

# គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២

បង្រៀនដោយ: ស្រីន ប៉េងហួរ

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងឆ្នាំ២០២១ ២

# វិញ្ញាសាទី១ គ្រឿងប្រលងធម្មាសទី ២

## លំហាត់ទី ១

គណនាអាំងតេក្រាល  $I = \frac{1}{e^x + 1}$  ដែល  $I(0) = \ln 4$

# វិញ្ញាសាទី១ គ្រឿងប្រលងធម្មាសទី ២

## លំហាត់ទី ១

គណនាអាំងតេក្រាល  $I = \frac{1}{e^x + 1}$  ដែល  $I(0) = \ln 4$

ដំណោះស្រាយ

# វិញ្ញាសាទី១ គ្រឿងប្រលងធម្មាសទី ២

## លំហាត់ទី ១

គណនាអាំងតេក្រាល  $I = \frac{1}{e^x + 1}$  ដែល  $I(0) = \ln 4$

### ដំណោះស្រាយ

$$\begin{aligned}\text{គេមាន } I &= \int \frac{1}{e^x + 1} dx = \int \frac{1 + e^x - e^x}{e^x + 1} x \\ &= \int \left( 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} \right) dx \\ &= \int dx - \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx \\ &= x - \ln |e^x + 1| + c\end{aligned}$$

ដោយ  $I(0) = \ln 4$  តែ  $I(0) = 0 - \ln 2 + c$   
 $= -\ln 2 + c$

នាំអោយ  $-\ln 2 + c = \ln 4$

នោះ  $c = \ln 4 + \ln 2$   
 $= 2\ln 2 + \ln 2$   
 $= 3\ln 2$

$$\text{ដោយ } I(0) = \ln 4 \text{ តែ } I(0) = 0 - \ln 2 + c \\ = -\ln 2 + c$$

$$\text{នាំអោយ } -\ln 2 + c = \ln 4$$

$$\text{នោះ: } c = \ln 4 + \ln 2 \\ = 2\ln 2 + \ln 2 \\ = 3\ln 2$$

$$\text{ដូចនេះ: } I = \int \frac{1}{e^x + 1} dx = x - \ln |e^x + 1| + 3\ln 2$$

# វិញ្ញាសាទី១ គ្រឿងប្រលងធម្មាសាទី ២

## លំហាត់ទី ២

គេអោយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល  $(E) : y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 2$

ក. រកពហុធាដឺក្រេទីពីរ  $P(x)$  ដែលជាចម្លើមពិសេសមួយនៃ  $(E)$

ខ. ដោះស្រាយសមីការ  $(E') : y'' + 2y' + y = 0$

រួចទាញរកអនុគមន៍  $f$  ដែលជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ  $(E)$

គ. រកចម្លើយ  $f$  មួយនៃ  $(E)$  ដែលខ្សែកោង  $(C)$

តាងអនុគមន៍កាត់តាមចំណុច  $M(0,1)$  ហើយបន្ទាត់ប៉ះនឹង  $(C)$

ត្រង់ចំណុចនោះនោះស្របទៅនឹងបន្ទាត់  $(l) : y = -2x$

# វិញ្ញាសាទី១ គ្រឿងប្រលងធម្មាសាទី ២

## លំហាត់ទី ២

គេអោយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល  $(E) : y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 2$

ក. រកពហុធាដឺក្រេទីពីរ  $P(x)$  ដែលជាចម្លើមពិសេសមួយនៃ  $(E)$

ខ. ដោះស្រាយសមីការ  $(E') : y'' + 2y' + y = 0$

រួចទាញរកអនុគមន៍  $f$  ដែលជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ  $(E)$

គ. រកចម្លើយ  $f$  មួយនៃ  $(E)$  ដែលខ្សែកោង  $(C)$

តាងអនុគមន៍កាត់តាមចំណុច  $M(0,1)$  ហើយបន្ទាត់ប៉ះនឹង  $(C)$

ត្រង់ចំណុចនោះនោះស្របទៅនឹងបន្ទាត់  $(l) : y = -2x$

## ដំណោះស្រាយ



ក. រកពហុធានីក្រេទីពីរ  $P(x)$

ក. រកពហុធានីក្រេទីពីរ  $P(x)$

តាង  $P(x) = ax^2 + bx + c$  ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ(E)  
គេបាន  $P'(x) = 2ax + b$   
 $P''(x) = 2a$

