

គន្លឹះសិក្សាអនុគមន៍ និងខ្សែកោង

រៀបរៀងដោយ ស៊ី សំអុន

∴ ∴ ∴
∴

• ដែនកំណត់

- អនុគមន៍សនិទាន $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ មានន័យកាលណា $g(x) \neq 0$ ។ ដូច្នេះ $D = \mathbb{R} - \{g(x) = 0\}$

• អាស៊ីមតូត

- បើ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ នោះគេអាចទាញថាបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x = a$ ជា អាស៊ីមតូតឈរ នៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f ។
 - បើ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$ នោះគេអាចទាញថាបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y = b$ ជា អាស៊ីមតូតដេក នៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f ។
 - បើគេមានអនុគមន៍ $f(x) = ax + b + \phi(x)$ ជាទម្រង់កាណូនិច ដែល $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) = 0$ នោះគេអាចទាញថាបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y = ax + b$ ជា អាស៊ីមតូតទ្រេត នៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f ។
- ម្យ៉ាងទៀត បើ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ និង $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = b$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y = ax + b$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត នៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f ។

• សមីការបន្ទាត់ប៉ះ

- បើគេមានអនុគមន៍ $y = f(x)$ ហើយមានក្រាបតាង C ប៉ះនឹងបន្ទាត់ (T) ត្រង់អាប់ស៊ីស x_0 នោះគេបាន
 $(T) : y - y_0 = y'_0(x - x_0)$ ឬ $(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ដែលយើងត្រូវសរសេរទៅជាទម្រង់ $(T) : y = ax + b$ ។

១. ចូររកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

$$(ក) f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$(ខ) f(x) = \frac{2-3x}{x^2-3x+2}$$

$$(គ) f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$$

$$(ឃ) f(x) = \ln(x+1) + e^{2x}$$

$$(ង) f(x) = x+1 + \ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right)$$

$$(ច) f(x) = x+1 + \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$$

២. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ T ដែលប៉ះនឹងខ្សែកោង៖

$$(ក) C : f(x) = x^2 + 1 \text{ ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស } x_0 = 1$$

$$(ខ) C : f(x) = 1 - x \ln x \text{ ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស } x_0 = 1$$

$$(គ) C : f(x) = \frac{e^x}{1 - \sin x} \text{ ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស } x_0 = 0$$

$$(ឃ) C : f(x) = e^x + \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \text{ ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស } x_0 = \ln 2$$

៣. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y = f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$ និងមានខ្សែកោង H ។

$$(ក) \text{ សរសេរសមីការបន្ទាត់ } d \text{ ដែលប៉ះខ្សែកោង } H \text{ ត្រង់ចំណុច } A(1, 1) \text{ ។}$$

$$(ខ) \text{ គេឲ្យខ្សែកោង } K \text{ តាងអនុគមន៍ } y = g(x) = e^{3x} + x - e^6 \text{ ។}$$

ចូរកំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ B រវាងបន្ទាត់ d និងខ្សែកោង K តាង g ។

៤. រកតម្លៃបរមានៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

$$(ក) y = \frac{x^2 - x - 2}{x + 2}$$

$$(ខ) y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}$$

$$(គ) y = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$$

៥. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 2}$ ។ រកតម្លៃមេគុណ a, b និង c ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f មានតម្លៃស្មើ -1 ចំពោះ $x = 1$ ហើយមានតម្លៃបរមាស្មើ 8 ក្រុង $x = 4$ ។

៦. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x}$ ។ រកតម្លៃមេគុណ a, b និង c ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f មានតម្លៃស្មើ 8 ចំពោះ $x = 1$ ហើយមានតម្លៃអតិបរមាស្មើ -1 ក្រុង $x = -2$ ។

៧. គេឲ្យអនុគមន៍ $g(x) = ax + a + \frac{b}{x+2}$ ចំពោះ $x \neq -2$ ។ រកតម្លៃមេគុណ a និង b ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ g មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ 2 ចំពោះ $x = 1$ ហើយមានតម្លៃអតិបរមាស្មើ -1 ក្រុង $x = 0$

៨. រកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍នីមួយៗដូចខាងក្រោម៖

$$(ក) y = f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$$

$$(ខ) y = f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 2}$$

$$(គ) y = f(x) = \frac{3x^2 + 6x + 3}{x^2 + 2}$$

៩. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y = f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ និងមានក្រាប C ។

(ក) រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតរបស់ក្រាប C ។

(ខ) បង្ហាញថាចំណុច $I(1, 1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ក្រាប C ។

១០. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y = f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ និងមានក្រាប C ។

(ក) រកសមីការអាស៊ីមតូតរបស់ក្រាប C ។

(ខ) សិក្សាភាពគូរ-សេស រួចទាញថា គល់ O នៃតម្រុយជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប C ។

