សិក្សាអនុគមន៍ទម្រង់ $y = f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$

លំហាត់ទី១ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{2\}$ ដោយ $f(x) = \dfrac{x^2-x-1}{x-2}$ ។
យើងតាង C ជាក្រាបរបស់វាលើតម្រុយអរតូណរម៉ាល់$\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$។

1. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$ ។

2. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

3. a. រកចំនួនពិត a, b, c ដែលគ្រប់ $x \neq 2;\quad f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-2}$ ។

   b. គេតាង d ដែលមានសមីការ $y = x+1$។ បង្ហាញថា d ជាអាស៊ីមតូតនៃ C ត្រង់ $+\infty$ និង $-\infty$។ សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d ។

   c. សង់ក្រាប C និង បន្ទាត់ d ។

ដំណោះស្រាយ

1. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-1}{x-2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = -\infty\frac{(1-0-0)}{1-0} = -\infty$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-1}{x-2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = +\infty\frac{(1-0-0)}{1-0} = +\infty$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

2. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

- ដេរីវេ

$$f'(x)=\left(\frac{x^2-x-1}{x-2}\right)'=\frac{\left(x^2-x-1\right)'(x-2)-(x-2)'\left(x^2-x-1\right)}{(x-2)^2}$$
$$=\frac{(2x-1)(x-2)-\left(x^2-x-1\right)}{(x-2)^2}$$
$$=\frac{2x^2-4x-x+2-x^2+x+1}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$$

$f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \; x^2-4x+3=0$ មានឫស $x_1=1;\;\; x_2=3$

- តារាងសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

- $f'(x)>0$ ឬ អនុគមន៍ f កើន ពេល $x\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$

- $f'(x)<0$ ឬ អនុគមន៍ f ចុះ ពេល $x\in(1,2)\cup(2,3)$

- បរមាធៀប

  - ត្រង់ $x=1;\; f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$

    គេបាន f មានអតិបរមាធៀបមួយ គឺ $f(1)=\dfrac{1^2-1-1}{1-2}=1$

  - ត្រង់ $x=3;\; f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$

    គេបាន f មានអប្បបរមាធៀបមួយ គឺ $f(3)=\dfrac{3^2-3-1}{3-2}=5$

- តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		1		$-\infty$ ‖ $+\infty$		5		$+\infty$

3. a. រកចំនួនពិត a, b, c ដែលគ្រប់ $x \neq 2$; $\quad f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2} \quad \Leftrightarrow \frac{x^2-x-1}{x-2} = ax + b + \frac{c}{x-2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+1)+1}{x-2} = ax + b + \frac{c}{x-2}$$
$$\Leftrightarrow x + 1 + \frac{1}{x-2} = ax + b + \frac{c}{x-2}$$

ដោយផ្ទឹមមេគុណ យើងបាន $\boxed{a = 1;\ b = 1;\ c = 1}$

b. បង្ហាញថា $d:\ y = x+1$ ជាអាសុីមតូតនៃ C ត្រង់ $+\infty$ និង $-\infty$

ដោយ $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x+1)] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x+1+\frac{1}{x-2}-(x+1)\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x-2} = 0$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } d:\ y = x+1 \text{ ជាអាសុីមតូតនៃ } C}$

សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d

$C:\ y = x + 1 + \dfrac{1}{x-2} \quad ;\ d:\ y = x+1$

$$\Rightarrow y_c - y_d = x + 1 + \frac{1}{x-2} - (x+1) = \frac{1}{x-2}$$

- $y_c - y_d > 0 \quad \Leftrightarrow \dfrac{1}{x-2} > 0 \quad \Leftrightarrow x - 2 > 0 \quad \Leftrightarrow\ x > 2$

ដូចនេះ $\boxed{(c) \text{ ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ } (d) \text{ ពេល } x > 2}$

- $y_c - y_d < 0 \quad \Leftrightarrow \dfrac{1}{x-2} < 0 \quad \Leftrightarrow x-2<0 \quad \Leftrightarrow \; x<2$

ដូចនេះ $\boxed{\text{(c) ស្ថិតនៅក្រោមបន្ទាត់ (d) ពេល } x<2}$

c. សង់ក្រាប C និង បន្ទាត់ d

$(C)\cap(x'ox)$ គឺ $y = o$

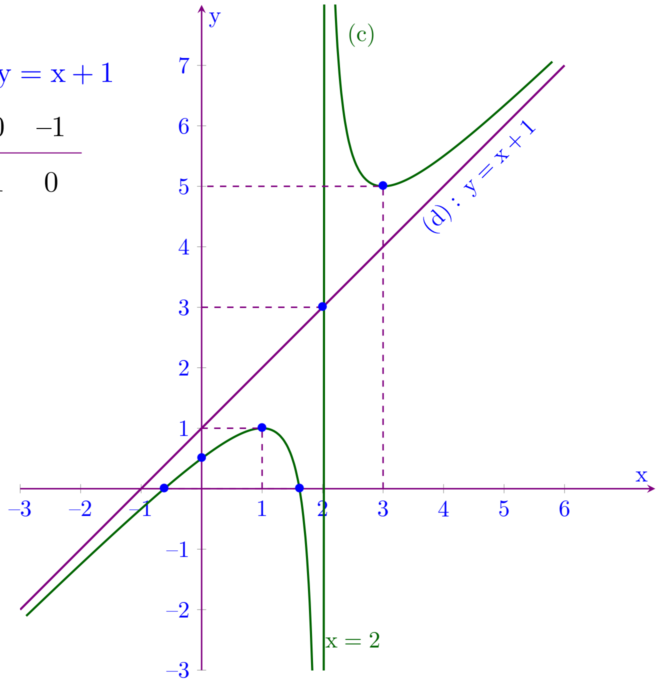
$\Leftrightarrow \; x^2 - x - 1 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-1) = 5$ មានឫស $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

គេបាន $x = 1.62 \quad , \quad x = -0.62$

$(C)\cap(y'oy) \Leftrightarrow x = 0 \quad \Rightarrow \; y = \dfrac{0^2 - 0 - 1}{0-2} = \dfrac{1}{2}$

$(d):\; y = x+1$

x	0	−1
y	1	0



លំហាត់ទី២

គេមានអនុគមន៍ f ដែល $f(x)=\dfrac{x^2-x-3}{x+1}$ និង គេតាងដោយ (C) ក្រាបនៃអនុគមន៍ f ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគន៍ f ។

ខ. បង្ហាញថា $f(x)=x-2-\dfrac{1}{x+1}$ ។

គ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

ឃ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃ f ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគន៍ f

ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2-x-3}{x+1}$; $f(x)$ មានន័យលុះត្រាតែ $x+1\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\neq -1$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f គឺ } D_f=\mathbb{R}-\{-1\}}$

ខ. បង្ហាញថា $f(x)=x-2-\dfrac{1}{x+1}$

ដោយ $x-2-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{(x-2)(x+1)-1}{x+1}=\dfrac{x^2+x-2x-2-1}{x+1}=\dfrac{x^2-x-3}{x+1}=f(x)$

ដូចនេះ $\boxed{f(x)=x-2-\dfrac{1}{x+1}}$

គ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C)

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x-2)]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[x-2-\dfrac{1}{x+1}-(x-2)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-1}{x+1}=0$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } y=x-2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបC}}$

ឃ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃ f

- ដេរីវេ

$$f'(x)=\left(\frac{x^2-x-3}{x+1}\right)'=\frac{\left(x^2-x-3\right)'(x+1)-(x+1)'\left(x^2-x-3\right)}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{(2x-1)(x+1)-\left(x^2-x-3\right)}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{2x^2+2x-x-1-x^2+x+3}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2};$$

$f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \; x^2+2x+2=0 \quad \Delta=b^2-4ac=4-4(1)2=-4<0$

$f'(x)$មានសញ្ញាតាមមេគុណ a

- តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\Vert$	$+$

$f'(x)>0$ ឬ អនុគមន៍ f កើន ពេល $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

