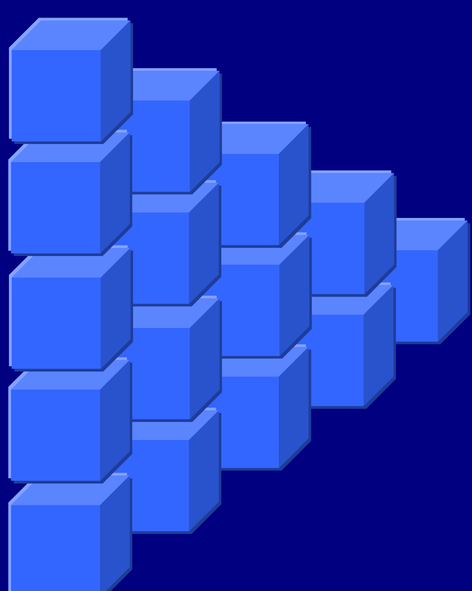
លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

បរិញ្ញាប័ត្រផ្នែកគណិតវិទ្យា

វិសមភាព

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \le \sqrt[3]{2(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}$$

សម្រាប់សិស្សពូកែគណិតវិទ្យា



អ្នកចូលរួមត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក លឹម ឆុន

លោក សែន ពិសិដ្ឋ

លោកស្រី ឆុយ វណ្ណា

លោក ឆិត្យ ម៉េង

លោក ព្រឹម សុនិត្យ

លោក ផល ប៊ុនឆាយ

អ្នកត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិត្តសិរ

ការីកុំព្យូទ័រ

កញ្ញា លី គុណ្ណាភា

អ្នកនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លោក លឹម ផល្លុន និង លោក សែន ពិសិដ្ឋ

អារម្ភកថា

សៀវភៅ **ទំលទតាព** ដែលអ្នកសិក្សាកំពុងកាន់នៅក្នុងដៃនេះ ខ្ញុំបាទបានរៀបរៀងឡើងក្នុងគោលបំនងទុកជាឯកសារ សម្រាប់ជាជំនួយដល់អ្នកសិក្សាយកទៅសិក្សាស្រាវជ្រាវដោយខ្លួនឯង និង ម្យ៉ាងទៀតក្នុងគោលបំនងចូលរួមលើកស្ទួយវិស័យគណិតវិទ្យានៅប្រទេសកម្ពុជាយើងឲ្យកាន់តែរីកចម្រើនថែមទៀតដើម្បីបង្កើនធនធានមនុស្សឲ្យមានកាន់តែច្រើនដើម្បីជួយអភិវឌ្ឍន៍ប្រទេសជាតិរបស់យើង ។

នៅក្នុងសៀវនេះយើងខ្ញុំបានខិតខំស្រាវជ្រាវជ្រើសរើសយកលំហាត់យ៉ាងសម្រាំងបំផុតពីសៀវភៅបរទេសនិងឯកសារបរទេសផ្សេងៗទៀតតាម **Internet** យកមកធ្វើដំណោះស្រាយយ៉ាងក្បោះក្បាយដែលអាចឲ្យលោកអ្នកងាយយល់ឆាប់ចងចាំអំពីសិល្បៈនៃការដោះស្រាយទាំងអស់នេះ ។

ប៉ុន្តែទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ កង្វះខាត និងកំហុសឆ្គងដោយអចេតនាប្រាកដជាមានទាំងបច្ចេកទេស និង អក្ខរាវិរុទ្ធ ។

អាស្រ័យហេតុនេះ យើងខ្ញុំជាអ្នករៀបរៀងរង់ចាំដោយរីករាយជានិច្ចនូវមតិរិះគន់បែបស្ថាបនាពីសំណាក់អ្នកសិក្សាក្នុងគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានដើម្បីជួយកែលំអសៀវភៅនេះឲ្យបានកាន់តែសុក្រិត្រភាពថែមទៀត ។

ជាទីបញ្ចប់នេះយើងខ្ញុំអ្នករៀបរៀងសូមគោរពជូនពរដល់អ្នកសិក្សាទាំងអស់ឲ្យមានសុខភាពមាំមួន និង ទទួលជ័យជំនះគ្រប់ភារកិច្ច ។

បាត់ដំបងថ្ងៃទី ៩ មីនា ២០១០

អ្នករៀបរៀង លឹម ផល្លុន

ទ្រឹស្តីបទវិសមភាពសំខាន់ៗ

១/ វិសមភាព មធ្យមនព្វន្ត មធ្យមធរណីមាត្រ

(The AM-GM Inequality)

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន $\mathbf{a_1 , a_2 , a_3 , ..., a_n}$

គេបាន $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1.a_2.a_3...a_n}$ ។

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែ និង

គ្រាន់តែ $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

-គេមាន $\dfrac{a_1 + a_2}{2} \ge \sqrt{a_1 a_2}$ សមមូល $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \ge 0$

ដូចនេះវិសមភាពពិតចំពោះ $n = 2$ ។

-ឧបមាថាសមភាពនេះពិតដល់តួទី $n = k$ គឺ

$\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k}{k} \ge \sqrt[k]{a_1.a_2.a_3......a_k}$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k + 1$ គឺ ៖

$$\frac{a_1+a_2+a_3+....+a_k+a_{k+1}}{k+1}\geq \sqrt[k+1]{a_1.a_2.a_3...a_k.a_{k+1}}$$

តាងអនុគមន៍

$$f(x)=\frac{(x+a_1+a_2+a_3+......+a_k)^{k+1}}{x}$$

ដែល $x>0\ ,\ a_k>0\ ,\ k=1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ ...$។

យើងបាន

$$f'(x)=\frac{(k+1)(x+a_1+....+a_k)^k x-(x+a_1+...+a_k)^{k+1}}{x^2}$$

$$=\frac{(x+a_1+....+a_k)^k\left[(k+1)x-(x+a_1+....+a_k)\right]}{x^2}$$

$$=\frac{(x+a_1+a_2+....+a_k)^k\left(kx-a_1-a_2-....-a_k\right)}{x^2}$$

បើ $f'(x)=0$ នាំឲ្យ $x=\frac{a_1+a_2+.....+a_k}{k}$

ចំពោះ $x=\frac{a_1+a_2+.....+a_k}{k}$ គេបាន ÷

$$f\left(\frac{a_1+a_2+....+a_k}{k}\right)=\frac{\left(\frac{a_1+a_2+...+a_k}{k}+a_1+...+a_k\right)^{k+1}}{\frac{a_1+a_2+...+a_k}{k}}$$

$$f\left(\frac{a_1+a_2+......+a_k}{k}\right)=(k+1)^{k+1}\left(\frac{a_1+a_2+...+a_k}{k}\right)^k$$

ចំពោះ $\forall x \geq 0$ យើងទាញបាន ៖

$$f(x) \geq f\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_k}{k}\right)$$

$$f(x) \geq (k+1)^{k+1}\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k}{k}\right)^k$$

តាមការឧបមា $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1.a_2.a_3......a_k}$

សមមូល $\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_k}{k}\right)^k \geq a_1.a_2...a_k$

$$\frac{(x + a_1 + a_2 + ... + a_k)^{k+1}}{x} \geq (k+1)^{k+1}\, a_1 a_2 ... a_k$$

$$\frac{x + a_1 + a_2 + ... + a_k}{k+1} \geq \sqrt[k+1]{a_1.a_2.......a_k x} \quad (*)$$

យក $x = a_{k+1} > 0$ ជួសក្នុង $(*)$ គេបាន

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k + a_{k+1}}{k+1} \geq \sqrt[k+1]{a_1.a_2.a_3......a_k.a_{k+1}}$$

ដូចនេះ $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2.a_3...a_n}$ ។

២/ វិសមភាព កូស៊ី-ស្វ័រ (Cauchy-Schwarz's Inequality)

ក-ទ្រឹស្តីបទ

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a_1 ; a_2 ;...; a_n ; b_1 ; b_2 ; ...; b_n

គេបាន

$$(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2 \le (a_1{}^2+a_2{}^2+...+a_n{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+...+b_n{}^2)$$

ឬ $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}(a_kb_k)\right)^2 \le \sum\limits_{k=1}^{n}\left(a_k^2\right)\times\sum\limits_{k=1}^{n}\left(b_k^2\right)$ ។

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែនិងគ្រាន់តែ

$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}=...=\dfrac{a_n}{b_n}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងជ្រើសរើសអនុគមន៍មួយកំនត់ $\forall x\in IR$ ដោយ ៖

$$f(x)=(a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2+.....+(a_nx+b_n)^2$$

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2\right)x^2+2\sum_{k=1}^{n}(a_kb_k)x+\sum_{k=1}^{n}\left(b_k^2\right)$$

ដោយ $\forall x\in IR$ ត្រីធា $f(x)\ge 0$ ជានិច្ចនោះ $\begin{cases} a_f>0 \\ \Delta'\le 0\end{cases}$

ដោយ $a_f=a_1{}^2+a_2{}^2+.....+a_n{}^2>0$

ហេតុនេះគេបានជានិច្ច $\Delta' \le 0$

$$\Delta' = \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k b_k)\right)^2 - \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2\right) \times \sum_{k=1}^{n}\left(b_k^2\right) \le 0$$

ឬ $\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k b_k)\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2\right) \times \sum_{k=1}^{n}\left(b_k^2\right)$

2/ Cauchy-Schwarz in Engle form

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n > 0$

គេបាន

$$\frac{{x_1}^2}{y_1} + \frac{{x_2}^2}{y_2} + ... + \frac{{x_n}^2}{y_n} \ge \frac{(x_1 + x_2 + ... + x_n)^2}{y_1 + y_2 + ... + y_n}$$

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែនិងគ្រាន់តែ

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = ... = \frac{x_n}{y_n}$$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាមវិសមភាព $\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k b_k)\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2\right) \times \sum_{k=1}^{n}\left(b_k^2\right)$

បើគេយក $a_k = \frac{x_k}{\sqrt{y_k}}$, $b_k = \sqrt{y_k}$

គេបាន $\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{\sqrt{y_k}}.\sqrt{y_k}\right)\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k{}^2}{y_k}\right)\times\sum_{k=1}^{n}(y_k)$

គេទាញ $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k{}^2}{y_k}\right) \ge \frac{\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k)\right)^2}{\sum_{k=1}^{n}(y_k)}$,

ដូចនេះ $\frac{x_1{}^2}{y_1}+\frac{x_2{}^2}{y_2}+...+\frac{x_n{}^2}{y_n} \ge \frac{(x_1+x_2+...+x_n)^2}{y_1+y_2+...+y_n}$

៣/ វិសមភាពហូលឌ័រ (Hölder's Inequality)

ទ្រឹស្តីបទ គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a_{i,j}$ $,1\le i\le m$, $1\le j\le 1$

គេបាន $\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right) \ge \left(\sum_{j=1}^{n}\sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m}a_{ij}}\right)^m$ ។

រូបមន្តផ្សេងទៀតនៃ Hölder's Inequality

គ្រប់ចំនួនវិជ្ជមាន $x_1,x_2,....,x_n$ និង $y_1,y_2,...,y_n$

ចំពោះ $p>0,q>0$ និង $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

នោះគេបាន $\sum_{k=1}^{n}(x_k y_k) \le \left(\sum_{k=1}^{n}x_k{}^p\right)^{\frac{1}{p}}\times\left(\sum_{k=1}^{n}y_k{}^q\right)^{\frac{1}{q}}$ ។

៨/ វិសមភាពមិនកូស្គី (Minkowski’s Inequality)

ទ្រឹស្តីបទទី១ ចំពោះចំនួនវិជ្ជមាន $a_1,a_2,...,a_n$ និង

$b_1,b_2,....,b_n$; $\forall n\in\mathbb{N}$ និងចំពោះ $p\geq 1$គេបាន :

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{k=1}^{n}a_k{}^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k{}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$ ។

ទ្រឹស្តីបទទី២ ចំពោះចំនួនវិជ្ជមាន $a_1,a_2,...,a_n$ និង

$b_1,b_2,....,b_n$; $\forall n\in\mathbb{N}$ ដែល $n\geq 2$ គេបាន

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(a_k)}+\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(b_k)}\leq\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)}$$ ។

៩/ វិសមភាពប៊ែនូលី(Bernoulli’s Inequality)

- ចំពោះ $x>-1\,,\,a\in(0,1)$ គេបាន:$(1+x)^a<1+ax$
- ចំពោះ $x>-1,n<1$ គេបាន:$(1+x)^a>1+ax$

៦/ វិសមភាពCHEBYSHEV(Chebyshev's Inequality)

គេអោយពីរស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតវិជ្ជមាន

$a_1, a_2, ..., a_n$ និង $b_1, b_2, ..., b_n$ និង $n \in \mathbb{N}^*$

-ចំពោះ $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ និង $b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$

គេបាន : $\sum_{k=1}^{n}\left(a_k b_k\right) \ge \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\right) \times \sum_{k=1}^{n}\left(b_k\right)$

-ចំពោះ $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ និង $b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n}\left(a_k b_k\right) \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\right) \times \sum_{k=1}^{n}\left(b_k\right)$

៧/ វិសមភាព JENSEN (Jensen's Inequality)

វិសមភាព JENSEN ទម្រង់ទី១

គេឲ្យ n ចំនួនពិត $x_1, x_2, ..., x_n \in I$

- បើ $f''(x) < 0$ និង $\forall x_k \in I$ គេបាន:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[f(x_k)\right] \le f\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k)\right]$$ ។

- បើ $f''(x) > 0$ និង $\forall x_k \in I$ គេបាន:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[f(x_k)\right] \geq f\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k)\right]$$ ។

វិសមភាព JENSEN ទម្រង់ទី២

គេឲ្យ n ចំនួនពិត $x_1, x_2, ..., x_n \in I$ និងចំពោះគ្រប់

ចំនួនវិជ្ជមាន $a_1, a_2, ..., a_n$ ដែលផលបូក $\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\right) = 1$

- បើ $f''(x) < 0$ និង $\forall x_k \in I$ គេបាន:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[a_k f(x_k)\right] \leq f\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k x_k)\right]$$ ។

- បើ $f''(x) > 0$ និង $\forall x_k \in I$ គេបាន:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[f(a_k x_k)\right] \geq f\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k x_k)\right]$$ ។

វិសមភាព JENSEN ទម្រង់ទី៣

គេឲ្យ n ចំនួនពិត $x_1, x_2, ..., x_n \in I$ និងចំពោះគ្រប់

ចំនួនវិជ្ជមាន $a_1, a_2, ..., a_n$ ។

- បើ $f''(x) < 0$ និង $\forall x_k \in I$ គេបាន:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}[a_k f(x_k)]}{\sum_{k=1}^{n}(a_k)} \le f\left[\frac{\sum_{k=1}^{n}(a_k x_k)}{\sum_{k=1}^{n}(a_k)}\right]$$ ។

- បើ $f''(x) > 0$ និង $\forall x_k \in I$ គេបាន:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}[a_k f(x_k)]}{\sum_{k=1}^{n}(a_k)} \ge f\left[\frac{\sum_{k=1}^{n}(a_k x_k)}{\sum_{k=1}^{n}(a_k)}\right]$$

៨/ វិសមភាព Schur (Schur’s Inequality)

គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, c និង $n > 0$ គេបាន

$$a^n(a-b)(a-c) + b^n(b-c)(b-a) + c^n(c-a)(c-b) \ge 0$$

វិសមភាពនេះពិតចំពោះ $a = b = c$ ។

៩/ វិសមភាព (Rearrangement's Inequality)

គេឲ្យ $(a_n)_{n\ge 1}$ និង $(b_n)_{n\ge 1}$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតវិជ្ជមាន កើន ឬចុះព្រមគ្នា ។ ចំពោះគ្រប់ចម្លាស់ (c_n) នៃចំនួន (b_n) គេបាន $\sum_{k=1}^{n}(a_k b_k) \ge \sum_{k=1}^{n}(a_k c_k) \ge \sum_{k=1}^{n}(a_k b_{n-k+1})$

✍✍✍✍✍✍

លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១

គេមានបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន a,b,c ។

ចូរបង្ហាញថា $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$

ដំណោះស្រាយ

តាមវិសមភាព **AM-GM** គេបាន

$$\frac{a^2+b^2}{2} \ge ab \quad (1)$$

$$\frac{b^2+c^2}{2} \ge bc \quad (2)$$

$$\frac{c^2+a^2}{2} \ge ca \quad (3)$$

បូកវិសមភាព (1) , (2) និង (3) គេបាន

$$\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2} \ge ab+bc+ca$$

ដូចនេះ $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$ ។

លំហាត់ទី២

គេមានបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។

ចូរបង្ហាញថា $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\ge 9$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមវិសមភាព **AM-GM** គេបាន

$$a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc} \quad (1)$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \quad (2)$$

