ដំណោះស្រាយ និង ក្បួនកាត់ QCM លំហាត់ប្រឡងចូលតិចណូ ២០១៥

1. កន្សោម $D_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$ ស្មើនឹង៖

ក. $D_n = 2^n - 1$ ខ. $D_n = 2^{n+1} - 1$

គ. $D_n = 2^n + 1$ ឃ. $D_n = 2^{n+1} + 1$

ង. $D_n = 2^{n+1}$

ដំណោះស្រាយ

1. $D_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$

$$= (2-1)(2^n + 2^{n-1} + \cdots + 2 + 1) = 2^{n+1} - 1$$

2. $D_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$

$$= 1 \cdot \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$$

ក្បួនកាត់

យើងមាន $D_1 = 1$ ជំនួស $n = 1$

មានតែ $D_n = 2^n - 1$ ប៉ុណ្ណោះដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

ចម្លើយ៖ *ក*

2. គេឲ្យវ៉ិចទ័របី $\vec{a} = (1,1,1)$, $\vec{b} = (1,-2,-1)$, $\vec{c} = (-1,-2,1)$ ។ ចូរកំណត់ $E = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ។

ក. $E = -6$ ខ. $E = 8$ គ. $E = -8$

ឃ. $E = 6$ ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -4 - 0 - 4 = -8$$

ចម្លើយ៖ *គ*

3. យកកន្សោម

$$E = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x - 1}{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}$$

នោះ E ស្មើនឹង

ក. $-\frac{2}{3}$ ខ. $-\frac{3}{2}$ គ. $\frac{2}{3}$ ឃ. $\frac{3}{2}$ ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

$$E = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x - 1}{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}$$

$$= \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x\,(\sin^2 x + \cos^2 x) - 1}{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x - 1}$$

$$= \frac{-3\sin^2 x \cos^2 x}{-2\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{3}{2}$$

ក្បួនកាត់

យក $x = \frac{\pi}{2}$ នោះ $\sin x = \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

យើងបាន $E = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} - 1\right) / \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 1\right)$

$$= -\frac{3}{4} \cdot (-2) = \frac{3}{2}$$

ចម្លើយ៖ *ឃ*

4. គេយក E ជាសំណុំចម្លើយទាំងអស់របស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' + 4y' + 13y = 0$។ ក្នុងចំណោមអនុគមន៍ខាងក្រោម តើមួយណាជាធាតុរបស់ E ?

ក. $y = e^{2t}(\cos 3t + 4\sin 3t)$

ខ. $y = e^{-2t}\cos 4t$

គ. $y = e^{-2t}(\cos 3t + 4\sin 3t)$

ឃ. $y = e^{2t}\cos 4t$

ង. $y = e^{-3t}(\cos 3t + 4\sin 3t)$

ដំណោះស្រាយ

សមីការសម្គាល់ $r^2 + 4r + 13 = 0$

មានឫស $r = -2 \pm 3i$

ចម្លើយទូទៅរាង $y_c = e^{-2t}(c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t)$

ចម្លើយ៖ *គ*

5. ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ គឺ

ក. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ខ. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ គ. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

ឃ. $\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ ង. ចម្លើយផ្សេង

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

$$f'(x)=\frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+\frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

<u>ចម្លើយ</u>៖ *ខ*

6. កន្សោម $E=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{2015}$ ស្មើនឹង

ក. $E=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ ខ. $E=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

គ. $E=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$ ឃ. $E=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

ង. ចម្លើយផ្សេង

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

$$E=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{2015}$$

$$=\cos\frac{2015\pi}{4}+i\sin\frac{2015\pi}{4}$$

$$=\cos\left(504\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(504\pi-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

<u>ចម្លើយ</u>៖ *គ*

7. ចូរគណនា

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$$

ក. -1 ខ. 3 គ. 1 ឃ. -3 ង. ចម្លើយផ្សេង

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{(2\sin x-1)(\sin x+1)}{(2\sin x-1)(\sin x-1)}=\frac{1/2\ +1}{1/2-1}=-3$$

<u>ចម្លើយ</u>៖ *ឃ*

8. យក x ជាមេគុណនៃឯកធា a^3bd^7 និង y ជាចំនួននៃឯកធាទាំងអស់នៅក្នុងពហុធាដឺក្រេទី១១ $(a+b+c+d)^{11}$ ។ គេបាន

