

គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២

បង្រៀនដោយ: ស៊ីន ប៉េងហ្គា

August 10, 2018

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រលងធមាសនី ២

វិញ្ញាសាទី១ គ្រឿងប្រលងធមាសទី ២

លំហាត់ទី ១

គណនាអាំងតេក្រាល $I = \frac{1}{e^x+1}$ ដែល $I(0) = \ln 4$

វិញ្ញាសាទី១ គ្រឿងប្រលងធមាសទី ២

លំហាត់ទី ១

គណនាអាំងតេក្រាល $I = \frac{1}{e^x+1}$ ដែល $I(0) = \ln 4$

ដំណោះស្រាយ

វិញ្ញាសាទី១ គ្រឿងប្រលងធម្មាសទី ២

លំហាត់ទី ១

គណនាអាំងតេក្រាល $I = \frac{1}{e^x+1}$ ដែល $I(0) = \ln 4$

ដំណោះស្រាយ

គេមាន
$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{e^x+1} dx = \int \frac{1+e^x-e^x}{e^x+1} x \\ &= \int \left(1 - \frac{e^x}{e^x+1} \right) dx \\ &= \int dx - \int \frac{e^x}{e^x+1} dx \\ &= x - \ln|e^x+1| + c \end{aligned}$$

ដោយ $I(0) = \ln 4$ តែ $I(0) = 0 - \ln 2 + c$
 $= -\ln 2 + c$

នាំអោយ $-\ln 2 + c = \ln 4$

នោះ $c = \ln 4 + \ln 2$
 $= 2 \ln 2 + \ln 2$
 $= 3 \ln 2$

ដោយ $I(0) = \ln 4$ តែ $I(0) = 0 - \ln 2 + c$
 $= -\ln 2 + c$

នាំអោយ $-\ln 2 + c = \ln 4$

នោះ $c = \ln 4 + \ln 2$
 $= 2 \ln 2 + \ln 2$
 $= 3 \ln 2$

ដូចនេះ $I = \int \frac{1}{e^x + 1} dx = x - \ln |e^x + 1| + 3 \ln 2$

វិញ្ញាសាទី១ គ្រឿងប្រលងធមាសទី ២

លំហាត់ទី ២

គេអោយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) : $y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 2$

ក. រកពហុធានីក្រេទីពីរ $P(x)$ ដែលជាចម្លើមពិសេសមួយនៃ (E)

ខ. ដោះស្រាយសមីការ (E') : $y'' + 2y' + y = 0$ រួចទាញរកអនុគមន៍ f ដែលជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E)

គ. រកចម្លើយ f មួយនៃ (E) ដែលខ្សែកោង (C)

តាងអនុគមន៍កាត់តាមចំណុច $M(0, 1)$ ហើយបន្ទាត់ប៉ះនឹង (C)

ត្រង់ចំណុចនោះនោះស្របទៅនឹងបន្ទាត់ (l) : $y = -2x$

វិញ្ញាសាទី១ គ្រឿងប្រលងធមាសទី ២

លំហាត់ទី ២

គេអោយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) : $y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 2$

ក. រកពហុធានីក្រេទីពីរ $P(x)$ ដែលជាចម្លើមពិសេសមួយនៃ (E)

ខ. ដោះស្រាយសមីការ (E') : $y'' + 2y' + y = 0$ រួចទាញរកអនុគមន៍ f ដែលជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E)

គ. រកចម្លើយ f មួយនៃ (E) ដែលខ្សែកោង (C)

តាងអនុគមន៍កាត់តាមចំណុច $M(0, 1)$ ហើយបន្ទាត់ប៉ះនឹង (C)

ត្រង់ចំណុចនោះនោះស្របទៅនឹងបន្ទាត់ (l) : $y = -2x$

ដំណោះស្រាយ

ក. រកពហុធានីក្រេទីពីរ $P(x)$

ក. រកពហុធានីក្រេទីពីរ $P(x)$

តាង $P(x) = ax^2 + bx + c$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ(E)