គុណវិសមភាព (1) នឹង (2) អង្គនិងអង្គគេបាន

$$(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\ge 9$$ ។

លំហាត់ទី៣

គេមានបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge a+b+c$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមវិសមភាព **AM-GM** គេបាន

$$\frac{a^3}{bc}+b+c\ge 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{bc}.b.c}=3a \quad (1)$$

$$\frac{b^3}{ca}+c+a\ge 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{ca}.c.a}=3b \quad (2)$$

$$\frac{c^3}{ab}+a+b\ge 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{ab}.a.b}=3c \quad (3)$$

បូកវិសមភាព (1), (2) និង (3) អង្គនិងអង្គគេបាន

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}+2(a+b+c)\ge 3(a+b+c)$$

ដូចនេះ $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge a+b+c$ ។

លំហាត់ទី៤

គេមានចំនួនវិជ្ជមាន $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ដែលផលគុណ $a_1.a_2.a_3...a_n = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា
$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)...(1+a_n) \geq 2^n$

ដំណោះស្រាយ

$1+a_k \geq 2\sqrt{a_k}$, $k = 1, 2, 3, ..., n$

គេទាញ

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+a_k\right) \geq \prod_{k=1}^{n}\left(2\sqrt{a_k}\right)$$

$(1+a_1)(1+a_2)....(1+a_n) \geq 2^n\sqrt{a_1.a_2...a_n}$

ដោយ $a_1.a_2.a_3...a_n = 1$

ដូចនេះ $(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)...(1+a_n) \geq 2^n$ ។

លំហាត់ទី៨

ក.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt{\frac{4n-3}{4n+1}} < \frac{4n-1}{4n+1} < \sqrt{\frac{4n-1}{4n+3}}$

ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$

ខ.ទាញបង្ហាញថា

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \frac{3\times 7\times 11\times ....\times(4n-1)}{5\times 9\times 13\times ....\times(4n+1)} < \sqrt{\frac{3}{4n+3}}$$

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt{\frac{4n-3}{4n+1}} < \frac{4n-1}{4n+1} < \sqrt{\frac{4n-1}{4n+3}}$

តាមវិសមភាព AM-GM គេអាចសរសេរ ៖

$$(4n-1)+(4n+3) > 2\sqrt{(4n-1)(4n+3)}$$

$$8n+2 > 2\sqrt{(4n-1)(4n+3)}$$

$$4n+1 > \sqrt{(4n-1)(4n+3)}$$

$$\frac{1}{4n+1} < \frac{1}{\sqrt{(4n-1)(4n+3)}}$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $(4n-1)$ យើងបាន ៖

$$\frac{4n-1}{4n+1} < \sqrt{\frac{4n-1}{4n+3}} \quad (1)$$

ម្យ៉ាងទៀត $(4n-3)+(4n+1) > 2\sqrt{(4n-3)(4n+1)}$

$$8n-2 > 2\sqrt{(4n-3)(4n+1)}$$

$$4n-1 > \sqrt{(4n-3)(4n+1)}$$

ចែកទាំងពីរនឹង $(4n+1)$ យើងបាន ៖

$$\frac{4n-1}{4n+1} > \sqrt{\frac{4n-3}{4n+1}} \quad (2)$$

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេទាញបាន ៖

$$\boxed{\sqrt{\frac{4n-3}{4n+1}} < \frac{4n-1}{4n+1} < \sqrt{\frac{4n-1}{4n+3}}} \quad ។$$

ខ.ទាញបង្ហាញថា

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \frac{3\times 7\times 11\times ....\times(4n-1)}{5\times 9\times 13\times ....\times(4n+1)} < \sqrt{\frac{3}{4n+3}}$$

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន

$$\sqrt{\frac{4n-3}{4n+1}} < \frac{4n-1}{4n+1} < \sqrt{\frac{4n-1}{4n+3}}$$

ចំពោះ $n = 1\,;\,2\,;\,3\,;\,...\,;\,n$ យើងបាន ៖

$$\sqrt{\frac{1}{5}} < \frac{3}{5} < \sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$\sqrt{\frac{5}{9}} < \frac{7}{9} < \sqrt{\frac{7}{11}}$$

$$\sqrt{\frac{9}{13}} < \frac{11}{13} < \sqrt{\frac{11}{15}}$$

$$\sqrt{\frac{4n-3}{4n+1}} < \frac{4n-1}{4n+1} < \sqrt{\frac{4n-1}{4n+3}}$$

គុណវិសមភាពទាំងនេះអង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$\sqrt{\frac{1}{4n+1}} < \frac{3}{5}.\frac{7}{9}.\frac{11}{13}.........\frac{4n-1}{4n+1} < \sqrt{\frac{3}{4n+3}}$$

ដោយគេមាន $\frac{1}{\sqrt{4n+1}} > \frac{1}{\sqrt{4n+4}} = \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$ ។

ដូចនេះ

$$\boxed{\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \frac{3\times7\times11\times.......\times(4n-1)}{5\times9\times13\times.......\times(4n+1)} < \sqrt{\frac{3}{4n+3}}}$$

លំហាត់ទី៦

គេឱ្យ $x\ ;\ y\ ;\ z$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $xyz=1$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}+\frac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}+\frac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6}\ge 2$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}+\frac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}+\frac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6}\ge 2$$

យើងមាន $x^9+y^9=(x^3+y^3)(x^6-x^3y^3+y^6)$

$$x^9+y^9=(x^3+y^3)(x^6+x^3y^3+y^6)-2x^3y^3(x^3+y^3)$$

គេទាញ $\dfrac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}=x^3+y^3-\dfrac{2x^3y^3(x^3+y^3)}{x^6+x^3y^3+y^6}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$

គេមាន $x^6+x^3y^3+y^6\ge 3x^3y^3$

គេបាន $\dfrac{2x^3y^3(x^3+y^3)}{x^6+x^3y^3+y^6}\le\dfrac{2}{3}(x^3+y^3)$

គេទាញ $\dfrac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}\ge x^3+y^3-\dfrac{2}{3}(x^3+y^3)$

ឬ $\dfrac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}\ge\dfrac{1}{3}(x^3+y^3)$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន $\dfrac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}\geq\dfrac{1}{3}(y^3+z^3)$ (2)

$$\frac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6}\geq\frac{1}{3}(z^3+x^3)\quad(3)$$

ធ្វើផលបូក (1) ; (2) និង (3) អង្គ និង អង្គ គេបាន ៖

$$\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}+\frac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}+\frac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6}\geq\frac{2}{3}(x^3+y^3+z^3)$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$

គេបាន $x^3+y^3+z^3\geq 3xyz=3$ ព្រោះ $xyz=1$

ដូចនេះ $\dfrac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}+\dfrac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}+\dfrac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6}\geq 2$ ។

លំហាត់ទី៧

គេឱ្យ a , b ,c ជាចំនួនវិជ្ជមានដែល $ab+bc+ca=3$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\leq\frac{1}{abc}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\leq\frac{1}{abc}$

តាមវិសមភាព AM – GM គេមាន :

$1=\frac{ab+bc+ca}{3}\geq\sqrt[3]{(abc)^2}$ ឬ $abc\leq 1$ ។

គេមាន

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)}=\frac{1}{1+a(ab+ac)}=\frac{1}{1+a(3-bc)}=\frac{1}{3a+(1-abc)}$$

ដោយ $abc\leq 1$ ឬ $1-abc\geq 0$ នោះ $\frac{1}{1+a^2(b+c)}\leq\frac{1}{3a}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\frac{1}{1+b^2(c+a)}\leq\frac{1}{3b}$ (2) , $\frac{1}{1+c^2(a+b)}\leq\frac{1}{3c}$ (3)

បូកវិសមភាព (1) ; (2) និង (3) គេបាន

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\leq\frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{3c}=\frac{ab+bc+ca}{3abc}$$

ដោយ $ab+bc+ca=3$

ដូចនេះ $\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\leq\frac{1}{abc}$ ។

លំហាត់ទី៨

គេឱ្យ a និង b ជាពីរចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានដែល $a^2+b^2=4$ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{ab}{a+b+2}\le\sqrt{2}-1$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\dfrac{ab}{a+b+2}\le\sqrt{2}-1$

យើងមាន $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=4+2ab$

គេទាញ $2ab=(a+b)^2-4=(a+b+2)(a+b-2)$

នាំឱ្យ $\dfrac{ab}{a+b+2}=\dfrac{a+b-2}{2}$

$$\frac{ab}{a+b+2}=\frac{a+b}{2}-1 \quad (1)$$

គេមាន $(a-b)^2+(a+b)^2=2(a^2+b^2)$

គេទាញ $(a+b)^2=2(a^2+b^2)-(a-b)^2\le 2(a^2+b^2)=8$

នាំឱ្យ $a+b\le 2\sqrt{2}$ ឬ $\dfrac{a+b}{2}\le\sqrt{2}$ (2)

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន $\dfrac{ab}{a+b+2}\le\sqrt{2}-1$ ។

លំហាត់ទី៩

(Romanian 2007)

គេឱ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតដែល $a, b, c \in (1, +\infty)$

ឬ $a, b, c \in (0, 1)$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\log_a bc + \log_b ca + \log_c ab \geq 4(\log_{ab} c + \log_{bc} a + \log_{ca} b)$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា

$$\log_a bc + \log_b ca + \log_c ab \geq 4(\log_{ab} c + \log_{bc} a + \log_{ca} b) \quad (*)$$

យើងយក d ជាចំនួនពិតនៃចន្លោះ $(1, +\infty)$ ឬ $(0,1)$ ។

តាមរូបមន្តប្តូរគោលគេបាន $\log_a bc = \dfrac{\log_d bc}{\log_d a} = \dfrac{\log_d b + \log_d c}{\log_d a}$

$$\log_b ca = \frac{\log_d ca}{\log_d b} = \frac{\log_d c + \log_d a}{\log_d b}$$

$$\log_c ab = \frac{\log_d ab}{\log_d c} = \frac{\log_d a + \log_d b}{\log_d c}$$

ដោយយក $x = \log_d a$, $y = \log_d b$, $z = \log_d c$

វិសមភាព (*) សមមូល

$$\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} \geq 4\left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}\right)$$

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{y}{x}+\frac{y}{z}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{z}{y}\right)\ge\frac{4x}{y+z}+\frac{4y}{z+x}+\frac{4z}{x+y}\quad (**)$$

តាមវិសមភាព AM – HM គេមាន

$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{4}{y+z}$ នាំឱ្យ $\frac{x}{y}+\frac{x}{z}\ge\frac{4x}{y+z}$

តាមវិសមភាពនេះគេទាញបាន (**) ពិត ។

ដូចនេះ

$$\log_a bc+\log_b ca+\log_c ab\ge 4(\log_{ab} c+\log_{bc} a+\log_{ca} b)$$

លំហាត់ទី១០

(Selection test for JBMO 2007)

ចូរស្រាយថា $\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \ge xyz + \frac{3}{4}|(x-y)(y-z)(z-x)|$

ចំពោះគ្រប់ $x\,;\,y\,;\,z \ge 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \ge xyz + \frac{3}{4}|(x-y)(y-z)(z-x)|$$

តាង $p = |(x-y)(y-z)(z-x)|$

គេមានឯកលក្ខណភាព

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \quad (i)$$

ចំពោះគ្រប់ $x\,;\,y\,;\,z \ge 0$ គេមាន :

$$x+y \ge |x-y|,\ y+z \ge |y-z|,\ z+x \ge |z-x|$$

គេបាន $2(x+y+z) \ge |x-y|+|y-z|+|z-x|$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន $2(x+y+z) \ge 3\sqrt[3]{p}$ (1)

ម្យ៉ាងទៀតគេមានសមភាព

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx = \frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]$$

តាមវិសមភាព $\mathbf{AM-GM}$ គេបាន :

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\ge\frac{3}{2}\sqrt[3]{p^2}\quad(2)$$

ធ្វើវិធីគុណវិសមភាព (1) និង (2) គេទទួលបាន :

$$2(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\ge\frac{9}{2}p$$

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\ge\frac{9}{4}p\quad(ii)$$

តាម (i) និង (ii) គេបាន $x^3+y^3+z^3-3xyz\ge\frac{9}{4}p$

គេទាញ $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3}\ge xyz+\frac{3}{4}p$

ដោយ $p=|(x-y)(y-z)(z-x)|$

ដូចនេះ $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3}\ge xyz+\frac{3}{4}|(x-y)(y-z)(z-x)|$ ។

លំហាត់ទី១១

គេឱ្យ a , b , c ជាប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{a}{b-a+c}+\frac{b}{a-b+c}+\frac{c}{a+b-c}\ge 3$

(RMC 2000)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{a}{b-a+c}+\frac{b}{a-b+c}+\frac{c}{a+b-c}\ge 3$

តាង $\begin{cases} b-a+c=x \\ a-b+c=y \\ a+b-c=z \end{cases}$ នោះ $a=\frac{y+z}{2}\,;\, b=\frac{z+x}{2}\,;\, c=\frac{x+y}{2}$

យក $T=\frac{a}{b-a+c}+\frac{b}{a-b+c}+\frac{c}{a+b-c}$

$$=\frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}+\frac{x+y}{2z}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\right]\ge\frac{1}{2}(2+2+2)=3$$

ព្រោះ $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\ge 2\,;\,\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\ge 2\,;\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\ge 2$

ដូចនេះ $\frac{a}{b-a+c}+\frac{b}{a-b+c}+\frac{c}{a+b-c}\ge 3$ ។

លំហាត់ទី១២

គេឱ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a^2+b^2+c^2=3$ ។

ចូរបង្ហាញថា $|a|+|b|+|c|-abc\le 4$

(RMC 2004)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $|a|+|b|+|c|-abc\le 4$

តាមវិសមភាព **Cauchy-Schwarz** គេបាន :

$$\left(|a|+|b|+|c|\right)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)=9$$

គេទាញ $|a|+|b|+|c| \le 3 \quad (1)$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន :

$$a^2+b^2+c^2\ge 3\sqrt[3]{(abc)^2}$$

គេទាញ $(abc)^2 \le \left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3=1$ នាំឱ្យ $-1\le abc \le 1$

គេទាញបាន $-abc \ge 1 \quad (2)$

ធ្វើផលបូកវិសមភាព (1) និង (2) គេបាន :

$$|a|+|b|+|c|-abc\le 4$$ ។

លំហាត់ទី១៣

គេឱ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $1+\frac{3}{a+b+c}\ge\frac{6}{ab+bc+ca}$

(JBMO 2003)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $1+\frac{3}{a+b+c}\ge\frac{6}{ab+bc+ca}$

យើងតាង $a=\frac{1}{x}\,;\,b=\frac{1}{y}\,;\,c=\frac{1}{z}$ នោះវិសមភាពអាចសរសេរ :

$$1+\frac{3}{xy+yz+zx}\ge\frac{6}{x+y+z}$$ (ព្រោះ $xyz=\frac{1}{abc}=1$)

យើងមាន $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\ge 0$

គេទាញ $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង $2xy+2yz+2zx$

គេបាន $(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx)$

នាំឱ្យ $1+\frac{3}{xy+yz+zx}\ge 1+\frac{9}{(x+y+z)^2}\ge\frac{6}{x+y+z}$

ព្រោះ $1-\frac{6}{x+y+z}+\frac{9}{(x+y+z)^2}=\left(1-\frac{3}{x+y+z}\right)^2\ge 0$

ដូចនេះ $1+\frac{3}{a+b+c}\ge\frac{6}{ab+bc+ca}$ ។

លំហាត់ទី១៨

បើ x , y , z ជាបីចំនួនពិតខុសពី 1 ដែល $xyz = 1$

នោះចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{x^2}{(1-x)^2}+\frac{y^2}{(1-y)^2}+\frac{z^2}{(1-z)^2} \geq 1$$

(IMO 2008)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{x^2}{(1-x)^2}+\frac{y^2}{(1-y)^2}+\frac{z^2}{(1-z)^2} \geq 1$

តាង $a = \frac{x}{1-x}$; $b = \frac{y}{1-y}$; $c = \frac{z}{1-z}$

គេបាន $abc = \frac{xyz}{(1-x)(1-y)(1-z)} = \frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)}$

ព្រោះ $xyz = 1$

ហើយ $1+a = \frac{1}{1-x}$, $1+b = \frac{1}{1-y}$, $1+c = \frac{1}{1-z}$

គេបាន $(1+a)(1+b)(1+c) = \frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)}$