ក. $(x=1333\ ,\ y=365)$

ខ. $(x=1234\ ,\ y=363)$

គ. $(x=1365\ ,\ y=366)$

ឃ. $(x=1236\ ,\ y=367)$

ង. $(x=1320\ ,\ y=364)$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

$$(a+b+c+d)^{11}$$
$$=\sum_{k_1+k_2+k_3+k_4=11}\frac{11!}{k_1!\,k_2!\,k_3!\,k_4!}a^{k_1}b^{k_2}c^{k_3}d^{k_4}$$

តួឯកធា a^3bd^7 មានមេគុណ

$$x=\frac{11!}{3!\,1!\,0!\,7!}=1320$$

ចំនួននៃឯកធាទាំងអស់ ជាចំនួននៃគូមានលំដាប់ (ចតុធាតុ) គត់មិនអវិជ្ជមាន (k_1,k_2,k_3,k_4) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់៖

$$k_1+k_2+k_3+k_4=11\ ,\ \ k_i\geq 0\ ,\ \ i=\overline{1,4}$$

តាង $t_i=k_i+1\Rightarrow t_i\in\mathbb{N}$

$$t_1+t_2+t_3+t_4=15$$

យើងតម្រៀបលេខ 1 ចំនួន១៥ដង រួចប្រើលេខ 0 ចំនួន៣ មកដាក់ក្នុងចន្លោះ ញែកជា៤សំណុំ (ត្រូវគ្នានឹង t_1,t_2,t_3,t_4)។ ឧទាហរណ៍៖

1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1

ក្នុងឧទាហរណ៍ខាងលើ $(t_1,t_2,t_3,t_4)=(2{,}4{,}7{,}2)$ ដែល $t_1+t_2+t_3+t_4=15$ ។

យើងផ្លាស់ទៅផ្លាស់មក លេខ 0 ចំនួន៣ ឲ្យរត់ក្នុង ១៤ចន្លោះ។ ករណីសរុបគឺ $y=C(14{,}3)=364$ ។

<u>ក្បួនកាត់</u> រក x ឃើញ គូសយកចម្លើយតែម្តង។

ជីវិតមនុស្សខ្លីណាស់ កុំខាតពេលរក y ឥតប្រយោជន៍!

<u>ចម្លើយ</u>៖ *ង*

<u>ចម្លើយ៖</u> *ង*

9. សំណុំនៃឫសទាំងអស់របស់វិសមីការ

$$\ln x \leq \frac{3\ln x - 2}{\ln x}$$

ក. $(-\infty,1)\cup[e,e^2]$ ខ. $(0,1)\cup[e,e^2]$

គ. $(0,1)\cup(e,e^2)$ ឃ. $[e,e^2]$ ង. ចម្លើយផ្សេង

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

$$\frac{(\ln x)^2 - 3\ln x + 2}{\ln x} \leq 0$$

វិសមីការមានន័យ លុះត្រាតែ $x>0$, $x\neq 1$

ភាគយក ≤ 0 ក្នុងចន្លោះ $[e,e^2]$

ភាគបែង <0 ក្នុងចន្លោះ $(0,1)$

ប្រភាគ ≤ 0 លុះត្រាតែ ភាគយកនិងភាគបែង មានសញ្ញាផ្ទុយគ្នា

$$\Rightarrow x\in\left([e,e^2]\cap(1,+\infty)\right) \cup\left(\left((0,e]\cup[e^2,+\infty)\right)\cap(0,1)\right)$$

$$\Rightarrow x\in[e,e^2]\cup(0,1)$$

<u>ចម្លើយ៖</u> *ខ*

10. ចូរគណនា

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{1-\cos^2 x}-\cos x}{\sin^2 x}$$

ក. $\frac{3}{2}$ ខ. $\frac{2}{3}$ គ. $-\frac{2}{3}$ ឃ. $-\frac{3}{2}$ ង. ចម្លើយផ្សេង

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin^2 x}-1+2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin^2 x}-1}{\sin^2 x}+2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin x}\right)^2\right)$$

$$=1+2\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$$

<u>ចម្លើយ៖</u> *ក*

11. យក $f(x)=e^{-3x}(9\sin 9x-3\cos 9x)$ ជាអនុគមន៍ និង $f'(x)$ ជាដេរីវេនៃ $f(x)$។ គេបាន

