ចិសមតាព

មូលដ្ឋានគ្រឹះ

រៀបរៀងដោយ ជា ពិសិដ្ឋ

មូលដ្ឋានគ្រឹះនៃវិសមភាព

វិសមភាពជាផ្នែកមួយដែលពេញនិយមខ្លាំងក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យា ។ មិនត្រឹមតែប៉ុណ្ណោះវិសមភាពជាផ្នែកមួយនៃគណិតវិទ្យាដែលមានលក្ខណៈពិសេសៗជាច្រើន ។ ក្នុងឯកសារនេះ យើងនឹងចាប់ផ្តើមនិយាយពីមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃវិសមភាព ។

លក្ខណ:

i- បើ $x \geq y$ និង $y \geq z$ នោះ $x \geq z$ ចំពោះគ្រប់ x, y និង $z \in \mathbb{R}$ ។

ii- បើ $x \geq y$ និង $a \geq b$ នោះ $x + a \geq y + b$ ចំពោះគ្រប់ a, b, x និង $y \in \mathbb{R}$ ។

iii- បើ $x \geq y$ នោះ $x + z \geq y + z$ ចំពោះគ្រប់ x, y និង $z \in \mathbb{R}$ ។

iv- បើ $x \geq y$ និង $a \geq b$ នោះ $xa \geq yb$ ចំពោះគ្រប់ x, y, a និង $b > 0$ ។

v- បើ $x \in \mathbb{R}$ នោះ $x^2 \geq 0$ សមភាពពេល $x = 0$ ។ ជាពិសេសចំពោះ $A_i \in \mathbb{R}^+$ និង $x_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$ គេបាន $A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \ldots + A_n x_n^2 \geq 0$ សមភាពកើតឡើងពេល $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ ។

ទាំងនេះជាលក្ខណៈសាមញ្ញ ងាយៗ តែមានប្រយោជន៍ខ្លាំងណាស់ក្នុងការស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព ។ ពិសេស គឺ v ។

ខាងក្រោមនេះជាឧទាហរណ៍មួយចំនួននៃការស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាពតាមរយៈការប្រើលក្ខណៈទាំងប្រាំខាងលើ ។

ឧទាហរណ៍ ១

បង្ហាញថា $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \geq \Rightarrow x^2 + 1 \geq 2x$

ដោយ $x > 0$ យើងបាន $\dfrac{x^2+1}{x} \geq 2 \Rightarrow x + \dfrac{1}{x} \geq 2$

ដូចនេះ $x+\frac{1}{x}\geq 2$ សមភាពពេល $x=1$

ឧទាហរណ៍ ២

គេឲ្យ a , $b>0$ ។ បង្ហាញថា $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $(a-b)^2\geq 0\Rightarrow a^2-2ab+b^2\geq 0\Rightarrow a^2+b^2\geq 2ab$

ដោយ a , $b>0$

យើងបាន $\frac{a^2+b^2}{ab}\geq 2\Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$

ដូចនេះ $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ សមភាពពេល $a=b$

ឧទាហរណ៍ ៣

(វិសមភាព Nesbitt)

គេឲ្យ a , b និង $c>0$ ។ បង្ហាញថា $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$ ។

សម្រាយ

តាម ឧទាហរណ៍ ២ យើងបាន

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}+\frac{a+c}{c+b}+\frac{c+b}{a+c}+\frac{b+a}{a+c}+\frac{a+c}{b+a}\geq 2+2+2=6$$

$$\left(\frac{a+b}{b+c}+\frac{a+c}{b+c}\right)+\left(\frac{c+b}{c+a}+\frac{b+a}{c+a}\right)+\left(\frac{b+c}{a+b}+\frac{a+c}{b+a}\right)\geq 6$$

$$\frac{2a}{b+c}+1+\frac{2b}{c+a}+1+\frac{2c}{a+b}+1\geq 6$$

$$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\geq 3$$

$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$ សមភាពកើតឡើងពេល

$$\frac{a+b}{b+c}=\frac{b+c}{a+b};\frac{a+c}{c+b}=\frac{c+b}{a+c};\frac{b+a}{a+c}=\frac{a+c}{b+a}\Leftrightarrow a=b=c$$

ដូចនេះ $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$ សមភាពពេល $a=b=c$

ឧទាហរណ៍ ៤

គេឲ្យ a, b និង c ជាចំនួនពិត ។ បង្ហាញថា $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $(a-b)^2\geq 0\Rightarrow a^2-2ab+b^2\geq 0$

នោះ $\quad a^2+b^2\geq 2ab \quad (1)$

ដូចគ្នាដែរ $\quad b^2+c^2\geq 2bc \quad (2)$

$\quad c^2+a^2\geq 2ca \quad (3)$

បូក (1), (2) និង (3) យើងបាន $2(a^2+b^2+c^2)\geq 2(ab+bc+ca)$

ដូចនេះ $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$

ឧទាហរណ៍ ៥

គេឲ្យ a, b និង c ជាចំនួនពិត ។ បង្ហាញថា

$3(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2\leq 3(a^2+b^2+c^2)$ ។

សម្រាយ

តាមឧទាហរណ៍ ៤ យើងបាន

$$\begin{aligned}3(ab+bc+ca)&=ab+bc+ca+2(ab+bc+ca)\\&\leq a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\\&=(a+b+c)^2\\&\leq a^2+b^2+c^2+2(a^2+b^2+c^2)\\&=3(a^2+b^2+c^2)\end{aligned}$$

ដូចនេះ $3(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2\leq 3(a^2+b^2+c^2)$

ឧទាហរណ៍ ៦

គេឲ្យ x, y និង $z>0$ ហើយ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $x+y+z=1$ ។

បង្ហាញថា $\sqrt{6x+1}+\sqrt{6y+1}+\sqrt{6z+1}\leq 3\sqrt{3}$ ។

សម្រាយ

យក $\sqrt{6x+1}=a$, $\sqrt{6y+1}=b$ និង $\sqrt{6z+1}=c$

យើងបាន $a^2+b^2+c^2=6(x+y+z)+3=9$

តាមឧទាហរណ៍ ៥ យើងបាន $(a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2)=27$

$$\Rightarrow a+b+c\le 3\sqrt{3}$$

ដូចនេះ $\sqrt{6x+1}+\sqrt{6y+1}+\sqrt{6z+1}\le 3\sqrt{3}$

ឧទាហរណ៍ ៧

គេឲ្យ a , b និង c ជាចំនួនពិត ។ បង្ហាញថា $a^4+b^4+c^4\ge abc(a+b+c)$ ។

សម្រាយ

តាមឧទាហរណ៍ ៤ យើងមាន $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$

យើងបាន $a^4+b^4+c^4\ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

$$=(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2$$

$$\ge (ab)(bc)+(bc)(ca)+(ca)(ab)$$

$$=abc(a+b+c)$$

ដូចនេះ $a^4+b^4+c^4\ge abc(a+b+c)$