



១ លីមីតនៃអនុគមន៍

រំលឹកតម្លៃដាច់ខាត

- $|x| = x$ បើ $x \geq 0$, $-x$ បើ $x < 0$
តាំង a ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន៖
- $|x| < a$ សមមូល $-a < x < a$
- បើ $|x| > a$ នោះ $x > a$ ឬ $x < -a$
- គ្មានចំនួនពិត x ណាដែល $|x| < -a$
- គ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $|x| > -a$

ហាមធ្វើអាជីវកម្មក្រោមរូបភាពគ្រប់រូបភាពលើឯកសារនេះ (ឯកសារផ្ទាល់ខ្លួនប៉ុណ្ណោះ)។

១.១ លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់ចំនួនកំណត់

និយមន័យ ១.១

- អនុគមន៍ f មានលីមីត L កាលណា x ខិតជិត a ពីខាងឆ្វេង បើគ្រប់ចំនួន $\varepsilon > 0$ មានចំនួន $\delta > 0$ ដែល $0 < a - x < \delta$ នាំឲ្យ $|f(x) - L| < \varepsilon$ ។ គេសរសេរ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ ។
- អនុគមន៍ f មានលីមីត L កាលណា x ខិតជិត a ពីខាងស្តាំ បើគ្រប់ចំនួន $\varepsilon > 0$ មានចំនួន $\delta > 0$ ដែល $0 < x - a < \delta$ នាំឲ្យ $|f(x) - L| < \varepsilon$ ។ គេសរសេរ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ ។
- អនុគមន៍ f មានលីមីត L កាលណា x ខិតជិត a បើគ្រប់ចំនួន $\varepsilon > 0$ មានចំនួន $\delta > 0$ ដែល $0 < |x - a| < \delta$ នាំឲ្យ $|f(x) - L| < \varepsilon$ ។ គេសរសេរ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ។
- អនុគមន៍ f មានលីមីត $+\infty$ កាលណា x ខិតជិត a បើគ្រប់ចំនួន $B > 0$ មានចំនួន $\delta > 0$ ដែល $0 < |x - a| < \delta$ នាំឲ្យ $f(x) > B$ ។ គេសរសេរ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ។
- អនុគមន៍ f មានលីមីត $+\infty$ កាលណា x ខិតជិត a បើគ្រប់ចំនួន $B > 0$ មានចំនួន $\delta > 0$ ដែល $0 < |x - a| < \delta$ នាំឲ្យ $f(x) < -B$ ។ គេសរសេរ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ។

លំហាត់ ១.១ ចូរឲ្យនិយមន័យ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ និង $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ ។

ជាទូទៅ ១.១

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

១.២ លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់អនន្ត

និយមន័យ ១.២

- អនុគមន៍ f មានលីមីត L កាលណា x ខិតជិត $+\infty$ បើគ្រប់ចំនួន $\varepsilon > 0$ មានចំនួន $A > 0$ ដែល $x > A$ នាំឲ្យ $|f(x) - L| < \varepsilon$ ។ គេសរសេរ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ ។
- អនុគមន៍ f មានលីមីត L កាលណា x ខិតជិត $-\infty$ បើគ្រប់ចំនួន $\varepsilon > 0$ មានចំនួន $A > 0$ ដែល $x < -A$ នាំឲ្យ $|f(x) - L| < \varepsilon$ ។ គេសរសេរ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ ។

- អនុគមន៍ f មានលីមីត $+\infty$ កាលណា x ខិតជិត $+\infty$ បើគ្រប់ចំនួន $B > 0$ មានចំនួន $A > 0$ ដែល $x > A$ នាំឲ្យ $f(x) > B$ ។ គេសរសេរ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ។
- អនុគមន៍ f មានលីមីត $-\infty$ កាលណា x ខិតជិត $+\infty$ បើគ្រប់ចំនួន $B > 0$ មានចំនួន $A > 0$ ដែល $x > A$ នាំឲ្យ $f(x) < -B$ ។ គេសរសេរ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ។
- អនុគមន៍ f មានលីមីត $+\infty$ កាលណា x ខិតជិត $-\infty$ បើគ្រប់ចំនួន $B > 0$ មានចំនួន $A > 0$ ដែល $x < -A$ នាំឲ្យ $f(x) > B$ ។ គេសរសេរ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ។
- អនុគមន៍ f មានលីមីត $-\infty$ កាលណា x ខិតជិត $-\infty$ បើគ្រប់ចំនួន $B > 0$ មានចំនួន $A > 0$ ដែល $x < -A$ នាំឲ្យ $f(x) < -B$ ។ គេសរសេរ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ។

ជំនួញ ១.២

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

១.៣ ប្រមាណវិធីលីមីត

ជំនួញ ១.៣ បើ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ និង $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ ដែល a, L, M ជាចំនួនពិត (a អាចជាអនន្ត)

- $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ ដែល c ជាចំនួនថេរ
- $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = cL$ ដែល c ជាចំនួនថេរ
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + M$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = L - M$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = LM$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ បើ $M \neq 0$