គេទាញ

$$abc = (1+a)(1+b)(1+b) \Leftrightarrow ab+bc+ca+a+b+c+1 = 0$$

យើងមាន

$$a^2+b^2+c^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)+2(a+b+c)+2$$

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2+2(a+b+c)+2$$

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c+1)^2+1\geq 1$$

ដូចនេះ $\frac{x^2}{(1-x)^2}+\frac{y^2}{(1-y)^2}+\frac{z^2}{(1-z)^2}\geq 1$ ។

លំហាត់ទី១៨

គេឲ្យ a និង b ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2\ge\frac{25}{2}$

(**Indian Mathematical Olympiad 1988**)

ដំណោះស្រាយ

<u>របៀបទី១</u>

បង្ហាញថា $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2\ge\frac{25}{2}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ យើងបាន ៖

$$(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2\ge 2(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})$$

តាង

$$X=2(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})=\frac{2(a^2+1)(b^2+1)}{ab}=2ab+\frac{2(a^2+b^2+1)}{ab}$$

ដោយ $a+b=1$ នាំឲ្យ $a^2+b^2=1-2ab$

គេបាន $X=2ab+\frac{2(2-2ab)}{ab}=2ab-4+\frac{4}{ab}$

តាង $t=ab$ ហើយ $0<t\le\frac{1}{4}$ (ព្រោះ $t=ab\le\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{1}{4}$)

គេបាន $X(t)=2t-4+\frac{4}{t}=2t+\frac{1}{8t}+\frac{31}{8t}-4$

ដោយ $2t+\frac{1}{8t}\ge 2\sqrt{2t.\frac{1}{8t}}=1$ ហើយ $t\le\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{31}{8t}\ge\frac{31}{2}$

គេបាន $X(t)\ge 1+\frac{31}{2}-4=\frac{25}{2}$

ដូចនេះ $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2\ge\frac{25}{2}$ ។

របៀបទី២

ដោយប្រើវិសមភាព $x^2+y^2\ge\frac{(x+y)^2}{2}$

គេបាន $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2\ge\frac{1}{2}(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b})^2$

ដោយ $a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}=(a+b)+\frac{(a+b)}{ab}=1+\frac{1}{ab}$ ព្រោះ $a+b=1$

ហើយ $ab\le\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{1}{4}\Rightarrow 1+\frac{1}{ab}\ge 5$

ដូចនេះ $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2\ge\frac{25}{2}$ ។

លំហាត់ទី១៦

គេឲ្យសមីការ $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ មានឫសបួនវិជ្ជមាន

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$a/\quad pr-16s\ge 0$$

$$b/\quad q^2-36s\ge 0$$

(Indian Mathematical Olympiad 1990)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $pr-16s\ge 0$

តាង y_1, y_2, y_3, y_4 ជាឫសសមីការ $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតគេមានទំនាក់ទំនងឫសដូចខាងក្រោម ៖

$$\begin{cases} y_1+y_2+y_3+y_4=-p \\ y_1y_2+y_1y_3+y_1y_4+y_2y_3+y_2y_4+y_3y_4=q \\ y_1y_2y_3+y_1y_2y_4+y_1y_3y_4+y_2y_3y_4=-r \\ y_1y_2y_3y_4=s \end{cases}$$

តាមវិសមភាព $AM-HM$ គេមាន

$$y_1y_2y_3y_4(y_1+y_2+y_3+y_4)\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\frac{1}{y_3}+\frac{1}{y_4}\right)\ge 16y_1y_2y_3y_4$$

$$(-p)\,(-r)\ge 16s$$

$$pr\quad\ge 16s$$

ដូចនេះ $pr-16s\ge 0$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $q^2 - 36s \geq 0$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេបាន ៖

$$(y_1y_2 + y_1y_3 + y_1y_4 + y_2y_3 + y_2y_4 + y_3y_4)^2 \geq 36y_1y_2y_3y_4$$

$$q^2 \geq 36s$$

ដូចនេះ $q^2 - 36s \geq 0$ ។

លំហាត់ទី១៧

គេឲ្យ $x ; y ; z$ ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx}{6} \le \frac{x+y+z}{3}\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$$

(Hungary-Israel Binational 2009)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា ៖

$$\frac{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx}{6} \le \frac{x+y+z}{3}\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$$

តាង $a = x^2+y^2+z^2$ និង $b = xy+yz+zx$

គេបាន $a+2b = (x+y+z)^2 \Rightarrow x+y+z = \sqrt{a+2b}$

វិសមភាពសមមូល $\frac{a+b}{6} \le \frac{\sqrt{a+2b}}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$

$\Leftrightarrow 3(a+b)^2 \le 4a(a+2b)$

$\Leftrightarrow a^2+2ab-3b^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)(a+3b) \ge 0$

ដោយ $a \ge 0$, $b \ge 0$ នោះ $a+3b \ge 0$

ហើយ $a-b = x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$

ឬ $a-b = \frac{1}{2}\left[\,(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\,\right] \ge 0$

គេទាញ $(a-b)(a+3b) \ge 0$ ពិត

ដូចនេះ $$\frac{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx}{6} \le \frac{x+y+z}{3}\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$$

លំហាត់ទី១៨

គេឲ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន x ; y ; z ដែល

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{2}$$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{x^3+2}+\frac{1}{y^3+2}+\frac{1}{z^3+2}\le\frac{1}{3}$ ។

(**Serbia Junior Balkan Team Selection Test 2009**)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{1}{x^3+2}+\frac{1}{y^3+2}+\frac{1}{z^3+2}\le\frac{1}{3}$

ជាដំបូងយើងត្រូវស្រាយឲ្យឃើញថា $\frac{1}{x^3+2}\le\frac{2}{3(x^2+1)}$ ។

គេមាន $\frac{1}{x^3+2}\le\frac{2}{3(x^2+1)}\Leftrightarrow 2(x^3+2)\ge 3(x^2+1)$

$$\Leftrightarrow 2x^3-3x^2+1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^3-2x^2-x^2+1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(2x+1)\ge 0$$

ហេតុនេះ $\frac{1}{x^3+2}\le\frac{2}{3(x^2+1)}$ **(1)** ពិត

ដូចគ្នាដែរ $\frac{1}{y^3+2}\le\frac{2}{3(y^2+1)}$ **(2)**

និង $\dfrac{1}{z^3+2} \le \dfrac{2}{3(z^2+1)}$ **(3)**

បូកវិសមភាព (1) , (2) និង (3) គេបាន ៖

$$\frac{1}{x^3+2}+\frac{1}{y^3+2}+\frac{1}{z^3+2} \le \frac{2}{3}\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}\right)$$

ដោយ $\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{y^2+1}+\dfrac{1}{z^2+1}=\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ $\dfrac{1}{x^3+2}+\dfrac{1}{y^3+2}+\dfrac{1}{z^3+2} \le \dfrac{1}{3}$ ។

លំហាត់ទី១៩

គេឲ្យ **ABC** ជាត្រីកោណមួយហើយតាង **r** និង **R** រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\le\frac{5}{8}+\frac{r}{4R}$$

(IMO Long lists 1988)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\le\frac{5}{8}+\frac{r}{4R}$$

តាង **a , b , c** ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណ **ABC** ហើយយក

$$p=\frac{a+b+c}{2}$$

គេមាន $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$; $\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

យើងបាន $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$$= 1 + 4\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$$

$$= 1 + 4\frac{\frac{S^2}{p}}{4RS} = 1 + \frac{S}{pR}$$

$$= 1 + \frac{pr}{pR} = 1 + \frac{r}{R}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$$

$$1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2} = 1 + \frac{r}{R}$$

$$3 - 2(\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2}) = 1 + \frac{r}{R}$$

$$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = 1 - \frac{r}{2R} \quad (1)$$

តាមវិសមភាព Jensen យើងមាន ៖

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \le 3\sin(\frac{A+B+C}{6}) = 3\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \le \frac{3}{2}$$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេគេបាន ៖

$$\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \right)^2 \le \frac{9}{4} \quad (2)$$

ដោយប្រើសមភាព

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេទាញបាន ៖

$$1-\frac{r}{2R}+2(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2})\leq\frac{9}{4}$$

ឬ $2(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2})\leq\frac{5}{4}+\frac{r}{2R}$

ដូចនេះ $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\leq\frac{5}{8}+\frac{r}{4R}$ ។

លំហាត់ទី២០

គេឲ្យ $a, b \in [0, 1]$ ។

ចូរស្រាយវិសមភាព $1 - \frac{a+b}{2} + \frac{ab}{3} \geq \frac{1}{1+a+b}$ ។

(**Romania National Olympiad 2008**)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយវិសមភាព $1 - \frac{a+b}{2} + \frac{ab}{3} \geq \frac{1}{1+a+b}$

ដោយ $a, b \in [0, 1]$ នោះយើងតាង $a = \cos x \; ; \; b = \sin x$

ដែល $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ។

យក $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$ ដែល $1 \leq t \leq \sqrt{2}$

គេមាន

$$t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

វិសមភាពដែលត្រូវបង្ហាញសមមូលនឹង $1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2 - 1}{6} \geq \frac{1}{1+t}$

$$\Leftrightarrow \frac{3(2-t)(1+t) + (t^2 - 1)(1+t) - 6}{6(t+1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(t-1)(t^2 - t + 1)}{6(t+1)} \geq 0$$

ដោយ $t - 1 \geq 0$ និង $t^2 - t + 1 = (t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$

នោះ៖ $\frac{(t-1)(t^2-t+1)}{6(t+1)} \geq 0$

ដូចនេះ៖ $1-\frac{a+b}{2}+\frac{ab}{3} \geq \frac{1}{1+a+b}$ ។

លំហាត់ទី២១

គេឲ្យ a, b, c, d ជាបួនចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល

$a+b+c+d=1$ ។

បង្ហាញថា $6(a^3+b^3+c^3+d^3) \ge a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{1}{8}$

(គណិតវិទ្យាសិស្សពូកែប្រទេសបារាំង 2007)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $6(a^3+b^3+c^3+d^3) \ge a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{1}{8}$

តាងអនុគមន៍ $f(x)=6x^3-x^2$ មានក្រាបតំនាង (c)

គេមាន $f'(x)=12x^2-2x$

យកចំនុច $M \in (c)$ មានអាប់ស៊ីស $x=\frac{1}{4}$ និងអរដោនេ

$f(\frac{1}{4})=\frac{1}{32}$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (c) ត្រង់ M គឺ ៖

$y-f(\frac{1}{4})=f'(\frac{1}{4})(x-\frac{1}{4})$

$y-\frac{1}{32}=\frac{5}{8}(x-\frac{1}{4}) \Rightarrow y=\frac{5x}{8}-\frac{1}{8}$

ចំពោះ $x>0$ គេមាន $f(x)-(\frac{5x}{8}-\frac{1}{8})=6(x-\frac{1}{4})^2(x+\frac{1}{3}) \ge 0$

គេទាញ $6x^3-x^2 \ge \frac{5x}{8}-\frac{1}{8}$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$

គេបាន

$$6(a^3+b^3+c^3+d^3)-(a^2+b^2+c^2+d^2)\geq\frac{5}{8}(a+b+c+d)-\frac{4}{8}$$

ដូចនេះ $6(a^3+b^3+c^3+d^3)\geq a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{1}{8}$ ។

លំហាត់ទី២២

គេឲ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc = 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a}{a^2+2} + \frac{b}{b^2+2} + \frac{c}{c^2+2} \le 1$

(**Baltic Way 2005**)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{a}{a^2+2} + \frac{b}{b^2+2} + \frac{c}{c^2+2} \le 1$

យើងមាន $(a-1)^2 = a^2 - 2a + 1 \ge 0$

គេទាញ $a^2 + 2 \ge 2a + 1$ នាំឲ្យ $\frac{a}{a^2+2} \le \frac{a}{2a+1}$

ស្រាយតាមរបៀបដូចគ្នា $\frac{b}{b^2+2} \le \frac{b}{2b+1}$; $\frac{c}{c^2+2} \le \frac{c}{2c+1}$

គេបាន $\frac{a}{a^2+2} + \frac{b}{b^2+2} + \frac{c}{c^2+2} \le \frac{a}{2a+1} + \frac{b}{2b+1} + \frac{c}{2c+1}$ (1)

មាន $\frac{a}{2a+1} + \frac{b}{2b+1} + \frac{c}{2c+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2b+1} + \frac{1}{2c+1}\right)$

ដោយ $\frac{1}{2a+1} = \frac{bc}{2abc+bc} = \frac{bc}{2+bc}$ (ព្រោះ $abc = 1$)

ដូចគ្នាដែរ $\frac{1}{2b+1} = \frac{ac}{2+ac}$, $\frac{1}{2c+1} = \frac{ab}{2+ab}$

គេទាញ $\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2b+1} + \frac{1}{2c+1} = \frac{bc}{2+bc} + \frac{ac}{2+ac} + \frac{ab}{2+ab}$

ដោយ $\frac{bc}{2+bc} + \frac{ac}{2+ac} + \frac{ab}{2+ab} \ge \frac{(\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+\sqrt{ab})^2}{6+bc+ca+ab}$

គេទាញ

$$\frac{a}{2a+1}+\frac{b}{2b+1}+\frac{c}{2c+1}\le\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\frac{(\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+\sqrt{ab})^2}{6+bc+ca+ab}\ \ (2)$$

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន ៖

$$\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\le\frac{3}{2}-\frac{1}{2}.\frac{(\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+\sqrt{ab})^2}{6+bc+ca+ab}\ \ (3)$$

ជាបន្តទៅនេះយើងនឹងស្រាយថា $\frac{(\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+\sqrt{ab})^2}{6+bc+ca+ab}\ge 1$

តាង $x=\sqrt{ab}\ ;\ y=\sqrt{bc}\ ;\ z=\sqrt{ac}$ ហើយ $xyz=abc=1$

វិសមភាពសមមូល $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2}{6+x+y+z}\ge 1$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2\ge 6+x+y+z$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx})\ge 6$$

តាមវិមសមភាព $AM-GM$ $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\ge 3\sqrt[3]{xyz}=3$

គេទាញ $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2}{6+x+y+z}\ge 1$ ពិត

ហើយ $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2}{6+x+y+z}\ge 1$ ពិត

ហេតុនេះតាម (3) គេបាន

$$\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\le\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$$

ដូចនេះ $\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\le 1$ ។

លំហាត់ទី២៣

គេតាង a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងរបស់ត្រីកោណ ABC ហើយតាង r និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

ចូរស្រាយថា $a+b+c \geq 2\sqrt{3r(r+4R)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $a+b+c \geq 2\sqrt{3r(r+4R)}$

គេមាន $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$

$$a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ac+a^2 \geq 0$$

$$2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca) \geq 0$$

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង $2ab+2bc+2ca$ គេបាន ៖

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \geq 3(ab+bc+ca)$$

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \quad (1)$$

តាង $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ,

តាមរូបមន្តហេរ៉ុង $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr$

គេបាន $p(p-a)(p-b)(p-c)=p^2r^2$

$$(p-a)(p-b)(p-c)=pr^2$$
$$p^3-(a+b+c)p^2+(ab+bc+ca)p-abc=pr^2$$
$$p^3-2p^3+(ab+bc+ca)p-abc=pr^2$$
$$-p^3+(ab+bc+ca)p-abc=pr^2$$

គេទាញ $ab+bc+ca=r^2+p^2+\dfrac{abc}{p}$

គេមាន $S=pr=\dfrac{abc}{4R}\Rightarrow\dfrac{abc}{p}=4rR$

គេបាន $ab+bc+ca=r^2+p^2+4rR\ \ (2)$

យកទំនាក់ទំនង (2) ជួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$4p^2\geq 3(r^2+p^2+4rR)\Leftrightarrow p^2\geq 3r(r+4R)$$
$$\Leftrightarrow p\ \geq\sqrt{3r(r+4R)}$$

ដោយ $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ នោះ $\dfrac{a+b+c}{2}\geq\sqrt{3r(r+4R)}$

ដូចនេះ $a+b+c\geq 2\sqrt{3r(r+4R)}$ ។

លំហាត់ទី២៨

គេឲ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{b+c}{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}+\frac{c+a}{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}+\frac{a+b}{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}\le 2$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា ៖

$$\frac{b+c}{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}+\frac{c+a}{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}+\frac{a+b}{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}\le 2$$

គេមាន $b^3+c^3=(b+c)^3-3bc(b+c)$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $b+c\ge 2\sqrt{bc}$

គេទាញ $bc\le\left(\frac{b+c}{2}\right)^2$ នាំឲ្យ $-3bc(b+c)\ge -\frac{3}{4}(b+c)^3$

គេបាន $b^3+c^3\ge(b+c)^3-\frac{3}{4}(b+c)^3=\frac{1}{4}(b+c)^3$

គេទាញ $b+c\le\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}$

ឬ $a+b+c\le a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}$

នាំឲ្យ $\frac{b+c}{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}\le\frac{b+c}{a+b+c}\quad(1)$

