

ក្រសួងអប់រំយុវជន និងកីឡា
 វិទ្យាល័យមេតូឌីស្តិកម្ពុជា
 វិទ្យាសាលាប្រចាំឆ្នាំ
 ឆ្នាំ៖ និងឆ្នាំបញ្ចប់ការសិក្សា៖

លេខបន្ទប់៖
 លេខតុ៖
 មណ្ឌលប្រឡង៖

សម័យបណ្ណៈ ១៩ សីហា ២០១៩

នាមត្រកូលនិងនាមខ្លួន៖

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖

ឈ្មោះ៖

លេខសម្ងាត់៖

បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើសន្លឹកប្រឡងឡើយ។ សន្លឹកប្រឡងដែលមានសញ្ញាសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្យសូន្យ។

វិទ្យាសាលា៖ គណិតវិទ្យាឆ្នាំសិក្សា រយៈពេល៖ ៩០ នាទី ពិន្ទុ៖ ៧៥

លេខសម្ងាត់៖



សេចក្តីណែនាំ៖ ១. បេក្ខជនត្រូវគូសខ្សែនៅជំពូកទី២ ផ្នែកខាងលើដែលត្រូវកាត់ចេញ។
 ២. បេក្ខជនត្រូវសរសេរឆ្លើយនៃសំណួរបណ្តុះនៅលើជំពូកទី២ ទី៣ និងទី៤។

ប្រធាន (ចាក់ចុបឆ្នាំ ២០១៩ ថ្នាក់សង្ឃឹម)

I. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

៧. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 + 6x + 1}{x^2 + 1}$

៨. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{(x + 1)^2}$

៩. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2 - \ln x)$

II. ក្នុងថ្នាក់រៀនមួយមានសិស្ស 15 នាក់ ក្នុងនោះសិស្សប្រុស 9 នាក់ និងសិស្សស្រី 6 នាក់ ។
 គេជ្រើសរើសសិស្ស 3 នាក់ ដោយចៃដន្យដាក់ឈ្មោះទៅសម្ភាសន៍ ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

- A ក្រុមសិស្សទាំង 3 នាក់ សុទ្ធតែជាសិស្សស្រី ។
- B ក្រុមសិស្សទាំង 3 នាក់ សុទ្ធតែជាសិស្សប្រុស ។
- C ក្រុមសិស្សទាំង 3 នាក់ មាន 2 នាក់ជាសិស្សស្រី ។

III. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

៧. $I = \int_1^2 (3x^2 - 2x + 3) dx$

៨. $J = \int_0^1 (e^{2x} - e^x + 1) dx$

៩. $K = \int_1^2 \left(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x^2} \right) dx$

IV. គេមានប៉ារ៉ាបូលមួយដែលមានកំពូលជាចំណុច O (0,0) និងកំណុំ F ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

- ៧. រកសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូលនេះ បើគេដឹងថាវាកាត់តាមចំណុច $A \left(\frac{3}{2}; -3 \right)$ ។
- ៨. រកកូអរដោនេរបស់កំណុំ សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស រួចសង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ ។

V. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 5x + 7}$ ។ យើងតាងដោយក្រាប C របស់លើកម្រុយអរតូណូម៉ាល់ (0,1,j) ។

- 1. រកដែនកំណត់ D នៃអនុគមន៍ f ។
- 2. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f(x) ត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$ ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូត d ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ។
- 3. ៧. ស្រាយបំភ្លឺថាគ្រប់ចំនួនពិត $x \in D$, ដេរីវេ $f'(x) = \frac{-3(x^2 - 6x + 8)}{(x^2 - 5x + 7)}$ ។
- ៨. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។
- ៩. សង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ f ។

មានន័យប្រែប្រួលផ្សេងៗគ្នា ជាត្រឹមត្រូវតាមស្ថានភាពប្រើប្រាស់

ក្រសួងអប់រំយុវជន និងកីឡា
 វិទ្យាល័យមេតូឌីស្តិកម្ពុជា
 វិទ្យាសាស្ត្របច្ចេកទេស
 រដ្ឋាន និងបន្តការសិក្សា

លេខបន្ទប់៖
 លេខគុះ៖
 មណ្ឌលប្រឡង៖

សម័យបណ្ណៈ ១៩ សីហា ២០១៩

នាមត្រកូលនិងនាមខ្លួន៖

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖

ឈ្មោះ៖

លេខសម្ងាត់៖

បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើសន្លឹកប្រឡងឡើយ។ សន្លឹកប្រឡងដែលមានសញ្ញាសម្គាល់នឹងត្រូវបានដកចេញពីប្រឡង។

វិទ្យាសាស្ត្រ គណិតវិទ្យាឆ្នាំទី១ រយៈពេល៖ ៩០ នាទី ពិន្ទុ៖ ៧៥

លេខសម្ងាត់៖

ពិន្ទុសរុប

- សេចក្តីណែនាំ៖ ១. បេក្ខជនត្រូវគូសខ្សែនៅជំពូកទី២ ផ្នែកខាងលើដែលត្រូវកាត់ចេញ។
 ២. បេក្ខជនត្រូវសរសេរចម្លើយនៃសំណួរបណ្តុះនៅលើជំពូកទី២ ទី៣ និងទី៤។

វិទ្យាសាស្ត្រទី១ (ពាក់កណ្តាល ២០១៧ ថ្នាក់ស្រប)

I. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt{x + 6} - 3}$

គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

II. ក្នុងចង្កោមមានប៊ូលពណ៌សចំនួន៣ និងប៊ូលពណ៌ក្រហមចំនួន៦។ គេចាប់យកប៊ូល៣ ក្នុងពេលតែមួយចេញពីចង្កោមដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

- A: ប៊ូលទាំងបីមានពណ៌ស
 B: ប៊ូលទាំងបីមានពណ៌ក្រហម
 C: មានប៊ូលមួយពណ៌ក្រហម និងពីរទៀតពណ៌ស

III. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $I = \int_1^3 (3x^2 + 2x + 1) dx$

ខ. $J = \int_0^1 (2e^x - 1) dx$

គ. $K = \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x^2} \right) dx$

IV. គេមានសមីការ $9x^2 + 25y^2 = 225$ ។

- ក. បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប។ រកប្រវែងអ័ក្សតូច ប្រវែងអ័ក្សធំ និងកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ។
 ខ. សង់អេលីបនេះ។

V. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R} - \{2\}$ ដោយ $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$ ។ យើងតាង C ជាក្រាបរបស់វា លើតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(0, i, j)$ ។

- សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ក្រុង $-\infty$ និងក្រុង $+\infty$ ។
- សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។
- a. រកចំនួនពិត a, b, c ដែលគ្រប់ $x \neq 2$; $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$ ។
 b. គេតាង d ដែលមានសមីការ $y = x + 1$ ។ បង្ហាញថា d ជាអាស៊ីមតូតនៃ C ក្រុង $+\infty$ និង $-\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d ។
 c. សង់ក្រាប C និង បន្ទាត់ d ។

មានទទួលបានបៀវត្សសិក្សា ជាប្រភេទពិសេសសម្រាប់សិស្ស

I. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$)

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1 + 0 + 0}{1 + 0} = 1 \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = 1}$$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt{x+6} - 3}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^3 - 3^3)(\sqrt{x+6} + 3)}{(\sqrt{x+6} - 3)(\sqrt{x+6} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)(\sqrt{x+6} + 3)}{(x+6) - 9}$$

$$= (3^2 + 3 \cdot 3 + 9)(\sqrt{3+6} + 3) = 27 \times 6 = 162$$

ដូចនេះ: $\boxed{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt{x+6} - 3} = 162}$

គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$ ដូចនេះ: $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1}$

II. ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

A: ប៉ូលទាំងបីមានពណ៌ស

តាមរូបមន្ត $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ ដោយ $n(A) = C(3,3) = \frac{3!}{(3-3)!3!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1$

$$n(S) = C(9,3) = \frac{9!}{(9-3)!3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3 \times 2 \times 1} = 84$$

គេបាន $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{84}$ ដូចនេះ: $\boxed{P(A) = \frac{1}{84}}$

B: ប៉ូលទាំងបីមានពណ៌ក្រហម

តាមរូបមន្ត $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$ ដោយ $n(S) = 84$

$$n(B) = C(6,3) = \frac{6!}{(6-3)!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3 \times 2 \times 1} = 20$$

គេបាន $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{20}{84} = \frac{5}{21}$ ដូចនេះ: $\boxed{P(B) = \frac{5}{21}}$

C: មានប៉ូលមួយពណ៌ក្រហម និងពីរទៀតពណ៌ស

តាមរូបមន្ត $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)}$ ដោយ $n(S) = 84$

$$n(C) = C(6,1) \times C(3,2) = \frac{6!}{(6-1)!1!} \times \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{6 \times 5!}{5! \times 1!} \times \frac{3 \times 2 \times 1}{1! \times 2 \times 1} = 18$$

គេបាន $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{18}{84} = \frac{3}{14}$ ដូចនេះ: $\boxed{P(C) = \frac{3}{14}}$

III. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } I = \int_1^3 (3x^2 + 2x + 1) dx = \left[3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + x \right]_1^3 = 3^3 + 3^2 + 3 - (1^3 + 1^2 + 1) = 27 + 9 + 3 - 3 = 36$$

ដូចនេះ: $I = 36$

$$\text{ខ. } J = \int_0^1 (2e^x - 1) dx = [2e^x - x]_0^1 = 2e^1 - 1 - (2e^0 - 0) = 2e - 1 - 2 = 2e - 3 \quad \text{ដូចនេះ: } J = 2e - 3$$

$$\text{គ. } K = \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x^2} \right) dx = \int_1^2 (x + x^{-2}) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} \right]_1^2 = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} \right]_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1}{2} - \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1}{1} \right) = 2 - \frac{1}{2} + 1 = 2$$

ដូចនេះ: $K = 2$

IV. ក. បង្ហាញថាសមីការ $9x^2 + 25y^2 = 225$ ជាសមីការអេលីប

$$\begin{aligned} \text{ដោយ } 9x^2 + 25y^2 = 225 &\Leftrightarrow \frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = \frac{225}{225} \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-0)^2}{5^2} + \frac{(y-0)^2}{3^2} = 1 \quad \text{ជាសមីការអេលីបដែលមានផ្ចិត(0,0)} \end{aligned}$$

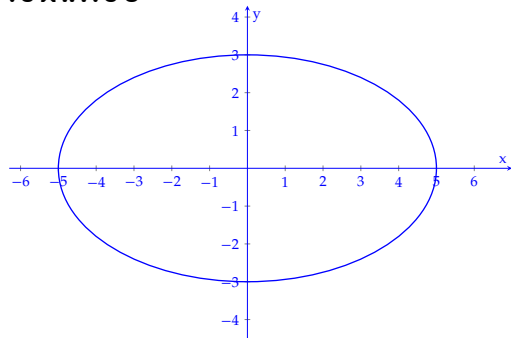
ដូចនេះ: $\text{សមីការ } 9x^2 + 25y^2 = 225 \text{ ជាសមីការអេលីប}$

រកប្រវែងអ័ក្សតូច ប្រវែងអ័ក្សធំ និងកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ

$$\text{ដោយសមីការអេលីបមានរាង } \frac{(x-0)^2}{5^2} + \frac{(y-0)^2}{3^2} = 1 \quad \text{គេបាន } h = 0, k = 0, \quad a = 5, b = 3$$

- ប្រវែងអ័ក្សតូច $= 2b = 2(3) = 6$
- ប្រវែងអ័ក្សធំ $= 2a = 2(5) = 10$
- កំពូល $V_1(h + a, k) \Rightarrow V_1(5, 0)$
- កំពូល $V_2(h - a, k) \Rightarrow V_2(-5, 0)$

ខ. សង់អេលីប



V. 1. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ក្រុង $-\infty$ និងក្រុង $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{x \left(1 - \frac{2}{x} \right)} = -\infty \frac{(1 - 0 - 0)}{1 - 0} = -\infty \quad \text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{x \left(1 - \frac{2}{x} \right)} = +\infty \frac{(1 - 0 - 0)}{1 - 0} = +\infty \quad \text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

• ដេរីវេ

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - x - 1}{x - 2} \right)' = \frac{(x^2 - x - 1)'(x - 2) - (x - 2)'(x^2 - x - 1)}{(x - 2)^2}$$

$$= \frac{(2x - 1)(x - 2) - (x^2 - x - 1)}{(x - 2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - x + 2 - x^2 + x + 1}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \text{មានឫស } x_1 = 1; x_2 = 3$$

• តារាងសញ្ញាដេរីវេ f'(x)

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	-	0	+

• បរមាជ្រៀប

- ត្រង់ $x = 1$; $f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី + ទៅ - គេបាន f មានអតិបរមាជ្រៀបមួយ គឺ $f(1) = \frac{1^2 - 1 - 1}{1 - 2} = 1$
- ត្រង់ $x = 3$; $f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី - ទៅ + គេបាន f មានអប្បបរមាជ្រៀបមួយ គឺ $f(3) = \frac{3^2 - 3 - 1}{3 - 2} = 5$

• តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	-	0	+
f(x)	$-\infty$	1	$-\infty$	$+\infty$	5	$+\infty$

3. a. រកចំនួនពិត a, b, c ដែលគ្រប់ $x \neq 2$; $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2} \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = ax + b + \frac{c}{x - 2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x - 2)(x + 1) + 1}{x - 2} = ax + b + \frac{c}{x - 2}$$

$$\Leftrightarrow x + 1 + \frac{1}{x - 2} = ax + b + \frac{c}{x - 2}$$

ដោយផ្ទៀងផ្ទាត់យើងបាន $a = 1; b = 1; c = 1$

b. បង្ហាញថា d : $y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតនៃ C ត្រង់ $+\infty$ និង $-\infty$

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[x + 1 + \frac{1}{x - 2} - (x + 1) \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x - 2} = 0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ d : $y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតនៃ C

សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d

$$C : y = x + 1 + \frac{1}{x - 2} ; d : y = x + 1 \Rightarrow y_c - y_d = x + 1 + \frac{1}{x - 2} - (x + 1) = \frac{1}{x - 2}$$

• $y_c - y_d > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x - 2} > 0 \Leftrightarrow x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$ ដូចនេះ (c) ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ (d) ពេល $x > 2$

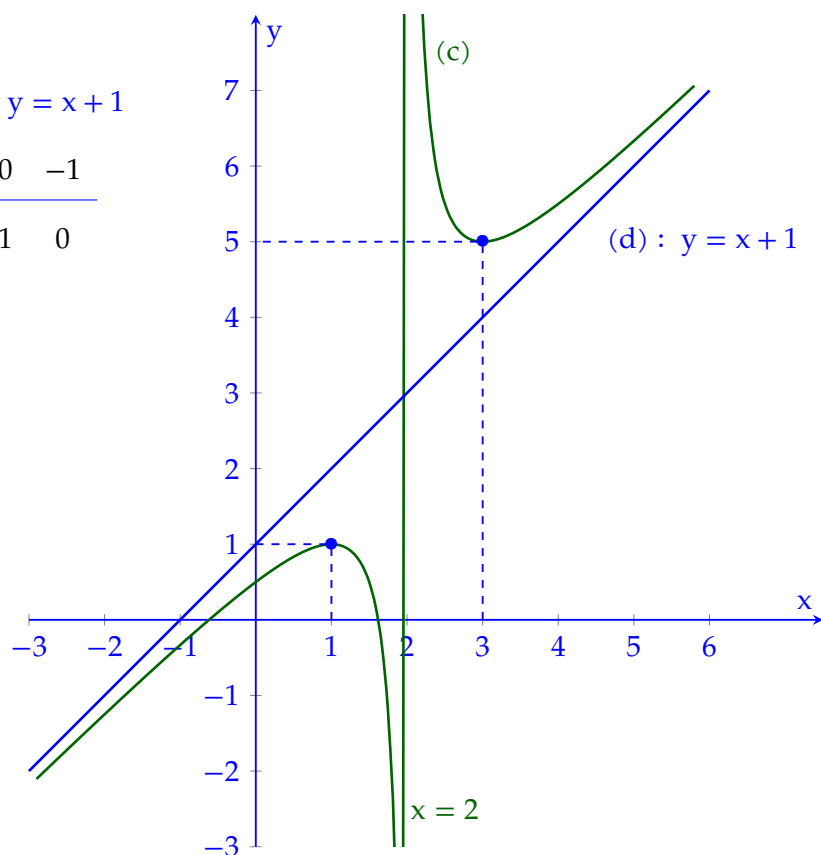
• $y_c - y_d < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x - 2} < 0 \Leftrightarrow x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$ ដូចនេះ (c) ស្ថិតនៅក្រោមបន្ទាត់ (d) ពេល $x < 2$

c. សង់ក្រាប C និង បន្ទាត់ d

$(C) \cap (x'ox)$ គឺ $y = 0$; $\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-1) = 5$ មានឫស $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