១.៤ លីមីតនៃអនុគមន៍បណ្តាក់

ជំនួញ ១.៤ បើ u ជាអនុគមន៍មានលីមីត M កាលណា x ខិតជិត a និង f ជាអនុគមន៍មានលីមីត L កាលណា x ខិតជិត M នោះអនុគមន៍បណ្តាក់ $f \circ u$ មានលីមីត L កាលណា x ខិតជិត a ។ មានន័យថា បើ $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = M$ និង $\lim_{x \rightarrow M} f(x) = L$ នោះ $\lim_{x \rightarrow a} f \circ u(x) = L$

១.៥ លីមីតតាមការប្រៀបធៀប

ជំនួញ ១.៥

- ករណីលីមីតគ្រប់ចំនួនកំណត់ a
- បើមានអនុគមន៍ f, g, h និងចំនួនពិត $\delta > 0$ ដែល $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ និង $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ចំពោះគ្រប់ x ដែល $0 < |x - a| < \delta$ នោះ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ។
- ករណីលីមីតគ្រប់ $+\infty$
- បើមានអនុគមន៍ f, g និងចំនួនពិត A ដែល $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ និង $f(x) \geq g(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x > A$ នោះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ។

- បើមានអនុគមន៍ f, g និងចំនួនពិត A ដែល $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ និង $f(x) \leq g(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x > A$ នោះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ។
 - បើមានអនុគមន៍ f, g, h និងចំនួនពិត A ដែល $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = L$ និង $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x > A$ នោះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ ។
- ករណីលីមីតត្រង់ $-\infty$ យើងជំនួស $x > A$ ដោយ $x < A$ ។

១.៦ លីមីតរវាងមិនកំណត់

ជំនួសទៅ ១.៦ តាង $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ និង $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ ដែល a ជាចំនួនពិត ឬអនន្ត។ លីមីតរវាងមិនកំណត់មានដូចខាងក្រោម៖

- បើ $L = M = 0$ នោះ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ មានរវាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$
- បើ $L = \pm\infty$ និង $M = \pm\infty$ នោះ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ មានរវាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$
- បើ $L = +\infty$ និង $M = -\infty$ នោះ $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ មានរវាងមិនកំណត់ $+\infty - \infty$
- បើ $L = 0$ និង $M = \pm\infty$ នោះ $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)]$ មានរវាងមិនកំណត់ $0 \times \infty$

១.៧ លីមីតនៃអនុគមន៍មិនពីជគណិត

ជំនួសទៅ ១.៧ បើ a ជាចំនួនពិតនៅស្ថិតក្នុងដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រដែលឲ្យគេបាន

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a \quad \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a \quad \lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a \quad \lim_{x \rightarrow a} \cot x = \cot a$$

គេមានអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល e^x ដែល $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828\dots$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x &= +\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} &= +\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} &= +\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x &= 0 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} &= 0 & & & \text{ដែល } n > 0 \end{aligned}$$

គេមានអនុគមន៍ឡូការីតនេរែ (ឡូការីតគោល e) $\ln x$ ដែល $x > 0$ និង $n > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x &= +\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} &= 0 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x &= -\infty & \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x &= 0 & \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x &= 0 \end{aligned}$$

ទ្រឹស្តីបទ ១.៣ បើ x ជាថ្នាក់មុខគិតជា n ដូចនោះគេបាន

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

ទ្រឹស្តីបទ ១.៤

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

រំលឹក ១.១

- $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
- $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$
- $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$
- $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$
- $1 - \cos \alpha = 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}$
- $1 + \cos \alpha = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2}$
- $\cos \alpha + \cos \beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
- $\cos \alpha - \cos \beta = -2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$
- $\sin \alpha + \sin \beta = 2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
- $\sin \alpha - \sin \beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

លំហាត់

ឧទាហរណ៍ ១.១ គេមានអនុគមន៍ $f(x) = 2x + 1$ និង $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ ។ បើគេឲ្យ $\varepsilon = 0.01$ កំណត់តម្លៃមួយនៃ δ ដែល $0 < |x - 1| < \delta$ នាំឲ្យ $|f(x) - 3| < \varepsilon$ ។

ចម្លើយ

ដោយវិសមភាព

$$\begin{array}{rcl} & |f(x) - 4| & < \varepsilon \\ \text{សមមូល} & |(2x + 1) - 3| & < 0.01 \\ \text{សមមូល} & |2x - 2| & < 0.01 \\ \text{សមមូល} & 2|x - 1| & < 0.01 \\ \text{សមមូល} & |x - 1| & < 0.005 \end{array}$$

ដូច្នេះ យើងអាចយក $\delta = 0.005$ ។ (យើងក៏អាចយក $\delta = 0.001$ ឬ $0 < \delta < 0.005$ ។)

១ គេឲ្យតម្លៃ $\varepsilon > 0$ ។ កំណត់តម្លៃ $\delta > 0$ ដែល $0 < |x - a| < \delta$ នាំឲ្យ $|f(x) - L| < \varepsilon$