ដូចគ្នាដែរ $\frac{c+a}{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}\le\frac{c+a}{a+b+c}\quad(2)$

និង $\dfrac{a+b}{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}} \le \dfrac{a+b}{a+b+c}$ (3) ។

ដោយបូកទំនាក់ទំនង $(1),(2),(3)$ គេបាន ៖

$$\frac{b+c}{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}+\frac{c+a}{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}+\frac{a+b}{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}} \le 2$$ ។

លំហាត់ទី២៨

ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\geq 4\sqrt{\frac{R}{r}}$$

ដែល r និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\geq 4\sqrt{\frac{R}{r}}$ (1)

តាង $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសក្នុងត្រីកោណ ABC គេមាន ៖

$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$ ដោយ $\cos A=1-2\sin^2\frac{A}{2}$

នោះ $a^2=b^2+c^2-2bc(1-2\sin^2\frac{A}{2})$

គេទាញ $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}$

តាង $p=\frac{a+b+c}{2}$ (កន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ)

គេបាន $a+b-c=2(p-c)$ និង $a-b+c=2(p-b)$

គេបាន $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}$

នាំឲ្យ $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ ។ ដូចគ្នាដែរគេទាញ ៖

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\ ;\ \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

គេបាន $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$

គេមាន $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr=\frac{abc}{4R}$

គេទាញ $abc=4R.S$ និង $(p-a)(p-b)(p-c)=\frac{S^2}{p}=r.S$

គេបាន $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r.S}{4R.S}=\frac{r}{4R}$ ។

វិសមភាព (1) សមមូលទៅនឹង ៖

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\geq 4\sqrt{\frac{1}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}}$$

$$\sqrt{\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}}+\sqrt{\frac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}}+\sqrt{\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}}\geq 2 \qquad (2)$$

ដោយ $\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)^2(p-b)(p-c)}{a^2bc}}=\frac{p-a}{a}\sin\frac{A}{2}$

គេទាញ $\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{p-a}{a}$ ។

ដូចគ្នាដែរគេទាញបាន ៖

$$\frac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}=\frac{p-b}{b}$$ និង $$\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{p-c}{c}$$

វិសមភាព (2) សមមូលទៅនឹង ៖

$$\sqrt{\frac{p-a}{a}}+\sqrt{\frac{p-b}{b}}+\sqrt{\frac{p-c}{c}}\ \geq 2$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន ៖

$p=(p-a)+a\geq 2\sqrt{(p-a)a}$ នាំឲ្យ $\sqrt{\frac{p-a}{a}}\geq\frac{2(p-a)}{p}$

ដូចគ្នាដែរ $\sqrt{\frac{p-b}{b}}\geq\frac{2(p-b)}{p}$ និង $\sqrt{\frac{p-c}{c}}\geq\frac{2(p-c)}{p}$

គេបាន

$$\sqrt{\frac{p-a}{a}}+\sqrt{\frac{p-b}{b}}+\sqrt{\frac{p-c}{c}}\ \geq 2\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{p}$$

$$\sqrt{\frac{p-a}{a}}+\sqrt{\frac{p-b}{b}}+\sqrt{\frac{p-c}{c}}\geq 2$$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\geq 4\sqrt{\frac{R}{r}}$ ។

លំហាត់ទី២៦

គេឲ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $4abc = a + b + c + 1$

ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b} + \frac{a^2 + b^2}{c} \geq 2(ab + bc + ca)$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា ៖

$$\frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b} + \frac{a^2 + b^2}{c} \geq 2(ab + bc + ca)$$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេមាន ៖

$4abc = a + b + c + 1 \geq 4\sqrt[4]{abc}$ នាំឲ្យ $abc \geq 1$

គេទាញ $a + b + c = 4abc - 1 \geq 3abc$ (1) (ព្រោះ $abc \geq 1$)

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេបាន ៖

$$\frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b} + \frac{a^2 + b^2}{c} \geq \frac{2bc}{a} + \frac{2ca}{b} + \frac{2ab}{c} \quad (2)$$

តាមវិសមភាព Cauchy - Schwarz គេមាន ៖

$$(ab + bc + ca)^2 \leq 3\left[(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2\right]$$

ដោយ $\frac{2bc}{a} + \frac{2ca}{b} + \frac{2ab}{c} = \frac{2}{abc}[(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2]$

គេទាញ $\frac{2bc}{a} + \frac{2ca}{b} + \frac{2ab}{c} \geq \frac{2}{3abc}(ab + bc + ca)^2 \quad (3)$

តាម (2) និង (3) គេទាញបាន៖

$$\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}+\frac{a^2+b^2}{c}\ge\frac{2}{3abc}(ab+bc+ca)^2\ (4)$$

យើងមាន $\begin{cases}(ab)^2+(bc)^2\ge 2ab^2c\\(bc)^2+(ca)^2\ge 2abc^2\\(ca)^2+(ab)^2\ge 2a^2bc\end{cases}$

គេបាន $2[\,(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\,]\ge 2abc(a+b+c)$

$$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\ge abc(a+b+c)$$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង $2(ab)(bc)+2(ab)(ca)+2(bc)(ca)$

គេបាន $(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)$

គេមាន $a+b+c\ge 3abc$ (តាម (1))

គេទាញ $(ab+bc+ca)^2\ge 9a^2b^2c^2$

ឬ $ab+bc+ca\ge 3abc$

នាំឲ្យ $\frac{2}{3abc}(ab+bc+ca)^2\ge 2(ab+bc+ca)\ (5)$

តាម (4) និង (5) គេទាញបាន ៖

$$\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}+\frac{a^2+b^2}{c}\ge 2(ab+bc+ca)$$ ។

លំហាត់ទី២៧

គេឲ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $ab+bc+ca=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $(a+\frac{1}{b})^2+(b+\frac{1}{c})^2+(c+\frac{1}{a})^2\ge 16$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $(a+\frac{1}{b})^2+(b+\frac{1}{c})^2+(c+\frac{1}{a})^2\ge 16$

តាង $A=(a+\frac{1}{b})^2+(b+\frac{1}{c})^2+(c+\frac{1}{a})^2$

$$=a^2+b^2+c^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$$

យើងពិនិត្យ $\frac{1}{a^2}=\frac{ab+bc+ca}{a^2}=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{bc}{a^2}$

$$\frac{1}{b^2}=\frac{ab+bc+ca}{b^2}=\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{ac}{b^2}$$

$$\frac{1}{c^2}=\frac{ab+bc+ca}{c^2}=\frac{b}{c}+\frac{a}{c}+\frac{ab}{c^2}$$

តាមវិសមភាព AM – GM គេមាន ៖

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$; $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\ge 2$, $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\ge 2$, $\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}\ge 3$

គេបាន $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge 2+2+2+3=9$

ហើយ $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{a}}=3$

ម្យ៉ាងទៀត $a^2+b^2\ge 2ab$, $b^2+c^2\ge 2bc$; $c^2+a^2\ge 2ca$

នាំឲ្យ $2a^2+2b^2+2c^2 \ge 2ab+2bc+2ca$

នាំឲ្យ $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca=1$

គេបាន $A \ge 1+9+2(3)=16$ ។

ដូចនេះ៖ $(a+\frac{1}{b})^2+(b+\frac{1}{c})^2+(c+\frac{1}{a})^2 \ge 16$ ។

លំហាត់ទី២៨

គេឲ្យ a, b, c ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយនិងតាង p ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $A>0\,;B>0$ គេមាន ៖

$(A-B)^2=A^2-2A.B+B^2\geq 0$

ឬ $A^2+2A.B+B^2\geq 4\,A.B$

$$(A+B)^2\geq 4A.B$$

គេទាញបាន $\frac{A+B}{A.B}\geq\frac{4}{A+B}$ ឬ $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\geq\frac{4}{A+B}$ (1)

យក $A=p-a\,,\ B=p-b$

គេបាន $A+B=2p-a-b=c$ ជួសក្នុង (1)

គេបាន $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}\geq\frac{4}{c}$ (2)។

ដូចគ្នាដែរគេទាញ៖

$\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\geq\frac{4}{a}$ (3) និង $\frac{1}{p-c}+\frac{1}{p-a}\geq\frac{4}{b}$ (4)

បូកវិសមភាព $(2),(3),(4)$ អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$\frac{2}{p-a}+\frac{2}{p-b}+\frac{2}{p-c}\geq\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}$$

ដូចនេះ $$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$ ។

លំហាត់ទី២៩

គេឲ្យ $a ; b ; c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

តាង $\begin{cases} b+c=m \\ c+a=n \\ a+b=p \end{cases}$

គេបាន $(b+c)+(c+a)+(a+b)=m+n+p$

នាំឲ្យ $a+b+c=\frac{m+n+p}{2}$

គេទាញ $\begin{cases} a=\frac{n+p-m}{2} \\ b=\frac{m-n+p}{2} \\ c=\frac{m+n-p}{2} \end{cases}$

គេបាន

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{n+p-m}{2m}+\frac{m-n+p}{2n}+\frac{m+n-p}{2p}$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\right)+\left(\frac{p}{m}+\frac{m}{p}\right)+\left(\frac{n}{p}+\frac{p}{n}\right)-3\right]$$

តាមវិសមភាព AM – GM គេបាន ៖

$$\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\ge 2\ ;\ \frac{p}{m}+\frac{m}{p}\ge 2\ ;\ \frac{n}{p}+\frac{p}{n}\ge 2$$

គេបាន $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{1}{2}\left(2+2+2-3\right)=\frac{3}{2}$

ដូចនេះ $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$ ។

លំហាត់ទី៣០

គេឲ្យ $a ; b ; c$ ជាបីចំនួនពិតខុសពីសូន្យ ។

ចូរបង្ហាញថា $\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2 \geq \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2 \geq \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$

តាមវិសមភាព **AM – GM** គេមាន ៖

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{b^2}{c^2}\cdot\frac{c^2}{a^2}}=3$$

គេទាញ $\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2 \geq 3 \quad (1)$

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $\begin{cases}\left(\frac{a}{b}\right)^2+1\geq 2\frac{a}{b}\\ \left(\frac{b}{c}\right)^2+1\geq 2\frac{b}{c}\\ \left(\frac{c}{a}\right)^2+1\geq 2\frac{c}{a}\end{cases}$

គេទាញបាន $\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2+3 \geq 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \quad (2)$

បូកវិសមភាព (1) និង (2) អង្គ និង អង្គ គេបាន ៖

$$3+2\left[\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2\right]\geq 3+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$$

$$2\left[\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2\right]\geq 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}$ ។

លំហាត់ទី៣១

ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \ge 1$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \ge 1$

ជាដំបូងយើងត្រូវស្រាយថា $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \ge \frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$

វិសមភាពនេះសមមូល $(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})^2 \ge a^{\frac{4}{3}}(a^2+8bc)$

សមមូល $b^{\frac{8}{3}}+c^{\frac{8}{3}}+2a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{4}{3}}+2a^{\frac{4}{3}}c^{\frac{4}{3}}+2b^{\frac{4}{3}}c^{\frac{4}{3}} \ge 8a^{\frac{4}{3}}bc$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $b^{\frac{8}{3}}+c^{\frac{8}{3}} \ge 2b^{\frac{4}{3}}c^{\frac{4}{3}}$

គេទាញ $b^{\frac{8}{3}}+c^{\frac{8}{3}}+2a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{4}{3}}+2a^{\frac{4}{3}}c^{\frac{4}{3}}+2b^{\frac{4}{3}}c^{\frac{4}{3}} \ge 8a^{\frac{4}{3}}bc$ ពិត

ហេតុនេះ $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \ge \frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$ (1)

ដូចគ្នាដែរគេទាញ $\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}} \ge \frac{b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$ (2)

ហើយ $$\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \ge \frac{c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}} \quad (3)$$

ដោយបូកវិសមភាព (1) , (2) , (3) អង្គនិងអង្គគេបាន

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \ge 1$$ ។

លំហាត់ទី៣២

គេឲ្យ n ចំនួនពិត $a_1 ; a_2 ; a_3 ;.......; a_n \geq 0$ ។

គេតាង $S_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}$, $\forall n \in IN^*$

ចូរស្រាយថាបើ $S_{n+1} \geq \sqrt[n+1]{a_1 .a_2 .a_3 ....a_n a_{n+1}}$

នោះគេបាន $S_n \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 .....a_n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាបើ $S_{n+1} \geq \sqrt[n+1]{a_1 .a_2 .a_3 ....a_n a_{n+1}}$

នោះគេបាន $S_n \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 .....a_n}$

យើងមាន $S_{n+1} \geq \sqrt[n+1]{a_1 .a_2 .a_3 ....a_n a_{n+1}}$

ដោយ $S_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}$

នោះ $S_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + a_{n+1}}{n+1}$

គេបាន ៖

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + a_{n+1}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{a_1 a_2 a_3 ....a_n a_{n+1}} \quad (1)$$

យក $a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}$ ជួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$\frac{a_1+a_2+....+a_n+\dfrac{a_1+a_2+.....+a_n}{n}}{n+1} \ge \sqrt[n+1]{a_1.a_2...a_n.\frac{a_1+a_2+....+a_n}{n}}$$

$$\frac{a_1+a_2+.......+a_n}{n} \ge \sqrt[n+1]{a_1.a_2....a_n.\frac{a_1+a_2+....+a_n}{n}}$$

$$\left(\frac{a_1+a_2+.........+a_n}{n}\right)^{n+1} \ge a_1.a_2.....a_n\frac{a_1+a_2+......+a_n}{n}$$

$$\left(\frac{a_1+a_2+.......+a_n}{n}\right)^{n} \ge a_1.a_2......a_n$$

$$\frac{a_1+a_2+.......+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1.a_2.........a_n}$$

គេទាញ $S_n \ge \sqrt[n]{a_1a_2a_3.....a_n}$

ដូចនេះ បើ $S_{n+1} \ge \sqrt[n+1]{a_1.a_2.a_3.......a_na_{n+1}}$

នោះគេបាន $S_n \ge \sqrt[n]{a_1a_2a_3.....a_n}$ ។

លំហាត់ទី៣៣

គេឲ្យពីរចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ។

ចូរបង្ហាញថា $(1+a)(1+b) \ge (1+\sqrt{ab})^2$

អនុវត្តន៍ រកតម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍ ៖

$f(x) = (1+4^{\sin^2 x})(1+4^{\cos^2 x})$ ដែល $x \in IR$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $(1+a)(1+b) \ge (1+\sqrt{ab})^2$

យើងមាន $(1+a)(1+b) = 1+(a+b)+ab \quad (1)$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $a+b \ge 2\sqrt{ab}$

តាម (1) គេទាញបាន $(1+a)(1+b) \ge 1+2\sqrt{ab}+ab$

ដោយ $1+2\sqrt{ab}+ab = (1+\sqrt{ab})^2$

ដូចនេះ $(1+a)(1+b) \ge (1+\sqrt{ab})^2$

ដោយប្រើវិសមភាពខាងលើនេះគេទាញបាន ៖

$$f(x) = (1+4^{\sin^2 x})(1+4^{\cos^2 x}) \ge (1+\sqrt{4^{\sin^2 x+\cos^2 x}})^2 = 9$$

ដូចនេះតម្លៃអប្បបរមានៃអនុគមន៍ស្មើនឹង 9 ។

លំហាត់ទី៣៨

គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b និង c ។

ចូរបង្ហាញថា $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន ៖

$a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad (1)$

$b+c \geq 2\sqrt{bc} \quad (2)$

$c+a \geq 2\sqrt{ca} \quad (3)$

ធ្វើវិធីគុណ (1) , (2) និង (3) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8\sqrt{ab}.\sqrt{bc}.\sqrt{ca}$

ដូចនេះ $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ ។

លំហាត់ទី៣៨

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ចូរស្រាយថា ៖

$$(1+\sin x)(1+\cos x)\le \frac{3}{2}+\sqrt{2}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(1+\sin x)(1+\cos x)\le \frac{3}{2}+\sqrt{2}$

យើងមាន $(a-b)^2\ge 0$ ចំពោះគ្រប់ $a\ ,\ b\in IR$

គេបាន $a^2-2ab+b^2\ge 0$

គេទាញ $a.b\ \le\ \frac{a^2+b^2}{2}$

ដោយជ្រើសរើសយក $a=1+\sin x$ និង $b=1+\cos x$

គេបាន $(1+\sin x)(1+\cos x)\le \frac{(1+\sin x)^2+(1+\cos x)^2}{2}$

$$(1+\sin x)(1+\cos x)\le \frac{3+2(\sin x+\cos x)}{2}\quad (1)$$

គេមាន $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\le\sqrt{2}$

តាម (1) គេទាញ $(1+\sin x)(1+\cos x)\le \frac{3+2\sqrt{2}}{2}$

ដូចនេះ $(1+\sin x)(1+\cos x)\le \frac{3}{2}+\sqrt{2}$ ។

លំហាត់ទី៣៦

គេឲ្យ n ចំនួន $a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in (0,1)$ ហើយគេតាង

$$t_n = n.\frac{a_1.a_2.a_3....a_n}{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}$$ ។