ក. រកពហុធានីក្រេទីពីរ  $P(x)$

តាង  $P(x) = ax^2 + bx + c$  ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)  
គេបាន  $P'(x) = 2ax + b$   
 $P''(x) = 2a$

ដោយ  $P(x)$  ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

ក. រកពហុធានីក្រេទីពីរ  $P(x)$

តាង  $P(x) = ax^2 + bx + c$  ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)  
គេបាន  $P'(x) = 2ax + b$   
 $P''(x) = 2a$

ដោយ  $P(x)$  ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

គេបាន  $P''(x) + 2P'(x) + P(x) = x^2 + 2x - 2$   
 $2ax + 2(2ax + b) + ax^2 + bx + c = ax^2 + bx + c$   
 $ax^2 + (4a + b)x + (2a + 2b + c) = x^2 + 2x - 2$

ក. រកពហុធានីក្រេទីពីរ  $P(x)$

តាង  $P(x) = ax^2 + bx + c$  ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)  
គេបាន  $P'(x) = 2ax + b$   
 $P''(x) = 2a$

ដោយ  $P(x)$  ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

គេបាន  $P''(x) + 2P'(x) + P(x) = x^2 + 2x - 2$   
 $2ax + 2(2ax + b) + ax^2 + bx + c = ax^2 + bx + c$   
 $ax^2 + (4a + b)x + (2a + 2b + c) = x^2 + 2x - 2$

គេបាន 
$$\begin{cases} a = 1 \\ 4a + b = 2 \\ 2a + 2b + c = -2 \end{cases}$$

ក. រកពហុធានីក្រេទីពីរ  $P(x)$

តាង  $P(x) = ax^2 + bx + c$  ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)  
គេបាន  $P'(x) = 2ax + b$   
 $P''(x) = 2a$

ដោយ  $P(x)$  ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

គេបាន  $P''(x) + 2P'(x) + P(x) = x^2 + 2x - 2$   
 $2ax + 2(2ax + b) + ax^2 + bx + c = ax^2 + bx + c$   
 $ax^2 + (4a + b)x + (2a + 2b + c) = x^2 + 2x - 2$

គេបាន  $\begin{cases} a = 1 \\ 4a + b = 2 \\ 2a + 2b + c = -2 \end{cases}$  សមមូល  $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{cases}$

ក. រកពហុធានីក្រេទីពីរ  $P(x)$

$$\begin{aligned}\text{តាង } P(x) &= ax^2 + bx + c \text{ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ}(E) \\ \text{គេបាន } P'(x) &= 2ax + b \\ P''(x) &= 2a\end{aligned}$$

ដោយ  $P(x)$  ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ  $(E)$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } P''(x) + 2P'(x) + P(x) &= x^2 + 2x - 2 \\ 2ax + 2(2ax + b) + ax^2 + bx + c &= ax^2 + bx + c \\ ax^2 + (4a + b)x + (2a + 2b + c) &= x^2 + 2x - 2\end{aligned}$$

$$\text{គេបាន } \begin{cases} a = 1 \\ 4a + b = 2 \\ 2a + 2b + c = -2 \end{cases} \quad \text{សមមូល } \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{cases}$$

ដូចនេះ  $P(x) = x^2 - 2x$  ជាចម្លើយនៃសមីការ  $(E)$

ខ. ដោះស្រាយសមីការ  $(E')$  :  $y'' + 2y' + y = 0$



ខ. ដោះស្រាយសមីការ  $(E') : y'' + 2y' + y = 0$

គេបានសមីការសម្គាល់  $m^2 + 2m + 1 = 0$

$$(m + 1)^2 = 0$$

$$m = -1 \quad \text{ឫសឌុប}$$

ខ. ដោះស្រាយសមីការ  $(E') : y'' + 2y' + y = 0$

គេបានសមីការសម្គាល់  $m^2 + 2m + 1 = 0$

$$(m + 1)^2 = 0$$

$$m = -1 \quad \text{ឬសឌុប}$$

គេបានចម្លើយនៃសមីការ  $(E')$  គឺ  $y = (Ax + B)e^{mx}$   
 $= (Ax + B)e^{-x}$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការ  $(E')$  គឺ  $= (Ax + B)e^{-x}$   
ដែល  $A, B \in \mathbb{R}$