ក បើគេឲ្យ $\varepsilon = 0.001$, $a = 1$, $f(x) = 2x - 1$ និង $L = 1$ ។

ខ បើគេឲ្យ $\varepsilon = 0.0001$, $a = -2$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$ និង $L = -1$ ។

ឧទាហរណ៍ ១.២ បង្ហាញថាលីមីត $\lim_{x \rightarrow 2} (1 - 2x) = -3$ ។

ចម្លើយ

យើងនឹងបង្ហាញថា ចំពោះចំនួន $\varepsilon > 0$ មាន $\delta > 0$ ដែល $0 < |x - 2| < \delta$ នាំឲ្យ

$$|(1-2x) - (-3)| < \varepsilon \text{ ។ ដោយវិសមភាព}$$

សមមូល	$ (1-2x) - (-3) $	$<$	ε
សមមូល	$ 4-2x $	$<$	ε
សមមូល	$-\varepsilon < 2x-4$	$<$	ε
សមមូល	$-\varepsilon/2 < x-2$	$<$	$\varepsilon/2$
សមមូល	$ x-2 $	$<$	$\varepsilon/2$

ដើម្បីបាន $|(1-2x) - (-3)| < \varepsilon$ យើងអាចយក $\delta = \varepsilon/2$ (ឬ $0 < \delta < \varepsilon/2$)។ យើងឃើញថា ចំពោះចំនួន $\varepsilon > 0$ មាន $\delta = \varepsilon/2 > 0$ ដែល $0 < |x-2| < \delta$ នាំឲ្យ $|(1-2x) - (-3)| < \varepsilon$ ។ ដូច្នេះ $\lim_{x \rightarrow 2} (1-2x) = -3$ ។

២ ចូរបង្ហាញលីមីតខាងក្រោមតាមនិយមន័យ

$$\text{ក } \lim_{x \rightarrow 1} (3-2x) = 1$$

$$\text{ខ } \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{1}{x+3} = +\infty$$

$$\text{គ } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1-x} = +\infty$$

ឧទាហរណ៍ ១.៣ គណនាលីមីត $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2(x^2+1)}{1-\sqrt{1-x}}$ ។

ចម្លើយ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2(x^2+1)}{1-\sqrt{1-x}} &= \frac{\lim_{x \rightarrow -3} 2(x^2+1)}{\lim_{x \rightarrow -3} (1-\sqrt{1-x})} \\ &= \frac{2 \lim_{x \rightarrow -3} (x^2+1)}{\lim_{x \rightarrow -3} 1 - \lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{1-x}} \\ &= \frac{2 \times 10}{1-2} = -20 \end{aligned}$$

លីមីតផលចែក

លីមីតគុណចំនួនថេរ និងផលដក

ជំនួសតម្លៃ

$$\text{ដូច្នេះ } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2(x^2+1)}{1-\sqrt{1-x}} = -20 \text{ ។}$$

៣ គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$$\text{ក } \lim_{x \rightarrow 2} (x+1)^2 + 2$$

$$\text{គ } \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x+x^2)$$

$$\text{ង } \lim_{x \rightarrow -\infty} x - \sqrt{2x^2+1}$$

$$\text{ខ } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+2}{x+1}$$

$$\text{ឃ } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{x^2+1}$$

$$\text{ច } \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2+4}{x^2-4}$$

ឧទាហរណ៍ ១.៤ គណនាលីមីត $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ ដែលមានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$ ។

ចម្លើយ

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \right) \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} \right) && \text{គុណកន្សោមឆ្លាស់} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} && \text{សម្រួលកន្សោម } (x - 1) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} && \text{ជំនួសតម្លៃ} \\
 &= 1/2
 \end{aligned}$$

ដូច្នេះ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{2}$ ។

ឧទាហរណ៍ ១.៥ គណនាលីមីត $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + x^2 + x - 14}$

ចម្លើយ

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + x^2 + x - 14} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x - x + 2}{x^3 - 2x^2 + 3x^2 - 6x + 7x - 14} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x - 2) - (x - 2)}{x^2(x - 2) + 3x(x - 2) + 7(x - 2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{(x - 2)(x^2 + 3x + 7)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 1}{x^2 + 3x + 7} \\
 &= \frac{(2) + 1}{(2)^2 + 3(2) + 7} = \frac{3}{17}
 \end{aligned}$$

រំលឹក៖ $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$

ដ គេមានអនុគមន៍ $f(x) = 3x^3 - 4x - 16$ និង $g(x) = 3x^3 - 4x$ ។

ក គណនា $f(2)$ និង $g(2)$ ។ ខ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $-16 = -3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2$ ។

ង គេមានពីរអនុគមន៍ពហុធា

$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$ និង $g(x) = c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$