(d) : $y = x + 1$

x	0	-1
y	1	0



ត្រូវស្គាល់បែបបទនិង លក្ខណៈ
 ទស្សនៈនៃប្រព័ន្ធគណិតសាស្ត្រ
 បញ្ហាស្រាវជ្រាវបច្ចុប្បន្ន
 បច្ចេកវិទ្យា និងបច្ចេកទេសស្រាវជ្រាវ

លេខបង្គាប់:
 លេខកុះ:
 មណ្ឌលប្រឡង:

សម័យបច្ចុប្បន្ន: ១៩ សីហា ២០១៩

នាមត្រកូលនិងនាមខ្លួន:

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត:

ឈ្មោះ:

លេខសម្ងាត់:

បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើសន្លឹកប្រឡងឡើយ។ សន្លឹកប្រឡងដែលមានសញ្ញាសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្យសុំឡើយ។



បញ្ហាស្រាវជ្រាវ: គណិតវិទ្យាប្រកួតប្រជែង រយៈពេល: ៩០ នាទី ពិន្ទុ: ៧៥

លេខសម្ងាត់:

ពិន្ទុសរុប

សេចក្តីណែនាំ: ១. បេក្ខជនត្រូវគូសខ្សែនៅជំពូកទី២ ផ្នែកខាងលើដែលត្រូវកាត់ចេញ។

២. បេក្ខជនត្រូវសរសេរចម្លើយនៃសំណួរប្រឡងនៅលើជំពូកទី២ ទី៣ និងទី៤។

វិញ្ញាសាទី២ (ពាក់កណ្តាល ២០១៩ ថ្នាក់ស្រុក)

I. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីត:

ក. $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^3 - 4x)$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x+2} - 2}$

គ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x^2)$

II. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល

ក. $I = \int_1^2 (1 - 3x^2) dx$

ខ. $J = \int_2^3 \frac{1}{x^2} dx$

គ. $K = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+e} - 1 \right) dx$

III. (១០ពិន្ទុ) ប្រអប់មួយមានឃ្លីពណ៌ក្រហមចំនួន៣ និងឃ្លីពណ៌ខៀវចំនួន៥។ គេចាប់ឃ្លី២ចេញពីប្រអប់ដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:

A: ឃ្លីទាំងពីរមានពណ៌ក្រហម

B: ឃ្លីទាំងពីរមានពណ៌ខៀវ

C: ឃ្លីមួយក្នុងមួយពណ៌

IV. (១០ពិន្ទុ) រកសមីការស្តង់ដារនៃអេលីបដែលមានកំណុំមួយស្ថិតក្នុងចំណុច $F_1(-2,0)$ និង កំពូលពីរស្ថិតក្នុង ចំណុច $A(-3,0)$ និង $B(3,0)$ ។

V. (៣០ពិន្ទុ) f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $I = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ ដោយ $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 4}$ ។

ក. សិក្សាលីមីតនៃ f ក្រុង $-\infty, -2, 2$ និង $+\infty$ ។

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេក និង អាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបតាង f ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. សង់នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ (o, i, j) ក្រាបតាង f ។

មានបញ្ជីប្រើប្រាស់សម្រាប់ប្រើប្រាស់ប្រព័ន្ធគណិតសាស្ត្រ

I. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^3 - 4x) = 3(1)^3 - 4(1) = 3 - 4 = -1$ ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^3 - 4x) = -1$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x+2} - 2}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^3 - 2^3)}{(\sqrt{x+2} - 2)} \times \frac{(\sqrt{x+2} + 2)}{(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)(\sqrt{x+2} + 2)}{(x+2) - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4)(\sqrt{x+2} + 2) = (2^2 + 2 \cdot 2 + 4)(\sqrt{2+2} + 2) = 48$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x+2} - 2} = 48$

គ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x^2)$ (មានរាងមិនកំណត់ $+\infty - \infty$)

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{\ln x}{x^2} - 1 \right) = +\infty(0 - 1) = -\infty$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x^2) = -\infty$

II. គណនាអាំងតេក្រាល

ក. $I = \int_1^2 (1 - 3x^2) dx = \left[x - 3 \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = 2 - 2^3 - (1 - 1^3) = 2 - 8 = -6$ ដូចនេះ: $I = -6$

ខ. $J = \int_2^3 \frac{1}{x^2} dx = \int_2^3 x^{-2} dx = \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1} \right]_2^3 = \left[-\frac{1}{x} \right]_2^3 = -\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{-2+3}{6} = \frac{1}{6}$ ដូចនេះ: $J = \frac{1}{6}$

គ. $K = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+e} - 1 \right) dx = [\ln|x+e| - x]_0^1 = \ln|1+e| - 1 - (\ln|0+e| - 0) = \ln(1+e) - 1 - \ln e$

$$= \ln(1+e) - 1 - 1 = \ln(1+e) - 2$$

ដូចនេះ: $K = \ln(1+e) - 2$

III. ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

A: ឃ្លីទាំងពីរមានពណ៌ក្រហម

តាមរូបមន្ត $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ ដោយ $n(A) = C(3,2) = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3 \times 2!}{1!2!} = 3$

$$n(S) = C(8,2) = \frac{8!}{(8-2)!2!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6! \times 2 \times 1} = 28$$

គេបាន $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{28}$ ដូចនេះ: $P(A) = \frac{3}{28}$

B: ឃ្លីទាំងពីរមានពណ៌ខៀវ

តាមរូបមន្ត $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$ ដោយ $n(S) = 28$; $n(B) = C(5,2) = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 1} = 10$

គេបាន $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$ ដូចនេះ: $P(B) = \frac{5}{14}$

C: ឃ្លីមួយក្នុងមួយពណ៌

តាមរូបមន្ត $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)}$ ដោយ $n(S) = 28$; $n(C) = C(3,1) \times C(5,1) = \frac{3!}{2!1!} \times \frac{5!}{4!1!} = 3 \times 5 = 15$

គេបាន $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{15}{28}$ ដូចនេះ: $P(C) = \frac{15}{28}$

IV. រកសមីការស្តង់ដារនៃអេលីប

ដោយ អរដោនេនៃកំណុំ និងកំពូលរបស់អេលីប គឺ ថេរ គេបានសមីការស្តង់ដារនៃអេលីបគឺ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

• កំពូល $A(-3,0)$ គឺ $V_1(h-a,k)$ គេបាន $h-a = -3$; $k = 0$

• កំពូល $B(3,0)$ គឺ $V_2(h+a,k)$ គេបាន $h+a = 3$; $k = 0$

គេបាន

$$\begin{cases} h-a = -3 \\ h+a = 3 \end{cases}$$

$$\frac{2h}{2} = 0 \Rightarrow h = 0; a = 3$$

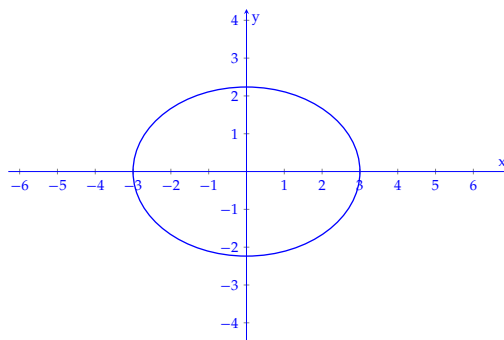
• កំណុំ $F_1(-2,0)$ គឺ $F(h-c,k)$ គេបាន $h-c = -2 \Rightarrow c = 2$

• ដោយ $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$

គេបាន សមីការអេលីប គឺ $\frac{(x-0)^2}{3^2} + \frac{(y-0)^2}{5} = 1$ ដូចនេះ: សមីការស្តង់ដារអេលីប គឺ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

សង់អេលីប

ផ្ចិតនៃអេលីបគឺ $I(0,0)$



V. ក. សិក្សាលីមីតនៃ f ក្រុង $-\infty, -2, 2$ និង $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2 \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} = \frac{2}{1-0} = 2 \quad \text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \pm\infty \quad \text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \pm\infty \quad \text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} = \frac{2}{1-0} = 2 \quad \text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេក និង អាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបតាង f

• ដោយ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$ ដូចនេះ: បន្ទាត់ $y = 2$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

• ដោយ $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \pm\infty$ ហើយ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm\infty$ ដូចនេះ: បន្ទាត់ $x = -2$ និង $x = 2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

៨. សិក្សាអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

- ដេរីវេ

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2}{x^2 - 4} \right)' = \frac{(2x^2)'(x^2 - 4) - (x^2 - 4)'(2x^2)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{4x(x^2 - 4) - 2x(2x^2)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{4x^3 - 16x - 4x^3}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-16x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -16x = 0 \Rightarrow x = 0$$

- តារាងសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

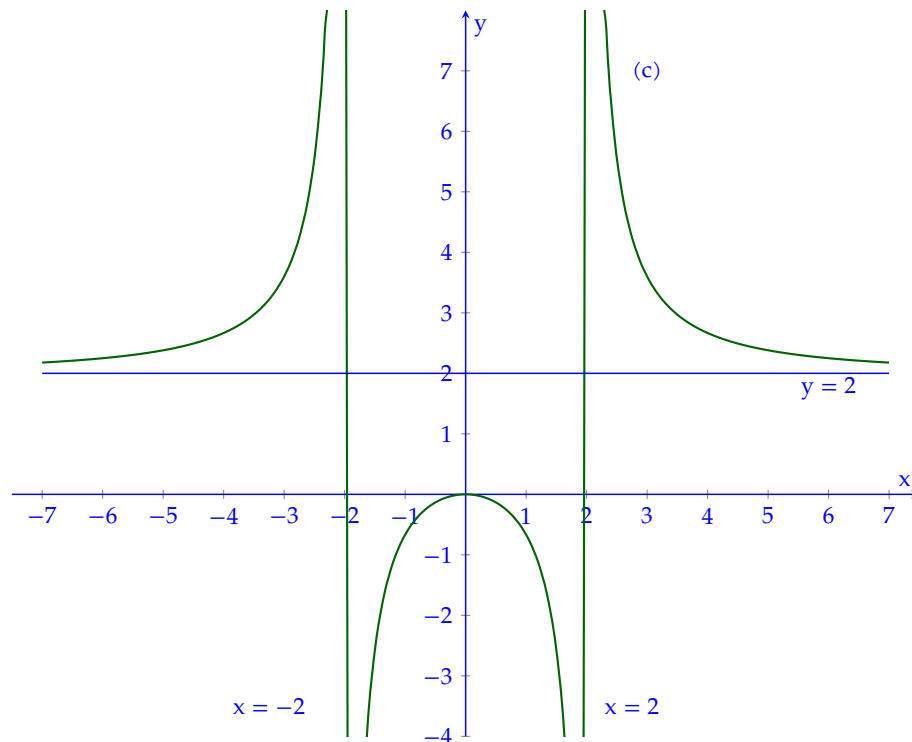
x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0 -	-	-

- ត្រង់ $x = 0$; $f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី - ទៅ + គេបាន f មានអតិបរមាធៀបមួយ គឺ $f(0) = \frac{2(0)^2}{0^2 - 4} = 0$

- តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0 -	-	-
$f(x)$	$2 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 2$		

គ. សង់នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ (o, i, j) ក្រាបតាង f



ក្រសួងអប់រំយុវជន និងកីឡា
 វិទ្យាល័យមេតូឌីស្តិកម្ពុជា
 វិទ្យាសាលាប្រចាំឆ្នាំទី១២
 ឈ្មោះ និងឯកសារលេខអនុវត្ត៖

លេខបន្ទប់៖
 លេខគុះ៖
 មណ្ឌលប្រឡង៖

សម័យបង្កើត៖ ១៩ សីហា ២០១៩

នាមត្រកូលនិងនាមខ្លួន៖

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖

ឯកសារលេខ៖

លេខសម្ងាត់៖

បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើសន្លឹកប្រឡងឡើយ។ សន្លឹកប្រឡងដែលមានសញ្ញាសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្យសុំឡើយ។

វិទ្យាសាលា៖ គណនីវិទ្យាល័យស្រីសុខ រយៈពេល៖ ៩០ នាទី ពិន្ទុ៖ ៧៥

លេខសម្ងាត់៖



សេចក្តីណែនាំ៖ ១. បេក្ខជនត្រូវគូសខ្ទេចនៅទំព័រទី២ ផ្នែកខាងលើដែលត្រូវកាត់ចេញ។
 ២. បេក្ខជនត្រូវសរសេរឆ្លើយនៃសំណួរបន្តនៅលើទំព័រទី២ ទី៣ និងទី៤។

វិទ្យាសាទី៣ (ចាក់ឌុបឆ្នាំ ២០១៩ ថ្នាក់សង្ឃឹម)

I. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងចង្កោមមានឃ្លីពណ៌សចំនួន៣ និងឃ្លីពណ៌ខៀវចំនួន៥។ គេចាប់យកឃ្លី២គ្រាប់ក្នុងពេលតែមួយចេញពីក្នុងចង្កោមដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

- ក. «គេចាប់បានឃ្លីពណ៌ខៀវទាំងពីរ»
- ខ. «គេចាប់បានឃ្លីមួយក្នុងចង្កោម»

II. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$

III. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. គណនា $I = \int_2^3 (3x^2 + 3x - 1) dx$

ខ. $f(x) = \frac{1 + 2x}{(x^2 - 4x) + (4 - x)}$ ។ បង្ហាញថា $f(x) = \frac{1}{1 - x} - \frac{3}{4 - x}$ ។ ចូរគណនា $J = \int_2^3 f(x) dx$ ។

IV. (១០ពិន្ទុ) គេមានប៉ារ៉ាបូលមួយមានកំពូលនៅត្រង់ចំណុច $O(0,0)$ និង កំពូល F ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេ។

- ក. រកសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូលនេះ បើគេដឹងថាវាកាត់តាមចំណុច $A(2,6)$ ។
- ខ. រកតម្លៃនៃ x បើ $B\left(x_1, \frac{3}{2}\right)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូលនេះ។ ចូរសង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ។

V. (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f ដែល $f(x) = \frac{x^2 - x - 3}{x + 1}$ និង គេតាងដោយ (C) ក្រាបនៃអនុគមន៍ f ។

- ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។
- ខ. បង្ហាញថា $f(x) = x - 2 - \frac{1}{x + 1}$ ។
- គ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y = x - 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។
- ឃ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃ f ។

មានទទួលបានប័ណ្ណបញ្ជីសិស្សស្រីសុខ ជាប្រភពព័ត៌មានស្តីពីសិស្សស្រីសុខ

I. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

ក. «គេចាប់បានឃ្លីពណ៌ខៀវទាំងពីរ» តាង A : «គេចាប់បានឃ្លីពណ៌ខៀវទាំងពីរ»

$$\text{តាមរូបមន្ត } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \quad \text{ដោយ } n(A) = C(5, 2) = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 1} = 10$$

$$n(S) = C(8, 2) = \frac{8!}{(8-2)!2!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6! \times 2 \times 1} = 28$$

$$\text{គេបាន } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14} \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{P(A) = \frac{5}{14}}$$

ខ. «គេចាប់បានឃ្លីមួយក្នុងមួយពណ៌» តាង B : «គេចាប់បានឃ្លីមួយក្នុងមួយពណ៌»

$$\text{តាមរូបមន្ត } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} \quad \text{ដោយ } n(S) = 28; \quad n(B) = C(3, 1) \times C(5, 1) = \frac{3 \times 2!}{2!1!} \times \frac{5 \times 4!}{4!1!} = 3 \times 5 = 15$$

$$\text{គេបាន } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{15}{28} \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{P(B) = \frac{15}{28}}$$

II. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2} = \frac{1+1}{1-2} = -2 \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = -2}$$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(\sqrt{x}-1)} \times \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1) = \sqrt{1}+1 = 2$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 2}$$

III. គណនាអាំងតេក្រាល៖

$$\text{ក. } I = \int_2^3 (3x^2 + 3x - 1) dx = \left[3 \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^2}{2} - x \right]_2^3 = 3^3 + 3 \frac{3^2}{2} - 3 - \left(2^3 + 3 \frac{2^2}{2} - 2 \right) = 27 + \frac{27}{2} - 3 - 8 - \frac{12}{2} + 2$$

$$= 18 + \frac{15}{2} = \frac{36+15}{2} = \frac{51}{2} \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{I = \frac{51}{2}}$$

$$\text{ខ. } f(x) = \frac{1+2x}{(x^2-4x)+(4-x)}; \text{ បង្ហាញថា } f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{3}{4-x}$$

$$\text{ដោយ } \frac{1}{1-x} - \frac{3}{4-x} = \frac{4-x-3(1-x)}{(1-x)(4-x)} = \frac{4-x-3+3x}{4-x-4x+x^2} = \frac{1+2x}{(x^2-4x)+(4-x)} = f(x)$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{3}{4-x}}$$

$$\text{គណនា } J = \int_2^3 f(x) dx$$

$$J = \int_2^3 \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{4-x} \right) dx = \left[-\ln|1-x| + 3\ln|4-x| \right]_2^3 = -\ln|1-3| + 3\ln|4-3| - (-\ln|1-2| + 3\ln|4-2|) \\ = -\ln 2 + 3\ln 1 + \ln 1 - 3\ln 2 = -4\ln 2$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{J = -4\ln 2}$$

IV. គេមានប៉ារ៉ាបូលមួយមានកំពូលនៅត្រង់ចំណុច $o(0,0)$ និង កំណុំ F ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដេនេ។

ក. រកសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល

ដោយ កំពូល $o(0,0)$ និង កំណុំ F ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដេនេ គេបាន អ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរ

គេបាន សមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

• កំពូល (h,k) គឺ កំពូល $o(0,0) \Rightarrow h=0, k=0$

• ប៉ារ៉ាបូលកាត់តាមចំណុច $A(2,6)$ គេបាន $(2-0)^2 = 4p(6-0) \Leftrightarrow 4 = 24p \Rightarrow p = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$

គេបាន សមីការប៉ារ៉ាបូលគឺ $x^2 = \frac{4}{16}y \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4}y$ ដូចនេះ: $\boxed{\text{ប៉ារ៉ាបូលមានសមីការ } x^2 = \frac{1}{4}y}$

ខ. រកតម្លៃនៃ x_1

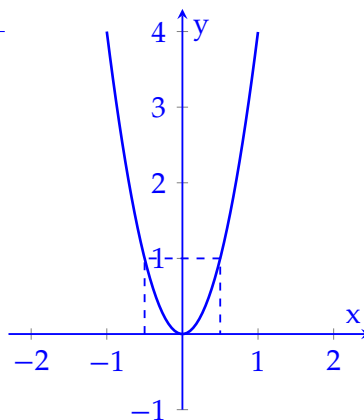
បើ $B(x_1, \frac{3}{2})$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូលនេះ គេបាន $x_1^2 = \frac{1}{4}(\frac{3}{2}) \Leftrightarrow x_1 = \pm\sqrt{\frac{3}{8}} \Leftrightarrow x_1 = \pm\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{8}}{8} \Leftrightarrow x_1 = \pm\frac{\sqrt{6}}{4}$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{x_1 = \pm\frac{\sqrt{6}}{4}}$$

សង់ប៉ារ៉ាបូល

តារាងតម្លៃលេខចំពោះ: $x^2 = \frac{1}{4}y$

x	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
y	1	1



V. ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

ដោយ $f(x) = \frac{x^2 - x - 3}{x+1}$; $f(x)$ មានន័យលុះត្រាតែ $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ } f \text{ គឺ } D_f = \mathbb{R} - \{-1\}}$

ខ. បង្ហាញថា $f(x) = x - 2 - \frac{1}{x+1}$

ដោយ $x - 2 - \frac{1}{x+1} = \frac{(x-2)(x+1) - 1}{x+1} = \frac{x^2 + x - 2x - 2 - 1}{x+1} = \frac{x^2 - x - 3}{x+1} = f(x)$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{f(x) = x - 2 - \frac{1}{x+1}}$$

គ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y = x - 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C)

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[x - 2 - \frac{1}{x+1} - (x - 2) \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-1}{x+1} = 0$$

ដូចនេះ: បន្ទាត់ $y = x - 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

ឃ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃ f

• ដេរីវេ

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2 - x - 3}{x+1} \right)' \\ &= \frac{(x^2 - x - 3)'(x+1) - (x+1)'(x^2 - x - 3)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(2x-1)(x+1) - (x^2 - x - 3)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x - 1 - x^2 + x + 3}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 = 0; \quad \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(1)2 = -4 < 0 \text{ សញ្ញាយកតាមមេគុណ a}$$

• តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+

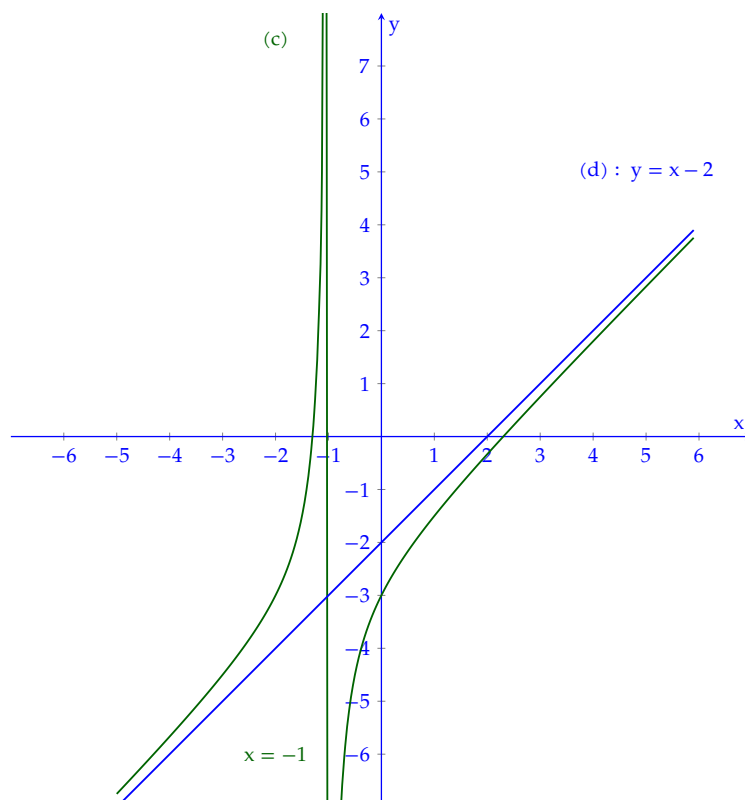
• តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+
f(x)	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

• សង់ក្រាប

• $C \cap (y'oy)$ គឺ $x = 0; \Rightarrow y = \frac{0^2 - 0 - 3}{0+1} = -3$

• $C \cap (x'ox)$ គឺ $y = 0 \Rightarrow x^2 - x - 3 = 0; \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-3) = 13 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$



ក្រសួងអប់រំយុវជន និងកីឡា
 វិទ្យាល័យមេតូឌីស្តិកម្ពុជា
 វិទ្យាសាស្ត្របច្ចេកទេស
 រដ្ឋាន និងបន្តការសិក្សា

លេខបន្ទប់៖
 លេខតុ៖
 មណ្ឌលប្រឡង៖

សម័យបណ្ណៈ ១៩ សីហា ២០១៩
 តាមត្រកូលនិងតាមខ្លួន៖
 ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖
 ឈ្មោះ៖

លេខសម្ងាត់៖

បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើសន្លឹកប្រឡងឡើយ។ សន្លឹកប្រឡងដែលមានសញ្ញាសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្យសូន្យ។

វិទ្យាសាស្ត្រ គណិតវិទ្យាថ្នាក់ស្ថាប័ន រយៈពេល៖ ៩០ នាទី ពិន្ទុ៖ ៧៥

លេខសម្ងាត់៖

ពិន្ទុសរុប

សេចក្តីណែនាំ៖ ១. បេក្ខជនត្រូវគូសខ្សែនៅជំពូកទី២ ផ្នែកខាងលើដែលត្រូវកាត់ចេញ។
 ២. បេក្ខជនត្រូវសរសេរឆ្លើយនៃសំណួរបន្តនៅលើជំពូកទី២ ទី៣ និងទី៤។

វិញ្ញាបនបត្រ (ចាក់ធុរឆ្នាំ ២០១៩ លើកទី២ ថ្នាក់ស្ថាប័ន)

I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖

ក. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 4x + 3}$

គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{x}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{-3x}$

ឃ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x + 2x - 2)$

II. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងអាងចង្ហើមត្រីមួយមានត្រីពណ៌ក្រហម៤ និងត្រីពណ៌ស៣។ គេចាប់ត្រី២មកដាក់ក្នុងអាងថ្មីដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

- ក. «ត្រីពណ៌ក្រហមទាំងពីរ»
- ខ. «ត្រីពណ៌សទាំងពីរ»
- គ. «ត្រីមួយក្នុងមួយពណ៌»

III. (២៥ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{(1-x)}$ ។

- ក. រកដែនកំណត់ $f(x)$ ។
- ខ. បង្ហាញថា $f(x) = -x - 1 + \frac{3}{x-1}$ ។
- គ. សិក្សាអថេរភាពនិង សង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ $f(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{(1-x)}$ ។

IV. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

- ក. $I = \int_1^3 (2x^2 - 3x + 1) dx$
- ខ. $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-5x+4}$ ។ បង្ហាញថា $f(x) = \frac{-1}{x-1} + \frac{3}{x-4}$ ។ រួចគណនា $J = \int_2^3 f(x) dx$ ។
- គ. គេមានអនុគមន៍ $f(x) = x \ln x$ ។ គណនាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$ នៅលើចន្លោះ $[1, e]$ ។ ទាញរកអាំងតេក្រាល $K = \int_1^e \ln x dx$ ។

V. (១០ពិន្ទុ) រកសមីការស្តង់ដារនៃអេលីបដែលមានកំពូលទាំងពីរជាចំណុច (4,0) និង (-4,0) និង មានកំណុំ មួយនៅក្រុងចំណុច (3,0) រួចសង់អេលីបនេះ។

I. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 4x + 3}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x+3)}{(x+1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x+1} = \frac{-3+3}{-3+1} = \frac{0}{-2} = 0$ ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 4x + 3} = 0$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{-3x}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{-3} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x = \frac{1}{-3}(1)(0) = 0$ ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{-3x} = 0$

គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{x}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x})}{x} \times \frac{(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})}{(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+x - (2-x)}{x(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})}$
 $= \frac{2}{\sqrt{2+0} + \sqrt{2-0}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x})}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ឃ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x + 2x - 2) = 2(+\infty) + 2(+\infty) - 2 = +\infty$ ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x + 2x - 2) = +\infty$

II. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

ក. «ត្រីពណ៌ក្រហមទាំងពីរ» តាង A : «ត្រីពណ៌ក្រហមទាំងពីរ»

តាមរូបមន្ត $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ ដោយ $n(A) = C(4, 2) = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2 \times 1} = 6$
 $n(S) = C(7, 2) = \frac{7!}{(7-2)!2!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5! \times 2 \times 1} = 21$

គេបាន $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$ ដូចនេះ: $P(A) = \frac{2}{7}$

ខ. «ត្រីពណ៌សទាំងពីរ» តាង B : «ត្រីពណ៌សទាំងពីរ»

តាមរូបមន្ត $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$ ដោយ $n(B) = C(3, 2) = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3 \times 2!}{1! \times 2!} = 3$; $n(S) = 21$

គេបាន $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$ ដូចនេះ: $P(B) = \frac{1}{7}$

គ. «ត្រីមួយក្នុងមួយពណ៌» តាង C : «ត្រីមួយក្នុងមួយពណ៌»

តាមរូបមន្ត $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)}$ ដោយ $n(C) = C(4, 1) \times C(3, 1) = \frac{4 \times 3!}{3!1!} \times \frac{3 \times 2!}{2!1!} = 4 \times 3 = 12$; $n(S) = 21$

គេបាន $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$ ដូចនេះ: $P(C) = \frac{4}{7}$

III. ក. រកដែនកំណត់ $f(x)$; $f(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{1-x}$

$f(x)$ មានន័យលុះត្រាតែ $1-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ ដូចនេះ: ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f គឺ $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

8. បង្ហាញថា $f(x) = -x - 1 + \frac{3}{x-1}$

ដោយ $-x - 1 + \frac{3}{x-1} = \frac{(-x-1)(x-1)+3}{x-1} = \frac{-x^2+x-x+1+3}{-(1-x)} = \frac{-(x^2-4)}{-(1-x)} = \frac{(x+2)(x-2)}{1-x} = f(x)$

ដូចនេះ $f(x) = -x - 1 + \frac{3}{x-1}$

គ. សិក្សាអថេរភាពនិង សង់ក្រាប C

• ដេរីវេ

$$f'(x) = \left(\frac{(x+2)(x-2)}{1-x} \right)' = \left(\frac{x^2-4}{1-x} \right)' = \frac{(x^2-4)'(1-x) - (1-x)'(x^2-4)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{2x(1-x) + (x^2-4)}{(1-x)^2} = \frac{2x-2x^2+x^2-4}{(1-x)^2} = \frac{-x^2+2x-4}{(1-x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x - 4 = 0 \quad ; \Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(-1)(-4) = 4 - 16 = -12 < 0$$

គេបាន $f'(x)$ មានសញ្ញាដូចមេគុណ a

• តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-

• តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-
f(x)	$+\infty$ \searrow $-\infty$	$+\infty$ \searrow $-\infty$	$-\infty$

• លីមីត

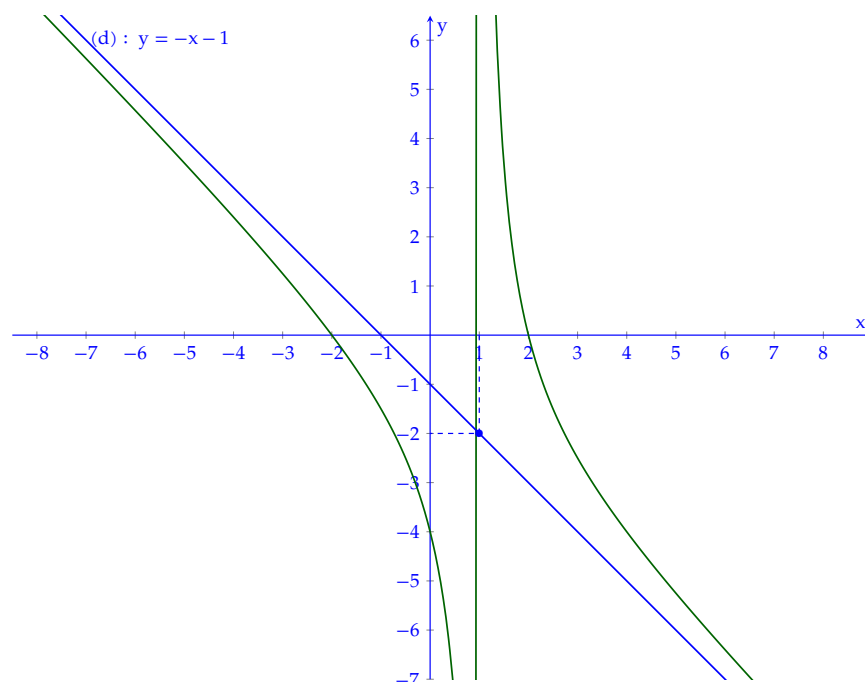
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-4}{1-x} = \mp\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-4}{1-x} = \pm\infty$$