គេបាន $P'(x) = 2ax + b$

$$P''(x) = 2a$$

ក. រកពហុធានីក្រេទីពីរ $P(x)$

តាង $P(x) = ax^2 + bx + c$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

គេបាន $P'(x) = 2ax + b$

$$P''(x) = 2a$$

ដោយ $P(x)$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

ក. រកពហុធានីក្រេទីពីរ $P(x)$

តាង $P(x) = ax^2 + bx + c$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

គេបាន $P'(x) = 2ax + b$

$$P''(x) = 2a$$

ដោយ $P(x)$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

គេបាន $P''(x) + 2P'(x) + P(x) = x^2 + 2x - 2$

$$2ax + 2(2ax + b) + ax^2 + bx + c = ax^2 + bx + c$$

$$ax^2 + (4a + b)x + (2a + 2b + c) = x^2 + 2x - 2$$

ក. រកពហុធានីក្រេទីពីរ $P(x)$

តាង $P(x) = ax^2 + bx + c$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

គេបាន $P'(x) = 2ax + b$

$$P''(x) = 2a$$

ដោយ $P(x)$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

គេបាន $P''(x) + 2P'(x) + P(x) = x^2 + 2x - 2$

$$2ax + 2(2ax + b) + ax^2 + bx + c = x^2 + 2x - 2$$

$$ax^2 + (4a + b)x + (2a + 2b + c) = x^2 + 2x - 2$$

គេបាន
$$\begin{cases} a = 1 \\ 4a + b = 2 \\ 2a + 2b + c = -2 \end{cases}$$

ក. រកពហុធានីក្រេទីពីរ $P(x)$

តាង $P(x) = ax^2 + bx + c$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ(E)

គេបាន $P'(x) = 2ax + b$

$$P''(x) = 2a$$

ដោយ $P(x)$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

គេបាន $P''(x) + 2P'(x) + P(x) = x^2 + 2x - 2$

$$2ax + 2(2ax + b) + ax^2 + bx + c = x^2 + 2x - 2$$

$$ax^2 + (4a + b)x + (2a + 2b + c) = x^2 + 2x - 2$$

$$\text{គេបាន } \begin{cases} a = 1 \\ 4a + b = 2 \\ 2a + 2b + c = -2 \end{cases} \quad \text{សមមូល } \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{cases}$$

ក. រកពហុធានីក្រេទីពីរ $P(x)$

តាង $P(x) = ax^2 + bx + c$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

គេបាន $P'(x) = 2ax + b$

$$P''(x) = 2a$$

ដោយ $P(x)$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

គេបាន $P''(x) + 2P'(x) + P(x) = x^2 + 2x - 2$

$$2ax + 2(2ax + b) + ax^2 + bx + c = x^2 + 2x - 2$$

$$ax^2 + (4a + b)x + (2a + 2b + c) = x^2 + 2x - 2$$

$$\text{គេបាន } \begin{cases} a = 1 \\ 4a + b = 2 \\ 2a + 2b + c = -2 \end{cases} \quad \text{សមមូល } \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{cases}$$

ដូចនេះ $P(x) = x^2 - 2x$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E)

2. ដោះស្រាយសមីការ $(E') : y'' + 2y' + y = 0$

2. ដោះស្រាយសមីការ $(E') : y'' + 2y' + y = 0$

គេបានសមីការសម្គាល់ $m^2 + 2m + 1 = 0$

$$(m + 1)^2 = 0$$

$$m = -1 \quad \text{ប្លុកឌុប}$$

2. ដោះស្រាយសមីការ $(E') : y'' + 2y' + y = 0$

គេបានសមីការសម្គាល់ $m^2 + 2m + 1 = 0$

$$(m + 1)^2 = 0$$

$$m = -1 \quad \text{ប្លុកឌុប}$$

គេបានចម្លើយនៃសមីការ (E') គឺ $y = (Ax + B)e^{mx}$

$$= (Ax + B)e^{-x}$$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការ (E') គឺ $= (Ax + B)e^{-x}$

