសញ្ញាសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្តរស្ស។

វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យាថ្នាក់សង្គម រយៈពេល៖ ៩០ នាទី ពិន្ទុ៖ ៧៥  
លេខសម្ងាត់៖

ពិន្ទុសរុប

- សេចក្តីណែនាំ៖ ១. បេក្ខជនត្រូវគូសខ្វែងនៅទីពឹងទី២ ផ្នែកខាងលើដែលត្រូវកាត់ចេញ។  
២. បេក្ខជនត្រូវសរសេរចម្លើយនៃសំណួរបន្តនៅលើទីពឹងទី២ ទី៣ និងទី៤។

វិញ្ញាសាទី៤ ( ចាក់ឌុបឆ្នាំ ២០១៤ លើកទី២ ថ្នាក់សង្គម )

I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖

ក.  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 4x + 3}$  គ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{x}$   
ខ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{-3x}$  ឃ.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x + 2x - 2)$

II. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងអាងចង្ហើមត្រីមួយមានត្រីពណ៌ក្រហម៤ និងត្រីពណ៌ស៣។ គេចាប់ត្រី២មកដាក់ក្នុងអាងថ្មីដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

- ក. «ត្រីពណ៌ក្រហមទាំងពីរ»  
ខ. «ត្រីពណ៌សទាំងពីរ»  
គ. «ត្រីមួយក្នុងមួយពណ៌»

III. (២៥ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍  $f(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{(1-x)}$  ។

- ក. រកដែនកំណត់  $f(x)$  ។  
ខ. បង្ហាញថា  $f(x) = -x - 1 + \frac{3}{x-1}$  ។  
គ. សិក្សាអថេរភាពនិង សង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍  $f(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{(1-x)}$  ។

IV. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក.  $I = \int_1^3 (2x^2 - 3x + 1) dx$   
ខ.  $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-5x+4}$  ។ បង្ហាញថា  $f(x) = \frac{-1}{x-1} + \frac{3}{x-4}$  ។ រួចគណនា  $J = \int_2^3 f(x) dx$  ។  
គ. គេមានអនុគមន៍  $f(x) = x \ln x$ ។ គណនាដេរីវេ  $f'(x)$  នៃអនុគមន៍  $f(x)$  នៅលើចន្លោះ  $[1, e]$ ។ ទាញរកអាំងតេក្រាល  $K = \int_1^e \ln x dx$  ។

V. (១០ពិន្ទុ) រកសមីការស្តង់ដារនៃអេលីបដែលមានកំពូលទាំងពីរជាចំណុច (4,0) និង (-4,0) និង មានកំណុំ មួយនៅត្រង់ចំណុច (3,0) រួចសង់អេលីបនេះ។

I. គណនាលីមីត៖

ក.  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 4x + 3}$  (មានរាងមិនកំណត់  $\frac{0}{0}$ )

$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x+3)}{(x+1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x+1} = \frac{-3+3}{-3+1} = \frac{0}{-2} = 0$  ដូចនេះ:  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 4x + 3} = 0$

ខ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{-3x}$  (មានរាងមិនកំណត់  $\frac{0}{0}$ )

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{-3} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x = \frac{1}{-3} (1)(0) = 0$  ដូចនេះ:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{-3x} = 0$

គ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{x}$  (មានរាងមិនកំណត់  $\frac{0}{0}$ )

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x})}{x} \times \frac{(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})}{(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+x - (2-x)}{x(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})}$   
 $= \frac{2}{\sqrt{2+0} + \sqrt{2-0}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ដូចនេះ:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x})}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ឃ.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x + 2x - 2) = 2(+\infty) + 2(+\infty) - 2 = +\infty$  ដូចនេះ:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x + 2x - 2) = +\infty$

II. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

ក. «ត្រីពណ៌ក្រហមទាំងពីរ» តាង A : «ត្រីពណ៌ក្រហមទាំងពីរ»

តាមរូបមន្ត  $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$  ដោយ  $n(A) = C(4, 2) = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2 \times 1} = 6$   
 $n(S) = C(7, 2) = \frac{7!}{(7-2)!2!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5! \times 2 \times 1} = 21$

គេបាន  $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$  ដូចនេះ:  $P(A) = \frac{2}{7}$

ខ. «ត្រីពណ៌សទាំងពីរ» តាង B : «ត្រីពណ៌សទាំងពីរ»

តាមរូបមន្ត  $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$  ដោយ  $n(B) = C(3, 2) = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3 \times 2!}{1! \times 2!} = 3$  ;  $n(S) = 21$

គេបាន  $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$  ដូចនេះ:  $P(B) = \frac{1}{7}$

គ. «ត្រីមួយក្នុងមួយពណ៌» តាង C : «ត្រីមួយក្នុងមួយពណ៌»

តាមរូបមន្ត  $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)}$  ដោយ  $n(C) = C(4, 1) \times C(3, 1) = \frac{4 \times 3!}{3!1!} \times \frac{3 \times 2!}{2!1!} = 4 \times 3 = 12$  ;  $n(S) = 21$

គេបាន  $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$  ដូចនេះ:  $P(C) = \frac{4}{7}$

III. ក. រកដែនកំណត់  $f(x)$  ;  $f(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{1-x}$

$f(x)$  មានន័យលុះត្រាតែ  $1-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$  ដូចនេះ: ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍  $f$  គឺ  $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

ខ. បង្ហាញថា  $f(x) = -x-1 + \frac{3}{x-1}$

ដោយ  $-x-1 + \frac{3}{x-1} = \frac{(-x-1)(x-1) + 3}{x-1} = \frac{-x^2 + x - x + 1 + 3}{x-1} = \frac{-(x^2-4)}{-(1-x)} = \frac{(x+2)(x-2)}{1-x} = f(x)$

ដូចនេះ:  $f(x) = -x-1 + \frac{3}{x-1}$

គ. សិក្សាអថេរភាពនិង សង់ក្រាប C

• ដេរីវេ

$$f'(x) = \left( \frac{(x+2)(x-2)}{1-x} \right)' = \left( \frac{x^2-4}{1-x} \right)' = \frac{(x^2-4)'(1-x) - (1-x)'(x^2-4)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{2x(1-x) + (x^2-4)}{(1-x)^2} = \frac{2x-2x^2+x^2-4}{(1-x)^2} = \frac{-x^2+2x-4}{(1-x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x - 4 = 0 \quad ; \Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(-1)(-4) = 4 - 16 = -12 < 0$$

គេបាន  $f'(x)$  មានសញ្ញាដូចមេគុណ a

• តារាងសញ្ញា  $f'(x)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-

• តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-
f(x)	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$	$-\infty$

• លីមីត

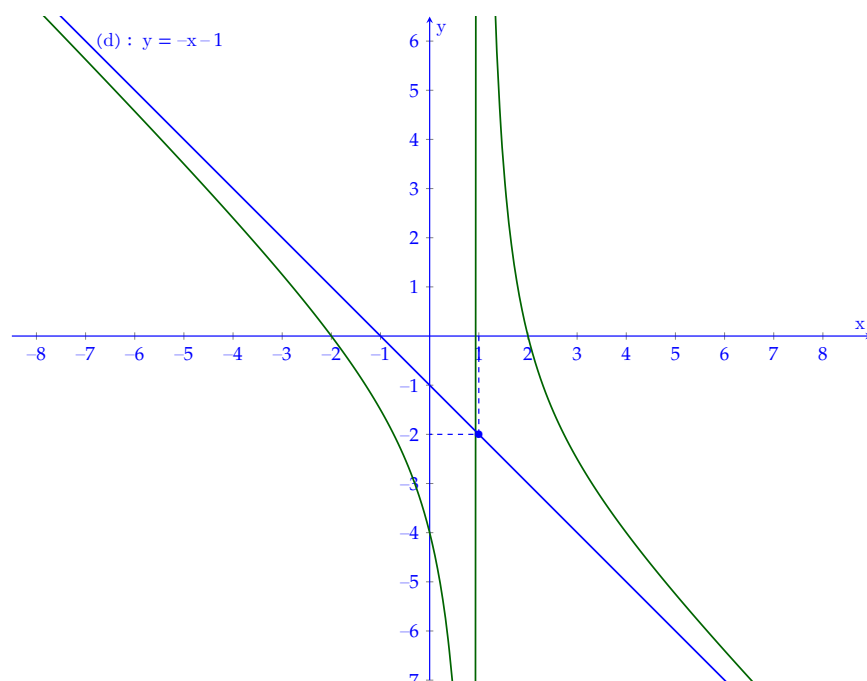
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-4}{1-x} = \mp\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-4}{1-x} = \pm\infty$$

• សង់ក្រាប

• ក្រាប(c) កាត់អ័ក្សអរដោនេ ពេល  $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = \frac{(0+2)(0-2)}{1-0} = -4$

• ក្រាប (c) កាត់អ័ក្សរាបស៊ីស ពេល  $y = 0 \Leftrightarrow 0 = \frac{(x+2)(x-2)}{(1-x)} \Leftrightarrow x = -2; x = 2$





IV. គណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍៖

$$\text{ក. } I = \int_1^3 (2x^2 - 3x + 1) dx = \left[ 2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + x \right]_1^3 = 2\frac{3^3}{3} - 3\frac{3^2}{2} + 3 - \left( 2\frac{1^3}{3} - 3\frac{1^2}{2} + 1 \right) = 18 - \frac{27}{2} + 3 - \frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 1$$

$$= 20 - 12 - \frac{2}{3} = \frac{22}{3} \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{I = \frac{22}{3}}$$

ខ.  $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-5x+4}$ ; បង្ហាញថា  $f(x) = \frac{-1}{x-1} + \frac{3}{x-4}$

ដោយ  $\frac{-1}{x-1} + \frac{3}{x-4} = \frac{-(x-4) + 3(x-1)}{(x-1)(x-4)} = \frac{-x+4+3x-3}{x^2-5x+4} = \frac{2x+1}{x^2-5x+4} = f(x)$

ដូចនេះ:  $\boxed{f(x) = \frac{-1}{x-1} + \frac{3}{x-4}}$

គណនា  $J = \int_2^3 f(x) dx$

$$J = \int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 \left( \frac{-1}{x-1} + \frac{3}{x-4} \right) dx = \left[ -\ln|x-1| + 3\ln|x-4| \right]_2^3$$

$$= -\ln|3-1| + 3\ln|3-4| - (-\ln|2-1| + 3\ln|2-4|) = -\ln 2 + 3\ln 1 + \ln 1 - 3\ln 2 = -4\ln 2$$

ដូចនេះ:  $\boxed{J = -4\ln 2}$

គ. គេមានអនុគមន៍  $f(x) = x \ln x$  គណនាដេរីវេ  $f'(x)$

$$f'(x) = (x \ln x)' = x' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + x \left( \frac{1}{x} \right) = \ln x + 1 \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{f'(x) = \ln x + 1}$$

ទាញរកអាំងតេក្រាល  $K = \int_1^e \ln x dx$

$$K = \int_1^e \ln x dx = \int_1^e (\ln x + 1 - 1) dx = \int_1^e (\ln x + 1) dx - \int_1^e 1 dx = \int_1^e (\ln x)' dx - [x]_1^e$$

$$= [\ln x]_1^e - [x]_1^e = \ln e - \ln 1 - (e - 1) = 2 - e \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{K = 2 - e}$$

V. រកសមីការស្ទង់ដានៃអេលីប

ដោយ កំពូល កំណុំមានអរដោនេថេរ គេបាន អ័ក្សទទឹងស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីស នោះ សមីការស្ទង់ដានៃអេលីបគឺ

$$\bullet \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

• សង់អេលីប ផ្ចិតនៃអេលីបគឺ  $I(0,0)$

$$\bullet \text{កំពូល } V_1(h+a, k) \text{ គឺ } (4, 0) \Rightarrow h+a=4; \quad k=0$$

$$\bullet \text{កំពូល } V_2(h-a, k) \text{ គឺ } (-4, 0) \Rightarrow h-a=-4; \quad k=0$$

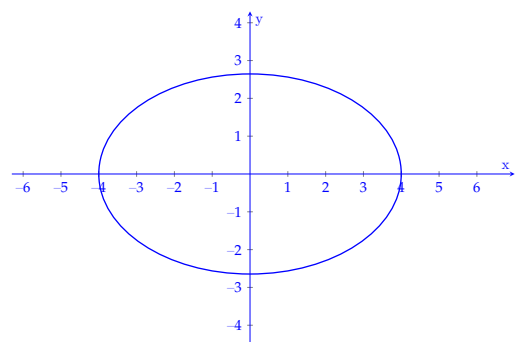
$$\begin{cases} h+a=4 \\ h-a=-4 \end{cases}$$

$$2h = 0 \Rightarrow h=0; \quad a=4$$

$$\bullet \text{កំណុំ } F(h+c, 0) \text{ គឺ } (3, 0) \Rightarrow h+c=3 \Rightarrow c=3$$

$$\bullet c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$$

ដូចនេះ:  $\boxed{\text{អេលីបមានសមីការ } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1}$



ក្រសួងអប់រំយុវជន និងកីឡា  
វិទ្យាល័យមេតូឌីស្តិកម្ពុជា  
ប្រឡងសញ្ញាប័ត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
ឈ្មោះ និងហត្ថលេខាអនុវត្ត៖

លេខបន្ទប់៖ .....  
លេខតុ៖ .....  
មណ្ឌលប្រឡង៖ .....