១១. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

$$(ក) f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$$

$$(ខ) f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1}$$

$$(គ) f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 2}$$

១២. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

$$(ក) f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$$

$$(ខ) f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x}$$

$$(គ) f(x) = \frac{3x^2 + 6x + 3}{x^2 + 2}$$

១៣. អនុវត្តន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = x + 2 - \frac{4}{x-1}$ និងមានខ្សែកោង C ។

(ក) រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។ គណនា និងសិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ ។

(ខ) រកតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមានៃ f ។

(គ) កំណត់សមីការនៃអាស៊ីមតូតឈរ និងទ្រេតនៃខ្សែកោង C ។

(ឃ) សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងអាស៊ីមតូតទ្រេត និងខ្សែកោង C ។

(ង) សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់ខ្សែកោង C ។

១៤. អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x \neq 1$ ដោយ $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$ និងមានក្រាប C ។

(ក) រកចំនួនពិត a, b និង c ដើម្បីឲ្យ $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ ចំពោះគ្រប់ $x \neq 1$ ។

(ខ) រកតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមានៃ f ។

(គ) រកសមីការនៃអាស៊ីមតូតឈរ និងទ្រេតនៃខ្សែកោង C ។

(ឃ) សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងអាស៊ីមតូតទ្រេត និងខ្សែកោង C ។

(ង) សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់ខ្សែកោង C ។

១៥. h ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $h(x) = \frac{x^2}{x-1}, x \in \mathbb{R}$ និង $x \neq 1$ ។

(ក) កំណត់រក a, b និង c ដើម្បីឲ្យ $h(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ ចំពោះ $x \neq 1$ ។

(ខ) ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង C កំណាងអនុគមន៍ f ។

១៦. g ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $g(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 2}$ មានក្រាប C ។

(ក) កំណត់ចំនួនពិត a, b និង c ដើម្បីឲ្យ $g(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$ ចំពោះ $x \neq 2$ ។

(ខ) កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងទ្រេតនៃក្រាប C ។

(គ) បង្ហាញថាចំណុច $I(2; 1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប C ។

១៧. គេឲ្យអនុគមន៍ g កំណត់ដោយ $g(x) = \frac{4x-4}{x^2}, x \neq 0$ ។ C ជាក្រាបនៃអនុគមន៍ g ។

(ក) គណនា $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ រួចទាញរកអាស៊ីមតូតនៃក្រាប C ។

(ខ) គូសតារាងអថេរភាពនៃ g ។

(គ) បង្ហាញថា C មានចំណុចរបត់មួយ រួចរកកូអរដោនេនៃចំណុចរបត់នេះ ។

(ឃ) គណនា $g(-4), g(-2), g(1)$ និង $g(4)$ ។

(ង) សង់ក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ ។

១៨. f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{x^2 + 6x}{2(x^2 - 2x + 2)}$ មានក្រាប C ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ (O, \vec{i}, \vec{j}) ។

(ក) បង្ហាញថា f កំណត់បានចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

(ខ) គណនាលីមីតនៃ f កាលណា x ខិតជិត $+\infty, -\infty$ រួចបង្ហាញថា C មានអាស៊ីមតូតមួយ ដែលត្រូវបញ្ជាក់សមីការ ។

(គ) គណនា $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ ។ ទាញថា f មានតម្លៃអតិបរមាមួយ និងអប្បបរមាមួយ រួចគណនាតម្លៃទាំងពីរនេះ ។

(ឃ) គូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។

(ង) គណនាកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាង C និងអ័ក្សទាំងពីរនៃតម្រុយ និងចំណុចប្រសព្វរវាង C និងអាស៊ីមតូតដេក ។

(ច) គណនា $f(2)$ និង $f(3)$ ។ សង់ខ្សែកោង C និងអាស៊ីមតូត ។

១៩. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y = f(x) = x + 2 + \frac{4}{x-1}$ និងមានខ្សែកោង C ។

(ក) រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f គណនា និងសិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ ។ បង្ហាញថា f មានអតិបរមាមួយ និងអប្បបរមាមួយ ហើយគណនាតម្លៃនៃបរមាទាំងពីរនេះ ។

(ខ) កំណត់សមីការនៃអាស៊ីមតូតឈរ និងទ្រេតនៃខ្សែកោង C ។

(គ) សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងអាស៊ីមតូតទ្រេត និងខ្សែកោង C ។

(ឃ) សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់ខ្សែកោង C ។

២០. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 5x + 7}$ ។ យើងតាងដោយក្រាប C របស់វាលើតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ (O, \vec{i}, \vec{j}) ។

1. រកដែនកំណត់ D នៃអនុគមន៍ f ។

2. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$ ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូត d ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ។