រួចទាញរកអនុគមន៍  $f$  ដែលជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E)

រួចទាញរកអនុគមន៍  $f$  ដែលជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E)

$$\begin{aligned}\text{ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ } f &= y + P(x) \\ &= (Ax + B)e^{-x} + x^2 - 2x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ } f &= (Ax + B)e^{-x} + x^2 - 2x \\ &\text{ដែល } A, B \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

គ. រកចម្លើយ  $f$  មួយនៃ (E)

រួចទាញរកអនុគមន៍  $f$  ដែលជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E)

$$\begin{aligned}\text{ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ } f &= y + P(x) \\ &= (Ax + B)e^{-x} + x^2 - 2x\end{aligned}$$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ  $f = (Ax + B)e^{-x} + x^2 - 2x$   
ដែល  $A, B \in \mathbb{R}$

គ. រកចម្លើយ  $f$  មួយនៃ (E)

$$\text{តាមបំណង គេបាន } \begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = -2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\text{គេមាន } f(x) &= (Ax + B)e^{-x} + x^2 - 2x \\ f'(x) &= Ae^{-x} - (Ax + B)e^{-x} + 2x - 2 \\ &= (A - Ax - B)e^{-x} + 2x - 2\end{aligned}$$

$$\text{គេបាន } \begin{cases} f(0) = B \\ f'(0) = A - B - 2 \end{cases} \quad \text{តែ } \begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = -2 \end{cases}$$

$$\text{សមមូល } \begin{cases} B = 1 \\ A - B - 2 = -2 \end{cases} \quad \text{គេបាន } \begin{cases} B = 1 \\ A = 1 \end{cases}$$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ  $f = (x + 1)e^{-x} + x^2 - 2x$

# វិញ្ញាសាទី១ ត្រៀមប្រឡងឆមាសទី ២

## លំហាត់ទី ៣

នៅក្នុងប្រអប់មួយមានបិចខៀវ 8 និង បិចក្រហម 4  
ដែលដូចគ្នាទាំងទំហំ និងគំរូ។ គេដកបិច 5  
ដើមព្រមគ្នាដោយចៃដន្យ

- ក. រកប្រូបាបដែលគេបានបិចទាំង 5 ជាបិចខៀវ
- ខ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានបិចក្រហម 3
- គ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានបិចក្រហមមួយយ៉ាងតិច
- ឃ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានបិចក្រហម 2 ឬ 3

# វិញ្ញាសាទី១ ត្រៀមប្រឡងឆមាសទី ២

## លំហាត់ទី ៣

នៅក្នុងប្រអប់មួយមានបិចខៀវ 8 និង បិចក្រហម 4  
ដែលដូចគ្នាទាំងទំហំ និងគំរូ។ គេដកបិច 5  
ដើមព្រមគ្នាដោយចៃដន្យ

- ក. រកប្រូបាបដែលគេបានបិចទាំង 5 ជាបិចខៀវ
- ខ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានបិចក្រហម 3
- គ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានបិចក្រហមមួយយ៉ាងតិច
- ឃ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានបិចក្រហម 2 ឬ 3

## ដំណោះស្រាយ



ក. រកប្រូបាបដែលគេបានបិទទាំង 5 ជាបិទខៀវ

ក. រកប្រូបាបដែលគេបានបិទទាំង 5 ជាបិទខៀវ  
តាង  $A$  ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគេបានបិទទាំង 5 ជាបិទខៀវ