• សង់ក្រាប

◦ ក្រាប(c) កាត់អ័ក្សអរដោនេ ពេល $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = \frac{(0+2)(0-2)}{1-0} = -4$

◦ ក្រាប (c) កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីស ពេល $y = 0 \Leftrightarrow 0 = \frac{(x+2)(x-2)}{(1-x)} \Leftrightarrow x = -2; x = 2$



IV. គណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍៖

$$\begin{aligned} \text{៧. } I &= \int_1^3 (2x^2 - 3x + 1) dx = \left[2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + x \right]_1^3 = 2\frac{3^3}{3} - 3\frac{3^2}{2} + 3 - \left(2\frac{1^3}{3} - 3\frac{1^2}{2} + 1 \right) = 18 - \frac{27}{2} + 3 - \frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 1 \\ &= 20 - 12 - \frac{2}{3} = \frac{22}{3} \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{I = \frac{22}{3}} \end{aligned}$$

8. $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-5x+4}$; បង្ហាញថា $f(x) = \frac{-1}{x-1} + \frac{3}{x-4}$

ដោយ $\frac{-1}{x-1} + \frac{3}{x-4} = \frac{-(x-4) + 3(x-1)}{(x-1)(x-4)} = \frac{-x+4+3x-3}{x^2-5x+4} = \frac{2x+1}{x^2-5x+4} = f(x)$

ដូចនេះ: $\boxed{f(x) = \frac{-1}{x-1} + \frac{3}{x-4}}$

គណនា $J = \int_2^3 f(x) dx$

$$\begin{aligned} J &= \int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{3}{x-4} \right) dx = \left[-\ln|x-1| + 3\ln|x-4| \right]_2^3 \\ &= -\ln|3-1| + 3\ln|3-4| - (-\ln|2-1| + 3\ln|2-4|) = -\ln 2 + 3\ln 1 + \ln 1 - 3\ln 2 = -4\ln 2 \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\boxed{J = -4\ln 2}$

គ. គេមានអនុគមន៍ $f(x) = x \ln x$ គណនាដេរីវេ $f'(x)$

$f'(x) = (x \ln x)' = x' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + x \left(\frac{1}{x} \right) = \ln x + 1$ ដូចនេះ: $\boxed{f'(x) = \ln x + 1}$

ទាញរកអាំងតេក្រាល $K = \int_1^e \ln x dx$

$$\begin{aligned} K &= \int_1^e \ln x dx = \int_1^e (\ln x + 1 - 1) dx = \int_1^e (\ln x + 1) dx - \int_1^e 1 dx = \int_1^e (\ln x)' dx - [x]_1^e \\ &= [\ln x]_1^e - [x]_1^e = \ln e - \ln 1 - (e - 1) = 2 - e \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{K = 2 - e} \end{aligned}$$

V. រកសមីការស្តង់ដារនៃអេលីប

ដោយ កំពូល កំណុំមានអរដោនេថេរ គេបាន អ័ក្សទទឹងស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីស នោះ សមីការស្តង់ដារ នៃអេលីបគឺ

• $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

• សង់អេលីប ផ្ចិតនៃអេលីបគឺ $I(0,0)$

• កំពូល $V_1(h+a, k)$ គឺ $(4, 0) \Rightarrow h+a=4; \quad k=0$

• កំពូល $V_2(h-a, k)$ គឺ $(-4, 0) \Rightarrow h-a=-4; \quad k=0$

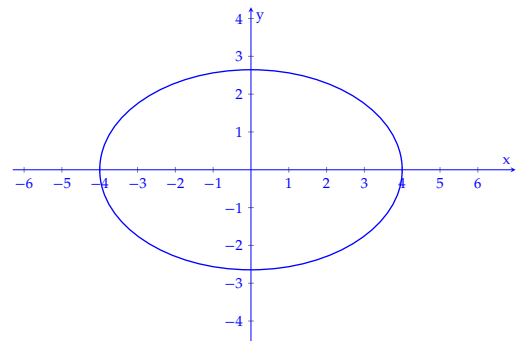
$$\begin{cases} h+a=4 \\ h-a=-4 \end{cases}$$

$2h = 0 \Rightarrow h=0; \quad a=4$

• កំណុំ $F(h+c, 0)$ គឺ $(3, 0) \Rightarrow h+c=3 \Rightarrow c=3$

• $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{អេលីបមានសមីការ } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1}$



មានច្បាប់បង្រៀនគ្នា ជាគ្រូមតិសេសសន្តិសុខមេរៀន

ក្រសួងអប់រំយុវជន និងកីឡា
 វិទ្យាល័យមេតូឌីស្តិកម្ពុជា
 វិទ្យាសាស្ត្របច្ចេកទេស
 រដ្ឋាន និងបន្តការសិក្សា

លេខបន្ទប់៖
 លេខគុះ៖
 មណ្ឌលប្រឡង៖

សម័យបណ្ណៈ ១៩ សីហា ២០១៩

នាមត្រកូលនិងនាមខ្លួន៖

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖

ឈ្មោះ៖

លេខសម្ងាត់៖

បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើសន្លឹកប្រឡងឡើយ។ សន្លឹកប្រឡងដែលមានសញ្ញាសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្យសុំ។

វិទ្យាសាស្ត្រ គណិតវិទ្យាឆ្នាំទី១ រយៈពេល៖ ៩០ នាទី ពិន្ទុ៖ ៧៥

លេខសម្ងាត់៖

ពិន្ទុសរុប

សេចក្តីណែនាំ៖ ១. បេក្ខជនត្រូវគូសខ្សែនៅជំពូកទី២ ផ្នែកខាងលើដែលត្រូវកាត់ចេញ។
 ២. បេក្ខជនត្រូវសរសេរចម្លើយនៃសំណួរបន្តនៅលើជំពូកទី២ ទី៣ និងទី៤។

វិទ្យាសាស្ត្រ (ពាក់កណ្តាល ២០១៩ លើកទី១ ថ្នាក់ស័ក្តិសិក្សា)

I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖

ក. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x^2 - 3)(1 - x)}{(5 + 2x)(2 - x^2)}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1}$

គ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+1}{x-1}$

II. (១៥ពិន្ទុ) នៅក្នុងធុងមួយគេមានបូលក្រហម៤ បូលស្វាយ៣ និងបូលខៀវ១។ គេចាប់យកបូល៣ក្នុងពេលតែមួយចេញពីធុងដោយចៃដន្យ។

- ក. រកប្រូបាបដែល «គេចាប់បានបូលក្រហមពីរ និងមួយទៀតមិនក្រហម»
- ខ. រកប្រូបាបដែល «គេចាប់បានបូលក្រហមទាំងបី»
- គ. រកប្រូបាបដែល «គេចាប់បានយ៉ាងតិចបូលក្រហមពីរ»

III. (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ \mathbb{R} ដោយ $f(x) = \frac{1}{1+e^x} + \frac{2}{9}x$ និង C តាងក្រាបរបស់ f ។

1. អនុគមន៍ g កំណត់លើ \mathbb{R} ដោយ $g(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$ ។

ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $g(x) = (2e^x - 1)(e^x - 2)$ ។

ខ. ទាញយកតាមតម្លៃនៃ x ចំពោះសញ្ញានៃ $g(x)$ ។

2. ក. រក $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ។

ខ. អនុគមន៍ f មានដេរីវេ f' ។ បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $f'(x)$ និង $g(x)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា។

គ. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ \mathbb{R} ។

IV. (១៥ពិន្ទុ)

ក. គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_1^5 (x^2 + 2x - 3) dx$ ។

ខ. បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិត $x; x \neq 1$ គេបាន $\frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1} = 2x - 1 + \frac{1}{x - 1}$ ។ រួចទាញរក $I = \int_2^3 \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1} dx$ ។

មានបន្ថែមប្រើប្រាស់ប្រព័ន្ធគណិតវិទ្យា

I. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x^2 - 3)(1 - x)}{(5 + 2x)(2 - x^2)}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$)

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \cdot x \left(2 - \frac{3}{x^2}\right) \left(\frac{1}{x} - 1\right)}{x \cdot x^2 \left(\frac{5}{x} + 2\right) \left(\frac{2}{x^2} - 1\right)} = \frac{(2 - 0)(0 - 1)}{(0 + 2)(0 - 1)} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x^2 - 3)(1 - x)}{(5 + 2x)(2 - x^2)} = 1}$$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2 - \sqrt{x+3})(2 + \sqrt{x+3})}{(x^2 - 1)(2 + \sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 - (x+3)}{(x^2 - 1)(2 + \sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)(2 + \sqrt{x+3})}$$

$$= \frac{-1}{(1+1)(2 + \sqrt{1+3})} = \frac{-1}{2(4)} = -\frac{1}{8} \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} = -\frac{1}{8}}$$

គ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{2}{x-1}\right) = \ln(1+0) = \ln 1 = 0$ ដូចនេះ: $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+1}{x-1} = 0}$

II. ក. រកប្រូបាបដែល «គេចាប់បានប៊ូលក្រហមពីរ និងមួយទៀតមិនក្រហម»

តាង A : «គេចាប់បានប៊ូលក្រហមពីរ និងមួយទៀតមិនក្រហម»

តាមរូបមន្ត $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ ដោយ $n(A) = C(4, 2) \times C(3, 1) + C(4, 2) \times C(1, 1) = \frac{4!}{2!2!} \times \frac{3!}{2!1!} + \frac{4!}{2!2!} \times \frac{1!}{0!1!}$

$$= \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!2 \times 1} \times \frac{3 \times 2!}{2!} + \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!2 \times 1} \times 1 = 6 \times 3 + 6 = 24$$

$$n(S) = C(8, 3) = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!3 \times 2 \times 1} = 56$$

គេបាន $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$ ដូចនេះ: $\boxed{P(A) = \frac{3}{7}}$

ខ. រកប្រូបាបដែល «គេចាប់បានប៊ូលក្រហមទាំងបី» តាង B : «គេចាប់បានប៊ូលក្រហមទាំងបី»

តាមរូបមន្ត $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$ ដោយ $n(B) = C(4, 3) = \frac{4!}{1!3!} = \frac{4 \times 3!}{3!} = 4$; $n(S) = 56$

គេបាន $P(B) = \frac{4}{56} = \frac{1}{14}$ ដូចនេះ: $\boxed{P(B) = \frac{1}{14}}$

គ. រកប្រូបាបដែល «គេចាប់បានយ៉ាងតិចប៊ូលក្រហមពីរ» តាង C : «គេចាប់បានយ៉ាងតិចប៊ូលក្រហមពីរ»

តាមរូបមន្ត $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)}$ ដោយ $n(C) = C(4, 2) \times C(3, 1) + C(4, 2) \times C(1, 1) + C(4, 3) = 24 + 4 = 28$

$$n(S) = 56$$

គេបាន $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{28}{56} = \frac{1}{2}$ ដូចនេះ: $\boxed{P(C) = \frac{1}{2}}$

III. 1. ក. អនុគមន៍ g កំណត់លើ \mathbb{R} ដោយ $g(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $g(x) = (2e^x - 1)(e^x - 2)$

ដោយ $(2e^x - 1)(e^x - 2) = 2e^x \cdot e^x - 4e^x - e^x + 2 = 2e^{2x} - 5e^x + 2 = g(x)$

ដូចនេះ: $\boxed{g(x) = (2e^x - 1)(e^x - 2)}$

8. ទាញយកតាមតម្លៃនៃ x ចំពោះសញ្ញានៃ $g(x)$

$$\text{បើ } g(x) = 0 \Leftrightarrow (2e^x - 1)(e^x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\ln 2 \\ e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2 \end{cases}$$

តារាងសញ្ញា $g(x)$

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$\ln 2$	$+\infty$	
g(x)	+	0	-	0	+

ដូចនេះ: $g(x) > 0$ ពេល $x \in (-\infty, -\ln 2) \cup (\ln 2, +\infty)$; $g(x) < 0$ ពេល $x \in (-\ln 2, \ln 2)$

2. ក. រក $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+e^x} + \frac{2}{9}x \right) = 0 + \frac{2}{9}(+\infty) \quad \text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{1+e^x} + \frac{2}{9}x \right) = \frac{1}{1+0} + \frac{2}{9}(-\infty) = -\infty \quad \text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

8. អនុគមន៍ f មានដេរីវេ f' បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $f'(x)$ និង $g(x)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{1+e^x} + \frac{2}{9}x \right)' = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2} + \frac{2}{9} = \frac{-9e^x + 2(1+e^x)^2}{9(1+e^x)^2} = \frac{-9e^x + 2 + 4e^x + 2e^{2x}}{9(1+e^x)^2} \\ &= \frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{9(1+e^x)^2} = \frac{g(x)}{9(1+e^x)^2} \quad \text{ដោយ } 9(1+e^x)^2 > 0; \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{គេបាន } f'(x) \text{ មានសញ្ញាតាម } g(x) \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $f'(x)$ និង $g(x)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា

ក. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ \mathbb{R}

ដោយ $f'(x)$ និង $g(x)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា គេបាន តារាងសញ្ញា $f'(x)$ គឺ

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$\ln 2$	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	0	+

- ត្រង់ $x = -\ln 2$; $f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ គេបាន f មានអតិបរមាធៀបមួយគឺ

$$f(-\ln 2) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} - \frac{2\ln 2}{9} = \frac{2}{3} - \frac{2\ln 2}{9} = \frac{6-\ln 4}{9}$$

- ត្រង់ $x = \ln 2$; $f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ គេបាន f មានអប្បបរមាធៀបមួយគឺ

$$f(\ln 2) = \frac{1}{1+2} + \frac{2\ln 2}{9} = \frac{1}{3} + \frac{2\ln 2}{9} = \frac{3+\ln 4}{9}$$

តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$\ln 2$	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	$-\infty$	$\frac{6-\ln 4}{9}$	$\frac{3+\ln 4}{9}$	$+\infty$	

ក្រសួងអប់រំយុវជន និងកីឡា
 វិទ្យាល័យបេតិកភណ្ឌប្រាសាទ
 វិទ្យាសាស្ត្របច្ចេកទេស
 ឈ្មោះ និងឯកសារលេខអនុវត្ត៖

លេខបន្ទប់៖
 លេខគុះ៖
 មណ្ឌលប្រឡង៖

សម័យបច្ចុប្បន្ន៖ ១៩ សីហា ២០១៩

នាមត្រកូលនិងនាមខ្លួន៖

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖

ឯកសារលេខ៖

លេខសម្ងាត់៖

បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើសន្លឹកប្រឡងឡើយ។ សន្លឹកប្រឡងដែលមានសញ្ញាសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្ទុសូន្យ។

វិទ្យាសាស្ត្រ គណិតវិទ្យាឆ្នាំទី១ រយៈពេល៖ ៩០ នាទី ពិន្ទុ៖ ៧៥

លេខសម្ងាត់៖



សេចក្តីណែនាំ៖ ១. បេក្ខជនត្រូវគូសខ្ទែលនៅទំព័រទី២ ផ្នែកខាងលើដែលត្រូវកាត់ចេញ។
 ២. បេក្ខជនត្រូវសរសេរចម្លើយនៃសំណួរបន្តនៅលើទំព័រទី២ ទី៣ និងទី៤។

វិទ្យាសាស្ត្រ

I. (១០ពិន្ទុ) ចូរគណនាតម្លៃនៃលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$

គ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{2x + 1}$

II. (១០ពិន្ទុ) ប្រអប់មួយមានឃ្លីក្រហមចំនួន ៦គ្រាប់ និងឃ្លីស្កចំនួន ៤គ្រាប់។ គេចាប់យកឃ្លី ៤ ចេញពីប្រអប់ដោយចៃដន្យ។ ចូររកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

- A: «ចាប់បានឃ្លីពណ៌សទាំង ៤ គ្រាប់ »
- B: «ចាប់បានឃ្លីពណ៌ក្រហមទាំង ៤ គ្រាប់»
- C: «ចាប់បានឃ្លីពណ៌ស ៣ និង ឃ្លីពណ៌ក្រហម ១ »