ក. $f'(x)=90e^{-3x}\cos 8x$

ខ. $f'(x)=90e^{3x}\cos 9x$

គ. $f'(x)=90e^{-3x}\cos 9x$

ឃ. $f'(x)=90e^{-3x}\sin 8x$

ង. ចម្លើយផ្សេង

<u>ក្បួនកាត់</u>

ដោយសារ ដេរីវេ មិនប្រែប្រួលនិទស្សន្តអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និង អាគុយម៉ង់អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ នោះ $f'(x)=90e^{-3x}\cos 9x$

អាចដេរីវេផ្ទៀងផ្ទាត់បាន ***បើទំនេរខ្លាំង!***

<u>ចម្លើយ៖</u> *គ*

12. គេដឹងថា

$$\frac{2x+1}{(x+2)(x+1)^2}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}$$

នោះគេបាន៖

ក. $a=3,\ b=-3,\ c=-1$

ខ. $a=-3,\ b=3,\ c=-1$

គ. $a=-1,\ b=3,\ c=-3$

ឃ. $a=-3,\ b=-1,\ c=3$

ង. ចម្លើយផ្សេង

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

តម្រូវភាគបែង៖

$$a(x+1)^2+b(x+1)(x+2)+c(x+2)=2x+1$$

យក $x=0$ ៖ $a+2b+2c=1$

យក $x=1$ ៖ $4a+6b+3c=3$

ចម្លើយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់គឺ $a=-3,\ b=3,\ c=-1$

<u>ចម្លើយ៖</u> *ខ*

13. ក្រឡាផ្ទៃនៃដែនប្លង់ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោងតាង $y = x^2$ និង $y = 4$ ស្មើនឹង៖

ក. $\frac{32}{3}$ ខ. $\frac{31}{3}$ គ. $\frac{37}{3}$ ឃ. $\frac{35}{3}$ ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

ខ្សែកោងទាំងពីរកាត់គ្នាត្រង់អាប់ស៊ីស -2 និង 2 ហើយក្នុងចន្លោះនេះ បន្ទាត់ស្ថិតនៅខាងលើប៉ារ៉ាបូល

$$\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx = 4x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2} = \frac{32}{3}$$

ចម្លើយ៖ *ក*

14. ចូររកតម្លៃនៃ

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$$

ក. e^{-2} ខ. e^{-3} គ. e^{3} ឃ. e^{2} ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{x^2-2}\right)^{\frac{x^2-2}{3}}\right)^{\frac{3x^2}{x^2-2}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2-2}} = e^3$$

ចម្លើយ៖ *គ*

15. គេយក

$$f(x) = \int_0^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt$$

ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$ នៃ $f(x)$។

ក. $f'(x) = \frac{\sin(x^2)}{x^2}$ ខ. $f'(x) = \frac{\sin x}{x}$

គ. $f'(x) = \frac{2\sin(x^2)}{x}$ ឃ. $f'(x) = \frac{2\sin x}{x}$

ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

តាង $G(t)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $g(t) = \frac{\sin t}{t}$

$$f(x) = G(x^2) + G(0)$$

$$f'(x) = 2x\cdot g(x^2) = 2x\cdot\frac{\sin(x^2)}{x^2} = \frac{2\sin(x^2)}{x}$$

ចម្លើយ៖ *គ*

16. ចូរគណនាអាំងតេក្រាល

$$I = \int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx$$

ក. $I = 4\pi$ ខ. $I = 3\pi$ គ. $I = 2\pi$

ឃ. $I = \pi$ ង. $I = \frac{\pi}{2}$

ដំណោះស្រាយ

តាង $x = 2\sin\theta \Rightarrow dx = 2\cos\theta\,d\theta$

$0 \le x \le 2 \Rightarrow 0 \le \theta \le \pi/2$

អាំងតេក្រាល ក្លាយទៅជា៖

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta\,d\theta$$

$$= 2\cdot\frac{\pi}{2} + 2\cdot\frac{\sin 2\theta}{2}\Big|_0^{\pi/2} = \pi$$

ចម្លើយ៖ *ឃ*

17. ចូររកតម្លៃអប្បបរមានៃ

$$y = x^4 + x^2 + 2 + \frac{4}{x^4+x^2+2}$$

ក. 2 ខ. 3 គ. 5 ឃ. 6 ង. 4

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $x^4 + x^2 + 2 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

