សិក្សាអនុគមន៍ទម្រង់ $y = f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$

លំហាត់ទី១ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{2\}$ ដោយ $f(x) = \dfrac{x^2-x-1}{x-2}$ ។
យើងតាង C ជាក្រាបរបស់វាលើតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$ ។

1. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$ ។
2. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។
3. a. រកចំនួនពិត a, b, c ដែលគ្រប់ $x \neq 2;\quad f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-2}$ ។

   b. គេតាង d ដែលមានសមីការ $y = x+1$ ។ បង្ហាញថា d ជាអាស៊ីមតូតនៃ C ត្រង់ $+\infty$ និង $-\infty$ ។
   សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d ។

   c. សង់ក្រាប C និង បន្ទាត់ d ។

ដំណោះស្រាយ

1. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-1}{x-2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = -\infty\frac{(1-0-0)}{1-0} = -\infty$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-1}{x-2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = +\infty\frac{(1-0-0)}{1-0} = +\infty$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

2. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

- ដេរីវេ

$$f'(x) = \left(\frac{x^2-x-1}{x-2}\right)' = \frac{\left(x^2-x-1\right)'(x-2)-(x-2)'\left(x^2-x-1\right)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{(2x-1)(x-2)-\left(x^2-x-1\right)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{2x^2-4x-x+2-x^2+x+1}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$$

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \; x^2-4x+3=0$ មានឫស $x_1 = 1; \; x_2 = 3$

- តារាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

- $f'(x) > 0$ ឬ អនុគមន៍ f កើន ពេល $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$
- $f'(x) < 0$ ឬ អនុគមន៍ f ចុះ ពេល $x \in (1, 2) \cup (2, 3)$
- បរមាធៀប
  - ត្រង់ $x = 1; \; f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$

    គេបាន f មានអតិបរមាធៀបមួយ គឺ $f(1) = \dfrac{1^2-1-1}{1-2} = 1$
  - ត្រង់ $x = 3; \; f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$

    គេបាន f មានអប្បបរមាធៀបមួយ គឺ $f(3) = \dfrac{3^2-3-1}{3-2} = 5$

- តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	5	↗	$+\infty$

3. a. រកចំនួនពិត a, b, c ដែលគ្រប់ $x \neq 2$; $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$

$$
\begin{aligned}
f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2} \quad &\Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 1}{x-2} = ax + b + \frac{c}{x-2} \\
&\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+1)+1}{x-2} = ax + b + \frac{c}{x-2} \\
&\Leftrightarrow x + 1 + \frac{1}{x-2} = ax + b + \frac{c}{x-2}
\end{aligned}
$$

ដោយផ្ទឹមមេគុណ យើងបាន $\boxed{a = 1;\ b = 1;\ c = 1}$

b. បង្ហាញថា $d:\ y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតនៃ C ត្រង់ $+\infty$ និង $-\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x) - (x+1)] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[x + 1 + \dfrac{1}{x-2} - (x+1)\right] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x-2} = 0$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } d:\ y = x + 1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតនៃ } C}$

សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d

$C:\ y = x + 1 + \dfrac{1}{x-2}$; $d:\ y = x + 1$

$$\Rightarrow y_c - y_d = x + 1 + \frac{1}{x-2} - (x+1) = \frac{1}{x-2}$$

- $y_c - y_d > 0 \quad \Leftrightarrow \dfrac{1}{x-2} > 0 \quad \Leftrightarrow x - 2 > 0 \quad \Leftrightarrow x > 2$

  ដូចនេះ $\boxed{\text{(c) ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ (d) ពេល } x > 2}$

- $y_c - y_d < 0 \quad \Leftrightarrow \dfrac{1}{x-2} < 0 \quad \Leftrightarrow x-2<0 \quad \Leftrightarrow \; x<2$

ដូចនេះ $\boxed{\text{(c) ស្ថិតនៅក្រោមបន្ទាត់ (d) ពេល } x<2}$

c. សង់ក្រាប C និង បន្ទាត់ d

$(C)\cap(x'ox)$ គឺ $y = o$

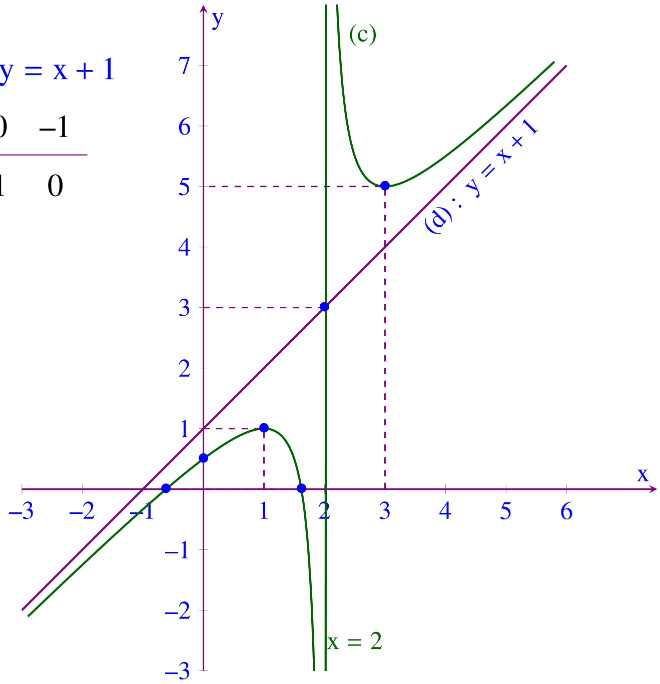
$\Leftrightarrow \; x^2 - x - 1 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-1) = 5$ មានឫស $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

គេបាន $x = 1.62 \quad , \quad x = -0.62$

$(C)\cap(y'oy) \Leftrightarrow x = 0 \quad \Rightarrow \; y = \dfrac{0^2-0-1}{0-2} = \dfrac{1}{2}$

$(d): \; y = x+1$

x	0	-1
y	1	0



លំហាត់ទី២

គេមានអនុគមន៍ f ដែល $f(x)=\dfrac{x^2-x-3}{x+1}$ និង គេតាងដោយ (C) ក្រាបនៃអនុគមន៍ f ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគន៍ f ។

ខ. បង្ហាញថា $f(x)=x-2-\dfrac{1}{x+1}$ ។

គ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

ឃ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃ f ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគន៍ f

ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2-x-3}{x+1}$; $f(x)$ មានន័យលុះត្រាតែ $x+1\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\neq -1$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ } f \text{ គឺ } D_f=\mathbb{R}-\{-1\}}$

ខ. បង្ហាញថា $f(x)=x-2-\dfrac{1}{x+1}$

ដោយ $$x-2-\frac{1}{x+1}=\frac{(x-2)(x+1)-1}{x+1}=\frac{x^2+x-2x-2-1}{x+1}=\frac{x^2-x-3}{x+1}=f(x)$$

ដូចនេះ $\boxed{f(x)=x-2-\dfrac{1}{x+1}}$

គ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C)

ដោយ $$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x-2)]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[x-2-\frac{1}{x+1}-(x-2)\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-1}{x+1}=0$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } y=x-2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប} C}$

ឃ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃ f

- ដេរីវេ

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - x - 3}{x + 1}\right)' = \frac{\left(x^2 - x - 3\right)'(x+1) - (x+1)'\left(x^2 - x - 3\right)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(2x-1)(x+1) - \left(x^2 - x - 3\right)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 2x - x - 1 - x^2 + x + 3}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x+1)^2};$$

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \; x^2 + 2x + 2 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(1)2 = -4 < 0$

$f'(x)$មានសញ្ញាតាមមេគុណ a

- តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	

$f'(x) > 0$ ឬ អនុគមន៍ f កើន ពេល $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

- តារាងអថេរភាពនៃ f

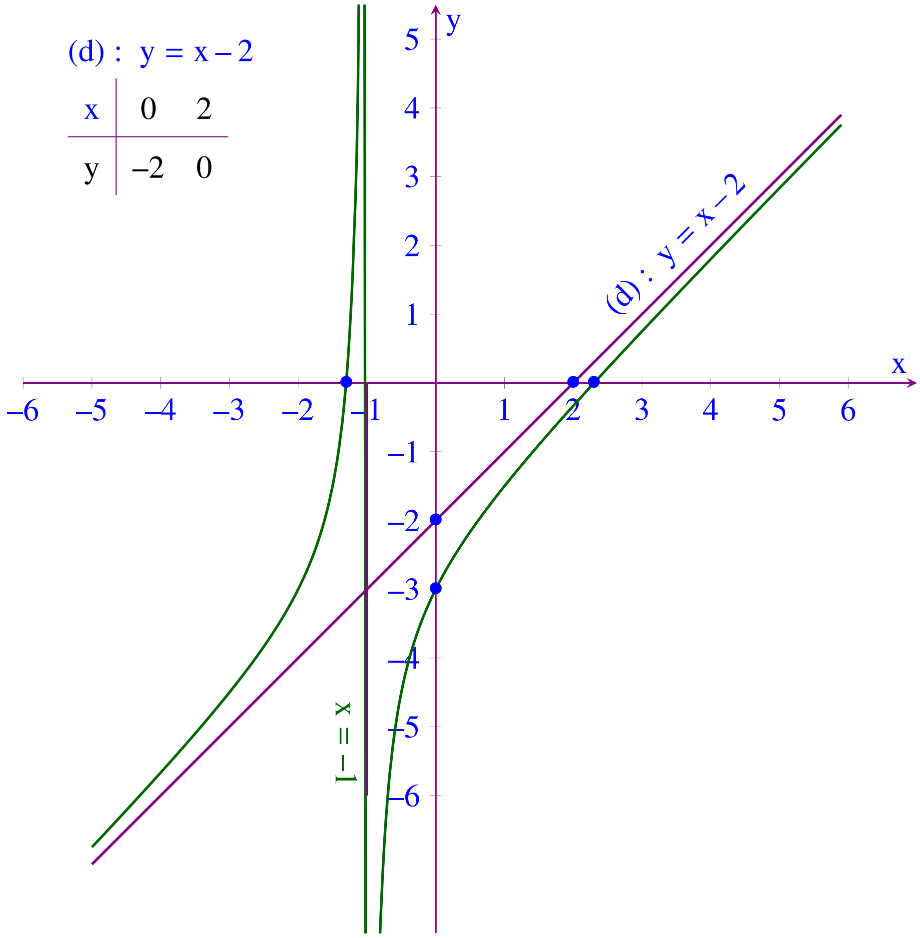
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

- សង់ក្រាប

◦ $C \cap (y'oy)$ គឺ $x = 0; \Rightarrow \; y = \dfrac{0^2 - 0 - 3}{0 + 1} = -3$

◦ $C \cap (x'ox)$ គឺ $y = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - x - 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-3) = 13 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}; \; x = 2.3, \; x = -1.3$


(d) : y = x − 2
x | 0 | 2
y | −2 | 0
(d) : y = x − 2
x = −1
x
y

លំហាត់ទី៣

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{(x+2)(x-2)}{(1-x)}$ ។

ក. រកដែនកំណត់ $f(x)$ ។

ខ. បង្ហាញថា $f(x)=-x-1+\dfrac{3}{x-1}$ ។

គ. សិក្សាអថេរភាពនិង សង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{(x+2)(x-2)}{(1-x)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកដែនកំណត់ $f(x)$; $f(x)=\dfrac{(x+2)(x-2)}{1-x}$

$f(x)$ មានន័យលុះត្រាតែ $1-x\neq 0 \iff x\neq 1$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ } f \text{ គឺ } D_f=\mathbb{R}-\{1\}}$

ខ. បង្ហាញថា $f(x)=-x-1+\dfrac{3}{x-1}$

ដោយ
$$\begin{aligned}-x-1+\frac{3}{x-1}&=\frac{(-x-1)(x-1)+3}{x-1}=\frac{-x^2+x-x+1+3}{-(1-x)}\\&=\frac{-\left(x^2-4\right)}{-(1-x)}\\&=\frac{(x+2)(x-2)}{1-x}\\&=f(x)\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{f(x)=-x-1+\dfrac{3}{x-1}}$

គ. សិក្សាអថេរភាពនិង សង់ក្រាប C

- ដេរីវេ

$$f'(x) = \left(\frac{(x+2)(x-2)}{1-x}\right)' = \left(\frac{x^2-4}{1-x}\right)' = \frac{\left(x^2-4\right)'(1-x)-(1-x)'\left(x^2-4\right)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{2x(1-x)+\left(x^2-4\right)}{(1-x)^2} = \frac{2x-2x^2+x^2-4}{(1-x)^2} = \frac{-x^2+2x-4}{(1-x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \ -x^2+2x-4 = 0$$

$$\Delta = b^2-4ac = (2)^2-4(-1)(-4) = 4-16 = -12 < 0$$

គេបាន$f'(x)$ មានសញ្ញាដូចមេគុណ a

- តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	

$f'(x) < 0$ ឬអនុគមន៍ f ចុះ ពេល $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

- លីមីត

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-4}{1-x} = \mp\infty$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-4}{1-x} = \pm\infty$$

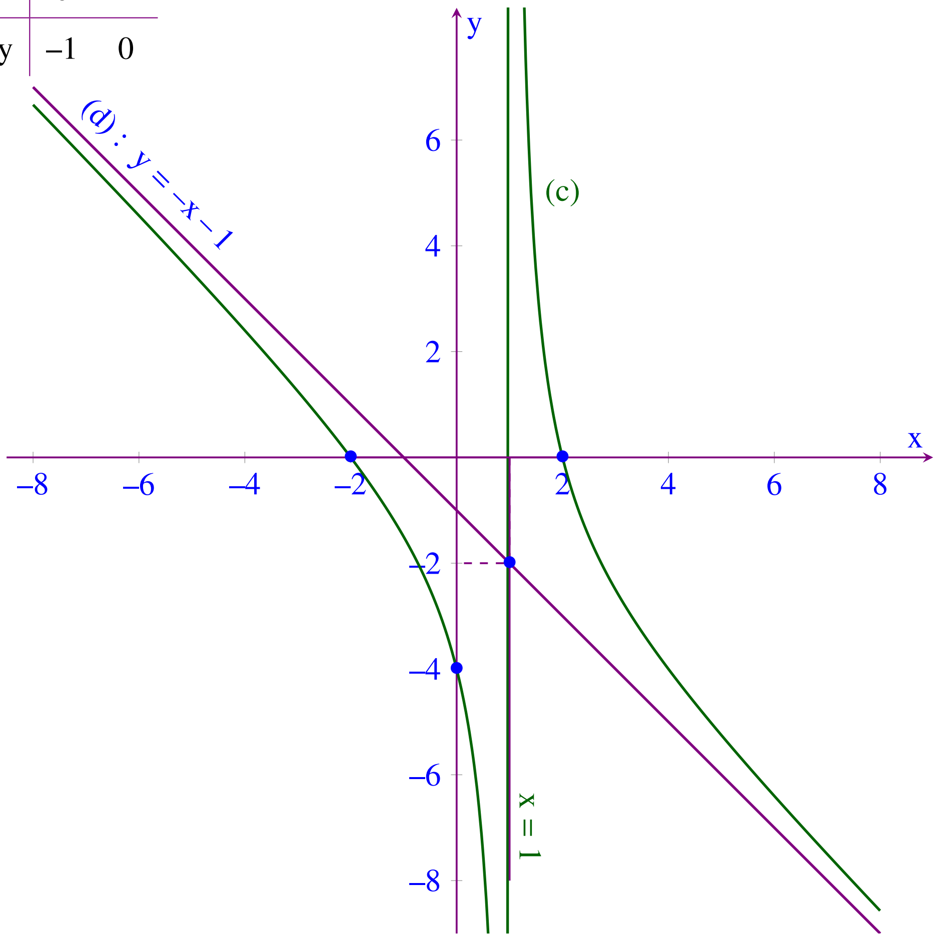
- តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$	$\|$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