សម័យបច្ចុប្បន្ន៖ ២០ សីហា ២០១៨  
នាមត្រកូលនិងនាមខ្លួន៖ .....  
ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖ .....  
ហត្ថលេខា៖ .....

លេខសម្ងាត់៖

បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើសន្លឹកប្រឡងឡើយ។ សន្លឹកប្រឡងដែលមានសញ្ញាសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្តសូន្យ។

វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យាថ្នាក់សង្គម រយៈពេល៖ ៩០ នាទី ពិន្ទុ៖ ៧៥  
លេខសម្ងាត់៖

ពិន្ទុសរុប

- សេចក្តីណែនាំ៖ ១. បេក្ខជនត្រូវគូសខ្សែនៅទីតាំងដែលត្រូវកាត់ចេញ។  
២. បេក្ខជនត្រូវសរសេរចម្លើយនៃសំណួរបន្តនៅលើទីតាំង ទី៣ និងទី៤។

វិញ្ញាសាទី៥ ( ធាតុបញ្ចាំ ២០១៤ លើកទី១ ថ្នាក់សង្គម )

I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖

ក.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x^2 - 3)(1 - x)}{(5 + 2x)(2 - x^2)}$       ខ.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1}$       គ.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+1}{x-1}$

II. (១៥ពិន្ទុ) នៅក្នុងធុងមួយមានប៊ូលក្រហម៤ ប៊ូលស្ករ៣ និងប៊ូលខៀវ១។ គេចាប់យកប៊ូល៣ក្នុងពេលតែមួយចេញពីធុងដោយចៃដន្យ។

- ក. រកប្រូបាបដែល «គេចាប់បានប៊ូលក្រហមពីរ និងមួយទៀតមិនក្រហម»  
ខ. រកប្រូបាបដែល «គេចាប់បានប៊ូលក្រហមទាំងបី»  
គ. រកប្រូបាបដែល «គេចាប់បានយ៉ាងតិចប៊ូលក្រហមពីរ»

III. (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍  $f$  កំណត់លើ  $\mathbb{R}$  ដោយ  $f(x) = \frac{1}{1+e^x} + \frac{2}{9}x$  និង  $C$  តាងក្រាបរបស់  $f$  ។

1. អនុគមន៍  $g$  កំណត់លើ  $\mathbb{R}$  ដោយ  $g(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$  ។  
ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា  $g(x) = (2e^x - 1)(e^x - 2)$  ។  
ខ. ទាញយកតាមតម្លៃនៃ  $x$  ចំពោះសញ្ញានៃ  $g(x)$  ។  
2. ក. រក  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  និង  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ។  
ខ. អនុគមន៍  $f$  មានដេរីវេ  $f'$  ។ បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត  $x$  គេបាន  $f'(x)$  និង  $g(x)$  មានសញ្ញាដូចគ្នា។  
គ. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍  $f$  លើ  $\mathbb{R}$  ។

IV. (១៥ពិន្ទុ)

- ក. គណនាអាំងតេក្រាល  $I = \int_1^5 (x^2 + 2x - 3) dx$  ។  
ខ. បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិត  $x; x \neq 1$  គេបាន  $\frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1} = 2x - 1 + \frac{1}{x - 1}$  ។ រួចទាញរក  $I = \int_2^3 \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1} dx$  ។

I. គណនាលីមីត៖

ក.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x^2 - 3)(1 - x)}{(5 + 2x)(2 - x^2)}$  (មានរាងមិនកំណត់  $\frac{\infty}{\infty}$ )

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \cdot x \left(2 - \frac{3}{x^2}\right) \left(\frac{1}{x} - 1\right)}{x \cdot x^2 \left(\frac{5}{x} + 2\right) \left(\frac{2}{x^2} - 1\right)} = \frac{(2-0)(0-1)}{(0+2)(0-1)} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x^2 - 3)(1 - x)}{(5 + 2x)(2 - x^2)} = 1}$$

ខ.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1}$  (មានរាងមិនកំណត់  $\frac{0}{0}$ )

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2 - \sqrt{x+3})(2 + \sqrt{x+3})}{(x^2 - 1)(2 + \sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 - (x+3)}{(x^2 - 1)(2 + \sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)(2 + \sqrt{x+3})}$$

$$= \frac{-1}{(1+1)(2 + \sqrt{1+3})} = \frac{-1}{2(4)} = -\frac{1}{8} \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} = -\frac{1}{8}}$$

គ.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{2}{x-1}\right) = \ln(1+0) = \ln 1 = 0$  ដូចនេះ:  $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+1}{x-1} = 0}$

II. ក. រកប្រូបាបដែល «គេចាប់បានប៊ូលក្រហមពីរ និងមួយទៀតមិនក្រហម»

តាង A : «គេចាប់បានប៊ូលក្រហមពីរ និងមួយទៀតមិនក្រហម»

តាមរូបមន្ត  $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$  ដោយ  $n(A) = C(4,2) \times C(3,1) + C(4,2) \times C(1,1) = \frac{4!}{2!2!} \times \frac{3!}{2!1!} + \frac{4!}{2!2!} \times \frac{1!}{0!1!}$

$$= \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!2 \times 1} \times \frac{3 \times 2!}{2!} + \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!2 \times 1} \times 1 = 6 \times 3 + 6 = 24$$

$$n(S) = C(8,3) = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!3 \times 2 \times 1} = 56$$

គេបាន  $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$  ដូចនេះ:  $\boxed{P(A) = \frac{3}{7}}$

ខ. រកប្រូបាបដែល «គេចាប់បានប៊ូលក្រហមទាំងបី» តាង B : «គេចាប់បានប៊ូលក្រហមទាំងបី»

តាមរូបមន្ត  $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$  ដោយ  $n(B) = C(4,3) = \frac{4!}{1!3!} = \frac{4 \times 3!}{3!} = 4$  ;  $n(S) = 56$

គេបាន  $P(B) = \frac{4}{56} = \frac{1}{14}$  ដូចនេះ:  $\boxed{P(B) = \frac{1}{14}}$

គ. រកប្រូបាបដែល «គេចាប់បានយ៉ាងតិចប៊ូលក្រហមពីរ» តាង C : «គេចាប់បានយ៉ាងតិចប៊ូលក្រហមពីរ»

តាមរូបមន្ត  $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)}$  ដោយ  $n(C) = C(4,2) \times C(3,1) + C(4,2) \times C(1,1) + C(4,3) = 24 + 4 = 28$

$$n(S) = 56$$

គេបាន  $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{28}{56} = \frac{1}{2}$  ដូចនេះ:  $\boxed{P(C) = \frac{1}{2}}$

III. 1. ក. អនុគមន៍  $g$  កំណត់លើ  $\mathbb{R}$  ដោយ  $g(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$  រៀងផ្ទាត់ថា  $g(x) = (2e^x - 1)(e^x - 2)$

ដោយ  $(2e^x - 1)(e^x - 2) = 2e^x \cdot e^x - 4e^x - e^x + 2 = 2e^{2x} - 5e^x + 2 = g(x)$

ដូចនេះ:  $\boxed{g(x) = (2e^x - 1)(e^x - 2)}$

ខ. ទាញយកតាមតម្លៃនៃ  $x$  ចំពោះសញ្ញានៃ  $g(x)$

$$\text{បើ } g(x) = 0 \Leftrightarrow (2e^x - 1)(e^x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\ln 2 \\ e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2 \end{cases}$$

តារាងសញ្ញា  $g(x)$

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$\ln 2$	$+\infty$		
g(x)		+	0	-	0	+

ដូចនេះ:  $g(x) > 0$  ពេល  $x \in (-\infty, -\ln 2) \cup (\ln 2, +\infty)$ ;  $g(x) < 0$  ពេល  $x \in (-\ln 2, \ln 2)$

2. ក. រក  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  និង  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{1+e^x} + \frac{2}{9}x \right) = 0 + \frac{2}{9}(+\infty) \quad \text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{1+e^x} + \frac{2}{9}x \right) = \frac{1}{1+0} + \frac{2}{9}(-\infty) = -\infty \quad \text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

ខ. អនុគមន៍  $f$  មានដេរីវេ  $f'$  បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត  $x$  គេបាន  $f'(x)$  និង  $g(x)$  មានសញ្ញាដូចគ្នា

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{1}{1+e^x} + \frac{2}{9}x \right)' = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2} + \frac{2}{9} = \frac{-9e^x + 2(1+e^x)^2}{9(1+e^x)^2} = \frac{-9e^x + 2 + 4e^x + 2e^{2x}}{9(1+e^x)^2} \\ &= \frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{9(1+e^x)^2} = \frac{g(x)}{9(1+e^x)^2} \quad \text{ដោយ } 9(1+e^x)^2 > 0; \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{គេបាន } f'(x) \text{ មានសញ្ញាតាម } g(x) \end{aligned}$$

ដូចនេះ:  $f'(x)$  និង  $g(x)$  មានសញ្ញាដូចគ្នា

គ. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍  $f$  លើ  $\mathbb{R}$

ដោយ  $f'(x)$  និង  $g(x)$  មានសញ្ញាដូចគ្នា គេបាន តារាងសញ្ញា  $f'(x)$  គឺ

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$\ln 2$	$+\infty$		
f'(x)		+	0	-	0	+

- ត្រង់  $x = -\ln 2$ ;  $f'(x) = 0$  ហើយប្តូរសញ្ញាពី  $+$  ទៅ  $-$  គេបាន  $f$  មានអតិបរមាធៀបមួយគឺ

$$f(-\ln 2) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} - \frac{2 \ln 2}{9} = \frac{2}{3} - \frac{2 \ln 2}{9} = \frac{6 - \ln 4}{9}$$

- ត្រង់  $x = \ln 2$ ;  $f'(x) = 0$  ហើយប្តូរសញ្ញាពី  $-$  ទៅ  $+$  គេបាន  $f$  មានអប្បបរមាធៀបមួយគឺ

$$f(\ln 2) = \frac{1}{1+2} + \frac{2 \ln 2}{9} = \frac{1}{3} + \frac{2 \ln 2}{9} = \frac{3 + \ln 4}{9}$$

តារាងអថេរភាពនៃ  $f$

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$\ln 2$	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow \frac{6-\ln 4}{9}$	$\searrow \frac{3+\ln 4}{9}$	$\nearrow$	$+\infty$	

ក្រសួងអប់រំយុវជន និងកីឡា  
វិទ្យាល័យមេតូឌីស្ទកម្ពុជា  
ប្រឡងសញ្ញាប័ត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
ឈ្មោះ និងហត្ថលេខាអនុវត្ត៖