ចូរស្រាយថា $\sum_{k=1}^{n}\left(\log_{a_k} t_n\right) \ge (n-1)n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\sum_{k=1}^{n}\left(\log_{a_k} t_n\right) \ge (n-1)n$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គ្រប់ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in (0,1)$

គេមាន $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1.a_2.a_3...a_n}$

គេទាញ $t_n \le \left(a_1.a_2.a_3....a_n\right)^{\frac{n-1}{n}}$ ដោយ $0 < a_k < 1$

គេទាញ $\log_{a_k}(t_n) \ge \frac{n-1}{n}.\log_{a_k}(a_1.a_2...a_k)$

ឬ $\sum_{k=1}^{n}\left[\log_{a_k}(t_n)\right] \ge \frac{n-1}{n}.\sum_{k=1}^{n}\left[\log_{a_k}\left(a_1.a_2...a_k\right)\right]$ (*)

តាង $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\log_{a_k}(a_1.a_2....a_k)\right]$

$$= n + (\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_1) + ... + (\log_{a_n} a_1 + \log_{a_1} a_n) + ... +$$

$$.... + (\log_{a_{n-1}} a_n + \log_{a_n} a_{n-1})$$

តាមវិសមភាព $t + \frac{1}{t} \ge 2\ , \forall t > 0$ គេទាញបាន ៖

$$S_n \geq n + 2(n-1) + 2(n-2) + ... + 2 \ ] = n^2$$

តាមទំនាក់ទំនង $(*)$ គេទាញបាន ៖

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\log_{a_k} t_n\right) \geq (n-1)n$$ ។

លំហាត់ទី៣៧

គេឲ្យ $a \ge 1$ និង $b \ge 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b} \le 2\sqrt{\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b} \le 2\sqrt{\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)}$

ចំពោះ $a \ge 1$ និង $b \ge 1$

យើងមាន $a + b \ge 2\sqrt{a.b}$ (វិសមភាព $AM - GM$)

ឬ $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{a.b}$

នាំឲ្យ $\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right) \ge \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$

ឬ $\log_2 a + \log_2 b \le 2\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)$ (1)

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន ៖

$\log_2 a + \log_2 b \ge 2\sqrt{\log_2 a}.\sqrt{\log_2 b}$

$$2(\log_2 a+\log_2 b)\geq \log_2 a+2\sqrt{\log_2 a}.\sqrt{\log_2 b}+\log_2 b$$

$$2(\log_2 a+\log_2 b)\geq (\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b})^2$$

$$\log_2 a+\log_2 b\geq \frac{1}{2}(\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b})^2 \quad (2)$$

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) យើងទាញ៖

$$\frac{1}{2}(\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b})^2\leq 2\log_2(\frac{a+b}{2})$$

$$(\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b})^2\leq 4\log_2(\frac{a+b}{2})$$

$$\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b}\leq 2\sqrt{\log_2(\frac{a+b}{2})}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b}\leq 2\sqrt{\log_2(\frac{a+b}{2})}}$ ។

លំហាត់ទី៣៨

គេឲ្យ θ ជាចំនួនពិតដែល $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $(\sin\theta)^{\cos\theta}+(\cos\theta)^{\sin\theta}>1$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $(\sin\theta)^{\cos\theta}+(\cos\theta)^{\sin\theta}>1$

តាមវិសមភាព **Bernoulli**

គេមាន $(1+x)^{\alpha}\le 1+\alpha x\ ,\ \forall x>-1\ ,\ \alpha>0$

យើងមាន ៖

$$\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^{\cos\theta}=\left(1+\frac{1-\sin\theta}{\sin\theta}\right)^{\cos\theta}$$

$$\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^{\cos\theta}<1+\frac{\cos\theta(1-\sin\theta)}{\sin\theta}$$

$$\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^{\cos\theta}<\frac{\sin\theta+\cos\theta-\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}$$

ឬ $(\sin\theta)^{\cos\theta}>\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta-\sin\theta\cos\theta}$ (1)

ស្រាយដូចខាងលើនេះដែរយើងបាន៖

$$(\cos\theta)^{\sin\theta}>\frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta-\sin\theta\cos\theta}\quad(2)$$

បូកវិសមភាព (1) និង (2)ខាងលើនេះយើងបាន ៖

$$(\sin\theta)^{\cos\theta}+(\cos\theta)^{\sin\theta}>\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta-\sin\theta\cos\theta}$$

ដោយគេមាន $\frac{\text{son}\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta-\sin\theta\cos\theta}>1$

ដូចនេះ $(\sin\theta)^{\cos\theta}+(\cos\theta)^{\sin\theta}>1$ ។

លំហាត់ទី៣៩

គេឲ្យបួនចំនួនវិជ្ជមាន $a\ ,\ b\ ,\ c\ ,\ d$ ។

ចូរបង្ហាញថា ៖

$$1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$

ចំពោះគ្រប់ $a>0\ ,b>0\ ,\ c>0\ ,d>0$

យើងមាន $\begin{cases} a+b+c+d>a+b+c>a+c \\ a+b+c+d>b+c+d>b+d \\ a+b+c+d>c+d+a>c+a \\ a+b+c+d>d+a+b>b+d \end{cases}$

គេទាញ $\begin{cases} \frac{a}{a+b+c+d}<\frac{a}{a+b+c}<\frac{a}{a+c} \\ \frac{b}{a+b+c+d}<\frac{b}{b+c+d}<\frac{b}{b+d} \\ \frac{c}{a+b+c+d}<\frac{c}{c+d+a}<\frac{c}{a+c} \\ \frac{d}{a+b+c+d}<\frac{d}{d+a+b}<\frac{d}{b+d} \end{cases}$

ដោយបូកទំនាក់ទំនងទាំងនេះអង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$$

លំហាត់ទី៤០

គេមានបីចំនួនពិត $a > 0 ; b > 0 ; c > 0$ ។

ចូរស្រាយថា $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \geq 6abc$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \geq 6abc$

តាង $A = ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)-6abc$

$$A = a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+a^2c-6abc$$

$$A = (a^2b+bc^2-2abc)+(ab^2+ac^2-2abc)+(ca^2+cb^2-2abc)$$

$$A = b(a^2+c^2-2ac)+a(b^2+c^2-2bc)+c(a^2+b^2-2ab)$$

$$A = b(a-c)^2+a(b-c)^2+c(a-b)^2 \geq 0 \quad , \forall a,b,c > 0$$

ដូចនេះ $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \geq 6abc$ ។

លំហាត់ទី៨១

គេឲ្យពីរចំនួន x និង y ខុសពីសូន្យ និង មានសញ្ញាដូចគ្នា ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+4\geq 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+4\geq 0$

តាង $P=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ គេបាន $P^2=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2$

យក $M=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+4$

គេបាន $M=P^2-2-3P+4=P^2-3P+2=(P-1)(P-2)$

ដោយ $P-2=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2=\frac{(x-y)^2}{xy}\geq 0$

(ព្រោះ x និង y មានសញ្ញាដូចគ្នា)

ហេតុនេះ $M=(P-2)(P-1)\geq 0$ ។

ដូចនេះ $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+4\geq 0$ ។

លំហាត់ទី៤២

គេឲ្យ $a ; b ; c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដាច់ខាត ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{a+b+c}{2}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{a+b+c}{2}$

តាង $T=\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}$

$$T=(\frac{a^2}{b+c}+a)+(\frac{b^2}{c+a}+b)+(\frac{c^2}{a+b}+c)-(a+b+c)$$

$$T=\frac{a(a+b+c)}{b+c}+\frac{b(b+c+a)}{c+a}+\frac{c(c+a+b)}{a+b}-(a+b+c)$$

$$T=(a+b+c)(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{a+b}-1)$$

$$T=\left(a+b+c\right)\left[(\frac{a}{b+c}+1)+(\frac{b}{c+a}+1)+(\frac{c}{a+b}+1)-4\right]$$

$$T=\left(a+b+c\right)\left[(a+b+c)\,(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b})-4\right]\ (1)$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ យើងមាន ៖

$$(a+b)+(b+c)+(c+a)\geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$2(a+b+c)\geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

គេទាញ $a+b+c\geq\frac{3}{2}\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}\ (2)$

និង $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$ (3)

គុណវិសមភាព (2) និង (3) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$(a+b+c)\ (\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a})\geq\frac{9}{2}$$

$$(a+b+c)\ (\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a})-4\geq\frac{9}{2}-4$$

$$(a+b+c)\ (\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a})-4\geq\frac{1}{2}$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $a+b+c>0$ គេបាន ៖

$$(a+b+c)\left[(a+b+c)(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a})-4\right]\geq\frac{a+b+c}{2}\quad (5)$$

តាមទំនាក់ទំនង (4) និង (5) គេបាន $T\geq\dfrac{a+b+c}{2}$

ដូចនេះ $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}\geq\dfrac{a+b+c}{2}$ ។

លំហាត់ទី៨៣

គេឲ្យ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)} \le 1+\sqrt{2}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)} \le 1+\sqrt{2}$$

យើងមាន ៖

$$\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right) = 1+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x\cos x}$$

តាមវិសមភាព AM – GM គេមាន ៖

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x} \ge 2\sqrt{\frac{1}{\sin x\cos x}}$$

គេទាញ ៖

$$\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right) \ge 1+2\sqrt{\frac{1}{\sin x\cos x}}+\frac{1}{\sin x\cos x}$$

ដោយ $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x \le \frac{1}{2}$ ឬ $\frac{1}{\sin x\cos x} \ge 2$

គេបាន $\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right) \ge 1+2\sqrt{2}+2 = (1+\sqrt{2})^2$

ដូចនេះ $\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)} \leq 1+\sqrt{2}$ ។

លំហាត់ទី៨៨

គេឲ្យ a , b , c ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព ៖

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0$

តាង $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$ ដែល $x,y,z>0$

វិសមភាព $a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0$

សមមូលទៅនឹងវិសមភាពខាងក្រោម ៖

$$(y+z)^2(z+x)(y-x)+(z+x)^2(x+y)(z-y)+(x+y)^2(y+z)(x-z)\ge 0$$

$$x^3z+y^3x+z^3y-x^2yz-y^2zx-z^2xy\ge 0$$

$$x^3z+y^3x+z^3y\ge x^2yz+y^2zx+z^2xy$$

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{z}\ge x+y+z$$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz គេមាន ៖

$$(x+y+z)^2\le (x+y+z)(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{z})$$

គេទាញ $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\ge x+y+z$ ពិត ។

ដូចនេះ $a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0$ ។

លំហាត់ទី៤៥

គេឲ្យ a , b , c ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយដែលមានផ្ទៃក្រឡា ស្មើនឹង S ។ ចូរស្រាយថា $a^2+b^2+c^2 \ge 4\sqrt{3}\,S$?

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $a^2+b^2+c^2 \ge 4\sqrt{3}\,S$

គេមាន $S=\frac{1}{2}bc\sin A$ នាំឲ្យ $\sin A=\frac{2S}{bc}$

ហើយ $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ (ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស)

គេបាន $\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$

ដូចគ្នាដែរ $\cot B=\frac{c^2+a^2-b^2}{4S}$; $\cot C=\frac{a^2+b^2-c^2}{4S}$

គេបាន $\cot A+\cot B+\cot C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$

នាំឲ្យ $a^2+b^2+c^2=4S\,(\cot A+\cot B+\cot C)$ (1)

ជាបន្តទៅនេះយើងនឹងស្រាយថា $\cot A+\cot B+\cot C \ge \sqrt{3}$ ។

គេមាន $A+B+C=\pi$ នោះ $A=\pi-(B+C)$

គេបាន $\tan A=\tan\big(\pi-(B+C)\big)=-\tan(B+C)$

$$\tan A = -\frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B.\tan C}$$

$$-\tan A + \tan B \tan C = \tan B + \tan C$$

គេទាញ $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\cot A \cot B \cot C$ គេបានសមភាព

$$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$$

ដោយប្រើវិសមភាព $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$

គេទាញបាន $(\cot A + \cot B + \cot C)^2 \geq 3$

នាំឲ្យ $\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$ (A , B , C ជាមុំស្រួច)

តាមទំនាក់ទំនង (1) គេទាញបាន ៖

$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\,S$ ជាវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី៨៦

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c ចូរបង្ហាញថា ៖

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 9(ab+bc+ca)$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 9(ab+bc+ca)$

យើងជ្រើសរើស $0<x , y , z<\frac{\pi}{2}$ ដែល $\begin{cases} a=\sqrt{2}\tan x \\ b=\sqrt{2}\tan y \\ c=\sqrt{2}\tan z \end{cases}$

វិសមភាព $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 9(ab+bc+ca)$

សមមូលទៅនឹងវិសមភាពខាងក្រោម ៖

$$\frac{8}{\cos^2 x\cos^2 y\cos^2 z}\ge 18(\tan x\tan y+\tan y\tan z+\tan z\tan x)$$

$$\cos x\cos y\cos z(\sin x\sin y\cos z+\sin y\sin z\cos x+\sin z\sin x\cos y)\le\frac{4}{9}$$

ដោយប្រើរូបមន្ត ៖

$$\cos(x+y+z)=\cos x\cos y\cos z-\sin x\sin y\cos z-\sin y\sin z\cos x \\ -\sin z\sin x\cos y$$

នោះគេអាចសរសេរ ៖

$$\cos x\cos y\cos z\left[\cos x\cos y\cos z-\cos(x+y+z)\right]\le\frac{4}{9}\quad (*)$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ និង Jensen យើងបាន ៖

$$\cos x \cos y \cos z \le \left(\frac{\cos x + \cos y + \cos z}{3}\right)^3 \le \cos^3 t$$

ដែល $t = \frac{x+y+z}{3}$ ។វិសមភាព (*) សមមូលទៅនឹងវិសមភាព ៖

$\cos^3 t(\cos^3 t - \cos 3t) \le \frac{4}{9}$ ដោយ $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$

នោះ $\cos^3 t(3\cos t - 3\cos^3 t) \le \frac{4}{9}$

$$\cos^3 t(\cos t - \cos^3 t) \le \frac{4}{27}$$

$$\cos^4 t\,(1 - \cos^2 t) \le \frac{4}{27}$$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេបាន ៖

$$\frac{\cos^2 t}{2} \cdot \frac{\cos^2 t}{2} . (1 - \cos^2 t) \le \left(\frac{\frac{\cos^2 t}{2} + \frac{\cos^2 t}{2} + 1 - \cos^2 t}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

គេទាញ $\cos^4 t(1 - \cos^2 t) \le \frac{4}{27}$ ពិត ។

ដូចនេះវិសមភាពខាងដើមត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។

លំហាត់ទី៤៧

គេឱ្យ n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត θ ចូរស្រាយថា :

$$\left(1+2\sin^2\theta\right)^n+\left(1+2\cos^2\theta\right)^n \geq 2^{n+1}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា :

$$\left(1+2\sin^2\theta\right)^n+\left(1+2\cos^2\theta\right)^n \geq 2^{n+1}$$

តាង $x=1+2\sin^2\theta$ និង $y=1+2\cos^2\theta$ ដែល $x>0\ ;\ y>0$

គេមាន $x+y=1+2\sin^2\theta+1+2\cos^2\theta$

$$x+y=2+2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$$

$$x+y=4$$

$$y=4-x$$

ដោយ $y>0$ នោះ $4-x>0$ ឬ $x<4$

យក $T=(1+2\sin^2\theta)^n+(1+2\cos^2\theta)^n$

$$T=x^n+y^n$$

$$T=f(x)=x^n+(4-x)^n$$

ដែល $0<x<4$ ។

យើងមាន $\dfrac{dT}{dx}=f'(x)=nx^{n-1}-n(4-x)^{n-1}$

$$= n\,[\,x^{n-1} - (4-x)^{n-1}\,]$$
$$= n[\,x - (4-x)\,]\,g(x)$$
$$= n\,(2x-4)\,g(x)$$

ដែល $g(x) = x^{n-2} + x^{n-3}(4-x) + ... + (4-x)^{n-2} > 0$ ។

បើ $2x - 4 = 0$ គេទាញឫស $x = 2$ ។

ចំពោះ $x = 2$ គេបាន $f(2) = 2^n + (4-2)^n = 2^{n+1}$

តារាងអថេរភាពនៃ $f(x) = x^n + (4-x)^n$

x	0		2		4
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$	2^{n+1}	$\nearrow$	