III. (១០ ពិន្ទុ) ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $I = \int_1^2 (x^2 - 2x + 1) dx$

ខ. $J = \int_0^1 (x^3 + e^x) dx$

គ. $K = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx$

IV. (១៥ ពិន្ទុ) គេមានសមីការ $4x^2 + 9y^2 = 36$ ។

- a. ចូរបង្ហាញថាសមីការខាងលើជាសមីការអេលីប។
- b. ចូររកប្រវែងអ័ក្សតូច ប្រវែងអ័ក្សធំ ចូររកកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ និង កូអរដោនេនៃកំណុំទាំងពីរ។
- c. ចូរសង់អេលីប ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ។

V. (៣០ ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f មួយ ដែលកំណត់ដោយ $y = f(x) = \frac{x^2 + 3x - 3}{x - 1}$ មានក្រាបតំណាង (C)។

- ក. ចូររកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។
- ខ. ចូរគណនា $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ។
- គ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង សមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត។
- ឃ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ ។
- ង. សង់តារាងអថេរភាព និង សង់ក្រាប(C) ។

មានបញ្ជីបេក្ខជនប្រឡងនៅក្រុមប្រឹក្សាសិស្សសម្បជញ្ញៈ

I. គណនាតម្លៃនៃលីមីត៖

៧. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(x^2 - 4)(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2 - 2^2}{(x^2 - 2^2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(x + 2)(\sqrt{x+2} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x + 2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \frac{1}{(2 + 2)(\sqrt{2+2} + 2)} = \frac{1}{4(4)} = \frac{1}{16}$$

ដូចនេះ: $\boxed{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4} = \frac{1}{16}}$

៨. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x^2 - 1^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x+1} = \frac{1-2}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ: $\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = -\frac{1}{2}}$

៩. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{2x + 1}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$)

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x \left(2 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{+\infty (3 - 0 + 0)}{2 + 0} = +\infty$$

ដូចនេះ: $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{2x + 1} = +\infty}$

II. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

A : «ចាប់បានឃ្លីពណ៌សទាំង 4 គ្រាប់ »

តាមរូបមន្ត $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ ដោយ $n(A) = C(4,4) = \frac{4!}{(4-4)!4!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1$

$$n(S) = C(10,4) = \frac{10!}{(10-4)!4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$$

គេបាន $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{210}$ ដូចនេះ: $\boxed{P(A) = \frac{1}{210}}$

B : «ចាប់បានឃ្លីពណ៌ក្រហមទាំង 4 គ្រាប់»

តាមរូបមន្ត $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$ ដោយ $n(B) = C(6,4) = \frac{6!}{(6-4)!4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2!4!} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$

$$n(S) = 210$$

គេបាន $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{15}{210} = \frac{3 \times 5}{3 \times 7 \times 5 \times 2} = \frac{1}{14}$ ដូចនេះ: $\boxed{P(B) = \frac{1}{14}}$

C : «ចាប់បានឃ្លីពណ៌ស 3 និង ឃ្លីពណ៌ក្រហម 1 »

តាមរូបមន្ត $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)}$ ដោយ $n(C) = C(4,3) \times C(6,1) = \frac{4!}{1!3!} \times \frac{6!}{5!1!} = \frac{4 \times 3!}{3!} \times \frac{6 \times 5!}{5!} = 4 \times 6 = 24$

$$n(S) = 210$$

គេបាន $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{24}{210} = \frac{2 \times 3 \times 4}{3 \times 7 \times 5 \times 2} = \frac{4}{35}$ ដូចនេះ $P(C) = \frac{4}{35}$

III. គណនាអាំងតេក្រាល៖

ក. $I = \int_1^2 (x^2 - 2x + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + x \right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - 2^2 + 2 - \left(\frac{1^3}{3} - 1^2 + 1 \right) = \frac{8}{3} - 4 + 2 - \frac{1}{3}$

$= \frac{7}{3} - 2 = \frac{7-6}{3} = \frac{1}{3}$ ដូចនេះ $I = \frac{1}{3}$

ខ. $J = \int_0^1 (x^3 + e^x) dx = \left[\frac{x^4}{4} + e^x \right]_0^1 = \frac{1^4}{4} + e^1 - \left(\frac{0^4}{4} + e^0 \right) = \frac{1}{4} + e - 1 = \frac{1-4}{4} + e = -\frac{3}{4} + e$

ដូចនេះ $J = -\frac{3}{4} + e$

គ. $K = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - 1 \right) dx = \left[\ln|x| - x \right]_1^e = \ln e - e - (\ln 1 - 1) = 1 - e - 0 + 1 = 2 - e$ ដូចនេះ $K = 2 - e$

IV. a. បង្ហាញថាសមីការ $4x^2 + 9y^2 = 36$ ជាសមីការអេលីប

$$\begin{aligned} 4x^2 + 9y^2 = 36 &\Leftrightarrow \frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = \frac{36}{36} \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-0)^2}{3^2} + \frac{(y-0)^2}{2^2} = 1 \quad \text{ជាសមីការអេលីប មានផ្ចិត}(0,0) \end{aligned}$$

ដូចនេះ សមីការ $4x^2 + 9y^2 = 36$ ជាសមីការអេលីប

b. រកប្រវែងអ័ក្សតូច ប្រវែងអ័ក្សធំ រកកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ និង កូអរដោនេនៃកំណុំទាំងពីរ ដោយ សមីការអេលីបគឺ $\frac{(x-0)^2}{3^2} + \frac{(y-0)^2}{2^2} = 1$ គេបាន

☞ អ័ក្សធំជាអ័ក្សដេក

☞ $h = 0; k = 0; \quad a = 3; b = 2 \quad ; c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$

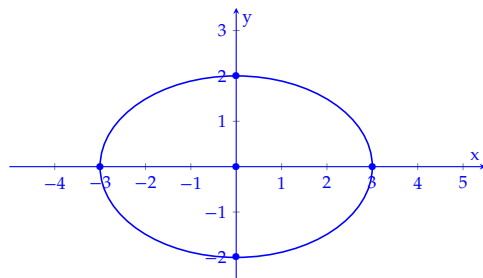
• ប្រវែងអ័ក្សតូច $= 2b = 2(2) = 4$

• ប្រវែងអ័ក្សធំ $= 2a = 2(3) = 6$

• កំពូល $V_1(h-a, k); V_2(h+a, k) \Rightarrow V_1(-3, 0); V_2(3, 0)$

• កំណុំ $F_1(h-c, k); F_2(h+c, k) \Rightarrow F_1(-\sqrt{5}, 0); F_2(\sqrt{5}, 0)$

c. សង់អេលីប ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ



V. ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

ដោយ $y = f(x) = \frac{x^2 + 3x - 3}{x - 1}$ គេបាន $f(x)$ មានន័យលុះត្រាតែ $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f គឺ $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

៨. គណនា $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \pm\infty \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 3}{x - 1} = \pm\infty \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \pm\infty}$$

ក. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង សមីការអាស៊ីមតូតទ្រូត

• ដោយ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \pm\infty$ ដូចនេះ: $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x = 1 \text{ ជាសមីការអាស៊ីមតូតឈរ}}$

• ដោយ $y = f(x) = \frac{x^2 + 3x - 3}{x - 1} = x + 4 + \frac{1}{x - 1}$ គេបាន $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x - 1} = 0$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{បន្ទាត់ } y = x + 4 \text{ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រូត}}$

ឃ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 + 3x - 3}{x - 1} \right)' = \frac{(x^2 + 3x - 3)'(x - 1) - (x - 1)'(x^2 + 3x - 3)}{(x - 1)^2} = \frac{(2x + 3)(x - 1) - (x^2 + 3x - 3)}{(x - 1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x + 3x - 3 - x^2 - 3x + 3}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

តារាងសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	-	0	+

បរមាជ្រៀប

- ត្រង់ $x = 0$; $f'(x) = 0$ ប្តូរសញ្ញាពី + ទៅ - គេបាន f មានអតិបរមាជ្រៀបមួយ គឺ $f(0) = \frac{0^2 + 3(0) - 3}{0 - 1} = 3$
- ត្រង់ $x = 2$; $f'(x) = 0$ ប្តូរសញ្ញាពី - ទៅ + គេបាន f មានអប្បបរមាជ្រៀបមួយ គឺ $f(2) = \frac{2^2 + 3(2) - 3}{2 - 1} = 7$

ង. សង់តារាងអថេរភាព និង សង់ក្រាប(C)

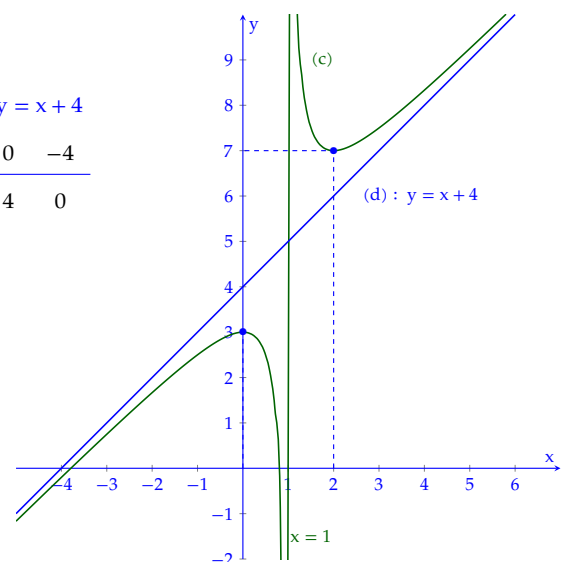
• តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-	0	+		
$f(x)$	$-\infty$		3		$+\infty$	7		$+\infty$

• ក្រាប C

(d) : $y = x + 4$

x	0	-4
y	4	0



ត្រូវស្គាល់ប្រភេទបញ្ហា និងកម្រិត
 បញ្ហាដែលប្រើប្រាស់ប្រភេទបញ្ហា
 បញ្ហាស្រដៀងគ្នាដែលបានប្រើប្រាស់
 ឈ្មោះ និងប្រភេទបញ្ហាដែលបានប្រើប្រាស់

លេខបញ្ហា៖
 លេខកុះ៖
 បញ្ហាដែលបានប្រើប្រាស់៖

សម័យបច្ចុប្បន្ន៖ ១៩ សីហា ២០១៩

នាមត្រកូលនិងនាមខ្លួន៖

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖

ឈ្មោះប្រពន្ធ៖

លេខសម្ងាត់៖

បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើសន្លឹកប្រឡងឡើយ។ សន្លឹកប្រឡងដែលមានសញ្ញាសម្គាល់នឹងត្រូវបានទទួលបានពីស្តីបន្ទុក។

បញ្ហាស្រដៀងគ្នា៖ គណិតវិទ្យាប្រភេទបញ្ហា រយៈពេល៖ ៩០ នាទី ពិន្ទុ៖ ៧៥

លេខសម្ងាត់៖

ពិន្ទុសរុប

សេចក្តីណែនាំ៖ ១. បេក្ខជនត្រូវតែស្នើសុំឲ្យបានត្រឹមត្រូវ ផ្នែកខាងលើដែលត្រូវកាត់ចេញ។
 ២. បេក្ខជនត្រូវសរសេរឡើងវិញនូវចម្លើយដែលបានស្នើសុំឲ្យបានត្រឹមត្រូវ ឆ្លើយតប និងឆ្លើយតប។

វិញ្ញាសាទី៧

I. (១០ពិន្ទុ) ចូរគណនាតម្លៃនៃលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x + 2} - 2}$

គ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 1}$

II. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងចង្កោមមានបូលខៀវចំនួន ៣ និងបូលពណ៌ខ្មៅចំនួន ៥។ គេចាប់យកបូល ២ ចេញពីចង្កោមដោយចៃដន្យ។ ចូររកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

ក. « គេចាប់បានបូលពណ៌ខៀវទាំងអស់ »

ខ. « គេចាប់បានបូលពណ៌ខ្មៅទាំងអស់ »

គ. « គេចាប់បានបូលមួយក្នុងចង្កោម »

III. (១០ពិន្ទុ) ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $I = \int_1^3 x^2 dx$

ខ. $J = \int_1^4 (2x^2 - 4x + 4) dx$

គ. $K = \int_1^3 \left(x^2 + \frac{1}{x} - e^x \right) dx$

IV. (១៥ពិន្ទុ) គេមានសមីការ $16x^2 + 9y^2 = 144$ ។

ក. បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប។

ខ. ចូររកប្រវែងអ័ក្សធំ ប្រវែងអ័ក្សតូច កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ និងកូអរដោនេនៃកំណុំទាំងពីរ។

គ. ចូរសង់អេលីប។

V. (៣០ពិន្ទុ) អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y = f(x) = \frac{x^2 - 3x - 3}{x - 2}$ មានក្រាបកំណាង (C) ។

ក. ចូររកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

ខ. ចូរគណនា $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ។ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

គ. ចូរបង្ហាញថា $f(x) = x - 1 + \frac{-5}{x - 2}$ ។ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត។

ឃ. សិក្សាអថេរភាព សង់តារាងអថេរភាព និង សង់ក្រាប(C)។

មានបញ្ហាប្រើប្រាស់ប្រព័ន្ធគណិតវិទ្យា ជាពិសេសគឺស្តីពីប្រភេទបញ្ហា

I. គណនាតម្លៃនៃលីមីត៖

ក. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)(\sqrt{x} + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1)(\sqrt{x} + 1) = (1 + 1)(\sqrt{1} + 1) = 4$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = 4$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x + 2} - 2}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^3 - 2^3)(\sqrt{x + 2} + 2)}{(\sqrt{x + 2} - 2)(\sqrt{x + 2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 2^2)(\sqrt{x + 2} + 2)}{x + 2 - 2^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)(\sqrt{x + 2} + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4)(\sqrt{x + 2} + 2) = (2^2 + 2(2) + 4)(\sqrt{2 + 2} + 2) \\ &= 12(4) = 48 \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x + 2} - 2} = 48$

គ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 1}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 5)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 5) = 1 + 5 = 6$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 1} = 6$

II. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

ក. « គេចាប់បានប៊ូលពណ៌ខៀវទាំងអស់ » តាង A : « គេចាប់បានប៊ូលពណ៌ខៀវទាំងអស់ »

តាមរូបមន្ត $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ ដោយ $n(A) = C(3, 2) = \frac{3!}{(3 - 2)!2!} = \frac{3 \times 2!}{1!2!} = \frac{3}{1} = 3$

$$n(S) = C(8, 2) = \frac{8!}{6!2!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6! \times 2 \times 1} = 28$$

គេបាន $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{28}$ ដូចនេះ: $P(A) = \frac{3}{28}$

ខ. « គេចាប់បានប៊ូលពណ៌ខ្មៅទាំងអស់ » តាង B : « គេចាប់បានប៊ូលពណ៌ខ្មៅទាំងអស់ »

តាមរូបមន្ត $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$ ដោយ $n(B) = C(5, 2) = \frac{5!}{(5 - 2)!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!2 \times 1} = 10$; $n(S) = 28$

គេបាន $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$ ដូចនេះ: $P(B) = \frac{5}{14}$

គ. « គេចាប់បានប៊ូលមួយក្នុងមួយពណ៌ » តាង C : « គេចាប់បានប៊ូលមួយក្នុងមួយពណ៌ »

តាមរូបមន្ត $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)}$ ដោយ $n(C) = C(3, 1) \times C(5, 1) = \frac{3!}{2!1!} \times \frac{5!}{4!1!} = \frac{3 \times 2!}{2!} \times \frac{5 \times 4!}{4!} = 3 \times 5 = 15$

$$n(S) = 28$$

គេបាន $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{15}{28}$ ដូចនេះ: $P(C) = \frac{15}{28}$

III. គណនាអាំងតេក្រាល៖

ក. $I = \int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3}$ ដូចនេះ: $\int_1^3 x^2 dx = \frac{26}{3}$

ខ. $J = \int_1^4 (2x^2 - 4x + 4) dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 4x \right]_1^4 = \frac{2(4)^3}{3} - 2(4)^2 + 4(4) - \left(\frac{2(1)^3}{3} - 2(1)^2 + 4(1) \right)$
 $= \frac{128}{3} - 16 - \frac{2}{3} - 2 = \frac{126}{3} - 18 = \frac{126-54}{3} = \frac{72}{3} = 24$ ដូចនេះ: $J = 24$