- សង់ក្រាប
  - ក្រាប(c) កាត់អ័ក្សអរដោនេ ពេល$x = 0$ $\Rightarrow y = f(0) = \dfrac{(0+2)(0-2)}{1-0} = -4$
  - ក្រាប (c) កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីស ពេល $y = 0$ $\Leftrightarrow$ $0 = \dfrac{(x+2)(x-2)}{(1-x)}$ $\Leftrightarrow$ $x = -2;\ x = 2$

(d) : $y = -x - 1$

x	0	−1
y	−1	0



លំហាត់ទី៤

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2+x+4}{x+1}$ ហើយមានក្រាប C ។

១. រកដែនកំណត់ និង សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ f ។

២. សរសេរសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ។

៣. សង់តារាងអថេរភាព អាស៊ីមតូត និង ក្រាប C នៃអនុគមន៍ f ។

ដំណោះស្រាយ

១. រកដែនកំណត់

យើងមាន $f(x)=\dfrac{x^2+x+4}{x+1}$

- $f(x)$ មានន័យលុះត្រាតែ $x+1\neq 0 \quad \Rightarrow \; x\neq -1$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ដែនកំណត់នៃ } f \text{ គឺ } D_f=\mathbb{R}-\{-1\}}$

សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ f

$$f'(x)=\left(\frac{x^2+x+4}{x+1}\right)'=\frac{\left(x^2+x+4\right)'(x+1)-(x+1)'\left(x^2+x+4\right)}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{(2x+1)(x+1)-x^2-x-4}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+2x+x+1-x^2-x-4}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

ដោយ $(x+1)^2>0 \quad \forall x\in D_f$ គេបាន

- $f'(x)$ មានសញ្ញាដូចភាគយក x^2+2x-3
- $f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+2x-3=0$ មានឫស $x_1=1,\; x_2=-3$

តារាងសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

- $f'(x)>0$ ឬ អនុគមន៍ f កើន ពេល $x\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$
- $f'(x)<0$ ឬ អនុគមន៍ f ចុះ ពេល $x\in(-3,-1)\cup(-1,1)$
- ត្រង់ $x=-3;\; f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$

  គេបាន f មានអតិបរមាធៀបមួយ គឺ $f(-3)=\dfrac{9-3+4}{-3+1}=-5$
- ត្រង់ $x=1;\; f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$

  គេបាន f មានអប្បបរមាធៀបមួយ គឺ $f(1)=\dfrac{1^2+1+4}{1+1}=3$

២. សរសេរសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

- ដោយ $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+x+4}{x+1} = \pm\infty$

  ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x=-1 \text{ ជាសមីការអាស៊ីមតូតឈរ}}$

- $f(x) = \dfrac{x^2+x+4}{x+1} = x + \dfrac{4}{x+1}$ ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4}{x+1} = 0$

  ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } y=x \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត}}$

៣. សង់តារាងអថេរភាព អាស៊ីមតូត និង ក្រាប C នៃអនុគមន៍ f

តារាងអថេរភាពនៃ f

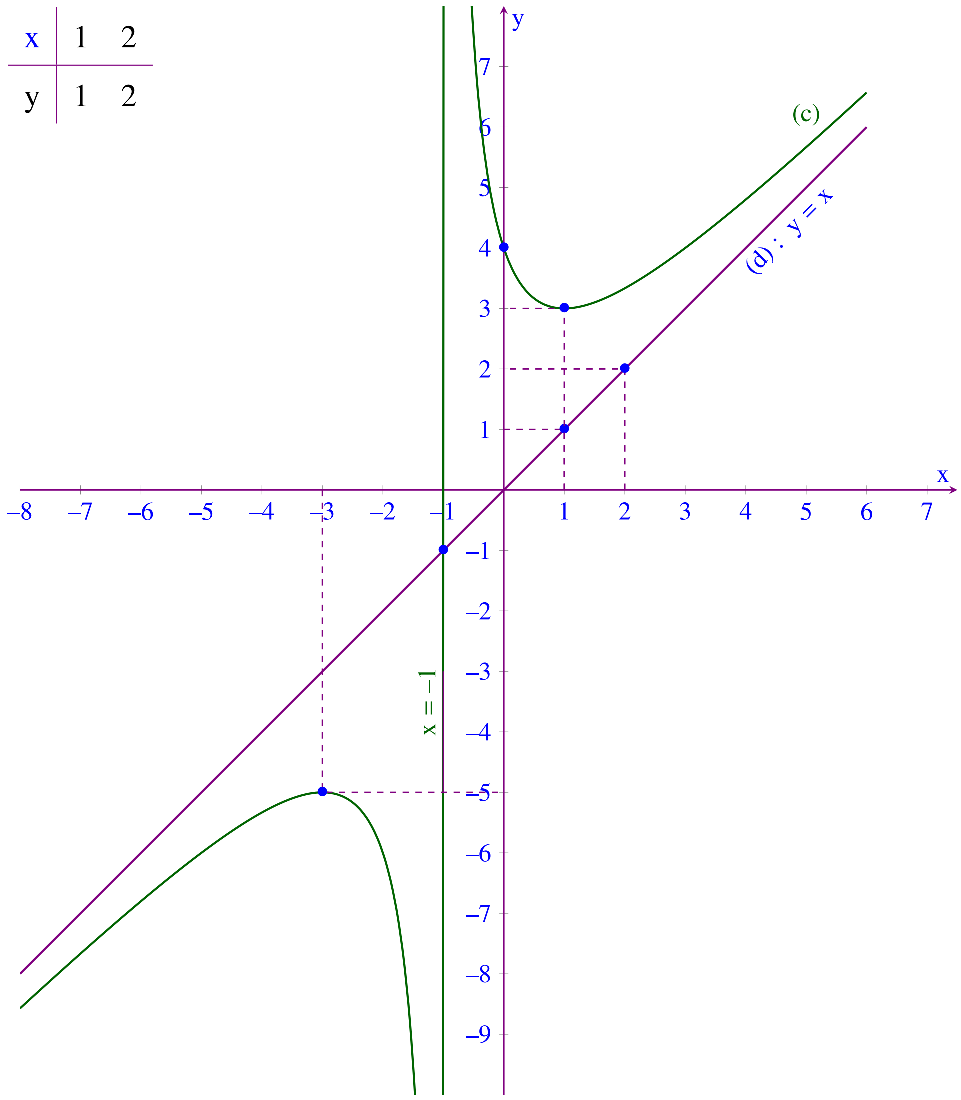
x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-5	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	3	↗	$+\infty$

សង់ក្រាប(C)

$(C)\cap(y'oy) \Leftrightarrow x=0 \quad \Rightarrow y = \dfrac{0^2+0+4}{0+1} = 4$

$(d):\ y=x$

x	1	2
y	1	2



លំហាត់ទី៥

គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{x^2+3x+6}{x+2}$ កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x \neq -2$ និងមានខ្សែកោង C។

១. គណនា $f'(x)$។ រកតម្លៃបរមានៃ f។ រកសមីការអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង C។
គណនាលីមីតនៃ f កាលណា x ខិតទៅ $+\infty$, $-\infty$។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f។

២. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង C ត្រង់ចំណុច $x_0 = 1$។
គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង C។

៣. សង់ខ្សែកោង C បន្ទាត់ប៉ះនៃខ្សែកោង C និងអាស៊ីមតូត នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់តែមួយ។
គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោង C អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ $x = 1,\ x = 2$។

ដំណោះស្រាយ

១. គណនា $f'(x)$

ដោយ $f(x) = \dfrac{x^2+3x+6}{x+2}$ យើងបាន

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+3x+6}{x+2}\right)' = \frac{\left(x^2+3x+6\right)'(x+2)-(x+2)'\left(x^2+3x+6\right)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{(2x+3)(x+2)-\left(x^2+3x+6\right)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+4x+3x+6-x^2-3x-6}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = \dfrac{x^2+4x}{(x+2)^2}}$

រកតម្លៃបរមានៃ f

ដោយ $(x+2)^2 > 0 \quad \forall x \neq -2$ យើងបាន $f'(x)$ មានសញ្ញាតាមភាគយក

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x+4) = 0 \quad \Rightarrow x = 0, x = -4$

តារាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

- ត្រង់ $x=-4;\ f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ គេបាន f មានអតិបរមាធៀបមួយ គឺ

$$f(-4)=\frac{16-12+6}{-4+2}=-5$$

- ត្រង់ $x=0;\ f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ គេបាន f មានអប្បបរមាធៀបមួយ គឺ

$$f(0)=\frac{0+0+6}{0+2}=3$$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{តម្លៃអតិបរមធៀបគឺ } -5 \text{ តម្លៃអប្បបរមាធៀបគឺ } 3}$

រកសមីការអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង C

- អាស៊ីមតូតឈរ

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm -2} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+3x+6}{x+2}=\pm\infty$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x=-2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$

- អាស៊ីមតូតទ្រេត

យើងមាន $f(x)=\frac{x^2+3x+6}{x+2}=x+1+\frac{4}{x+2}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x+2}=0$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{បន្ទាត់ } y=x+1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត}}$

គណនាលីមីតនៃ f កាលណា x ខិតទៅ $+\infty,\ -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+6}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{3}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{1+\frac{2}{x}}=\frac{+\infty\,(1+0+0)}{1+0}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x+6}{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{3}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{1+\frac{2}{x}}=\frac{-\infty\,(1+0+0)}{1+0}=-\infty$$

ដូចនេះ: $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty}$

តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-5	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	3	↗	$+\infty$

២. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង C ត្រង់ចំណុច $x_0 = 1$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះកំណត់ដោយ $y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$

ដោយ បន្ទាត់ប៉ះក្រាប ត្រង់ចំណុច $x_o = 1$ យើងបាន

- $f'(x_o) = f'(1) = \dfrac{1^2 + 4(1)}{(1+2)^2} = \dfrac{5}{9}$
- $f(x_o) = f(1) = \dfrac{1^2 + 3(1) + 6}{1+2} = \dfrac{10}{3}$

នាំឲ្យ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y = \frac{5}{9}(x-1) + \frac{10}{3} = \frac{5}{9}x + \frac{25}{9}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ } y = \frac{5}{9}x + \frac{25}{9}}$

គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង C

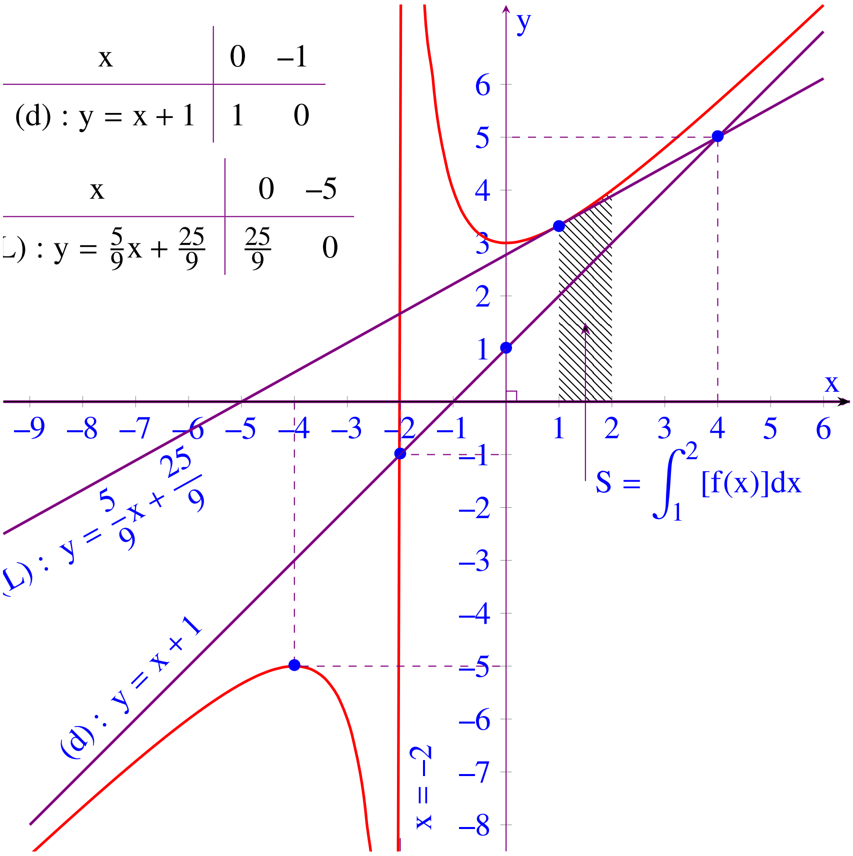
ដោយ អាស៊ីមតូតទ្រេតគឺ $d: \ y = x + 1$; បន្ទាត់ប៉ះគឺ $L: \ y = \frac{5}{9}x + \frac{25}{9}$

$$(d) \cap (L) \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 = \tfrac{5}{9}x + \tfrac{25}{9}$$

$$9(x+1) = 5x + 25 \quad \Rightarrow \quad 9x + 9 = 5x + 25 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

$x = 4 \quad \Rightarrow y = 4 + 1 = 5$ ដូចនេះ $\boxed{\text{ចំណុចប្រសព្វគឺ } A(4,5)}$

៣. សង់ខ្សែកោង C បន្ទាត់ប៉ះនៃខ្សែកោង C និងអាស៊ីមតូត នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់តែមួយ



គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោង C អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ $x = 1,\ x = 2$

$$S = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \left(x + 1 + \frac{4}{x+2}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} + x + 4\ln|x+2|\right]_1^2$$
$$= \frac{2^2}{2} + 2 + 4\ln|4| - \left(\frac{1^2}{2} + 1 + 4\ln|3|\right) = 4 + 4\ln 4 - \frac{3}{2} - 4\ln 3 = \frac{5}{2} + 4\ln\frac{4}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{S = \frac{5}{2} + 4\ln\frac{4}{3} \text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$

លំហាត់ទី៦

គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$ មានក្រាបតំណាង (C)។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

ខ. គណនាលីមីត៖ $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ ។

គ. រកតម្លៃនៃចំនួនពិត a ; b និង c ដើម្បីឲ្យ $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 2}$ ។

ឃ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

ង. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f រួចសង់ក្រាប (C)។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

$y = f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$ ដោយ f(x) មានន័យលុះត្រាតែ $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

ដូចនេះ $\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{2\}}$

ខ. គណនាលីមីត៖

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2}\right)}{x\left(1 - \frac{2}{x}\right)} = \pm\infty$$

គ. រកតម្លៃនៃចំនួនពិត a ; b និង c ដើម្បីឲ្យ $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 2}$

ដោយ $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} = x - 3 + \dfrac{1}{x - 2}$

យើងបាន $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 2} \Leftrightarrow x - 3 + \dfrac{1}{x - 2} = ax + b + \dfrac{c}{x - 2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 1 \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{a = 1 \; ; \; b = -3 \; ; \; c = 1}$

