Handout Series

# វិសមភាព

## ការេជាចំនួនវិជ្ជមាន

## ( Square is Positive ) I

រៀបរៀងដោយ ជា ពិសិដ្ឋ

# ការេជាចំនួនវិជ្ជមាន

(Square is Positive) I

## ទ្រឹស្តីបទ

ចំពោះ $x\in \mathrm{IR}$ គេបាន $x^2\geq 0$ ។

## សម្រាយ

បើ $x>0$ គេបាន $x\cdot x>0\Rightarrow x^2>0$

បើ $x=0$ គេបាន $x^2=0$

បើ $x<0$ គេបាន $x\cdot x>0\Rightarrow x^2>0$

ដូចនេះ $x^2\geq 0$ សមភាពកើតឡើងពេល $x=0$

## លំហាត់ ១

គេឲ្យ $a\,,b$ ជាចំនួនពិតបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b=2$ ។ បង្ហាញថា $a^4+b^4\geq 2$ ។

## សម្រាយ

យើងមាន $2\left(a^4+b^4\right)-\left(a^2+b^2\right)^2=a^4-2a^2b^2+b^4=\left(a^2-b^2\right)^2\geq 0$

$$\Rightarrow a^4+b^4\geq \frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{2}$$

ដូចគ្នាដែរ យើងបាន $a^2+b^2\geq \dfrac{(a+b)^2}{2}=\dfrac{2^2}{2}=2$ ព្រោះ $a+b=2$

ដូចនេះ $a^4+b^4\geq \dfrac{2^2}{2}=2$

## លំហាត់ ២

គេឲ្យ $a\,,\ b\,,\ c>0$ ។ បង្ហាញថា $a^3+b^3+c^3+ab^2+bc^2+ca^2$

$$\geq 2\left(a^2b+b^2c+c^2a\right) \quad ។$$

## សម្រាយ

ពិនិត្យ $a^3+ab^2-2a^2b=a\left(a^2-2ab+b^2\right)^2=a(a-b)^2\geq 0$

$$\Rightarrow a^3+ab^2\geq 2a^2b \qquad (1)$$

ស្រាយដូចគ្នា យើងបាន $b^3+bc^2\geq 2b^2c \qquad (2)$

$$c^3+ca^2\geq 2c^2a \qquad (3)$$

បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន $a^3+b^3+c^3+ab^2+bc^2+ca^2$

$$\geq 2\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$$

ដូចនេះ $a^3+b^3+c^3+ab^2+bc^2+ca^2\geq 2\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$

**លំហាត់ ៣**

គេឲ្យ $a$ , $b$ , $x$ និង $y$ ជាចំនួនពិត ។ បង្ហាញថា

$\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)\geq (ax+by)^2$ ។

**សម្រាយ**

យើងមាន $\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)-(ax+by)^2$

$$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-\left(a^2x^2+2abxy+b^2y^2\right)$$

$$=a^2y^2-2aybx+b^2x^2=(ay-bx)^2\geq 0$$

ដូចនេះ $\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)\geq (ax+by)^2$

**សម្គាល់**

វិសមភាពទូទៅនៃវិសមភាពខាងលើ គឺ

$\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right)\geq \left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right)^2$ ។

វិសមភាពនេះហៅថា វិសមភាព Cauchy-Schwarz ។

**លំហាត់ ៤**

បង្ហាញថា $a^2+b^2+c^2+3\geq 2(a+b+c)$ ចំពោះ $a$ , $b$ , $c\in \mathrm{IR}$ ។

**សម្រាយ**

យើងមាន $a^2+b^2+c^2+3-2(a+b+c)$

$$=\left(a^2-2a+1\right)+\left(b^2-2b+1\right)+\left(c^2-2c+1\right)$$

$$=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\geq 0$$

ដូចនេះ $a^2+b^2+c^2+3\geq 2(a+b+c)$

**លំហាត់ ៥**

ចំពោះគ្រប់ $x$ ជាចំនួនពិត បង្ហាញថា $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10>0$ ។

**សម្រាយ**

យើងមាន $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10$

$$=(x^2-7x+6)(x^2-7x+12)+10$$

$$=(x^2-7x+6)^2+6(x^2-7x+6)+10$$

$$=(x^2-7x+9)^2+1>0$$

ដូចនេះ $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10>0$