តាមតារាងខាងលើគេទាញ $f(x) \geq 2^{n+1} \quad \forall x \in \,]\,0\,;4\,[$ ។

ដូចនេះ $\left(1 + 2\sin^2\theta\right)^n + \left(1 + 2\cos^2\theta\right)^n \geq 2^{n+1}$ គ្រប់ $\theta \in IR$

លំហាត់ទី៤៨

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\le\sqrt[3]{2(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា :

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\le\sqrt[3]{2(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}$$

ដោយគុណអង្គទាំងពីរនៃវិសមភាពនឹង $\sqrt[3]{ab}$ គេបាន :

$$\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\ \le\ \sqrt[3]{2(a+b)^2}$$

តាង $x=\sqrt[3]{a}$ និង $y=\sqrt[3]{b}$

គេបាន $x^2+y^2\le\sqrt[3]{2(x^3+y^3)}$ (*)

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន :

$$x^6+x^3y^3+x^3y^3\ge 3x^4y^2 \text{ និង } y^6+x^3y^3+x^3y^3\ge 3x^2y^4$$

បូកវិសមភាពទាំងពីរនេះអង្គនិងអង្គគេបាន :

$$x^6+4x^3y^3+y^6\ge 3x^4y^2+3x^2y^4$$

ថែមអង្គទាំងពីរនៃវិសមភាពនឹង x^6+y^6 គេបាន

$$2(x^6+2x^3y^3+y^6)\ge x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6$$

$$2(x^3+y^3)^2\ge (x^2+y^2)^3$$

គេទាញ $x^2+y^2\le \sqrt[3]{2(x^3+y^3)}$ នាំឱ្យ $(*)$ ពិត ។

ដូចនេះ $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\le \sqrt[3]{2(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}$ គ្រប់ $a>0\,;b>0$ ។

លំហាត់ទី៤៩

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។ ចូរស្រាយថា :

$$\sqrt{\cos A}+\sqrt{\cos B}+\sqrt{\cos C}\le\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា :

$$\sqrt{\cos A}+\sqrt{\cos B}+\sqrt{\cos C}\le\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwartz យើងបាន:

$$(\sqrt{\cos A}+\sqrt{\cos B}+\sqrt{\cos C})^2\le 3(\cos A+\cos B+\cos C)\quad (1)$$

តាង $T=\cos A+\cos B+\cos C$

$$=1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

ព្រោះ $\cos\frac{B+C}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}$ ។

ដោយ B និង C ជាមុំស្រួចនោះ $0<B<\frac{\pi}{2}\ ;\ 0<C<\frac{\pi}{2}$

គេទាញ $-\frac{\pi}{4}<\frac{B-C}{2}<\frac{\pi}{4}$ នាំឱ្យ $\cos\frac{B-C}{2}\le 1$

ហេតុនេះ $T\le 1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(1-2\sin\frac{A}{2})^2\le\frac{3}{2}$

ឬ $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$ (2)

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេទាញបាន៖

$$(\sqrt{\cos A} + \sqrt{\cos B} + \sqrt{\cos C})^2 \le \frac{9}{2}$$

ដូចនេះ $\sqrt{\cos A} + \sqrt{\cos B} + \sqrt{\cos C} \le \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ។

លំហាត់ទី៨០

គេឱ្យ z_1 ; z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិចដែល $|z_1| = |z_2| = r > 0$ ។

បង្ហាញថា $\left(\frac{z_1+z_2}{r^2+z_1z_2}\right)^2 + \left(\frac{z_1-z_2}{r^2-z_1z_2}\right)^2 \ge \frac{1}{r^2}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា :

$$\left(\frac{z_1+z_2}{r^2+z_1z_2}\right)^2 + \left(\frac{z_1-z_2}{r^2-z_1z_2}\right)^2 \ge \frac{1}{r^2}$$

តាង $z_1 = r(\cos 2x + i\sin 2x)$ និង $z_2 = r(co2y + i\sin 2y)$

ដែល $x \in IR$; $y \in IR$ ។

គេបាន :

$$\frac{z_1+z_2}{r^2+z_1z_2} = \frac{r[\ (\cos 2x + \cos 2y) + i(\sin 2x + \sin 2y)\ ]}{r^2 + r^2[\ \cos(2x+2y) + i.\sin(2x+2y)\ ]}$$

$$= \frac{2\cos(x+y)\cos(x-y) + 2i\sin(x+y)\cos(x-y)}{r\ [\ 2\cos^2(x+y) + 2i\sin(x+y)\cos(x+y)\ ]}$$

$$= \frac{1}{r}.\frac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)}$$

ដូចគ្នាដែរ $\frac{z_1-z_2}{r^2-z_1z_2} = \frac{1}{r}\frac{\sin(y-x)}{\sin(y+x)}$

គេបាន ៖

$$\left(\frac{z_1+z_2}{r^2+z_1z_2}\right)^2+\left(\frac{z_1-z_2}{r^2-z_1z_2}\right)^2=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\cos^2(x-y)}{\cos^2(x+y)}+\frac{\sin^2(y-x)}{\sin^2(y+x)}\right]$$

ដោយ $\frac{\cos^2(x-y)}{\cos^2(x+y)}\geq\cos^2(x-y)$ **ព្រោះ** $\cos^2(x+y)\leq 1$

ហើយ $\frac{\sin^2(y-x)}{\sin^2(y+x)}\geq\sin^2(x-y)$ **ព្រោះ** $\sin^2(x+y)\leq 1$

$$\frac{\cos^2(x-y)}{\cos^2(x+y)}+\frac{\sin^2(y-x)}{\sin^2(y+x)}\geq\cos^2(x-y)+\sin^2(x-y)\ =1$$

ដូចនេះ $\left(\frac{z_1+z_2}{r^2+z_1z_2}\right)^2+\left(\frac{z_1-z_2}{r^2-z_1z_2}\right)^2\geq\frac{1}{r^2}$ ។

លំហាត់ទី៨១

គេយក $z_1\ ;\ z_2\ ;\ ....;\ z_n$ ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

$(k+1)z_{k+1}-i(n-k)z_k=0\ ;\ k=0\,,1\,,2\,,\dots,n-1$

ក-កំនត់ z_0 បើគេដឹងថា $z_0+z_1+z_2+....+z_n=2^n$

ខ-ចំពោះតម្លៃ z_0 ដែលបានកំនត់ខាងលើចូរបង្ហាញថា :

$$|z_0|^2+|z_1|^2+|z_2|^2+....+|z_n|^2<\frac{(3n+1)^n}{n!}$$

ដំណោះស្រាយ

ក-កំនត់ z_0 បើគេដឹងថា $z_0+z_1+z_2+....+z_n=2^n$

គេមាន $(k+1)z_{k+1}-i(n-k)z_k=0$

គេបាន $\frac{z_{k+1}}{z_k}=i.\frac{n-k}{k+1}$

$$\prod_{k=0}^{(p-1)}\left(\frac{z_{k+1}}{z_k}\right)=\prod_{k=0}^{p-1}\left(i.\frac{n-k}{k+1}\right)$$

$$\frac{z_p}{z_0}=i^pC_n^p\quad;\ C_n^p=\frac{n!}{p!(n-p)!}$$

គេទាញ $z_p=i^pz_0\,C_n^p\ \ ;p=0\,,1\,,2\,,....$

ដោយ $z_0+z_1+z_2+....+z_n=2^n$ ឬ $\sum_{p=0}^{n}(z_p)=2^n$

មាន $\sum_{p=0}^{n}(z_p)=z_0\sum_{p=0}^{n}C_n^p i^p=z_0(1+i)^n$

គេបាន $z_0(1+i)^n=2^n$

គេទាញ $z_0=\dfrac{2^n}{(1+i)^n}=(1-i)^n$

ដូចនេះ $z_0=(1-i)^n$ ។

ខ-ចំពោះតម្លៃ z_0 ដែលបានកំនត់ខាងលើចូរបង្ហាញថា :

$$|z_0|^2+|z_1|^2+|z_2|^2+....+|z_n|^2<\frac{(3n+1)^n}{n!}$$

ដោយអនុវត្តន៏វិសមភាព AM – GM យើងបាន

$$\begin{aligned}|z_0|^2+|z_1|^2+...+|z_n|^2&=|z_0|^2\left((C_n^0)^2+(C_n^1)^2+....+(C_n^n)^2\right)\\&=|z_0|^2C_{2n}^n=2^n.\frac{(2n)!}{n!n!}\\&=\frac{2^n}{n!}\left(2n(2n-1)(2n-2)....(n+1)\right)\\&<\frac{2^n}{n!}\left(\frac{2n+(2n-1)+(2n-2)+....+(n+1)}{n}\right)^n\\&<\frac{(3n+1)^n}{n!}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $|z_0|^2+|z_1|^2+|z_2|^2+....+|z_n|^2<\dfrac{(3n+1)^n}{n!}$ ។

លំហាត់ទី៨២

គេឱ្យ $x\,;\ y\,;\ z$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $xyz=1$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{1}{(x+1)^2+y^2+1}+\frac{1}{(y+1)^2+z^2+1}+\frac{1}{(z+1)^2+x^2+1}\le\frac{1}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា

$$\frac{1}{(x+1)^2+y^2+1}+\frac{1}{(y+1)^2+z^2+1}+\frac{1}{(z+1)^2+x^2+1}\le\frac{1}{2}$$

យើងមាន $(x+1)^2+y^2+1=x^2+y^2+2x+2$

ដោយ $x^2+y^2\ge 2xy$

គេទាញ $(x+1)^2+y^2+1\ge 2(xy+x+1)$

នាំឱ្យ $\dfrac{1}{(x+1)^2+y^2+1}\le\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{xy+x+1}$

គេមាន $xyz=1$ នោះគេអាចយក $x=\dfrac{b}{a}\,;\ y=\dfrac{c}{b}\,,\ z=\dfrac{a}{c}$

ដែល $a>0\,;\ b>0\,;\ c>0$ ។

គេបាន $xy+x+1=\dfrac{c}{a}+\dfrac{b}{a}+1=\dfrac{a+b+c}{a}$

ហេតុនេះ $\dfrac{1}{(x+1)^2+y^2+1}\le\dfrac{1}{2}.\dfrac{a}{a+b+c}\quad(1)$

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន :

$$\frac{1}{(y+1)^2+z^2+1} \le \frac{1}{2}.\frac{b}{a+b+c} \quad (2)$$

$$\frac{1}{(z+1)^2+x^2+1} \le \frac{1}{2}.\frac{c}{a+b+c} \quad (3)$$

ធ្វើផលបូកវិសមភាព (1) ; (2) និង (3) គេបាន ៖

$$\frac{1}{(x+1)^2+y^2+1} + \frac{1}{(y+1)^2+z^2+1} + \frac{1}{(z+1)^2+x^2+1} \le \frac{1}{2}$$

លំហាត់ទី៨៣

គេឱ្យ $a\,;\,b\,;\,c$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$a(b^2-\sqrt{b})+b(c^2-\sqrt{c})+c(a^2-\sqrt{a})\ge 0$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $a(b^2-\sqrt{b})+b(c^2-\sqrt{c})+c(a^2-\sqrt{a})\ge 0$

ដោយ $abc=1$ នោះគេអាចតាង $a=\dfrac{x^2}{y^2}\;;\;b=\dfrac{y^2}{z^2}\;;\;c=\dfrac{z^2}{x^2}$

ដែល $x>0\,;\,y>0\,;\,z>0$ ។

វិសមភាពខាងលើសមមូល :

$$\frac{x^2}{y^2}\Big(\frac{y^4}{z^4}-\frac{y}{z}\Big)+\frac{y^2}{z^2}\Big(\frac{z^4}{x^4}-\frac{z}{x}\Big)+\frac{z^2}{x^2}\Big(\frac{x^4}{y^4}-\frac{x}{y}\Big)\ge 0$$

$$\frac{x^2y^2}{z^4}-\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2z^2}{x^4}-\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2x^2}{y^4}-\frac{z^2}{xy}\ge 0$$

$$\frac{2x^2y^2}{z^4}-\frac{2x^2}{yz}+\frac{2y^2z^2}{x^4}-\frac{2y^2}{zx}+\frac{2z^2x^2}{y^4}-\frac{2z^2}{xy}\ge 0$$

$$\left(\frac{xy}{z^2}-\frac{yz}{x^2}\right)^2+\left(\frac{yz}{x^2}-\frac{zx}{y^2}\right)^2+\left(\frac{zx}{y^2}-\frac{xy}{z^2}\right)^2\ge 0 \text{ ពិត}$$

លំហាត់ទី៨៤

គេឱ្យ $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ និង $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{a_1^{\ 2}}{x_1} + \frac{a_2^{\ 2}}{x_2} + ... + \frac{a_n^{\ 2}}{x_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{x_1 + x_2 + ... + x_n}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា :

$$\frac{a_1^{\ 2}}{x_1} + \frac{a_2^{\ 2}}{x_2} + ... + \frac{a_n^{\ 2}}{x_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{x_1 + x_2 + ... + x_n}$$

តាង $T_n = \frac{a_1^{\ 2}}{x_1} + \frac{a_2^{\ 2}}{x_2} + ... + \frac{a_n^{\ 2}}{x_n} - \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{x_1 + x_2 + ... + x_n}$

ចំពោះ $n = 1$ គេបាន $T_1 = \frac{a_1^{\ 2}}{x_1} - \frac{a_1^{\ 2}}{x_1} = 0 \geq 0$ ពិត

ចំពោះ $n = 2$ គេបាន :

$$T_2 = \frac{a_1^{\ 2}}{x_1} + \frac{a_2^{\ 2}}{x_2} - \frac{(a_1 + a_2)^2}{x_1 + x_2}$$

$$= \frac{(x_1 + x_2)(a_1^{\ 2}x_2 + a_2^{\ 2}x_1) - x_1x_2(a_1 + a_2)^2}{x_1x_2(x_1 + x_2)}$$

$$= \frac{(a_1x_2 - a_2x_1)^2}{x_1x_2(x_1 + x_2)} \geq 0 \text{ ពិត}$$

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $T_k \geq 0$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ $T_{k+1} \geq 0$ ពិត

គេមាន $T_k \ge 0$ (ការឧបមាខាងលើ)

គេបាន $\frac{a_1{}^2}{x_1} + \frac{a_2{}^2}{x_2} + ... + \frac{a_k{}^2}{x_k} - \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_k)^2}{x_1 + x_2 + ... + x_k} \ge 0$

គេទាញ $\frac{a_1{}^2}{x_1} + \frac{a_2{}^2}{x_2} + ... + \frac{a_k{}^2}{x_k} \ge \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_k)^2}{x_1 + x_2 + ... + x_k}$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង $\frac{a_{k+1}^2}{x_{k+1}}$ គេបាន :

$$\frac{a_1{}^2}{x_1} + \frac{a_2{}^2}{x_2} + ... + \frac{a_k{}^2}{x_k} + \frac{a_{k+1}^2}{x_{k+1}} \ge \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_k)^2}{x_1 + x_2 + ... + x_k} + \frac{a_{k+1}^2}{x_{k+1}}$$

ដោយ $\frac{(a_1 + a_2 + ... + a_k)^2}{x_1 + x_2 + ... + x_k} + \frac{a_{k+1}^2}{x_{k+1}} \ge \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_{k+1})^2}{x_1 + x_2 + ... + x_{k+1}}$

គេទាញបាន :

$$\frac{a_1{}^2}{x_1} + \frac{a_2{}^2}{x_2} + ... + \frac{a_k{}^2}{x_k} + \frac{a_{k+1}^2}{x_k} \ge \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1})^2}{x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1}}$$

នាំឱ្យ $T_{k+1} \ge 0$ ពិត ។

ដូចនេះ $\frac{a_1{}^2}{x_1} + \frac{a_2{}^2}{x_2} + ... + \frac{a_n{}^2}{x_n} \ge \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{x_1 + x_2 + ... + x_n}$ ។

លំហាត់ទី៨៨

គេឱ្យ $a\ ;\ b\ ;\ c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$

គេមាន :

$$T=\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}$$

$$T=\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{a(b+c)}+\frac{\left(\frac{1}{b}\right)^2}{b(c+a)}+\frac{\left(\frac{1}{c}\right)^2}{c(a+b)}\geq\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)}$$

ដោយ $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\left(\frac{ab+bc+ca}{abc}\right)^2=(ab+bc+ca)^2$