ឃ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត

ដោយ $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \pm\infty$ ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x = 2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$

យើងមាន $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} = x - 3 + \dfrac{1}{x - 2}$

ដោយ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x - 2} = 0$ ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } y = x - 3 \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត}}$

ង. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f រួចសង់ក្រាប (C)

- ដេរីវេ

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}\right)' = \frac{\left(x^2 - 5x + 7\right)'(x - 2) - (x - 2)'\left(x^2 - 5x + 7\right)}{(x - 2)^2}$$

$$= \frac{(2x-5)(x-2)-\left(x^2-5x+7\right)}{(x-2)^2}$$
$$= \frac{2x^2-4x-5x+10-x^2+5x-7}{(x-2)^2}$$
$$= \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$$

- សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ

$f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-4x+3=0$ រាង $a+b+c=0 \Rightarrow x_1=1\ ;\ x_2=\frac{c}{a}=3$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

- ចំណុចបរមាធៀប

☞ ត្រង់ $x=1$; $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ នាំឲ្យ f មានអតិបរមាធៀបមួយគឺ $f(1)=\frac{1^2-5(1)+7}{1-2}=-3$

☞ ត្រង់ $x=3$; $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ នាំឲ្យ f មានអប្បបរមាធៀបមួយគឺ $f(3)=\frac{3^2-5(3)+7}{3-2}=-1$

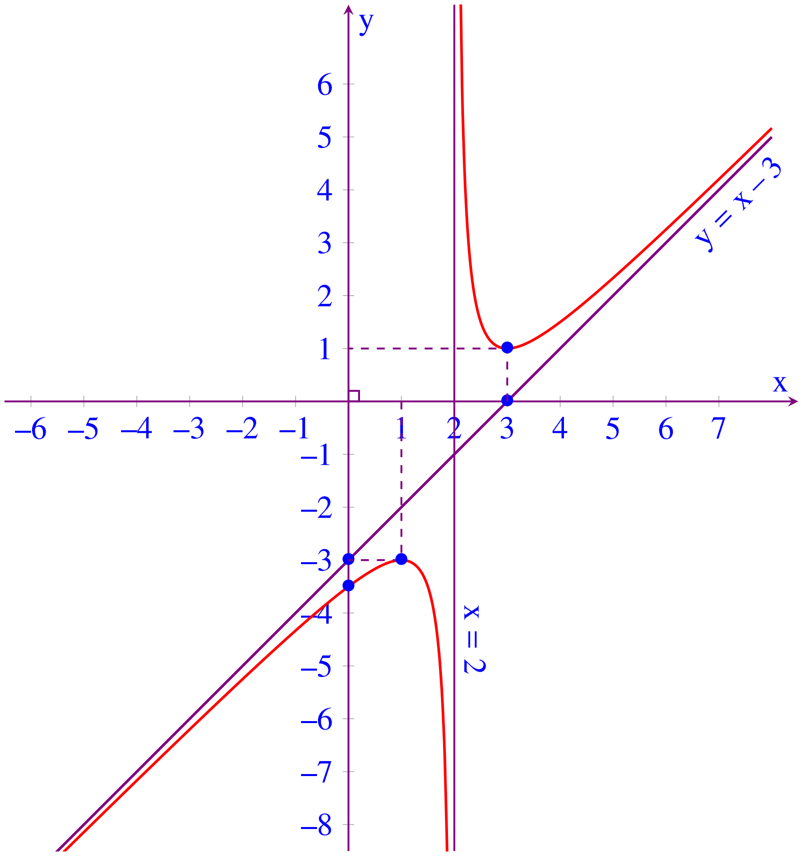
- តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

- សង់ក្រាប (C)

☞ $(C)\cap(y'Oy) \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y=\frac{0^2-5(0)+7}{0-2}=-\frac{7}{2}$

x	0	2
$y=x-2$	-2	0


y
x
y = x − 3
x = 2
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7

លំហាត់ទី៧

គេឲ្យអនុគមន៍ f មួយកំណត់គ្រប់តម្លៃ $x \neq 2$ ដែល $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 2}$ មានក្រាបតំណាង (C)។

ក. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍f ត្រង់ 2 និង $\pm\infty$ ។ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ។

ខ. កំណត់តម្លៃ a, b និង c ដើម្បីឲ្យ $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 2}$ ។ រួចបង្ហាញថាបន្ទាត់ (d) : $y = x - 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប(C) ត្រង់ $\pm\infty$។

គ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញាដេរីវេ។

ឃ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍f។

ង. បង្ហាញថាចំណុច I(2, 1) ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប(C) រួចសង់ក្រាប(C)។

ដំណោះស្រាយ

ក. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍f ត្រង់ 2 និង $\pm\infty$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}\right)}{x\left(1 - \frac{2}{x}\right)} = \pm\infty$$

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ

ដោយ $\lim_{x\to 2} f(x) = \pm\infty$ ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x = 2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$

ខ. កំណត់តម្លៃ a, b និង c ដើម្បីឲ្យ $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 2}$

ដោយ $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 2} = x - 1 + \dfrac{-6}{x - 2}$

យើងបាន $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 2} \Leftrightarrow ax + b + \dfrac{c}{x - 2} = x - 1 + \dfrac{-6}{x - 2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -6 \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{a = 1, b = -1, c = -6}$

បង្ហាញថាបន្ទាត់ (d) : $y = x - 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប(C) ត្រង់ $\pm\infty$

ដោយ $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{-6}{x - 2} = 0$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } y = x - 1 \text{ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត}}$

គ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - 3x - 4}{x - 2}\right)' = \frac{\left(x^2 - 3x - 4\right)'(x - 2) - (x - 2)'\left(x^2 - 3x - 4\right)}{(x - 2)^2}$$

$$= \frac{(2x - 3)(x - 2) - \left(x^2 - 3x - 4\right)}{(x - 2)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 4x - 3x + 6 - x^2 + 3x + 4}{(x - 2)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 4x + 10}{(x-2)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 10}{(x-2)^2}}$

សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 10 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(10) = -24 < 0 \Rightarrow f'(x)$ មានសញ្ញាដូចមេគុណ a

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) > 0 \ \forall x \neq 2}$

ឃ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍f

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

ង. បង្ហាញថាចំណុច $I(2,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប(C)

$I(2,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប$(C): y=f(x)=\dfrac{x^2-3x-4}{x-2}$ លុះត្រាតែ $f(2a-x)+f(x)=2b$ ដែល $a=2,\ b=1$

- $f(2a-x)=f(4-x)=\dfrac{(4-x)^2-3(4-x)-4}{(4-x)-2}=\dfrac{16-8x+x^2-12+3x-4}{4-x-2}$
$$=\frac{x^2-5x}{2-x}=\frac{-x^2+5x}{x-2}$$

យើងបាន $f(2a-x)+f(x)=\dfrac{-x^2+5x}{x-2}+\dfrac{x^2-3x-4}{x-2}=\dfrac{2x-4}{x-2}=2=2b$

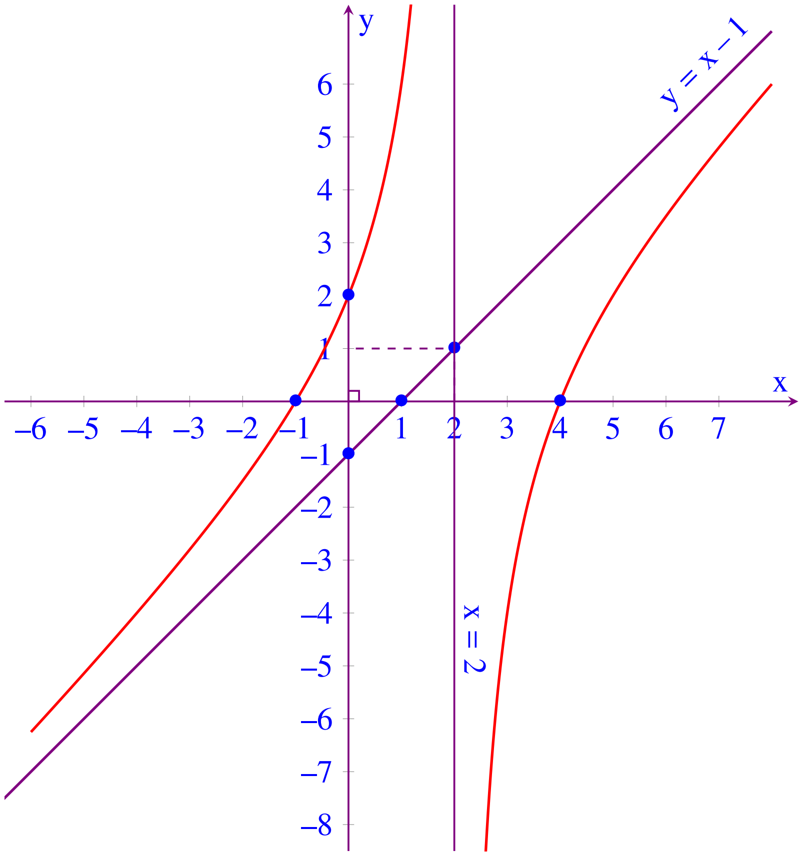
ដូចនេះ $\boxed{\text{ចំណុច } I(2,1) \text{ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប}(C)}$

សង់ក្រាប(C)

ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអ័ក្ស

- $(C)\cap(y'Oy) \Leftrightarrow x=0 \quad \Rightarrow \quad y=\dfrac{0^2-3(0)-4}{0-2}=2$
- $(C)\cap(x'Ox) \Leftrightarrow y=0 \Leftrightarrow x^2-3x-4=0$ មានរាង $\quad a-b+c=0$
$$\Rightarrow x_1=-1\ ;\ x_2=-\frac{c}{a}=4$$
- អាស៊ីមតូតឈរ $x=2$
- អាស៊ីមតូតទ្រេត $y=x-1$

x	0	1
$y=x-1$	-1	0


y
x
y = x − 1
x = 2

លំហាត់ទី៨

គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y = f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-1}$ មានក្រាបតំណាង (C)។

ក. ចូររកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f។

ខ. គណនា $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ។ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ។

គ. បង្ហាញថា $f(x) = x + 1 - \dfrac{3}{x-1}$ ។ រួចបង្ហាញថា (d) : $y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប(C) ត្រង់ $\pm\infty$ ។

ឃ. បង្ហាញថា $f'(x) = \dfrac{x^2-2x+4}{(x-1)^2}$ ចំពោះគ្រប់ $x \in D_f$ ។ រួចសិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ ។

ង. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f។

ច. រកចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) នឹងអ័ក្សទាំងពីរ ហើយ រកផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប រួចសង់ក្រាប(C)។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

យើងមាន $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-1}$ ដោយ f(x) មានន័យលុះត្រាតែ $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

ដូចនេះ $\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{1\}}$

ខ. គណនា $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-4}{x-1} = \boxed{\pm\infty}$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-4}{x-1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-4}{x-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \boxed{+\infty}$$

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ

ដោយ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \pm\infty$ ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x = 1 \text{ ជាសមីការអាស៊ីមតូតឈរ}}$

គ. បង្ហាញថា $f(x) = x + 1 - \dfrac{3}{x-1}$

ដោយ $x + 1 - \dfrac{3}{x-1} = \dfrac{(x+1)(x-1)-3}{x-1} = \dfrac{x^2-1-3}{x-1} = \dfrac{x^2-4}{x-1} = f(x)$

ដូចនេះ $\boxed{f(x) = x + 1 - \dfrac{3}{x-1}}$

បង្ហាញថា (d) : $y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប(C) ត្រង់ $\pm\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\dfrac{3}{x-1}\right) = 0$

ដូចនេះ $\boxed{(d) : y = x + 1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប(C) ត្រង់ } \pm\infty}$

ឃ. បង្ហាញថា $f'(x) = \dfrac{x^2-2x+4}{(x-1)^2}$ ចំពោះគ្រប់ $x \in D_f$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2-4}{x-1}\right)' = \frac{\left(x^2-4\right)'(x-1)-(x-1)'\left(x^2-4\right)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x(x-1)-\left(x^2-4\right)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2-2x-x^2+4}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2-2x+4}{(x-1)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = \dfrac{x^2-2x+4}{(x-1)^2}}$

រួចសិក្សាសញ្ញា $f'(x)$

$f'(x) = \dfrac{x^2-2x+4}{(x-1)^2}$ ដោយ $(x-1)^2 > 0 \quad \forall x \in D_f \Rightarrow f'(x)$ មានសញ្ញាដូចភាគយក

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \quad x^2-2x+4 = 0$

$\Delta = b^2-4ac = (-2)^2-4(1)(4) = -12 < 0 \Rightarrow f'(x)$ មានសញ្ញាដូចមេគុណ a

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) > 0 \quad \forall x \in D_f}$

ង. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$	‖	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

ច. រកចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) នឹងអ័ក្សទាំងពីរ

- $(C) \cap (x'Ox) \Leftrightarrow y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow x = \pm 2$
- $(C) \cap (y'Oy) \Leftrightarrow x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{0^2 - 4}{0 - 1} = 4$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ក្រាប } (C) \text{ កាត់អ័ក្ស } x'Ox \text{ ត្រង់ } x = -2 \text{ និង } x = 2 \text{ ហើយកាត់អ័ក្ស} y'Oy \text{ ត្រង់ } y = 4}$

រកផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប

ផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) គឺជាចំណុចប្រសព្វរវាង អាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត

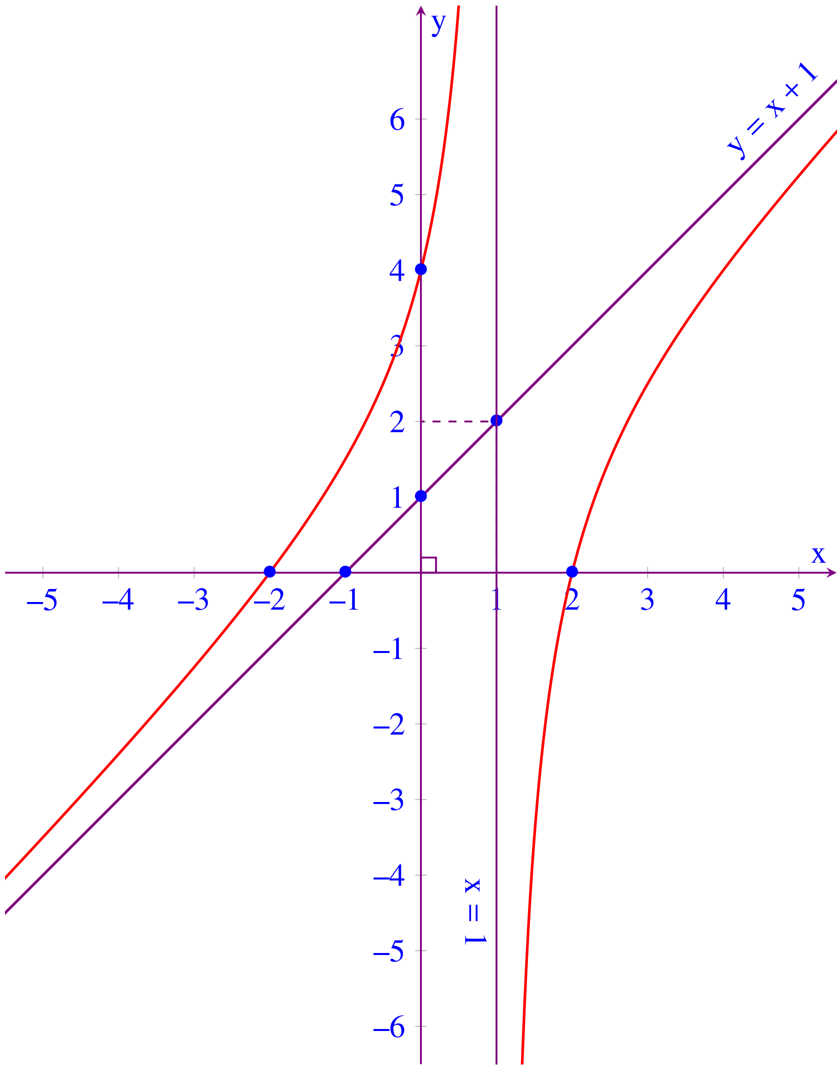
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = x + 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1 + 1 = 2 \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប}(C) \text{ គឺ } I(1, 2)}$

