ដំណោះស្រាយ និង ក្បួនកាត់ QCM លំហាត់ប្រឡងចូលតិចណូ ២០១៤

1. កន្សោម $2\left(\sin^4 a+\cos^4 a+\sin^2 a\cos^2 a\right)^2$
$-\left(\sin^8 a+\cos^8 a\right)$ ស្មើនឹង៖

ក. -2 ខ. -1 គ. 2 ឃ. 3 ង. 1

ដំណោះស្រាយ

តាម $\sin^2 a+\cos^2 a=1$ យើងបាន៖

$$\sin^4 a+\cos^4 a+\sin^2 a\cos^2 a$$
$$=\left(\sin^2 a+\cos^2 a\right)^2-\sin^2 a\cos^2 a$$
$$=1-\sin^2 a\cos^2 a$$

នោះ $2\left(\sin^4 a+\cos^4 a+\sin^2 a\cos^2 a\right)^2$
$$=2\left(1-\sin^2 a\cos^2 a\right)^2$$
$$=2+2\sin^4 a\cos^4 a-4\sin^2 a\cos^2 a$$

ម៉្យាងទៀត៖
$$\sin^8 a+\cos^8 a=\left(\sin^4 a+\cos^4 a\right)^2-2\sin^4 a\cos^4 a$$
$$=\left(1-2\sin^2 a\cos^2 a\right)^2-2\sin^4 a\cos^4 a$$
$$=1+2\sin^4 a\cos^4 a-4\sin^2 a\cos^2 a$$

កន្សោមខាងលើទៅជា $2-1=1$

ក្បួនកាត់

ដោយ ជម្រើសពី ក ដល់ ង សុទ្ធតែជាចំនួនថេរ មានន័យថា កន្សោមនេះ ថេរ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ a

យកតម្លៃងាយ $a=0$ (ឬ $a=\frac{\pi}{2}$)

នោះ កន្សោមទាំងមូល ស្មើ 1

ចម្លើយ៖ *ង*

2. D ជាដែនដែលខណ្ឌ ដោយខ្សែកោងតាង $x=y^2+1$ និង $x=3$។ ចូរគណនា មាឌនៃសូលីដ ដែលបានដោយរង្វិលមួយជុំនៃ D ជុំវិញបន្ទាត់ $x=3$។

ក. $\frac{32\pi\sqrt{2}}{15}$ ខ. $\frac{32\pi\sqrt{2}}{17}$ គ. $\frac{64\pi}{15}$

ឃ. $\frac{64\pi\sqrt{2}}{15}$ ង. $\frac{64\pi\sqrt{2}}{17}$

ដំណោះស្រាយ

មាឌសូលីដ នឹងមិនប្រែប្រួលឡើយ តាមបម្លែងកិល

យើងធ្វើបម្លែងកិល -3 ឯកតា តាមអ័ក្ស (Ox)

នោះ D ក្លាយជាដែនដែលខណ្ឌ ដោយខ្សែកោង តាង $x+3=y^2+1$ និង $x+3=3$ គឺ $x=y^2-2$ និង $x=0$

$$y^2-2=0\Rightarrow y=\pm\sqrt{2}$$

ខ្សែកោងទាំងពីរ កាត់គ្រង់ពីរចំណុច គឺ $\left(0,-\sqrt{2}\right)$ និង $\left(0,\sqrt{2}\right)$

នោះ មាឌសូលីដរង្វិល D ជុំវិញអ័ក្ស $x=0$ គឺ

$$V=\int_{y_1}^{y_2}\pi f^2(y)dy=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\pi\left(y^2-2\right)^2dy$$
$$=\pi\left[\frac{y^5}{5}-4\cdot\frac{y^3}{3}+4y\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$$
$$=\pi\cdot2\cdot\left(\frac{4\sqrt{2}}{5}-\frac{8\sqrt{2}}{3}+4\sqrt{2}\right)=\boxed{\frac{64\pi\sqrt{2}}{15}}$$

ចម្លើយ៖ *ឃ*

3. យក $u=\sqrt[3]{3+\sqrt{\frac{368}{27}}}+\sqrt[3]{3-\sqrt{\frac{368}{27}}}$ និង