ហើយ $a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)=2(ab+bc+ca)$

គេទាញ $T\geq\frac{ab+bc+ca}{2}\geq\frac{3\sqrt[3]{(abc)^2}}{2}=\frac{3}{2}$

ដូចនេះ $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$ ។

លំហាត់ទី៨៦

គេឱ្យ $x\ ;\ y\ ;\ z>0$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{x}{x+2y+3z}+\frac{y}{y+2z+3x}+\frac{z}{z+2x+3y}\ge\frac{1}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{x}{x+2y+3z}+\frac{y}{y+2z+3x}+\frac{z}{z+2x+3y}\ge\frac{1}{2}$

តាង $T=\frac{x}{x+2y+3z}+\frac{y}{y+2z+3x}+\frac{z}{z+2x+3y}$

$$T=\frac{x^2}{x^2+2xy+3xz}+\frac{y^2}{y^2+2yz+3xy}+\frac{z^2}{z^2+2xz+3yz}$$

$$T\ge\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+5(xy+yz+zx)}$$

គេបាន $T-\frac{1}{2}\ge\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+5(xy+yz+zx)}-\frac{1}{2}$

$$T-\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2}\frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{x^2+y^2+z^2+5(xy+yz+zx)^2}\ge 0$$

គេទាញបាន $T\ge\frac{1}{2}$ ។

ដូចនេះ $\frac{x}{x+2y+3z}+\frac{y}{y+2z+3x}+\frac{z}{z+2x+3y}\ge\frac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី៨៧

គេឱ្យស៊ីត $a_1 ; a_2 ; ....; a_n$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ :

$a_1 = 0 ; |a_2| = |a_1 + 1| ;...$ និង $|a_n| = |a_{n-1} + 1|$ ។

បង្ហាញថា $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq -\dfrac{1}{2}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq -\dfrac{1}{2}$

យើងមាន $|a_n| = |a_{n-1} + 1|$

នាំឱ្យ $a_n{}^2 = a_{n-1}^2 + 2a_{n-1} + 1$

គេបាន $\sum\limits_{k=1}^{n+1}(a_k{}^2) = \sum\limits_{k=1}^{n+1}(a_{k-1}^2 + 2a_{k-1} + 1) = \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k{}^2 + 2a_k + 1)$

$$a_{n+1}^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k{}^2) = \sum_{k=1}^{n}(a_k{}^2) + 2\sum_{k=1}^{n}(a_k) + n$$

គេទាញ $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k) = \dfrac{a_{n+1}^2 - n}{2} \geq -\dfrac{n}{2}$

ដូចនេះ $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq -\dfrac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី៨៨

គេឱ្យ a ; b ; c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\ge 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\ge 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$

តាង $T=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)$

$$=2+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}$$

$$=\left(\frac{a}{a}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{b}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{c}{c}\right)-1$$

$$\ge\frac{3a}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{3b}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{3c}{\sqrt[3]{abc}}-1$$

$$\ge\frac{3(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}-1=\frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}-1$$

$$\ge\frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}+3-1=2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$

ដូចនេះ $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\ge 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$ ។

លំហាត់ទី៨៩

គេឱ្យ a ; b ; c ជាប្រវែងជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

ដំណោះស្រាយ ស្រាយថា :

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

ដោយ a ; b ; c ជាប្រវែងជ្រុងរបស់ត្រីកោណនោះគេបាន :

$$a+b-c>0\,;b+c-a>0\,;c+a-b>0$$

តាមវិសមភាព Cauchy – Schwartz គេបាន :

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}\le 2\sqrt{b}\quad(1)$$

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{c+a-b}\le 2\sqrt{a}\quad(2)$$

$$\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le 2\sqrt{c}\quad(3)$$

បូកវិសមភាព (1) ; (2) និង (3) គេទទួលបាន :

$$2(\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b})\le 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$$

ដូចនេះ

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\quad ។$$

លំហាត់ទី៦០

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C \ge 2\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា :

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C \ge 2\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$ (R : កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ)

គេទាញ $\begin{cases} a=2R\sin A \\ b=2R\sin B \\ c=2R\sin C \end{cases}$ (I)

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \quad \text{(II)}$$

យក (I) ជួសក្នុង (II) គេបាន :

$$4R^2\sin^2 A=4R^2\sin^2 B+4R^2\sin^2 C-8R^2\sin B\sin C\cos A$$

$$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A$$

គេទាញ $\cos A=\dfrac{\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A}{2\sin B\sin C}$

ហេតុនេះ $\cot A = \dfrac{\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A}{2\sin B \sin C \sin A}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\cot B = \dfrac{\sin^2 C + \sin^2 A - \sin^2 B}{2\sin C \sin A \sin B}$ (2)

ហើយនឹង $\cot C = \dfrac{\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C}{2\sin A \sin B \sin C}$ (3)

បូកទំនាក់ទំនង (1) ; (2) និង (3) គេទទួលបាន ៖

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2\sin A \sin B \sin C} \quad (4)$$

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $A + B + C = \pi$ ឬ $A + B = \pi - C$

គេបាន $\tan(A + B) = \tan(\pi - C)$

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$$

គេទាញ $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\cot A \cot B \cot C$ គេបាន ៖

$$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ ចំពោះគ្រប់ $x\ ;\ y\ ;\ z > 0$

គេមាន $\begin{cases} x^2 + y^2 \ge 2xy \\ y^2 + z^2 \ge 2yz \\ z^2 + x^2 \ge 2zx \end{cases}$

គេបាន $2(x^2 + y^2 + z^2) \ge 2(xy + yz + zx)$

ឬ $x^2 + y^2 + z^2 \ge xy + yz + zx$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង $2xy+2yz+2zx$ គេបាន ៖

$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$

ដោយយក $x=\cot A$; $y=\cot B$; $z=\cot C$

គេបាន $(\cot A+\cot B+\cot C)^2 \geq 3$

នាំឱ្យ $\cot A+\cot B+\cot C \geq \sqrt{3}$ (5)

តាមទំនាក់ទំនង (4) និង (5) គេបាន ៖

$$\frac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C} \geq \sqrt{3}$$

ដូចនេះ $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C \geq 2\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$

លំហាត់ទី៦១

គេឱ្យ $z_1\ ;\ z_2\ ;\ z_3\ ;....;\ z_n$ ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលមានម៉ូឌុលស្មើ 1 ។

គេតាង $Z=\left(\sum_{k=1}^{n}(z_k)\right)\times\left(\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{z_k})\right)$ ។

ចូរបង្ហាញថា $0\le Z\le n^2$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $0\le Z\le n^2$

ដោយ $z_1\ ;\ z_2\ ;\ z_3\ ;....;\ z_n$ ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលមានម៉ូឌុលស្មើ 1

នោះគេអាចតាង $z_k=\cos x_k+i.\sin x_k$

ដែល $x_k\in IR\ ;k=1\ ,2\ ,\ 3\ ,....,n$

គេបាន $Z=\left(\sum_{k=1}^{n}(z_k)\right)\times\left(\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{z_k})\right)$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos x_k+i.\sin x_k\right)\times\sum_{k=1}^{n}\left(\cos x_k-i\sin x_k\right)$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n}\cos x_k\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{n}\sin x_k\right)^2\ge 0$$

គេបាន $Z\ge 0$

ម្យ៉ាងទៀតតាមវិសមភាព Cauchy – Schwartz

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\cos x_k\right)^2\le n\ \sum_{k=1}^{n}\left(\cos^2 x_k\right)$$

និង $\left(\sum_{k=1}^{n}\sin x_k\right)^2 \le n\sum_{k=1}^{n}\left(\sin^2 x_k\right)$

គេទាញ $Z \le n\sum_{k=1}^{n}\left(\cos^2 x_k\right)+n\sum_{k=1}^{n}(\sin^2 x_k)$

$$Z \le n\sum_{k=1}^{n}\left(\cos^2 x_k+\sin^2 x_k\right)$$

$$Z \le n.n = n^2$$

ដូចនេះ $0 \le Z \le n^2$ ។

សំគាល់ **:** គេអាចស្រាយ $Z \le n^2$ តាមមួយរបៀបទៀតដូចខាងក្រោម

ដោយ $|z_k| = 1$ នោះ $\bar{z}_k = \dfrac{1}{z_k}$ គ្រប់ $k = 1 \ ; 2 \ ;.....; n$

គេបាន $Z = \left(\sum_{k=1}^{n}(z_k)\right)\times\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{z_k}\right)\right)$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n}z_k\right)\times\left(\sum_{k=1}^{n}\bar{z}_k\right) = \left(\sum_{k=1}^{n}z_k\right)\times\overline{\left(\sum_{k=1}^{n}z_k\right)}$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n}(z_k)\right|^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|\right)^2 = n^2$$

គេទាញបាន $Z \le n^2$ ។

លំហាត់ទី៦២

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច z ដែល $|z|=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា :

$\sqrt{2} \le |1-z|+|1+z^2| \le 4$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\sqrt{2} \le |1-z|+|1+z^2| \le 4$

តាង $z=\cos t+i.\sin t$

គេបាន $|1-z|=\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}=2|\sin\frac{t}{2}|$

ហើយ $|1+z^2|=\sqrt{(1+\cos 2t)^2+\sin^2 2t}=2|\cos t|$

$$=2|1-2\sin^2\frac{t}{2}|$$

គេបាន $|1-z|+|1-z^2|=2\left(|\sin\frac{t}{2}|+|1-2\sin^2\frac{t}{2}|\right)$

ដោយយក $x=\sin\frac{t}{2}$; $-1\le x\le 1$ ហើយតាងអនុគមន៍ f

កំនត់ដោយ $f(x)=|x|+|1-2x^2|$ ដែល $-1\le x\le 1$

ចំពោះ $-1\le x\le 1$ គេបាន $\frac{\sqrt{2}}{2}\le f(x)\le 2$

ដូចនេះ $\sqrt{2} \le |1-z|+|1+z^2| \le 4$ ។

លំហាត់ទី៦៣

គេឱ្យ A ; B ; C ជាមុំក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរបង្ហាញថា $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\ge 3\sqrt{3}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\ge 3\sqrt{3}$

គេមាន $A+B+C=\pi$ នាំឱ្យ $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$

គេបាន $\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$

$$\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\cot\frac{C}{2}$$

$$\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$$

$$\tan\frac{C}{2}(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2})=1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$ គេបាន ៖

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

ដោយ $0 < A \,;\, B \,;\, C < \pi$ នោះ $0 < \frac{A}{2} \,;\, \frac{B}{2} \,;\, \frac{C}{2} < \frac{\pi}{2}$

គេបាន $\cot\frac{A}{2} > 0 \;;\, \cot\frac{B}{2} > 0 \,;\, \cot\frac{C}{2} > 0$

តាមវិសមភាព AM – GM គេបាន ៖

$$\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} \geq 3\sqrt[3]{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}$$

$$\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} \geq 3\sqrt[3]{\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}}$$

$$\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)^3 \geq 27\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)$$

ដូចនេះ $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} \;\geq 3\sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី៦៤

គេឱ្យ A ; B ; C ជាមុំស្រួចក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរបង្ហាញថា $(1+\tan A)(1+\tan B)(1+\tan C)\geq(1+\sqrt{3})^3$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $(1+\tan A)(1+\tan B)(1+\tan C)\geq(1+\sqrt{3})^3$

ដោយ A ; B ; C ជាមុំស្រួចនោះ $\tan A>0;\tan B>0;\tan C>0$

តាមវិសមភាព AM – GM គ្រប់ $x>0$; $y>0$; $z>0$ គេមាន:

$(1+x)(1+y)(1+z)=1+(x+y+z)+(xy+yz+zx)+xyz$

$(1+x)(1+y)(1+z)\geq 1+3\sqrt[3]{xyz}+3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}+xyz$

$(1+x)(1+y)(1+z)\geq(1+\sqrt[3]{xyz})^3$

យក $x=\tan A$; $y=\tan B$; $z=\tan C$ គេបាន :

$(1+\tan A)(1+\tan B)(1+\tan C)\geq(1+\sqrt{\tan A\tan B\tan C})^3$

គេមាន $\tan(A+B)=\tan(\pi-C)$

$$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$$

គេទាញ $\tan A+\tan B+\tan B=\tan A\tan B\tan C$

$$x+y+z=xyz$$

តាមវិសមភាព $\mathbf{AM-GM}$ គេបាន :

$$x+y+z \ge 3\sqrt[3]{xyz}$$

$$xyz \ge 3\sqrt[3]{xyz}$$

គេទាញ $xyz \ge 3\sqrt{3}$ ឬ $\tan A\tan B\tan C \ge 3\sqrt{3}$

គេបាន $(1+\tan A)(1+\tan B)(1+\tan B) \ge (1+\sqrt[3]{3\sqrt{3}})^3$

ដូចនេះ $(1+\tan A)(1+\tan B)(1+\tan C) \ge (1+\sqrt{3})^3$ ។

លំហាត់ទី៦៨

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ក.បង្ហាញថា $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$

ខ.បង្ហាញថា $\cos A\cos B\cos C\le\frac{1}{8}$

គ.បង្ហាញថា $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$

ដំណោះស្រាយ

ក.បង្ហាញថា $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$

គេមាន $A+B+C=\pi$

គេបាន $\cos(A+B)=\cos(\pi-C)$

ឬ $\cos A\cos B-\sin A\sin B=-\cos C$

ឬ $\cos C=\sin A\sin B-\cos A\cos B$

តាង $T=3-2(\cos A+\cos B+\cos C)$

$$=3-2(\cos A+\cos B+\sin A\sin B-\cos A\cos B)$$

$$=(\sin A-\sin B)^2+(\cos A+\cos B-1)^2\ge 0$$

ដូចនេះ $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$

ខ.បង្ហាញថា $\cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8}$

ដោយ A ; B ; C ជាមុំស្រួចនោះ $\cos A ; \cos B ; \cos C > 0$

តាមវិសមភាព AM – GM គេបាន :

$$\cos A + \cos B + \cos C \ge 3\sqrt[3]{\cos A\cos B\cos C}$$

$$\cos A\cos B\cos C \le \left(\frac{\cos A + \cos B + \cos C}{3}\right)^3$$

ដោយ $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$ (សម្រាយខាងលើ)

គេទាញ $\cos A\cos B\cos C \le \left(\frac{\frac{3}{2}}{3}\right)^3 = \frac{1}{8}$

ដូចនេះ $\cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8}$ ។

គ.បង្ហាញថា $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$

គេមាន $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

ដោយ $\cos\frac{A+B}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \sin\frac{C}{2}$

និង $\cos C = 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$ គេបាន :

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)$$

$$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

ដោយ $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$ (សម្រាយខាងលើ)

គេទាញ $1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{3}{2}$

ដូចនេះ $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$ ។

លំហាត់ទី៦៦

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ តាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា :

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$$

ខ. បើ ABC ជាត្រីកោណកែងនោះចូរស្រាយថា :

$$R \ge (\sqrt{2} + 1)r$$

ដំណោះស្រាយ ក. បង្ហាញថា $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$

គេមាន $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

ដោយ $\cos\frac{A+B}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \sin\frac{C}{2}$

និង $\cos C = 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$ គេបាន :

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)$$

$$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

គេបាន $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ ដោយ $\cos A = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(1 - 2\sin^2\frac{A}{2})$

គេទាញ $\sin^2\frac{A}{2} = \frac{a^2-(b-c)^2}{4bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}$

$$= \frac{(2p-2c)(2p-2b)}{4bc} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$$

នាំឱ្យ $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ :

$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$; $\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$

គេបាន :

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{4(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$$

ដោយ $S = pr = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

គេទាញ $\begin{cases}(p-a)(p-b)(p-c)=\dfrac{S^2}{p}=\dfrac{prS}{p}=Sr\\ abc=4SR\end{cases}$

នាំឱ្យ $\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}=\dfrac{r}{4R}$

ដូចនេះ $\cos A+\cos B+\cos C=1+\dfrac{r}{R}$

ខ. បើ ABC ជាត្រីកោណកែងនោះចូរស្រាយថា $R\ge(\sqrt{2}+1)r$

ឧបមាថា ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A នោះ $A=\dfrac{\pi}{2};B=\dfrac{\pi}{2}-C$

ដោយ $\cos A+\cos B+\cos C=1+\dfrac{r}{R}$

គេបាន $0+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-C\right)+\cos C=1+\dfrac{r}{R}$

$$\sin C+\cos C=1+\frac{r}{R}$$

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+C\right)=1+\frac{r}{R}$$

ដោយ $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+C\right)\le 1$ នោះ $1+\dfrac{r}{R}\le\sqrt{2}$

នាំឱ្យ $R\ge\dfrac{r}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)r$

ដូចនេះ $R\ge(\sqrt{2}+1)r$ ។

លំហាត់ទី៦៧

គេឱ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយ ។ ចូរបង្ហាញថា :