សង់ក្រាប(C)

- អាស៊ីមតូតឈរ $x = 1$
- អាស៊ីមតូតទ្រេត $y = x + 1$

x	0	-1
$y = x + 1$	1	0



លំហាត់ទី៩

គេមានអនុគមន៍ f មួយកំណត់លើ $\mathbb{R}-\{1\}$ ដោយ $y=f(x)=\dfrac{x^2-x+9}{x-1}$ មានក្រាបតំណាង(C)។

ក. ចូរគណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty\ ;\ +\infty$

ខ. ចូរសរសេរសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប(C)។

គ. សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ រួចបង្ហាញថា អនុគមន៍ f មានអតិបរមាធៀបមួយត្រង់ $x=-2$ និង អប្បបរមាធៀបមួយត្រង់ $x=4$ ព្រមទាំងរកតម្លៃបរមាធៀបទាំងនេះ។

ឃ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

ង. កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត $a; b$ និង c ដែលធ្វើឲ្យ $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$ ។ រួចបង្ហាញថា $(d): y=x$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C។

ច. រកចំណុចប្រសព្វរវាង អាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត រួចសង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (d) ក្នុងតម្រុយតែមួយ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty\ ;\ +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+9}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+9}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\boxed{+\infty}$$

ខ. សរសេរសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប(C)

ដោយ $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x+9}{x-1}=\pm\infty$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x=1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$

គ. សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

យើងមាន $f'(x)=\left(\dfrac{x^2-x+9}{x-1}\right)'=\dfrac{\left(x^2-x+9\right)'(x-1)-(x-1)'\left(x^2-x+9\right)}{(x-1)^2}$

$$=\frac{(2x-1)(x-1)-\left(x^2-x+9\right)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{2x^2-2x-x+1-x^2+x-9}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x^2-2x-8}{(x-1)^2}$$

$f'(x)$ មានសញ្ញាដូចភាគយក

$f'(x)=0\Leftrightarrow\quad x^2-2x-8=0\Leftrightarrow(x-4)(x+2)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=-2\end{array}\right.$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

- $f'(x)>0$ ឬអនុគមន៍ f កើន នៅពេល $x\in(-\infty;-2)\cup(4;+\infty)$
- $f'(x)<0$ ឬអនុគមន៍ f ចុះ នៅពេល $x\in(-2;1)\cup(4;+\infty)$

បង្ហាញថា អនុគមន៍ f មានអតិបរមាធៀបមួយត្រង់ $x=-2$ និង អប្បបរមាធៀបមួយត្រង់ $x=4$

- ត្រង់ $x=-2;\ f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ នាំឲ្យ f មានអតិបរមាធៀបមួយត្រង់ $x=-2$ ដែលតម្លៃនៃអតិបរមាធៀបនេះគឺ
  $f(-2)=\dfrac{(-2)^2-(-2)+9}{-2-1}=\dfrac{4+2+9}{-3}=-5$
- ត្រង់ $x=4;\ f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ នាំឲ្យ f មានអប្បបរមាធៀបមួយត្រង់ $x=4$ ដែលតម្លៃនៃអប្បបរមាធៀបនេះគឺ
  $f(4)=\dfrac{(4)^2-(4)+9}{4-1}=\dfrac{16-4+9}{3}=7$

ឃ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$

ង. កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត a; b និង c ដែលធ្វើឲ្យ $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$

ដោយ $f(x) = \frac{x^2 - x + 9}{x-1} = x + \frac{9}{x-1}$

យើងបាន $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad ax + b + \frac{c}{x-1} = x + \frac{9}{x-1}$

ផ្ទឹមមេគុណ យើងបាន $a = 1;\ b = 0\ ;\ c = 9$

ដូចនេះ $\boxed{a = 1;\ b = 0\ ;\ c = 9}$

បង្ហាញថា $(d) : y = x$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x) - x] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{9}{x-1} = 0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $y = x$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត

ច. រកចំណុចប្រសព្វរវាង អាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត

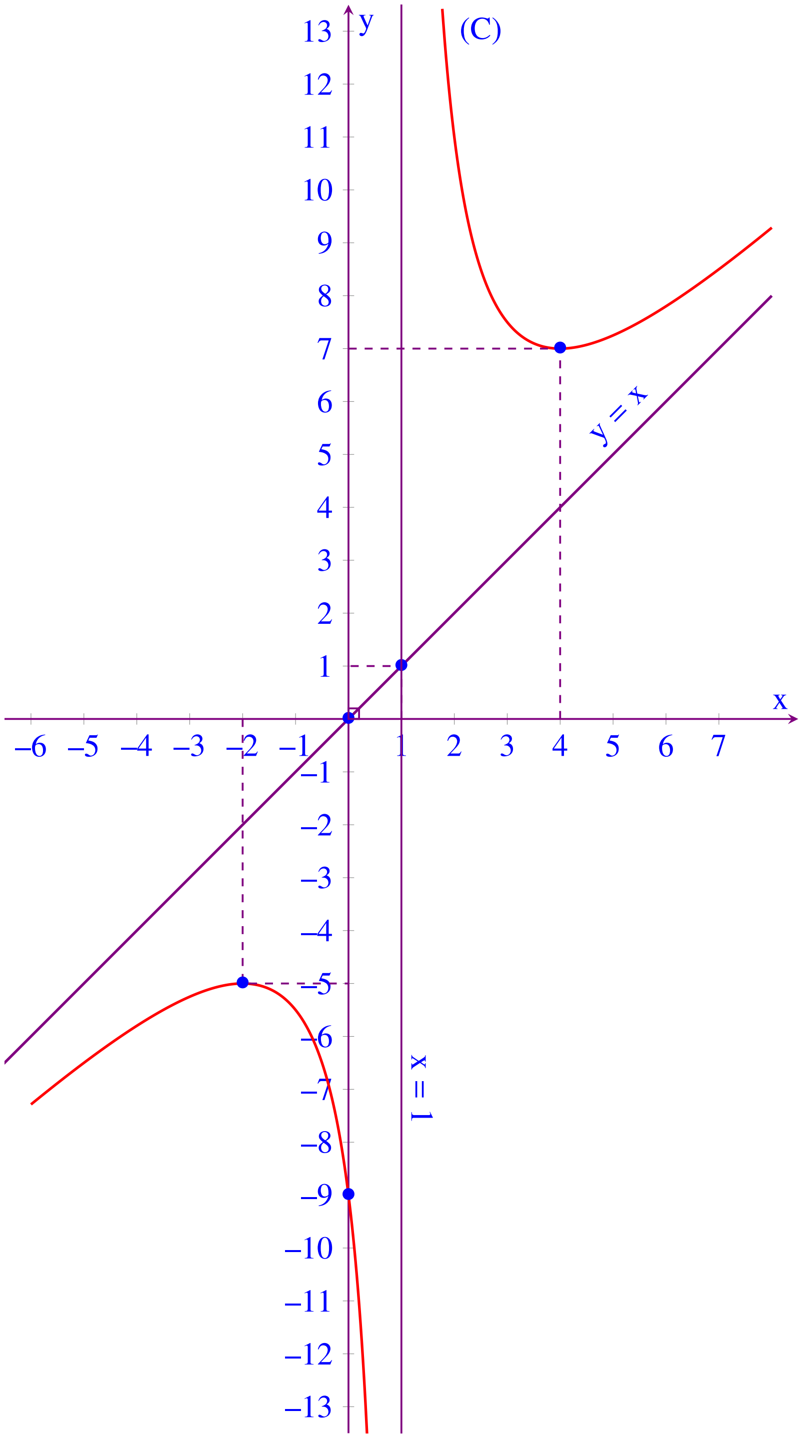
- អាស៊ីមតូតទ្រេត $y = x$
- អាស៊ីមតូតឈរ $x = 1$ ជំនួសក្នុងអាស៊ីមតូតទ្រេតយើងបាន $y = 1$

ដូចនេះ ចំណុចប្រសព្វរវាងអាស៊ីមតូតទាំងពីរគឺ $(1, 1)$

សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (d)

- $(C) \cap (y'Oy) \Leftrightarrow \quad x = 0 \Rightarrow y = \frac{0^2 - 0 + 9}{0 - 1} = -9$
- តារាងតម្លៃលេខអាស៊ីមតូតទ្រេត $y = x$

x	0	1
$y = x$	0	1



y
(C)
x
y = x
x = 1
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
−10
−11
−12
−13
−6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7

លំហាត់ទី១០

គេមានអនុគមន៍ f មួយ ដែលកំណត់ដោយ $y = f(x) = \dfrac{x^2+3x-3}{x-1}$ មានក្រាបតំណាង (C)។

ក. ចូររកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍f ។

ខ. ចូរគណនា $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x);\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ។

គ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង សមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

ឃ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ ។ រួចរកតម្លៃបរមាធៀប បើមាន។

ង. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

ច. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូតទ្រេត រួចសង់ក្រាប(C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍f

ដោយ $y = f(x) = \dfrac{x^2+3x-3}{x-1}$ គេបាន f(x) មានន័យលុះត្រាតែ $x-1 \neq 0 \iff x \neq 1$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ដែនកំនត់នៃអនុគមន៍ f គឺ } D_f = \mathbb{R} - \{1\}}$

ខ. គណនា $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x);\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+3x-3}{x-1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{x} = \pm\infty$ **ដូចនេះ** $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty}$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+3x-3}{x-1} = \pm\infty$ **ដូចនេះ** $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \pm\infty}$

គ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង សមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត

- ដោយ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \pm\infty$ **ដូចនេះ** $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x = 1 \text{ ជាសមីការអាស៊ីមតូតឈរ}}$
- ដោយ $y = f(x) = \dfrac{x^2+3x-3}{x-1} = x + 4 + \dfrac{1}{x-1}$

  គេបាន $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$

  ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } y = x + 4 \text{ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត}}$

ឃ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

$$f'(x)=\left(\frac{x^2+3x-3}{x-1}\right)'=\frac{\left(x^2+3x-3\right)'(x-1)-(x-1)'\left(x^2+3x-3\right)}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{(2x+3)(x-1)-\left(x^2+3x-3\right)}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{2x^2-2x+3x-3-x^2-3x+3}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-2x=0 \quad\Leftrightarrow x(x-2)=0 \quad\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x-2=0 \quad\Rightarrow\quad x=2 \end{array}\right.$$

តារាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

- $f'(x)>0$ ឬអនុគមន៍f កើន នៅពេល $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$
- $f'(x)<0$ ឬអនុគមន៍f ចុះ នៅពេល $x\in(0,1)\cup(1,2)$

បរមាធៀប

- ត្រង់ $x=0;\ f'(x)=0$ ប្ដូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ គេបាន f មានអតិបរមាធៀបមួយ គឺ

$$f(0)=\frac{0^2+3(0)-3}{0-1}=3$$

- ត្រង់ $x=2;\ f'(x)=0$ ប្ដូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ គេបាន f មានអប្បបរមាធៀបមួយ គឺ

$$f(2)=\frac{2^2+3(2)-3}{2-1}=7$$

ង. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	7	↗	$+\infty$

ច. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូតទ្រេត

- ក្រាប (C) : $y = f(x) = \dfrac{x^2+3x-3}{x-1} = x+4+\dfrac{1}{x-1}$
- អាស៊ីមតូតទ្រេត d : $y = x+4$

ដោយ $y_c - y_d = x+4+\dfrac{1}{x-1}-(x+4) = \dfrac{1}{x-1}$

☞ $y_c - y_d > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{x-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x-1>0 \Rightarrow x>1$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ក្រាប (C) ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ d ពេល } x>1}$

☞ $y_c - y_d < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{x-1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x-1<0 \Rightarrow x<1$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ក្រាប (C) ស្ថិតនៅក្រោមបន្ទាត់ d ពេល } x<1}$

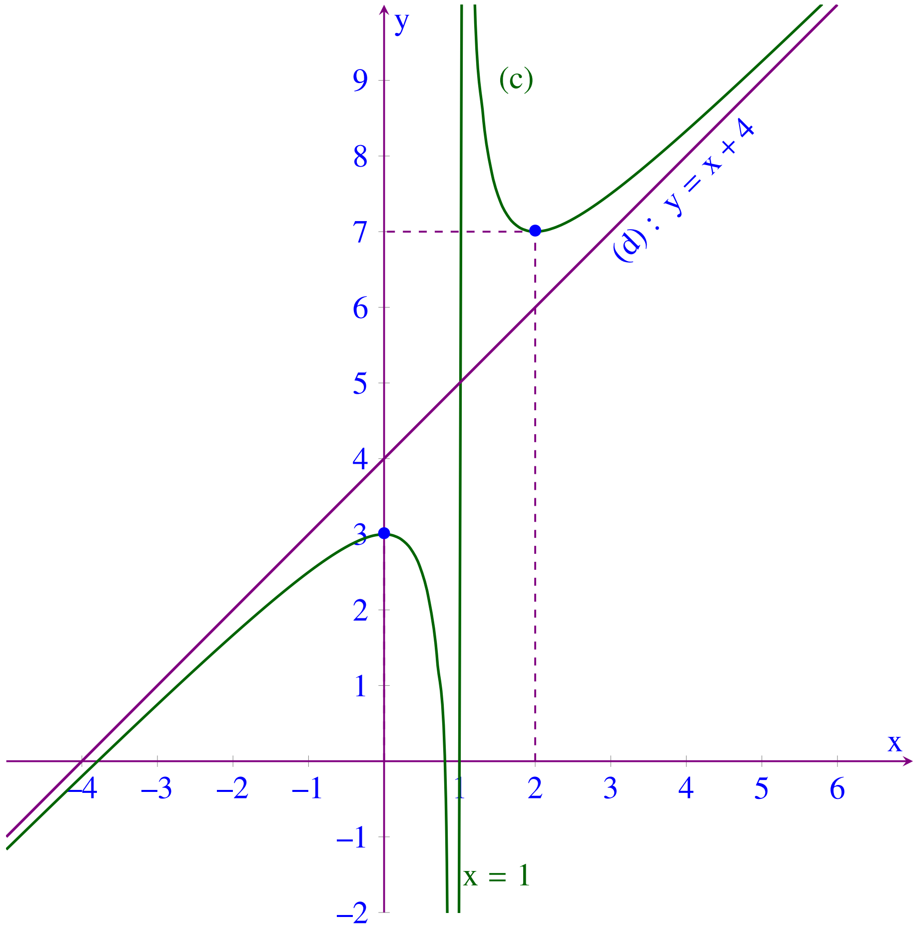
សង់ក្រាប C

- $(C)\cap(y'oy) \Leftrightarrow x=0 \quad \Rightarrow y = \dfrac{0^2+3(0)-3}{0-1} = 3$