តាម *Cauchy* ២ តួ យើងបាន៖

$$y \ge 2\cdot\sqrt{(x^4+x^2+2)\cdot\left(\frac{4}{x^4+x^2+2}\right)} = 4$$

ចម្លើយ៖ *ង*

18. សំណុំនៃឫសទាំងអស់ របស់សមីការ

$$(x-7)(x-5)(x+4)(x+6) = 608$$

ក. $S = \{(1 \pm \sqrt{19})/2\,,\ (1 \pm \sqrt{234})/2\}$

ខ. $S = \{1 \pm \sqrt{17}\,,\ 1 \pm \sqrt{233}\}$

គ. $S = \{(1 \pm \sqrt{17})/2\,,\ (1 \pm \sqrt{233})/2\}$

ឃ. $S = \{1 \pm \sqrt{19}\,,\ 1 \pm \sqrt{234}\}$

ង. ចម្លើយផ្សេង

ក្បួនកាត់

តួគ្មាន x របស់សមីការគឺ

$$(-7)(-5)(4)(6) - 608 = 232$$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត យើងបាន ផលគុណឫសទាំង៤នៃសមីការ ស្មើនឹង 232

សំណុំចម្លើយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់គឺ

$$\frac{(1-\sqrt{17})}{2}\cdot\frac{(1+\sqrt{17})}{2}\cdot\frac{(1-\sqrt{233})}{2}\cdot\frac{(1+\sqrt{233})}{2} = 232$$

ចម្លើយ៖ *គ*

19. បើ $x_0 > 0,$

$$x_n = \frac{2014}{2015}x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}^{2014}}\ ,\ n = 1,2,3,4,\ldots$$

នោះ លីមីតនៃស្វ៊ីត x_n ស្មើនឹង

ក. $\sqrt[2014]{2014}$ ខ. $\sqrt[2014]{2015}$

គ. $\sqrt[2015]{2015}$ ឃ. $\sqrt[2015]{2014}$

ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

យើងអាចដឹងបានយ៉ាងងាយថា គ្រប់តួនៃ $(x_n)_{n\geq 0}$ សុទ្ធតែវិជ្ជមាន។

តាង $L = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, $L > 0$ យើងបាន

$$L = \frac{2014}{2015}L + \frac{1}{L^{2014}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{L^{2014}} = \frac{L}{2015} \Rightarrow L = \sqrt[2015]{2015}$$

ចម្លើយ៖ *គ*

20. គេយក

$$S_n = \frac{81}{10^n}\left(8 + 88 + \cdots + \underbrace{88\ldots88}_{n}\right)$$

និង $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។ គេបាន៖

ក. $S = 72$ ខ. $S = 80$

គ. $S = 81$ ឃ. $S = 90$

ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

$$S_n = \frac{81}{10^n}\cdot\frac{8}{9}\left((10-1) + (10^2-1) + \cdots + (10^n-1)\right)$$

$$= \frac{81}{10^n}\cdot\frac{8}{9}\left(10\cdot\frac{10^n-1}{10-1} - n\right)$$

$$= \frac{81}{10^n}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot(10^n - 9n - 1)$$

$$\Rightarrow S = \lim_{n\to+\infty} S_n = 80$$

ចម្លើយ៖ *ខ*

21. នៅក្នុងសំណុំនៃចំនួនគត់ធំជាង 1 ចូររកចំនួននៃឫសទាំងអស់របស់សមីការ $a + b + c + d = 16$ ។

ក. 152 ខ. 165 គ. 173

ឃ.184 ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

$$a + b + c + d = 16\ ,\quad a,b,c,d > 1$$

តាង $(a', b', c', d') = (a-1, b-1, c-1, d-1)$

នោះ $a', b', c', d' \geq 1$

$$a' + b' + c' + d' = 12\ ,\quad a', b', c', d' \in \mathbb{N}$$

យើងតម្រៀបលេខ 1 ចំនួន១២ជង រួចប្រើលេខ 0 ចំនួន៣ មកដាក់ក្នុងចន្លោះ ញែកជា៤សំណុំ (ត្រូវគ្នានឹង a', b', c', d')។ ឧទាហរណ៍៖

1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1

ក្នុងឧទាហរណ៍ខាងលើ $(a', b', c', d') = (3,2,6,1)$ ដែល $a' + b' + c' + d' = 12$ ។

យើងផ្លាស់ទៅផ្លាស់មក លេខ 0 ចំនួន៣ ឲ្យរត់ក្នុង ១១ចន្លោះ។ ករណីសរុបគឺ $y = C(11,3) = 165$ ។