ដែល $A, B \in \mathbb{R}$

រួចទាញរកអនុគមន៍ f ដែលជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E)

រួចទាញរកអនុគមន៍ f ដែលជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E)

$$\begin{aligned}\text{ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ } (E) \text{ គឺ } f &= y + P(x) \\ &= (Ax + B)e^{-x} + x^2 - 2x\end{aligned}$$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $f = (Ax + B)e^{-x} + x^2 - 2x$
ដែល $A, B \in \mathbb{R}$

គ. រកចម្លើយ f មួយនៃ (E)

រួចទាញរកអនុគមន៍ f ដែលជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E)

$$\begin{aligned}\text{ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ } (E) \text{ គឺ } f &= y + P(x) \\ &= (Ax + B)e^{-x} + x^2 - 2x\end{aligned}$$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $f = (Ax + B)e^{-x} + x^2 - 2x$
ដែល $A, B \in \mathbb{R}$

គ. រកចម្លើយ f មួយនៃ (E)

$$\text{តាមបំណង គេបាន } \begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = -2 \end{cases}$$

គេមាន $f(x) = (Ax + B)e^{-x} + x^2 - 2x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= Ae^{-x} - (Ax + B)e^{-x} + 2x - 2 \\ &= (A - Ax - B)e^{-x} + 2x - 2 \end{aligned}$$

$$\text{គេបាន } \begin{cases} f(0) = B \\ f'(0) = A - B - 2 \end{cases} \quad \text{តែ } \begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = -2 \end{cases}$$

$$\text{សមមូល } \begin{cases} B = 1 \\ A - B - 2 = -2 \end{cases} \quad \text{គេបាន } \begin{cases} B = 1 \\ A = 1 \end{cases}$$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $f = (x + 1)e^{-x} + x^2 - 2x$

វិញ្ញាសាទី១ គ្រឿងប្រលងឆមានទី ២

លំហាត់ទី ៣

នៅក្នុងប្រអប់មួយមានបីចង្កៀវ ៨ និង បីចក្រហម ៤ ដែលដូចគ្នាទាំងទំហំ និងគំរូ។ គេដកបីច ៥ ដើមព្រមគ្នាដោយចៃដន្យ

- ក. រកប្រូបាបដែលគេបានបីចទាំង ៥ ជាបីចង្កៀវ
- ខ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានបីចក្រហម ៣
- គ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានបីចក្រហមមួយយ៉ាងតិច
- ឃ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានបីចក្រហម ២ ឬ ៣

វិញ្ញាសាទី១ គ្រឿងប្រលងឆមានទី ២

លំហាត់ទី ៣

នៅក្នុងប្រអប់មួយមានបិទខ្សែ៨ និង បិទក្រហម ៤ ដែលដូចគ្នាទាំងទំហំ និងគំរូ។ គេដកបិទ ៥ ដើមព្រមគ្នាដោយចៃដន្យ

- ក. រកប្រូបាបដែលគេបានបិទទាំង ៥ ជាបិទខ្សែ
- ខ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានបិទក្រហម ៣
- គ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានបិទក្រហមមួយយ៉ាងតិច
- ឃ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានបិទក្រហម ២ ឬ ៣

ដំណោះស្រាយ

ក. រកប្រូបាបដែលគេបានបិទទាំង 5 ជាបិទខៀវ

ក. រកប្រូបាបដែលគេបានបិទទាំង 5 ជាបិទខៀវ
តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគេបានបិទទាំង 5 ជាបិទខៀវ