ដែល $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ ។ បើ $f(a) = 0$ បង្ហាញថា $c_0 = -g(a)$ រួចទាញបញ្ជាក់ថា

$$f(x) = c_1(x - a) + c_2(x^2 - a^2) + c_3(x^3 - a^3) + \dots + c_n(x^n - a^n)$$

៦ គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x(x-1)}$

ខ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + x}$

គ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + x^3}{2x + 3x^2}$

ឃ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 3x}{2x - x^2}$

ង $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 5x + 6}$

ច $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}$

ឆ $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 9}$

ជ $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 3x + 2}$

ឈ $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 6}$

ញ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$

ដ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x - 3}$

ថ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$

$$\begin{array}{lll}
\text{ខ} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6} & \text{គ} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x}{x^3 - x^2 + 2x - 8} & \text{ឃ} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - 4x^3 + 1}{2x^3 - 3x^2 + 1} \\
\text{ឃ} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 + 4x - 3}{2x^2 + x - 1} & \text{ង} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 - 2x + 4} & \text{រ} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^5 - 5x^3 + 2}{2x^4 - 4x^2 + 2} \\
\text{ណ} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + x - 1}{2x^2 + 3x - 2} & \text{ប} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1} & \text{ស} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^6 - 6x^3 + 3}{2x^5 - 5x^2 + 3} \\
\text{ត} \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{3x^2 - 4x - 4}{-3x^2 + 7x + 6} & \text{ដ} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 2x + 1} & \text{ហ} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 2x - 1}{x^3 + 1} \\
\text{ច} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2} & \text{ណ} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^5 - 3x^3 + 1}{x^3 - 4x + 3} & \text{ស} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^7 + x - 2}{x^2 - x - 2} \\
\text{ត} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^3 + 1} & \text{ង} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 3x^3 + 2}{x^3 - 3x + 2} & \text{ហ} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 2x^2 - 1}{x^3 + 2x^2 - 1} \\
\text{ម} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^9 - 7x^6 + 6}{x^7 - 7x^5 + 6} & &
\end{array}$$

៧ គណនាលីមីតខាងក្រោម បើគេដឹងថា n, m ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន៖

$$\begin{array}{lll}
\text{ក} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{2n+1} + 1}{x + 1} & \text{ខ} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - nx + (n-1)}{x^3 - x^2 - x + 1} & \text{គ} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 2x^m + 1}{2x^2 + 3x - 5} \\
\text{ខ} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} & \text{ង} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^n - nx^2 + n - 2}{x^3 - 3x + 2} & \text{ឃ} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{2n} + 2x + 1}{x^{2m} + 5x + 4} \\
\text{ត} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n + (n-1)x - n}{x^2 + x - 2} & \text{ប} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (x+1)^n}{x^2 - x} & \text{ស} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - (1-x)^n}{x}
\end{array}$$

៨ គេមានអនុគមន៍ $f(x) = x^n + ax + b$ ដែល $n \geq 2$ ជាចំនួនគត់ និង a, b ជាចំនួនពិត។

ក កំណត់ a, b ជាអនុគមន៍នៃ n បើដឹងថា $f(1) = 0$ និង $f'(1) = 0$ ។

ខ គណនាលីមីត $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2}$ ។

៩ គេមានអនុគមន៍ $f(x) = x^n + ax + b$ ដែល $n \geq 3$ ជាចំនួនគត់សេស និង a, b ជាចំនួនពិត។

ក កំណត់ a, b ជាអនុគមន៍នៃ n បើដឹងថា $f(-1) = 0$ និង $f'(-1) = 0$ ។

ខ គណនាលីមីត $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{(x+1)^2}$ ។

១០ គេមានអនុគមន៍ $f(x) = x^n + ax^2 + bx + c$ ដែល $n \geq 3$ ជាចំនួនគត់ និង a, b, c ជាចំនួនពិត។

ក កំណត់ a, b, c ជាអនុគមន៍នៃ n បើដឹងថា $f(1) = 0, f'(1) = 0$ និង $f''(1) = 0$ ។

ខ គណនាលីមីត $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^3}$ ។

(ឯកសារផ្ទាល់ខ្លួនប៉ុណ្ណោះ)។

១១ គេមានអនុគមន៍ $f(x) = x^n + ax^2 + bx + c$ ដែល $n \geq 3$ ជាចំនួនគត់សេស និង a, b, c ជាចំនួនពិត។

ក កំណត់ a, b, c ជាអនុគមន៍នៃ n បើដឹងថា $f(-1) = 0, f'(-1) = 0$ និង $f''(-1) = 0$ ។

ខ គណនាលីមីត $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{(x+1)^3}$ ។

១២ គេមាន $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ជាបីគូតគ្នានៃស្វ៊ីតនេព្រីនដែលមានផលសង្ខេបខុសពីសូន្យ។ គណនាលីមីតខាងក្រោមជាអនុគមន៍នៃ a, b, c ៖

$$\text{ក} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 - 2bx + c}{cx^2 - 2bx + a}$$

$$\text{ខ} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{ax^2 + 2bx + c}{a + 2bx + cx^2}$$

$$\text{គ} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{ax^3 + bx^2 + cx + b}{bx^3 + cx^2 + bx + a}$$

១៣ គេឲ្យ $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ និង $m, n, p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ដែល $m \neq n, p \neq q$ ។

$$\text{ក} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^n - nx^m - m + n}{px^q - qx^p - p + q}$$