ចម្លើយ៖ *ខ*

22. តម្លៃនៃកន្សោម

$$\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\cdots}}}}$$

ក. 3   ខ. 2   គ. 1   ឃ. -2 ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

តាង y ជាកន្សោមខាងលើ យើងបាន

$$y=\sqrt[3]{6+y}$$

$$\Rightarrow y^3-y-6=0 \Rightarrow y=2$$

ចម្លើយ៖ *ខ*

23. គេយក

$$f(x)=\frac{x+\sqrt{3}}{1-x\sqrt{3}}$$

និង $f_n(x)=f(\dots f(f(x))\dots)$ ដែល f មានចំនួន n ដង។ គេបាន៖

ក. $f_{2015}(x)=x$ ខ. $f_{2015}(x)=\frac{x+\sqrt{3}}{1-x\sqrt{3}}$

គ. $f_{2015}(x)=\frac{x-\sqrt{3}}{x\sqrt{3}+1}$ ឃ. $f_{2015}(x)=\frac{x+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}x}$

ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

$$f_2(x)=f(f(x))=\frac{\frac{x+\sqrt{3}}{1-x\sqrt{3}}+\sqrt{3}}{1-\frac{x+\sqrt{3}}{1-x\sqrt{3}}\sqrt{3}}=\frac{x-\sqrt{3}}{x\sqrt{3}+1}$$

$$f_3(x)=f(f_2(x))=\frac{\frac{x-\sqrt{3}}{x\sqrt{3}+1}+\sqrt{3}}{1-\frac{x-\sqrt{3}}{x\sqrt{3}+1}\sqrt{3}}=x$$

$$\Rightarrow f_4(x)=f_1(x),f(x)=f_2(x),f_6(x)=f_3(x)$$

$$\Rightarrow f_{2015}(x)=f_{3\times 671+2}(x)=f_2(x)=\frac{x-\sqrt{3}}{x\sqrt{3}+1}$$

ចម្លើយ៖ *គ*

24. D ជាដែននៃប្លង់ដែលខណ្ឌដោយខ្សែងកោងតាង

$$y=\frac{1}{x^2\sqrt[4]{1+x^2}}\ ,\ y=0\ ,\ x=\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ x=1$$

ចូររកមាឌនៃសូលីតដែលបានដោយការរង្វិល D ជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីស $(x'ox)$ ចំនួនមួយជុំ។

ក. $\pi\sqrt{2}/3$ ខ. $\pi\sqrt{3}/3$ គ. $\pi\sqrt{5}/3$

ឃ. $4\pi/3$ ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $\frac{1}{x^2\sqrt[4]{1+x^2}}>0$ យើងបាន

$$V=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\pi\cdot\left(\frac{1}{x^2\sqrt[4]{1+x^2}}\right)^2dx$$

$$=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\pi\cdot\frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$=\pi\cdot\left(\frac{2}{3x}-\frac{1}{3x^2}\right)\sqrt{x^2+1}\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}=\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$$

ចម្លើយ៖ *ក*

25. $f(x)$ ជាអនុគមន៍ពិតផ្ទៀងផ្ទាត់

$$f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x$$

ចូរកំណត់ $f(x)$ ។

ក. $f(x)=\frac{x^3+x^2-1}{2x(x+1)}$ ខ. $f(x)=\frac{x^3-x^2-1}{2x(x+1)}$

គ. $f(x)=\frac{x^3-x^2-1}{2x(x-1)}$ ឃ. $f(x)=\frac{x^3+x^2+1}{2x(x+1)}$

ង. $f(x)=\frac{x^3+x^2+1}{x(x+1)}$

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x \quad (1)$

ជំនួស x ដោយ $\frac{x-1}{x}$ យើងបាន

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(\frac{\frac{x-1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}}\right)=1+\frac{x-1}{x}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=1+\frac{x-1}{x}\quad (2)$$

ជំនួស x ដោយ $\frac{1}{1-x}$ ក្នុង (1) យើងបាន

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f\left(\frac{\frac{1}{1-x}-1}{\frac{1}{1-x}}\right)=1+\frac{1}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f(x)=1+\frac{1}{1-x} \qquad (3)$$

យក $(1)+(2)+(3)$ យើងបាន

$$f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{2}\left(3+x+\frac{x-1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)$$