(d) : $y = x+4$

-

x	0	–4
y	4	0


y
9
8
7
6
5
4
3
2
1
−1
−2
(c)
(d) : y = x + 4
x
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
x = 1

លំហាត់ទី១

f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $I = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ ដោយ $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-4}$ ។

ក. សិក្សាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty,\ -2,\ 2$ និង $+\infty$ ។

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេក និង អាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. សង់នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$ ក្រាបតាង f ។

ដំណោះស្រាយ

ក. សិក្សាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty,\ -2,\ 2$ និង $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x^2-4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x^2\left(1-\dfrac{4}{x^2}\right)} = \frac{2}{1-0} = 2$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2}$

$$\lim_{x\to-2} f(x) = \lim_{x\to-2} \frac{2x^2}{x^2-4} = \pm\infty$$ ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to-2} f(x) = \pm\infty}$

$$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \frac{2x^2}{x^2-4} = \pm\infty$$ ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to2} f(x) = \pm\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2\left(1-\dfrac{4}{x^2}\right)} = \frac{2}{1-0} = 2$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2}$

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេក និង អាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបតាង f

- ដោយ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$ ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } y = 2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេក}}$

- ដោយ $\lim_{x\to-2} f(x) = \pm\infty$; $\lim_{x\to 2} f(x) = \pm\infty$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x = -2 \text{ និង } x = -2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$

ខ. សិក្សាអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

- ដេរីវេ

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2}{x^2-4}\right)' = \frac{(2x^2)'(x^2-4)-(x^2-4)'(2x^2)}{(x^2-4)^2} = \frac{4x(x^2-4)-2x(2x^2)}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{4x^3-16x-4x^3}{(x^2-4)} = \frac{-16x}{(x^2-4)}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -16x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

- តារាងសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$

- $f'(x) > 0$ ឬ អនុគមន៍ f កើន នៅពេល $x \in (-\infty,-2) \cup (-2,0)$

- $f'(x) < 0$ ឬ អនុគមន៍ f ចុះ នៅពេល $x \in (0,2) \cup (2,+\infty)$

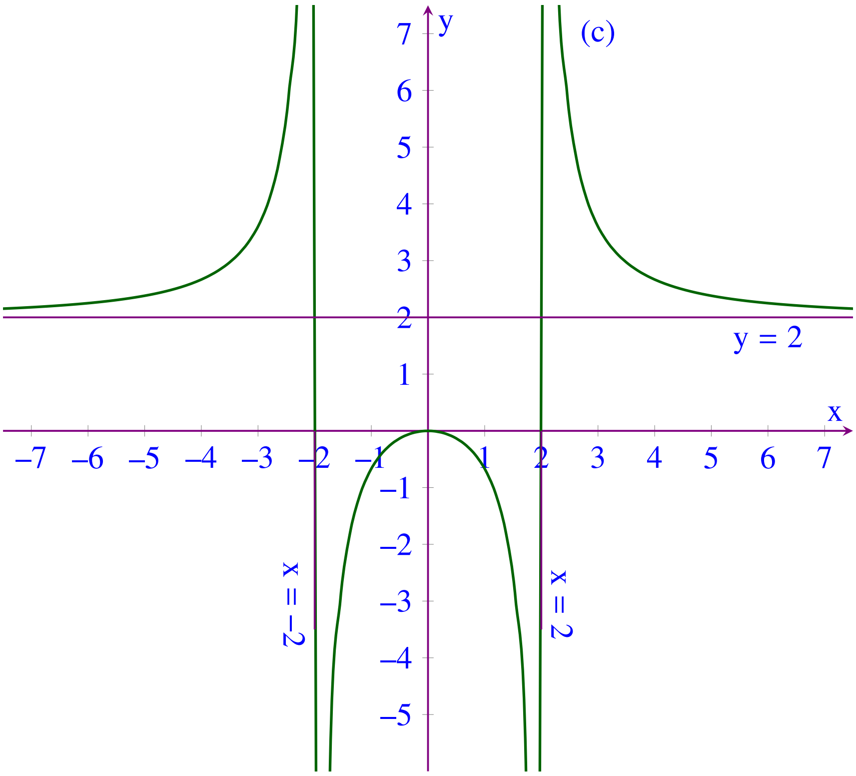
- ត្រង់ $x = 0;\ f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$

គេបាន f មានអតិបរមាធៀបមួយ គឺ $f(0) = \dfrac{2(0)^2}{0^2-4} = 0$

- តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	2

គ. សង់នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ក្រាបតាង f



លំហាត់ទី២

អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x \neq -2,\ \ x \neq 2$ ដោយ $y = f(x) = \dfrac{x^2}{4-x^2}$ និងមានក្រាប C ។

១. គណនា $\lim\limits_{x \to -2} f(x),\ \lim\limits_{x \to 2} f(x)$ និង $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ ។
ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C ។

២. សិក្សាសញ្ញានៃដេរីវេ $f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

៣. គណនា $f(-3)$ និង $f(3)$ ហើយសង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ f ។

ដំណោះស្រាយ

១. គណនា $\lim\limits_{x \to -2} f(x),\ \lim\limits_{x \to 2} f(x)$ និង $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$

ដោយ $y = f(x) = \dfrac{x^2}{4-x^2}$ គេបាន

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x^2}{4-x^2} = \pm\infty \qquad \boxed{\lim_{x \to -2} f(x) = \pm\infty}$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2}{4-x^2} = \pm\infty \qquad \boxed{\lim_{x \to 2} f(x) = \pm\infty}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{4-x^2} = -1 \qquad \boxed{\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -1}$$

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C

- ដោយ $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \pm\infty$ ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x = -2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$
- $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \pm\infty$ ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x = 2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$
- ដោយ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -1$ ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } y = -1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេក}}$

២. សិក្សាសញ្ញានៃដេរីវេ $f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{4-x^2}\right)' = \frac{2x\left(4-x^2\right)+2x\left(x^2\right)}{\left(x^2\right)^2} = \frac{8x-2x^3+2x^3}{x^4} = \frac{8x}{x^4}$$

ដោយ $x^4 \geq 0 \quad \forall x \in D_f$ គេបាន $f'(x)$ មានសញ្ញាតាមភាគយក $8x$

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

តារាងសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$

- $f'(x) < 0$ ឬ អនុគមន៍ f ចុះ ពេល $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0)$
- $f'(x) > 0$ ឬ អនុគមន៍ f កើន ពេល $x \in (0, 2) \cup (2, +\infty)$

• ត្រង់ $x = 0;\ f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$

គេបាន f មានអប្បបរមាធៀបមួយ គឺ $f(0) = \dfrac{(0)^2}{4-0^2} = 0$

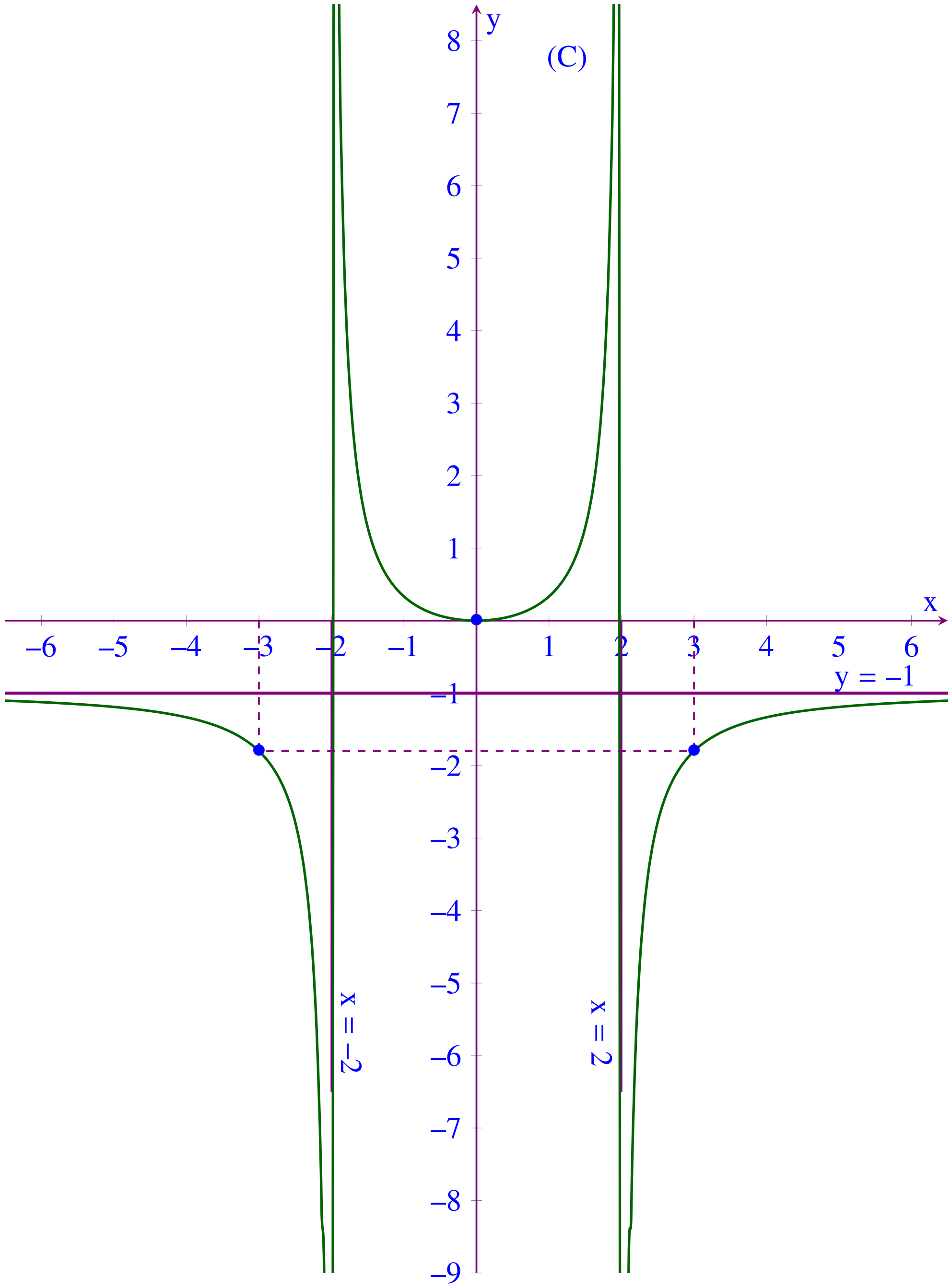
តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1

៣. គណនា $f(-3)$ និង $f(3)$ ហើយសង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ f

• $f(-3) = \dfrac{(-3)^2}{4-(-3)^2} = \dfrac{9}{-5}$ $\boxed{f(-3) = -\dfrac{9}{5}}$

• $f(3) = \dfrac{3^2}{4-3^2} = \dfrac{9}{-5}$ $\boxed{f(3) = -\dfrac{9}{5}}$


(C)
y
x
y = −1
x = −2
x = 2

លំហាត់ទី៣

អនុគមន៍ f មួយកំណត់ដោយ $y = f(x) = \dfrac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 12}$ មានក្រាបតំណាង (C) ។

ក. ចូររកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

ខ. ចូរគណនាលីមីត៖ $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)$ ។

គ. កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប(C) ។

ឃ. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f រួចសិក្សាសញ្ញាដេរីវេ។

ង. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់ក្រាប(C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

យើងមាន $y = f(x) = \dfrac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 12}$

ដោយ f(x) មានន័យលុះត្រាតែ $x^2 + x - 12 \neq 0 \quad \Leftrightarrow (x+4)(x-3) \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 4 \neq 0 \\ x - 3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -4 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{-4, 3\}}$

ខ. គណនាលីមីត៖ $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to -4} f(x) = \lim_{x\to -4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 12} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 12} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 12} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2\left(2 - \frac{9}{x} + \frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{12}{x^2}\right)} = 2$$

គ. កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប(C)

ដោយ $\lim\limits_{x\to -4} f(x) = \pm\infty$ និង $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \pm\infty$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x = -4 \text{ និង } x = 3 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបC}}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$ ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } y = 2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេក}}$

ឃ. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12}\right)' = \frac{(4x-9)\left(x^2+x-12\right)-(2x+1)\left(2x^2-9x+4\right)}{\left(x^2+x-12\right)^2}$$

$$= \frac{11x^2-56x+104}{\left(x^2+x-12\right)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = \dfrac{11x^2-56x+104}{\left(x^2+x-12\right)^2}}$

សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 11x^2-56x+104 = 0 \quad \Rightarrow \Delta = (-56)^2-4(11)(104) = -1440 < 0$

យើងបាន $f'(x)$ មានសញ្ញាដូចមេគុណ a

x	$-\infty$	-4	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖ $+$	‖ $+$	

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{D}$ ដូចនេះ អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍កើនលើដែនកំណត់ D_f

ង. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់ក្រាប(C)

តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	-4	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖ $+$	‖ $+$	
$f(x)$	$2 \nearrow +\infty$	‖ $-\infty \nearrow +\infty$	‖ $-\infty \nearrow 2$	

សង់ក្រាប

$(C)\cap(x'Ox) \Leftrightarrow y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2-9x+4 = 0$

$$\Delta = b^2-4ac = (-9)^2-4(2)(4) = 81-32 = 49$$

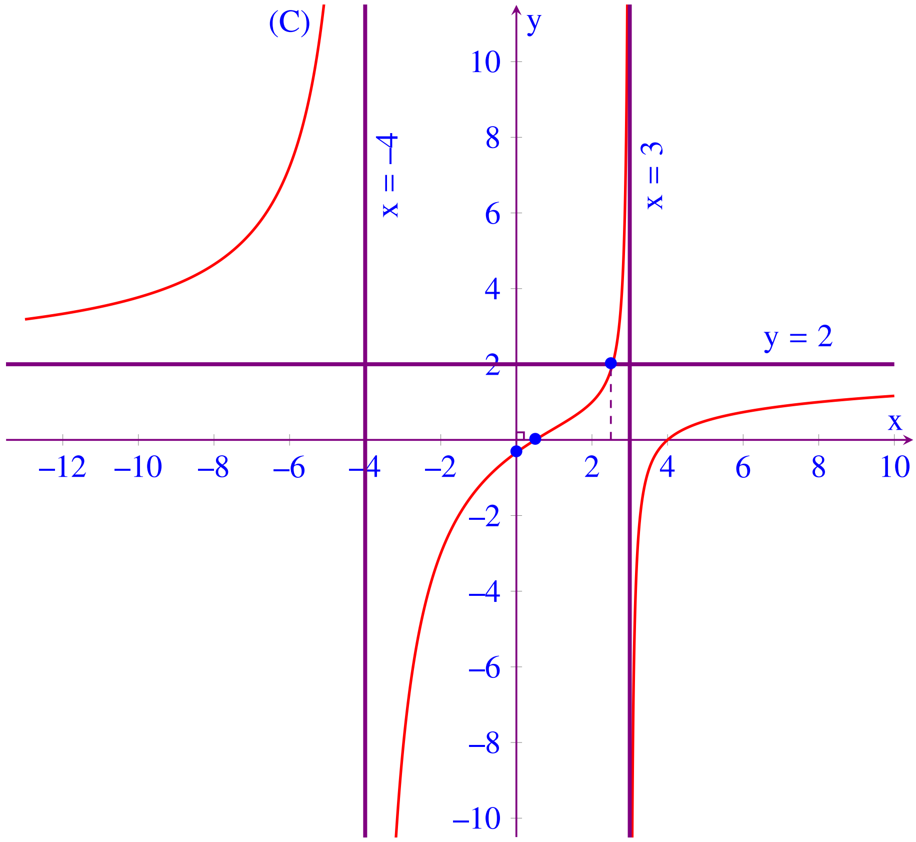
$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9-\sqrt{49}}{2(2)} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9+\sqrt{49}}{2(2)} = 4$$