- តារាងអថេរភាពនៃ f

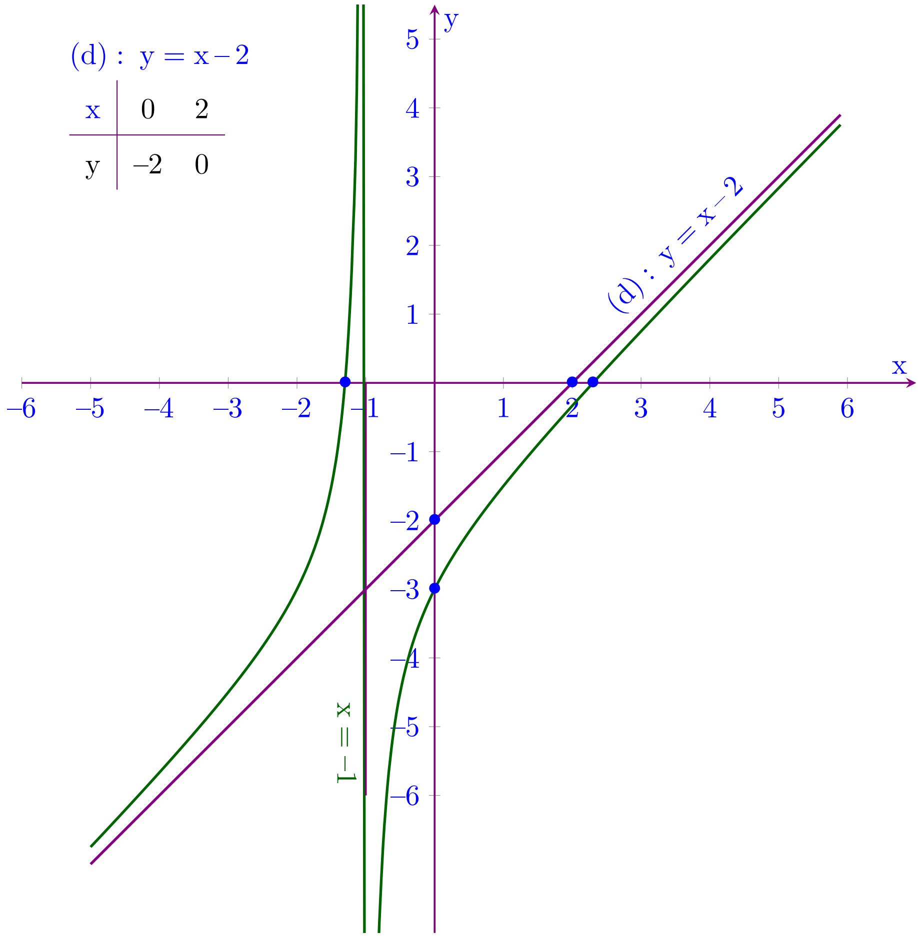
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\Vert$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	$\Vert$	$-\infty \nearrow +\infty$

- សង់ក្រាប

◦ $C\cap(y'oy)$ គឺ $x=0; \Rightarrow \; y=\dfrac{0^2-0-3}{0+1}=-3$

◦ $C\cap(x'ox)$ គឺ $y=0 \;\Rightarrow\; x^2-x-3=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(1)(-3)=13 \;\Rightarrow\; x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2};\; x=2.3,\; x=-1.3$



(d) : y = x − 2
x | 0 | 2
y | −2 | 0
(d) : y = x − 2
x = −1
x
y

លំហាត់ទី៣

គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{(x+2)(x-2)}{(1-x)}$ ។

ក. រកដែនកំណត់ $f(x)$ ។

ខ. បង្ហាញថា $f(x) = -x-1+\dfrac{3}{x-1}$ ។

គ. សិក្សាអថេរភាពនិង សង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{(x+2)(x-2)}{(1-x)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកដែនកំណត់ $f(x)$; $f(x) = \dfrac{(x+2)(x-2)}{1-x}$

$f(x)$ មានន័យលុះត្រាតែ $1-x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 1$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ } f \text{ គឺ } D_f = \mathbb{R}-\{1\}}$

ខ. បង្ហាញថា $f(x) = -x-1+\dfrac{3}{x-1}$

ដោយ
$$-x-1+\frac{3}{x-1} = \frac{(-x-1)(x-1)+3}{x-1} = \frac{-x^2+x-x+1+3}{-(1-x)}$$
$$= \frac{-\left(x^2-4\right)}{-(1-x)}$$
$$= \frac{(x+2)(x-2)}{1-x}$$
$$= f(x)$$

ដូចនេះ $\boxed{f(x) = -x-1+\dfrac{3}{x-1}}$

គ. សិក្សាអថេរភាពនិង សង់ក្រាប C

- ដេរីវេ

$$f'(x)=\left(\frac{(x+2)(x-2)}{1-x}\right)'=\left(\frac{x^2-4}{1-x}\right)'=\frac{\left(x^2-4\right)'(1-x)-(1-x)'\left(x^2-4\right)}{(1-x)^2}$$
$$=\frac{2x(1-x)+\left(x^2-4\right)}{(1-x)^2}=\frac{2x-2x^2+x^2-4}{(1-x)^2}=\frac{-x^2+2x-4}{(1-x)^2}$$

$f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \; -x^2+2x-4=0$

$$\Delta=b^2-4ac=(2)^2-4(-1)(-4)=4-16=-12<0$$

គេបាន$f'(x)$ មានសញ្ញាដូចមេគុណ a

- តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	

$f'(x)<0$ ឬអនុគមន៍ f ចុះ ពេល $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

- លីមីត

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-4}{1-x}=\mp\infty$$
$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-4}{1-x}=\pm\infty$$

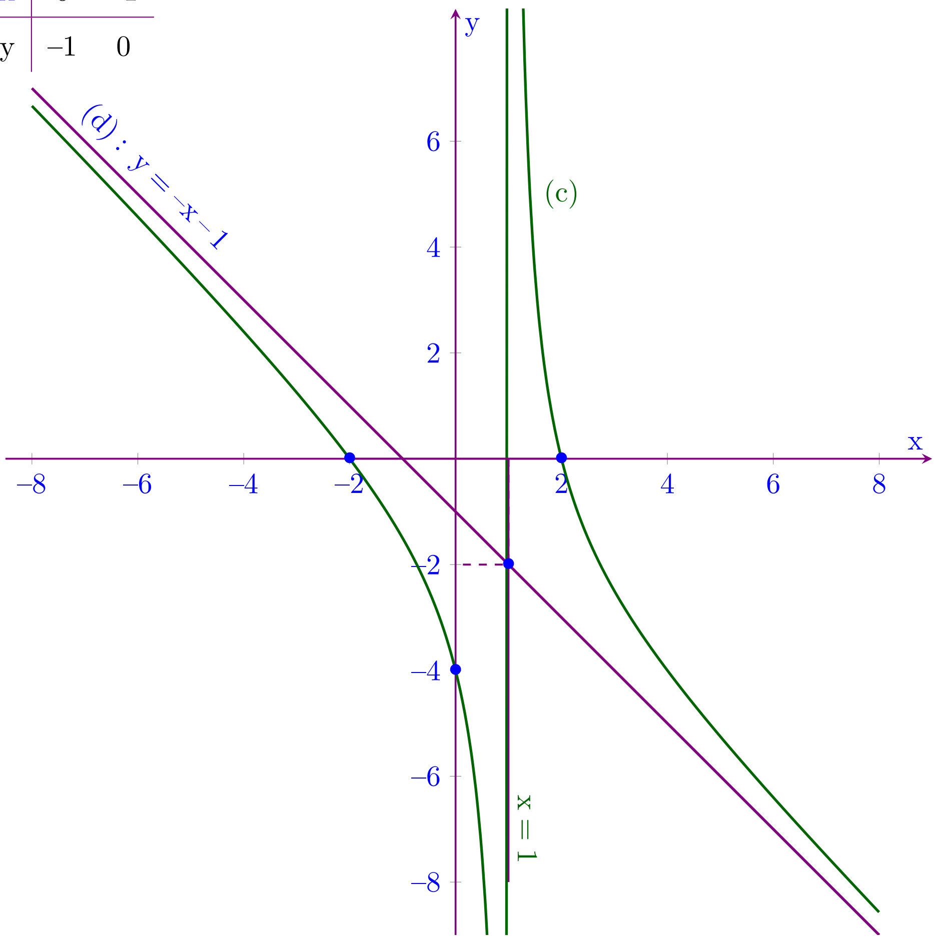
- តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