លេខបន្ទប់៖ .....  
លេខគុះ .....  
មណ្ឌលប្រឡង៖ .....  
សម័យបច្ចុប្បន្ន៖ ២០ សីហា ២០១៨  
នាមត្រកូលនិងនាមខ្លួន៖ .....  
ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖ .....  
ហត្ថលេខា៖ ..... លេខសម្ងាត់៖

បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើសន្លឹកប្រឡងឡើយ។ សន្លឹកប្រឡងដែលមានសញ្ញាសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្តសូន្យ។

វិញ្ញាសា៖ ធាតុវិទ្យាថ្នាក់សង្គម រយៈពេល៖ ៩០ នាទី ពិន្ទុ៖ ៧៥ លេខសម្ងាត់៖

ពិន្ទុសរុប

- សេចក្តីណែនាំ៖ ១. បេក្ខជនត្រូវគូសខ្សែនៅទីពឹងទី២ ផ្នែកខាងលើដែលត្រូវកាត់ចេញ។  
២. បេក្ខជនត្រូវសរសេរចម្លើយនៃសំណួរបន្តនៅលើទីពឹងទី២ ទី៣ និងទី៤។

វិញ្ញាសាទី៦

I. (១០ពិន្ទុ) ចូរគណនាតម្លៃនៃលីមីតខាងក្រោម៖

ក.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}$       ខ.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$       គ.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2-2x+1}{2x+1}$

II. (១០ពិន្ទុ) ប្រអប់មួយមានឃ្លីក្រហមចំនួន ៦គ្រាប់ និងឃ្លីសចំនួន ៤គ្រាប់។ គេចាប់យកឃ្លី ៤ ចេញពីប្រអប់ដោយចៃដន្យ។ ចូរកម្រិតបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

- សំណួរ  
A : «ចាប់បានឃ្លីពណ៌សទាំង ៤ គ្រាប់ »  
B : «ចាប់បានឃ្លីពណ៌ក្រហមទាំង ៤ គ្រាប់»  
C : «ចាប់បានឃ្លីពណ៌ស ៣ និង ឃ្លីពណ៌ក្រហម ១ »

III. (១០ ពិន្ទុ) ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក.  $I = \int_1^2 (x^2 - 2x + 1) dx$       ខ.  $J = \int_0^1 (x^3 + e^x) dx$       គ.  $K = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx$

IV. (១៥ ពិន្ទុ) គេមានសមីការ  $4x^2 + 9y^2 = 36$  ។

- a. ចូរបង្ហាញថាសមីការខាងលើជាសមីការអេលីប។  
b. ចូរកម្រងវ៉ិចទ័រកូច ប្រវែងអ័ក្សធំ រួចរកកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ និង កូអរដោនេនៃកំណុំទាំងពីរ។  
c. ចូរសង់អេលីប ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ។

V. (៣០ ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f មួយ ដែលកំណត់ដោយ  $y = f(x) = \frac{x^2 + 3x - 3}{x - 1}$  មានក្រាបតំណាង (C)។

- ក. ចូរកំណត់នៃអនុគមន៍ f។  
ខ. ចូរគណនា  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ។  
គ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង សមីការអាស៊ីមតូតទ្រូត។  
ឃ. គណនាដេរីវេ  $f'(x)$  និង សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ  $f'(x)$  ។  
ង. សង់តារាងអថេរភាព និង សង់ក្រាប(C) ។

I. គណនាតម្លៃនៃលីមីត៖

ក.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}$  (មានរាងមិនកំណត់  $\frac{0}{0}$ )

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-2^2}{(x^2-2^2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1}{(2+2)(\sqrt{2+2}+2)} = \frac{1}{4(4)} = \frac{1}{16}$$

ដូចនេះ:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4} = \frac{1}{16}$

ខ.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$  (មានរាងមិនកំណត់  $\frac{0}{0}$ )

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x^2-1^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x+1} = \frac{1-2}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} = -\frac{1}{2}$

គ.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2-2x+1}{2x+1}$  (មានរាងមិនកំណត់  $\frac{\infty}{\infty}$ )

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left( 3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x \left( 2 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left( 3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{+\infty (3-0+0)}{2+0} = +\infty$$

ដូចនេះ:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2-2x+1}{2x+1} = +\infty$

II. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

A : «ចាប់បានឃ្លីពណ៌សទាំង 4 គ្រាប់ »

តាមរូបមន្ត  $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$  ដោយ  $n(A) = C(4,4) = \frac{4!}{(4-4)!4!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1$

$$n(S) = C(10,4) = \frac{10!}{(10-4)!4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$$

គេបាន  $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{210}$  ដូចនេះ:  $P(A) = \frac{1}{210}$

B : «ចាប់បានឃ្លីពណ៌ក្រហមទាំង 4 គ្រាប់»

តាមរូបមន្ត  $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$  ដោយ  $n(B) = C(6,4) = \frac{6!}{(6-4)!4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2!4!} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$

$$n(S) = 210$$

គេបាន  $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{15}{210} = \frac{3 \times 5}{3 \times 7 \times 5 \times 2} = \frac{1}{14}$  ដូចនេះ:  $P(B) = \frac{1}{14}$

C : «ចាប់បានឃ្លីពណ៌ស 3 និង ឃ្លីពណ៌ក្រហម 1 »

តាមរូបមន្ត  $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)}$  ដោយ  $n(C) = C(4,3) \times C(6,1) = \frac{4!}{1!3!} \times \frac{6!}{5!1!} = \frac{4 \times 3!}{3!} \times \frac{6 \times 5!}{5!} = 4 \times 6 = 24$

$$n(S) = 210$$

គេបាន  $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{24}{210} = \frac{2 \times 3 \times 4}{3 \times 7 \times 5 \times 2} = \frac{4}{35}$  ដូចនេះ:  $P(C) = \frac{4}{35}$

### III. គណនាអាំងតេក្រាល៖

ក.  $I = \int_1^2 (x^2 - 2x + 1) dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + x \right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - 2^2 + 2 - \left( \frac{1^3}{3} - 1^2 + 1 \right) = \frac{8}{3} - 4 + 2 - \frac{1}{3}$   
 $= \frac{7}{3} - 2 = \frac{7-6}{3} = \frac{1}{3}$  ដូចនេះ:  $I = \frac{1}{3}$

ខ.  $J = \int_0^1 (x^3 + e^x) dx = \left[ \frac{x^4}{4} + e^x \right]_0^1 = \frac{1^4}{4} + e^1 - \left( \frac{0^4}{4} + e^0 \right) = \frac{1}{4} + e - 1 = \frac{1-4}{4} + e = -\frac{3}{4} + e$

ដូចនេះ:  $J = -\frac{3}{4} + e$

គ.  $K = \int_1^e \left( \frac{1}{x} - 1 \right) dx = \left[ \ln|x| - x \right]_1^e = \ln e - e - (\ln 1 - 1) = 1 - e - 0 + 1 = 2 - e$  ដូចនេះ:  $K = 2 - e$

### IV. a. បង្ហាញថាសមីការ $4x^2 + 9y^2 = 36$ ជាសមីការអេលីប

$$4x^2 + 9y^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-0)^2}{3^2} + \frac{(y-0)^2}{2^2} = 1 \quad \text{ជាសមីការអេលីប មានផ្ចិត}(0,0)$$

ដូចនេះ: សមីការ  $4x^2 + 9y^2 = 36$  ជាសមីការអេលីប

b. រកប្រវែងអ័ក្សតូច ប្រវែងអ័ក្សធំ រកកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ និង កូអរដោនេនៃកំណុំទាំងពីរ ដោយ សមីការអេលីបគឺ  $\frac{(x-0)^2}{3^2} + \frac{(y-0)^2}{2^2} = 1$  គេបាន

☞ អ័ក្សធំជាអ័ក្សដេក

☞  $h = 0; k = 0; \quad a = 3; b = 2 \quad ; c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$

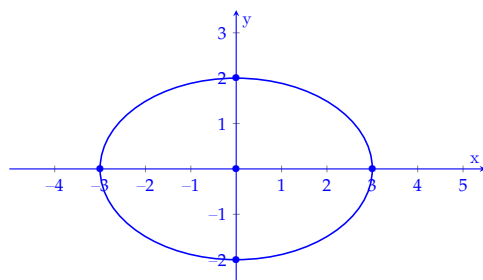
• ប្រវែងអ័ក្សតូច  $= 2b = 2(2) = 4$

• ប្រវែងអ័ក្សធំ  $= 2a = 2(3) = 6$

• កំពូល  $V_1(h-a, k); V_2(h+a, k) \Rightarrow V_1(-3, 0); V_2(3, 0)$

• កំណុំ  $F_1(h-c, k); F_2(h+c, k) \Rightarrow F_1(-\sqrt{5}, 0); F_2(\sqrt{5}, 0)$

### c. សង់អេលីប ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ



### V. ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

ដោយ  $y = f(x) = \frac{x^2 + 3x - 3}{x - 1}$  គេបាន  $f(x)$  មានន័យលុះត្រាតែ  $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

ដូចនេះ: ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f គឺ  $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

ខ. គណនា  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \pm\infty \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 3}{x - 1} = \pm\infty \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \pm\infty}$$

គ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង សមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត

• ដោយ  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \pm\infty$  ដូចនេះ: បន្ទាត់  $x = 1$  ជាសមីការអាស៊ីមតូតឈរ

• ដោយ  $y = f(x) = \frac{x^2 + 3x - 3}{x - 1} = x + 4 + \frac{1}{x - 1}$  គេបាន  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x - 1} = 0$

ដូចនេះ: បន្ទាត់  $y = x + 4$  ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត

ឃ. គណនាដេរីវេ  $f'(x)$  និង សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ  $f'(x)$

$$f'(x) = \left( \frac{x^2 + 3x - 3}{x - 1} \right)' = \frac{(x^2 + 3x - 3)'(x - 1) - (x - 1)'(x^2 + 3x - 3)}{(x - 1)^2} = \frac{(2x + 3)(x - 1) - (x^2 + 3x - 3)}{(x - 1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x + 3x - 3 - x^2 - 3x + 3}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

តារាងសញ្ញាដេរីវេ  $f'(x)$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	-	0	+

បរិមាណ

• ត្រង់  $x = 0$ ;  $f'(x) = 0$  ប្តូរសញ្ញាពី + ទៅ - គេបាន  $f$  មានអតិបរមាជ្រៀបមួយ គឺ  $f(0) = \frac{0^2 + 3(0) - 3}{0 - 1} = 3$

• ត្រង់  $x = 2$ ;  $f'(x) = 0$  ប្តូរសញ្ញាពី - ទៅ + គេបាន  $f$  មានអប្បបរមាជ្រៀបមួយ គឺ  $f(2) = \frac{2^2 + 3(2) - 3}{2 - 1} = 7$

ង. សង់តារាងអថេរភាព និង សង់ក្រាប(C)

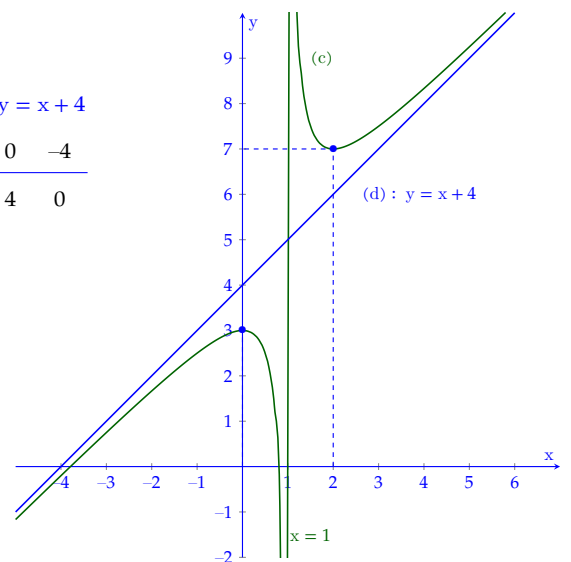
• តារាងអថេរភាពនៃ  $f$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	-	0	+
f(x)	$-\infty$	3	$+\infty$	7	$+\infty$	

• ក្រាប C

(d) :  $y = x + 4$

x	0	-4
y	4	0





ក្រសួងអប់រំយុវជន និងកីឡា  
វិទ្យាល័យមេតូឌីស្ទកម្ពុជា  
ប្រឡងសញ្ញាប័ត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
ឈ្មោះ និងហត្ថលេខាអនុវត្ត៖

លេខបន្ទប់៖ .....  
លេខតុ៖ .....  
មណ្ឌលប្រឡង៖ .....