3. (ក) ស្រាយបំភ្លឺថាគ្រប់ចំនួនពិត $x \in \mathbb{D}$, ដេរីវេ $f'(x) = \frac{-3(x^2 - 6x + 8)}{(x^2 - 5x + 7)}$ ។

(ខ) សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

(គ) សង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ f ។

២១. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R} - \{2\}$ ដោយ $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$ ។ យើងតាង C ជាក្រាបរបស់វា លើតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(0, \vec{i}, \vec{j})$ ។

1. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$ ។

2. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

3. (ក) រកចំនួនពិត a, b, c ដែលគ្រប់ $x \neq 2$; $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$ ។

(ខ) គេតាង d ដែលមានសមីការ $y = x + 1$ ។ បង្ហាញថា d ជាអាស៊ីមតូតនៃ C ត្រង់ $+\infty$ និង $-\infty$ ។
សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d ។

(គ) សង់ក្រាប C និង បន្ទាត់ d ។

២២. f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $I = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ ដោយ $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 4}$ ។

(ក) សិក្សាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty, -2, 2$ និង $+\infty$ ។
ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេក និង អាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបតាង f ។

(ខ) សិក្សាអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

(គ) សង់នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(0, \vec{i}, \vec{j})$ ក្រាបតាង f ។

២៣. គេមានអនុគមន៍ f ដែល $f(x) = \frac{x^2 - x - 3}{x + 1}$ និង គេតាងដោយ (C) ក្រាបនៃអនុគមន៍ f ។

(ក) រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

(ខ) បង្ហាញថា $f(x) = x - 2 - \frac{1}{x + 1}$ ។

(គ) បង្ហាញថាបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y = x - 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

(ឃ) សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃ f ។

២៤. គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \frac{(x + 2)(x - 2)}{(1 - x)}$ ។

(ក) រកដែនកំណត់ $f(x)$ ។

(ខ) បង្ហាញថា $f(x) = -x - 1 + \frac{3}{x - 1}$ ។

(គ) សិក្សាអថេរភាពនិង សង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ $f(x) = \frac{(x + 2)(x - 2)}{(1 - x)}$ ។

២៥. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ \mathbb{R} ដោយ $f(x) = \frac{1}{1 + e^x} + \frac{2}{9}x$ និង C តាងក្រាបរបស់ f ។

1. អនុគមន៍ g កំណត់លើ \mathbb{R} ដោយ $g(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$ ។

(ក) ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $g(x) = (2e^x - 1)(e^x - 2)$ ។

(ខ) ទាញយកតាមកម្លែងនៃ x ចំពោះសញ្ញានៃ $g(x)$ ។

2. (ក) រក $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ។

(ខ) អនុគមន៍ f មានដេរីវេ f' ។ បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $f'(x)$ និង $g(x)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា។

(គ) សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ \mathbb{R} ។

២៦. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y = f(x) = \frac{x^2 - 3x - 3}{x - 2}$ មានក្រាបតំណាង (C) ។

(ក) ចូររកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

(ខ) គណនា $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ។ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

(គ) ចូរបង្ហាញថា $f(x) = x - 1 + \frac{-5}{x - 2}$ ។ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត។

(ឃ) សិក្សាអថេរភាព សង់តារាងអថេរភាព និង សង់ក្រាប (C) ។

២៧. គេអោយអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$ មានក្រាបតំណាង (C) ។

(ក) រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

(ខ) គណនា $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។

(គ) រកតម្លៃនៃចំនួនពិត a, b និង c ដែលធ្វើអោយ $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$ ។ បង្ហាញថា បន្ទាត់ d ដែលមានសមីការ $f(x) = x - 3 + \frac{1}{x - 2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ត្រង់ $\pm\infty$ ។

(ឃ) សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប C ។

២៨. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$ ហើយមានក្រាប C ។

(ក) រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

(ខ) គណនា $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ ។

(គ) សរសេរសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ។

(ឃ) សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ f ។

(ង) សង់តារាងអថេរភាព អាស៊ីមតូត និង ក្រាប C នៃអនុគមន៍ f ។

២៩. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y = f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$ មានក្រាបតំណាង C ។

១. ចូររកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

២. គណនា $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ ។ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ។

៣. បង្ហាញថា $f(x) = x + 1 - \frac{3}{x - 1}$ ។ រួចបង្ហាញថាបន្ទាត់ d ដែលមានសមីការ $y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ខាង $\pm\infty$ ។

៤. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ ។

៥. (ក) សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

(ខ) សិក្សាទីតាំងជៀបរាងក្រាប C និងបន្ទាត់ d ។

(គ) សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ d ក្នុងតម្រុយតែមួយ។

សូមសំណាងល្អ!