គ. $K = \int_1^3 \left(x^2 + \frac{1}{x} - e^x \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \ln|x| - e^x \right]_1^3 = \frac{3^3}{3} + \ln 3 - e^3 - \left(\frac{1^3}{3} + \ln 1 - e^1 \right) = \frac{27}{3} + \ln 3 - e^3 - \frac{1}{3} - 0 + e$
 $= \frac{26}{3} + \ln 3 - e^3 + e$ ដូចនេះ: $K = \frac{26}{3} + \ln 3 - e^3 + e$

IV. ក. បង្ហាញថាសមីការ $16x^2 + 9y^2 = 144$ ជាសមីការអេលីប

$$16x^2 + 9y^2 = 144 \Leftrightarrow \frac{16x^2}{144} + \frac{9y^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-0)^2}{3^2} + \frac{(y-0)^2}{4^2} = 1 \quad \text{ជាសមីការអេលីប ដែលមានផ្ចិត}(0,0)$$

ដូចនេះ: សមីការ $16x^2 + 9y^2 = 144$ ជាសមីការអេលីប

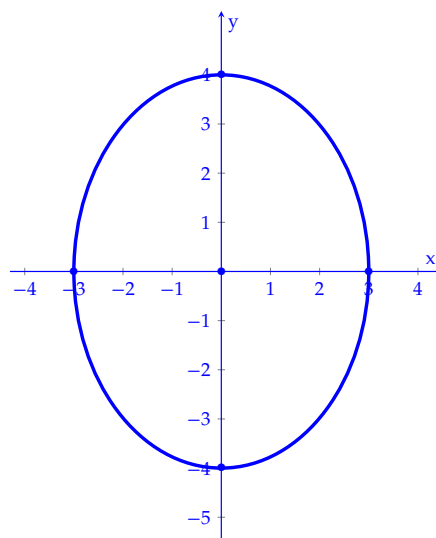
ខ. ប្រវែងអ័ក្សធំ ប្រវែងអ័ក្សតូច កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ និងកូអរដោនេនៃកំណុំទាំងពីរ ដោយ អេលីបមានសមីការ $\frac{(x-0)^2}{3^2} + \frac{(y-0)^2}{4^2} = 1$ គេបាន

☛ $h = 0 ; k = 0 ; \quad a = 4 ; b = 3 ; \quad c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$

☛ អ័ក្សធំជាអ័ក្សឈរ

- ប្រវែងអ័ក្សធំ $= 2a = 2(4) = 8$
- ប្រវែងអ័ក្សតូច $= 2b = 2(3) = 6$
- កំពូល $V_1(h, k - a) ; V_2(h, k + a) \Rightarrow V_1(0, -4) ; V_2(0, 3)$
- កំណុំ $F_1(h, k - c) ; F_2(h, k + c) \Rightarrow F_1(0, -\sqrt{7}) ; F_2(0, \sqrt{7})$

គ. សង់អេលីប



V. ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

ដោយ $y = f(x) = \frac{x^2 - 3x - 3}{x - 2}$ ដោយ $f(x)$ មានន័យលុះត្រាតែ $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

ដូចនេះ: $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

8. គណនា $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C)

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x - 3}{x - 2} = \pm\infty$ ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x - 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty$ ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x - 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$ ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ដោយ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm\infty$ ដូចនេះ: បន្ទាត់ $x = 2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

គ. បង្ហាញថា $f(x) = x - 1 + \frac{-5}{x - 2}$ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត

ដោយ $x - 1 + \frac{-5}{x - 2} = \frac{(x - 1)(x - 2) - 5}{x - 2} = \frac{x^2 - 2x - x + 2 - 5}{x - 2} = \frac{x^2 - 3x - 3}{x - 2} = f(x)$

ដូចនេះ: $f(x) = x - 1 + \frac{-5}{x - 2}$ ដោយ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-5}{x - 2} = 0$ ដូចនេះ: បន្ទាត់ $y = x - 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

ឃ. សិក្សាអថេរភាព សង់តារាងអថេរភាព និង សង់ក្រាប(C)

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - 3x - 3}{x - 2} \right)' = \frac{(x^2 - 3x - 3)'(x - 2) - (x - 2)'(x^2 - 3x - 3)}{(x - 2)^2}$$

$$= \frac{(2x - 3)(x - 2) - (x^2 - 3x - 3)}{(x - 2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 3x + 6 - x^2 + 3x + 3}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 9}{(x - 2)^2}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 9 = 0$; $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4(1)(9) = -20 < 0 \Rightarrow f'(x)$ មានសញ្ញាតាមមេគុណ a

• តារាងសញ្ញា $f'(x)$

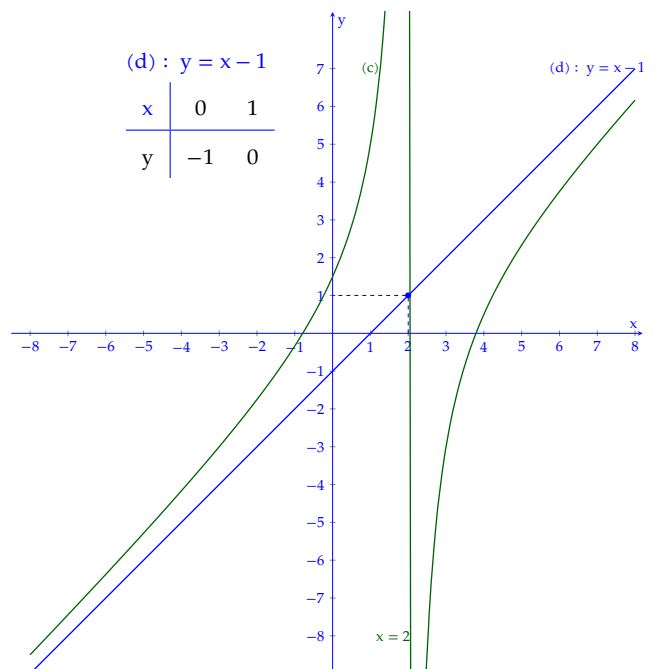
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+

• តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
f(x)	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

• សង់ក្រាប (C)

- $C \cap (y'oy)$ គឺ $x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$
- $C \cap (x'ox)$ គឺ $y = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$



ក្រសួងអប់រំយុវជន និងកីឡា
 វិទ្យាល័យមេតូឌីស្តិកម្ពុជា
 វិទ្យាសាស្ត្របច្ចេកទេស
 រដ្ឋាន និងបន្តការសិក្សា

លេខបន្ទប់៖
 លេខគុះ៖
 មណ្ឌលប្រឡង៖

សម័យបណ្ណៈ ១៩ សីហា ២០១៩

នាមត្រកូលនិងនាមខ្លួន៖

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖

ឈ្មោះ.....

លេខសម្ងាត់៖

បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើសន្លឹកប្រឡងឡើយ។ សន្លឹកប្រឡងដែលមានសញ្ញាសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្យសុំ។

វិទ្យាសាស្ត្រ គណិតវិទ្យាឆ្នាំទី១ រយៈពេល៖ ៩០ នាទី ពិន្ទុ៖ ៧៥

លេខសម្ងាត់៖

ពិន្ទុសរុប

សេចក្តីណែនាំ៖ ១. បេក្ខជនត្រូវគូសខ្សែនៅជំពូកទី២ ផ្នែកខាងលើដែលត្រូវកាត់ចេញ។
 ២. បេក្ខជនត្រូវសរសេរឆ្លើយនៃសំណួរបណ្តុះនៅលើជំពូកទី២ ទី៣ និងទី៤។

វិទ្យាសាស្ត្រ

I. (១៥ពិន្ទុ) ក្នុងប្រអប់បិទមួយមានបិទពណ៌ខៀវ 5 ដើម និងបិទពណ៌ក្រហម 6 ដើម។ គេបានដកយកបិទ 4 ដើមចេញមកក្រៅ ដោយចៃដន្យ។ ចូររកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

- A : «គេចាប់បានបិទពណ៌ខៀវទាំង 4 ដើម»
 B : «គេចាប់បានបិទពណ៌ខៀវ 2 ដើម និង បិទពណ៌ក្រហម 2 ដើម»
 C : «គេចាប់បានបិទក្រហមយ៉ាងតិច 1 ដើម»

II. (១០ពិន្ទុ) ចូរគណនាតម្លៃនៃលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{9 + x} - 3}$

គ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 2x + 1}$

III. (១០ពិន្ទុ)

ក. គណនា $I = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$ ។

ខ. គេមាន $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 5}{1 - x}$ ។ ចូរបង្ហាញថា $f(x) = -x + 4 + \frac{1}{1 - x}$ ។ រួចគណនា $K = \int_0^2 f(x) dx$ ។

IV. (១០ពិន្ទុ) គេមានសមីការអេលីប $25x^2 + 4y^2 = 100$ ។

- ក. ចូរសរសេរសមីការស្តង់ដារនៃអេលីបនេះ រួចទាញរកកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ និងកូអរដោនេនៃកំណុំទាំងពីរ។
 ខ. ចូររកប្រវែងអ័ក្សធំ និង ប្រវែងអ័ក្សតូច រួចសង់អេលីបនេះ។

V. (៣០ពិន្ទុ) គេអោយអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$ មានក្រាបកំណាង (C) ។

- ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។
 ខ. គណនា $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។
 គ. រកតម្លៃនៃចំនួនពិត a, b និង c ដែលធ្វើអោយ $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$ ។ បង្ហាញថា បន្ទាត់ d ដែលមានសមីការ $y = x - 3 + \frac{1}{x - 2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ក្រុង $\pm\infty$ ។
 ឃ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប C ។

មានបញ្ជីបញ្ជីសិស្សសិស្សានុសិស្ស

I. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

A : «គេចាប់បានបិទពណ៌ខៀវទាំង 4 ដើម»

តាមរូបមន្ត $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ ដោយ $n(A) = C(5,4) = \frac{5!}{(5-4)!4!} = \frac{5 \times 4!}{1!4!} = 5$
 $n(S) = C(11,4) = \frac{11!}{(11-4)!4!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 330$

គេបាន $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{330} = \frac{1}{66}$ ដូចនេះ $P(A) = \frac{1}{66}$

B : «គេចាប់បានបិទពណ៌ខៀវ 2 ដើម និង បិទពណ៌ក្រហម 2 ដើម»

តាមរូបមន្ត $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$ ដោយ $n(B) = C(5,2) \times C(6,2) = \frac{5!}{3!2!} \times \frac{6!}{4!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 1} \times \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2 \times 1} = 150$

គេបាន $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{150}{330} = \frac{5}{11}$ ដូចនេះ $P(B) = \frac{5}{11}$

C : «គេចាប់បានបិទក្រហមយ៉ាងតិច 1 ដើម»

តាមរូបមន្ត $P(C) = 1 - P(A)$ ដោយ $P(A) = \frac{1}{66}$
 $\Rightarrow P(C) = 1 - \frac{1}{66} = \frac{66-1}{66} = \frac{65}{66}$ ដូចនេះ $P(C) = \frac{65}{66}$

II. គណនាលីមីត

ក. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{1^2+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$ ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{3}{2}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{9+x} - 3}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - 2x)(\sqrt{9+x} + 3)}{(\sqrt{9+x} - 3)(\sqrt{9+x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-2)(\sqrt{9+x} + 3)}{9+x-9} = \lim_{x \rightarrow 0} (x-2)(\sqrt{9+x} + 3)$
 $= (0-2)(\sqrt{9+0} + 3) = -2(6) = -12$ ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{9+x} - 3} = -12$

គ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 2x + 1}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+5}{x-1} = \pm \infty$ ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 2x + 1} = \pm \infty$

III. ក. គណនា I

$I = \int_1^e \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \left[x + \ln|x| - \frac{1}{x}\right]_1^e = e + \ln e - \frac{1}{e} - \left(1 + \ln 1 - \frac{1}{1}\right) = e + 1 - \frac{1}{e} - 1 - 0 + 1 = e + 1 - \frac{1}{e}$

ដូចនេះ $I = e + 1 - \frac{1}{e}$

8. គេមាន $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 5}{1 - x}$ បង្ហាញថា $f(x) = -x + 4 + \frac{1}{1 - x}$

ដោយ $-x + 4 + \frac{1}{1 - x} = \frac{(-x + 4)(1 - x) + 1}{1 - x} = \frac{-x + x^2 + 4 - 4x + 1}{1 - x} = \frac{x^2 - 5x + 5}{1 - x} = f(x)$

ដូចនេះ: $f(x) = -x + 4 + \frac{1}{1 - x}$

គណនា K

$$K = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \left(-x + 4 + \frac{1}{1 - x} \right) dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 4x - \ln|1 - x| \right]_0^2$$

$$= -\frac{2^2}{2} + 4(2) - \ln|1 - 2| - \left(-\frac{0^2}{2} + 4(0) - \ln 1 \right) = -2 + 8 - 0 + 0 + 0 - 0 = 6 \quad \text{ដូចនេះ: } K = 6$$

IV. (១០ពិន្ទុ) គេមានសមីការអេលីប ។

ក. សរសេរសមីការស្តង់ដារនៃអេលីប $25x^2 + 4y^2 = 100$

$$25x^2 + 4y^2 = 100 \Leftrightarrow \frac{25x^2}{100} + \frac{4y^2}{100} = \frac{100}{100}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x - 0)^2}{2^2} + \frac{(y - 0)^2}{5^2} = 1 \quad \text{ជាសមីការស្តង់ដារនៃអេលីប ដែលមានផ្ចិត (0, 0)}$$

ទាញរកកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ និងកូអរដោនេនៃកំណុំទាំងពីរ
ដោយ សមីការស្តង់ដារនៃអេលីបគឺ $\frac{(x - 0)^2}{2^2} + \frac{(y - 0)^2}{5^2} = 1$ គេបាន

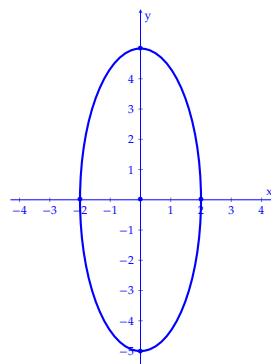
☞ អ័ក្សធំជាអ័ក្សឈរ

☞ $h = 0, k = 0, a = 5, b = 2, c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 4 = 21 \Rightarrow c = \sqrt{21}$

- កំពូល $V_1(h, k - a); V_2(h, k + a) \Rightarrow V_1(0, -5), V_2(0, 5)$
- កំណុំ $F_1(h, k - c); F_2(h, k + c) \Rightarrow F_1(0, -\sqrt{21}); F_2(0, \sqrt{21})$

8. រកប្រវែងអ័ក្សធំ ប្រវែងអ័ក្សតូច និង សង់អេលីប

- ប្រវែងអ័ក្សធំ $= 2a = 2(5) = 10$
- ប្រវែងអ័ក្សតូច $= 2b = 2(2) = 4$
- សង់អេលីប



V. ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

ដោយ $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$ $f(x)$ មានន័យលុះត្រាតែ $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

ដូចនេះ: ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f គឺ $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

8. • គណនា $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} = \pm\infty \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \pm\infty \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty}$$

• ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប C

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm\infty \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{\text{បន្ទាត់ } x = 2 \text{ ជាសមីការអាស៊ីមតូត}}$$

គ. • រកតម្លៃនៃចំនួនពិត a, b និង c ដែលធ្វើអោយ $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$

$$\begin{aligned} f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2} &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 5x + 7}{x-2} = ax + b + \frac{c}{x-2} \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-3)(x-2) + 1}{x-2} = ax + b + \frac{c}{x-2} \\ &\Leftrightarrow x - 3 + \frac{1}{x-2} = ax + b + \frac{c}{x-2} \end{aligned}$$

ផ្ទឹមមេគុណគេបាន $a = 1, b = -3, c = 1$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{a = 1, b = -3, c = 1}$$