ខ បើ $a + b + c = 0$ ចូរគណនា $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^m + bx^n + c}{ax^p + bx^q + c}$ តាមករណ៍ដូចខាងក្រោម៖
 i $ap + bq \neq 0$ ii $ap + bq = 0$ និង $am + bn = 0$

គ បើ $a - b + c = 0$ ចូរគណនា $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{ax^{2m} + bx^{2n+1} + c}{ax^{2p} + bx^{2q+1} + c}$ តាមករណ៍ដូចខាងក្រោម៖
 i $2(ap - bq) \neq b$ ii $2(ap - bq) = b$ និង $2(am - bn) = b$

១៤ គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

$$\text{ក} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

$$\text{ខ} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{1 - \sqrt{x}}$$

$$\text{គ} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{x^2 - 1}$$

$$\text{ឃ} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$$

$$\text{ង} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$$

$$\text{ច} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

$$\text{ឆ} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+2} - 1}{1 - x^2}$$

$$\text{ជ} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \sqrt{x-1}}{x - 2}$$

$$\text{ឈ} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - x}{1 - x}$$

$$\text{ញ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$\text{ដ} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x-2}}{2 - \sqrt{x+2}}$$

$$\text{ថ} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\text{ទ} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x+2} + x}$$

$$\text{ឈ} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}{x - 2}$$

$$\text{ណ} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - x}{x^2 - x}$$

$$\text{ក} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$$

$$\text{ថ} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$$

$$\text{ខ} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$\text{គ} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}{x - 1}$$

$$\text{ឆ} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x + 1}$$

$$\text{ប} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + x^3}{1 + \sqrt[3]{x}}$$

$$\text{ជ} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2}}{x^3 + 8}$$

$$\text{ឈ} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{1-x} + 1}{2 - x}$$

$$\text{ត} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^2}{1 + \sqrt[3]{x+1}}$$

$$\text{ម} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt[3]{x+2} + 1}{x^3 + 27}$$

$$\text{ឃ} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x - 1}$$

$$\text{រ} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} - 3}{1 - x}$$

$$\text{ល} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{3x^2 + \sqrt{x}}}{x - 1}$$

$$\text{វ} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 1}{x - 1}$$

$$\text{ស} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2\sqrt{x} + 1}{1 - x}$$

$$\text{ហ} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2\sqrt[3]{x} + 1}{x - 1}$$

សម្គាល់៖ ហាមធ្វើការដឹកក្រោមរូបភាពណាមួយលើឯកសារនេះ(ឯកសារផ្ទាល់ខ្លួនប៉ុណ្ណោះ)

១៥ បើគេដឹងថា n, m ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន និង a ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

$$\text{ក} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{x - 1}$$

$$\text{ឃ} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} \sqrt[n]{x} - 1}{x - 1}$$

$$\text{ឆ} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[2n]{2x - \sqrt[n]{x}}}{1 - \sqrt[2]{2x - \sqrt[n]{x}}}$$

$$\text{ខ} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x - a}$$

$$\text{ង} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2n+1\sqrt{x} + 1}{x + 1}$$

$$\text{ជ} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt[2]{2 - \sqrt[n]{x}}}{x - \sqrt[2]{2 - \sqrt[n]{x}}}$$

$$\text{គ} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[m]{x}}{x - 1}; n > m$$

$$\text{ច} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[2]{2 - \sqrt[n]{x}}}{1 - \sqrt[2]{2 - \sqrt[m]{x}}}$$

$$\text{ឈ} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt[2]{2x - \sqrt[n]{x}}}{x - \sqrt[2]{2x - \sqrt[m]{x}}}$$

ឧទាហរណ៍ ១.៦ គណនាលីមីត $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x + 4}{x^2 - 2x + 3}$

ចម្លើយ

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x + 4}{x^2 - 2x + 3} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(2 + 3/x + 4/x^2)}{x^2(1 - 2/x + 3/x^2)} && \text{ដីក្រេធំជាងគេនៃ } x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + 3/x + 4/x^2}{1 - 2/x + 3/x^2} && \text{សម្រួលកត្តា } x^2 \\ &= \frac{2 + 0 + 0}{1 - 0 + 0} = 2 && \text{ព្រោះ: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0\end{aligned}$$

១៦ គណនាលីមីតត្រង់អនន្តដូចខាងក្រោម៖

ក $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - x^2}{2x^2 + x - 1}$

ង $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$

ឃ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1} + 2\sqrt[3]{x^2}}{x\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^3 + 3}}$

ខ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{x^2 + 1}$

ច $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{1 + x + \sqrt{x}}$

ញ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x + 1}{2x - \sqrt{4x^2 - x}}$

គ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x + x^2}{1 + 2x}$

ឆ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x} - 2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + 2 + 1}$

ដ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + x}}{x - \sqrt{x^2 - x}}$

ឃ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x - 1}{3x^2 - 5x + 2}$

ជ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} + 3x^2 - 2}{2 - x^2}$

ថ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \sqrt{x^2 + 1} + x}{1 + \sqrt{4x^2 + 1} + 2x}$

