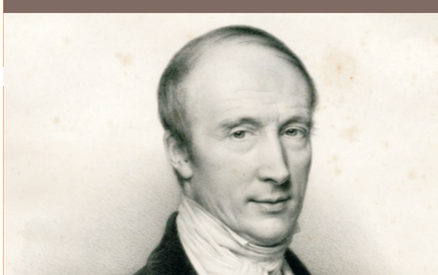
ជម្រើសលំហាត់
គណិតវិទ្យា

Pythagoras



Augustin Louis Cauchy

ភាគ ១

២០១៣

អារម្ភកថា

សួស្តី! ប្រិយមិត្តដែលកំពុងតែអានសៀវភៅ **ជម្រើសលំហាត់គណិតវិទ្យា ភាគ ១** ជាទីគោរពរាប់អាន ។ សៀវភៅនេះត្រូវបានរៀបរៀងឡើងក្នុងគោលបំណងផ្តល់ជាឯកសារសម្រាប់ជំនួយដល់ការសិក្សាស្រាវជ្រាវដល់អ្នកសិក្សាជាពិសេសគឺ ស្វ័យសិក្សាតែម្តង ។

សៀវភៅនេះត្រូវបានរៀបរៀងឡើងដោយមានជំនួយពីសៀវភៅគណិតវិទ្យាដទៃទៀតជាច្រើន (សៀវភៅគណិតវិទ្យាក្នុងប្រទេស និង ក្រៅប្រទេស) ។ លើសពីនេះទៅទៀត យើងខ្ញុំបានខិតខំជ្រើសរើសយកលំហាត់មួយចំនួនដូចជា លំហាត់ធ្លាប់ចេញប្រលងក្នុងប្រទេស និង បណ្តាប្រទេសផ្សេងៗទៀតមកដាក់ជា ចំណោទបញ្ហាព្រមទាំងមាននូវដំណោះស្រាយដែលយើងខ្ញុំបានធ្វើការបកស្រាយយ៉ាងក្បោះក្បាយដើម្បីអោយមិត្តអ្នកអានងាយស្រួលយល់ ។

ជាចុងក្រោយយើងខ្ញុំមានត្រឹមតែពាក្យជូនពរ ដល់អ្នកសិក្សាគ្រប់រូបអោយជួបប្រទះតែ សេចក្តីសុខចម្រើន សុខភាពល្អ និង ជោគជ័យក្នុងការសិក្សា ក៏ដូចជាការងារផងដែរ ។ យើងខ្ញុំក៏សូម អរគុណទុកជាមុនផងដែររាល់មតិរិះគន់របស់អ្នកសិក្សាគ្រប់រូបក្នុងន័យស្ថាបនា ។

រៀបរៀងដោយ ជា ពិសិដ្ឋ

ភ្នំពេញ, ថ្ងៃទី ១២ ខែ មិថុនា ឆ្នាំ ២០១៣

លំហាត់ 1 បង្ហាញថា $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+\frac{1}{110}+\frac{1}{1640}=1$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

បង្ហាញថា $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+\frac{1}{110}+\frac{1}{1640}=1$

យើងមាន $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+\frac{1}{110}+\frac{1}{1640}$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{20}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\frac{1}{110}+\frac{1}{40}+\frac{1}{1640}$$

$$=\frac{22}{40}+\frac{13}{40}+\frac{11}{110}+\frac{41}{1640}$$

$$=\frac{22}{40}+\frac{13}{40}+\frac{4}{40}+\frac{1}{40}$$

$$=\frac{40}{40}=1$$

ដូចនេះ $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+\frac{1}{110}+\frac{1}{1640}=1$

លំហាត់ 2 គេអោយ x, y ជាពីរចំនួនបំពេញលក្ខខណ្ឌ

$$x^3+y^3+(x+y)^3+30xy=2000$$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $x+y=10$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $x+y=10$

យើងមាន

$$x^3+y^3+(x+y)^3+30xy=2000$$

$$(x+y)^3+(x+y)^3-3x^2y-3xy^2+30xy-2000=0$$

$$2(x+y)^3-3x^2y-3xy^2+30xy-2000=0$$

$$2\left[(x+y)^3-1000\right]-3xy(x+y-10)=0$$

$$2(x+y-10)\left[(x+y)^2+10(x+y)+10^2\right]-3xy(x+y-10)=0$$

$$2(x+y-10)\left(x^2+2xy+y^2+10x+10y+100\right)-3xy(x+y-10)=0$$

$$(x+y-10)\left(2x^2+2y^2+20x+20y+xy+200\right)=0 \quad (*)$$

របៀបទី 1

ដោយ $2x^2+2y^2+20x+20y+xy+200$

$$=\left(x^2+20x+100\right)+\left(y^2+20y+100\right)+x^2+xy+\frac{y^2}{4}+\frac{3}{4}y^2$$

$$=(x+10)^2+(y+10)^2+\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2>0$$

ចំពោះ $\forall x\,,\ y\in IR$

យើងបាន $(*)$ ពិត កាលណា $x+y-10=0$

ដូចនេះ $x+y=10$

របៀបទី 2

យើងមាន $2x^2+2y^2+20x+20y+xy+200$

$$= 2x^2 + (20+y)x + 2y^2 + 20y + 200$$

នាំអោយ $\Delta = (20+y)^2 - 8(2y^2 + 20y + 200)$

$$= 400 + 40y + y^2 - 16y^2 - 160y - 1600$$

$$= -15y^2 - 120y - 1200$$

$$= -15(y^2 + 8y + 80)$$

$$= -15[(y^2 + 8y + 16) + 64]$$

$$= -15[(y+4)^2 + 64] < 0 \text{ គ្រប់ } y \in IR$$

នាំអោយ $\Delta < 0$ ដោយ $a = 2 > 0$

នាំអោយ $2x^2 + 2y^2 + 20x + 20y + xy + 200 > 0$ គ្រប់ $x, y \in IR$

យើងបាន (*) ពិត កាលណា $x + y - 10 = 0$

ដូចនេះ $x + y = 10$

លំហាត់ 3 រកតម្លៃ m ដើម្បីអោយផលបូកការេនៃឬសរបស់សមីការ

$x^2 + (m-2)x - (m+3) = 0$ មានតម្លៃតូចបំផុត ។

<u>ចម្លើយ</u>

រកតម្លៃ m ដើម្បីអោយផលបូកការេនៃឬសរបស់សមីការមានតម្លៃតូចបំផុត

របៀបទី 1

យក x_1, x_2 ជាឬសរបស់សមីការ $x^2 + (m-2)x - (m+3) = 0$

គេបាន $\begin{cases} x_1^2 + (m-2)x_1 - (m+3) = 0 \\ x_2^2 + (m-2)x_2 - (m+3) = 0 \end{cases}$

បូកអង្គ និង អង្គគេបាន $x_1^2+x_2^2+(m-2)(x_1+x_2)-2(m+3)=0$

ដោយ $x_1+x_2=-(m-2)$

នាំអោយ $x_1^2+x_2^2-(m-2)^2-2(m+3)=0$

នាំអោយ $x_1^2+x_2^2=(m-2)^2+2(m+3)$

$$=m^2-4m+4+2m+6$$

$$=m^2-2m+1+9$$

$$=(m-1)^2+9\ge 9$$

$x_1^2+x_2^2$ មានតម្លៃតូចបំផុតស្មើ 9 ពេល $m=1$

ដូចនេះ $x_1^2+x_2^2$ *មានតំម្លៃតូចបំផុតស្មើ* 9 *ពេល* $m=1$

របៀបទី 2

យើងមាន $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

សមីការ $x^2+(m-2)x-(m+3)=0$

មាន $x_1+x_2=-(m-2)$, $x_1x_2=-(m+3)$

នាំអោយ $x_1^2+x_2^2=[-(m-2)]^2-[-2(m+3)]$

$$=m^2-4m+4+2m+6$$

$$=m^2-2m+1+9$$

$$=(m-1)^2+9\ge 9$$

$x_1^2+x_2^2$ មានតម្លៃតូចបំផុតស្មើ 9 ពេល $m=1$

ដូចនេះ $x_1^2+x_2^2$ *មានតំម្លៃតូចបំផុតស្មើ* 9 *ពេល* $m=1$

លំហាត់ 4 ដោះស្រាយសមីការ

ក. $\left(x^2+x-2\right)^3+\left(2x^2-x-1\right)^3=27\left(x^2-1\right)^3$

ខ. $x^4+2x^3+2x^2+x-2=0$ ។

ចម្លើយ

ដោះស្រាយសមីការ

ក. $\left(x^2+x-2\right)^3+\left(2x^2-x-1\right)^3=27\left(x^2-1\right)^3$

$$\left(x^2+x-2\right)^3+\left(2x^2-x-1\right)^3=\left(3x^2-3\right)^3 \qquad (1)$$

តាង $a=x^2+x-2$, $b=2x^2-x-1$

នាំអោយ $a+b=3x^2-3$ តាម (1) យើងបាន

$$a^3+b^3=(a+b)^3$$

$$a^3+b^3=a^3+3ab(a+b)+b^3$$

$3ab(a+b)=0$ កាលណា $\left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \\ a+b=0 \end{array}\right.$

ករណី $a=0$ នាំអោយ $x^2+x-2=0$ មានឫស $x=1,\ x=-2$

ករណី $b=0$ នាំអោយ $2x^2-x-1=0$ មានឫស $x=1,\ x=-\frac{1}{2}$

ករណី $a+b=0$ យើងបាន $3x^2-3=0$

$x^2=1$ កាលណា $x=\pm 1$

ដូចនេះ *សមីការមានឫស* $x\in\left\{-2,-1,-\frac{1}{2},1\right\}$

ខ. $x^4+2x^3+2x^2+x-2=0$

យើងមាន $x^4+2x^3+2x^2+x-2=0$

$$\left(x^4+2x^3+x^2\right)+\left(x^2+x\right)-2=0$$

$$\left(x^2+x\right)^2+\left(x^2+x\right)-2=0$$

តាង $y=x^2+x$

នាំអោយ $y^2+y-2=0$ កាលណា $y=1$ រឺ $y=-2$

បើ $y=1$ នាំអោយ $x^2+x-1=0$ មាន $\Delta=b^2-4ac=5$

សមីការមានឬស $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

បើ $y=-2$ នាំអោយ $x^2+x+2=0$ មាន $\Delta=b^2-4ac=-7<0$

សមីការគ្មានឬស

ដូចនេះ *សមីការមានឬស* $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

លំហាត់ 5 គេអោយ α,β,γ ជាឬសរបស់សមីការ $x^3-x-1=0$ ។

គណនាតម្លៃនៃ $\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}+\dfrac{1-\beta}{1+\beta}+\dfrac{1-\gamma}{1+\gamma}$ ។

ចម្លើយ

គណនាតម្លៃនៃ $\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}+\dfrac{1-\beta}{1+\beta}+\dfrac{1-\gamma}{1+\gamma}$

យក $f(x)=x^3-x-1$

យើងមាន $\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}+\dfrac{1-\beta}{1+\beta}+\dfrac{1-\gamma}{1+\gamma}=\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}+1+\dfrac{1-\beta}{1+\beta}+1+\dfrac{1-\gamma}{1+\gamma}+1-3$

$$= \frac{2}{1+\alpha} + \frac{2}{1+\beta} + \frac{2}{1+\gamma} - 3$$

$$= 2\left(\frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\beta} + \frac{1}{1+\gamma}\right) - 3$$

ដោយ α, β, γ ជាឫសរបស់ $f(x) = x^3 - x - 1$

នាំអោយ $\alpha+1, \beta+1, \gamma+1$ ជាឫសរបស់ $f(x+1) = x^3 + 3x^2 + 2x - 1$

Lemma: បើ x_1, x_2, x_3 ជាឫសរបស់សមីការ $x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0$

នាំអោយ $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = -\frac{c_1}{c_0}$ ។

<u>សម្រាយ</u>

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត x_1, x_2, x_3 ជាឫសរបស់សមីការ

$x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0$ នាំអោយ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -c_2 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = c_1 \\ x_1x_2x_3 = -c_0 \end{cases}$

គេបាន $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = -\frac{c_1}{c_0}$

នាំអោយ $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\gamma+1} = -\frac{2}{-1} = 2$

យើងបាន $\frac{1-\alpha}{1+\alpha} + \frac{1-\beta}{1+\beta} + \frac{1-\gamma}{1+\gamma} = 2(2) - 3 = 1$

ដូចនេះ $\frac{1-\alpha}{1+\alpha} + \frac{1-\beta}{1+\beta} + \frac{1-\gamma}{1+\gamma} = 1$