ក. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$

ខ. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\le\frac{\sqrt{3}}{9}$

ដំណោះស្រាយ បង្ហាញថា

ក. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$

តាមរូបមន្ត $\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$

គេបាន $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$

$$\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\cot\frac{C}{2}=\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$$

$$\tan\frac{C}{2}(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2})=1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

ដូចនេះ $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$ ។

ខ. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\le\frac{\sqrt{3}}{9}$

តាមវិសភាព $AM-GM$ គេបាន :

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\geq 3\sqrt[3]{\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\right)^2}$$

$$1\geq 3\sqrt[3]{\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\right)^2}$$

គេទាញ $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\leq\sqrt{\frac{1}{27}}=\frac{\sqrt{3}}{9}$

ដូចនេះ $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\leq\frac{\sqrt{3}}{9}$ ។

លំហាត់ទី៦៨

ចូរបង្ហាញថា :

$$(\sin x + a\cos x)(\sin x + b\cos x) \le 1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា :

$$(\sin x + a\cos x)(\sin x + b\cos x) \le 1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad (1)$$

-បើ $\cos x = 0$ នោះ $\sin^2 x \le 1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ពិត

-បើ $\cos x \ne 0$ យើងចែកអង្គទាំងពីរនៃ (1) នឹង $\cos^2 x$

$$(\tan x + a)(\tan x + b) \le \left[1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\frac{1}{\cos^2 x}$$

តាង $t = \tan x$ នោះ $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + t^2$

គេបាន $(t+a)(t+b) = \left[1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right](1+t^2)$

$$t^2 + (a+b)t + ab \le 1 + t^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 t^2$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 t^2-(a+b)t+1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-ab\geq 0$$

$$\left(\frac{a+b}{2}t-1\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\geq 0$$ ពិត

ដូចនេះ $(\sin x+a\cos x)(\sin x+b\cos x)\leq 1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ។

លំហាត់ទី៦៩

គេឱ្យ a ; b ; c ជាប្រវែងជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយដែលមាន

បរិមាត្រស្មើ 2 ។ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{3}{2} < a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{3}{2} < a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$

ដោយបរិមាត្ររបស់ត្រីកោណនេះស្មើ 2 នោះជ្រុងទាំងបី a ; b ; c

របស់ត្រីកោណសុទ្ធតែតូចជាង 1 ។

យើងបាន $S = \frac{1}{2} bc \sin A < \frac{1}{2}$

តាមរូបមន្តហេរុង $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ដោយ $p = 1$

នោះ $S = \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < \frac{1}{2}$

គេទាញ $0 < (1-a)(1-b)(1-c) < \frac{1}{4}$

ឬ $0 < 1 - (a+b+c) + (ab+bc+ca) - abc < \frac{1}{4}$

ឬ $0 < 1 - 2 + (ab+bc+ca) - abc < \frac{1}{4}$

ឬ $1 < (ab+bc+ca) - abc < \frac{5}{4}$

ឬ $2 < 2(ab+bc+ca) - 2abc < \frac{5}{2}$

គេមាន $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

គេទាញ ៖

$$a^2+b^2+c^2+2abc = (a+b+c)^2 + 2abc - 2(ab+bc+ca)$$

$$a^2+b^2+c^2+2abc = 4 - \left[2(ab+bc+ca) - 2abc\right]$$

ដោយ $2 < 2(ab+bc+ca) - 2abc < \frac{5}{2}$

គេបាន $4 - \frac{5}{2} < a^2+b^2+c^2+2abc < 4-2$

ដូចនេះ $\frac{3}{2} < a^2+b^2+c^2+2abc < 2$ ។

លំហាត់ទី៧០

ប្រសិនបើ $xyx = (1-x)(1-y)(1-z)$ ដែល $0 \le x;y;z \le 1$

ចូរបង្ហាញថា $x(1-z)+y(1-x)+z(1-y) \ge \frac{3}{4}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា ៖

$$x(1-z)+y(1-x)+z(1-y) \ge \frac{3}{4}$$

គេមាន $(x-\frac{1}{2})^2 = x^2 - x + \frac{1}{4} \ge 0$ ចំពោះគ្រប់ x

គេទាញ $x(1-x) \le \frac{1}{4}$ ដោយ $0 \le x \le 1$ នោះគេទាញបាន :

$0 \le x(1-x) \le \frac{1}{4}$ ។ ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន :

$0 \le y(1-y) \le \frac{1}{4}$ និង $0 \le z(1-z) \le \frac{1}{4}$

យើងបាន $xyz(1-x)(1-y)(1-z) \le \frac{1}{64}$

ដោយ $xyz = (1-x)(1-y)(1-z)$ នោះគេទាញ :

$(xyz)^2 \le \frac{1}{64}$ នាំឱ្យ $xyz \le \frac{1}{8}$ ។

តាង $T = x(1-z) + y(1-x) + z(1-y)$

$$= (x+y+z) - (xy+yz+xz)$$

ដោយ $xyz = (1-x)(1-y)(1-z)$

ឬ $xyz = 1 - (x+y+z) + (xy+yz+zx) - xyz$

ឬ $(x+y+z) - (xy+yz+zx) = 1 - 2xyz$

គេទាញ $T = 1 - 2xyz \ge 1 - 2\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{4}$

ដូចនេះ $x(1-z) + y(1-x) + z(1-y) \ge \frac{3}{4}$ ។

លំហាត់ទី៧១

គេឱ្យ $x\,;\,y\,;\,z$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $x+y+z=1$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)\geq 8$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)\geq 8$

គេមាន $\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)=\frac{(1-x)(1-y)(1-z)}{xyz}$

ដោយ $x+y+z=1$ នាំឱ្យ $\begin{cases}1-x=y+z\\1-y=x+z\\1-z=x+y\end{cases}$

គេបាន $\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)=\frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{xyz}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន :

$y+z\geq 2\sqrt{yz}$; $z+x\geq 2\sqrt{zx}$ និង $x+y\geq 2\sqrt{xy}$

គេបាន $(y+z)(z+x)(x+y)\geq 8xyz$

នាំឱ្យ $\frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{xyz}\geq 8$

ដូចនេះ $\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)\geq 8$ ។

លំហាត់ទី៧២

គេឱ្យ a ; b ; c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a^2+b^2+c^2=1$

បង្ហាញថា $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 3+\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 3+\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}$

តាង $T=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-3-2.\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$

ដោយ $a^2+b^2+c^2=1$ នោះគេទាញ :

$$\frac{1}{a^2}=1+\frac{b^2+c^2}{a^2}\ ;\ \frac{1}{b^2}=1+\frac{a^2+c^2}{b^2}\ ;\ \frac{1}{c^2}=1+\frac{a^2+b^2}{c^2}$$

ធ្វើវិធីបូកសមភាពទាំងនេះគេបាន :

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=3+a^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+b^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)+c^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

កន្សោម T អាចសរសេរ :

$$T=a^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+b^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)+c^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)-2\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)$$

$$=a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2\geq 0$$

ដូចនេះ $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 3+\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}$ ។

លំហាត់ទី៧៣

គេយក A, B, C ជាមុំបីនៃត្រីកោណ ABC ។

តាងអនុគមន៍ $y = \cot A + \dfrac{2\sin A}{\cos A + \cos(B - C)}$

រកតម្លៃអប្បរមានៃអនុគមន៍នេះ ?

ដំណោះស្រាយ

តម្លៃអប្បរមានៃអនុគមន៍

$$y = \cot A + \frac{2\sin A}{\cos A + \cos(B - C)}$$

គេមាន $A + B + C = \pi$

នោះ $\cos A = \cos(\pi - B - C) = -\cos(B + C)$

គេបាន

$$y = \cot A + \frac{2\sin A}{\cos(B - C) - \cos(B + C)}$$

$$= \cot A + \frac{\sin A}{\sin B \sin C}$$

$$= \frac{\cos A \sin B \sin C + \sin^2 A}{\sin A \sin B \sin C}$$

យក a , b , c ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណនេះ

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូសគេមាន

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \text{ នាំឲ្យ } \begin{cases} a=2R\sin A \\ b=2R\sin B \\ c=2R\sin C \end{cases} \quad (1)$$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសគេមាន

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \quad (2)$$

យកទំនាក់ទំនង (1) ជួសក្នុង (2) គេបាន

$$4R^2\sin^2 A=4R^2(\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A)$$

គេទាញ $\sin B\sin C\cos A=\dfrac{\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A}{2}$

ហេតុនេះអនុគមន៍ y អាចសរសេរ

$$y=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin B}$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\geq 3\sqrt[3]{(\sin A\sin B\sin C)^2}$$

$$\Rightarrow y\geq\frac{3\sqrt[3]{(\sin A\sin B\sin C)^2}}{2\sin A\sin B\sin C}$$

$$\Rightarrow y\geq\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}}$$

តាងអនុគមន៍ $f(x)=\sin x$ ដែល $0<x<\pi$

គេមាន $f''(x)=-\sin x<0\ ,\ \forall x\in(0;\pi)$

នាំឲ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ប៉ោង ។

តាមទ្រឹស្តីបទ Jensen គេបាន

$$\frac{f(A)+f(B)+f(C)}{3}\le f(\frac{A+B+C}{3})$$

ឬ $\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\le \sin(\frac{A+B+C}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$

តាម វិសមភាព $AM-GM$ គេមាន

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\ge \sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}$$

គេទាញ $\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}\le \frac{\sqrt{3}}{2}$

ឬ $\sin A\sin B\sin C\le \frac{3\sqrt{3}}{8}$

ហេតុនេះ $y\ge \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}}\ge \frac{3}{2}.\frac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

ដោយ $y=\cot A+\frac{2\sin A}{\cos A+\cos(B-C)}\ge \sqrt{3}$

ដូចនេះតម្លៃអប្បរមានៃអនុគមន៍គឺ $\sqrt{3}$ ។

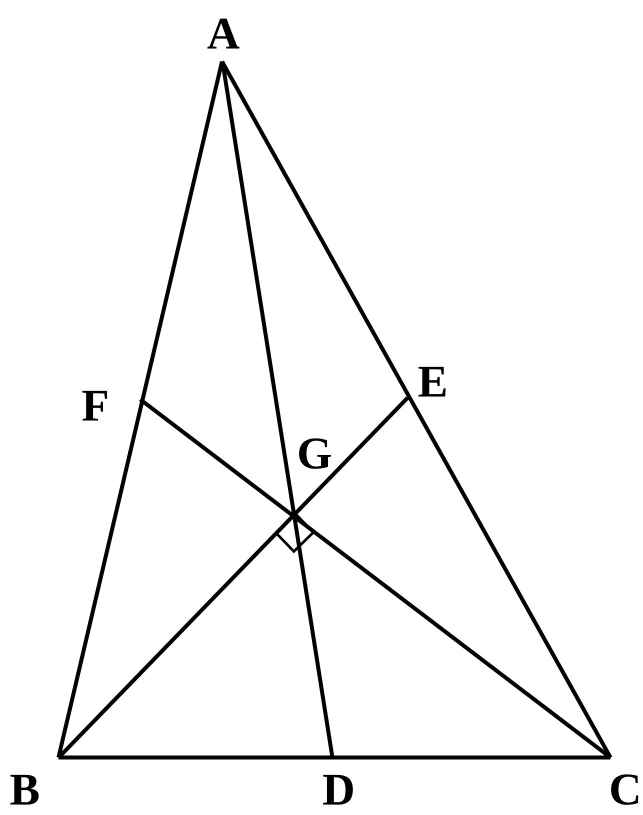
លំហាត់ទី៧៨

ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយមានមេដ្យាននៃជ្រុង AB និង AC កែងគ្នា ។

ចូរបង្ហាញថា $\cot B + \cot C \geq \frac{2}{3}$ ។ (CMO 1993)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\cot B + \cot C \geq \frac{2}{3}$



យើងសង់មេដ្យាន AD , BE , CF ហើយតាង G ជា

ទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ ។

យក $\mathbf{GE = x}$ និង $\mathbf{GF = y}$ នោះគេបាន

$\mathbf{BG = 2GE = 2x}$ និង $\mathbf{CG = 2GF = 2y}$

យើងមាន

$$\cot B = \cot(\angle GBA + \angle GBC)$$

$$= \frac{\cot(\angle GBA).\cot(\angle GBC) - 1}{\cot(\angle GBA) + \cot(\angle GBC)}$$

$$= \frac{\left(\frac{2x}{y}\right)\left(\frac{2x}{2y}\right) - 1}{\frac{2x}{y} + \frac{2x}{2y}} = \frac{2x^2 - y^2}{3xy}$$

ដូចគ្នាដែរ $\cot C = \dfrac{2y^2 - x^2}{3xy}$

គេបាន $\cot B + \cot C = \dfrac{2x^2 - y^2}{3xy} + \dfrac{2y^2 - x^2}{3xy} = \dfrac{x^2 + y^2}{3xy}$

តាមវិសមភាព AM-GM គេមាន

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \ge xy \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{3xy} \ge \frac{2}{3}$$

ដូចនេះ $\cot B + \cot C \ge \dfrac{2}{3}$ ។

លំហាត់ទី៧៨

គេឲ្យ a ; b ; c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a^2+1}{b+c}+\frac{b^2+1}{c+a}+\frac{c^2+1}{a+b}\geq 3$

(Regional Mathematical Olympiad-India 2006)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{a^2+1}{b+c}+\frac{b^2+1}{c+a}+\frac{c^2+1}{a+b}\geq 3$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $a^2+1\geq 2a$

គេទាញ $\frac{a^2+1}{b+c}\geq\frac{2a}{b+c}$

ដូចគ្នាដែរ $\frac{b^2+1}{c+a}\geq\frac{2b}{c+a}$ និង $\frac{c^2+1}{a+b}\geq\frac{2c}{a+b}$

$$\frac{a^2+1}{b+c}+\frac{b^2+1}{c+a}+\frac{c^2+1}{a+b}\geq\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}$$

គេមាន

$$\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}=\frac{2a^2}{a(b+c)}+\frac{2b^2}{b(c+a)}+\frac{2c^2}{c(a+b)}$$

តាមវិសមភាព **Cauchy-Schwartz** គេបាន

$$\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(c+a)}+\frac{c^2}{c(a+b)}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

ឬ $\frac{2a^2}{a(b+c)}+\frac{2b^2}{b(c+a)}+\frac{2c^2}{c(a+b)}\geq\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$

ដោយ $\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2}\geq ab+bc+ca$

ឬ $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង $2ab+2bc+2ca$

គេបាន $(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$

នាំឲ្យ $\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}\geq 3$

គេទាញ $\frac{2a^2}{a(b+c)}+\frac{2b^2}{b(c+a)}+\frac{2c^2}{c(a+b)}\geq 3$

ដូចនេះ $\frac{a^2+1}{b+c}+\frac{b^2+1}{c+a}+\frac{c^2+1}{a+b}\geq 3$ ។

លំហាត់ទី៧៦

សន្មតថាពហុធា $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$

អាចដាក់ជាកត្តា $(x+r_1)(x+r_2)...(x+r_n)$

ដែល $r_1, r_2, ..., r_n$ ជាចំនួនពិត ។

ចូរបង្ហាញថា $(n-1)a_{n-1}^2 \ge 2na_{n-2}$ ។

(Costa Rican Math Olympiad 2009)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $(n-1)a_{n-1}^2 \ge 2na_{n-2}$

យើងមាន $\sum_{i=1}^{n}(r_i) = r_1 + r_2 + ... + r_n = a_{n-1}$

និង $\sum_{1\le i<j\le n}(r_i . r_j) = a_{n-2}$ ។

គេមាន

$$\sum_{1\le i<j\le 1}(r_i - r_j)^2 = (n-1)\left[\sum_{i=1}^{n}(r_i)\right]^2 - 2n\sum_{1\le i<j\le n}(r_i . r_j) \ge 0$$

គេទាញ $(n-1)a_{n-1}^2 - 2na_{n-2} \ge 0$

ដូចនេះ $(n-1)a_{n-1}^2 \ge 2na_{n-2}$ ។

លំហាត់ទី៧៧

មាន x និង y ជាពីរចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $(1+x)(1+y)=2$ ។

ចូរបង្ហាញថា $xy+\frac{1}{xy}\geq 6$ ។

(Costa Rican Math Olympiad 2009)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $xy+\frac{1}{xy}\geq 6$

គេមាន

$$(1+x)(1+y)=2$$

$$1+x+y+xy=2$$

$$x+y=1-xy$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $x+y\geq 2\sqrt{xy}$

គេទាញ $1-xy\geq 2\sqrt{xy}\Leftrightarrow (1-xy)^2\geq 4xy$

សមមូល $1-2xy+(xy)^2\geq 4xy$ ឬ $1+(xy)^2\geq 6xy$

ដោយចែកអង្គទាំងពីរនឹង xy គេបាន $xy+\frac{1}{xy}\geq 6$