១៧ គណនាលីមីតត្រង់អនន្តដូចខាងក្រោម៖

ក $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 + 1}$

ច $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{(x-1)(x-2)} - x^2$

ខ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{(x+1)^2 + 2} - 2x + 3$

ឆ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - \sqrt{x^2 - 1}$

គ $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - 3x + \sqrt{4x^2 + 4x + 5}$

ជ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^3 + x + 1} + \sqrt{x^2 + 1}$

ឃ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{x^2 + x + 1}$

ឈ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} + \sqrt{x} - \sqrt{x}$

ង $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 - 6x + 7}$

ញ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x + \sqrt{x}}$

ឧទាហរណ៍ ១.៧ គណនាលីមីត $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}$ ។

ចម្លើយ

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} &= \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} && \text{លីមីតនៃអនុគមន៍ស៊ីនុសបណ្តាក់} \\ &= (3/2) \times 1 = 3/2 && \text{ជំនួសតម្លៃ}\end{aligned}$$

ដូច្នេះ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \frac{3}{2}$ ។

១៨ គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x}$

ឃ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\tan 3x}$

ង $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x}$

ខ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

ង $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x - \tan x}{x}$

ជ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x}$

គ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

ច $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sin x - 1}{\cos x + \sin x - 1}$

ឃ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - \sin x}{x}$

$$\text{ញ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2 \sin^2 x}{x(x+1)}$$

$$\text{ដ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

$$\text{ថ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1 + \cos x}{x \sin x}$$

$$\text{ទូ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \cos x}{x^2}$$

$$\text{ឆ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1 - 2x}}{\sin x}$$

$$\text{ពរ} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sin \pi x - 1}{2x}$$

$$\text{ត} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2+x} + \cos \pi x}{\sin \pi x}$$

$$\text{ថ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x + \sin x}{x \cos x}$$

១៩ គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$$\text{ត} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{(x - \pi)^2}$$

$$\text{ខ} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} - 2 \sin x}{\pi - 4x}$$

$$\text{ត} \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} \frac{\cos \pi x + \sin \pi x}{4x - 3}$$

$$\text{យ} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x + \sin(x - 1)}{x^2 + 2x - 3}$$

$$\text{ង} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x}{x \sin x}$$

$$\text{ច} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x - 2 \cos^3 x}{\sin^2 x}$$

$$\text{ឆ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x \cos 4x}{\sin^2 x}$$

$$\text{ដ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos 2x - 2}{x^2}$$

$$\text{ឃ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + 3 \cos x - 4}{x^2}$$

២០ គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$$\text{ត} \lim_{x \rightarrow 0} x \cot x$$

$$\text{ខ} \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cot 2x$$

$$\text{ត} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2x - \pi) \tan x$$

$$\text{យ} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x \cot 2x$$

$$\text{ង} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin 4x \tan 2x$$

$$\text{ទ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x + \sin 2x}{x - \sin^2 x}$$

$$\text{ឆ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin x}{x \sin x - x}$$

$$\text{ត} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$$

$$\text{ថ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos 3x}$$

$$\text{ដ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin x + \tan x}$$

$$\text{ព} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x}$$

$$\text{ត} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^2}$$

$$\text{ម} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$$

$$\text{ញ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 4 \cos x + 3}{x^4}$$

$$\text{ដ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x + \cos x - 2}{1 - \cos x}$$

$$\text{ថ} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}{2 \sin x - 1}$$

$$\text{ទូ} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{3 - 4 \tan x + \tan^2 x}{3 - 2 \cot x - \cot^2 x}$$

$$\text{ឆ} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cot x - \tan x}$$

$$\text{ពរ} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 2 \sin^2 x}{\cot x - 2 \cos^2 x}$$

$$\text{ត} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 2 \cos^2 x}{\cot x - 2 \sin^2 x}$$

$$\text{ថ} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$$

$$\text{យ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$$

$$\text{ដ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{1 - \cos x}$$

$$\text{ឃ} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\cos x}$$

$$\text{ត} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$$

$$\text{ស} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}$$

$$\text{ហ} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + \sin 2x}{2x - \pi}$$

$$\text{ត្ប} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos 2x}{2x - \pi}$$

$$\text{អ} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x + \sin x}{\tan 2x}$$

$$\text{ទ} \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x}$$

$$\text{ឆ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos 2x}{x \sin x}$$

$$\text{ត} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos^2 x - \cos 2x}{\cos x + 1}$$

$$\text{ថ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{x^2 \sin x}$$

$$\text{ដ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos^3 x}{x \sin 2x}$$

$$\text{ព} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x + 3 \cos x}{\cos^2 x \sin 2x}$$

$$\text{ត} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x - 3 \sin x + 2}{\cos^2 x}$$

$$\text{ម} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{4 \cos^2 x - 4 \cos x + 1}{2 \cos^2 x + \cos x - 1}$$

$$\text{ញ} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \cos x}{x + 1}$$

$$\text{ដ} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin^2 x}{1 + x^2}$$

$$\text{ថ} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + (-1)^n}{n + 1}$$

$$\text{ទូ} \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x + \sin 4x}{\sqrt{1 + \sin x}}$$