$(C)\cap(y'Oy) \Leftrightarrow x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{2(0)^2-9(0)+4}{0^2+0-12} = \dfrac{4}{-12} = -\dfrac{1}{3}$

$(C)\cap(d) : y = 2 \Leftrightarrow 2 = \dfrac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12} \quad \Rightarrow x = \dfrac{28}{11}$

• អាស៊ីមតូតឈរ $x = -4,\ x = 3$ អាស៊ីមតូតដេក $y = 2$



លំហាត់ទី៤

គេមានអនុគមន៍ f មួយកំណត់ដោយ $y = f(x) = \dfrac{3x^2 - 18x + 25}{x^2 - 6x + 8}$ មានក្រាបតំណាង(C)។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍f ។

ខ. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍f ត្រង់ $\pm\infty$; 2 និង 4 ។ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងដេក។

គ. ចូរបង្ហាញថា $f'(x) = \dfrac{-2x + 6}{\left(x^2 - 6x + 8\right)^2}$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R} - \{2, 4\}$ ។

ឃ. សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍f ។

ង. សង់ក្រាប (C)។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍f យើងមាន $y = f(x) = \dfrac{3x^2 - 18x + 25}{x^2 - 6x + 8}$

$f(x)$ មានន័យលុះត្រាតែ $x^2 - 6x + 8 \neq 0 \Leftrightarrow \ (x-2)(x-4) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \neq 0 \\ x - 4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{2, 4\}}$

ខ. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍f ត្រង់ $\pm\infty$; 2 និង 4

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2 - 18x + 25}{x^2 - 6x + 8} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(3 - \frac{18}{x} + \frac{25}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{8}{x^2}\right)} = 3$$

$$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \frac{3x^2 - 18x + 25}{x^2 - 6x + 8} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to4} f(x) = \lim_{x\to4} \frac{3x^2 - 18x + 25}{x^2 - 6x + 8} = \pm\infty$$

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងដេក

ដោយ $\lim_{x\to2} f(x) = \pm\infty$; $\lim_{x\to4} f(x) = \pm\infty$

ដូចេនះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x = 2; x = 4 \text{ ជាអាស៊ីមតតូតឈរ}}$

ដោយ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 3$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } y = 3 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេក}}$

គ. បង្ហាញថា $f'(x) = \dfrac{-2x + 6}{\left(x^2 - 6x + 8\right)^2}$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R} - \{2, 4\}$

$$f'(x) = \left(\frac{3x^2 - 18x + 25}{x^2 - 6x + 8}\right)'$$

$$= \frac{(6x - 18)\left(x^2 - 6x + 8\right) - (2x - 6)\left(3x^2 - 18x + 25\right)}{\left(x^2 - 6x + 8\right)^2}$$

$$= \frac{-2x+6}{\left(x^2-6x+8\right)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = \frac{-2x+6}{\left(x^2-6x+8\right)^2}}$

ឃ. សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x+6 = 0 \quad \Rightarrow x = 3$$

តារាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	$-\infty$	2		3		4	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖	+	0	−	‖	−

- $f'(x) < 0$ ឬ អនុគមន៍ f ចុះ ពេល $x \in (3,4) \cup (4,+\infty)$
- $f'(x) > 0$ ឬ អនុគមន៍ f កើន ពេល $x \in (-\infty,2) \cup (2,3)$
- ត្រង់ $x = 3;\ f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី + ទៅ −

  គេបាន f មានអតិបរមាធៀបមួយ គឺ $f(3) = \frac{3(3)^2 - 18(3) + 25}{3^2 - 6(3) + 8} = 2$

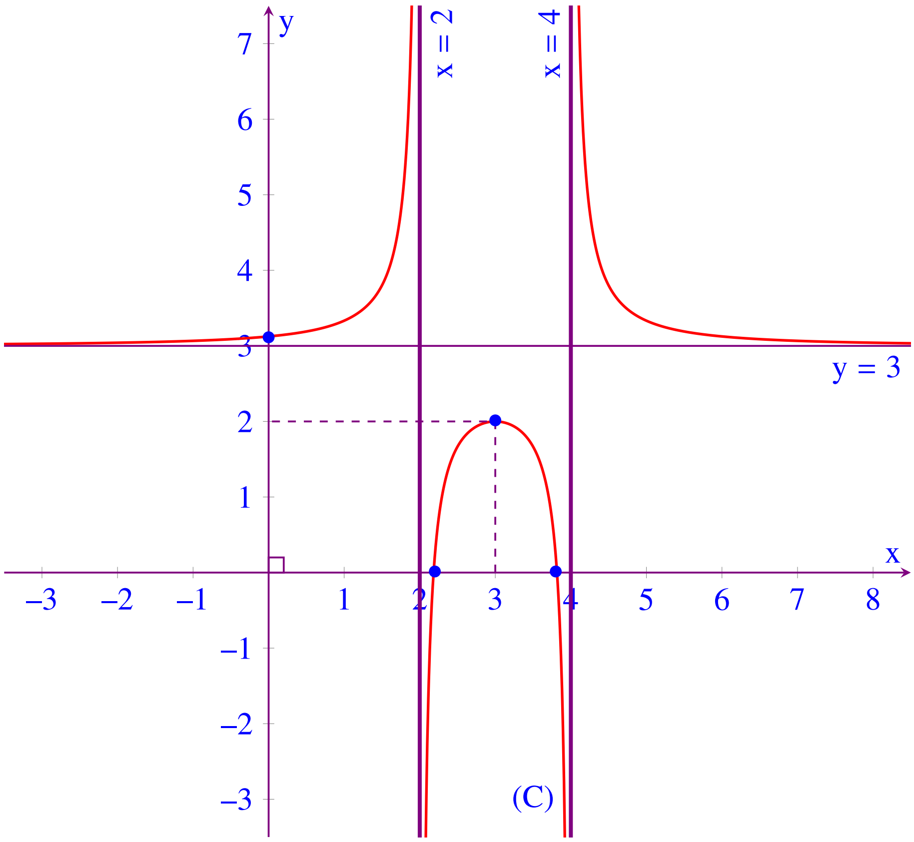
សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍f

x	$-\infty$	2	3	4	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$ 0 $-$	‖	$-$
$f(x)$	$3 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 2 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 3$

ង. សង់ក្រាប (C)

$$(C)\cap(x'ox) \Leftrightarrow y=0 \Leftrightarrow 3x^2-18x+25=0 \Rightarrow x_1=\frac{9-\sqrt{6}}{3}\ ;\ x_2=\frac{9+\sqrt{6}}{3}$$

$$(C)\cap(y'oy) \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y=\frac{3(0)^2-18(0)+25}{0^2-6(0)+8}=\frac{25}{8}$$



លំហាត់ទី៥

គេឲ្យអនុគមន៍ f មួយ កំណត់ដោយ $y = f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x^2+4}$ មានក្រាបតំណាង(C) ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍f ។

ខ. រកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប(C) ។

គ. សិក្សាអថិរភាព និងសង់តារាងអថិរភាពនៃអនុគមន៍f ។

ឃ. សង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយ$\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍f យើងមាន $y = f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x^2+4}$

$f(x)$ មានន័យលុះត្រាតែ $x^2+4 \neq 0$ ដោយ $x^2+4 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

ខ. រកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប(C)

ដោយ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2+2x}{x^2+4} = 1$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } y = 1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប(C)}}$

គ. សិក្សាអថិរភាព និងសង់តារាងអថិរភាពនៃអនុគមន៍f

ដេរីវេf'(x)

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+2x}{x^2+4}\right)'$$
$$= \frac{(2x+2)\left(x^2+4\right)-(2x)\left(x^2+2x\right)}{\left(x^2+4\right)^2}$$
$$= \frac{2x^3+8x+2x^2+8-2x^3-4x^2}{\left(x^2+4\right)^2}$$
$$= \frac{-2x^2+8x+8}{\left(x^2+4\right)^2}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \quad -2x^2 + 8x + 8 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4(-2)(8) = 64 + 64 = 128$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - \sqrt{128}}{2(-2)} = \frac{-8 - 8\sqrt{2}}{-4} = 2 + 2\sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + \sqrt{128}}{2(-2)} = \frac{-8 + 8\sqrt{2}}{-4} = 2 - 2\sqrt{2}$$

តារាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	$-\infty$		$2-2\sqrt{2}$		$2+2\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- $f'(x) < 0$ ឬ អនុគមន៍ f ចុះ នៅពេល $x \in \left(-\infty, 2-2\sqrt{2}\right) \cup \left(2+2\sqrt{2}, +\infty\right)$
- $f'(x) > 0$ ឬ អនុគមន៍ f កើន នៅពេល $x \in \left(2-2\sqrt{2},\ 2+2\sqrt{2}\right)$

បរមាធៀប៖

- ត្រង់ $x = 2-2\sqrt{2}$, $f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី$-$ ទៅ $+$ យើងបាន f មានអប្បបរមាធៀបមួយគឺ $f(2-2\sqrt{2}) = \dfrac{\left(2-2\sqrt{2}\right)^2 + 2\left(2-2\right.}{\left(2-2\sqrt{2}\right)^2 + 4}$

- ត្រង់ $x = 2+2\sqrt{2}$, $f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី$+$ ទៅ $-$ យើងបាន f មានអតិបរមាធៀបមួយគឺ

$$f(2+2\sqrt{2}) = \frac{\left(2+2\sqrt{2}\right)^2 + 2\left(2+2\sqrt{2}\right)}{\left(2+2\sqrt{2}\right)^2 + 4} = \frac{4+8\sqrt{2}+8+4+4\sqrt{2}}{4+8\sqrt{2}+8+4}$$

$$= \frac{16+12\sqrt{2}}{16+8\sqrt{2}} = \frac{4+3\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} \times \frac{4-2\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{16-8\sqrt{2}+12\sqrt{2}-12}{16-8}$$

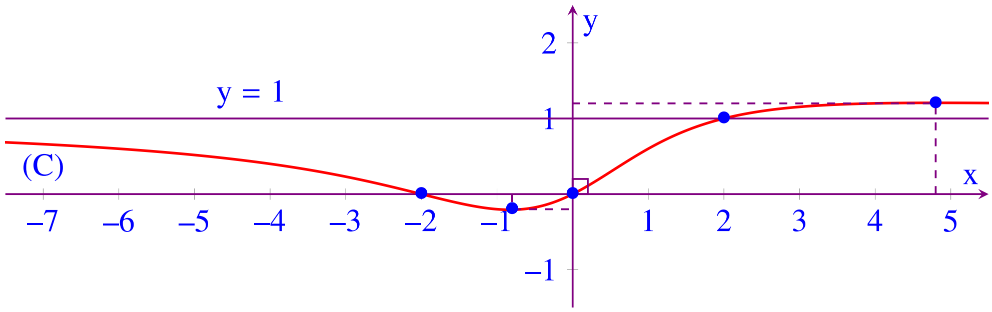
$$= \frac{4+4\sqrt{2}}{8} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

- តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍f

x	$-\infty$		$2-2\sqrt{2}$		$2+2\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	1

ឃ. សង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយ$\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

- $(C)\cap(x'ox) \Leftrightarrow y=0 \Leftrightarrow x^2+2x=0 \Leftrightarrow (x)(x+2)=0 \quad \Rightarrow x=0, x=-2$
- $(C)\cap(y'oy) \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y=\dfrac{0^2+2(0)}{0^2+4}=0$
- $(C)\cap(d): y=1 \Leftrightarrow 1=\dfrac{x^2+2x}{x^2+4} \Leftrightarrow x^2+4=x^2+2x \quad \Rightarrow x=2$



លំហាត់ទី៦

គេមានអនុគមន៍fមួយ កំណត់ដោយលើ $\mathbb{R}-\{-2\}$ ដែល $y=f(x)=\dfrac{x^2-1}{(x+2)^2}$ ។

តាង(C) ជាក្រាបតំណាងនៃអនុគមន៍f ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ ។ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងអស់ដែលមាន ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចបង្ហាញថាអនុគមន៍f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបមួយស្មើ $-\frac{1}{3}$ ត្រង់ $x=-\frac{1}{2}$ ។

គ. សង់តារាងអថិរភាព រួចសង់ក្រាប(C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-2} f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{x^2-1}{(x+2)^2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)^2}=1$$

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងអស់ដែលមាន

ដោយ $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=+\infty$ ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់}x=-2\text{ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប(C)}}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$ ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់}y=1\text{ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប(C)}}$

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$

$$f'(x)=\left(\frac{x^2-1}{(x+2)^2}\right)'=\frac{2x(x+2)^2-2(x+2)\left(x^2-1\right)}{(x+2)^4}$$

$$=\frac{2x\left(x^2+4x+4\right)-2x^3+2x-4x^2+4}{(x+2)^4}$$

$$=\frac{2x^3+8x^2+8x-2x^3+2x-4x^2+4}{(x+2)^4}$$

$$=\frac{4x^2+10x+4}{(x+2)^4}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\dfrac{4x^2+10x+4}{(x+2)^4}}$

បង្ហាញថាអនុគមន៍f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបមួយស្មើ $-\frac{1}{3}$ ត្រង់ $x=-\frac{1}{2}$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \quad 4x^2+10x+4=0 \Leftrightarrow \quad (4x+2)(x+2)=0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4x+2=0 \\ x+2=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2} \\ x=-2 \end{array}\right.$$

តារាងសញ្ញាf'(x)

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

ត្រង់ $x=-\frac{1}{2}$; $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី$-$ទៅ$+$ យើងបានf មានអប្បបរមាធៀបមួយគឺ

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1}{\left(\left(-\frac{1}{2}\right)+2\right)^2}=\frac{\frac{1}{4}-1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{-\frac{3}{4}}{\frac{9}{4}}=-\frac{3}{4}\times\frac{4}{9}=-\frac{1}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{អនុគមន៍f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបមួយស្មើ } -\frac{1}{3} \text{ ត្រង់ } x=-\frac{1}{2}}$

គ. តារាងអថិរភាពនៃអនុគមន៍f

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1

សង់ក្រាប(C)