លំហាត់ 6 ស្រាយបញ្ជាក់ថា: លេខ $\underbrace{11\ldots11}_{1997}\underbrace{22\ldots22}_{1998}5$ ជាការេប្រាកដ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: លេខ $\underbrace{11\ldots11}_{1997}\underbrace{22\ldots22}_{1998}5$ ជាការេប្រាកដ

តាង $N=\underbrace{11\ldots11}_{1997}\underbrace{22\ldots22}_{1998}5$

$$
\begin{aligned}
&=\underbrace{11\ldots11}_{1997}\cdot 10^{1999}+\underbrace{22\ldots22}_{1998}\cdot 10+5\\
&=\frac{1}{9}\left(10^{1997}-1\right)\cdot 10^{1999}+\frac{2}{9}\left(10^{1998}-1\right)\cdot 10+5\\
&=\frac{1}{9}\left[\left(10^{1997}-1\right)\cdot 10^{1999}+2\cdot\left(10^{1998}-1\right)\cdot 10+45\right]\\
&=\frac{1}{9}\left(10^{3996}-10^{1999}+2\cdot 10^{1999}-20+45\right)\\
&=\frac{1}{9}\left(10^{3996}+10^{1999}+25\right)\\
&=\frac{1}{9}\left(10^{3996}+2\cdot 5\cdot 10^{1998}+5^{2}\right)\\
&=\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\left(10^{1998}+5\right)^{2}\\
&=\left(\frac{10^{1998}+5}{3}\right)^{2}\\
&=\left(\frac{\overbrace{100\ldots00}^{1997}5}{3}\right)^{2}=\underbrace{33\ldots33}_{1997}5^{2}\text{ ជាការេប្រាកដ}
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ $\underbrace{11\ldots11}_{1997}\underbrace{22\ldots22}_{1998}5=\underbrace{33\ldots33}_{1997}5^{2}$ *ជាការេប្រាកដ*

លំហាត់ 7 យក a , b , c ជាបីចំនួនផ្សេងគ្នា ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$a^3+b^3+c^3=3abc \text{ កាលណា } a+b+c=0 \text{ ។}$$

អនុវត្តន៍

ក. ដោះស្រាយសមីការ $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x+1}=0$ ។

ខ. r ជាចំនួនពិតដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\sqrt[3]{r}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{r}}=3$ ។ គណនា

$r^3+\dfrac{1}{r^3}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^3+b^3+c^3-3abc$ កាលណា $a+b+c=0$

របៀបទី 1

យើងមាន $a^3+b^3+c^3=3abc$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0$$

$$(a+b)^3+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc=0$$

$$(a+b+c)\left[(a+b)^2-(a+b)c+c^2\right]-3ab(a+b+c)=0$$

$$(a+b+c)\left(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab\right)=0$$

$$(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)=0$$

$$(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]=0$$

ដោយ $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2>0$ ព្រោះ $a\neq b\neq c$

យើងបាន $(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]=0$

កាលណា $a+b+c=0$

ដូចនេះ $a^3+b^3+c^3-3abc$ *កាលណា* $a+b+c=0$

របៀបទី 2

ពិនិត្យអនុគមន៍ដឺក្រេទីបីមានឬស a , b , c គឺ

$$P(x)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$$

ចំពោះ $x=a\ ,\ b\ ,\ c \Leftrightarrow P(x)=0$ យើងបាន

$$a^3-(a+b+c)a^2+(ab+bc+ca)a-abc=0 \quad (1)$$

$$b^3-(a+b+c)b^2+(ab+bc+ca)b-abc=0 \quad (2)$$

$$c^3-(a+b+c)c^2+(ab+bc+ca)c-abc=0 \quad (3)$$

បូក（1）,（ 2 ）,（3）យើងបាន

$$a^3+b^3+c^3-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$$
$$+(ab+bc+ca)(a+b+c)-3abc=0$$

គេបាន

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

ដោយ $a^3+b^3+c^3=3abc$

នាំអោយ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=0$

$$(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]=0$$

ដោយ $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2>0$ ព្រោះ $a\neq b\neq c$

យើងបាន $(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]=0$

កាលណា $a+b+c=0$

ដូចនេះ $a^3+b^3+c^3-3abc$ *កាលណា* $a+b+c=0$

អនុវត្តន៏

ក. ដោះស្រាយសមីការ

$\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x+1}=0$ （1）

ដោយ $a+b+c=0$ កាលណា $a^3+b^3+c^3-3abc$ ចំពោះ $a\neq b\neq c$

យក $a=\sqrt[3]{x-1}$, $b=\sqrt[3]{x}$, $c=\sqrt[3]{x+1}$

តាម（1）$\Rightarrow (x-1)+x+(x+1)-3\sqrt[3]{x(x-1)(x+1)}=0$

$3x-3\sqrt[3]{x(x-1)(x+1)}=0$

$x=\sqrt[3]{x(x-1)(x+1)}$ លើកអង្គទាំងពីរជាគូបយើងបាន

$x^3=x(x-1)(x+1)$

$x^3-x(x-1)(x+1)=0$

$x(x^2-x^2+1)=0$

$x=0$

ដូចនេះ *សមីការមានឬស* $x=0$

ខ.កំណត់តម្លៃនៃ $r^3+\dfrac{1}{r^3}$

យើងមាន $\sqrt[3]{r}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{r}}=3$ សមមូល $\sqrt[3]{r}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{r}}-3=0$

នាំអោយ $r+\dfrac{1}{r}-27=3\left(-3\cdot\sqrt[3]{r}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{r}}\right)$

$$r+\frac{1}{r}-27=-9 \ \left(r\neq 0\right)$$

$$r+\frac{1}{r}-18=0$$

យើងបាន $r^3+\dfrac{1}{r^3}-18^3=3\left(-18\cdot r\cdot\dfrac{1}{r}\right)$

$$r^3+\frac{1}{r^3}=18^3-54=5778$$

ដូចនេះ $r^3+\dfrac{1}{r^3}=5778$

លំហាត់ 8: រកតម្លៃតូចបំផុតនៃកន្សោម

$$A=|x-1|+|x-2|+|x-3|+\ldots+|x-100| \text{ ។}$$

ចម្លើយ

រកតម្លៃតូចបំផុតនៃកន្សោម A

យើងមាន $|x-k|+|x-(101-k)|\geq|101-2k|$ ព្រោះ $|a|+|b|\geq|a-b|$

សមភាពពេល $x\in[k,101-k]$

ចំពោះ $k=1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ 50$ យើងបាន $|x-1|+|x-100|\geq 99$

$$|x-2|+|x-99|\geq 97$$

$$|x-3|+|x-98|\geq 95$$

....

$$|x-50|+|x-51|\geq 1$$

បូកអង្គ និង អង្គ $A\geq 99+97+95+\ldots+3+1=\dfrac{50}{2}\left(1+99\right)=2500$

សមភាពពេល $x \in \bigcap_{1\le k\le 50}[k,101-k]=[50,51]$

ដូចនេះ $A_{\min}=2500$ *ពេល* $x\in[50,51]$

លំហាត់ 9 គណនា $x^2+y^2+z^2+w^2$ ដោយដឹងថា

$$\frac{x^2}{2^2-1^2}+\frac{y^2}{2^2-3^2}+\frac{z^2}{2^2-5^2}+\frac{w^2}{2^2-7^2}=1$$
$$\frac{x^2}{4^2-1^2}+\frac{y^2}{4^2-3^2}+\frac{z^2}{4^2-5^2}+\frac{w^2}{4^2-7^2}=1$$
$$\frac{x^2}{6^2-1^2}+\frac{y^2}{6^2-3^2}+\frac{z^2}{6^2-5^2}+\frac{w^2}{6^2-7^2}=1$$
$$\frac{x^2}{8^2-1^2}+\frac{y^2}{8^2-3^2}+\frac{z^2}{8^2-5^2}+\frac{w^2}{8^2-7^2}=1$$ ។

(AIME 1984)

<u>ចម្លើយ</u>

គណនា $x^2+y^2+z^2+w^2$

យក $p(t)=\frac{x^2}{t-1^2}+\frac{y^2}{t-3^2}+\frac{z^2}{t-5^2}+\frac{w^2}{t-7^2}-1$

ចំពោះ $t=4\ ,\ 16\ ,\ 36\ ,\ 64$ នាំអោយ $p(t)=0$ (សម្មតិកម្ម)

នាំអោយ $4\ ,\ 16\ ,\ 36\ ,\ 64$ ជាឬសរបស់ $p(t)$

គេបាន $\sum_{k=1}^{4} t_k=4+16+36+64=120$ (1)

បើ $p(t)=0$ យើងបាន

$$\frac{x^2}{t-1^2}+\frac{y^2}{t-3^2}+\frac{z^2}{t-5^2}+\frac{w^2}{t-7^2}-1=0$$

$$1-\frac{x^2}{t-1}-\frac{y^2}{t-9}-\frac{z^2}{t-25}-\frac{w^2}{t-49}=0$$

$(t-1)(t-9)(t-25)(t-49)-x^2(t-9)(t-25)(t-49)$

$-y^2(t-1)(t-25)(t-49)-z^2(t-1)(t-9)(t-49)$

$-y^2(t-1)(t-9)(t-25)=0$ ចំពោះ $t\notin\{1,9,25,49\}$

នាំអោយ $\sum_{k=1}^{4}t_k=1+9+25+49+x^2+y^2+z^2+w^2$

$=x^2+y^2+z^2+w^2+84$ (2)

($\sum_{k=1}^{4}t_k$ ជាមេគុណ t^3)

តាម (1) និង (2) យើងបាន $x^2+y^2+z^2+w^2+84=120$

នាំអោយ $x^2+y^2+z^2+w^2=36$

ដូចនេះ $x^2+y^2+z^2+w^2=36$

លំហាត់ 10 គេអោយ x , y ជាពីរចំនួនបំពេញលក្ខខណ្ឌ

$(x-1)^3+1997(x-1)=-1$, $(y-1)^3+1997(y-1)=1$ ។

គណនា $x+y$ ។

ចម្លើយ

គណនា $x+y$

យើងមាន $(x-1)^3+1997(x-1)=-1$ (1)

$(y-1)^3+1997(y-1)=1$ (2)

បូក (1), (2) យើងបាន

$(x-1)^3+(y-1)^3+1997(x-1)+1997(y-1)=0$

$$[(x-1)+(y-1)][(x-1)^2-(x-1)(y-1)+(y-1)^2]$$
$$+1997[(x-1)+(y-1)]=0$$

$$(x+y-2)(x^2-2x+1+x+y-xy-1+y^2-2y+1)$$
$$+1997(x+y-2)=0$$

$$(x+y-2)(x^2-x+y^2-y-xy+1)+1997(x+y-2)=0$$

$$(x+y-2)(x^2-x+y^2-y-xy+1998)=0$$

សង្កេត $x^2-x+y^2-y-xy+1998$

$$=\frac{1}{2}\left[(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)+(x^2-2xy+y^2)+3994\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(x-y)^2+3994\right]>0$$ គ្រប់ $x, y \in \mathrm{IR}$

នាំអោយ $(x+y-2)(x^2-x+y^2-y-xy+1998)=0$

កាលណា $x+y-2=0$

ដូចនេះ $x+y=2$

លំហាត់ 11 ដោះស្រាយវិសមីការ $(x+3)^n(x-2)<0$ ចំពោះ $n \in IN$ ។

<u>ចម្លើយ</u>

បើ $(x+3)^n(x-2)=0$ យើងបាន $x=-3$, $x=2$

- ករណី n គូ រឺ $n=2k$ ($k \in Z$)

តារាងសញ្ញា

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$(x+3)^n$		$+$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+3)^n(x-2)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

តាមតារាងសញ្ញា $(x+3)^n(x-2)<0$ កាលណា $x\in(-\infty\,,\,-3)$

$\cup(-3\,,2)$

- ករណី n សេស រឺ $n=2k+1$ （$k\in Z$）

តារាងសញ្ញា

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$(x+3)^n$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+3)^n(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