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+10x-7}+\sqrt[3]{x^2+10x-3}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}x^2+\frac{5\pi}{2}x-\frac{9\pi}{4}\right)}$$ ។

ចូរគណនាតម្លៃ $f(u)$។

ក. 2 ខ. 4 គ. 3 ឃ. 5 ង. 6

ដំណោះស្រាយ

បើ $a+b+c=0\Rightarrow a^3+b^3+c^3-3abc=0$

ដោយ $u-\sqrt[3]{3+\sqrt{\frac{368}{27}}}-\sqrt[3]{3+\sqrt{\frac{368}{27}}}=0$ នោះ៖

$$u^3-\left(3+\sqrt{\frac{368}{27}}\right)-\left(3-\sqrt{\frac{368}{27}}\right)-3u\cdot\sqrt[3]{9-\frac{368}{27}}=0$$

$$\Rightarrow u^3+5u-6=0\Rightarrow u=1$$

ដូចនេះ $f(u)=\dfrac{\sqrt{4}+\sqrt[3]{8}}{\sin\dfrac{\pi}{2}}=4$

ក្បួនកាត់

ដោយ ដម្រើសនៃ $f(u)$ សុទ្ធតែជាចំនួនគត់

នោះ u គួរតែជាតម្លៃគត់ណាមួយ ដែលធ្វើឲ្យ $\sqrt{u^2+10u-7}$ និង $\sqrt[3]{u^2+10u-3}$ ជាចំនួនគត់ ហើយ $\dfrac{\pi}{4}u^2+\dfrac{5\pi}{2}u-\dfrac{9\pi}{4}$ ជាមុំពិសេស មានស៊ីនុសជាចំនួនគត់។ តម្លៃដែលត្រូវលក្ខខណ្ឌនេះ គឺ $u=1$។

ចម្លើយ៖ *ខ*

4. បើ $x_1=1$, $x_n=\dfrac{\sqrt{3}+x_{n-1}}{1-\sqrt{3}\,x_{n-1}}$, $n=2,3,4,\ldots$

នោះ x_{2014} ស្មើនឹង៖

ក. $-2-\sqrt{3}$ ខ. $-2+\sqrt{3}$ គ. $2+\sqrt{3}$

ឃ. -1 ង. 1

ដំណោះស្រាយ

ឲ្យតម្លៃ $n=2,3,4$ យើងបាន

$x_2=\dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$, $x_3=\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$, $x_4=1$

ដោយ $x_4=x_1$ នោះ ស្វ៊ីត (x_n) មានខួប 3

ដូចនេះ $x_{2014}=x_{3\cdot 671+1}=x_1=\boxed{1}$

ចម្លើយ៖ *ង*

5. ចូរកំណត់រកលីមីត $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos\left(\sqrt{2}x\right)}{x^2}\right)^{\frac{-12}{1-\cos x}}$

ក. e^4 ខ. e^6 គ. e^{-4} ឃ. e^5 ង. e^{-5}

ដំណោះស្រាយ

ដោយប្រើ $\cos x\approx 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$ ពេល $x\to 0$

នោះ លីមីតក្លាយទៅជា៖

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\dfrac{\left(\sqrt{2}x\right)^2}{2}-\dfrac{\left(\sqrt{2}x\right)^4}{24}}{x^2}\right)^{\frac{-12}{\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x^2}{6}\right)^{-\frac{6}{x^2}\cdot\frac{2}{\frac{1}{2}-\frac{x^2}{24}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\frac{1}{2}-\frac{x^2}{24}}}=\boxed{e^4}$$

ចម្លើយ៖ *ក*

6. គេឲ្យ $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ជាចំនួនគត់ធំជាងសូន្យ ដែលខុសគ្នាពីរៗ និងមានតួចែកបឋម តូចជាង 5។

បើ $S_n=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x_n}$ គេបាន៖

ក. $S_n\ge 6$ ខ. $3\le S_n\le 4$ គ. $4<S_n<5$

ឃ. $5\le S_n<6$ ង. $S_n<3$

ដំណោះស្រាយ

x_k មានតួចែកបឋមតូចជាង5 នោះ x_k មានទម្រង់ $2^a\cdot 3^b$ ដែល $a,b\ge 0$ ជាចំនួនគត់