យកដកអង្គនិងអង្គ នឹង (2) យើងបាន

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(1+x-\frac{x-1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)=\frac{x^3-x^2-1}{2x(x-1)}$$

ចម្លើយ៖ *គ*

26. យក $u_1>0$,

$$u_{n+1}=\sqrt{u_n+u_{n-1}+\cdots+u_2+u_1}\,,$$

$$n=1,2,3,\ldots$$

នោះលីមីតនៃស្ទីត $\frac{u_n}{n}$ ស្មើនឹង

ក. 4 ខ. $\frac{1}{2}$ គ. 2 ឃ. $\frac{1}{4}$ ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយទី១

យើងអាចដឹងបានយ៉ាងងាយថា $u_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$

$$u_{n+1}=\sqrt{u_n+u_n^2}$$

$$\Rightarrow u_{n+1}-u_n=\sqrt{u_n+u_n^2}-u_n$$

$$=\frac{u_n}{\sqrt{u_n+u_n^2}+u_n}>0$$

នោះ u_n ជាស្ទីតកើន

ឧបមាថា u_n ទាល់លើត្រង់ L , $L>0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{u_n+u_n^2}$$

$\Rightarrow L=\sqrt{L+L^2}\Rightarrow L=0$ (ផ្ទុយពីការពិត)

នោះ $\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{u_n}}}<\frac{1}{1+\sqrt{1+0}}=\frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(u_{n+1}-u_n)<\frac{1}{2}n$$

$$\frac{u_{n+1}}{n+1}<\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{n+1}<\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

ម៉្យាងទៀត

$$\sum_{k=1}^{n}(u_{n+1}-u_n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{u_n}}}$$

$$\Rightarrow u_{n+1}-u_1=\sum_{k=1}^{\sqrt{n}}\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{u_n}}}+\sum_{k=\sqrt{n}+1}^{n}\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{u_n}}}$$

$$>\sqrt{n}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{u_1}}}+\left(n-\sqrt{n}\right)\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{u_{\sqrt{n}+1}}}}$$

$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{n+1}>\frac{\sqrt{n}}{n+1}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{u_1}}}+\frac{n-\sqrt{n}}{n+1}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{u_{\sqrt{n}+1}}}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{n+1}>0\cdot\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{u_1}}}+1\cdot\frac{1}{1+\sqrt{1+0}}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}=\frac{1}{2}$$

ដំណោះស្រាយទី២

ទ្រឹស្តីបទ Stolz-Cesàro៖

បើស្ទីតចំនួនពិត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ និង $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល (b_n) រីកម៉ូណូតូនដាច់ខាត ផ្ទៀតផ្ទាត់ $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=L$ នោះ $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$ ដូចគ្នា។

យក $b_n=n$ ជាស្ទីតរីកម៉ូណូតូនដាច់ខាត យើងបាន

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}-u_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{u_n}}}=\frac{1}{2}$$

នោះ $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}=\frac{1}{2}$ ដូចគ្នា

ចម្លើយ៖ *ខ*

27. តម្លៃកន្សោម

$$\sin\left(\frac{\pi}{722}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{722}\right)\dots\sin\left(\frac{360\pi}{722}\right)$$

ស្មើនឹង

ក. $\frac{17}{2^{361}}$ ខ. $\frac{17\sqrt{3}}{2^{361}}$ គ. $\frac{19\sqrt{3}}{2^{360}}$

ឃ. $\frac{19}{2^{360}}$ ង. ចម្លើយផ្សេង

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

$$S=\sin\left(\frac{\pi}{722}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{722}\right)\dots\sin\left(\frac{360\pi}{722}\right)$$

$$S=\sin\left(\frac{360\pi}{722}\right)\sin\left(\frac{359\pi}{722}\right)\dots\sin\left(\frac{\pi}{722}\right)$$

គុណអង្គនិងអង្គ

$$S^2=\prod_{k=1}^{360}\sin\left(\frac{k\pi}{722}\right)\sin\left(\frac{(361-k)\pi}{722}\right)$$

$$=\prod_{k=1}^{360}\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{361}\right)-\cos\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2^{360}}\prod_{k=1}^{360}\sin\left(\frac{k\pi}{361}\right)$$

តាមរូបមន្តអយល័រ

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

$$\Rightarrow \sin x=\frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)=\frac{e^{-ix}}{2i}\left(e^{i2x}-1\right)$$