• បង្ហាញថា បន្ទាត់ d ដែលមានសមីការ $y = x - 3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ត្រង់ $\pm\infty$

$$\text{យើងមាន } y = f(x) = x - 3 + \frac{1}{x-2} \quad \text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\text{បន្ទាត់ } d: y = x - 3 \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ត្រង់ } \pm\infty}$$

ឃ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប C

• ដេរីវេ

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2 - 5x + 7}{x-2} \right)' = \frac{(x^2 - 5x + 7)'(x-2) - (x-2)'(x^2 - 5x + 7)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{(2x-5)(x-2) - (x^2 - 5x + 7)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 5x + 10 - x^2 + 5x - 7}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \text{មានឫស } x_1 = 1; x_2 = 3$$

• តារាងសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	-	0	+

បរមាធៀប

• ត្រង់ $x = 1$; $f'(x) = 0$ ប្តូរសញ្ញាពី + ទៅ - គេបាន f មានអតិបរមាធៀបមួយ គឺ $f(1) = \frac{1^2 - 5(1) + 7}{1-2} = -3$

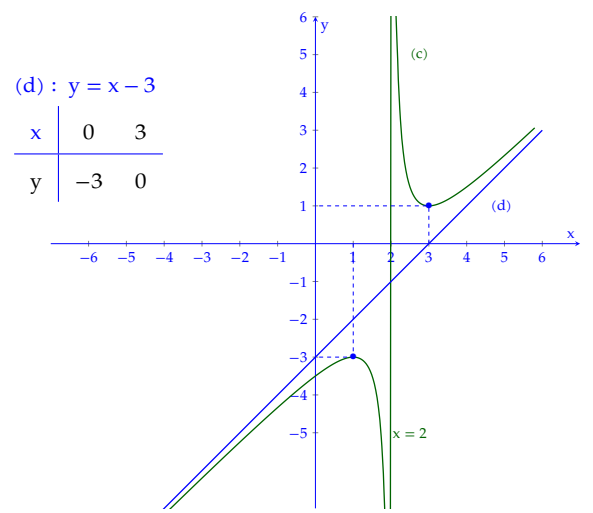
• ត្រង់ $x = 3$; $f'(x) = 0$ ប្តូរសញ្ញាពី - ទៅ + គេបាន f មានអប្បបរមាធៀបមួយ គឺ $f(3) = \frac{3^2 - 5(3) + 7}{3-2} = 1$

• តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
f(x)					

• ក្រាប C

(C) \cap (y'oy) គឺ $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{7}{2}$



ក្រសួងអប់រំយុវជន និងកីឡា
 វិទ្យាល័យមេតូឌីស្តិកម្ពុជា
 វិទ្យាសាស្ត្របច្ចេកទេស
 ឈ្មោះ និងឋានៈលេខាធិការ

លេខបន្ទប់៖
 លេខគុះ៖
 មណ្ឌលប្រឡង៖

សម័យបណ្ណៈ ១៩ សីហា ២០១៩

នាមត្រកូលនិងនាមខ្លួន៖

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖

ឋានៈលេខា៖

លេខសម្ងាត់៖

បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើសន្លឹកប្រឡងឡើយ។ សន្លឹកប្រឡងដែលមានសញ្ញាសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្យសុំ។



វិទ្យាសាស្ត្រ គណិតវិទ្យាឆ្នាំកំណត់ រយៈពេល៖ ៩០ នាទី ពិន្ទុ៖ ៧៥

លេខសម្ងាត់៖



សេចក្តីណែនាំ៖ ១. បេក្ខជនត្រូវគូសខ្សែនៅជំពូកទី២ ផ្នែកខាងលើដែលត្រូវកាត់ចេញ។
 ២. បេក្ខជនត្រូវសរសេរឆ្លើយនៃសំណួរបន្តនៅលើជំពូកទី២ ទី៣ និងទី៤។

វិញ្ញាសាទី៩

I. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖

ក. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 5x}{x^2 - 3x + 1}$

គ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2 + 5)$

II. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងប្រអប់មួយមានខ្មៅដៃពណ៌ខៀវ ៥ ដើម និង ខ្មៅដៃពណ៌ក្រហម ៤ ដើម។ សិស្សម្នាក់បានចាប់យកខ្មៅដៃ ៣ ព្រមគ្នា ចេញពីប្រអប់ដោយចៃដន្យ។

ក. រកប្រូបាបដែល «សិស្សយកបានខ្មៅដៃពណ៌ខៀវ ២ ដើម និង ខ្មៅដៃពណ៌ក្រហម ១ ដើម»

ខ. រកប្រូបាបដែល «សិស្សយកបានខ្មៅដៃពណ៌ដូចគ្នា»។

III. (១០ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$I = \int_1^3 (x - 2 + 3x^2) dx$

$K = \int_0^1 (-4x^2 + 5x + 7) dx$

IV. (១៥ពិន្ទុ) អេលីប E មួយមានសមីការ $25x^2 + 12y^2 = 300$ ។

ក. រកកូអរដោនេផ្ចិត កំណុំ និងកំពូល នៃអេលីប E ។

ខ. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងអេលីប E និងអ័ក្សទាំងពីរនៃតម្រុយកូអរដោនេ។ រួចសង់អេលីប E ។

V. (៣០ពិន្ទុ) គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$ ហើយមានក្រាប C ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f។

ខ. គណនា $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ ។

គ. សរសេរសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ។

ឃ. សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ f ។

ង. សង់តារាងអថេរភាព អាស៊ីមតូត និង ក្រាប C នៃអនុគមន៍ f ។

មានទទួលបានបៀវត្សន៍ ជាប្រភេទពិសេសសម្រាប់សិស្ស

I. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 2+2 = 4 \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4}$$

ខ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 5x}{x^2 - 3x + 1}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$)

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 5x}{x^2 - 3x + 1} = +\infty}$$

គ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2 + 5)$ (មានរាងមិនកំណត់ $+\infty - \infty$)

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}\right) = +\infty \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2 + 5) = +\infty}$$

II. ក. រកប្រូបាបដែល «សិស្សយកបានខ្មៅដៃពណ៌ខៀវ 2 ដើម និង ខ្មៅដៃពណ៌ក្រហម 1 ដើម»

តាង A : «សិស្សយកបានខ្មៅដៃពណ៌ខៀវ 2 ដើម និង ខ្មៅដៃពណ៌ក្រហម 1 ដើម»

តាមរូបមន្ត $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ ដោយ $n(A) = C(5, 2) \times C(4, 1) = \frac{5!}{3!2!} \times \frac{4!}{3!1!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 1} \times \frac{4 \times 3!}{3!} = 40$

$$n(S) = C(9, 3) = \frac{9!}{6!3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3 \times 2 \times 1} = 84$$

គេបាន $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{40}{84} = \frac{10}{21}$ ដូចនេះ: $\boxed{P(A) = \frac{10}{21}}$

ខ. រកប្រូបាបដែល «សិស្សយកបានខ្មៅដៃពណ៌ដូចគ្នា» តាង B : «សិស្សយកបានខ្មៅដៃពណ៌ដូចគ្នា»

តាមរូបមន្ត $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$ ដោយ $n(B) = C(5, 3) + C(4, 3) = \frac{5!}{2!3!} + \frac{4!}{1!3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \times 3!} + \frac{4 \times 3!}{3!} = 14$

$$n(S) = 84$$

គេបាន $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{14}{84} = \frac{1}{6}$ ដូចនេះ: $\boxed{P(B) = \frac{1}{6}}$

III. គណនាអាំងតេក្រាល៖

$$I = \int_1^3 (x - 2 + 3x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{3x^3}{3} \right]_1^3 = \frac{3^2}{2} - 2(3) + 3^3 - \left(\frac{1^2}{2} - 2(1) + 1^3 \right)$$

$$= \frac{9}{2} - 6 + 27 - \frac{1}{2} + 2 - 1 = 26 \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{I = 26}$$

$$K = \int_0^1 (-4x^2 + 5x + 7) dx = \left[\frac{-4x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 7x \right]_0^1 = \frac{-4(1)^3}{3} + \frac{5(1)^2}{2} + 7(1) - \left(\frac{-4(0)^3}{3} + \frac{5(0)^2}{2} + 7(0) \right) = \frac{49}{6}$$

ដូចនេះ: $\boxed{K = \frac{49}{6}}$

IV. ក. រកកូអរដោនេផ្ចិត កំណុំ និងកំពូល នៃអេលីប E

ដោយ អេលីប E មានសមីការ $25x^2 + 12y^2 = 300$ គេបាន

$$25x^2 + 12y^2 = 300 \Leftrightarrow \frac{25x^2}{300} + \frac{12y^2}{300} = \frac{300}{300}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-0)^2}{(\sqrt{12})^2} + \frac{(y-0)^2}{5^2} = 1$$

គេបាន

អ័ក្សធំជាអ័ក្សឈរ

$h = 0, k = 0; \quad a = 5; b = \sqrt{12}; \quad c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 12 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13}$

• ផ្ចិត $(h, k) \Rightarrow$ ផ្ចិត $(0, 0)$

• កំណុំ $F_1(h, k - c); F_2(h, k + c) \Rightarrow F_1(0, -\sqrt{13}); F_2(0, \sqrt{13})$

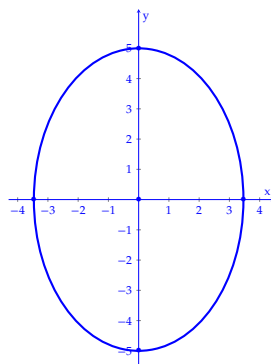
• កំពូល $V_1(h, k - a); V_2(h, k + a) \Rightarrow V_1(0, -5); V_2(0, 5)$

8. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងអេលីប E និងអ័ក្សទាំងពីរនៃតម្រុយកូអរដោនេ

• $E \cap (x'ox)$ ពេល $y = 0$ គេបាន $25x^2 + 12(0)^2 = 300 \Rightarrow x^2 = \frac{300}{25} \Rightarrow x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$

• $E \cap (y'oy)$ ពេល $x = 0$ គេបាន $25(0)^2 + 12y^2 = 300 \Rightarrow y^2 = \frac{300}{12} \Rightarrow y = \pm\sqrt{25} = \pm 5$

សង់អេលីប E



V. ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

ដោយ $f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$; $f(x)$ មានន័យលុះត្រាតែ $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

ដូចនេះ: ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f គឺ $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

8. គណនា $\lim_{x \rightarrow -1} f(x), \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x + 4}{x + 1} = \pm\infty$ ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \pm\infty$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x + 4}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \pm\infty$ ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

គ. សរសេរសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតទ្រូតនៃក្រាប C

• ដោយ $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \pm\infty$ ដូចនេះ: បន្ទាត់ $x = -1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

• $f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1} = x + \frac{4}{x + 1}$ ដោយ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x + 1} = 0$ ដូចនេះ: បន្ទាត់ $y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រូត

ឃ. សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ f

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2 + x + 4}{x + 1} \right)' = \frac{(x^2 + x + 4)'(x + 1) - (x + 1)'(x^2 + x + 4)}{(x + 1)^2} = \frac{(2x + 1)(x + 1) - (x^2 + x + 4)}{(x + 1)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 2x + x + 1 - x^2 - x - 4}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2} \end{aligned}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$ មានឫស $x_1 = 1; x_2 = -3$

មាឌទទួលបង្រៀនគួរ ជាក្រុមពីសេសកម្មសមរម្យ

បរមាជ្យេប

- តារាងអថេរភាពនៃ f

- ត្រូវ C

- បង្ក្រាបដោយ៖ ស៊ី សំអុន

ក្រសួងអប់រំយុវជន និងកីឡា
 វិទ្យាល័យមេតូឌីស្តិកម្ពុជា
 វិទ្យាសាស្ត្របច្ចេកទេស
 រដ្ឋាន និងបន្តការសិក្សា

លេខបន្ទប់៖
 លេខគុះ៖
 មណ្ឌលប្រឡង៖

សម័យបណ្ណៈ ១៩ សីហា ២០១៩

នាមត្រកូលនិងនាមខ្លួន៖

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖

ឈ្មោះ៖

លេខសម្ងាត់៖

បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើសន្លឹកប្រឡងឡើយ។ សន្លឹកប្រឡងដែលមានសញ្ញាសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្យសូន្យ។

វិទ្យាសាស្ត្រ គណិតវិទ្យាឆ្នាំទី១ រយៈពេល៖ ៩០ នាទី ពិន្ទុ៖ ៧៥

លេខសម្ងាត់៖



សេចក្តីណែនាំ៖ ១. បេក្ខជនត្រូវគូសខ្សែនៅជុំវិញព័ត៌មានផ្ទៃក្នុងនៃសញ្ញាសម្គាល់បញ្ជាក់
 ២. បេក្ខជនត្រូវសរសេរឆ្លើយនៃសំណួរបណ្ណាល័យនៅលើព័ត៌មាន ៣ និង ៤។

វិទ្យាសាស្ត្រ ១០

I. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងចក្ខុវិស័យមានសៀវភៅគណិតវិទ្យា 7 ក្បាល និងសៀវភៅភាសាខ្មែរ 5 ក្បាល។ សិស្សម្នាក់បានយកសៀវភៅ 4 ក្បាល ព្រមគ្នាចេញពីចក្ខុវិស័យដោយចៃដន្យ។

- ក. រកប្រូបាបដែល «សិស្សយកបានសៀវភៅគណិតវិទ្យាទាំង 4 ក្បាល» ។
- ខ. រកប្រូបាបដែល «សិស្សយកបានសៀវភៅភាសាខ្មែរ 1 ក្បាលយ៉ាងតិច» ។

II. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖

ក. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{2+x}}{x^2 - 4}$

គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{3} - \sqrt{x+3}}$

III. (១០ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $\int_0^2 \left(\frac{1}{1-x} - 3x + 1 \right) dx$

ខ. $\int_1^2 \left(\frac{2}{x^2} + 3 - x \right) dx$

គ. $\int_1^3 \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{2-x} \right) dx$

IV. (១៥ពិន្ទុ) រកសមីការស្តង់ដារនៃអេលីប្សូអ៊ីដដែលមានកំណុំមួយនៅត្រង់ចំណុច (0, 2) និងកំពូលពីរនៅត្រង់ចំណុច (0, -3) និង (0, 3)។ រួចរកប្រវែងអ័ក្សតូច ប្រវែងអ័ក្សធំ និងសង់អេលីប។

V. (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y = f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$ មានក្រាបកំណាង C ។

១. ចូររកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

២. គណនា $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ ។ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ។

៣. បង្ហាញថា $f(x) = x + 1 - \frac{3}{x-1}$ ។ រួចបង្ហាញថាបន្ទាត់ d ដែលមានសមីការ $y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ខាង $\pm\infty$ ។

៤. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ ។

៥. ក. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f។

ខ. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប C និងបន្ទាត់ d ។

គ. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ d ក្នុងតម្រុយតែមួយ។

I. ក. រកប្រូបាបដែល «សិស្សយកបានសៀវភៅគណិតវិទ្យាទាំង 4 ក្បាល»

តាង A : «សិស្សយកបានសៀវភៅគណិតវិទ្យាទាំង 4 ក្បាល»

$$\text{តាមរូបមន្ត } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \quad \text{ដោយ } n(A) = C(7, 4) = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3 \times 2 \times 1 \times 4!} = 35$$

$$n(S) = C(12, 4) = \frac{12!}{8!4!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 495$$

$$\text{គេបាន } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{35}{495} = \frac{7}{99} \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{P(A) = \frac{7}{99}}$$

ខ. រកប្រូបាបដែល «សិស្សយកបានសៀវភៅភាសាខ្មែរ 1 ក្បាលយ៉ាងតិច»

តាង B : «សិស្សយកបានសៀវភៅភាសាខ្មែរ 1 ក្បាលយ៉ាងតិច»

$$\text{តាមរូបមន្ត } P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{7}{99} = \frac{99 - 7}{99} = \frac{92}{99} \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{P(B) = \frac{92}{99}}$$

II. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2} = \frac{1+1}{1-2} = -2 \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = -2}$$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{2+x}}{x^2 - 4}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2 - \sqrt{2+x})(2 + \sqrt{2+x})}{(x-2)(x+2)(2 + \sqrt{2+x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - (2+x)}{(x-2)(x+2)(2 + \sqrt{2+x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)(2 + \sqrt{2+x})} \\ &= \frac{-1}{(2+2)(2 + \sqrt{2+2})} = -\frac{1}{16} \quad \text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{2+x}}{x^2 - 4} = -\frac{1}{16}} \end{aligned}$$

គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{3} - \sqrt{x+3}}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{3} + \sqrt{x+3})}{(\sqrt{3} - \sqrt{x+3})(\sqrt{3} + \sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{3} + \sqrt{x+3})}{3 - (x+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{3} + \sqrt{x+3})}{-x} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{0+3}}{-1}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{3} - \sqrt{x+3}} = -2\sqrt{3}}$$

III. គណនាអាំងតេក្រាល៖

ក. $\int_0^2 \left(\frac{1}{1-x} - 3x + 1 \right) dx = \left[-\ln|1-x| - \frac{3x^2}{2} + x \right]_0^2 = -\ln|1-2| - \frac{3(2)^2}{2} + 2 - \left(-\ln|1-0| - \frac{3(0)^2}{2} + 0 \right)$
 $= -\ln 1 - 6 + 2 - 0 = -4$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\int_0^2 \left(\frac{1}{1-x} - 3x + 1 \right) dx = -4}$$

ខ. $\int_1^2 \left(\frac{2}{x^2} + 3 - x \right) dx = \left[-\frac{2}{x} + 3x - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = -\frac{2}{2} + 3(2) - \frac{2^2}{2} - \left(-\frac{2}{1} + 3(1) - \frac{1^2}{2} \right) = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\int_1^2 \left(\frac{2}{x^2} + 3 - x \right) dx = \frac{5}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{ក. } \int_1^3 \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{2 - x} \right) dx &= \int_1^3 \left(\frac{(x-1)(x-2)}{-(x-2)} \right) dx = \int_1^3 (-x + 2) dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 2x \right]_1^3 = -\frac{3^2}{2} + 2(3) - \left(-\frac{1^2}{2} + 2(1) \right) \\ &= -\frac{9}{2} + 6 + \frac{1}{2} - 2 = -4 + 4 = 0 \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\boxed{\int_1^3 \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{2 - x} \right) dx = 0}$

IV. • រកសមីការស្តង់ដារនៃអេលីបដែលមានកំណុំ $(0, 2)$ និងកំពូលពីរ $(0, -3)$ និង $(0, 3)$
ដោយ អាបស៊ីសនៃកំពូល និងកំណុំថេរ គេបាន អ័ក្សធំនៃអេលីបជាអ័ក្សឈរ

• សមីការស្តង់ដារនៃអេលីបគឺ $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

• កំពូល $(0, -3)$; $(0, 3)$ គឺ $V_1(h, k-a)$; $V_2(h, k+a)$

គេបាន $h = 0$; $k-a = -3$; $k+a = 3$

$$\begin{cases} k-a = -3 \\ k+a = 3 \end{cases}$$

$2k = 0 \Rightarrow k = 0$; $\Rightarrow a = 3$

• កំណុំ $(0, 2)$ គឺ $F(h, k+c) \Rightarrow h = 0$; $k+c = 2 \Rightarrow c = 2$

• $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 3^2 - 2^2 = 5$

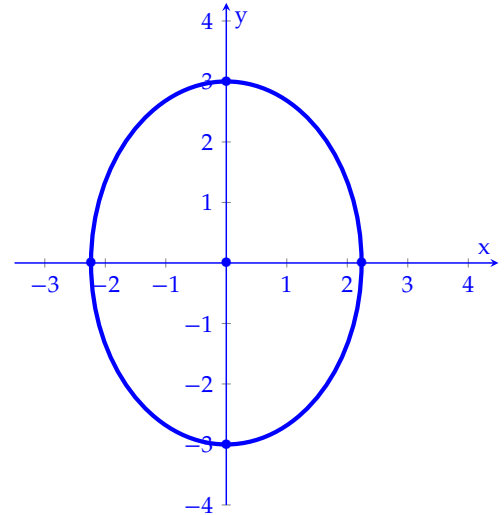
ដូចនេះ: សមីការអេលីបគឺ $\boxed{\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1}$

• រួចរកប្រវែងអ័ក្សតូច ប្រវែងអ័ក្សធំ និងសង់អេលីប

• ប្រវែងអ័ក្សតូច $= 2b = 2(\sqrt{5})$

• ប្រវែងអ័ក្សធំ $= 2a = 2(3) = 6$

• សង់អេលីប



V. 9. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

ដោយ $y = f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$; $f(x)$ មានន័យលុះត្រាតែ $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

ដូចនេះ: ដែនកំណត់នៃ f គឺ $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

២. គណនា $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4}{x - 1} = \pm\infty$

ដូចនេះ: $\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \pm\infty}$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \pm\infty$

ដូចនេះ: $\boxed{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty}$

ដោយ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \pm\infty$ ដូចនេះ: បន្ទាត់ $x = 1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

៣. បង្ហាញថា $f(x) = x + 1 - \frac{3}{x-1}$

ដោយ $x + 1 - \frac{3}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1) - 3}{x-1} = \frac{x^2 - 1 - 3}{x-1} = \frac{x^2 - 4}{x-1} = f(x)$ ដូចនេះ: $\boxed{f(x) = x + 1 - \frac{3}{x-1}}$

បង្ហាញថាបន្ទាត់ d ដែលមានសមីការ $y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ខាង $\pm\infty$

ដោយ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3}{x-1} = 0$ ដូចនេះ: បន្ទាត់ $y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

៤. • គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - 4}{x - 1} \right)' = \frac{(x^2 - 4)'(x - 1) - (x - 1)'(x^2 - 4)}{(x - 1)^2} = \frac{2x(x - 1) - (x^2 - 4)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 4}{(x - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 4 = 0 \quad ; \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)4 = -12 < 0; \quad f'(x) \text{ យកសញ្ញាតាមមេគុណ}$$

• តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$

• $f'(x) > 0$; ពេល $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

៥. ក. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

ខ. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប C និងបន្ទាត់ d

$$(C): y = x + 1 - \frac{3}{x-1}; \quad (d): y = x + 1 \quad \text{គេបាន } y_c - y_d = x + 1 - \frac{3}{x-1} - (x + 1) = -\frac{3}{x-1}$$

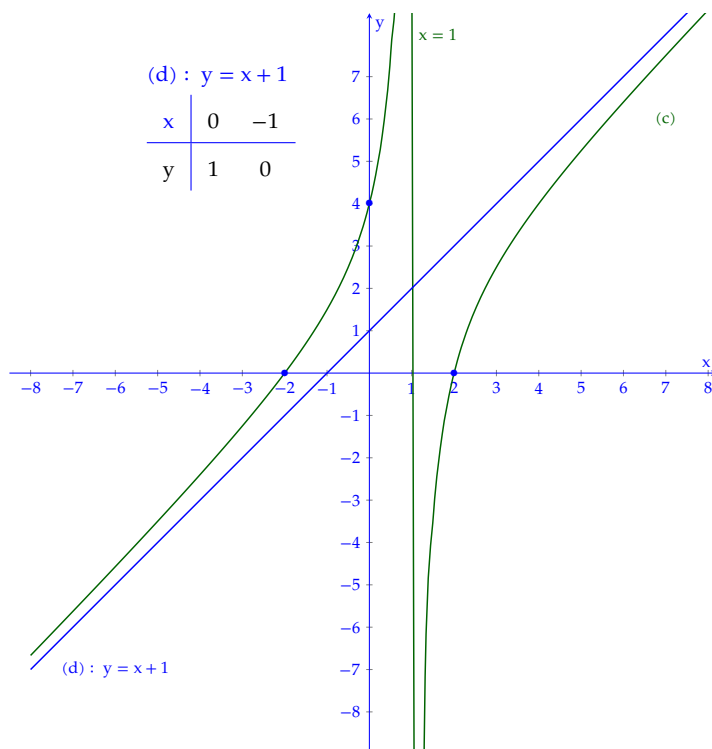
• $y_c - y_d > 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$ ដូចនេះ: C ស្ថិតនៅលើ d ពេល $x < 1$

• $y_c - y_d < 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{x-1} < 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ ដូចនេះ: C ស្ថិតនៅក្រោម d ពេល $x > 1$

គ. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ d ក្នុងតម្រុយតែមួយ

• $(C) \cap (y'oy)$ គឺ $x = 0$; $\Rightarrow y = \frac{0^2 - 4}{0 - 1} = 4$

• $(C) \cap (x'ox)$ គឺ $y = 0$; $\Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$



ត្រូវស្តង់ដារបែបបទ និងគំនិត
 ច្បាប់បែបបទស្តង់ដារ
 ច្បាប់បែបបទស្តង់ដារ
 ច្បាប់បែបបទស្តង់ដារ

លេខបន្ទាប់៖
 លេខគុណ៖
 មធ្យមប្រែប្រួល៖

សម័យបច្ចុប្បន្ន៖ ១៩ សីហា ២០១៩

នាមត្រកូលនិងនាមខ្លួន៖

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖

ឈ្មោះលេខ៖

លេខសម្ងាត់៖

បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើសន្លឹកប្រែប្រួលនេះ សន្លឹកប្រែប្រួលដែលមានសញ្ញាសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្ទុសូន្យ

✂-----

ច្បាប់បែបបទ៖ គណិតវិទ្យាស្តង់ដារ រយៈពេល៖ ៩០ នាទី ពិន្ទុ៖ ៧៥

លេខសម្ងាត់៖

ពិន្ទុសរុប

សេចក្តីណែនាំ៖ ១. បេក្ខជនត្រូវគូសខ្សែនៅជុំវិញពិន្ទុ ២. បេក្ខជនត្រូវសរសេរចម្លើយនៃសំណួរបន្តនៅលើពិន្ទុ ៣ និង ៤

វិញ្ញាសាទី១១ (ថ្នាក់ស្រប)

សំណួរ

I. (១៥ពិន្ទុ) អេលីប E មួយមានសមីការទូទៅ៖ $9x^2 + 4y^2 + 18x - 24y + 9 = 0$ ។

ក. រកសមីការស្តង់ដារនៃអេលីប E ។

ខ. រកប្រវែងអ័ក្សធំ និង អ័ក្សតូច ហើយរកកូអរដោនេនៃ ផ្ចិត កំពូល និង កំណុំនៃអេលីប E ។

II. (៣០ពិន្ទុ) អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x \neq -2, x \neq 2$ ដោយ $y = f(x) = \frac{x^2}{4-x^2}$ និងមានក្រាប C ។

ក. គណនា $\lim_{x \rightarrow -2} f(x), \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រូតនៃក្រាប C ។

ខ. សិក្សាសញ្ញានៃដេរីវេ $f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. គណនា $f(-3)$ និង $f(3)$ ហើយក្រាប C នៃអនុគមន៍ f ។

មានបទប្បញ្ញត្តិ ជាប្រភេទសេចក្តីសម្រេច

មានទទួលបានប្រយោជន៍ ជាប្រយោជន៍សម្រាប់សង្គម

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ក្រសួងអប់រំយុវជន និងកីឡា
 វិទ្យាល័យមេតូឌីស្តិកម្ពុជា
 វិទ្យាសាស្ត្របច្ចេកទេស
 រដ្ឋាន និងបន្តការសិក្សា

លេខបន្ទប់៖
 លេខតុ៖
 មណ្ឌលប្រឡង៖

សម័យបណ្ណៈ ១៩ សីហា ២០១៩
 ទីក្រុងភ្នំពេញ និងតាមខ្លួន៖
 ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖
 ឈ្មោះ៖

លេខសម្ងាត់៖

បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើសន្លឹកប្រឡងឡើយ។ សន្លឹកប្រឡងដែលមានសញ្ញាសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្យសុំឡើយ។



វិទ្យាសាស្ត្រ៖ គណិតវិទ្យាឆ្នាំកំណត់ រយៈពេល៖ ៩០ នាទី ពិន្ទុ៖ ៧៥

លេខសម្ងាត់៖

ពិន្ទុសរុប

សេចក្តីណែនាំ៖ ១. បេក្ខជនត្រូវគូសខ្សែនៅជុំវិញព័ត៌មានផ្ទៃក្នុងនៃកាតបបញ្ជូន
 ២. បេក្ខជនត្រូវសរសេរឡើងវិញនូវសំណួរមធ្យមនៅលើព័ត៌មាន ទី៣ និងទី៤។

វិទ្យាសាស្ត្រទី១២ (ថ្នាក់ស្រប)

សំណួរ

I. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖

$$\text{ក. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{x^2 + 2 - 3x}$$

II. (១០ពិន្ទុ) គ្រូបន្តកថាបានជ្រើសរើសប្រធានក្រុមវេសសំអាតថ្នាក់ថ្ងៃចំនួន ៦ នាក់នៃថ្នាក់រៀនមួយដែលមាន សិស្សប្រុសចំនួន ២០ នាក់ និងសិស្សស្រីចំនួន ១៥នាក់ ។ គណនាប្រូបាបខាងក្រោម៖

A «ប្រធានក្រុមសុទ្ធតែប្រុស»

B «ប្រធានក្រុមសុទ្ធតែស្រី»

C «ប្រធានក្រុមមានប្រុស ៣ នាក់ និងស្រី ៣ នាក់» ។

III. (១០ពិន្ទុ) គេឲ្យ $A(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2}$ ចំពោះគ្រប់ $x \neq 1$ ។

ក. រកចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $A(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2}$ ចំពោះគ្រប់ $x \neq 1$ ។

ខ. គណនា $I(x) = \int A(x)dx$ ។

IV. (៣០ពិន្ទុ) គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 5}{x + 2}$ ហើយមានក្រាប C ។

ក. រកដែនកំណត់ និងសិក្សាសញ្ញាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f ។

ខ. សរសេរសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ។

គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់ក្រាប C ។

ឃ. ដោះស្រាយវិសមីការ $\frac{2x^2 + 3x - 5}{x + 2} < 2x - 1$ ដោយប្រើក្រាប C ។

មានបទប្បញ្ញត្តិ ជាប្រភេទសេចក្តីសម្រេច

មានទទួលបានប្រយោជន៍ ជាប្រយោជន៍សម្រាប់សង្គម

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរមេ (o, \vec{i}, \vec{j}) : (ឯកតា 2cm) ។ គេមានអនុគមន៍ f និង g កំណត់លើសំណុំចំនួនពិត \mathbb{R} ដោយ៖ $f(x) = x - e^x$ និង $g(x) = (1 - x)e^x$ និង គេតាង (c) និង (c') ក្រាបនៃអនុគមន៍ f និង g នេះ។

- ក. a. កំណត់លីមីតនៃអនុគមន៍ f និង g ត្រង់ $+\infty$ និង $-\infty$ ។
- b. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (Δ) ដែលមានសមីការ $y = x$ ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (c) ។
- c. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និង អនុគមន៍ g លើ \mathbb{R} ។
- d. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និង អនុគមន៍ g ។
- ខ. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេតាង $h(x) = f(x) - g(x)$ ។
 - a. បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិត x , $h'(x) = 1 - g(x)$ ។
 - b. ទាញយកទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ h លើសំណុំចំនួនពិត។
 - c. ស្រាយបញ្ជាក់ថាក្រាប (c) និង (c') មានចំណុចប្រសព្វតែមួយគត់ដែលមានអាប៊ីសរេស្តរវាងដោយ α នៅលើចន្លោះ $[1, 2]$ ។
 - d. សិក្សាទៅតាមតម្លៃនៃ α ទីតាំងជ្រៀបគ្នារវាង (c) និង (c') ។
- គ. សង់បន្ទាត់ (Δ) និងក្រាប (c) និង (c') ។
- ឃ. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេតាង $\theta(x) = \int_0^x h(t)dt$ ។
 - a. ប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកគណនា $\theta(x)$ ។
 - b. ទាញយកជារាងកន្សោមសនិទាននៃ α ផ្ទៃក្រឡាជា cm^2 នៃដែនដែលអមដោយក្រាប (c) និង (c') , អ័ក្សអរដោនេ និង បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x = \alpha$ ។