តាមតារាងសញ្ញា $(x+3)^n(x-2)<0$ កាលណា $x\in(-3\,,\,2)$

សរុបទៅ $x\in(-\infty\,,\,-3)\cup(-3\,,2)$ *ករណី* $n=2k$

$x\in(-3\,,\,2)$ *ករណី* $n=2k+1$ $\quad (k\in Z)$

លំហាត់ 12 គេអោយបួនចំនួនគត់វិជ្ជមាន a,b,c,d ផ្ទៀងផ្ទាត់

$\log_a b=\dfrac{3}{2},\log_c d=\dfrac{5}{4}$ បើគេដឹងថា $a-c=9$ ។

គណនា $b-d$ ។

ចម្លើយ

គណនា $b-d$

យើងមាន $\log_a b=\frac{3}{2}$, $\log_c d=\frac{5}{4}$

សមមូល $a^{\frac{3}{2}}=b$, $c^{\frac{5}{4}}=d$

ដោយ $a\,,\,b\,,\,c\,,\,d\in IN$

សន្មតយក $a=x^2\,,\,c=y^4$ ចំពោះ $x\,,\,y\in IN$

យើងបាន $a-c=x^2-y^4$

នាំអោយ $(x-y^2)(x+y^2)=9 \quad (*)$

ដោយ $x\,,\,y\in IN$ នាំអោយ $x+y^2>0\,,\,x-y^2<x+y^2$

ពី $(*)$ នាំអោយ $\begin{cases} x-y^2=1 & (1) \\ x+y^2=9 & (2) \end{cases}$

បូក (1),(2) យើងបាន $x=5$

(1) នាំអោយ $5-y^2=1\Rightarrow y=2$

គេបាន $a=25\,,\,c=16$

ហើយ $b=a^{\frac{3}{2}}=x^3=125\,,\,d=c^{\frac{5}{4}}=y^5=32$

នាំអោយ $b-d=93$

ដូចនេះ $b-d=93$

លំហាត់ 13 រកតម្លៃតូចបំផុតនៃ

$$A=\log_{x_1}\left(x_2-\frac{1}{4}\right)+\log_{x_2}\left(x_3-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\log_{x_n}\left(x_1-\frac{1}{4}\right)$$

បើគេដឹងថា $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ ។

ចម្លើយ

រកតម្លៃតូចបំផុតនៃ

$$A=\log_{x_1}\left(x_2-\frac{1}{4}\right)+\log_{x_2}\left(x_3-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\log_{x_n}\left(x_1-\frac{1}{4}\right)$$

យើងមាន $\left(x_2-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$

$$x_2^2-x_2+\frac{1}{4}\geq 0$$

$$x_2-\frac{1}{4}\leq x_2^2$$

$$\log_{x_1}\left(x_2-\frac{1}{4}\right)\geq\log_{x_1}x_2^2$$

ស្រាយដូចគ្នា យើងបាន

$$\log_{x_2}\left(x_3-\frac{1}{4}\right)\geq\log_{x_2}x_3^2$$

$$\log_{x_3}\left(x_4-\frac{1}{4}\right)\geq\log_{x_3}x_4^2$$

....

$$\log_{x_n}\left(x_1-\frac{1}{4}\right)\geq\log_{x_n}x_1^2$$

នាំអោយ $A\geq\log_{x_1}x_2^2+\log_{x_2}x_3^2+\ldots+\log_{x_n}x_1^2$

តាមវិសមីភាពកូស៊ី (Cauchy) យើងបាន

$$\log_{x_1} x_2^2 + \log_{x_1} x_3^2 + \ldots + \log_{x_n} x_1^2$$

$$\geq n\sqrt[n]{\log_{x_1} x_2^2 \cdot \log_{x_2} x_3^2 \cdot \ldots \cdot \log_{x_n} x_1^2}$$

ដោយ $n\sqrt[n]{\log_{x_1} x_2^2 \cdot \log_{x_2} x_3^2 \cdot \ldots \cdot \log_{x_n} x_1^2} = n\sqrt[n]{2^n} = 2n$

នាំអោយ $A \geq 2n$

ដូចនេះ *តម្លៃតូចបំផុតនៃ* A *គឺ* $A_{\min} = 2n$

លំហាត់ 14 រកតួចែករួមធំបំផុតនៃ $A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}$ ចំពោះ $n = 0$,1 , 2 , ... , 1999 ។ (*Junior Balkan 1998)*

<u>ចម្លើយ</u>

រកតួចែករួមធំបំផុតនៃ A_n

យើងមាន $A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}$

បើ $n = 0$ នាំអោយ $A_0 = 2^0 + 3^2 + 5^2 = 35 = 5 \cdot 7$

ហើយ $A_n \equiv 2^{3n} + 3^{6n+2} \equiv 2^{3n} + 9^{3n+1} \equiv 2^{3n} + (-1)^{3n+1} \pmod 5$

បើ $n = 1$ នាំអោយ $A_1 \equiv 9 \pmod 5$

គេថា តួចែករួមធំបំផុតនៃ A_0 , A_1 , A_2 , ... , A_{1999} អាចស្មើ 1 រឺ 7

ដោយ $A_n = 8^n + 9 \cdot 9^{3n} + 25 \cdot 25^{3n} \equiv 1 + 2 \cdot 2^{3n} + 4 \cdot 4^{3n}$

$$\equiv 1 + 2 \cdot 8^n + 4 \cdot 64^n \equiv 1 + 2 \cdot 1^n + 4 \cdot 1^n \equiv 7 \pmod 7$$

នាំអោយ A_n ចែកដាច់នឹង 7 ចំពោះ $n = 0$,1 , 2 , ... , 1999

ដូចនេះ $GCD(A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n) = 7$

លំហាត់ 15 ចំនួន $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ត្រូវបានជ្រើសចេញពី $[2\,,\,4\,]$ ហើយ

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = \frac{17n}{6}\,,\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = 9n$$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា n ចែកដាច់នឹង 12 ។

(*Junior Balkan 1998*)

ចម្លើយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា n ចែកដាច់នឹង 12

យើងមាន $x_i \in [2\,,\,4\,]$ នាំអោយ $(x_i - 2)(4 - x_i) \geq 0$

$6x_i - x_i^2 - 8 \geq 0$ ចំពោះ $i = \overline{1,n}$

នាំអោយ $6(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - 8n \geq 0$

សមភាពពេល $x_i \in \{2,4\}$ ចំពោះ $i = \overline{1,n}$

ដោយ $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \dfrac{17n}{6}$ ហើយ $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 9n$

នាំអោយ $6(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - 8n$

$$= 6\left(\frac{17n}{6}\right) - 9n - 8n = 0$$

យើងបាន $x_i \in \{2\,,\,4\}$ ចំពោះ $i = \overline{1,n}$

នាំអោយ $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 2k$ ចំពោះ $k \in Z$

នាំអោយ $17n = 12k$ ដោយ $GCD(17,12) = 1$

ដូចនេះ n *ចែកដាច់នឹង* 12

លំហាត់ 16 កំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $|x|-|y|$ បើគេដឹងថា

$$\log_4(x+2y)+\log_4(x-2y)=1$$ ។

ចម្លើយ

កំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $|x|-|y|$

យើងមាន $\log_4(x+2y)+\log_4(x-2y)=1$

មាន x , y បំពេញលក្ខខណ្ឌ កាលណា $\begin{cases} x+2y>0 \\ x-2y>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-2y \\ x>2y \end{cases}$

យើងបាន $x>2|y|\geq 0$

តាង $a=|x|-|y|$ នាំអោយ $a=x-|y|>0$

នាំអោយ $|y|=x-a$ （1）

ម្យ៉ាងទៀត $\log_4(x+2y)+\log_4(x-2y)=1$

$$(x+2y)(x-2y)=4$$

$$x^2-4y^2=4 \qquad (2)$$

តាម（1）,（2）យើងបាន $x^2-4(x-a)^2=4$

$$x^2-4(x^2-2ax+a^2)=4$$

$$x^2-4x^2+8ax-4a^2-4=0$$

$$3x^2-8ax+4a^2+4=0$$

មាន $\Delta'=(4a)^2-3(4a^2+4)=4a^2-12$

មាន x កាលណា $\Delta'\geq 0$ នាំអោយ $4a^2-12\geq 0$

យើងបាន $a\geq\sqrt{3}$

តម្លៃតូចបំផុតនៃ a គឺ $\sqrt{3}$ ពេល $x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

តាម (1) នាំអោយ $|y|=\frac{4\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

សមមូល $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

ដូចនេះ $a_{\min}=\sqrt{3}$ *ពេល* $x=\frac{4\sqrt{3}}{3}, y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

លំហាត់ 17 គេអោយ $A=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{1997\cdot 1998}$ និង

$$B=\frac{1}{1000\cdot 1998}+\frac{1}{1001\cdot 1997}+\cdots+\frac{1}{1998\cdot 1000}$$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{A}{B}$ ជាចំនួនគត់ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{A}{B}$ ជាចំនួនគត់

ដោយ $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

យើងបាន $A=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{1997\cdot 1998}$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1997}-\frac{1}{1998}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1997}+\frac{1}{1998}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1998}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1997}+\frac{1}{1998}-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{999}$$

$$=(1-1)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{999}-\frac{1}{999}\right)+\frac{1}{1000}+\cdots+\frac{1}{1998}$$

$$=\frac{1}{1000}+\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+\cdots+\frac{1}{1997}+\frac{1}{1998}$$
$$=\frac{1}{1998}+\frac{1}{1997}+\frac{1}{1996}+\cdots+\frac{1}{1001}+\frac{1}{1000}$$

គេបាន

$$2A=\left(\frac{1}{1000}+\frac{1}{1998}\right)+\left(\frac{1}{1001}+\frac{1}{1997}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{1998}+\frac{1}{1000}\right)$$
$$=\left(\frac{2998}{1000\cdot1998}\right)+\left(\frac{2998}{1001\cdot1997}\right)+\cdots+\left(\frac{2998}{1998\cdot1000}\right)$$
$$=2998\left(\frac{1}{1000\cdot1998}+\frac{1}{1001\cdot1997}+\cdots+\frac{1}{1998\cdot1000}\right)$$
$$=2998B$$

នាំអោយ $\frac{A}{B}=1499$ ជាចំនួនគត់

ដូចនេះ $\frac{A}{B}=1499$ *ជាចំនួនគត់*

លំហាត់ 18 គណនា $E=\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\ldots+\frac{2001}{1999!+2000!+2001!}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

គណនា E

យើងមាន $\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}=\frac{k+2}{k![1+k+1+(k+1)(k+2)]}$

$$=\frac{k+2}{k!\left(k^2+4k+4\right)}$$
$$=\frac{k+2}{k!(k+2)^2}$$

$$= \frac{1}{k!(k+2)}$$
$$= \frac{k+1}{(k+2)!} = \frac{k+2-1}{(k+2)!} = \frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+2)!}$$

បើ $k = 1 , 2 , \ldots , 1999$ យើងបាន

$$\frac{3!}{1!+2!+3!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}$$
$$\frac{4!}{2!+3!+4!} = \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}$$

....

$$\frac{2001!}{1999!+2000!+2001!} = \frac{1}{2000!} - \frac{1}{2001!}$$

បូកអង្គ និង អង្គ $E = \frac{1}{2!} - \frac{1}{2001!}$

ដូចនេះ $E = \frac{1}{2} - \frac{1}{2001!}$

លំហាត់ 19 យក $f : \mathrm{IN} \times \mathrm{IN} \to \mathrm{IN}$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $f(1,1) = 2$

$$f(m+1,n) = f(m,n) + m \ , \ f(m,n+1) = f(m,n) - n$$

ចំពោះ $m \ , \ \mathrm{n} \in \mathrm{IN}$ ។ រកគ្រប់គូ (p,q) ដើម្បីអោយ

$f(p,q) = 2001$ ។ *(Korean 2001)*

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

រកគ្រប់គូ (p,q)

យើងមាន $f(m+1,n) = f(m,n) + m \ , \ f(m,n+1) = f(m,n) - n$

នាំអោយ $f(p,q) = f(p-1,q) + p - 1$

$$= f(p-2,q)+(p-2)+(p-1)$$

....

$$= f(1,q)+\frac{p(p-1)}{2}$$

$$= f(1,q-1)-(q-1)+\frac{p(p-1)}{2}$$

....

$$= f(1,1)-\frac{q(q-1)}{2}+\frac{p(p-1)}{2}$$

$$= 2-\frac{q(q-1)}{2}+\frac{p(p-1)}{2} \quad \text{ព្រោះ } f(1,1)=2$$

ដោយ $f(p,q)=2001$ គេបាន $\frac{p(p-1)}{2}-\frac{q(q-1)}{2}=1999$

$$(p-q)(p+q-1)=2\cdot 1999$$

1999 ជាចំនួនបឋម , $p-q<p+q-1$ ចំពោះ p , $q \in IN$

យើងបាន

1. $\begin{cases} p-q=1 \\ p+q-1=3998 \end{cases} \Rightarrow p=2000$, $q=1999$

2. $\begin{cases} p-q=2 \\ p+q-1=1999 \end{cases} \Rightarrow p=1001$, $q=999$

ដូចនេះ $(p,q)=(2000,1999)$ *រឺ* $(1001,999)$

លំហាត់ 20:គណនា n បើគេដឹងថា

$$(1+\tan 1^o)(1+\tan 2^o)(1+\tan 3^o)\cdot\ldots\cdot(1+\tan 45^o)=2^n \text{ ។}$$