S_n មានតម្លៃអតិបរមា កាលណា ផលបូក រាយគ្រប់តម្លៃនៃ a,b ពីតូចដល់ធំ។

ហើយ $S_n<S_\infty$, $\forall n\in\mathbb{N}$

យើងបាន $S_n<\displaystyle\sum_{a=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{\infty}\frac{1}{2^a\cdot 3^b}=\sum_{a=0}^{\infty}\frac{1}{2^a}\cdot\sum_{b=0}^{\infty}\frac{1}{3^b}$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=2\cdot\frac{3}{2}=3$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n<3}$

ចម្លើយ៖ *ង*

7. សំណុំនៃឫសទាំងអស់ របស់សមីការ

$x^4+4=5x\left(x^2-2\right)$ គឺ៖

ក. $S=\left\{-1,\ 2,\ 2-\sqrt{6},\ 2+\sqrt{6}\right\}$

ខ. $S=\left\{-1,\ 2,\ 2-\sqrt{7},\ 2+\sqrt{7}\right\}$

គ. $S=\left\{-1,\,2,\,3-\sqrt{17},\,3+\sqrt{17}\right\}$

ឃ. $S=\left\{-1,\,2,\,3-\sqrt{6},\,3+\sqrt{6}\right\}$

ង. $S=\left\{-1,\,-2,\,2-\sqrt{6},\,2+\sqrt{6}\right\}$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ដោយសមីការមានឫសងាយ $-1,\,2$

យើងអាចសរសេរ

$$x^4+4-5x\left(x^2-2\right)=\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x^2-4x-2\right)$$

ដូចនេះ ឫសពីរទៀតគឺ $2-\sqrt{6}$, $2+\sqrt{6}$

<u>ក្បួនកាត់</u>

សមីការសរសេរជា $x^4-5x^3+10x+4=0$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត នោះ ផលគុណឫសទាំងបួន ស្មើនឹង 4 ហើយផលបូកឫសទាំងបួន ស្មើនឹង 5 ។

<u>ចម្លើយ</u> ៖ *ក*

8. សំណុំនៃឫសទាំងអស់ របស់វិសមីការ $\ln^2 x\le 3\ln x-2$ គឺ៖

ក. $-\infty<x\le e$ ខ. $e<x<e^2$ គ. $e\le x\le e^2$

ឃ. $e^2\le x<+\infty$ ង. $-e^2\le x\le -e$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

វិសមីការមានន័យ លុះត្រាតែ $x>0$

វិសមីការសមមូល៖

$$\left(\ln x-1\right)\left(\ln x-2\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow 1\le \ln x\le 2 \Leftrightarrow \boxed{e\le x\le e^2}$$

<u>ក្បួនកាត់</u>

ដោយ $x>0$ នោះជម្រើសដែលអាចត្រូវ គឺ **ខ,គ,ឃ**

ដោយ វិសមីការមានសមភាព នោះសំណុំចម្លើយ ក៏ត្រូវមានសមភាពដែរ ជម្រើសនៅសល់ គឺ **គ,ឃ**

ដោយ $x=e$ ផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមីការ ពេលដែលសមភាពកើតឡើង នោះចម្លើយត្រឹមត្រូវ គឺ **គ**។

<u>ចម្លើយ</u> ៖ *គ*

9. ចូរគណនា $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\cos x\right)-x^2}{\sin\left(x^2\right)}$ ។

ក. $-\dfrac{2}{3}$ ខ. $-\dfrac{3}{2}$ គ. $\dfrac{3}{2}$ ឃ. $\dfrac{2}{3}$ ង. $\dfrac{5}{3}$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\cos x\right)-x^2}{\sin\left(x^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\ln\left(\cos x\right)}{x^2}-1}{\dfrac{\sin\left(x^2\right)}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\ln\left(1-2\sin^2\dfrac{x}{2}\right)}{-2\sin^2\dfrac{x}{2}}\cdot\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2-1}{\dfrac{\sin\left(x^2\right)}{x^2}}$$

$$=\frac{-\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1^2-1}{1}=\boxed{-\frac{3}{2}}$$