យើងបាន

$$T=\prod_{k=1}^{360}\sin\left(\frac{k\pi}{361}\right)=\prod_{k=1}^{360}\frac{e^{-\frac{ik\pi}{361}}}{2i}\left(e^{\frac{i2k\pi}{361}}-1\right)$$

$$=\frac{e^{-i\frac{360(360+1)}{2}\pi}}{(2i)^{360}}\prod_{k=1}^{360}\left(e^{\frac{i2k\pi}{361}}-1\right)$$

$$=\frac{1}{2^{360}}\prod_{k=1}^{360}\left(e^{\frac{i2k\pi}{361}}-1\right)=\frac{1}{2^{360}}\prod_{k=1}^{360}\left(1-e^{\frac{i2k\pi}{361}}\right)$$

យើងដឹងថា ឫសចំនួន 361 នៃសមីការ $x^{361}=1$ មានដូចជា៖

$$\omega_0=1,\omega_1=e^{i\frac{2\pi}{361}},\omega_2=e^{i\frac{2\cdot 2\pi}{361}},\dots,\omega_{360}=e^{i\frac{2\cdot 360\pi}{361}}$$

យើងអាចសរសេរបានថា

$$x^{361}-1=\prod_{k=0}^{360}(x-\omega_k)=(x-1)\prod_{k=1}^{360}\left(x-e^{i\frac{2k\pi}{361}}\right)$$

ប៉ុន្តែ $x^{361}-1=(x-1)(x^{360}+x^{359}+\dots+x+1)$

នាំឲ្យ

$$\prod_{k=1}^{360}\left(x-e^{i\frac{2k\pi}{361}}\right)=\sum_{k=0}^{360}x^k$$

$$\prod_{k=1}^{360}\left(1-e^{i\frac{2k\pi}{361}}\right)=\sum_{k=0}^{360}1=361$$

យើងបាន

$$T=\frac{1}{2^{360}}\cdot 361$$

$$\Rightarrow S^2=\frac{1}{2^{360}}\cdot\frac{1}{2^{360}}\cdot 361\Rightarrow S=\frac{19}{2^{360}}$$

<u>ចម្លើយ</u>៖ *ឃ*

28. គេតាង $n!=1\times 2\times\dots\times n$ និង $C(n,k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ ចំពោះចំនួនគត់ $0\le k\le n$ ។ នោះ តម្លៃនៃកន្សោម

$$S_{2015}=C(2015,1)+C(2015,4)+C(2015,7)+\cdots$$

ស្មើនឹង

ក. $2^{2015}-2$ ខ. $2^{2015}+2$

គ. $\frac{2^{2015}-2}{3}$ ឃ. $\frac{2^{2015}+2}{3}$

ង. ចម្លើយផ្សេង

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

តាមទ្វេធាញូតុន

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C(n,k)\cdot a^k\cdot b^{n-k}$$

យក $a=1$, $b=1$

$$2^n=C(n,0)+C(n,1)+C(n,2)+C(n,3)+\cdots$$

យើងមាន

$$C(n,k)+C(n,k+1)=C(n+1,k+1)$$

នាំឲ្យ

$$S_{2015} = C(2014,0) + C(2014,1) + C(2014,3) + C(2014,4) + \cdots$$

$$= 2^{2014} - (C(2014,2) + C(2014,5) + C(2014,8) + \cdots)$$

$$= 2^{2014} - (C(2013,1) + C(2013,2) + C(2013,4) + C(2013,5) + \cdots)$$

$$= 2^{2014} - 2^{2013} + (C(2013,0) + C(2013,3) + C(2013,6) + C(2013,9) + \cdots)$$

$$= 2^{2014} - 2^{2013} + 2^{2012} - (C(2012,1) + C(2012,4) + C(2012,7) + \cdots)$$

$$= \cdots$$

$$= 2^{2014} - 2^{2013} + \cdots + 2^2 - 2^1\big(C(1,1)\big)$$

$$= -2 \cdot \frac{(-2)^{2014} - 1}{-2 - 1} = \frac{2^{2015} - 2}{3}$$

<u>ចម្លើយ៖</u> *គ*

29. គេយក

$$S = \lim_{n\to+\infty} \Big(\frac{n}{n^4 + n^2 + 1} + \frac{4n}{n^4 + 4n^2 + 16} + \cdots + \frac{n^3}{n^4 + n^4 + n^4}\Big)$$