<u>ចម្លើយ</u>

ជម្រើសលំហាត់គណិតវិទ្យា

គណនា n

របៀបទី 1

យើងមាន $$1+\tan k=\tan 45^\circ+\tan k$$
$$=\frac{\sin(45^\circ+k)}{\cos 45^\circ\cdot\cos k}$$
$$=\frac{\sin(45^\circ+k)}{\cos 45^\circ\cdot\sin(90^\circ-k)}$$

យក $k=1^\circ,2^\circ,3^\circ,\ldots,45^\circ$ យើងបាន

$$1+\tan 1^\circ=\frac{\sin 46^\circ}{\cos 45^\circ\cdot\sin 89^\circ}$$
$$1+\tan 2^\circ=\frac{\sin 47^\circ}{\cos 45^\circ\cdot\sin 88^\circ}$$
$$1+\tan 3^\circ=\frac{\sin 46^\circ}{\cos 45^\circ\cdot\sin 87^\circ}$$

....

$$1+\tan 45^\circ=\frac{\sin 90^\circ}{\cos 45^\circ\cdot\sin 45^\circ}$$

យើងបាន $$(1+\tan 1^\circ)(1+\tan 2^\circ)\ldots(1+\tan 45^\circ)$$
$$=\frac{\sin 46^\circ\cdot\sin 47^\circ\cdot\sin 49^\circ\cdot\ldots\cdot\sin 90^\circ}{(\cos 45^\circ)^{45}\cdot\sin 45^\circ\cdot\sin 46^\circ\ldots\sin 89^\circ}$$
$$=\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{45}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{46}}=2^{23}$$

ដោយ $(1+\tan 1^o)(1+\tan 2^o)(1+\tan 3^o)\cdot\ldots\cdot(1+\tan 45^o)=2^n$

នាំអោយ $2^n=2^{23}$ សមមូល $n=23$

ជម្រើសលំហាត់គណិតវិទ្យា

ដូចនេះ $n = 23$

របៀបទី 2

យើងមាន $(1+\tan k)[1+\tan(45^\circ - k)]$

$$= 1+\tan k + \tan(45^\circ - k) + \tan k \cdot \tan(45^\circ - k) \quad (1)$$

ដោយ $\tan 45^\circ = \tan[(45^\circ - k) + k]$

$$= \frac{\tan(45^\circ - k) + \tan k}{1 - \tan k \tan(45^\circ - k)}$$

$$1 = \frac{\tan(45^\circ - k) + \tan k}{1 - \tan k \tan(45^\circ - k)}$$

នាំអោយ $\tan k + \tan(45^\circ - k) + \tan k \cdot \tan(45^\circ - k) = 1$

តាម (1) នាំអោយ $(1+\tan k)[1+\tan(45^\circ - k)] = 2$

យក $k = 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, \ldots, 22^\circ$ យើងបាន

$$(1+\tan 1^\circ)(1+\tan 44^\circ) = 2$$

$$(1+\tan 2^\circ)(1+\tan 43^\circ) = 2$$

$$(1+\tan 3^\circ)(1+\tan 42^\circ) = 2$$

....

$$(1+\tan 21^\circ)(1+\tan 24^\circ) = 2$$

$$(1+\tan 22^\circ)(1+\tan 23^\circ) = 2$$

គុណអង្គ និង អង្គយើងបាន

$$(1+\tan 1^\circ)(1+\tan 2^\circ)\ldots(1+\tan 44^\circ) = 2^{22}$$

$$(1+\tan 1^\circ)(1+\tan 2^\circ)\ldots(1+\tan 45^\circ) = 2^{23}$$

ដោយ $(1+\tan 1^o)(1+\tan 2^o)(1+\tan 3^o)\cdot\ldots\cdot(1+\tan 45^o)=2^n$

នាំអោយ $2^n=2^{23}$ សមមូល $n=23$

ដូចនេះ $n=23$

លំហាត់ 21: ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$Arc\tan a+Arc\tan b=Arc\tan\frac{a+b}{1-ab}$$

បើគេដឹងថា $-\frac{\pi}{2}<Arc\tan a+Arc\tan b<\frac{\pi}{2}$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$Arc\tan\frac{1}{2}+Arc\tan\frac{1}{5}+Arc\tan\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$ ។

គ. ដោះស្រាយសមីការ $Arc\tan x+Arc\tan 2x=\frac{\pi}{4}$ ។

ឃ. សម្រួលកន្សោម

$Arc\tan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ ចំពោះ $0\le x\le 2\pi$, $x\ne\pi$

$Arc\tan\left(\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)$ ចំពោះ $0<x<\frac{3\pi}{4}$ ។

ចម្លើយ

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $Arc\tan a+Arc\tan b=Arc\tan\frac{a+b}{1-ab}$

តាមរូបមន្ត $\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$

ចំពោះ $x=Arc\tan a$, $y=Arc\tan b$

នាំអោយ $\tan(Arc\tan a+Arc\tan b)$

$$= \frac{\tan(Arc\tan a) + \tan(Arc\tan b)}{1 - \tan(Arc\tan a)\tan(Arc\tan b)}$$

$$= \frac{a+b}{1-ab}$$

នាំអោយ $Arc\tan[\tan(Arc\tan a + Arc\tan b)]$

$$= Arc\tan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$$

ដោយ $-\frac{\pi}{2} < Arc\tan a + Arc\tan b < \frac{\pi}{2}$

ដូចនេះ $Arc\tan a + Arc\tan b = Arc\tan\frac{a+b}{1-ab}$

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $Arc\tan\frac{1}{2} + Arc\tan\frac{1}{5} + Arc\tan\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

យើងមាន $Arc\tan\frac{1}{2} + Arc\tan\frac{1}{5} + Arc\tan\frac{1}{8}$

$$= Arc\tan\left[\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{5}\right)}\right] + Arc\tan\frac{1}{8}$$

$$= Arc\tan\left(\frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}}\right) + Arc\tan\frac{1}{8}$$

$$= Arc\tan\frac{7}{9} + Arc\tan\frac{1}{8}$$

$$= Arc\tan\left[\frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{1}{8}\right)}\right]$$

$$= Arc\tan\left(\frac{\frac{65}{72}}{\frac{65}{72}}\right) = Arc\tan 1 = Arc\tan\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

ដូចនេះ $$Arc\tan\frac{1}{2} + Arc\tan\frac{1}{5} + Arc\tan\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$$

គ. ដោះស្រាយសមីការ

យើងមាន $Arc\tan x + Arc\tan 2x = \frac{\pi}{4}$

$$Arc\tan\left(\frac{x+2x}{1-2x^2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$Arc\tan\left(\frac{3x}{1-2x^2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\tan\left[Arc\tan\left(\frac{3x}{1-2x^2}\right)\right] = \tan\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{3x}{1-2x^2} = 1$$

$3x = 1-2x^2$ ចំពោះ $x \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$2x^2 + 3x - 1 = 0$ មាន $\Delta = 3^2 - 4(2)(-1) = 9 + 8 = 17$

គេបាន $x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$

ដូចនេះ $$x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$$

ឃ. សម្រួលកន្សោម

- $Arc\tan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ ចំពោះ $0 \le x \le 2\pi$, $x \neq \pi$

យើងមាន $$Arc\tan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=Arc\tan\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}}$$

$$=Arc\tan\sqrt{\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$=Arc\tan\left|\tan\frac{x}{2}\right|$$

បើ $0\le x<\pi\Leftrightarrow 0\le\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}$

គេបាន $Arc\tan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=Arc\tan\left(\tan\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{2}$

បើ $\pi<x\le 2\pi\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}<\frac{x}{2}\le\pi$

គេបាន $Arc\tan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=Arc\tan\left(-\tan\frac{x}{2}\right)=Arc\tan\left[\tan\left(\pi-\frac{x}{2}\right)\right]$

ដោយ $-\frac{\pi}{2}\le\pi-\frac{x}{2}<0\Rightarrow\ Arc\tan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\pi-\frac{x}{2}$

ដូចនេះ $Arc\tan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\frac{x}{2}$ *បើ* $0\le x<\pi$

$Arc\tan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\pi-\frac{x}{2}$ *បើ* $\pi<x\le 2\pi$

- $Arc\tan\left(\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)$ ចំពោះ $0<x<\frac{3\pi}{4}$

យើងមាន $$Arc\tan\left(\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)=Arc\tan\left(\frac{\frac{\cos x}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x}}\right)$$

$$= Arc\tan\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)$$

$$= Arc\tan\left(\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan x}\right)$$

$$= Arc\tan\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]$$

ដោយ $\frac{\pi}{4} > x-\frac{\pi}{4} > -\frac{\pi}{2}$ ព្រោះ $0 < x < \frac{3\pi}{4}$

នាំអោយ $Arc\tan\left(\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right) = \frac{\pi}{4}-x$

ដូចនេះ $Arc\tan\left(\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right) = \frac{\pi}{4}-x$

លំហាត់ 22 ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$ ។

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$

របៀបទី 1

តាង $S=\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}$

គេបាន: $\sin\frac{\pi}{7}S=\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}$

ដោយ $\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin(b+a)-\sin(b-a)\right]$$

យើងបាន

$$\sin\frac{\pi}{7}S=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{7}+\frac{\pi}{7}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{7}\right)\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{7}+\frac{\pi}{7}\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{7}-\frac{\pi}{7}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{3\pi}{7}+\frac{\pi}{7}\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{7}-\frac{\pi}{7}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{2\pi}{7}-\sin 0-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}+\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{7}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{7}$$

នាំអោយ $S=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$

របៀបទី 2

អនុគមន៍ $f(x)=x^7-1$ មានរឹស $\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7}$, $k=0,1,2,\dots,6$

ដោយ $\sum_{k=1}^{7}x_k=0$ គេបាន

$$1+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}=0$$

ព្រោះ $\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{7}x_k\right)=0$

នាំអោយ $1+\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}=0$

សមមូល $2\left(\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\right)=1$

សមមូល $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$

របៀបទី 3

តាង $S=\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}$

$$=\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}$$

$$=2\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}$$

($\cos p+\cos q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$)

$$=\frac{\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}-\cos\frac{2\pi}{7}$$

$$=\frac{\sin\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}-\cos\frac{2\pi}{7}$$

$$=\frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}-\cos\frac{2\pi}{7}$$ ដោយ $\sin\frac{3\pi}{7}=3\sin\frac{\pi}{7}-4\sin^3\frac{\pi}{7}$

$$\cos\frac{2\pi}{7}=1-2\sin^2\frac{\pi}{7}$$

នាំអោយ $$S=\frac{3\sin\frac{\pi}{7}-4\sin^3\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}-1+2\sin^2\frac{\pi}{7}$$

$$=\frac{3}{2}-2\sin^2\frac{\pi}{7}-1+2\sin^2\frac{\pi}{7}=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$$

លំហាត់ 23 គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-2+3-4+\cdots+(2n-1)-2n}{\sqrt{n^2+4}}$

ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\dfrac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ ។

ចម្លើយ

គណនាលីមីត

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-2+3-4+\cdots+(2n-1)-2n}{\sqrt{n^2+4}}$

យើងមាន $$\frac{1-2+3-4+\cdots+(2n-1)-2n}{\sqrt{n^2+4}}$$

$$=\frac{[1+3+\cdots+(2n-1)]-(2+4+\cdots+2n)}{\sqrt{n^2+4}}$$

$$=\frac{n^2-n(n+1)}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

នាំអោយ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-2+3-4+\cdots+(2n-1)-2n}{\sqrt{n^2+4}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{-1}{1} = -1$$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-2+3-4+\cdots+(2n-1)-2n}{\sqrt{n^2+4}} = -1$

ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

យើងមាន $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$

យក $k = 1 , 2 , \ldots , n$

នាំអោយ $\begin{cases} \frac{1}{1\cdot2\cdot3} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot2} - \frac{1}{2\cdot3}\right] \\ \frac{1}{2\cdot3\cdot4} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\cdot3} - \frac{1}{3\cdot4}\right] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] \end{cases}$