<u>ចម្លើយ</u> ៖ *ខ*

10. $P(x)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេ 2012 ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $P(1)=1$, $P(2)=\dfrac{1}{2}$, ... , $P(2013)=\dfrac{1}{2013}$ ។

ចូរគណនា $P(2014)$។

ក. $-\dfrac{1}{2014}$ ខ. $-\dfrac{2}{2014}$ គ. $\dfrac{2}{2014}$

ឃ. $\dfrac{1}{2014}$ ង. $\dfrac{2}{2015}$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

តាង $Q(x)=xP(x)-1$ ជាពហុធាដឺក្រេ 2013

នោះ $Q(x)$ មានឫស $1,2,\ldots,2013$

យើងបាន៖

$$Q(x)=a\left(x-1\right)\left(x-2\right)\ldots\left(x-2013\right)$$

នោះ $Q(0)=a(-1)(-2)\ldots(-2013)=-2013!\,a$

តែ $Q(0)=0\cdot P(0)-1=-1$

នោះ $a=\dfrac{1}{2013!}$

យើងបាន $Q(2014)=\dfrac{1}{2013!}\cdot 2013\cdot 2012\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$

$Q(2014)=1 \Rightarrow P(2014)=\dfrac{Q(2014)+1}{2014}=\boxed{\dfrac{2}{2014}}$

ចម្លើយ៖ *គ*

11. ចូររកតម្លៃអប្បបរមានៃ

$y=\dfrac{3\sin x-4\sin^3 x+2\cos 3x+1}{\sin 3x+\cos 3x+2}$ ។

ក. -3 ខ. 1 គ. -4 ឃ. -1 ង. -2

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$

នោះ $y=\dfrac{\sin 3x+2\cos 3x+1}{\sin 3x+\cos 3x+2}$

$$=\frac{2\sin\frac{3}{2}x\cos\frac{3}{2}x+2\left(2\cos^2\frac{3}{2}x-1\right)+1}{2\sin\frac{3}{2}x\cos\frac{3}{2}x+2\cos^2\frac{3}{2}x-1+2}$$

$$=\frac{2\tan\frac{3}{2}x+4-\dfrac{1}{\cos^2\frac{3}{2}x}}{2\tan\frac{3}{2}x+2+\dfrac{1}{\cos^2\frac{3}{2}x}}=\frac{3+2\tan\frac{3}{2}x-\tan^2\frac{3}{2}x}{3+2\tan\frac{3}{2}x+\tan^2\frac{3}{2}x}$$

តាង $t=\tan\frac{3}{2}x$ នោះ $y=\dfrac{3+2t-t^2}{3+2t+t^2}$

យើងបាន $y'=-\dfrac{4t(t+3)}{\left(3+2t+t^2\right)^2}$

នៅត្រង់ $t=-3$, $y'=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី - ទៅ +

នោះ y មានអប្បបរមាត្រង់ $t=-3$

គឺ $y(t=-3)=\dfrac{3-6-9}{3-6+9}=\boxed{-2}$

ចម្លើយ៖ *ង*

12. វិសមីការ $\dfrac{2^{1-x}-2x+1}{2^x-1}\le 0$ មានសំណុំចម្លើយ៖

ក. $[1,+\infty)$ ខ. $(-\infty,0)$ គ. $(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$

ឃ. $(-\infty,0)\cup[1,4)$ ង. ចម្លើយផ្សេងទៀត

ដំណោះស្រាយ

កន្សោម $2^{1-x}-2x+1$ មានឫស $x=1$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី + ទៅ -

កន្សោម 2^x-1 មានឫស $x=0$ ហើយ ប្តូរសញ្ញាពី - ទៅ +

នោះ ផលធៀបនៃកន្សោមទាំងពីរ អវិជ្ជមាន កាលណា សំណុំចម្លើយនៅសងខាងឫស

សមភាពកើតឡើង ពេល $x=1$ ហើយវិសមីការមានន័យ កាលណា $x\neq 0$

ដូចនេះ សំណុំចម្លើយគឺ $x\in(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$

ចម្លើយ៖ *គ*

13. $P=\cos^4 x+\cos^4\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos^4\left(x+\dfrac{2\pi}{4}\right)+\cos^4\left(x+\dfrac{3\pi}{4}\right)$ ។ គេបាន៖