ក. រកប្រូបាបដែលគេបានបិទទាំង 5 ជាបិទខៀវ

តាង  $A$  ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគេបានបិទទាំង 5 ជាបិទខៀវ

$$\text{គេបាន } n(A) = C(8, 5) = \frac{8!}{3!5!} = 56$$

$$\text{ហើយ } n(S) = C(12, 5) = \frac{12!}{5!7!} = 792$$

$$\begin{aligned}\text{នោះ } P(A) &= \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{56}{792} \\ &= \frac{7}{99}\end{aligned}$$

ដូចនេះ ប្រូបាបដែលគេបានបិទទាំង 5 ជាបិទខៀវគឺ

$$P(A) = \frac{7}{99}$$

## ខ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានប៊ីចក្រហម 3

ខ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានបីចក្រហម 3

តាង  $B$  ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគេបានបីចក្រហម 3

ខ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានបិទក្រហម 3

តាង  $B$  ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគេបានបិទក្រហម 3

មានន័យថា គេចាប់បានបិទក្រហម 3 និង ខៀវ 2

ខ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានបីចក្រហម 3

តាង  $B$  ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគេបានបីចក្រហម 3

មានន័យថា គេចាប់បានបីចក្រហម 3 និង ខៀវ 2

$$\text{គេបាន } n(B) = C(4,3) \times C(8,2) = \frac{4!}{1!3!} \times \frac{8!}{6!2!}$$

$$n(B) = 112$$

$$\begin{aligned}\text{នោះ: } P(B) &= \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{112}{792} \\ &= \frac{14}{99}\end{aligned}$$

ដូចនេះ ប្រូបាបដែលគេចាប់បានបីចក្រហម 3 គឺ  $P(B) = \frac{14}{99}$

គ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានបីចក្រហមមួយយ៉ាងតិច



គ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានបីចក្រហមមួយយ៉ាងតិច  
តាង **C** ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានបីចក្រហមមួយយ៉ាងតិច

គ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានបីចក្រហមមួយយ៉ាងតិច  
តាង  $C$  ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានបីចក្រហមមួយយ៉ាងតិច  
ដោយព្រឹត្តិការណ៍  $C$  ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយពីព្រឹត្តិការណ៍  $A$

គ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានបិទក្រហមមួយយ៉ាងតិច  
តាង  $C$  ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានបិទក្រហមមួយយ៉ាងតិច  
ដោយព្រឹត្តិការណ៍  $C$  ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយពីព្រឹត្តិការណ៍  $A$

$$\text{គេបាន } P(A) + P(C) = 1$$

$$P(C) = 1 - P(A)$$

$$= 1 - \frac{7}{99}$$

$$= \frac{92}{99}$$

ដូចនេះ

ប្រូបាបដែលគេចាប់បានបិទក្រហមមួយយ៉ាងតិចគឺ  $P(C) = \frac{92}{99}$

# ឃ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានប៊ីចក្រហម 2 ឬ 3

ឃ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានបីចក្រហម 2 ឬ 3

តាង  $D$  ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគេចាប់បានបីចក្រហម 2 ឬ 3

ឃ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានបីចក្រហម 2 ឬ 3

តាង  $D$  ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគេចាប់បានបីចក្រហម 2 ឬ 3

មានន័យថា គេចាប់បានបីចក្រហម 2 និង ខៀវ 3

ឬ ក្រហម 3 និង ខៀវ 2

ឃ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានបីចក្រហម 2 ឬ 3

តាង  $D$  ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគេចាប់បានបីចក្រហម 2 ឬ 3  
មានន័យថា គេចាប់បានបីចក្រហម 2 និង ខៀវ 3  
ឬ ក្រហម 3 និង ខៀវ 2

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } n(B) &= C(4,2) \times C(8,3) + C(4,3) \times C(8,2) \\ &= \frac{4!}{2!2!} \times \frac{8!}{5!3!} + \frac{4!}{1!3!} \times \frac{8!}{6!2!} = 448 \\ \text{នោះ } P(B) &= \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{448}{792} \\ &= \frac{56}{99}\end{aligned}$$

ដូចនេះ ប្រូបាបដែលគេចាប់បានបីចក្រហម 2 ឬ 3 គឺ

$$P(D) = \frac{56}{99}$$