នាំអោយ $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot2} - \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} - \cdots + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$=\frac{1}{4}$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=0$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}$

លំហាត់ 24 ដោះស្រាយសមីការ $10^x+11^x+12^x=13^x+14^x$ ។

ចម្លើយ

ដោះស្រាយសមីការ

យើងមាន $10^x+11^x+12^x=13^x+14^x$

បើ $x=2$ នាំអោយ $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$

$365=365$ ពិត

គេថា $x=2$ ជាចម្លើយនៃសមីការ

ម្យ៉ាងទៀត $\frac{10^x}{13^x}+\frac{11^x}{13^x}+\frac{12^x}{13^x}=1+\frac{14^x}{13^x}$

$$\left(\frac{10}{13}\right)^x+\left(\frac{11}{13}\right)^x+\left(\frac{12}{13}\right)^x=1+\left(\frac{14}{13}\right)^x$$

តាង $f(x)=\left(\frac{10}{13}\right)^x+\left(\frac{11}{13}\right)^x+\left(\frac{12}{13}\right)^x$, $g(x)=1+\left(\frac{14}{13}\right)^x$

ដោយ $\frac{10}{13},\frac{11}{13},\frac{12}{13}<1$ នាំអោយ f ជាអនុគមន៍ចុះ

ហើយ $\frac{14}{13} > 1$ នាំអោយ g ជាអនុគមន៍កើន

ក្រាបនៃអនុគមន៍ចុះ និង អនុគមន៍កើនប្រសព្វគ្នាតែមួយចំណុចគត់

នាំអោយ ក្រាបនៃ f និង g ប្រសព្វគ្នាត្រង់មួយចំណុចតែប៉ុណ្ណោះ

ដូចនេះ $x = 2$ *ជាឫសតែមួយគត់របស់សមីការ*

លំហាត់ 25 គេអោយ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែល

$(3 - a_{n+1})(6 + a_n) = 18$ ហើយ $a_0 = 3$ ។ គណនា $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{a_i}$ ។

(ប្រទេសចិន 2005)

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

គណនា $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{a_i}$

យើងតាង $\frac{1}{a_n} = b_n$ ដែល $n = 0,1,2,3,..$

នាំអោយ $$\left(3 - \frac{1}{b_{n+1}}\right)\left(6 + \frac{1}{b_n}\right) = 18$$

$$3b_{n+1} - 6b_n - 1 = 0$$

$$b_{n+1} = 2b_n + \frac{1}{3}$$

$$b_{n+1} + \frac{1}{3} = 2\left(b_n + \frac{1}{3}\right)$$

គេថា $\left(b_n + \frac{1}{3}\right)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន $q = 2$

យើងបាន $b_n + \frac{1}{3} = 2^n\left(b_0 + \frac{1}{3}\right) = 2^n\left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{3}\right)$ ដោយ $a_0 = 3$

នាំអោយ $b_n + \frac{1}{3} = 2^n\left(\frac{2}{3}\right)$

$$b_n = \frac{2^{n+1}-1}{3}$$

នាំអោយ $\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i} = \sum_{i=0}^{n} b_i = \sum_{i=0}^{n}\frac{2^{i+1}-1}{3} = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n}2^{i+1} - \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{3}$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{2\left(2^{n+1}-1\right)}{2-1}\right] - \frac{1}{3}(n+1)$$

$$= \frac{1}{3}\left(2^{n+2}-n-3\right)$$

ដូចនេះ $$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i} = \frac{1}{3}\left(2^{n+2}-n-3\right)$$

លំហាត់ 26 ស្វ៊ីត x_0 , x_1 , x_2 ... និង y_0 , y_1 , y_2 , ... កំណត់ដោយ

$$x_0 = y_0 = 1 , \ x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1} , \ y_{n+1} = \frac{y_n^2 + 2}{2y_n}$$

ចំពោះ $n = 0 , 1 , 2 , ...$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y_n = x_{2^n - 1}$ ចំពោះ $n = 0 , 1 , 2 , ...$ ។

ចម្លើយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y_n = x_{2^n-1}$

យក (a_n) និង (b_n) កំណត់ដោយ $a_n = \frac{x_n - \sqrt{2}}{x_n + \sqrt{2}}$, $b_n = \frac{y_n - \sqrt{2}}{y_n + \sqrt{2}}$

ចំពោះ $n = 0 , 1 , 2 , ...$

គេបាន $$a_0 = b_0 = \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \lambda$$

យើងបាន $$a_{n+1}=\frac{x_{n+1}-\sqrt{2}}{x_{n+1}+\sqrt{2}}=\frac{\frac{x_n+2}{x_n+1}-\sqrt{2}}{\frac{x_n+2}{x_n+1}+\sqrt{2}}$$

$$=\left(\frac{x_n-\sqrt{2}}{x_n+\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)$$

$$=\lambda a_n$$

គេថា (a_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន $a_0=\lambda$, $q=\lambda\Rightarrow a_n=\lambda^{n+1}$

នាំអោយ $$a_{2^n-1}=\lambda^{2^n-1+1}=\lambda^{2^n}\qquad (1)$$

ហើយ $$b_{n+1}=\frac{y_{n+1}-\sqrt{2}}{y_{n+1}+\sqrt{2}}=\frac{\frac{y_n^2+2}{2y_n}-\sqrt{2}}{\frac{y_n^2+2}{2y_n}+\sqrt{2}}=\frac{\left(y_n-\sqrt{2}\right)^2}{\left(y_n+\sqrt{2}\right)^2}=b_n^2$$

បើ $n=0$ នាំអោយ $b_1=b_0^2=\lambda^2$

$n=1$ នាំអោយ $b_2=b_1^2=\left(\lambda^2\right)^2=\lambda^{2^2}$

ឧបមាថា ពិតដល់ $n=k$ គឺ $b_n=\lambda^{2^k}$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $b_{k+1}=\lambda^{2^{k+1}}$

$b_{k+1}=b_k^2=\left(\lambda^{2^k}\right)^2=\lambda^{2^{k+1}}$ ពិត

មានន័យថា: $b_n=\lambda^{2^n}$ (2)

តាម (1), (2) $a_{2^n-1}=b_n$

សមមូល $$\frac{x_{2^n-1}-\sqrt{2}}{x_{2^n-1}+\sqrt{2}}=\frac{y_n-\sqrt{2}}{y_n+\sqrt{2}}$$

សមមូល $1-\dfrac{2\sqrt{2}}{x_{2^n-1}+\sqrt{2}}=1-\dfrac{2\sqrt{2}}{y_n+\sqrt{2}}$

ដូចនេះ $y_n=x_{2^n-1}$

លំហាត់ 27 គេអោយ a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 បំពេញលក្ខខណ្ឌ

$$\frac{a_1}{k^2+1}+\frac{a_2}{k^2+2}+\frac{a_3}{k^2+3}+\frac{a_4}{k^2+4}+\frac{a_5}{k^2+5}=\frac{1}{k^2}$$ ចំពោះ

$k=1$, 2 , 3 , 4 , 5 ។ គណនា $\dfrac{a_1}{37}+\dfrac{a_2}{38}+\dfrac{a_3}{39}+\dfrac{a_4}{40}+\dfrac{a_5}{41}$ ។

（*APMO 2009* ）

<u>ចម្លើយ</u>

គណនា $\dfrac{a_1}{37}+\dfrac{a_2}{38}+\dfrac{a_3}{39}+\dfrac{a_4}{40}+\dfrac{a_5}{41}$

យក $R(x)=\dfrac{a_1}{x^2+1}+\dfrac{a_2}{x^2+2}+\dfrac{a_3}{x^2+3}+\dfrac{a_4}{x^2+4}+\dfrac{a_5}{x^2+5}$

ដែល $R(\pm 1)=\dfrac{1}{(\pm 1)^2}=1$, $R(\pm 2)=\dfrac{1}{(\pm 2)^2}=\dfrac{1}{4}$

$R(\pm 3)=\dfrac{1}{(\pm 3)^2}=\dfrac{1}{9}$, $R(\pm 4)=\dfrac{1}{(\pm 4)^2}=\dfrac{1}{16}$

$R(\pm 5)=\dfrac{1}{(\pm 5)^2}=\dfrac{1}{25}$

ហើយ $R(6)=\dfrac{a_1}{37}+\dfrac{a_2}{38}+\dfrac{a_3}{39}+\dfrac{a_4}{40}+\dfrac{a_5}{41}$

តាង $P(x)=(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)(x^2+4)(x^2+5)$, $Q(x)=R(x)P(x)$

ចំពោះ $k=\pm 1$, ± 2 , ± 3 , ± 4 , ± 5 យើងបាន $Q(k)=R(k)P(k)=\dfrac{P(k)}{k^2}$

នាំអោយ $P(k)-k^2Q(k)=0$

ដោយ $P(k)-k^2Q(k)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី 10មានឫស ± 1 , ± 2 , ± 3 , ± 4 , ± 5 យើងបាន

$$P(x)-x^2Q(x)=A(x^2-1^2)(x^2-2^2)(x^2-3^2)(x^2-4^2)(x^2-5^2)$$

ចំពោះ $x=0$ នាំអោយ $A=\dfrac{P(0)}{(-1)(-4)(-9)(-16)(-25)}$

$$=\frac{(1)(2)(3)(4)(5)}{(-1)(-4)(-9)(-16)(-25)}=-\frac{1}{120}$$

គេបាន

$$P(x)-x^2Q(x)=-\frac{1}{120}(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)(x^2-16)(x^2-25)\quad(1)$$

ធ្វើផលធៀប（1）នឹង $P(x)$ គេបាន

$$1-x^2\frac{Q(x)}{P(x)}=-\frac{1}{120}\frac{(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)(x^2-16)(x^2-25)}{(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)(x^2+4)(x^2+5)}$$

$$1-x^2R(x)=-\frac{1}{120}\frac{(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)(x^2-16)(x^2-25)}{(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)(x^2+4)(x^2+5)}$$

ចំពោះ $x=6$ យើងបាន $1-36R(6)=-\dfrac{35\times 32\times 27\times 20\times 11}{120\times 37\times 38\times 39\times 40\times 41}$

$$=-\frac{3\times 7\times 11}{13\times 19\times 37\times 41}$$

$$=-\frac{231}{374699}$$

នាំអោយ $R(6)=\dfrac{187465}{6744582}$

ដូចនេះ $\dfrac{a_1}{37}+\dfrac{a_2}{38}+\dfrac{a_3}{39}+\dfrac{a_4}{40}+\dfrac{a_5}{41}=\dfrac{187465}{6744582}$

លំហាត់ 28 គេអោយបួនចំនួន x, y, z, t ដែល $\begin{cases}|x+y+z-t|\le 1\\ |y+z+t-x|\le 1\\ |z+t+x-y|\le 1\\ |t+x+y-z|\le 1\end{cases}$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $x^2+y^2+z^2+t^2\le 1$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $x^2+y^2+z^2+t^2\le 1$

- $|x+y+z-t|\le 1$ យើងបាន

$(x+y+z-t)^2\le 1$

$(x+y)^2+2(x+y)(z-t)+(z-t)^2\le 1$

$x^2+2xy+y^2+2xz-2xt+2yz-2yt+z^2-2zt+t^2\le 1$ （1）

- $|y+z+t-x|\le 1$ យើងបាន

$(y+z+t-x)^2\le 1$

$(y+z)^2+2(y+z)(t-x)+(t-x)^2\le 1$

$y^2+2yz+z^2+2yt-2xy+2zt-2xz+t^2-2xt+x^2\le 1$ （2）

- $|z+t+x-y|\le 1$ យើងបាន

$(z+t+x-y)^2\le 1$

$(z+t)^2+2(z+t)(x-y)+(x-y)^2\le 1$

$z^2+2zt+t^2+2zx-2yz+2tx-2yt+x^2-2xy+y^2\le 1$ （3）

- $|t+x+y-z|\le 1$ យើងបាន

$$(t+x+y-z)^2 \le 1$$

$$(t+x)^2 + 2(t+x)(y-z) + (y-z)^2 \le 1$$

$$t^2 + 2xt + x^2 + 2yt - 2zt + 2xy - 2xz + y^2 - 2yz + z^2 \le 1 \quad (4)$$

បូក (1),(2),(3) និង (4) យើងបាន $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 \le 4$