សម័យបច្ច័យ៖ ២០ សីហា ២០១៨  
ឆ្នាំរតន្ត្រីក្សត្រិយៈ  
ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖ .....  
ហត្ថលេខា៖ .....

លេខសម្ងាត់៖

បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើសន្លឹកប្រឡងឡើយ។ សន្លឹកប្រឡងដែលមានសញ្ញាសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្តសូន្យ។

វិញ្ញាសា៖ ធាតុវិទ្យាថ្នាក់សង្គម រយៈពេល៖ ៩០ នាទី ពិន្ទុ៖ ៧៥  
ពិន្ទុសរុប

លេខសម្ងាត់៖

- សេចក្តីណែនាំ៖ ១. បេក្ខជនត្រូវគូសខ្សែនៅទីពឹងទី២ ផ្នែកខាងលើដែលត្រូវកាត់ចេញ។  
២. បេក្ខជនត្រូវសរសេរចម្លើយនៃសំណួរបន្តនៅលើទីពឹងទី២ ទី៣ និងទី៤។

វិញ្ញាសាទី៧

I. (១០ពិន្ទុ) ចូរគណនាតម្លៃនៃលីមីតខាងក្រោម៖

ក.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$       ខ.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x} + 2 - 2}$       គ.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 1}$

II. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងចំណោមមួយមានប៊ូលខៀវចំនួន ៣ និងប៊ូលពណ៌ខ្មៅចំនួន ៥។ គេចាប់យកប៊ូល ២ ចេញពីចង្កោមដោយចៃដន្យ។ ចូរកម្រិតប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

- ក. « គេចាប់បានប៊ូលពណ៌ខៀវទាំងអស់ »  
ខ. « គេចាប់បានប៊ូលពណ៌ខ្មៅទាំងអស់ »  
គ. « គេចាប់បានប៊ូលមួយក្នុងមួយពណ៌ »

III. (១០ពិន្ទុ) ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក.  $I = \int_1^3 x^2 dx$       ខ.  $J = \int_1^4 (2x^2 - 4x + 4) dx$       គ.  $K = \int_1^3 \left( x^2 + \frac{1}{x} - e^x \right) dx$

IV. (១៥ពិន្ទុ) គេមានសមីការ  $16x^2 + 9y^2 = 144$  ។

- ក. បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប។  
ខ. ចូរកម្រិតប្រវែងអ័ក្សធំ ប្រវែងអ័ក្សតូច កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ និងកូអរដោនេនៃកំណុំទាំងពីរ។  
គ. ចូរសង់អេលីប។

V. (៣០ពិន្ទុ) អនុគមន៍  $f$  កំណត់ដោយ  $y = f(x) = \frac{x^2 - 3x - 3}{x - 2}$  មានក្រាបតំណាង (C) ។

- ក. ចូរកំណត់ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍  $f$  ។  
ខ. ចូរគណនា  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ។ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។  
គ. ចូរបង្ហាញថា  $f(x) = x - 1 + \frac{-5}{x - 2}$  ។ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត។  
ឃ. សិក្សាអថេរភាព សង់តារាងអថេរភាព និង សង់ក្រាប(C)។

I. គណនាតម្លៃនៃលីមីត៖

ក.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$  (មានរាងមិនកំណត់  $\frac{0}{0}$ )

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)(\sqrt{x} + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1)(\sqrt{x} + 1) = (1 + 1)(\sqrt{1} + 1) = 4$$

ដូចនេះ:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = 4$

ខ.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x + 2} - 2}$  (មានរាងមិនកំណត់  $\frac{0}{0}$ )

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^3 - 2^3)(\sqrt{x + 2} + 2)}{(\sqrt{x + 2} - 2)(\sqrt{x + 2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 2^2)(\sqrt{x + 2} + 2)}{x + 2 - 2^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)(\sqrt{x + 2} + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4)(\sqrt{x + 2} + 2) = (2^2 + 2(2) + 4)(\sqrt{2 + 2} + 2) \\ &= 12(4) = 48 \end{aligned}$$

ដូចនេះ:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x + 2} - 2} = 48$

គ.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 1}$  (មានរាងមិនកំណត់  $\frac{0}{0}$ )

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 5)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 5) = 1 + 5 = 6$$

ដូចនេះ:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 1} = 6$

II. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

ក. « គេចាប់បានប៊ូលពណ៌ខៀវទាំងអស់ » តាង A : « គេចាប់បានប៊ូលពណ៌ខៀវទាំងអស់ »

តាមរូបមន្ត  $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$  ដោយ  $n(A) = C(3, 2) = \frac{3!}{(3 - 2)!2!} = \frac{3 \times 2!}{1!2!} = \frac{3}{1} = 3$

$$n(S) = C(8, 2) = \frac{8!}{6!2!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6! \times 2 \times 1} = 28$$

គេបាន  $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{28}$  ដូចនេះ:  $P(A) = \frac{3}{28}$

ខ. « គេចាប់បានប៊ូលពណ៌ខ្មៅទាំងអស់ » តាង B : « គេចាប់បានប៊ូលពណ៌ខ្មៅទាំងអស់ »

តាមរូបមន្ត  $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$  ដោយ  $n(B) = C(5, 2) = \frac{5!}{(5 - 2)!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!2 \times 1} = 10$ ;  $n(S) = 28$

គេបាន  $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$  ដូចនេះ:  $P(B) = \frac{5}{14}$

គ. « គេចាប់បានប៊ូលមួយក្នុងមួយពណ៌ » តាង C : « គេចាប់បានប៊ូលមួយក្នុងមួយពណ៌ »

តាមរូបមន្ត  $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)}$  ដោយ  $n(C) = C(3, 1) \times C(5, 1) = \frac{3!}{2!1!} \times \frac{5!}{4!1!} = \frac{3 \times 2!}{2!} \times \frac{5 \times 4!}{4!} = 3 \times 5 = 15$

$$n(S) = 28$$

គេបាន  $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{15}{28}$  ដូចនេះ:  $P(C) = \frac{15}{28}$

### III. គណនាអាំងតេក្រាល៖

ក.  $I = \int_1^3 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3}$  ដូចនេះ:  $\boxed{\int_1^3 x^2 dx = \frac{26}{3}}$

ខ.  $J = \int_1^4 (2x^2 - 4x + 4) dx = \left[ \frac{2x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 4x \right]_1^4 = \frac{2(4)^3}{3} - 2(4)^2 + 4(4) - \left( \frac{2(1)^3}{3} - 2(1)^2 + 4(1) \right)$   
 $= \frac{128}{3} - 16 - \frac{2}{3} - 2 = \frac{126}{3} - 18 = \frac{126-54}{3} = \frac{72}{3} = 24$  ដូចនេះ:  $\boxed{J = 24}$

គ.  $K = \int_1^3 \left( x^2 + \frac{1}{x} - e^x \right) dx = \left[ \frac{x^3}{3} + \ln|x| - e^x \right]_1^3 = \frac{3^3}{3} + \ln 3 - e^3 - \left( \frac{1^3}{3} + \ln 1 - e^1 \right) = \frac{27}{3} + \ln 3 - e^3 - \frac{1}{3} - 0 + e$   
 $= \frac{26}{3} + \ln 3 - e^3 + e$  ដូចនេះ:  $\boxed{K = \frac{26}{3} + \ln 3 - e^3 + e}$

### IV. ក. បង្ហាញថាសមីការ $16x^2 + 9y^2 = 144$ ជាសមីការអេលីប

$$16x^2 + 9y^2 = 144 \Leftrightarrow \frac{16x^2}{144} + \frac{9y^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-0)^2}{3^2} + \frac{(y-0)^2}{4^2} = 1 \quad \text{ជាសមីការអេលីប ដែលមានផ្ចិត}(0,0)$$

ដូចនេះ:  $\boxed{\text{សមីការ } 16x^2 + 9y^2 = 144 \text{ ជាសមីការអេលីប}}$

### ខ. ប្រវែងអ័ក្សធំ ប្រវែងអ័ក្សតូច កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ និងកូអរដោនេនៃកំណុំទាំងពីរ

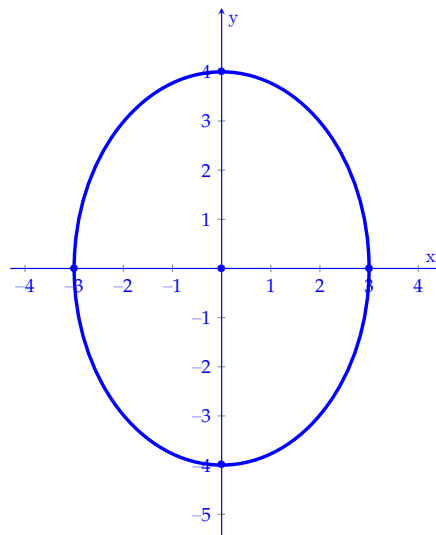
ដោយ អេលីបមានសមីការ  $\frac{(x-0)^2}{3^2} + \frac{(y-0)^2}{4^2} = 1$  គេបាន

☞  $h = 0 ; k = 0 ; \quad a = 4 ; b = 3 ; \quad c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$

#### ☞ អ័ក្សធំជាអ័ក្សឈរ

- ប្រវែងអ័ក្សធំ  $= 2a = 2(4) = 8$
- ប្រវែងអ័ក្សតូច  $= 2b = 2(3) = 6$
- កំពូល  $V_1(h, k-a); V_2(h, k+a) \Rightarrow V_1(0, -4); V_2(0, 3)$
- កំណុំ  $F_1(h, k-c); F_2(h, k+c) \Rightarrow F_1(0, -\sqrt{7}); F_2(0, \sqrt{7})$

### គ. សង់អេលីប



V. ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

ដោយ  $y = f(x) = \frac{x^2 - 3x - 3}{x - 2}$  ដោយ  $f(x)$  មានន័យលុះត្រាតែ  $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

ដូចនេះ:  $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

ខ. គណនា  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ។ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C)

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x - 3}{x - 2} = \pm\infty$  ដូចនេះ:  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x - 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty$  ដូចនេះ:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x - 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$  ដូចនេះ:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ដោយ  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm\infty$  ដូចនេះ: បន្ទាត់  $x = 2$  ជាអាស៊ីមតូតឈរ

គ. បង្ហាញថា  $f(x) = x - 1 + \frac{-5}{x - 2}$  រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត

ដោយ  $x - 1 + \frac{-5}{x - 2} = \frac{(x - 1)(x - 2) - 5}{x - 2} = \frac{x^2 - 2x - x + 2 - 5}{x - 2} = \frac{x^2 - 3x - 3}{x - 2} = f(x)$

ដូចនេះ:  $f(x) = x - 1 + \frac{-5}{x - 2}$  ដោយ  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-5}{x - 2} = 0$  ដូចនេះ: បន្ទាត់  $y = x - 1$  ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

ឃ. សិក្សាអថេរភាព សង់តារាងអថេរភាព និង សង់ក្រាប(C)

$$f'(x) = \left( \frac{x^2 - 3x - 3}{x - 2} \right)' = \frac{(x^2 - 3x - 3)'(x - 2) - (x - 2)'(x^2 - 3x - 3)}{(x - 2)^2}$$

$$= \frac{(2x - 3)(x - 2) - (x^2 - 3x - 3)}{(x - 2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 3x + 6 - x^2 + 3x + 3}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 9}{(x - 2)^2}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 9 = 0$ ;  $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4(1)(9) = -20 < 0 \Rightarrow f'(x)$  មានសញ្ញាតាមមេគុណ a