- សង់ក្រាប
  - ក្រាប(c) កាត់អ័ក្សអរដោនេ ពេល$x = 0$ $\Rightarrow y = f(0) = \dfrac{(0+2)(0-2)}{1-0} = -4$
  - ក្រាប (c) កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីស ពេល $y = 0 \Leftrightarrow 0 = \dfrac{(x+2)(x-2)}{(1-x)} \Leftrightarrow x = -2;\ x = 2$

$(d):\ y = -x - 1$

x	0	-1
y	-1	0



លំហាត់ទី៤

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \dfrac{x^2+x+4}{x+1}$ ហើយមានក្រាប C ។

១. រកដែនកំណត់ និង សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ f ។

២. សរសេរសមីការអាសុីមតូតឈរ និង អាសុីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ។

៣. សង់តារាងអថេរភាព អាសុីមតូត និង ក្រាប C នៃអនុគមន៍ f ។

ដំណោះស្រាយ

១. រកដែនកំណត់

យើងមាន $f(x) = \dfrac{x^2+x+4}{x+1}$

- $f(x)$ មានន័យលុះត្រាតែ $x+1 \neq 0 \quad \Rightarrow \; x \neq -1$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ដែនកំណត់នៃ } f \text{ គឺ } D_f = \mathbb{R} - \{-1\}}$

សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ f

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+x+4}{x+1}\right)' = \frac{\left(x^2+x+4\right)'(x+1)-(x+1)'\left(x^2+x+4\right)}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{(2x+1)(x+1)-x^2-x-4}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x+x+1-x^2-x-4}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

ដោយ $(x+1)^2 > 0 \quad \forall x \in D_f$ គេបាន

- $f'(x)$ មានសញ្ញាដូចភាគយក x^2+2x-3

- $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+2x-3=0$ មានឫស $x_1 = 1,\; x_2 = -3$

តារាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

- $f'(x) > 0$ ឬ អនុគមន៍ f កើន ពេល $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$
- $f'(x) < 0$ ឬ អនុគមន៍ f ចុះ ពេល $x \in (-3, -1) \cup (-1, 1)$
- ត្រង់ $x = -3;\ f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$

  គេបាន f មានអតិបរមាធៀបមួយ គឺ $f(-3) = \dfrac{9-3+4}{-3+1} = -5$
- ត្រង់ $x = 1;\ f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$

  គេបាន f មានអប្បបរមាធៀបមួយ គឺ $f(1) = \dfrac{1^2+1+4}{1+1} = 3$

២. សរសេរសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

- ដោយ $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+x+4}{x+1} = \pm\infty$

  ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x = -1 \text{ ជាសមីការអាស៊ីមតូតឈរ}}$
- $f(x) = \dfrac{x^2+x+4}{x+1} = x + \dfrac{4}{x+1}$ ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4}{x+1} = 0$

  ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } y = x \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត}}$

៣. សង់តារាងអថេរភាព អាស៊ីមតូត និង ក្រាប C នៃអនុគមន៍ f

តារាងអថេរភាពនៃ f

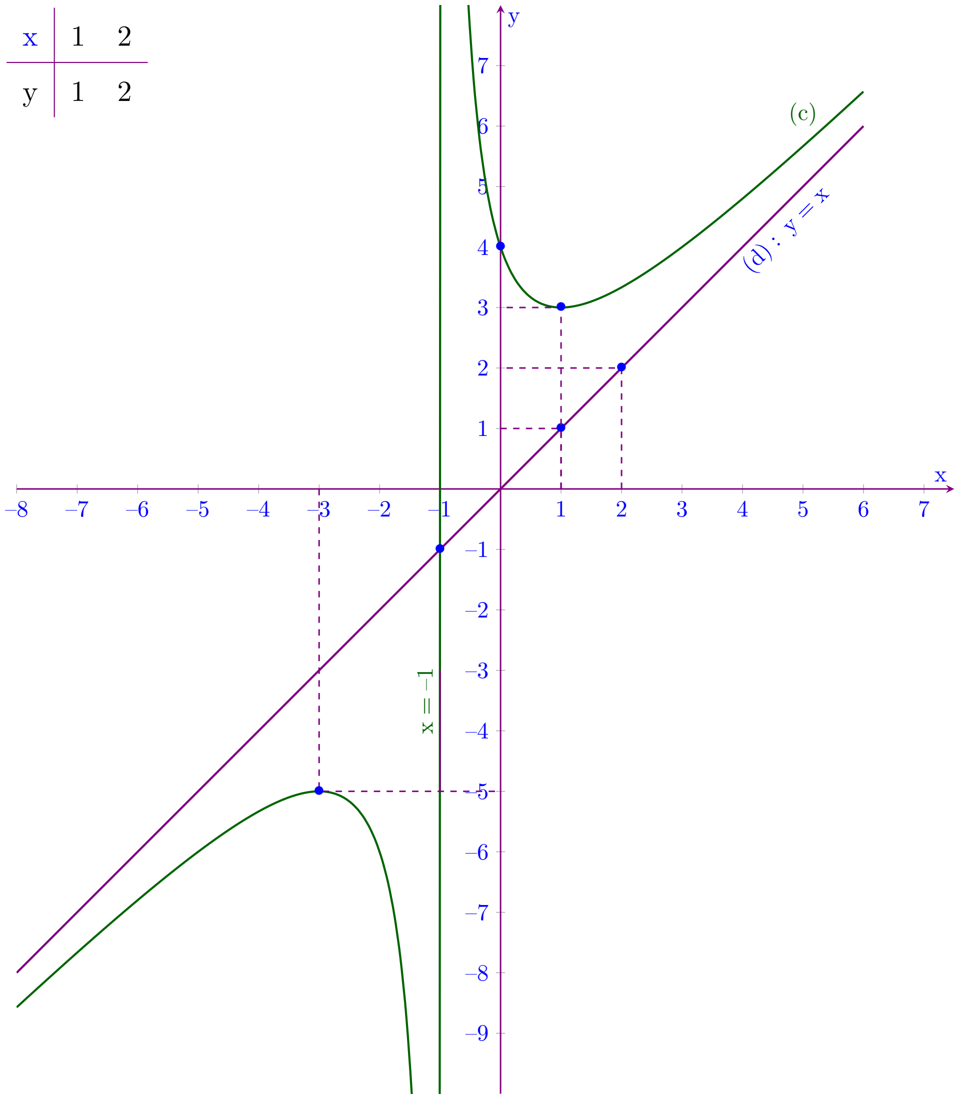
x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

សង់ក្រាប(C)

$(C) \cap (y'oy) \Leftrightarrow x = 0 \quad \Rightarrow y = \dfrac{0^2+0+4}{0+1} = 4$

$(d):\ y=x$

x	1	2
y	1	2



លំហាត់ទី៥

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+3x+6}{x+2}$ កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x\neq -2$ និងមានខ្សែកោង C។

១. គណនា $f'(x)$។ រកតម្លៃបរមានៃ f។ រកសមីការអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង C។
គណនាលីមីតនៃ f កាលណា x ខិតទៅ $+\infty,\ -\infty$។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f។

២. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង C ត្រង់ចំណុច $x_0=1$។
គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង C។