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \le 1$$

ដូចនេះ $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \le 1$

លំហាត់ 29 គេតាង $[x]$ ជាចំនួនគត់ធំបំផុតតូចជាង ឬ ស្មើ x ។ ឧទាហរណ៍

$[2.63] = 2$ ។ $\{x\}$ ជាផ្នែកទសភាគនៃ x ($0 \le \{x\} < 1$) ។

$x = \{x\} + [x]$ ចំពោះ $\forall x \in IR$ ។

អនុវត្តន៍

ក. បើ $x = \sqrt{2013^2 + 2014}$ ។ រកតម្លៃនៃ $[x]$ ។

ខ. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 200 \\ \{x\} + y + [z] = 190.1 \\ [x] + \{y\} + z = 178.8 \end{cases}$ ។

គ. ដោះស្រាយសមីការ $4x^2 - 40[x] + 51 = 0$ ។

<u>ចម្លើយ</u>

ក. រកតម្លៃនៃ $[x]$

យើងមាន $x = \sqrt{2013^2 + 2014} > \sqrt{2013^2} = 2013$

ដោយ $x = \sqrt{2013^2 + 2014} = \sqrt{2013^2 + 2013 + 1}$

$$< \sqrt{2013^2 + 2 \cdot 2013 + 1}$$

$$< \sqrt{(2013+1)^2}$$

$$< 2014$$

គេបាន $2013 < x < 2014$

ដូចនេះ $[x] = 2013$

ខ. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 200 \\ \{x\} + y + [z] = 190.1 \\ [x] + \{y\} + z = 178.8 \end{cases}$

បូក (1), (2), (3)

$$x + \{x\} + [x] + y + \{y\} + [y] + z + \{z\} + [z] = 568.9$$

$$2(x+y+z) = 568.9$$

$$x + y + z = 284.45$$

បូក (1), (2) $x + \{x\} + [y] + y + \{z\} + [z] = 390.1$

$$[y] + \{x\} = 390.1 - (x+y+z)$$

$$= 390.1 - 284.45 = 105.65$$

គេបាន $[y] = 105$, $\{x\} = 0.65$

បូក (2), (3) $\{x\} + [x] + y + \{y\} + [z] + z = 368.9$

$$[z] + \{y\} = 368.9 - (x+y+z)$$

$$= 368.9 - 284.45 = 84.45$$

គេបាន $[z] = 84$, $\{y\} = 0.45$

បូក (1), (3) $x + [x] + [y] + \{y\} + \{z\} + z = 378.8$

$$[x]+\{z\}=378.8-(x+y+z)$$

$$=378.8-284.45=94.35$$

គេបាន $[x]=94$, $\{z\}=0.35$

សរុបមក $x=[x]+\{x\}=94+0.65=94.65$

$$y=[y]+\{y\}=105+0.45=105.45$$

$$z=[z]+\{z\}=84+0.35=84.35$$

ដូចនេះ $x=94.65$, $y=105.45$, $z=84.35$

គ. ដោះស្រាយសមីការ $4x^2-40[x]+51=0$ （1）

យើងមាន $4x^2-40[x]+51\geq 4x^2-40x+51=(2x-3)(2x-17)$

ដោយ $4x^2-40[x]+51=0\Rightarrow(2x-3)(2x-17)\leq 0$

គេបាន $\frac{3}{2}\leq x\leq\frac{17}{2}\Rightarrow[x]=1\,,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ 8$

សមីការ（1）$\Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{40[x]-51}}{2}$

$$[x]=\left[\frac{\sqrt{40[x]-51}}{2}\right] \qquad (2)$$

ជំនួស $[x]=1\,,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ 8$ ក្នុង（2）គេបាន $x\in\left\{\frac{\sqrt{29}}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{189}}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{229}}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{269}}{2}\right\}$

ដូចនេះ $x\in\left\{\frac{\sqrt{29}}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{189}}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{229}}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{269}}{2}\right\}$

លំហាត់ 30 គេអោយ α , $\beta \in IR$, $a \in Z$, $n \in IN$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

ក. $[\alpha + a] = [\alpha] + a$

ខ. $\left[\dfrac{\alpha}{n}\right] = \left[\dfrac{[\alpha]}{n}\right]$

គ. $[\alpha] + [\beta] \le [\alpha + \beta] \le [\alpha] + [\beta] + 1$

ឃ. $[2\alpha] + [2\beta] \le [\alpha] + [\beta] + [\alpha + \beta]$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ស្រាយបញ្ជាក់ថា

ក. $[\alpha + a] = [\alpha] + a$

តាមនិយមន័យ $[\alpha + a] \le \alpha + a < [\alpha + a] + 1$

$\Rightarrow \underbrace{[\alpha + a] - a}_{k} \le \alpha < \underbrace{[\alpha + a] - a}_{k} + 1,\ k \in Z$

គេបាន $[\alpha] = [\alpha + a] - a$

ដូចនេះ $[\alpha + a] = [\alpha] + a$

ខ. $\left[\dfrac{\alpha}{n}\right] = \left[\dfrac{[\alpha]}{n}\right]$

តាមនិយមន័យ $\dfrac{\alpha}{n} = \left[\dfrac{\alpha}{n}\right] + \left\{\dfrac{\alpha}{n}\right\} = \left[\dfrac{\alpha}{n}\right] + \theta$, $0 \le \theta = \left\{\dfrac{\alpha}{n}\right\} < 1$

$\Rightarrow \alpha = n\left[\dfrac{\alpha}{n}\right] + n\theta$

$\Rightarrow [\alpha] = n\left[\dfrac{\alpha}{n}\right] + [n\theta]$ ព្រោះ $n\left[\dfrac{\alpha}{n}\right]$ ជាចំនួនគត់

$\Rightarrow \dfrac{[\alpha]}{n} = \left[\dfrac{\alpha}{n}\right] + \dfrac{[n\theta]}{n}$ ដោយ $0 \le [n\theta] \le n\theta < n \Rightarrow 0 \le \dfrac{[n\theta]}{n} < 1$

យើងបាន $\left[\frac{\alpha}{n}\right] \le \left[\frac{\alpha}{n}\right] + \frac{[n\theta]}{n} < \left[\frac{\alpha}{n}\right] + 1$

$$\left[\frac{\alpha}{n}\right] \le \frac{[\alpha]}{n} < \left[\frac{\alpha}{n}\right] + 1$$

ដូចនេះ $\left[\frac{\alpha}{n}\right] = \left[\frac{[\alpha]}{n}\right]$

គ. $[\alpha] + [\beta] \le [\alpha + \beta] \le [\alpha] + [\beta] + 1$

យើងមាន: $\alpha - 1 < [\alpha] \le \alpha$, $\beta - 1 < [\beta] \le \beta$

$\Rightarrow \alpha + \beta - 2 < [\alpha] + [\beta] \le \alpha + \beta$

ពី $[\alpha] + [\beta] \le \alpha + \beta \Rightarrow [\alpha] + [\beta] \le [\alpha + \beta]$ （1）

ពី $\alpha + \beta - 2 < [\alpha] + [\beta] \Rightarrow \alpha + \beta < [\alpha] + [\beta] + 2$

$$[\alpha + \beta] < [\alpha] + [\beta] + 2$$

$$[\alpha + \beta] \le [\alpha] + [\beta] + 1 \quad （2）$$

តាម（1）,（2）

ដូចនេះ $[\alpha] + [\beta] \le [\alpha + \beta] \le [\alpha] + [\beta] + 1$

ឃ. $[2\alpha] + [2\beta] \le [\alpha] + [\beta] + [\alpha + \beta]$

យើងមាន $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$, $\beta = [\beta] + \{\beta\}$

$$\Rightarrow [2\alpha] + [2\beta] = [2([\alpha] + \{\alpha\})] + [2([\beta] + \{\beta\})]$$

$$= [2[\alpha] + 2\{\alpha\}] + [2[\beta] + 2\{\beta\}]$$

$$= 2[\alpha] + 2[\beta] + [\{2\alpha\}] + [\{2\beta\}]$$

ហើយ $[\alpha + \beta] = [[\alpha] + [\beta] + \{\alpha\} + \{\beta\}]$

$$=[\alpha]+[\beta]+[\{\alpha\}+\{\beta\}]$$

$$\Rightarrow [\alpha]+[\beta]+[\alpha+\beta]=2[\alpha]+2[\beta]+[\{\alpha\}+\{\beta\}]$$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $[\{2\alpha\}]+[\{2\beta\}]\geq[\{\alpha\}+\{\beta\}]$

ដោយវិសមភាពមានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងសន្មតយក $\{\alpha\}\geq\{\beta\}\geq 0$

គេបាន $[\{2\alpha\}]+[\{2\beta\}]\geq[2\{\alpha\}]\geq[\{\alpha\}+\{\beta\}]$

ដូចនេះ $[2\alpha]+[2\beta]\leq[\alpha]+[\beta]+[\alpha+\beta]$

លំហាត់ 31 យក x ជាចំនួនពិត, n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx] \text{ ។}$$

(*សមភាព* Hermite)

អនុវត្តន៍ យក x ជាចំនួនពិត ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right]=[x]$ ។

(IMO 1968)

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]$

បើ $x\in IN$, ដោយ $x\leq x+\frac{i}{n}<x+1$ ចំពោះ $i=\overline{1,n-1}$

$$\Rightarrow [x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x+x+\ldots+x}_{n}=nx$$

$\Leftrightarrow nx = nx$ ពិត

បើ $x \in IR - Z$ ៖ $\Rightarrow 0 < \{x\} < 1$

$\exists i \in IN \;\; 1 \le i \le n-1$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $\{x\} + \frac{i-1}{n} < 1$, $\{x\} + \frac{i}{n} \ge 1$ （1）

គេបាន $$\frac{n-i}{n} \le \{x\} < \frac{n-i+1}{n} \quad (2)$$

តាម（1） $$[x] = \left[x + \frac{1}{n}\right] = \ldots = \left[x + \frac{i-1}{n}\right]$$

និង $$\left[x + \frac{i}{n}\right] = \ldots = \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [x] + 1$$

$$\Rightarrow [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right]$$

$$= i[x] + (n-i)([x]+1) = n[x] + n - i$$

តាម（2） $\underbrace{n[x] + n - i}_{k} \le n[x] + n\{x\} = nx < \underbrace{n[x] + n - i}_{k} + 1$, $k \in Z$

$$\Rightarrow [nx] = n[x] + n - i$$

យើងបាន $[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$

ដូចនេះ $$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$$

អនុវត្តន៍ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{x + 2^k}{2^{k+1}}\right] = [x]$

តាមសមភាព Hermite

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$$

បើ $n=2 \Rightarrow [x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$

$$\Rightarrow \left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[x]$$

យើងបាន $$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{x}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left[\frac{x}{2^k}\right]-\left[\frac{x}{2^{k+1}}\right]\right)$$

$$=[x]-\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{2}\right]-\left[\frac{x}{2^2}\right]+\ldots=[x]$$

ព្រោះ $\frac{x+2^n}{2^{n+1}}<1 \Leftrightarrow x+2^n<2^{n+1} \Leftrightarrow x<2^n$

មានន័យថា បើ $2^n>x$ គេបាន $\left[\frac{x+2^n}{2^{n+1}}\right]=0$

ដូចនេះ $$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right]=[x]$$

ᔕᗣᔕᗣ

លំហាត់ 32 គេអោយ $2n$ ចំនួនពិត a_1 , a_2 , a_3 , ... , a_n និង b_1 , b_2 , b_3 , ... , b_n ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2$$
$$\leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right)$$

សមភាពកើតឡើងពេល $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3} = \ldots = \dfrac{a_n}{b_n}$ ។

វិសមភាព (*Cauchy-Schwarz*)

អនុវត្តន៍

ក. រកឫសគត់នៃសមីការ $\left(x^2 + y + 1\right)^2 = 3x^4 + 3y^2 + 3$ ។

ខ. គេអោយ $\alpha, \beta, \delta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ហើយ $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\delta = 1$ ។

រកតម្លៃអតិបរមានៃ $T = \cos\alpha\cos\beta + \cos\beta\cos\delta + \cos\delta\cos\alpha$ ។

គ. យក a , b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

របៀបទី 1

ពិនិត្យអនុគមន៍

$$f(x) = (a_1 - b_1x)^2 + (a_2 - b_2x)^2 + \ldots + (a_n - b_nx)^2$$
$$= \left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)x$$
$$+ \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)$$

$\Rightarrow f(x) \geq 0$, $\forall x \in IR$

នាំអោយ ឌីសគ្រីមីណង់នៃ $f(x)$ គឺ $\Delta' \leq 0$ ជានិច្ច

ព្រោះ $a = \left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right) \geq 0$