គេបាន៖

ក. $12S = \pi\sqrt{3} - 3\ln 3$

ខ. $12S = \pi\sqrt{3} - 3\ln 2$

គ. $12S = \pi\sqrt{3} + 3\ln 3$

ឃ. $12S = \pi\sqrt{3} - 3\ln 3$

ង. ចម្លើយផ្សេង

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

តាមនិយមន័យអាំងតេក្រាលកំណត់

$$S = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 n}{n^4 + k^2 n^2 + k^4}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2 + \left(\frac{k}{n}\right)^4}$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{1 + x^2 + x^4} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{x^2 + x + 1} dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{x^2 - x + 1} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{x^2 + x + 1} dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{x^2 - x + 1} dx$$

យើងមាន

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2 + x + 1} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{2x + 1}{2(x^2 + x + 1)} - \frac{1}{2(x^2 + x + 1)} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2 + x + 1)'}{x^2 + x + 1} dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{\ln 3}{2} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \left(-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right) = \frac{\ln 3}{2} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

ដូចគ្នាដែរ

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2 - x + 1} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x - 1}{\sqrt{3}}\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{6\sqrt{3}} - \left(\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

ដូច្នេះ

$$S = -\frac{1}{2}\left(\frac{\ln 3}{2} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{12}\left(\sqrt{3}\pi - 3\ln 3\right)$$

<u>ចម្លើយ៖</u> *ឃ*

30. ចូរគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{48\sqrt{\cos x}}{\cos 4x-8\cos 2x+15}\right)^2 dx$$

ក. $I=7\ln 3+3\pi\sqrt{5}$ ខ. $I=7\ln 3+3\pi\sqrt{3}$

គ. $I=9\ln 3+2\pi\sqrt{3}$ ឃ. $I=9\ln 3+2\pi\sqrt{5}$

ង. ចម្លើយផ្សេង

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

$$I=2304\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{(\cos 4x-8\cos 2x+15)^2}dx$$

$$=2304\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\frac{1}{64(\sin^4 x+\sin^2 x+1)}\,dx$$

$$=36\int_0^1\frac{1}{(u^4+u^2+1)^2}du$$

<u>ទ្រឹស្តីបទអូស្ត្រូក្រាដស្គី៖</u>

$$\int\frac{\boldsymbol{P(u)}}{\boldsymbol{Q(u)}}\boldsymbol{dx}=\frac{\boldsymbol{P_1(u)}}{\boldsymbol{Q_1(u)}}+\int\frac{\boldsymbol{P_2(u)}}{\boldsymbol{Q_2(u)}}\boldsymbol{du}$$

ដែល $\boldsymbol{Q_1=GCD(Q,Q')}$ និង $\boldsymbol{Q_2(u)=\frac{Q(u)}{Q_1(u)}}$

យើងមាន $P(u)=1$, $Q(u)=(u^4+u^2+1)^2$

ដោយ $Q'(u)=2(4u^3+2u)(u^4+u^2+1)$

$$\Rightarrow Q_1(u)=Q_2(u)=u^4+u^2+1$$

$$P_1(u)=-\frac{u^3}{6}+\frac{u}{6}\ ,\ \ P_2(u)=-\frac{u^2}{6}+\frac{5}{6}$$

$$I=36\left(-\frac{1}{6}\int_0^1\frac{u^2-5}{u^4+u^2+1}du-\left[\frac{u^3-u}{6(u^4+u^2+1)}\right]_0^1\right)$$

$$=-6\left(-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{6u+5}{u^2+u+1}du+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{6u-5}{u^2-u+1}du\right)$$

យើងមាន

$$\int_0^1\frac{6u+5}{u^2+u+1}du$$

$$=\left[3\ln(u^2+u+1)+\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right]_0^1$$

$$=3\ln 3+\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}=3\ln 3+\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

ដូចគ្នាដែរ

$$\int_0^1\frac{6u-5}{u^2-u+1}du$$

$$=\left[3\ln(u^2-u+1)-\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right]_0^1$$

$$=-\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}=-\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

ដូច្នេះ

$$I=-6\cdot\frac{1}{2}\left(-\left(3\ln 3+\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right)-\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\right)$$

$$=9\ln 3+2\sqrt{3}\pi$$

<u>ចម្លើយ</u>៖ *គ*

ជូនពរសំណាងល្អ
ដល់អនាគតវិស្វករទាំងឡាយ!

ស្វាគមន៍មកកាន់
ជីវិតមហាវិទ្យាល័យ...