២១ ដោយប្រើ $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ បង្ហាញថា៖

$$\text{ក} \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \text{ (តាង } n = \frac{1}{x} \text{)}$$

$$\text{គ} \lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \text{ (តាង } n = \frac{1}{x} \text{)}$$

$$\text{ខ} \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e \text{ (តាង } m = -n \text{)}$$

$$\text{ឃ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ (តាង } y = e^x - 1 \text{)}$$

២២ គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$$\text{ក} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x}$$

$$\text{ដ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{x^2}$$

$$\text{ង} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$$

$$\text{ខ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x}$$

$$\text{ច} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$$

$$\text{ត} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cos x - 1}{x}$$

$$\text{គ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}$$

$$\text{ទ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$$

$$\text{ឆ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x - \cos x}{x}$$

$$\text{ឃ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$$

$$\text{ឈ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + 2e^x - 3}{e^{2x} + e^x - 2}$$

$$\text{ញ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2x}}{\sin(\pi x)}$$

$$\text{ង} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

$$\text{ណ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x(x+1)} - 1}{x}$$

$$\text{ដ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2x}}{\sin(\pi x)}$$

$$\text{ច} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$$

$$\text{ត} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{x+1}}{x}$$

$$\text{ឆ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cos x - 1}{e^x \sin x}$$

$$\text{ត} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{e^{2x} - 1}$$

$$\text{ថ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sqrt{x+1} - 1}{x}$$

$$\text{ឈ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}$$

$$\text{ដ} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$$

$$\text{ទ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2+1} - e}{x(e^x - 1)}$$

$$\text{ញ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x+1} - 2^{x+2} + 1}{x}$$

$$\text{ឃ} \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a}$$

$$\text{ឈ} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{e^{2-x} - 1}$$

$$\text{ត} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{x}$$

$$\text{ញ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + e^x - 2}{x}$$

$$\text{គ} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x^2 - 1}$$

$$\text{ឆ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^{x+1} + 1}{2^x - 2^{-x}}$$

២៣ គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$$\text{ក} \lim_{x \rightarrow \ln 2} \frac{e^{2x} - e^x - 2}{e^x - 2}$$

$$\text{ឃ} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

$$\text{ង} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^x - 4}{x - 2}$$

$$\text{ខ} \lim_{x \rightarrow \ln 2} \frac{xe^x - 2 \ln 2}{e^x - 2}$$

$$\text{ង} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln x - \ln 2}{x - 2}$$

$$\text{ដ} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^{x^x} - 16}{x - 2}$$

$$\text{គ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$\text{ច} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \ln x - 2 \ln 2}{x - 2}$$

$$\text{ឃ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x \cos 2x - 2^x \cos 3x}{\sin 5x}$$

ឧទាហរណ៍ ១.៨ គណនាលីមីត $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

ចម្លើយ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left((1 + (\cos x - 1))^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right)^{\frac{\cos x - 1}{x^2}} \\ &= e^{-1/2} = 1/\sqrt{e} \end{aligned}$$

២៤ គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$$\text{ក} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x$$

$$\text{ខ} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2}$$

$$\text{គ} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$$

$$\text{ឃ} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$$

$$\text{ង} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x, a \neq 0$$

$$\text{ច} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^x$$

$$\text{ឆ} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2+1}\right)^{x^2}$$

$$\text{ជ} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$$

$$\text{ឈ} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^x$$

$$\text{ញ} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x^2}$$

$$\text{ដ} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)^x$$

$$\text{ប} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)^{x^2}$$

$$\text{ភ} \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\text{ស} \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^2)^{\cot x}$$

$$\text{រ} \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 + \sin \pi x)^{\frac{x}{1-x}}$$

$$\text{គ} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$$

$$\text{ថ} \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{\cot x}$$

$$\text{ទ} \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x}$$

$$\text{ធី} \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x + 1)^{\frac{1}{x}}$$

២៥ គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$$\text{ក} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$$

$$\text{ខ} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$\text{គ} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\text{ឃ} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$$

$$\text{ង} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x$$

$$\text{ច} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln(\sin x)$$

$$\text{ឆ} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(\sin x)$$

$$\text{ជ} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}}$$

$$\text{ឈ} \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1)^{\frac{1}{x}}$$

$$\text{ញ} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$$

$$\text{ដ} \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 1)^{\frac{1}{x}}$$

$$\text{ប} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) - \ln x$$

$$\text{ភ} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(e^x + 1))$$

$$\text{ស} \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \ln x)^{-1}$$

$$\text{រ} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}\right)$$

$$\text{គ} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$$

$$\text{ថ} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{1 + \ln x}$$

$$\text{ទ} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x + 1)}{\ln(x + 1)}$$

$$\text{ធី} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln(x + 1)}$$

$$\text{ឆ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x + 1)}{\ln(x + 1)}$$

$$\text{ប} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln(x + 1)}$$

$$\text{ជ} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sqrt{x+1} - 1)}{\ln x}$$

$$\text{ឈ} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \ln x}{\ln(1 - \sqrt{1-x})}$$

$$\text{ញ} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$$

$$\text{ដ} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin 3x}$$

$$\text{ប} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{x^2}$$

$$\text{ភ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{\ln \cos 3x}$$

ឧទាហរណ៍ ១.៩ គេដឹងថា $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = L$ ជាចំនួនកំណត់ ចូរគណនាតម្លៃ L ។