• តារាងសញ្ញា  $f'(x)$

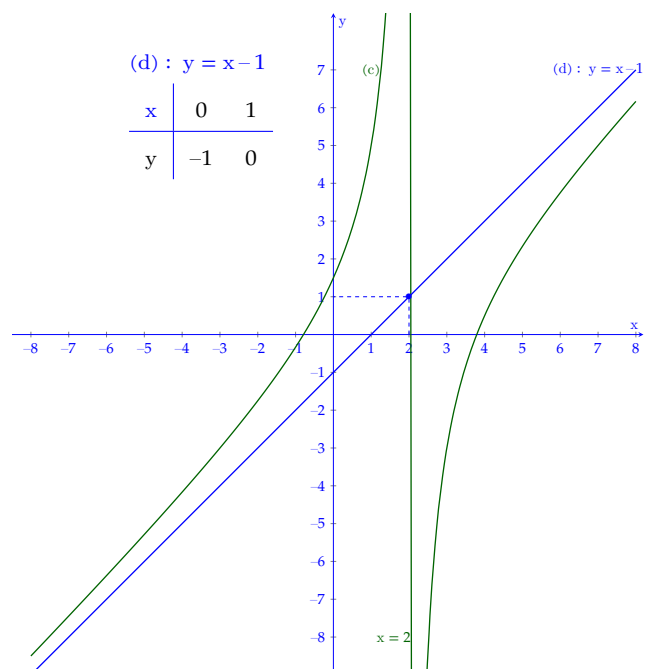
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+

• តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
f(x)	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

• សង់ក្រាប (C)

- $C \cap (y'oy)$  គឺ  $x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$
- $C \cap (x'ox)$  គឺ  $y = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$



ក្រសួងអប់រំយុវជន និងកីឡា  
វិទ្យាល័យមេតូឌីស្ទកម្ពុជា  
ប្រឡងសញ្ញាប័ត្រមធ្យមសិក្សាឌីផេរ៉ង់ស្យែល  
ឈ្មោះ និងហត្ថលេខាអនុរក្សៈ

លេខបន្ទប់៖ .....  
លេខតុ៖ .....  
មណ្ឌលប្រឡង៖ .....

សម័យបច្ចុប្បន្ន៖ ២០ សីហា ២០១៨  
នាមត្រកូលនិងនាមខ្លួន៖ .....  
ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖ .....  
ហត្ថលេខា៖ .....

លេខសម្ងាត់៖

បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើសន្លឹកប្រឡងឡើយ។ សន្លឹកប្រឡងដែលមានសញ្ញាសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្តរស្ទង់។

វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យាថ្នាក់សង្គម រយៈពេល៖ ៩០ នាទី ពិន្ទុ៖ ៧៥  
ពិន្ទុសរុប

លេខសម្ងាត់៖

- សេចក្តីណែនាំ៖ ១. បេក្ខជនត្រូវគូសខ្វែងនៅទីតាំងដែលត្រូវកាត់ចេញ។  
២. បេក្ខជនត្រូវសរសេរចម្លើយនៃសំណួរបន្តនៅលើទីតាំងទី៣ ទី៣ និងទី៤។

វិញ្ញាសាទី៨

I. (១៥ពិន្ទុ) ក្នុងប្រអប់បិទមួយមានបិទពណ៌ខៀវ 5 ដើម និងបិទពណ៌ក្រហម 6 ដើម។ គេបានដកយកបិទ 4 ដើមចេញមកក្រៅដោយចៃដន្យ។ ចូររកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

- A : «គេចាប់បានបិទពណ៌ខៀវទាំង 4 ដើម»  
B : «គេចាប់បានបិទពណ៌ខៀវ 2 ដើម និង បិទពណ៌ក្រហម 2 ដើម»  
C : «គេចាប់បានបិទក្រហមយ៉ាងតិច 1 ដើម»

II. (១០ពិន្ទុ) ចូរគណនាតម្លៃនៃលីមីតខាងក្រោម៖

ក.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$       ខ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{9 + x} - 3}$       គ.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 2x + 1}$

III. (១០ពិន្ទុ)

ក. គណនា  $I = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$  ។  
ខ. គេមាន  $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 5}{1 - x}$  ។ ចូរបង្ហាញថា  $f(x) = -x + 4 + \frac{1}{1 - x}$  ។ រួចគណនា  $K = \int_0^2 f(x) dx$  ។

IV. (១០ពិន្ទុ) គេមានសមីការអេលីប  $25x^2 + 4y^2 = 100$  ។

- ក. ចូរសរសេរសមីការស្តង់ដារនៃអេលីបនេះ រួចទាញរកកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ និងកូអរដោនេនៃកំណុំទាំងពីរ។  
ខ. ចូររកប្រវែងអ័ក្សធំ និង ប្រវែងអ័ក្សតូច រួចសង់អេលីបនេះ។

V. (៣០ពិន្ទុ) គេអោយអនុគមន៍  $f$  កំណត់ដោយ  $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$  មានក្រាបតំណាង (C) ។

- ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍  $f$  ។  
ខ. គណនា  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$  ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។  
គ. រកតម្លៃនៃចំនួនពិត  $a, b$  និង  $c$  ដែលធ្វើអោយ  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$  ។ បង្ហាញថា បន្ទាត់  $d$  ដែលមានសមីការ  $y = x - 3 + \frac{1}{x - 2}$  ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ត្រង់  $\pm\infty$  ។  
ឃ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប C។

I. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

A : «គេចាប់បានបិទពណ៌ខៀវទាំង 4 ដើម»

$$\text{តាមរូបមន្ត } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \quad \text{ដោយ } n(A) = C(5, 4) = \frac{5!}{(5-4)!4!} = \frac{5 \times 4!}{1!4!} = 5$$

$$n(S) = C(11, 4) = \frac{11!}{(11-4)!4!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 330$$

$$\text{គេបាន } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{330} = \frac{1}{66} \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{P(A) = \frac{1}{66}}$$

B : «គេចាប់បានបិទពណ៌ខៀវ 2 ដើម និង បិទពណ៌ក្រហម 2 ដើម»

$$\text{តាមរូបមន្ត } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} \quad \text{ដោយ } n(B) = C(5, 2) \times C(6, 2) = \frac{5!}{3!2!} \times \frac{6!}{4!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 1} \times \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2 \times 1} = 150$$

$$\text{គេបាន } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{150}{330} = \frac{5}{11} \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{P(B) = \frac{5}{11}}$$

C : «គេចាប់បានបិទក្រហមយ៉ាងតិច 1 ដើម»

$$\text{តាមរូបមន្ត } P(C) = 1 - P(A) \quad \text{ដោយ } P(A) = \frac{1}{66}$$

$$\Rightarrow P(C) = 1 - \frac{1}{66} = \frac{66-1}{66} = \frac{65}{66} \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{P(C) = \frac{65}{66}}$$

II. គណនាលីមីត

ក.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$  (មានរាងមិនកំណត់  $\frac{0}{0}$ )

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x+1} = \frac{1^2 + 1 + 1}{1+1} = \frac{3}{2} \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{3}{2}}$$

ខ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{9+x} - 3}$  (មានរាងមិនកំណត់  $\frac{0}{0}$ )

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - 2x)(\sqrt{9+x} + 3)}{(\sqrt{9+x} - 3)(\sqrt{9+x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-2)(\sqrt{9+x} + 3)}{9+x-9} = \lim_{x \rightarrow 0} (x-2)(\sqrt{9+x} + 3)$$

$$= (0-2)(\sqrt{9+0} + 3) = -2(6) = -12 \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{9+x} - 3} = -12}$$

គ.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 2x + 1}$  (មានរាងមិនកំណត់  $\frac{0}{0}$ )

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+5}{x-1} = \pm \infty \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 2x + 1} = \pm \infty}$$

III. ក. គណនា I

$$I = \int_1^e \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \left[x + \ln|x| - \frac{1}{x}\right]_1^e = e + \ln e - \frac{1}{e} - \left(1 + \ln 1 - \frac{1}{1}\right) = e + 1 - \frac{1}{e} - 1 - 0 + 1 = e + 1 - \frac{1}{e}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{I = e + 1 - \frac{1}{e}}$$

ខ. គេមាន  $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 5}{1 - x}$  បង្ហាញថា  $f(x) = -x + 4 + \frac{1}{1 - x}$

ដោយ  $-x + 4 + \frac{1}{1 - x} = \frac{(-x + 4)(1 - x) + 1}{1 - x} = \frac{-x + x^2 + 4 - 4x + 1}{1 - x} = \frac{x^2 - 5x + 5}{1 - x} = f(x)$

ដូចនេះ:  $f(x) = -x + 4 + \frac{1}{1 - x}$

គណនា K

$$K = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \left( -x + 4 + \frac{1}{1 - x} \right) dx = \left[ -\frac{x^2}{2} + 4x - \ln |1 - x| \right]_0^2$$

$$= -\frac{2^2}{2} + 4(2) - \ln |1 - 2| - \left( -\frac{0^2}{2} + 4(0) - \ln 1 \right) = -2 + 8 - 0 + 0 + 0 - 0 = 6 \quad \text{ដូចនេះ: } K = 6$$

#### IV. (១០ពិន្ទុ) គេមានសមីការអេលីប ។

ក. សរសេរសមីការស្តង់ដារនៃអេលីប  $25x^2 + 4y^2 = 100$

$$25x^2 + 4y^2 = 100 \Leftrightarrow \frac{25x^2}{100} + \frac{4y^2}{100} = \frac{100}{100}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-0)^2}{2^2} + \frac{(y-0)^2}{5^2} = 1 \quad \text{ជាសមីការស្តង់ដារនៃអេលីប ដែលមានផ្ចិត(0,0)}$$

ទាញរកកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ និងកូអរដោនេនៃកំណុំទាំងពីរ

ដោយ សមីការស្តង់ដារនៃអេលីបគឺ  $\frac{(x-0)^2}{2^2} + \frac{(y-0)^2}{5^2} = 1$  គេបាន

☞ អ័ក្សធំជាអ័ក្សឈរ

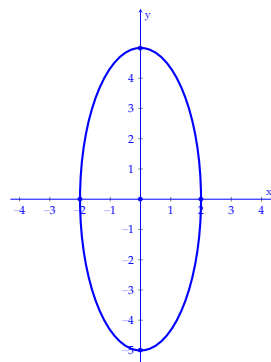
☞  $h = 0, k = 0, a = 5, b = 2, c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 4 = 21 \Rightarrow c = \sqrt{21}$

• កំពូល  $V_1(h, k - a); V_2(h, k + a) \Rightarrow V_1(0, -5), V_2(0, 5)$

• កំណុំ  $F_1(h, k - c); F_2(h, k + c) \Rightarrow F_1(0, -\sqrt{21}); F_2(0, \sqrt{21})$

#### ខ. រកប្រវែងអ័ក្សធំ ប្រវែងអ័ក្សតូច និង សង់អេលីប

- ប្រវែងអ័ក្សធំ  $= 2a = 2(5) = 10$
- ប្រវែងអ័ក្សតូច  $= 2b = 2(2) = 4$
- សង់អេលីប



#### V. ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

ដោយ  $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$  មានន័យលុះត្រាតែ  $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

ដូចនេះ: ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f គឺ  $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

๒. • ศึกษา  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x); \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} = \pm \infty \quad \text{ដូច្នេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm \infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \pm\infty \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty}$$

- ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C

ដោយ  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm\infty$  ដូចនេះ បន្ទាត់  $x = 2$  ជាសមីការអាស៊ីមតូតឈរ

- គ. • រកតម្លៃនៃចំនួនពិត  $a, b$  និង  $c$  ដែលធ្វើអោយ  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$

$$\begin{aligned} f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2} &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 5x + 7}{x-2} = ax + b + \frac{c}{x-2} \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-3)(x-2) + 1}{x-2} = ax + b + \frac{c}{x-2} \\ &\Leftrightarrow x - 3 + \frac{1}{x-2} = ax + b + \frac{c}{x-2} \end{aligned}$$