ក. $P=\sqrt{3}$ ខ. $P=\dfrac{3}{2}$ គ. $P=-\sqrt{3}$

ឃ. $P=-1$ ង. $P=-\dfrac{3}{2}$

ក្បួនកាត់

ដោយ ជម្រើសសុទ្ធតែជាចំនួនថេរ

នោះ P ជាចំនួនថេរ ចំពោះគ្រប់តម្លៃនៃ x

យក $x=0$ យើងបាន

$P=1+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^4+0+\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^4=\boxed{\dfrac{3}{2}}$

ចម្លើយ៖ *ខ*

14. យក $u=\sqrt{2(1-\cos x)}, v=\sqrt{2+\cos x-\sqrt{3}\sin x}$ និង $w=\sqrt{2+\cos x+\sqrt{3}\sin x}$ ។ ចូរគណនា $u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2$ ។

ក. 8 ខ. 7 គ. 6 ឃ. 10 ង. 9

ក្បួនកាត់

ដោយ ជម្រើសសុទ្ធតែជាចំនួនថេរ

នោះ ផលបូក ជាចំនួនថេរ ចំពោះគ្រប់តម្លៃនៃ x

យក $x=0$ នោះ $u=0$, $v=\sqrt{3}$, $w=\sqrt{3}$

នោះ $u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2=0+9+0=\boxed{9}$

ចម្លើយ៖ *ង*

15. $f(x)$ ជាអនុគមន៍ពិត ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2$ ។ ចូរកំណត់រក $f(x)$ ។

ក. $f(x)=\frac{3+x^4}{8x^2}$ ខ. $f(x)=\frac{3-x^4}{8x^2}$

គ. $f(x)=\frac{3+x^4}{8x^4}$ ឃ. $f(x)=\frac{8x^2}{3+x^4}$

ង. $f(x)=\frac{8x^2}{3-x^4}$

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន៖ $f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2$

ប្តូរ x ជា $\frac{1}{x}$ ហើយគុណអង្គនឹង 3 យើងបាន៖

$$3f\left(\frac{1}{x}\right)+9f(x)=\frac{3}{x^2}$$

ដកអង្គ យើងបាន៖ $-8f(x)=x^2-\frac{3}{x^2}=\frac{x^4-3}{x^2}$

ដូចនេះ $f(x)=\boxed{\frac{3-x^4}{8x^2}}$

ក្បួនកាត់

យក $x=1$ យើងបាន $f(x)=\frac{1}{4}$

ជម្រើសដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ គឺ **ខ** ។

ចម្លើយ៖ *ខ*

16. តម្លៃនៃអាំងតេក្រាល $\int_0^6 \frac{x^2-\sqrt{36-x^2}}{\sqrt{36-x^2}}dx$ ស្មើនឹង៖

ក. $18\pi-3$ ខ. $9\pi-5$ គ. $9\pi-6$

ឃ. $18\pi-7$ ង. $15\pi-6$

ដំណោះស្រាយ

តាង $x=6\sin\theta \Rightarrow \sqrt{36-x^2}=6\cos\theta$

ហើយ $dx=6\cos\theta d\theta$

$$0\le x\le 6\Rightarrow 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

អាំងតេក្រាល ក្លាយទៅជា៖

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{36\sin^2\theta-6\cos\theta}{6\cos\theta}\cdot 6\cos\theta d\theta$$

$$=36\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta-6\int_0^6\cos\theta d\theta$$

$$=18\cdot\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-6\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=18\cdot\frac{\pi}{2}-6=\boxed{9\pi-6}$$