៣. សង់ខ្សែកោង C បន្ទាត់ប៉ះនៃខ្សែកោង C និងអាស៊ីមតូត នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់តែមួយ។
គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោង C អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ $x=1,\ x=2$។

ដំណោះស្រាយ

១. គណនា $f'(x)$

ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2+3x+6}{x+2}$ យើងបាន

$$f'(x)=\left(\frac{x^2+3x+6}{x+2}\right)'=\frac{\left(x^2+3x+6\right)'(x+2)-(x+2)'\left(x^2+3x+6\right)}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{(2x+3)(x+2)-\left(x^2+3x+6\right)}{(x+2)^2}=\frac{2x^2+4x+3x+6-x^2-3x-6}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\dfrac{x^2+4x}{(x+2)^2}}$

រកតម្លៃបរមានៃ f

ដោយ $(x+2)^2>0\quad\forall x\neq -2$ យើងបាន $f'(x)$ មានសញ្ញាតាមភាគយក

$$f'(x)=0\quad\Leftrightarrow\quad x^2+4x=0\quad\Leftrightarrow\ x(x+4)=0\quad\Rightarrow x=0,x=-4$$

តារាងសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

- ត្រង់ $x = -4$; $f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ គេបាន f មានអតិបរមាធៀបមួយ គឺ

$$f(-4) = \frac{16 - 12 + 6}{-4 + 2} = -5$$

- ត្រង់ $x = 0$; $f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ គេបាន f មានអប្បបរមាធៀបមួយ គឺ

$$f(0) = \frac{0 + 0 + 6}{0 + 2} = 3$$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{តម្លៃអតិបរមធៀបគឺ } -5 \text{ តម្លៃអប្បបរមាធៀបគឺ } 3}$

រកសមីការអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង C

- អាស៊ីមតូតឈរ

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm-2} f(x) = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^2 + 3x + 6}{x + 2} = \pm\infty$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x = -2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$

- អាស៊ីមតូតទ្រេត

យើងមាន $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 6}{x + 2} = x + 1 + \dfrac{4}{x + 2}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4}{x + 2} = 0$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{បន្ទាត់ } y = x + 1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត}}$

គណនាលីមីតនៃ f កាលណា x ខិតទៅ $+\infty,\ -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + 3x + 6}{x + 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2}\right)}{x\left(1 + \frac{2}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2}\right)}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{+\infty\,(1 + 0 + 0)}{1 + 0} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+3x+6}{x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1+\frac{3}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{1+\frac{2}{x}} = \frac{-\infty(1+0+0)}{1+0} = -\infty$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty}$

តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

២. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង C ត្រង់ចំណុច $x_0 = 1$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះកំណត់ដោយ $y = f'(x_o)(x-x_o)+f(x_o)$

ដោយ បន្ទាត់ប៉ះក្រាប ត្រង់ចំណុច $x_o = 1$ យើងបាន

- $f'(x_o) = f'(1) = \dfrac{1^2+4(1)}{(1+2)^2} = \dfrac{5}{9}$
- $f(x_o) = f(1) = \dfrac{1^2+3(1)+6}{1+2} = \dfrac{10}{3}$

នាំឲ្យ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y = \frac{5}{9}(x-1)+\frac{10}{3} = \frac{5}{9}x+\frac{25}{9}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ } y = \frac{5}{9}x+\frac{25}{9}}$

គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង C

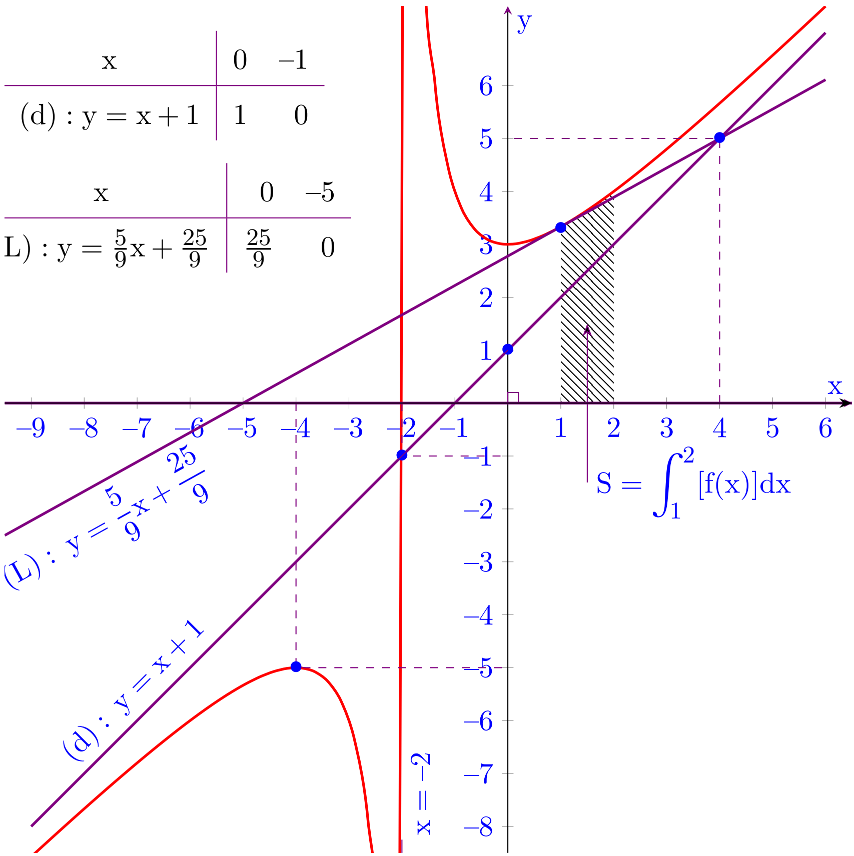
ដោយ អាស៊ីមតូតទ្រេតគឺ $d:\ y = x+1$; បន្ទាត់ប៉ះគឺ $L:\ y = \frac{5}{9}x+\frac{25}{9}$

$$(d)\cap(L) \quad \Leftrightarrow \quad x+1 = \frac{5}{9}x+\frac{25}{9}$$

$$9(x+1) = 5x+25 \quad \Rightarrow \quad 9x+9 = 5x+25 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

$x = 4 \quad \Rightarrow y = 4+1 = 5$ ដូចនេះ $\boxed{\text{ចំណុចប្រសព្វគឺ } A(4,5)}$

៣. សង់ខ្សែកោង C បន្ទាត់ប៉ះនៃខ្សែកោង C និងអាស៊ីមតូត នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់តែមួយ



គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោង C អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ $x = 1,\ x = 2$

$$S = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \left(x + 1 + \frac{4}{x+2}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} + x + 4\ln|x+2|\right]_1^2$$

$$= \frac{2^2}{2} + 2 + 4\ln|4| - \left(\frac{1^2}{2} + 1 + 4\ln|3|\right) = 4 + 4\ln 4 - \frac{3}{2} - 4\ln 3 = \frac{5}{2} + 4\ln\frac{4}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{S = \frac{5}{2} + 4\ln\frac{4}{3} \text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$

លំហាត់ទី៦

គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$ មានក្រាបតំណាង (C)។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f។

ខ. គណនាលីមីត៖ $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ ។

គ. រកតម្លៃនៃចំនួនពិត a ; b និង c ដើម្បីឲ្យ $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 2}$ ។

ឃ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត។

ង. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f រួចសង់ក្រាប (C)។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

$y = f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$ ដោយ $f(x)$ មានន័យលុះត្រាតែ $x - 2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 2$

ដូចនេះ $\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{2\}}$

ខ. គណនាលីមីត៖

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2}\right)}{x\left(1 - \frac{2}{x}\right)} = \pm\infty$$

គ. រកតម្លៃនៃចំនួនពិត a ; b និង c ដើម្បីឲ្យ $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 2}$

ដោយ $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} = x - 3 + \dfrac{1}{x - 2}$