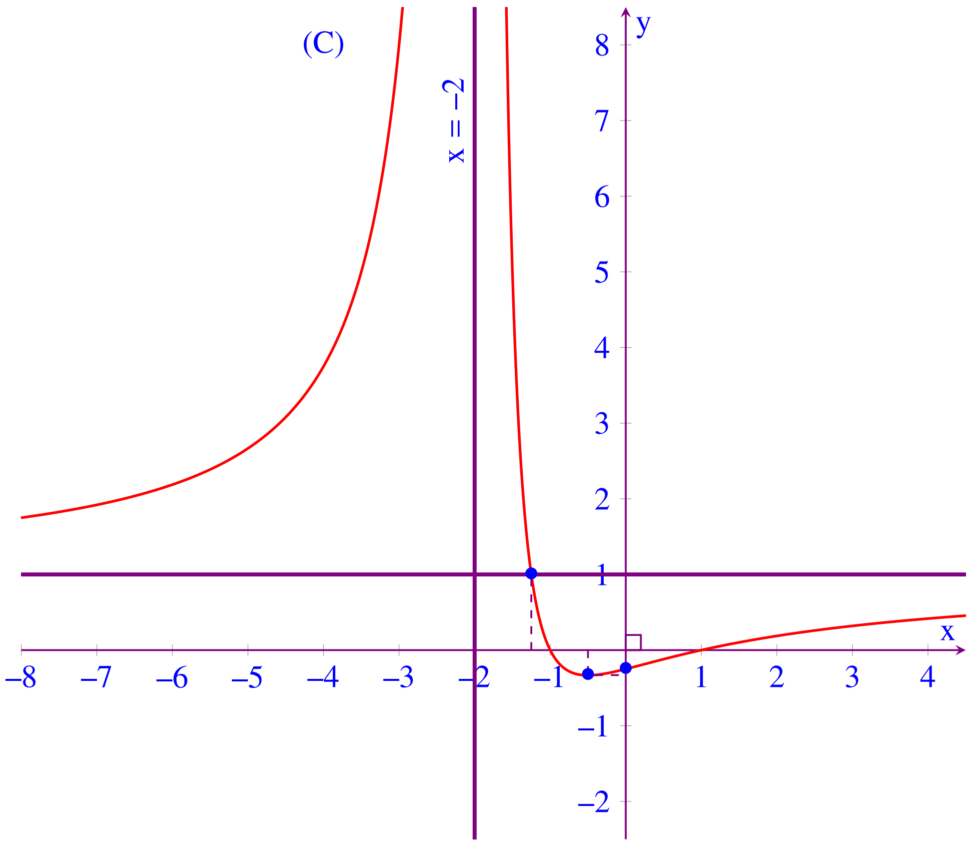
$$(C)\cap(x'ox) \Leftrightarrow y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-1=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 1$$

$$(C)\cap(y'oy) \Leftrightarrow x = 0 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{0^2-1}{(0+2)^2}=\frac{-1}{4}$$

$$(C)\cap(d): y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1=\frac{x^2-1}{(x+2)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+2)^2 = x^2-1$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+4x+4 = x^2-1 \quad \Rightarrow x=-\frac{5}{4}$$



លំហាត់ទី៧

អនុគមន៍f មួយកំណត់ដោយ $y = f(x) = \dfrac{-x^2 - 2x + 3}{x^2 + 3x + 2}$ មានក្រាបតំណាង(C)។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

ខ. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-1,\ -2$ និង $\pm\infty$។ ទាញរកអាស៊ីមតូតដេក និងអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរ។

គ. ចំពោះគ្រប់$x \in \mathbb{R} - \{-1, -2\}$ ចូរគណនាដេរីវេ$f'(x)$។

ឃ. សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

ង. ចូរសង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយ $(O, \vec{i}, \vec{j})$

ដំណោះស្រាយ

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

យើងមាន $y = f(x) = \dfrac{-x^2 - 2x + 3}{x^2 + 3x + 2}$

f(x) មានន័យលុះត្រាតែ $x^2 + 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \quad (x+1)(x+2) \neq 0 \quad \Rightarrow\ x \neq -1;\ x \neq -2$

ដូចនេះ $\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{-1, -2\}}$

ខ. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-1,\ -2$ និង $\pm\infty$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{-x^2 - 2x + 3}{x^2 + 3x + 2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{-x^2 - 2x + 3}{x^2 + 3x + 2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{-x^2 - 2x + 3}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2\left(-1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} = -1$$

ទាញរកអាស៊ីមតូតដេក និងអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរ

ដោយ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -1$ ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } y = -1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប(C)}}$

ដោយ $\lim_{x\to -1} f(x) = \pm\infty$; $\lim_{x\to -2} f(x) = \pm\infty$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x = -1 \text{ និង } x = -2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប(C)}}$

គ. ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R} - \{-1,-2\}$ គណនាដេរីវេ $f'(x)$

$$f'(x) = \left(\frac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2}\right)' = \frac{(-2x-2)\left(x^2+3x+2\right)-(2x+3)\left(-x^2-2x+3\right)}{\left(x^2+3x+2\right)^2}$$

$$= \frac{-x^2-10x-13}{\left(x^2+3x+2\right)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = \frac{-x^2-10x-13}{\left(x^2+3x+2\right)^2}}$

ឃ. សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2-10x-13 = 0$$

$$\Delta = b^2-4ac = (-10)^2-4(-1)(-13) = 100-52 = 48$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10-\sqrt{48}}{2(-1)} = \frac{10-4\sqrt{3}}{-2} = -5+2\sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10+\sqrt{48}}{2(-1)} = \frac{10+4\sqrt{3}}{-2} = -5-2\sqrt{3}$$

តារាងសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	$-\infty$		$-5-2\sqrt{3}$		-2		$-5+2\sqrt{3}$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	

- $f'(x) > 0$ ពេល $x \in \left(-5-2\sqrt{3},-2\right) \cup \left(-2,-5+2\sqrt{3}\right)$
- $f'(x) < 0$ ពេល $x \in \left(-\infty,-5-2\sqrt{3}\right) \cup \left(-5+2\sqrt{3},-1\right) \cup (-1,+\infty)$

បរមាធៀប

- ត្រង់ $x = -5-2\sqrt{3};\ f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី−ទៅ+ នោះ f មានអប្បបរមាធៀបមួយគឺ

$$f(-5-2\sqrt{3}) = \frac{-\left(-5-2\sqrt{3}\right)^2-2\left(-5-2\sqrt{3}\right)+3}{\left(-5-2\sqrt{3}\right)^2+3\left(-5-2\sqrt{3}\right)+2} = 4\sqrt{3}-8$$

- ត្រង់ $x = -5+2\sqrt{3};\ f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី+ទៅ− នោះ f មានអតិបរមាធៀបមួយគឺ

$$f(-5+2\sqrt{3}) = \frac{-\left(-5+2\sqrt{3}\right)^2-2\left(-5+2\sqrt{3}\right)+3}{\left(-5+2\sqrt{3}\right)^2+3\left(-5+2\sqrt{3}\right)+2} = -4\sqrt{3}-8$$

សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$		$-5-2\sqrt{3}$		-2		$-5+2\sqrt{3}$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-1	↘	$4\sqrt{3}-8$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-4\sqrt{3}-8$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1

ង. សង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយ $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$$(C) \cap (x'ox) \Leftrightarrow y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow (-x+1)(x+3) = 0$$

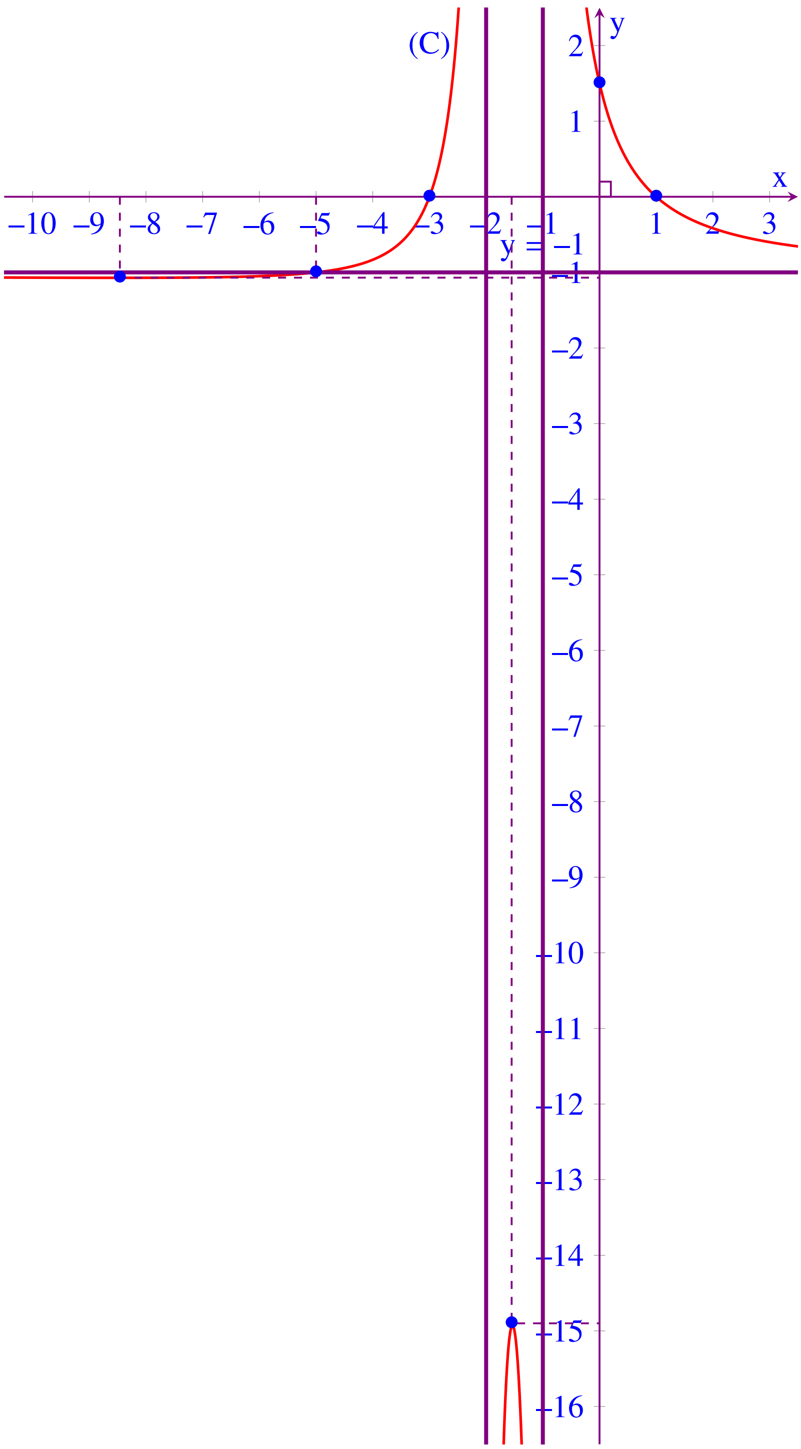
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} -x+1=0 \\ x+3=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$$

$$(C) \cap (y'oy) \Leftrightarrow x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-0^2 - 2(0) + 3}{0^2 + 3(0) + 2} = \frac{3}{2}$$

$$(C) \cap (d) : y = -1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 = \frac{-x^2 - 2x + 3}{x^2 + 3x + 2} \Leftrightarrow -x^2 - 3x - 2 = -x^2 - 2x + 3$$

$$\Rightarrow -x = 5$$

$$\Rightarrow x = -5$$



លំហាត់ទី៨

គេអោយអនុគមន៍ f មួយ កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{1,3\}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3}$ ។

តាង(C) ជាក្រាបតាងអនុគមន៍ f ក្នុងតម្រុយ$\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$។

ក. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $y=1$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប(C) ត្រង់ $\pm\infty$។

រួចរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរ ។

ខ. ចូរបង្ហាញថា $f'(x)=-\dfrac{8\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-4x+3\right)^2}$ ចំពោះគ្រប់$\mathbb{R}-\{1,3\}$ ។

គ. សិក្សាអថិរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f រួចសង់ក្រាប(C)។

ឃ. ដោយប្រើក្រាប(C) ពិភាក្សាតាមតម្លៃk នូវចំនួនឫសរបស់សមីការ

$(k-1)x^2-4(k+1)x+3(k-1)=0 \quad (1)$

រួចប្រៀបធៀបឫសរបស់ (1) ទៅនឹងចំនួន $-3,\ -\sqrt{3},\ -1,\ 0,\ 1,\ \sqrt{3}$ និង 3។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $y=1$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប(C) ត្រង់ $\pm\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}=1$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } y=1 \text{ ជាសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប(C) ត្រង់ } \pm\infty}$

រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរ

ដោយ $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3}=\pm\infty$

ហើយ $\lim\limits_{x\to3}f(x)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3}=\pm\infty$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x=1 \text{ និង } x=3 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប(C)}}$

ខ. បង្ហាញថា $f'(x) = -\dfrac{8\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-4x+3\right)^2}$ ចំពោះគ្រប់$\mathbb{R}-\{1,3\}$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3}\right)' = \frac{(2x+4)\left(x^2-4x+3\right)-(2x-4)\left(x^2+4x+3\right)}{\left(x^2-4x+3\right)^2}$$

$$= \frac{-8x^2+24}{\left(x^2-4x+3\right)^2} = -\frac{8\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-4x+3\right)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = -\dfrac{8\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-4x+3\right)^2} \text{ ចំពោះគ្រប់} \mathbb{R}-\{1,3\}}$

គ. សិក្សាអថេរភាព

ដោយ $f'(x) = -\dfrac{8\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-4x+3\right)^2}$

យើងបាន $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \quad -8\left(x^2-3\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -8x^2+24 = 0 \quad \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

តារាងសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		1		$\sqrt{3}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	

• $f'(x) > 0$ ឬ អនុគមន៍ f កើន ពេល $x \in \left(-\sqrt{3}, 1\right) \cup \left(1, \sqrt{3}\right)$

• $f'(x) < 0$ ឬ អនុគមន៍ f ចុះ ពេល $x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, 3\right) \cup (3, +\infty)$

បរមាធៀប

• ត្រង់ $x = -\sqrt{3};\ f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី$-$ទៅ$+$ នោះ f មានអប្បបរមាធៀបមួយគឺ

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{\left(-\sqrt{3}\right)^2+4\left(-\sqrt{3}\right)+3}{\left(-\sqrt{3}\right)^2-4\left(-\sqrt{3}\right)+3} = 4\sqrt{3}-7$$

• ត្រង់ $x = \sqrt{3};\ f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី$+$ទៅ$-$ នោះ f មានអតិបរមាធៀបមួយគឺ

$$f(\sqrt{3}) = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2+4\left(\sqrt{3}\right)+3}{\left(\sqrt{3}\right)^2-4\left(\sqrt{3}\right)+3} = -4\sqrt{3}-7$$

សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		1		$\sqrt{3}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1	↘	$4\sqrt{3}-7$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-4\sqrt{3}-7$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