ក. រកប្រូបាបដែលគេបានបិទទាំង 5 ជាបិទខៀវ

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគេបានបិទទាំង 5 ជាបិទខៀវ

$$\text{គេបាន } n(A) = C(8, 5) = \frac{8!}{3!5!} = 56$$

$$\text{ហើយ } n(S) = C(12, 5) = \frac{12!}{5!7!} = 792$$

$$\begin{aligned}\text{នោះ } P(A) &= \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{56}{792} \\ &= \frac{7}{99}\end{aligned}$$

ដូចនេះ ប្រូបាបដែលគេបានបិទទាំង 5 ជាបិទខៀវគឺ $P(A) = \frac{7}{99}$

2. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានបីចក្រហម 3

2. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានបីចក្រហម 3
តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគេបានបីចក្រហម 3

2. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានបីចក្រហម 3

តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគេបានបីចក្រហម 3
មានន័យថា គេចាប់បានបីចក្រហម 3 និង ខៀវ 2

2. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានបីចក្រហម 3

តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគេបានបីចក្រហម 3

មានន័យថា គេចាប់បានបីចក្រហម 3 និង ខៀវ 2

$$\text{គេបាន } n(B) = C(4, 3) \times C(8, 2) = \frac{4!}{1!3!} \times \frac{8!}{6!2!}$$

$$n(B) = 112$$

$$\begin{aligned}\text{នោះ } P(B) &= \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{112}{792} \\ &= \frac{14}{99}\end{aligned}$$

ដូចនេះ ប្រូបាបដែលគេចាប់បានបីចក្រហម 3 គឺ $P(B) = \frac{14}{99}$

គ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានបីចក្រហមមួយយ៉ាងតិច

គ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានបីចក្រហមមួយយ៉ាងតិច
តាង C ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានបីចក្រហមមួយយ៉ាងតិច

គ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានបីចក្រហមមួយយ៉ាងតិច
តាង C ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានបីចក្រហមមួយយ៉ាងតិច
ដោយព្រឹត្តិការណ៍ C ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយពីព្រឹត្តិការណ៍ A

គ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានបីចក្រហមមួយយ៉ាងតិច
 តាង C ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានបីចក្រហមមួយយ៉ាងតិច
 ដោយព្រឹត្តិការណ៍ C ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយពីព្រឹត្តិការណ៍ A

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } P(A) + P(C) &= 1 \\ P(C) &= 1 - P(A) \\ &= 1 - \frac{7}{99} \\ &= \frac{92}{99}\end{aligned}$$

ដូចនេះ ប្រូបាបដែលគេចាប់បានបីចក្រហមមួយយ៉ាងតិចគឺ $P(C) = \frac{92}{99}$

ឃ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានបីចក្រហម 2 ឬ 3

ឃ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានបីចក្រហម 2 ឬ 3
តាង D ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគេចាប់បានបីចក្រហម 2 ឬ 3

ឃ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានបីចក្រហម 2 ឬ 3

តាង D ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគេចាប់បានបីចក្រហម 2 ឬ 3
មានន័យថា គេចាប់បានបីចក្រហម 2 និង ខៀវ 3
ឬ ក្រហម 3 និង ខៀវ 2

ឃ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានបីចក្រហម 2 ឬ 3

តាង D ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគេចាប់បានបីចក្រហម 2 ឬ 3
មានន័យថា គេចាប់បានបីចក្រហម 2 និង ខៀវ 3
ឬ ក្រហម 3 និង ខៀវ 2

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } n(B) &= C(4, 2) \times C(8, 3) + C(4, 3) \times C(8, 2) \\ &= \frac{4!}{2!2!} \times \frac{8!}{5!3!} + \frac{4!}{1!3!} \times \frac{8!}{6!2!} = 448\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{នោះ } P(B) &= \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{448}{792} \\ &= \frac{56}{99}\end{aligned}$$

ដូចនេះ ប្រូបាបដែលគេចាប់បានបីចក្រហម 2 ឬ 3 គឺ $P(D) = \frac{56}{99}$