យើងបាន $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 2} \quad \Leftrightarrow \quad x - 3 + \dfrac{1}{x - 2} = ax + b + \dfrac{c}{x - 2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 1 \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{a = 1\ ;\ b = -3\ ;\ c = 1}$

ឃ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត

ដោយ $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \pm\infty$ ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x = 2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$

យើងមាន $f(x) = \dfrac{x^2-5x+7}{x-2} = x-3+\dfrac{1}{x-2}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$ ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } y = x-3 \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត}}$

ង. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f រួចសង់ក្រាប (C)

- ដេរីវេ

$$f'(x) = \left(\frac{x^2-5x+7}{x-2}\right)' = \frac{\left(x^2-5x+7\right)'(x-2)-(x-2)'\left(x^2-5x+7\right)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{(2x-5)(x-2)-\left(x^2-5x+7\right)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{2x^2-4x-5x+10-x^2+5x-7}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$$

- សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-4x+3 = 0$ រាង $a+b+c = 0 \Rightarrow x_1 = 1\ ;\ x_2 = \dfrac{c}{a} = 3$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

- ចំណុចបរមាធៀប

☞ ត្រង់ $x = 1\ ;\ f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ នាំឲ្យ f មានអតិបរមាធៀបមួយគឺ

$$f(1) = \frac{1^2-5(1)+7}{1-2} = -3$$

☞ ត្រង់ $x = 3\ ;\ f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ នាំឲ្យ f មានអប្បបរមាធៀបមួយគឺ

$$f(3) = \frac{3^2-5(3)+7}{3-2} = -1$$

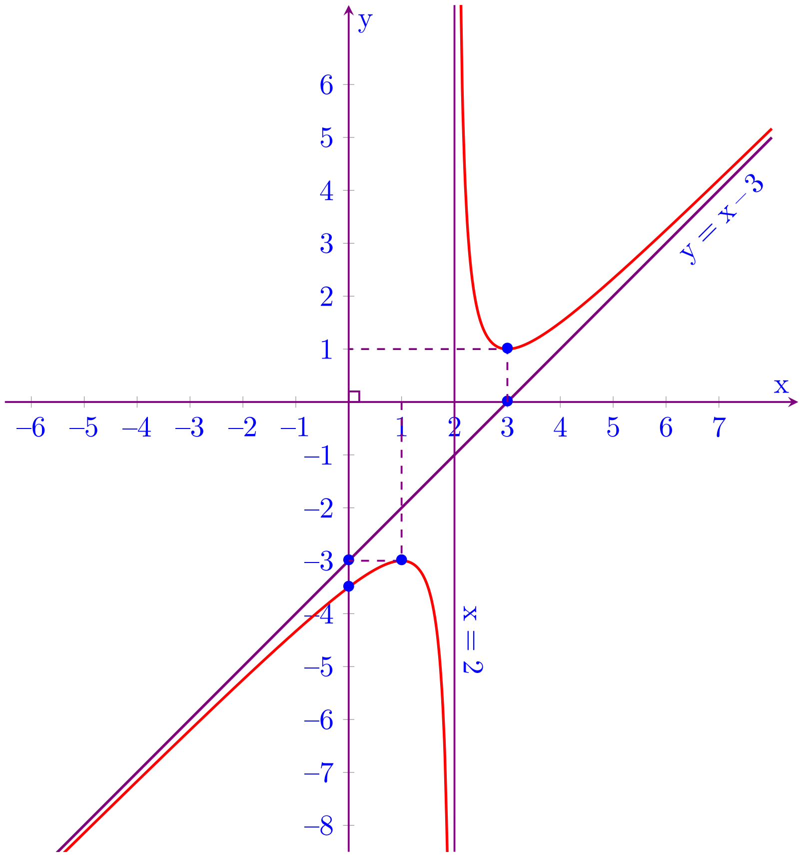
- តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1	↗	$+\infty$

- សង់ក្រាប (C)

☞ $(C)\cap(y'Oy) \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{0^2-5(0)+7}{0-2} = -\dfrac{7}{2}$

x	0	2
$y = x-2$	-2	0



លំហាត់ទី៧

គេឲ្យអនុគមន៍ f មួយកំណត់គ្រប់តម្លៃ $x \neq 2$ ដែល $y = f(x) = \dfrac{x^2-3x-4}{x-2}$ មានក្រាបតំណាង (C)។

ក. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍f ត្រង់ 2 និង $\pm\infty$ ។ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ។

ខ. កំណត់តម្លៃ a, b និង c ដើម្បីឲ្យ $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-2}$ ។ រួចបង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d) : y = x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប(C) ត្រង់ $\pm\infty$។

គ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញាដេរីវេ។

ឃ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍f។

ង. បង្ហាញថាចំណុច $I(2,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប(C) រួចសង់ក្រាប(C)។

ដំណោះស្រាយ

ក. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍f ត្រង់ 2 និង $\pm\infty$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x-4}{x-2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-3x-4}{x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \pm\infty$$

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ

ដោយ $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \pm\infty$ ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x = 2 \text{ ជាអាស៊ីមតតូតឈរ}}$

ខ. កំណត់តម្លៃ a, b និង c ដើម្បីឲ្យ $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-2}$

ដោយ $f(x) = \dfrac{x^2-3x-4}{x-2} = x-1+\dfrac{-6}{x-2}$

យើងបាន $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-2} \quad\Leftrightarrow\quad ax+b+\dfrac{c}{x-2} = x-1+\dfrac{-6}{x-2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -6 \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{a = 1, b = -1, c = -6}$

បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d) : y = x - 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប(C) ត្រង់ $\pm\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x-1)] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-6}{x-2} = 0$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } y = x - 1 \text{ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត}}$

គ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) = \left(\frac{x^2-3x-4}{x-2}\right)' &= \frac{\left(x^2-3x-4\right)'(x-2)-(x-2)'\left(x^2-3x-4\right)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{(2x-3)(x-2)-\left(x^2-3x-4\right)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{2x^2-4x-3x+6-x^2+3x+4}{(x-2)^2} \\ &= \frac{x^2-4x+10}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = \frac{x^2-4x+10}{(x-2)^2}}$

សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 10 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(10) = -24 < 0 \Rightarrow f'(x)$ មានសញ្ញាដូចមេគុណ a

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\|$	$+$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) > 0 \ \forall x \neq 2}$

ឃ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

ង. បង្ហាញថាចំណុច $I(2,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប(C)

$I(2,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប(C) : $y = f(x) = \dfrac{x^2-3x-4}{x-2}$ លុះត្រាតែ $f(2a-x)+f(x) = 2b$

ដែល $a = 2,\ b = 1$

• $f(2a-x) = f(4-x) = \dfrac{(4-x)^2-3(4-x)-4}{(4-x)-2} = \dfrac{16-8x+x^2-12+3x-4}{4-x-2}$

$$= \frac{x^2-5x}{2-x} = \frac{-x^2+5x}{x-2}$$

យើងបាន $f(2a-x)+f(x) = \dfrac{-x^2+5x}{x-2} + \dfrac{x^2-3x-4}{x-2} = \dfrac{2x-4}{x-2} = 2 = 2b$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចំណុច } I(2,1) \text{ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប}(C)}$

សង់ក្រាប(C)

ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអ័ក្ស

• $(C)\cap(y'Oy) \Leftrightarrow x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{0^2-3(0)-4}{0-2} = 2$