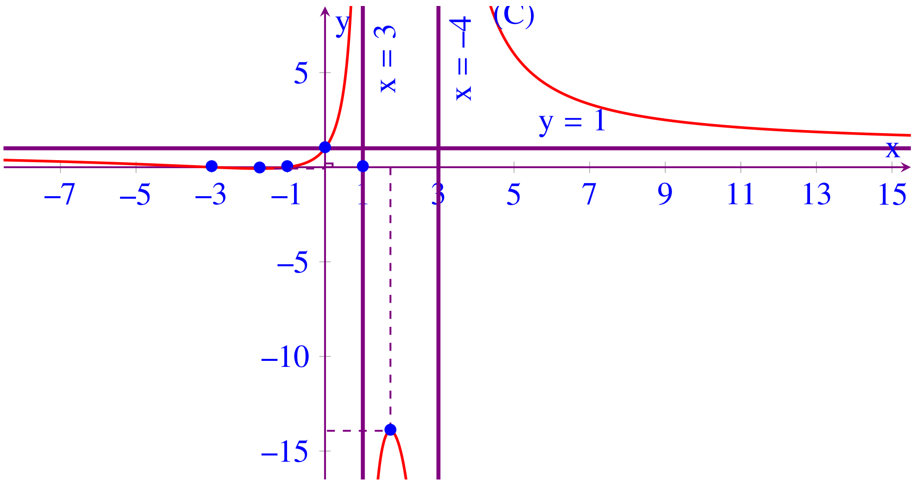
សង់ក្រាប(C)

$(C) \cap (x'ox) \Leftrightarrow \quad y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+4x+3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = -3$

$(C)\cap(y'oy) \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{0^2+4(0)+3}{0^2-4(0)+3} = 1$

$(C)\cap(d) : y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \dfrac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3}$

$\Leftrightarrow \quad x^2-4x+3 = x^2+4x+3 \quad \Rightarrow x = 0$



ឃ. ពិភាក្សាតាមតម្លៃk នូវចំនួនឫសរបស់សមីការ $(k-1)x^2-4(k+1)x+3(k-1)=0 \quad (1)$

$(1) \Leftrightarrow \quad kx^2-x^2-4kx-4x+3k-3=0$

$\Leftrightarrow \quad k\left(x^2-4x+3\right)-\left(x^2+4x+3\right)=0$

$\Leftrightarrow \quad k = \dfrac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3}$

$\Leftrightarrow \quad k = f(x)$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងក្រាប(C)និងបន្ទាត់ $y = k$

តាមក្រាប(C)

- បើ $k \in \left(-\infty, -4\sqrt{3}-7\right)$ $\Rightarrow$ (1) មានឫសពីរផ្សេងគ្នាដែល $1 < x_1 < x_2 < 3$
- បើ $k = -4\sqrt{3}-7$ $\Rightarrow$ (1) មានឫសតែមួយគត់ $x = \sqrt{3}$
- បើ $k \in \left(-4\sqrt{3}-7, 4\sqrt{3}-7\right)$ $\Rightarrow$ (1) គ្មានឫស
- បើ $k = 4\sqrt{3}-7$ $\Rightarrow$ (1) មានឫសតែមួយគត់គឺ $x = -\sqrt{3}$
- បើ $k \in \left(4\sqrt{3}-7, 1\right)$ $\Rightarrow$ (1) មានឫសពីរផ្សេងគ្នា ដែល $x_1 < x_2 < 0$
- បើ $k = 1$ $\Rightarrow$ (1) មានឫសតែមួយគត់ គឺ $x = 0$
- បើ $k \in (1, +\infty)$ $\Rightarrow$ (1) មានឫសពីរផ្សេងគ្នាដែល $0 < x_1 < 1$; $\quad 3 < x_2$

លំហាត់ទី៩

គេមានអនុគមន៍ f មួយកំណត់ដោយ $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 2}$ មានក្រាបតំណាង(C)។

ក. ចូររកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍f។

ខ. គណនា $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ ។ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងអស់ដែលមាន។

គ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍f។

ឃ. ចូរសង់ក្រាប(C) ក្នុងតម្រុយ $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍f

យើងមាន $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{x-3}{x-2}$

f(x) មានន័យលុះត្រាតែ $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \quad x \neq 2$

ដូចនេះ $\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{2\}}$

ខ. គណនា $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} = 1$$

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងអស់ដែលមាន

ដោយ $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \pm\infty$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x = 2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប(C)}}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } y = 1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប(C)}}$

គ. សិក្សាអថិរភាព និងសង់តារាងអថិរភាពនៃអនុគមន៍f

ដេរីវេ

$$f'(x)=\left(\frac{x-3}{x-2}\right)'=\frac{(x-3)'(x-2)-(x-2)'(x-3)}{(x-2)^2}$$
$$=\frac{1}{(x-2)^2}>0\quad\forall x\in D_f$$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$

• $f'(x)>0$ ពេល $x\in(-\infty,2)\cup(2,+\infty)\Rightarrow$ អនុគមន៍ f កើន ពេល $x\in(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

តារាងអថេរភាពនៃ f

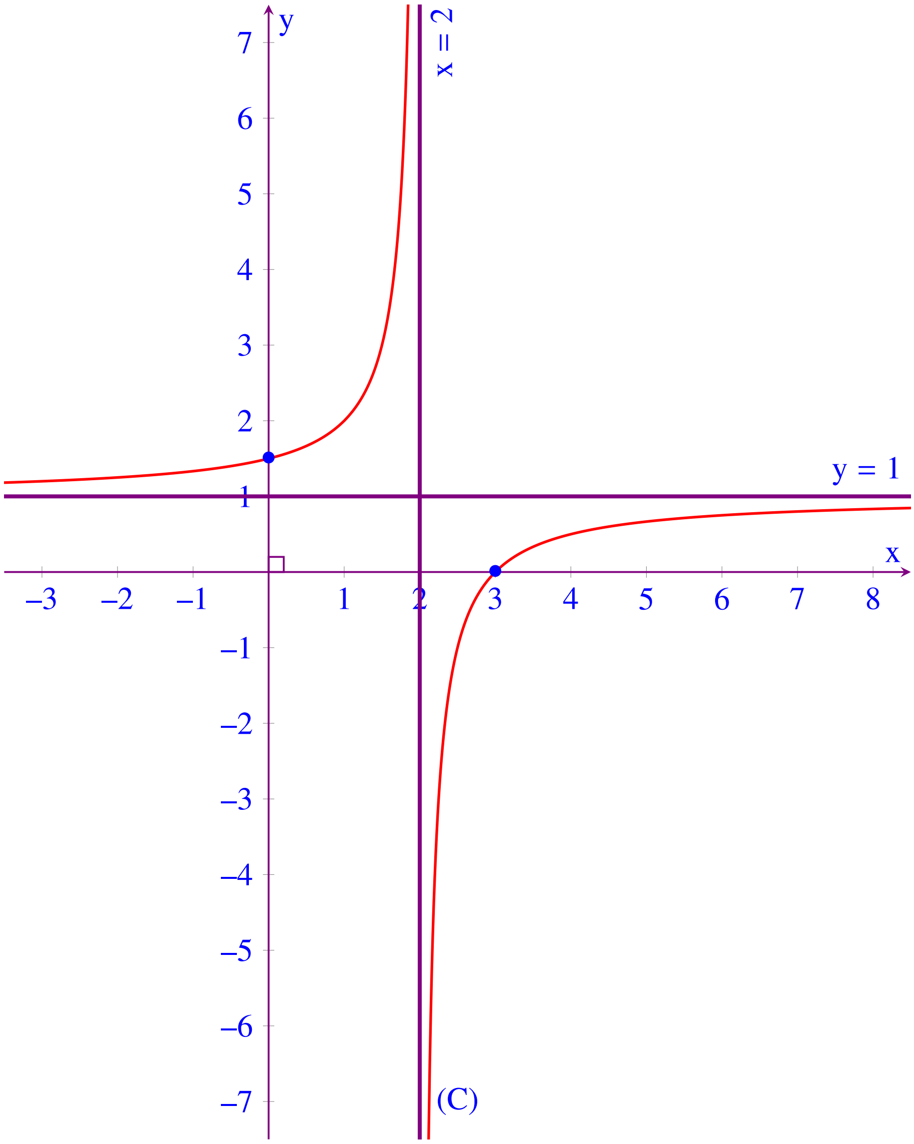
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$1\nearrow+\infty$	‖	$-\infty\nearrow1$

ឃ. សង់ក្រាប(C) ក្នុងតម្រុយ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

$(C)\cap(x'ox)\Leftrightarrow y=0\quad\Leftrightarrow\quad x-3=0$

$\Rightarrow\quad x=3$

$(C)\cap(y'oy)\Leftrightarrow x=0\quad\Rightarrow y=\dfrac{0^2-4(0)+3}{0^2-3(0)+2}=\dfrac{3}{2}$



y
x
x = 2
y = 1
(C)

លំហាត់ទី១០

គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{2x^2-7x+5}{x^2-5x+7}$ ។

យើងតាងដោយ (C) ក្រាបរបស់វាលើតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

1. រកដែនកំណត់ D នៃអនុគមន៍ f ។

2. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f(x) ត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$ ។

   ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូត d ទៅនឹងក្រាប(C) ត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$ ។

3. a. ស្រាយបំភ្លឺថាគ្រប់ចំនួនពិត $x\in D$; ដេរីវេ $f'(x)=\dfrac{-3\left(x^2-6x+8\right)}{\left(x^2-5x+7\right)^2}$ ។

   b. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

   c. សង់ក្រាប(C) នៃអនុគមន៍f ។

ដំណោះស្រាយ

1. រកដែនកំណត់ D នៃអនុគមន៍ f

យើងមាន $f(x)=\dfrac{2x^2-7x+5}{x^2-5x+7}$

f(x) មានន័យលុះត្រាតែ $x^2-5x+7\neq 0$

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4(1)(7)=25-28=-3<0$

$\Rightarrow\ x^2-5x+7$ មានសញ្ញាដូចមេគុណa

យើងបាន $x^2-5x+7>0\quad\forall\,x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $\boxed{D_f=\mathbb{R}}$

2. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f(x) ត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-7x+5}{x^2-5x+7}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{7}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}=2$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-7x+5}{x^2-5x+7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{7}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}=2$$

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូត d ទៅនឹងក្រាប(C) ត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=2$ ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } y=2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប(C)}}$

3. a. ស្រាយបំភ្លឺថាគ្រប់ចំនួនពិត $x\in D$; ដេរីវេ $f'(x)=\dfrac{-3\left(x^2-6x+8\right)}{\left(x^2-5x+7\right)^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{2x^2-7x+5}{x^2-5x+7}\right)'=\frac{(4x-7)\left(x^2-5x+7\right)-(2x-5)\left(2x^2-7x+5\right)}{\left(x^2-5x+7\right)^2}$$

$$= \frac{-3x^2 + 18x - 24}{\left(x^2 - 5x + 7\right)^2}$$

$$= \frac{-3\left(x^2 - 6x + 8\right)}{\left(x^2 - 5x + 7\right)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{x \in D;\ \text{ដេរីវេ}\ f'(x) = \frac{-3\left(x^2 - 6x + 8\right)}{\left(x^2 - 5x + 7\right)^2}}$

b. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ -3\left(x^2 - 6x + 8\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ -3x^2 + 18x - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ (-3x + 6)(x - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} -3x + 6 = 0 \\ x - 4 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

តារាងសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- $f'(x) > 0$ ពេល $x \in (2,4)$ $\Rightarrow$ អនុគមន៍f កើនលើចន្លោះ$x \in (2,4)$
- $f'(x) < 0$ ពេល $x \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$

  $\Rightarrow$ អនុគមន៍f ចុះលើចន្លោះ$x \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$

បរមាធៀប

- ត្រង់ $x = 2;\ f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី$-$ ទៅ$+$ យើងបាន f មានអប្បបរមាធៀបមួយគឺ

$$f(2) = \frac{2(2)^2 - 7(2) + 5}{(2)^2 - 5(2) + 7} = -1$$

- ត្រង់ $x = 4;\ f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី$+$ ទៅ$-$ យើងបាន f មានអតិបរមាធៀបមួយគឺ

$$f(4) = \frac{2(4)^2 - 7(4) + 5}{(4)^2 - 5(4) + 7} = 3$$

តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	2

c. សង់ក្រាប(C) នៃអនុគមន៍f

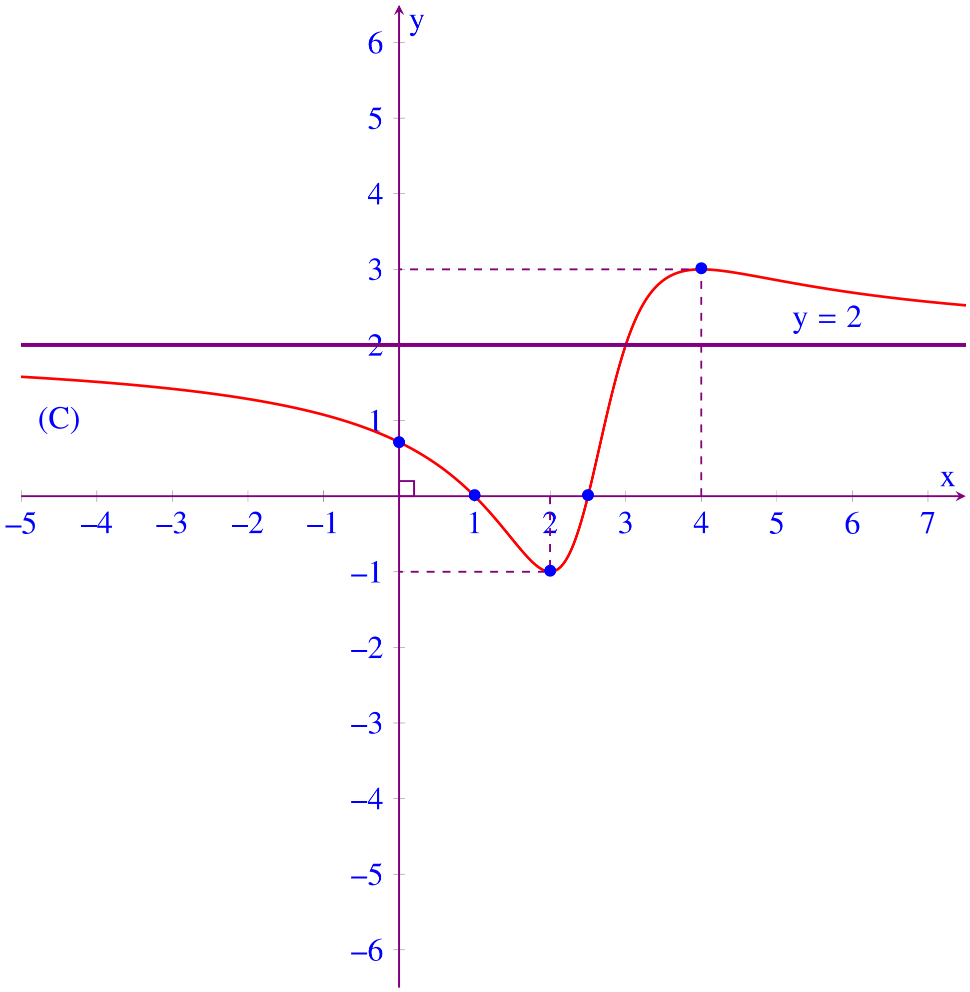
$$(C) \cap (x'ox) \Leftrightarrow y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 7x + 5 = 0$$

មានរាង $a + b + c = 0$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 1,\ x_2 = \frac{c}{a} = \frac{5}{2}$$

$$(C) \cap (y'oy) \Leftrightarrow x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2(0)^2 - 7(0) + 5}{(0)^2 - 5(0) + 7} = \frac{5}{7}$$

$$(C) \cap (d) : y = 2 \Leftrightarrow 2 = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 5x + 7} \quad \Rightarrow \quad x = 3$$



y
x
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
y = 2
(C)