**ដូច្នេះមេគុណគេបាន**  $a = 1, b = -3, c = 1$

ដូចនេះ:  $a = 1, b = -3, c = 1$

- បង្ហាញថា បន្ទាត់  $d$  ដែលមានសមីការ  $y = x - 3$  ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប  $C$  ត្រង់  $\pm\infty$

យើងមាន  $y = f(x) = x - 3 + \frac{1}{x-2}$  ដោយ  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x-2} = 0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ d:  $y = x - 3$  ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ត្រង់  $\pm\infty$

**ឃ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប C**

- ដើរវែង

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} \right)' = \frac{(x^2 - 5x + 7)'(x - 2) - (x - 2)'(x^2 - 5x + 7)}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{(2x - 5)(x - 2) - (x^2 - 5x + 7)}{(x - 2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 5x + 10 - x^2 + 5x - 7}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \text{មានរូបស } x_1 = 1; x_2 = 3$$

- តារាងសញ្ញាដេរីវេ  $f'(x)$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	-	0	+

បរមាធុប

- ត្រង់  $x = 1$ ;  $f'(x) = 0$  ប្តូរសញ្ញាពី + ទៅ - គេបាន  $f$  មានអតិបរមាជៀបមួយ គឺ  $f(1) = \frac{1^2 - 5(1) + 7}{1 - 2} = -3$
- ត្រង់  $x = 3$ ;  $f'(x) = 0$  ប្តូរសញ្ញាពី - ទៅ + គេបាន  $f$  មានអប្បបរមាជៀបមួយ គឺ  $f(3) = \frac{3^2 - 5(3) + 7}{3 - 2} = 1$

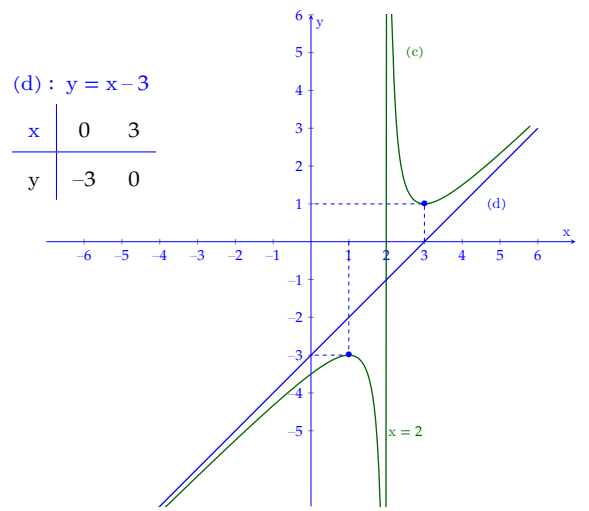
- តារាងអថេរភាពនៃ  $f$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$			-3		$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$				1	



• ក្រាប C

$$(C) \cap (y' = 0) \text{ គឺ } x = 0 \Rightarrow y = -\frac{7}{2}$$





I. គណនាលីមីត៖

ក.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$  (មានរាងមិនកំណត់  $\frac{0}{0}$ )

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 2+2 = 4 \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4}$$

ខ.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 5x}{x^2 - 3x + 1}$  (មានរាងមិនកំណត់  $\frac{\infty}{\infty}$ )

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 5x}{x^2 - 3x + 1} = +\infty}$$

គ.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2 + 5)$  (មានរាងមិនកំណត់  $+\infty - \infty$ )

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}\right) = +\infty \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2 + 5) = +\infty}$$

II. ក. រកប្រូបាបដែល «សិស្សយកបានខ្មៅដែលពណ៌ខៀវ 2 ដើម និង ខ្មៅដែលពណ៌ក្រហម 1 ដើម»

តាង A : «សិស្សយកបានខ្មៅដែលពណ៌ខៀវ 2 ដើម និង ខ្មៅដែលពណ៌ក្រហម 1 ដើម»

តាមរូបមន្ត  $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$  ដោយ  $n(A) = C(5,2) \times C(4,1) = \frac{5!}{3!2!} \times \frac{4!}{3!1!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!2 \times 1} \times \frac{4 \times 3!}{3!} = 40$

$$n(S) = C(9,3) = \frac{9!}{6!3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!3 \times 2 \times 1} = 84$$

គេបាន  $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{40}{84} = \frac{10}{21}$  ដូចនេះ:  $\boxed{P(A) = \frac{10}{21}}$

ខ. រកប្រូបាបដែល «សិស្សយកបានខ្មៅដែលពណ៌ដូចគ្នា» តាង B : «សិស្សយកបានខ្មៅដែលពណ៌ដូចគ្នា»

តាមរូបមន្ត  $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$  ដោយ  $n(B) = C(5,3) + C(4,3) = \frac{5!}{2!3!} + \frac{4!}{1!3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \times 3!} + \frac{4 \times 3!}{3!} = 14$

$$n(S) = 84$$

គេបាន  $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{14}{84} = \frac{1}{6}$  ដូចនេះ:  $\boxed{P(B) = \frac{1}{6}}$

III. គណនារាំងតេក្រាល៖

$$I = \int_1^3 (x - 2 + 3x^2) dx = \left[ \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{3x^3}{3} \right]_1^3 = \frac{3^2}{2} - 2(3) + 3^3 - \left( \frac{1^2}{2} - 2(1) + 1^3 \right)$$

$$= \frac{9}{2} - 6 + 27 - \frac{1}{2} + 2 - 1 = 26 \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{I = 26}$$

$$K = \int_0^1 (-4x^2 + 5x + 7) dx = \left[ -\frac{4x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 7x \right]_0^1 = -\frac{4(1)^3}{3} + \frac{5(1)^2}{2} + 7(1) - \left( -\frac{4(0)^3}{3} + \frac{5(0)^2}{2} + 7(0) \right) = \frac{49}{6}$$

ដូចនេះ:  $\boxed{K = \frac{49}{6}}$

IV. ក. រកកូអរដោនេផ្ចិត កំណុំ និងកំពូល នៃអេលីប E

ដោយ អេលីប E មានសមីការ  $25x^2 + 12y^2 = 300$  គេបាន

$$25x^2 + 12y^2 = 300 \Leftrightarrow \frac{25x^2}{300} + \frac{12y^2}{300} = \frac{300}{300}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-0)^2}{(\sqrt{12})^2} + \frac{(y-0)^2}{5^2} = 1$$

គេបាន

អ័ក្សធំជាអ័ក្សឈរ

$$h = 0, k = 0; \quad a = 5; b = \sqrt{12}; \quad c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 12 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13}$$

$$\text{ផ្ចិត}(h, k) \Rightarrow \text{ផ្ចិត}(0, 0)$$

$$\text{កំណុំ } F_1(h, k - c); F_2(h, k + c) \Rightarrow F_1(0, -\sqrt{13}); F_2(0, \sqrt{13})$$

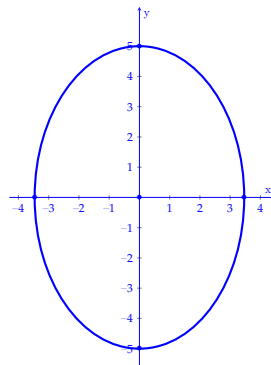
$$\text{កំពូល } V_1(h, k - a); V_2(h, k + a) \Rightarrow V_1(0, -5); V_2(0, 5)$$

២. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងអេលីប៊ីប  $E$  និងអ័ក្សទាំងពីរនៃតម្រុយកូអរដោនេ

$$E \cap (x'ox) \text{ ពេល } y = 0 \text{ គេបាន } 25x^2 + 12(0)^2 = 300 \Rightarrow x^2 = \frac{300}{25} \Rightarrow x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$$

$$E \cap (y'oy) \text{ ពេល } x = 0 \text{ គេបាន } 25(0)^2 + 12y^2 = 300 \Rightarrow y^2 = \frac{300}{12} \Rightarrow y = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

សង់អេលីប៊ីប  $E$



V. ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍  $f$

$$\text{ដោយ } f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}; f(x) \text{ មានន័យលុះត្រាតែ } x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$$

ដូចនេះ: ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍  $f$  គឺ  $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

២. គណនា  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x), \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x + 4}{x + 1} = \pm\infty \quad \text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x + 4}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \pm\infty \quad \text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

គ. សរសេរសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតទ្រូតនៃក្រាប  $C$

$$\bullet \text{ ដោយ } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \pm\infty \quad \text{ដូចនេះ: បន្ទាត់ } x = -1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}$$

$$\bullet f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1} = x + \frac{4}{x + 1} \quad \text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x + 1} = 0 \quad \text{ដូចនេះ: បន្ទាត់ } y = x \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រូត}$$

ឃ. សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ  $f'(x)$  នៃអនុគមន៍  $f$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{x^2 + x + 4}{x + 1} \right)' = \frac{(x^2 + x + 4)'(x + 1) - (x + 1)'(x^2 + x + 4)}{(x + 1)^2} = \frac{(2x + 1)(x + 1) - (x^2 + x + 4)}{(x + 1)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 2x + x + 1 - x^2 - x - 4}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \quad \text{មានឫស } x_1 = 1; x_2 = -3$$

## តារាងសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	-	0	+

## បរមាជ្រៀប

- ត្រង់  $x = -3$ ;  $f'(x) = 0$  ប្តូរសញ្ញាពី + ទៅ - គេបាន  $f$  មានអតិបរមាជ្រៀបមួយ គឺ  $f(-3) = \frac{(-3)^2 - 3 + 4}{-3 + 1} = -5$
- ត្រង់  $x = 1$ ;  $f'(x) = 0$  ប្តូរសញ្ញាពី - ទៅ + គេបាន  $f$  មានអប្បបរមាជ្រៀបមួយ គឺ  $f(1) = \frac{1^2 + 1 + 4}{1 + 1} = 3$

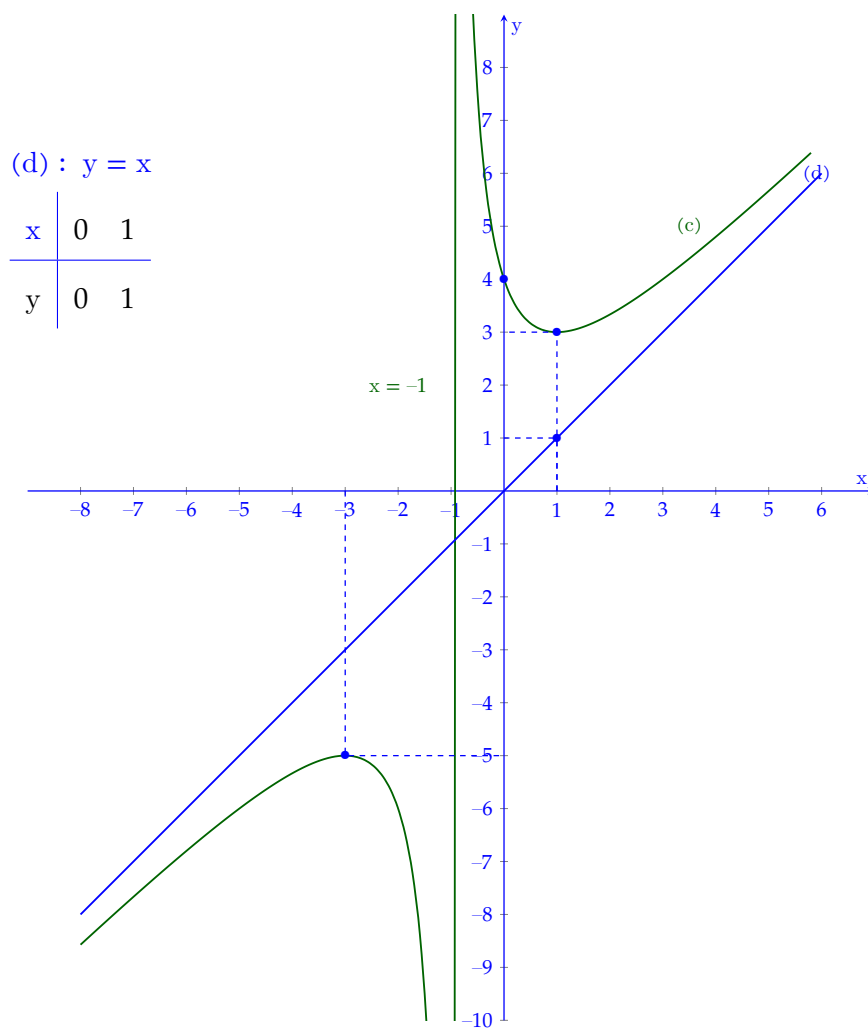
## ង. សង់តារាងអថេរភាព អាស៊ីមតូត និង ក្រាប C នៃអនុគមន៍ $f$