ចម្លើយ

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(\frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right)}{8 \left(\frac{x}{2} \right)^3}$$

តាង $u(x) = \frac{x}{2}$ ។ ដោយ $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$ នោះគេបាន

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{4} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u - \sin u \cos u}{u^3} = \frac{1}{4} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u - \sin u + \sin u - \sin u \cos u}{u^3} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{u - \sin u}{u^3} + \frac{(1 - \cos u) \sin u}{u^3} \right) = \frac{1}{4} \left(L + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

ដូច្នេះ $L = \frac{1}{6}$ ។

២៦ គេដឹងថា $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = L$ ដែល L ជាចំនួនកំណត់។

ក គណនាលីមីត $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin 2x}{x^3}$ និង $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos x - \sin 2x}{x^3}$ ជាអនុគមន៍នៃ L ។

ខ គណនាតម្លៃ L ។ ណែនាំ: $L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \sin x}{x^3} \right) \left(\frac{2 \cos x}{2 \cos x} \right)$ ។

គ គណនាលីមីត $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x + x^2 - 2}{x^4}$ ។

ឧទាហរណ៍ ១.១០ គេដឹងថា $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x - e^x}{x^2} = L$ ដែល L ជាចំនួនកំណត់។ ចូរគណនាតម្លៃ L ។

ចម្លើយ

តាង $u(x) = \frac{x}{2}$ ។ ដោយ $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$ នោះគេបាន

$$\begin{aligned} L &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 + 2u - e^{2u}}{4u^2} = \frac{1}{4} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 + u - e^u + u - ue^u + e^u + ue^u - e^{2u}}{u^2} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{1 + u - e^u}{u^2} - \frac{e^u - 1}{u} + e^u \frac{1 + u - e^u}{u^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} (L - 1 + L) \end{aligned}$$

ដូច្នេះ $L = -\frac{1}{2}$ ។

សម្គាល់: ហាមធ្វើអាជីវកម្មក្រោមរូបភាពគ្រប់រូបភាពលើឯកសារនេះ (ឯកសារផ្ទាល់ខ្លួនប៉ុណ្ណោះ)។

២៧ បើដឹងថា L ជាចំនួនកំណត់ ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

ខ $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x - e^x}{x^2}$

គ $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + 2x + x^2 - 2e^x}{x^3}$

២៨ បើដឹងថា L ជាចំនួនកំណត់ ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \cos x \sin x}{x^3}$

ក $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2 - \cos \sqrt{2}x}{x^4}$

ខ $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$

ង $L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

គ $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2(\cos x - 1)}{x^4}$

ឃ $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$

ឃ $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x \cos 2x}{\tan x - \sin x \cos 2x}$

ញ $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$

ង $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - \sin x \sin 2x}{\tan x - \sin x}$

ដ $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)(1+x) + e^x(e^x - 2)}{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x} - 2)}$

ច $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{2 \sin 3x - 3 \sin 2x}$

ថ $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{2}x - \sqrt{2} \sin x}{\sqrt{2} \sin \sqrt{3}x - \sqrt{3} \sin \sqrt{2}x}$

២៩ គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = \cos x + i \sin x$ ដែល x ជាចំនួនពិត និង $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ។

ក គណនាផលបូក $S_n = z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n$ ដែល n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

ខ ទាញរកផលបូក

$$A_n = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots + \cos nx$$

$$B_n = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin nx$$

គ គណនា $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{B_n}{x}$ តាមពីរបៀបផ្សេងគ្នា រួចទាញបញ្ជាក់ថា

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ឃ គណនា $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{n - A_n}{x^2}$ តាមពីរបៀបផ្សេងគ្នា រួចទាញបញ្ជាក់ថា

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ណែនាំ៖ ប្រើលីមីត $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$ ។

៣០ ដោយប្រើសមភាព $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ ទាញរកផលបូក $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ ។

៣១ គណនាលីមីត $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^2}$ និង $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(1 + 2 + 3 + \cdots + n) - n^2}{n}$ ។

៣២ ដោយប្រើសមភាព $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ ទាញរកផលបូក $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ ។

៣៣ គណនាលីមីត $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3}$ និង $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) - n^3}{n^2}$ ។

៣៤ ដោយប្រើសមភាព $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ ទាញរកផលបូក $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ ។

៣៥ គណនាលីមីត $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3}{n^4}$ និង $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) - n^4}{n^3}$ ។

៣៦ បើ m ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ស្រាយបញ្ជាក់ថា

ក $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^m + 2^m + 3^m + \cdots + n^m}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1}$

ខ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(m+1)(1^m + 2^m + 3^m + \cdots + n^m) - n^{m+1}}{n^m} = \frac{m+1}{2}$