យើងមាន $\Delta' = \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n\right)^2$

$$-\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right)$$

បើ $\Delta' > 0 \Rightarrow \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n\right)^2$

$\leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right)$ គ្រប់ a , $b \in IR$

បើ $\Delta' = 0 \Rightarrow$ សមីការ $f(x) = 0$ មានរឹសឌុប $x_0 \in IR$

មានន័យថា $\left(a_1 - b_1 x_0\right)^2 + \left(a_2 - b_2 x_0\right)^2 + \ldots + \left(a_n - b_n x_0\right)^2 = 0$

គេបាន $a_1 - b_1 x_0 = a_2 - b_2 x_0 = \ldots = a_n - b_n x_0$

នាំអោយ $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3} = \ldots = \dfrac{a_n}{b_n} = x_0$

ច្រាសមកវិញ $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3} = \ldots = \dfrac{a_n}{b_n} = x_0 \Rightarrow f(x) = 0$

មានរឹសឌុប គឺ $x_0 \in IR$

ដូចនេះ $\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n\right)^2$

$$\leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right)$$

សមភាពកើតឡើងពេល $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3} = \ldots = \dfrac{a_n}{b_n}$

របៀបទី 2

Lemma: បើ a , b ជាចំនួនពិត និង x , $y > 0$ គេបាន

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}$$

សម្រាយ

យើងមាន $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}$

$$\Leftrightarrow a^2y(x+y)+b^2x(x+y)\geq(a+b)^2xy$$

$$\Leftrightarrow a^2xy+a^2y^2+b^2x^2+b^2xy\geq a^2xy+2abxy+b^2xy$$

$\Leftrightarrow (ay-bx)^2\geq 0$ ពិត

សមភាពកើតឡើង កាលណា $ay=bx\Leftrightarrow\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$

ប្រើ Lemma ពីរដង យើងបាន $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}+\frac{c^2}{z}$

$$\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

តាមវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា គេបាន

$\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{x_n}\geq\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{x_1+x_2+\ldots+x_n}$ ចំពោះ $a_1,\ a_2,\ ..,\ a_n$ ជាចំនួនពិត និង $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n>0$ សមភាពកើតឡើង កាលណា

$$\frac{a_1}{x_1}=\frac{a_2}{x_2}=\ldots=\frac{a_n}{x_n}$$

យើងបាន $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=\frac{a_1^2b_1^2}{b_1^2}+\frac{a_2^2b_2^2}{b_2^2}+\ldots+\frac{a_n^2b_n^2}{b_n^2}$

$$\geq\frac{(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2}{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}$$

ដូចនេះ $$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$
$$\le (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$
សមភាពកើតឡើងពេល $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3} = \dots = \dfrac{a_n}{b_n}$

អនុវត្តន៏

ក. រកឫសគត់នៃសមីការ $(x^2 + y + 1)^2 = 3x^4 + 3y^2 + 3$

តាមវិសមភាព Cauchy – Schwarz យើងមាន

$$(x^2 + y + 1)^2 \le (1^2 + 1^2 + 1^2)(x^4 + y^2 + 1)$$

$$(x^2 + y + 1)^2 \le 3x^4 + 3y^2 + 3$$

សមភាពកើតឡើងពេល $x^2 = y = 1$

ដូចនេះ $(x = 1 , y = 1), (x = -1 , y = 1)$

ខ. រកតម្លៃអតិបរមានៃ $T = \cos\alpha\cos\beta + \cos\beta\cos\delta + \cos\delta\cos\alpha$

យើងមាន $\alpha, \beta, \delta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ នាំអោយ $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\delta > 0$

តាមវិសមភាព Cauchy – Schwarz យើងបាន

$$\cos\alpha\cos\beta + \cos\beta\cos\delta + \cos\delta\cos\alpha \le \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\delta$$

$$T \le \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\delta$$

ដោយ $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\delta = 1$ （1）

នាំអោយ $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\delta = 1 - 2T$

នាំអោយ $T \le 1 - 2T$

នាំអោយ $T \le \frac{1}{3}$ សមភាពកើតឡើងពេល $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\delta$

តាម (1) យើងបាន: $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\delta = \frac{1}{3}$

ដូចនេះ តម្លៃអតិបរមានៃ T *គឺ* $T_{\max} = \frac{1}{3}$ *នៅពេលដែល*

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\delta = \frac{1}{3}$$

គ.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$

យើងមាន

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{a^2}{ab+bc} + \frac{b^2}{bc+ca} + \frac{c^2}{ca+ab}$$

តាម Lemma ខាងលើ យើងបាន

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \ge \frac{3}{2}$

យើងមាន $\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \ge \frac{3}{2}$

សមមូល $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \ge 0$$

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \ge 0 \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$ *សមភាពកើតឡើងកាលណា*

$$a = b = c$$

លំហាត់ 33 គេអោយ a_1 , a_2 , ... , a_n ជា n ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។

បង្ហាញថា

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n} \quad , \; n \ge 2 \text{ ។}$$

(AM-GM Inequality)

អនុវត្តន៍

ក. យក a_1 , a_2 , ... , a_n ជា n ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n} \ge \dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$, $n \ge 2$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n} > \dfrac{2}{3}$ ។

គ. ចំពោះ $x>0$, $n \in IN$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{x^n}{1+x+x^2+\ldots+x^{2n}} \le \frac{1}{2n+1} \text{ ។}$$

សម្រាយបញ្ជាក់

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n}$

បើ $n=2$ នាំអោយ $\dfrac{a_1+a_2}{2} \ge \sqrt{a_1a_2}$

$$a_1 - 2\sqrt{a_1a_2} + a_2 \ge 0$$

$$\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}\right)^2 \ge 0 \text{ ពិត}$$

ឧបមាថា ពិតដល់ $n=k$ គេបាន $\dfrac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k}{k} \ge \sqrt[k]{a_1a_2a_3\ldots a_k}$

តាង $M_k = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k}$ នាំអោយ $M_k^k \geq a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ពិតដល់ $n = k+1$ គឺ

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{k+1}}{k+1} \geq \sqrt[k+1]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_{k+1}}$$

យើងមាន $$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{k+1}}{k+1} = \frac{kM_k + a_{k+1}}{k+1}$$

សន្មតយក $a_{k+1} \geq a_1 \,,\; a_2 \,,\; a_3 \,,\; \ldots \,,\; a_k$

នាំអោយ $$ka_{k+1} \geq a_1 + a_2 + \ldots + a_k$$

$$a_{k+1} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k}$$

$$a_{k+1} \geq M_k$$

យក $a_{k+1} = M_k + \varepsilon \,,\; \varepsilon \geq 0$

យើងបាន
$$\begin{aligned}\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{k+1}}{k+1} &= \frac{kM_k + M_k + \varepsilon}{k+1} \\ &= \frac{(k+1)M_k + \varepsilon}{k+1} \\ &= M_k + \frac{\varepsilon}{k+1}\end{aligned}$$

នាំអោយ
$$\begin{aligned}\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1} &= \left(M_k + \frac{\varepsilon}{k+1}\right)^{k+1} \\ &\geq M_k^{k+1} + \varepsilon M_k^k \\ &\geq M_k^k\left(M_k + \varepsilon\right) \\ &\geq a_1 a_2 a_3 \ldots a_k a_{k+1}\end{aligned}$$

នាំអោយ $$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{k+1}}{k+1}\geq\sqrt[k+1]{a_1a_2a_3\ldots a_{k+1}}$$ ពិត

ដូចនេះ $$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n}$$

សមភាពពេល $a_1=a_2=\ldots=a_n$

អនុវត្តន៏

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $$\sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n}\geq\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_n}+\ldots+\frac{1}{a_n}\geq n\sqrt{\frac{1}{a_1a_2a_3\ldots a_n}}$$

ដូចនេះ $$\sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n}\geq\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{2}{3}$

យើងមាន $$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n}$$

$$\geq\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

នាំអោយ $$\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}}{n}>\frac{n}{n+n+1+\ldots+2n}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{n^2}{\frac{n(n+2n)}{2}}=\frac{2}{3}$$

ដូចនេះ $$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{2}{3}$$

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{x^n}{1+x+x^2+\ldots+x^{2n}}\le\dfrac{1}{2n+1}$

តាម AM-GM: $$\frac{1+x+x^2+\ldots+x^{2n}}{2n+1}\ge\sqrt[2n+1]{1\cdot x\cdot x^2\ldots x^{2n}}$$

$$\ge\sqrt[2n+1]{x^{\frac{2n(2n+1)}{2}}}=x^n$$

ដូចនេះ $$\frac{x^n}{1+x+x^2+\ldots+x^{2n}}\le\frac{1}{2n+1}$$

លំហាត់ 35 គេអោយ $n\ge 2$, x_1 , x_2 , ... , x_n ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញ

លក្ខខណ្ឌ $\dfrac{1}{x_1+1998}+\dfrac{1}{x_2+1998}+\ldots+\dfrac{1}{x_n+1998}=\dfrac{1}{1998}$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{\sqrt[n]{x_1x_2x_3\ldots x_n}}{n-1}\ge 1998$ (1) ។

(វៀតណាម 1998)

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

យើងមាន $\dfrac{1}{x_1+1998}+\dfrac{1}{x_2+1998}+\ldots+\dfrac{1}{x_n+1998}=\dfrac{1}{1998}$

$$\Leftrightarrow\frac{1998}{x_1+1998}+\frac{1998}{x_2+1998}+\ldots+\frac{1998}{x_n+1998}=1$$

$$\Leftrightarrow a_1+a_2+\ldots+a_n=1$$

ដែល $a_i=\dfrac{1998}{x_i+1998}$ គេបាន $x_i=1998\left(\dfrac{1}{a_i}-1\right)$ ចំពោះ $i=\overline{1,n}$

(1) $\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}1998\left(\dfrac{1}{a_i}-1\right)}}{n-1}\ge 1998$

$$\Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_i}-1\right) \ge (n-1)^n$$ ពិត

ដោយហេតុថា $\frac{1}{a_i}-1=\frac{1-a_i}{a_i}=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{i-1}+a_{i+1}+\ldots+a_n}{a_i}$

$$\ge (n-1)\sqrt[n-1]{\frac{a_1a_2\ldots a_{i-1}a_{i+1}\ldots a_n}{a_i^{n-1}}}$$

$$\ge (n-1)\frac{\sqrt[n-1]{a_1a_2\ldots a_{i-1}a_{i+1}\ldots a_n}}{a_i}$$

គេបាន $\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_i}-1\right) \ge \prod_{i=1}^{n} (n-1)\frac{\sqrt[n-1]{a_1a_2\ldots a_{i-1}a_{i+1}\ldots a_n}}{a_i} \ge (n-1)^n$

ដូចនេះ $\frac{\sqrt[n]{x_1x_2x_3\ldots x_n}}{n-1} \ge 1998$

លំហាត់ 35 ឧបមាថា x , y , z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $x+y+z=3$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \ge xy+yz+zx$ ។

(រុស្ស៊ី 2002)

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងមាន $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \ge xy+yz+zx$

$$\Leftrightarrow x^2+2\sqrt{x}+y^2+2\sqrt{y}+z^2+2\sqrt{z} \ge x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$$

$\Leftrightarrow x^2+2\sqrt{x}+y^2+2\sqrt{y}+z^2+2\sqrt{z} \ge 9$ (1) ព្រោះ $x+y+z=3$

តាមវិសមភាព AM-GM យើងបាន

$$x^2+2\sqrt{x}=x^2+\sqrt{x}+\sqrt{x} \ge 3\sqrt[3]{x^2x}=3x$$

$$y^2+2\sqrt{y} \ge 3y$$

$$z^2+2\sqrt{z} \ge 3z$$

បូកអង្គ និង អង្គ គេបាន $x^2 + y^2 + z^2 + 2\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\right) \geq 3(x + y + z)$

សមមូល $x^2 + y^2 + z^2 + 2\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\right) \geq 9$

（1）ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

ដូចនេះ $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq xy + yz + zx$

លំហាត់ 36 គេអោយ x , y , z បំពេញលក្ខខណ្ឌ $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{x^2 + yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}} + \frac{y^2 + zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}} + \frac{z^2 + xy}{\sqrt{2x^2(x+y)}} \geq 1 \text{ ។}$$

（APMO ）

សម្រាយបញ្ជាក់

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{x^2 + yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}} + \dfrac{y^2 + zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}} + \dfrac{z^2 + xy}{\sqrt{2x^2(x+y)}} \geq 1$