- តារាងអថេរភាពនៃ  $f$

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	<div><math>\nearrow</math> -5 <math>\searrow</math> <math>-\infty</math></div>		<div><math>+\infty</math> <math>\searrow</math> 3 <math>\nearrow</math> <math>+\infty</math></div>		

- ក្រាប C

- $(C) \cap (y'_{oy})$  ពេល  $x = 0$  គេបាន  $y = \frac{0^2 + 0 + 4}{0 + 1} = 4$



ក្រសួងអប់រំយុវជន និងកីឡា  
វិទ្យាល័យមេតូឌីស្ទកម្ពុជា  
ប្រឡងសញ្ញាប័ត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
ឈ្មោះ និងហត្ថលេខាអនុវត្ត៖

លេខបន្ទប់៖ .....  
លេខគុះ៖ .....  
មណ្ឌលប្រឡង៖ .....

សម័យបច្ចុប្បន្ន៖ ២០ សីហា ២០១៨  
នាមត្រកូលនិងនាមខ្លួន៖ .....  
ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖ .....  
ហត្ថលេខា៖ .....

លេខសម្ងាត់៖

បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើសន្លឹកប្រឡងឡើយ។ សន្លឹកប្រឡងដែលមានសញ្ញាសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្តរស្ស។



វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យាថ្នាក់សង្គម រយៈពេល៖ ៩០ នាទី ពិន្ទុ៖ ៧៥

លេខសម្ងាត់៖



សេចក្តីណែនាំ៖ ១. បេក្ខជនត្រូវគូសខ្វែងនៅទីពឹងទី២ ផ្នែកខាងលើដែលត្រូវកាត់ចេញ។  
២. បេក្ខជនត្រូវសរសេរចម្លើយនៃសំណួរបន្តនៅលើទីពឹងទី២ ទី៣ និងទី៤។

វិញ្ញាសាទី១០

I. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងចតុមួយមានសៀវភៅគណិតវិទ្យា ៧ ក្បាល និងសៀវភៅភាសាខ្មែរ ៥ ក្បាល។ សិស្សម្នាក់បានយកសៀវភៅ ៤ ក្បាល ព្រមគ្នាចេញពីចតុដោយចៃដន្យ។

- ក. រកប្រូបាបដែល «សិស្សយកបានសៀវភៅគណិតវិទ្យាទាំង ៤ ក្បាល» ។
- ខ. រកប្រូបាបដែល «សិស្សយកបានសៀវភៅភាសាខ្មែរ ១ ក្បាលយ៉ាងតិច» ។

II. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖

ក.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$       ខ.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{2+x}}{x^2 - 4}$       គ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{3} - \sqrt{x+3}}$

III. (១០ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក.  $\int_0^2 \left( \frac{1}{1-x} - 3x + 1 \right) dx$       ខ.  $\int_1^2 \left( \frac{2}{x^2} + 3 - x \right) dx$       គ.  $\int_1^3 \left( \frac{x^2 - 3x + 2}{2-x} \right) dx$

IV. (១៥ពិន្ទុ) រកសមីការស្តង់ដារនៃអេលីប្រូបដែលមានកំណុំមួយនៅត្រង់ចំណុច (0,2) និងកំពូលពីរនៅត្រង់ចំណុច (0,-3) និង (0,3)។ រួចរកប្រវែងអ័ក្សតូច ប្រវែងអ័ក្សធំ និងសង់អេលីប។

V. (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ  $y = f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$  មានក្រាបតំណាង C ។

- ១. ចូរកំណត់ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។
- ២. គណនា  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$  ។ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ។
- ៣. បង្ហាញថា  $f(x) = x + 1 - \frac{3}{x-1}$  ។ រួចបង្ហាញថាបន្ទាត់ d ដែលមានសមីការ  $y = x + 1$  ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ខាង  $\pm\infty$  ។
- ៤. គណនាដេរីវេ  $f'(x)$  និងសិក្សាសញ្ញាដេរីវេ  $f'(x)$  ។
- ៥. ក. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f។  
ខ. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប C និងបន្ទាត់ d ។  
គ. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ d ក្នុងតម្រុយតែមួយ។

I. ក. រកប្រូបាបដែល «សិស្សយកបានសៀវភៅគណិតវិទ្យាទាំង 4 ក្បាល»

តាង A : «សិស្សយកបានសៀវភៅគណិតវិទ្យាទាំង 4 ក្បាល»

$$\text{តាមរូបមន្ត } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \quad \text{ដោយ } n(A) = C(7, 4) = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3 \times 2 \times 1 \times 4!} = 35$$

$$n(S) = C(12, 4) = \frac{12!}{8!4!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 495$$

$$\text{គេបាន } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{35}{495} = \frac{7}{99} \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{P(A) = \frac{7}{99}}$$

ខ. រកប្រូបាបដែល «សិស្សយកបានសៀវភៅភាសាខ្មែរ 1 ក្បាលយ៉ាងតិច»

តាង B : «សិស្សយកបានសៀវភៅភាសាខ្មែរ 1 ក្បាលយ៉ាងតិច»

$$\text{តាមរូបមន្ត } P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{7}{99} = \frac{99-7}{99} = \frac{92}{99} \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{P(B) = \frac{92}{99}}$$

II. គណនាលីមីត៖

ក.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$  (មានរាងមិនកំណត់  $\frac{0}{0}$ )

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2} = \frac{1+1}{1-2} = -2 \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = -2}$$

ខ.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{2+x}}{x^2 - 4}$  (មានរាងមិនកំណត់  $\frac{0}{0}$ )

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2 - \sqrt{2+x})(2 + \sqrt{2+x})}{(x-2)(x+2)(2 + \sqrt{2+x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - (2+x)}{(x-2)(x+2)(2 + \sqrt{2+x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)(2 + \sqrt{2+x})}$$

$$= \frac{-1}{(2+2)(2 + \sqrt{2+2})} = -\frac{1}{16} \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{2+x}}{x^2 - 4} = -\frac{1}{16}}$$

គ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{3} - \sqrt{x+3}}$  (មានរាងមិនកំណត់  $\frac{0}{0}$ )

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{3} + \sqrt{x+3})}{(\sqrt{3} - \sqrt{x+3})(\sqrt{3} + \sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{3} + \sqrt{x+3})}{3 - (x+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{3} + \sqrt{x+3})}{-x} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{0+3}}{-1}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{3} - \sqrt{x+3}} = -2\sqrt{3}}$$

III. គណនាអាំងតេក្រាល៖

ក.  $\int_0^2 \left( \frac{1}{1-x} - 3x + 1 \right) dx = \left[ -\ln|1-x| - \frac{3x^2}{2} + x \right]_0^2 = -\ln|1-2| - \frac{3(2)^2}{2} + 2 - \left( -\ln|1-0| - \frac{3(0)^2}{2} + 0 \right)$   
 $= -\ln 1 - 6 + 2 - 0 = -4$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\int_0^2 \left( \frac{1}{1-x} - 3x + 1 \right) dx = -4}$$

ខ.  $\int_1^2 \left( \frac{2}{x^2} + 3 - x \right) dx = \left[ -\frac{2}{x} + 3x - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = -\frac{2}{2} + 3(2) - \frac{2^2}{2} - \left( -\frac{2}{1} + 3(1) - \frac{1^2}{2} \right) = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\int_1^2 \left( \frac{2}{x^2} + 3 - x \right) dx = \frac{5}{2}}$$

$$\text{គ. } \int_1^3 \left( \frac{x^2 - 3x + 2}{2 - x} \right) dx = \int_1^3 \left( \frac{(x-1)(x-2)}{-(x-2)} \right) dx = \int_1^3 (-x + 2) dx = \left[ -\frac{x^2}{2} + 2x \right]_1^3 = -\frac{3^2}{2} + 2(3) - \left( -\frac{1^2}{2} + 2(1) \right) \\ = -\frac{9}{2} + 6 + \frac{1}{2} - 2 = -4 + 4 = 0$$

ដូចនេះ:  $\int_1^3 \left( \frac{x^2 - 3x + 2}{2 - x} \right) dx = 0$

IV. • រកសមីការស្តង់ដារនៃអេលីបដែលមានកំណុំ  $(0, 2)$  និងកំពូល

ពីរ  $(0, -3)$  និង  $(0, 3)$

ដោយ អាប៉ូស៊ីសនៃកំពូល និងកំណុំថេរ គេបាន អ័ក្សធំនៃអេលីបជាអ័ក្សឈរ

• សមីការស្តង់ដារនៃអេលីបគឺ  $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

• កំពូល  $(0, -3); (0, 3)$  គឺ  $V_1(h, k-a); V_2(h, k+a)$

គេបាន  $h = 0; k-a = -3; k+a = 3$

$$\begin{cases} k-a = -3 \\ k+a = 3 \end{cases}$$

$2k = 0 \Rightarrow k = 0; \Rightarrow a = 3$

• កំណុំ  $(0, 2)$  គឺ  $F(h, k+c) \Rightarrow h = 0; k+c = 2 \Rightarrow c = 2$

•  $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 3^2 - 2^2 = 5$

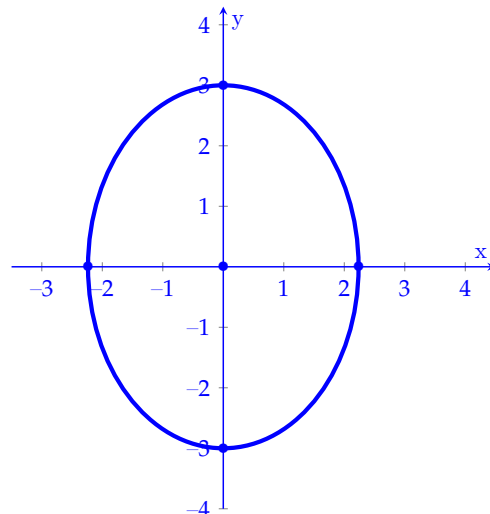
ដូចនេះ: សមីការអេលីបគឺ  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$

• រួចរកប្រវែងអ័ក្សតូច ប្រវែងអ័ក្សធំ និងសង់អេលីប

• ប្រវែងអ័ក្សតូច  $= 2b = 2(\sqrt{5})$

• ប្រវែងអ័ក្សធំ  $= 2a = 2(3) = 6$

• សង់អេលីប



V. 9. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍  $f$

ដោយ  $y = f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$ ;  $f(x)$  មានន័យលុះត្រាតែ  $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

ដូចនេះ: ដែនកំណត់នៃ  $f$  គឺ  $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

២. គណនា  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x); \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$  រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4}{x - 1} = \pm\infty$

ដូចនេះ:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \pm\infty$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \pm\infty$

ដូចនេះ:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

ដោយ  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \pm\infty$  ដូចនេះ: បន្ទាត់  $x = 1$  ជាអាស៊ីមតូតឈរ

៣. បង្ហាញថា  $f(x) = x + 1 - \frac{3}{x-1}$

ដោយ  $x + 1 - \frac{3}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1) - 3}{x-1} = \frac{x^2 - 1 - 3}{x-1} = \frac{x^2 - 4}{x-1} = f(x)$  ដូចនេះ:  $f(x) = x + 1 - \frac{3}{x-1}$