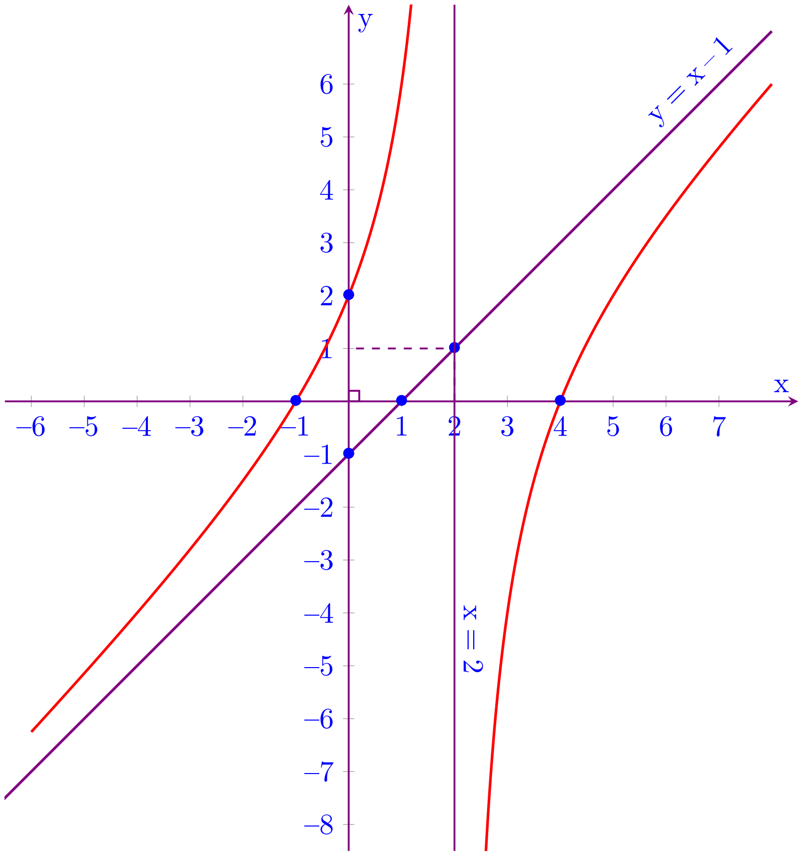
• $(C)\cap(x'Ox) \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x^2-3x-4 = 0$ មានរាង $\quad a-b+c = 0$

$$\Rightarrow x_1 = -1\ ;\ x_2 = -\frac{c}{a} = 4$$

• អាស៊ីមតូតឈរ $x = 2$

• អាស៊ីមតូតទ្រេត $y = x-1$

x	0	1
$y = x-1$	-1	0


y
x
y = x − 1
x = 2
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7

លំហាត់ទី៨

គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y = f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-1}$ មានក្រាបតំណាង (C)។

ក. ចូររកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f។

ខ. គណនា $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ។ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ។

គ. បង្ហាញថា $f(x) = x+1-\dfrac{3}{x-1}$ ។ រួចបង្ហាញថា $(d) : y = x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប(C) ត្រង់ $\pm\infty$ ។

ឃ. បង្ហាញថា $f'(x) = \dfrac{x^2-2x+4}{(x-1)^2}$ ចំពោះគ្រប់ $x \in D_f$ ។ រួចសិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ ។

ង. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f។

ច. រកចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) នឹងអ័ក្សទាំងពីរ ហើយ រកផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប រួចសង់ក្រាប(C)។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

យើងមាន $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-1}$ ដោយ f(x) មានន័យលុះត្រាតែ $x-1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 1$

ដូចនេះ $\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{1\}}$

ខ. គណនា $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-4}{x-1} = \boxed{\pm\infty}$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-4}{x-1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-4}{x-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \boxed{+\infty}$$

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ

ដោយ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \pm\infty$ ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x = 1 \text{ ជាសមីការអាស៊ីមតូតឈរ}}$

គ. បង្ហាញថា $f(x)=x+1-\frac{3}{x-1}$

ដោយ $x+1-\frac{3}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)-3}{x-1}=\frac{x^2-1-3}{x-1}=\frac{x^2-4}{x-1}=f(x)$

ដូចនេះ $\boxed{f(x)=x+1-\frac{3}{x-1}}$

បង្ហាញថា $(d): y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប(C) ត្រង់ $\pm\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{3}{x-1}\right)=0$

ដូចនេះ $\boxed{(d): y=x+1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប}(C) \text{ ត្រង់ } \pm\infty}$

ឃ. បង្ហាញថា $f'(x)=\frac{x^2-2x+4}{(x-1)^2}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in D_f$

$$
\begin{aligned}
f'(x)=\left(\frac{x^2-4}{x-1}\right)' &= \frac{\left(x^2-4\right)'(x-1)-(x-1)'\left(x^2-4\right)}{(x-1)^2}\\
&= \frac{2x(x-1)-\left(x^2-4\right)}{(x-1)^2}\\
&= \frac{2x^2-2x-x^2+4}{(x-1)^2}\\
&= \frac{x^2-2x+4}{(x-1)^2}
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\frac{x^2-2x+4}{(x-1)^2}}$

រួចសិក្សាសញ្ញា $f'(x)$

$f'(x)=\frac{x^2-2x+4}{(x-1)^2}$ ដោយ $(x-1)^2>0 \quad \forall x\in D_f \Rightarrow f'(x)$ មានសញ្ញាដូចភាគយក

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \quad x^2-2x+4=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4(1)(4)=-12<0 \Rightarrow f'(x)$ មានសញ្ញាដូចមេគុណ a

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\|$	$+$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) > 0 \quad \forall x \in D_f}$

ង. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$	$\|$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

ច. រកចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) នឹងអ័ក្សទាំងពីរ

- $(C) \cap (x'Ox) \Leftrightarrow y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow x = \pm 2$
- $(C) \cap (y'Oy) \Leftrightarrow x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{0^2 - 4}{0 - 1} = 4$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ក្រាប } (C) \text{ កាត់អ័ក្ស } x'Ox \text{ ត្រង់ } x = -2 \text{ និង } x = 2 \text{ ហើយកាត់អ័ក្ស} y'Oy \text{ ត្រង់ } y = 4}$

រកផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប

ផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) គឺជាចំណុចប្រសព្វរវាង អាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត

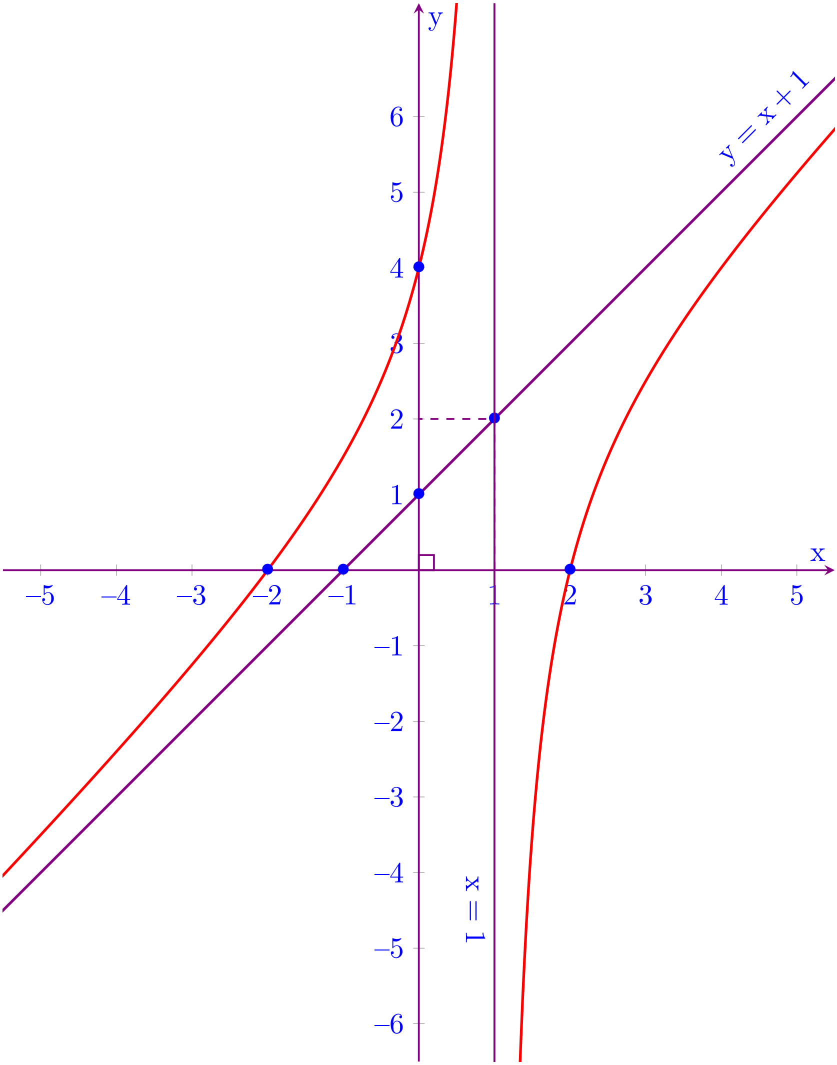
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = x + 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1 + 1 = 2 \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប}(C) \text{ គឺ } I(1, 2)}$