ចម្លើយ៖ *គ*

17. កន្សោម

$$D_n=1^2\times 2+2^2\times 2^2+3^2\times 2^3+\ldots+n^2\times 2^n$$

ស្មើនឹង៖

ក. $D_n=2^{n+1}\left(n^2+2n+3\right)-6$

ខ. $D_n=2^{n+1}\left(n^2-2n+3\right)-6$

គ. $D_n=2^{n+1}\left(n^2-4n+3\right)-7$

ឃ. $D_n=2^{n+1}\left(n^2-2n+3\right)-7$

ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

$$2D_n=1^2\times 2^2+2^2\times 2^3+3^2\times 2^4+\ldots+n^2\times 2^{n+1}$$

$$D_n=1^2\times 2+2^2\times 2^2+3^2\times 2^3+\ldots+n^2\times 2^n$$

ដកអង្គ យើងបាន៖

$$D_n=\left(1^2-2^2\right)\cdot 2^2+\ldots+\left((n-1)^2-n^2\right)\cdot 2^n+n^2\cdot 2^{n+1}-2$$

$$D_n=-\left[3\cdot 2^2+\ldots+(2n-1)\cdot 2^n\right]+n^2\cdot 2^{n+1}-2$$

តាង $S_n=3\cdot 2^2+5\cdot 2^3+\ldots+(2n-1)\cdot 2^n$

នោះ $2S_n=3\cdot 2^3+5\cdot 2^4+\ldots+(2n-1)\cdot 2^{n+1}$

$$2S_n-S_n=-2\cdot\left(2^3+2^4+\ldots+2^n\right)+(2n-1)\cdot 2^{n+1}-12$$

$$S_n=-2\cdot 2^3\cdot\frac{2^{n-2}-1}{2-1}+(2n-1)\cdot 2^{n+1}-12$$

$$S_n=(2n-3)\cdot 2^{n+1}+4$$

នោះ $D_n = \boxed{\left(n^2-2n+3\right)\cdot 2^{n+1}-6}$

ក្បួនកាត់

យើងមាន $D_1 = 1^2 \times 2^1 = 2$

ដោយយក $n=1$ ឃើញថា មានតែចម្លើយ **ខ** ប៉ុណ្ណោះ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

យើងអាចយក $n=2,3,4,\ldots$ ដើម្បីផ្ទៀងផ្ទាត់បន្ថែម *ឲ្យតែមានពេល!*

ចម្លើយ៖ *ខ*

18. យក $f(x)=\int_{-\sin x}^{\sin x} e^{t^2}dt$ ជាអនុគមន៍។ ចូរគណនា $e^{-\sin^2 x}\dfrac{d}{dx}\left(f(x)\right)$។

ក. e^{x^2} ខ. $\cos x$ គ. $2\cos x$

ឃ. $e^{\sin^2 x}$ ង. $-2\cos x$

ដំណោះស្រាយ

តាង $F(t)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $e^{t^2} \Rightarrow F'(t)=e^{t^2}$

យើងបាន $f(x)=F(\sin x)-F(-\sin x)$

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)=(\sin x)'F'(\sin x)-(-\sin x)'F'(-\sin x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)=2\cos x\cdot e^{\sin^2 x}$$

$$\Rightarrow e^{-\sin^2 x}\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)=\boxed{2\cos x}$$

ចម្លើយ៖ *គ*

19. យក E ជាសំណុំឫសនៃវិសមីការ $6^{\log_6^2 x}+x^{\log_6 x}\le 12$។ នោះ គេបាន៖

ក. $E=[6,+\infty)$ ខ. $E=\left[\dfrac{1}{6},6\right]$

គ. $E=\left(\dfrac{1}{6},7\right)$ ឃ. $E=\left(-\infty,\dfrac{1}{6}\right]$

ង. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយ

កន្សោម $6^{\log_6^2 x}+x^{\log_6 x}-12$ មានឫស $x=-6,6$

កន្សោមនេះ វិជ្ជមាន ចំពោះ $x\in\left(0,\dfrac{1}{6}\right]\cup[6,+\infty)$

ហើយ អវិជ្ជមាន ចំពោះ $x\in\left[\dfrac{1}{6},6\right]$

ចម្លើយ៖ *ខ*

20. គេឲ្យ $f(x)=-\dfrac{e^{-x}}{10}\left(3\cos 3x+\sin 3x\right)$ ។ នោះ មេគុណប្រាប់ទិស នៃបន្ទាត់ប៉ះ នឹងខ្សែកោង តាងអនុគមន៍នេះ ត្រង់ចំណុច $M\left(t,f(t)\right)$ គឺ៖