បង្ហាញថាបន្ទាត់  $d$  ដែលមានសមីការ  $y = x + 1$  ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប  $C$  ខាង  $\pm\infty$

ដោយ  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3}{x-1} = 0$  ដូចនេះ: បន្ទាត់  $y = x + 1$  ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត



៤. • គណនាដេរីវេ  $f'(x)$  និងសិក្សាសញ្ញាដេរីវេ  $f'(x)$

$$f'(x) = \left( \frac{x^2-4}{x-1} \right)' = \frac{(x^2-4)'(x-1) - (x-1)'(x^2-4)}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1) - (x^2-4)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+4}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2-2x+4=0 \quad ; \quad \Delta = b^2-4ac = (-2)^2-4(1)4 = -12 < 0; \quad f'(x) \text{ យកសញ្ញាតាមមេគុណ}$$

• តារាងសញ្ញា  $f'(x)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+

•  $f'(x) > 0$ ; ពេល  $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

៥. ក. សង់តារាងអថេរភាពនៃ  $f$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$		$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

ខ. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប C និងបន្ទាត់ d

(C) :  $y = x + 1 - \frac{3}{x-1}$ ; (d) :  $y = x + 1$  គេបាន  $y_c - y_d = x + 1 - \frac{3}{x-1} - (x + 1) = -\frac{3}{x-1}$

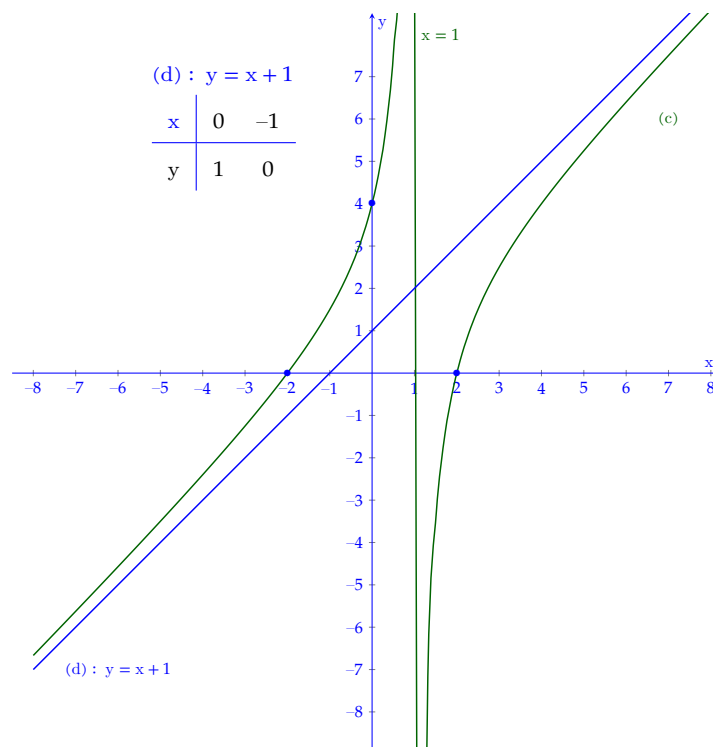
•  $y_c - y_d > 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$  ដូចនេះ: C ស្ថិតនៅលើ d ពេល  $x < 1$

•  $y_c - y_d < 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{x-1} < 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$  ដូចនេះ: C ស្ថិតនៅក្រោម d ពេល  $x > 1$

គ. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ d ក្នុងតម្រុយតែមួយ

•  $(C) \cap (y' \circ y)$  គឺ  $x = 0$ ;  $\Rightarrow y = \frac{0^2-4}{0-1} = 4$

•  $(C) \cap (x' \circ x)$  គឺ  $y = 0$ ;  $\Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x = \pm 2$



ក្រសួងអប់រំយុវជន និងកីឡា  
វិទ្យាល័យមេតូឌីស្ទកម្ពុជា  
ប្រឡងសញ្ញាប័ត្រមធ្យមសិក្សាឌីផេរ៉ង់ស្យែល  
ឈ្មោះ និងហត្ថលេខាអនុវត្ត៖

លេខបន្ទប់៖ .....  
លេខតុ៖ .....  
មណ្ឌលប្រឡង៖ .....

សម័យបច្ចុប្បន្ន៖ ២០ សីហា ២០១៨  
ឆ្នាំរតន្ត្រីក្សត្រិយ៍សាមខ្លួន៖ .....  
ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖ .....  
ហត្ថលេខា៖ .....

លេខសម្ងាត់៖

បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើសន្លឹកប្រឡងឡើយ។ សន្លឹកប្រឡងដែលមានសញ្ញាសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្តសូន្យ។



វិញ្ញាសា៖ ធាតុវិទ្យាថ្នាក់សង្គម រយៈពេល៖ ៩០ នាទី ពិន្ទុ៖ ៧៥

លេខសម្ងាត់៖

ពិន្ទុសរុប

- សេចក្តីណែនាំ៖ ១. បេក្ខជនត្រូវគូសខ្សែនៅទីពឹងទី២ ផ្នែកខាងលើដែលត្រូវកាត់ចេញ។  
២. បេក្ខជនត្រូវសរសេរចម្លើយនៃសំណួរបន្តនៅលើទីពឹងទី២ ទី៣ និងទី៤។

វិញ្ញាសាទី១១ (ថ្នាក់សង្គម)

សំណួរ

សំណួរ

- I. (១៥ពិន្ទុ) អេលីប E មួយមានសមីការទូទៅ៖  $9x^2 + 4y^2 + 18x - 24y + 9 = 0$  ។
- ក. រកសមីការស្តង់ដារនៃអេលីប E ។
  - ខ. រកប្រវែងអ័ក្សធំ និង អ័ក្សតូច ហើយរកកូអរដោនេនៃ ផ្ចិត កំពូល និង កំណុំនៃអេលីប E ។
- II. (៣០ពិន្ទុ) អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ  $x \neq -2, x \neq 2$  ដោយ  $y = f(x) = \frac{x^2}{4-x^2}$  និងមានក្រាប C ។
- ក. គណនា  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x), \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  និង  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$  ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ។
  - ខ. សិក្សាសញ្ញានៃដេរីវេ  $f'(x)$  និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។
  - គ. គណនា  $f(-3)$  និង  $f(3)$  ហើយក្រាប C នៃអនុគមន៍ f ។

ស៊ី សំអុន

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ស៊ី សំអុន

ក្រសួងអប់រំយុវជន និងកីឡា  
វិទ្យាល័យមេតូឌីស្ទកម្ពុជា  
ប្រឡងសញ្ញាប័ត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ  
ឈ្មោះ: និងហត្ថលេខាអនុរក្សៈ

លេខបន្ទប់ៈ .....  
លេខតុៈ .....  
មណ្ឌលប្រឡងៈ .....

សម័យបច្ចុប្បន្នៈ ២០ សីហា ២០១៨  
ឆ្នាំរត្នកូលនិងឆ្នាំមង្គលៈ .....  
ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើតៈ .....  
ហត្ថលេខាៈ .....

លេខសម្ងាត់ៈ

បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើសន្លឹកប្រឡងឡើយ។ សន្លឹកប្រឡងដែលមានសញ្ញាសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្តសូន្យ។



វិញ្ញាសាៈ គណិតវិទ្យាថ្នាក់សង្គម រយៈពេលៈ ៩០ នាទី ពិន្ទុៈ ៧៥

លេខសម្ងាត់ៈ



សេចក្តីណែនាំៈ ១. បេក្ខជនត្រូវគូសខ្សែនៅទីពឹងទី២ ផ្នែកខាងលើដែលត្រូវកាត់ចេញ។  
២. បេក្ខជនត្រូវសរសេរចម្លើយនៃសំណួរបន្តនៅលើទីពឹងទី២ ទី៣ និងទី៤។

**វិញ្ញាសាទី១២ ( ថ្នាក់សង្គម )**

**សំណួរ**

I. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីតៈ

ក.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{x^2 + 2 - 3x}$

II. (១០ពិន្ទុ) គ្រូបង្កកថ្នាក់បានជ្រើសរើសប្រធានក្រុមវេនសំអាតថ្នាក់ថ្ងៃចំនួន ៦ នាក់នៃថ្នាក់រៀនមួយដែលមាន សិស្សប្រុសចំនួន ២០ នាក់ និងសិស្សស្រីចំនួន ១៥នាក់ ។ គណនាប្រូបាបខាងក្រោមៈ

- A «ប្រធានក្រុមសុទ្ធតែប្រុស»
- B «ប្រធានក្រុមសុទ្ធតែស្រី»
- C «ប្រធានក្រុមមានប្រុស៣ នាក់ និងស្រី៣ នាក់» ។

III. (១០ពិន្ទុ) គេឲ្យ  $A(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2}$  ចំពោះគ្រប់  $x \neq 1$  ។

ក. រកចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ  $A(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2}$  ចំពោះគ្រប់  $x \neq 1$  ។

ខ. គណនា  $I(x) = \int A(x)dx$  ។

IV. (៣០ពិន្ទុ) គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ  $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 5}{x + 2}$  ហើយមានក្រាប C ។

- ក. រកដែនកំណត់ និងសិក្សាសញ្ញាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f ។
- ខ. សរសេរសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ។
- គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់ក្រាប C ។

ឃ. ដោះស្រាយវិសមីការ  $\frac{2x^2 + 3x - 5}{x + 2} < 2x - 1$  ដោយប្រើក្រាប C ។

ស៊ី សំអុន

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ស៊ី សំអុន

ក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរមេ  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  : (ឯកតា 2cm) ។ គេមានអនុគមន៍  $f$  និង  $g$  កំណត់លើសំណុំចំនួនពិត  $\mathbb{R}$  ដោយ៖  
 $f(x) = x - e^x$  និង  $g(x) = (1-x)e^x$  និង គេតាង  $(c)$  និង  $(c')$  ក្រាបនៃអនុគមន៍  $f$  និង  $g$  នេះ។

ក. a. កំណត់លីមីតនៃអនុគមន៍  $f$  និង  $g$  ត្រង់  $+\infty$  និង  $-\infty$  ។

b. បង្ហាញថាបន្ទាត់  $(\Delta)$  ដែលមានសមីការ  $y = x$  ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប  $(c)$  ។

c. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍  $f$  និង អនុគមន៍  $g$  លើ  $\mathbb{R}$  ។

d. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍  $f$  និង អនុគមន៍  $g$  ។

ខ. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត  $x$  គេតាង  $h(x) = f(x) - g(x)$  ។

a. បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិត  $x$ ,  $h'(x) = 1 - g(x)$  ។

b. ទាញយកទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍  $h$  លើសំណុំចំនួនពិត។

c. ស្រាយបញ្ជាក់ថាក្រាប  $(c)$  និង  $(c')$  មានចំណុចប្រសព្វតែមួយគត់ដែលមានអាប៉ូស៊ីសរបស់វាតាងដោយ  $\alpha$  នៅលើចន្លោះ  $[1, 2]$  ។

d. សិក្សាទៅតាមតម្លៃនៃ  $\alpha$  ទីតាំងធៀបគ្នារវាង  $(c)$  និង  $(c')$  ។

គ. សង់បន្ទាត់  $(\Delta)$  និងក្រាប  $(c)$  និង  $(c')$  ។

ឃ. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត  $x$  គេតាង  $\theta(x) = \int_0^x h(t)dt$  ។

a. ប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកគណនា  $\theta(x)$  ។

b. ទាញយកជារាងកន្សោមសនិទាននៃ  $\alpha$  ផ្ទៃក្រឡាជា  $\text{cm}^2$  នៃដែនដែលអមដោយក្រាប  $(c)$  និង  $(c')$ , អ័ក្សអរដោនេ និង បន្ទាត់ដែលមានសមីការ  $x = \alpha$  ។

ស៊ីស៊ុន