របៀបទី 1

យើងមាន

$$\frac{x^2 + yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}} = \frac{x^2 - x(y+z) + yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}} + \frac{x(y+z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}}$$

$$= \frac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}} + \sqrt{\frac{y+z}{2}}$$

$$\geq \frac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}} + \frac{\sqrt{y} + \sqrt{z}}{2} \qquad （1）$$

ស្រាយដូចគ្នាយើងបាន

$$\frac{y^2 + zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}} \geq \frac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}} + \frac{\sqrt{z} + \sqrt{x}}{2} \qquad （2）$$

$$\frac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}} \geq \frac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2} \qquad (3)$$

បូកអង្គ និង អង្គនៃ (1), (2), (3)

$$\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{z^2+xy}{\sqrt{2x^2(x+y)}}$$

$$\geq \frac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$$

$$\geq \frac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}+1$$

បង្ហាញថា $\frac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}} \geq 0$

សន្មតថា $x \geq y \geq z$ យើងបាន $\frac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}} \geq 0$

ហើយ $\frac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}$

$$= \frac{(y-z)(x-z)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}-\frac{(y-z)(x-y)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}$$

នាំអោយ $\frac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}$

$$\geq \frac{(y-z)(x-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}-\frac{(y-z)(x-y)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}$$

$$=(y-z)(x-y)\left[\frac{1}{\sqrt{2z^2(x+y)}}-\frac{1}{\sqrt{2y^2(z+x)}}\right]$$

ដោយ $y^2(z+x)=y^2z+y^2x \geq yz^2+z^2x=z^2(x+y)$

នាំអោយ $$\frac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\geq 0$$

គេបាន $$\frac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\geq 0$$

ដូចនេះ $$\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{z^2+xy}{\sqrt{2x^2(x+y)}}\geq 1$$

របៀបទី 2

តាមវិសមភាព Cauchy – Schwarz

$$\left[\frac{x^2}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{y^2}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{z^2}{\sqrt{2x^2(x+y)}}\right]$$

$$\times\left[\sqrt{2(y+z)}+\sqrt{2(z+x)}+\sqrt{2(x+y)}\right]\geq\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2=1 \quad (1)$$

ហើយ $$\left[\frac{yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{xy}{\sqrt{2x^2(x+y)}}\right]$$

$$\times\left[\sqrt{2(y+z)}+\sqrt{2(z+x)}+\sqrt{2(x+y)}\right]\geq\left(\sqrt{\frac{yz}{x}}+\sqrt{\frac{zx}{y}}+\sqrt{\frac{xy}{z}}\right)^2 \quad (2)$$

បូក (1), (2) យើងបាន

$$\left[\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{z^2+xy}{\sqrt{2x^2(x+y)}}\right]$$

$$\times\left[\sqrt{2(y+z)}+\sqrt{2(z+x)}+\sqrt{2(x+y)}\right]\geq 1+\left(\sqrt{\frac{yz}{x}}+\sqrt{\frac{zx}{y}}+\sqrt{\frac{xy}{z}}\right)^2$$

$$\geq 2\left(\sqrt{\frac{yz}{x}}+\sqrt{\frac{zx}{y}}+\sqrt{\frac{xy}{z}}\right)$$

បង្ហាញថា $2\left(\sqrt{\frac{yz}{x}}+\sqrt{\frac{zx}{y}}+\sqrt{\frac{xy}{z}}\right)\geq\sqrt{2(y+z)}+\sqrt{2(z+x)}+\sqrt{2(x+y)}$

តាមវិសមភាព AM – GM

$$\left[\sqrt{\frac{yz}{x}}+\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{zx}{y}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{xy}{z}}\right)\right]^2\geq 4\sqrt{\frac{yz}{x}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{zx}{y}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{xy}{z}}\right)=2(y+z)$$

$$\sqrt{\frac{yz}{x}}+\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{zx}{y}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{xy}{z}}\right)\geq\sqrt{2(y+z)} \quad (3)$$

ស្រាយដូចគ្នាយើងបាន $\sqrt{\frac{zx}{y}}+\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{xy}{z}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{yz}{x}}\right)\geq\sqrt{2(z+x)} \quad (4)$

$$\sqrt{\frac{xy}{z}}+\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{yz}{x}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{zx}{y}}\right)\geq\sqrt{2(x+y)} \quad (5)$$

បូកអង្គ និង អង្គ (3), (4), (5) គេបាន

$$2\left(\sqrt{\frac{yz}{x}}+\sqrt{\frac{zx}{y}}+\sqrt{\frac{xy}{z}}\right)\geq\sqrt{2(y+z)}+\sqrt{2(z+x)}+\sqrt{2(x+y)}$$

ដូចនេះ $\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{z^2+xy}{\sqrt{2x^2(x+y)}}\geq 1$

លំហាត់ 37 គេអោយ A ជាផ្នែកមិនទទេនៃ IR ដែលមានលក្ខណៈ បើ x , y ជាចំនួនពិតដែល $x+y\in A$ គេបាន $xy\in A$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $A=\mathrm{IR}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ដោយ A ជាផ្នែកមិនទទេនៃ IR

ឧបមាថា $a\in A$

យើងមាន $a+0=a\in A \Rightarrow a(0)=0\in A$

ចំពោះ $b\in \mathrm{IR}$ គេបាន $b+(-b)=0 \Rightarrow b(-b)=-b^2\in A$

គេបាន $(-\infty,0\ ]\subset A$

ហើយ $c>0$ នាំអោយ $-\sqrt{c}+(-\sqrt{c})<0 \Rightarrow -\sqrt{c}-\sqrt{c}\in A$

គេបាន $-\sqrt{c}(-\sqrt{c})=c\in A$

សរុបមក $A=\mathrm{IR}$

លំហាត់ 38 ក. រកចំនួនពិត a , b , c ដើម្បីអោយ

$$h(x)=\frac{4x^2-7x+5}{x-2x^2+x^3}=\frac{a}{x}+\frac{b}{1-x}+\frac{c}{(1-x)^2}$$ ចំពោះ

$x\neq 0$, $x\neq 1$ ។

ខ. គណនា $k(x)=\int h(x)dx$ ដោយដឹងថាក្រាបតាង $y=k(x)$ កាត់តាមចំណុច $M(2,2)$ ។ *(ឆមាសទី ១ ថ្នាក់ទី 12 ឆ្នាំ 2012)*

ចម្លើយ

ក. រកចំនួនពិត a , b , c

យើងមាន $h(x)=\dfrac{4x^2-7x+5}{x-2x^2+x^3}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{1-x}+\dfrac{c}{(1-x)^2}$

ដោយ
$$\frac{a}{x}+\frac{b}{1-x}+\frac{c}{(1-x)^2}=\frac{a(1-x)^2+bx(1-x)+cx}{x(1-x)^2}$$
$$=\frac{a(1-2x+x^2)+bx-bx^2+cx}{x(1-x)^2}$$
$$=\frac{a-2ax+ax^2+bx-bx^2+cx}{x(1-x)^2}$$

$$= \frac{(a-b)x^2 + (-2a+b+c)x + a}{x(1-x)^2}$$

នាំអោយ $\dfrac{4x^2-7x+5}{x-2x^2+x^3} = \dfrac{(a-b)x^2 + (-2a+b+c)x + a}{x(1-x)^2}$

កាលណា $\begin{cases} a-b=4 & (1) \\ -2a+b+c=-7 & (2) \\ a=5 & (3) \end{cases}$

(1) នាំអោយ $b = a-4 = 5-1 = 1$

(2) នាំអោយ $c = 2a-b-7 = 5(2)-1-7 = 2$

ដូចនេះ $a=5$, $b=1$, $c=2$

ខ. គណនា $k(x) = \int h(x)dx$

បើ $a=5$, $b=1$, $c=2$ នាំអោយ $h(x) = \dfrac{5}{x} + \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{2}{(1-x)^2}$

យើងបាន $k(x) = \int \left[\dfrac{5}{x} + \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{2}{(1-x)^2} \right] dx$

$$= \int \left[\frac{5}{x} - \frac{(1-x)'}{1-x} - \frac{2(1-x)'}{(1-x)^2} \right] dx$$

$$= 5\ln|x| - \ln|1-x| + \frac{2}{1-x} + c$$

ដោយ ក្រាបតាង $y = k(x)$ កាត់តាមចំណុច $M(2,2)$

នាំអោយ $2 = 5\ln 2 - \ln 1 + \dfrac{2}{1-2} + c$

នាំអោយ $c = 4 - 5\ln 2$

នាំអោយ $k(x) = 5\ln|x| - \ln|1-x| + \dfrac{2}{1-x} + 4 - 5\ln 2$

ដូចនេះ $k(x)=5\ln|x|-\ln|1-x|+\dfrac{2}{1-x}+4-5\ln 2$

លំហាត់ 39

ដើម្បីគណនា $F(x)=\int\dfrac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}dx$ គេសរសេរ $F(x)$ ជាទម្រង់

$$\int\frac{A(a\sin x+b\cos x)+B(a\cos x-b\sin x)}{a\sin x+b\cos x}dx$$

$$=A\int dx+B\int\frac{d(a\sin x+b\cos x)}{a\sin x+b\cos x}$$

$$=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x|+c$$ ចំពោះ $c\in IR$ ។

យើងកំណត់យក

$$a_1\sin x+b_1\cos x=A(a\sin x+b\cos x)+B(a\cos x-b\sin x)$$

$$=(Aa-Bb)\sin x+(bA+aB)\cos x$$

យើងបាន $\begin{cases}Aa-Bb=a_1\\ bA+aB=b_1\end{cases}$ ។

អនុវត្តន៍ គណនាអាំងតេក្រាល

ក. $\int\dfrac{3\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ ខ. $\int\dfrac{2\sin x+3\cos x}{\sin x-\cos x}dx$ ។

<u>ចម្លើយ</u>

គណនាអាំងតេក្រាល

ក. $\int\dfrac{3\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

ឧបមាថា $3\sin x+\cos x=A(\sin x+\cos x)+B(\cos x-\sin x)$

$$=(A-B)\sin x+(A+B)\cos x$$

កាលណា $\begin{cases} A-B=3 \\ A+B=1 \end{cases} \Rightarrow A=2\ ,\ B=-1$

យើងបាន

$$\int \frac{3\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx = \int \frac{2(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}dx + \int \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$= 2\int dx + \int \frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}$$

$$= 2x+\ln|\sin x+\cos x|+c\ ,\ c\in IR$$

ដូចនេះ $\int \frac{3\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx = 2x+\ln|\sin x+\cos x|+c\ ,\ c\in IR$

ខ. $\int \frac{2\sin x+3\cos x}{\sin x-\cos x}dx$

ឧបមាថា $2\sin x+3\cos x = A(\sin x-\cos x)+B(\sin x+\cos x)$

$$=(A+B)\sin x+(-A+B)\cos x$$

កាលណា $\begin{cases} A+B=2 \\ -A+B=3 \end{cases} \Rightarrow B=\frac{5}{2}, A=-\frac{1}{2}$

យើងបាន $\int \frac{2\sin x+3\cos x}{\sin x-\cos x}dx$

$$= \int \frac{\frac{5}{2}(\sin x-\cos x)}{\sin x-\cos x}dx + \int \frac{-\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)}{\sin x-\cos x}dx$$

$$= \frac{5}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \frac{(\sin x-\cos x)'}{\sin x-\cos x}dx$$

$$= \frac{5}{2}x-\frac{1}{2}\ln|\sin x-\cos x|+c\ ,\ c\in IR$$

ដូចនេះ $\int \frac{2\sin x+3\cos x}{\sin x-\cos x}dx = \frac{5}{2}x-\frac{1}{2}\ln|\sin x-\cos x|+c\ ,\ c\in IR$

ឯកសារយោង (References)

1. Alfred Posamentier and Charles T. Salkind, 1970, Challenging Problems In Geometry and Algebra, Dover Publications, INC. New York.
2. Dan Bránzei, Ioan Serdean and Vasile Serdean, 2003, Junior Balkan Mathematical Olympiads, Plus Publishing House.
3. Titu Andreescu and Bogdan Enescu, Mathematical Olympiad Treasures, Birkhauser.
4. Titu Andreescu and Zuming Feng, 2001, 101 Problems in Algebra, AMT Publishing.
5. 104 Number Theory Problems, 2007, Birkhauser.

និង ឯកសារជាច្រើនផ្សេងទៀត ។

បណ្ដាញសង្គម

Facebook Page: *Mathematics For Scholarships*

Facebook Account: *Khmer Maths*

Group: *ត្រៀមប្រឡងអាហារូបករណ៍*

សូមអរគុណ!