សង់ក្រាប(C)

- អាស៊ីមតូតឈរ $x = 1$
- អាស៊ីមតូតទ្រេត $y = x + 1$

x	0	−1
$y = x + 1$	1	0



លំហាត់ទី៩

គេមានអនុគមន៍ f មួយកំណត់លើ $\mathbb{R}-\{1\}$ ដោយ $y=f(x)=\dfrac{x^2-x+9}{x-1}$ មានក្រាបតំណាង(C)។

ក. ចូរគណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$; $+\infty$

ខ. ចូរសរសេរសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប(C)។

គ. សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ រួចបង្ហាញថា អនុគមន៍ f មានអតិបរមាធៀបមួយត្រង់ $x=-2$ និង អប្បបរមាធៀបមួយត្រង់ $x=4$ ព្រមទាំងរកតម្លៃបរមាធៀបទាំងនេះ។

ឃ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

ង. កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត a; b និង c ដែលធ្វើឲ្យ $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$ ។ រួចបង្ហាញថា $(d): y=x$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C។

ច. រកចំណុចប្រសព្វរវាង អាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត រួចសង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (d) ក្នុងតម្រុយតែមួយ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$; $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+9}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+9}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\boxed{+\infty}$$

ខ. សរសេរសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប(C)

ដោយ $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x+9}{x-1}=\pm\infty$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x=1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$

គ. សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

យើងមាន $f'(x)=\left(\dfrac{x^2-x+9}{x-1}\right)'=\dfrac{\left(x^2-x+9\right)'(x-1)-(x-1)'\left(x^2-x+9\right)}{(x-1)^2}$

$$=\frac{(2x-1)(x-1)-\left(x^2-x+9\right)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{2x^2-2x-x+1-x^2+x-9}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x^2-2x-8}{(x-1)^2}$$

$f'(x)$ មានសញ្ញាដូចភាគយក

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \quad x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow (x-4)(x+2)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-2 \end{array}\right.$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

- $f'(x)>0$ ឬអនុគមន៍ f កើន នៅពេល $x\in(-\infty;-2)\cup(4;+\infty)$
- $f'(x)<0$ ឬអនុគមន៍ f ចុះ នៅពេល $x\in(-2;1)\cup(4;+\infty)$

បង្ហាញថា អនុគមន៍ f មានអតិបរមាធៀបមួយត្រង់ $x=-2$ និង អប្បបរមាធៀបមួយត្រង់ $x=4$

- ត្រង់ $x=-2;\ f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ នាំឲ្យ f មានអតិបរមាធៀបមួយត្រង់ $x=-2$

  ដែលតម្លៃនៃអតិបរមាធៀបនេះគឺ $f(-2)=\dfrac{(-2)^2-(-2)+9}{-2-1}=\dfrac{4+2+9}{-3}=-5$
- ត្រង់ $x=4;\ f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ នាំឲ្យ f មានអប្បបរមាធៀបមួយត្រង់ $x=4$

  ដែលតម្លៃនៃអប្បបរមាធៀបនេះគឺ $f(4)=\dfrac{(4)^2-(4)+9}{4-1}=\dfrac{16-4+9}{3}=7$

ឃ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$

ង. កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត a; b និង c ដែលធ្វើឲ្យ $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-1}$

ដោយ $f(x) = \dfrac{x^2-x+9}{x-1} = x+\dfrac{9}{x-1}$

យើងបាន $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad ax+b+\dfrac{c}{x-1} = x+\dfrac{9}{x-1}$

ផ្ទឹមមេគុណ យើងបាន $a = 1;\ b = 0\ ;\ c = 9$

ដូចនេះ $\boxed{a = 1;\ b = 0\ ;\ c = 9}$

បង្ហាញថា $(d) : y = x$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-x] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{9}{x-1} = 0$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } y = x \text{ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត}}$

ច. រកចំណុចប្រសព្វរវាង អាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត

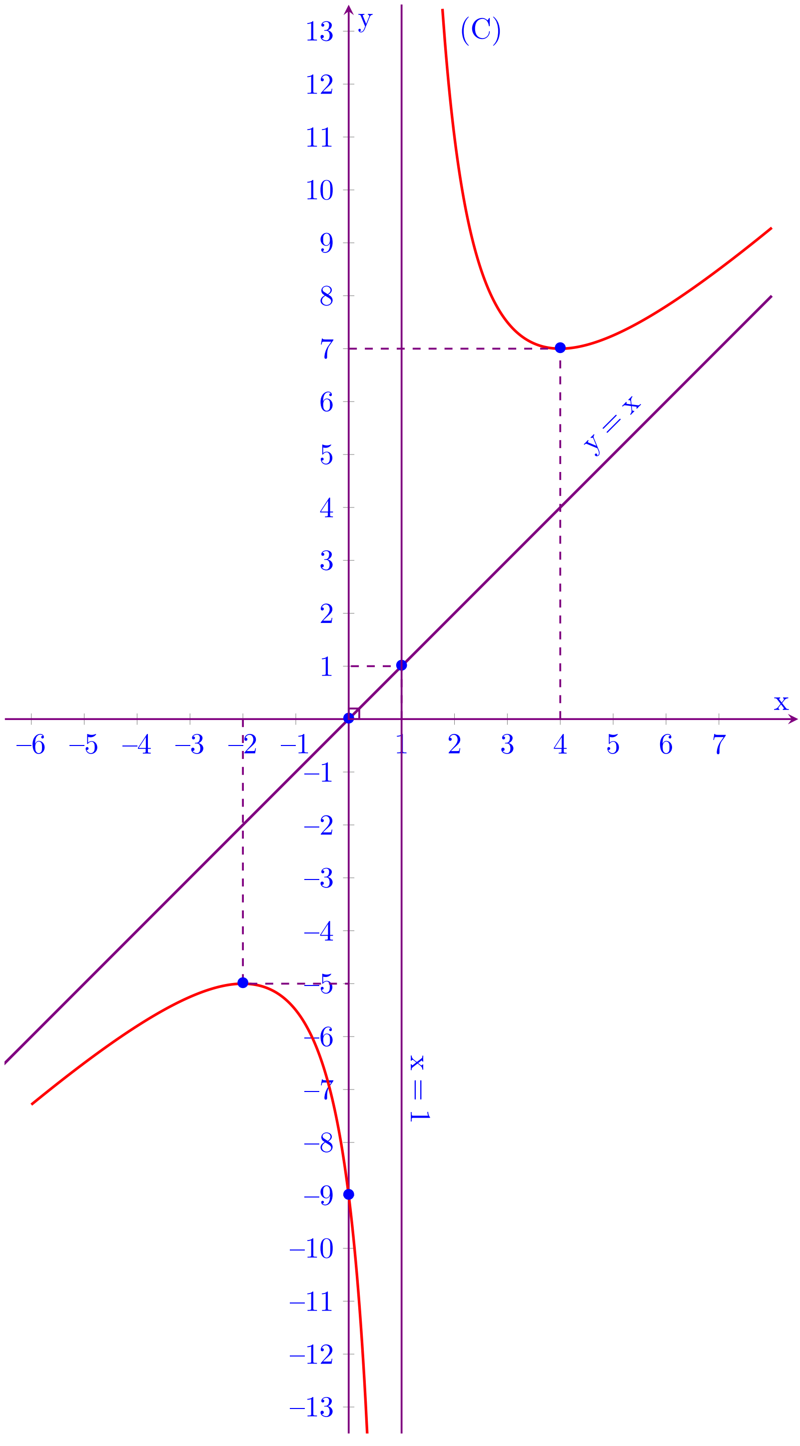
- អាស៊ីមតូតទ្រេត $y = x$
- អាស៊ីមតូតឈរ $x = 1$ ជំនួសក្នុងអាស៊ីមតូតទ្រេតយើងបាន $y = 1$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចំណុចប្រសព្វរវាងអាស៊ីមតូតទាំងពីរគឺ } (1,1)}$

សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (d)

- $(C)\cap(y'Oy) \Leftrightarrow \quad x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{0^2-0+9}{0-1} = -9$
- តារាងតម្លៃលេខអាស៊ីមតូតទ្រេត $y = x$

x	0	1
$y = x$	0	1


y
x
(C)
y = x
x = 1
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
−10
−11
−12
−13
−6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7

លំហាត់ទី១០

គេមានអនុគមន៍ f មួយ ដែលកំណត់ដោយ $y = f(x) = \dfrac{x^2+3x-3}{x-1}$ មានក្រាបតំណាង (C)។

ក. ចូររកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍f។

ខ. ចូរគណនា $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x);\ \lim\limits_{x\to1} f(x)$ ។

គ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង សមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត។

ឃ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ ។ រួចរកតម្លៃបរមាធៀប បើមាន។

ង. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

ច. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូតទ្រេត រួចសង់ក្រាប(C) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍f

ដោយ $y = f(x) = \dfrac{x^2+3x-3}{x-1}$ គេបាន f(x) មានន័យលុះត្រាតែ $x-1\neq0 \quad \Leftrightarrow \quad x\neq1$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ដែនកំនត់នៃអនុគមន៍ f គឺ } D_f = \mathbb{R}-\{1\}}$

ខ. គណនា $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x);\ \lim\limits_{x\to1} f(x)$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3x-3}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x} = \pm\infty$$ **ដូចនេះ** $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty}$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}\frac{x^2+3x-3}{x-1} = \pm\infty$$ **ដូចនេះ** $\boxed{\lim\limits_{x\to1} f(x) = \pm\infty}$

គ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង សមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត

- ដោយ $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \pm\infty$ **ដូចនេះ** $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x=1 \text{ ជាសមីការអាស៊ីមតូតឈរ}}$
- ដោយ $y = f(x) = \dfrac{x^2+3x-3}{x-1} = x+4+\dfrac{1}{x-1}$

គេបាន $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x-1} = 0$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } y = x+4 \text{ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត}}$

ឃ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+3x-3}{x-1}\right)' = \frac{\left(x^2+3x-3\right)'(x-1)-(x-1)'\left(x^2+3x-3\right)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(2x+3)(x-1)-\left(x^2+3x-3\right)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2-2x+3x-3-x^2-3x+3}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \; x^2-2x=0 \quad \Leftrightarrow x(x-2)=0 \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x-2=0 \quad \Rightarrow \; x=2 \end{array}\right.$$

តារាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

- $f'(x)>0$ ឬអនុគមន៍f កើន នៅពេល $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$
- $f'(x)<0$ ឬអនុគមន៍f ចុះ នៅពេល $x\in(0,1)\cup(1,2)$

បរមាធៀប

- ត្រង់ $x=0$; $f'(x)=0$ ប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ គេបាន f មានអតិបរមាធៀបមួយ គឺ

$$f(0)=\frac{0^2+3(0)-3}{0-1}=3$$

- ត្រង់ $x=2$; $f'(x)=0$ ប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ គេបាន f មានអប្បបរមាធៀបមួយ គឺ

$$f(2)=\frac{2^2+3(2)-3}{2-1}=7$$

ង. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$

ច. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូតទ្រេត

- ក្រាប (C) : $y = f(x) = \dfrac{x^2+3x-3}{x-1} = x+4+\dfrac{1}{x-1}$
- អាស៊ីមតូតទ្រេត d : $y = x+4$

ដោយ $y_c - y_d = x+4+\dfrac{1}{x-1} - (x+4) = \dfrac{1}{x-1}$

☞ $y_c - y_d > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{x-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x-1>0 \Rightarrow x>1$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ក្រាប (C) ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ } d \text{ ពេល } x>1}$

☞ $y_c - y_d < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{x-1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x-1<0 \Rightarrow x<1$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ក្រាប (C) ស្ថិតនៅក្រោមបន្ទាត់ } d \text{ ពេល } x<1}$

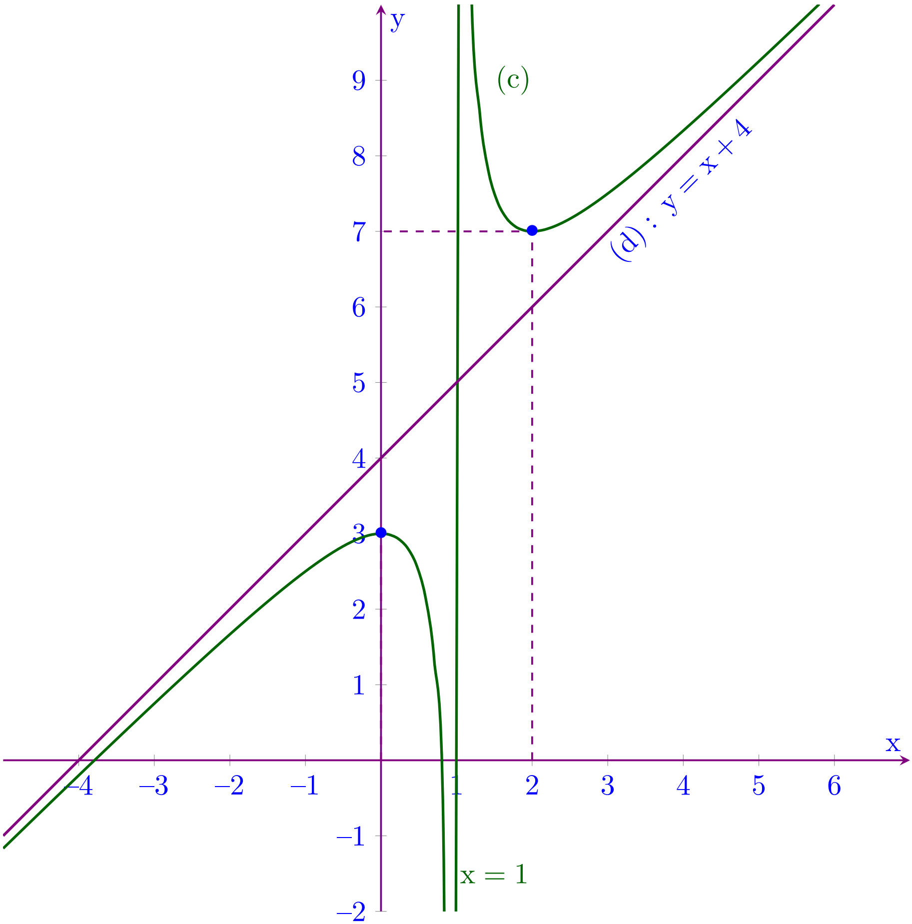
សង់ក្រាប C

- $(C) \cap (y'oy) \Leftrightarrow x = 0 \quad \Rightarrow y = \dfrac{0^2+3(0)-3}{0-1} = 3$

(d) : $y = x+4$

-

x	0	-4
y	4	0


y
9
8
7
6
5
4
3
2
1
−1
−2
x
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
(c)
(d) : y = x + 4
x = 1