ក. $e^{-t}\cos 4t$ ខ. $e^{-t}\sin 3t$ គ. $e^{2t}\cos 3t$

ឃ. $e^{-t}\cos 5t$ ង. $e^{-t}\cos 7t$

ដំណោះស្រាយ

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ នឹងខ្សែកោងតាងអនុគមន៍នេះ ត្រង់ចំណុច $M\left(t,f(t)\right)$ គឺ

$$f'(t)=-\frac{e^{-t}}{10}\left(3\cos 3t+\sin 3t\right)' +\left(-\frac{e^{-t}}{10}\right)'\left(3\cos 3t+\sin 3t\right)$$

$$=\frac{e^{-t}}{10}\left(9\sin 3t-3\cos 3t+3\cos 3t+\sin 3t\right)$$

$$=\boxed{e^{-t}\sin 3t}$$

ចម្លើយ៖ *ខ*

21. ធុងមួយរាងកោន ដែលមានកំពូលចុះក្រោមត្រង់ មានកម្ពស់ $10\,\mathrm{dm}$ និងកាំបាតមានប្រវែង $5\,\mathrm{dm}$ ។ ទឹកត្រូវបាន គេបង្ហូរចូលក្នុងធុងនេះ ដោយអត្រា $9\,\mathrm{dm}^3/\min$ ។ នៅពេលកម្ពស់ទឹកឡើងដល់ $6\,\mathrm{dm}$ នោះ កម្ពស់ទឹកកើនឡើងដោយអត្រាប៉ុន្មាន?

ក. $\dfrac{3}{\pi}\mathrm{dm}/\min$ ខ. $\dfrac{2}{\pi}\mathrm{dm}/\min$ គ. $\dfrac{1}{\pi}\mathrm{dm}/\min$

ឃ. $\dfrac{4}{\pi}\mathrm{dm}/\min$ ង. $\pi\,\mathrm{dm}/\min$

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត៖ $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$

តាមតាឡែស៖ $\dfrac{r}{h}=\dfrac{5\,\mathrm{dm}}{10\,\mathrm{dm}}\Rightarrow r=\dfrac{h}{2}\Rightarrow V=\dfrac{1}{12}\pi h^3$

នោះ $dV=\frac{1}{4}\pi h^2 dh \Rightarrow dh=\frac{4dV}{\pi h^2}$

ដោយ $dV=9\,\text{dm}^3/\min$, $h=6\,\text{dm}$

យើងបាន $dh=\frac{4\cdot 9}{\pi\cdot 6^2}=\boxed{\frac{1}{\pi}\text{ dm}/\min}$

<u>ចម្លើយ៖</u> *គ*

22. ចំនួនកុំផ្លិច $z\neq 1$ ជាឫសនៃសមីការ $x^7-1=0$ និង $f(x)=\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^4}+\frac{x^3}{1+x^6}$ ។ នោះ តម្លៃនៃ $f(z)$ គឺ៖

ក. -2 ខ. -4 គ. -5 ឃ. 4 ង. 2

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

$z^7-1=0\Rightarrow z^7=1$, $1+z+...+z^6=0$

$$f(z)=\frac{z}{1+z^2}+\frac{z^2}{1+z^4}+\frac{z^3}{1+z^6}$$

$$=\frac{z}{z^7+z^2}+\frac{z^2}{z^7+z^4}+\frac{z^3}{z^7+z^6}$$

$$=\frac{1}{z(z^5+1)}+\frac{1}{z^2(z^3+1)}+\frac{1}{z^3(z+1)}$$

$$=\frac{z^2+z^3+z^5+z^6+z+z^2+z^6+z^7+1+z^3+z^5+z^8}{z^3(z+1)(z^3+1)(z^5+1)}$$

$$=\frac{-2z^4}{z^3(1+z+z^3+z^5+z^4+z^6+z^8+z^9)}$$

$$=\frac{-2z}{1+z-z^7}=\boxed{-2}$$

<u>ចម្លើយ៖</u> *ក*

23. គេមានទ្រុងព្រាប៤ ដែលរៀបជាជួរមួយជួរ សម្រាប់ឲ្យព្រាបនៅបានច្រើនក្បាល។ នៅពេលយប់មួយ ព្រាប៨ក្បាលបានចូលទៅដេកក្នុងទ្រុង។ តើមានប៉ុន្មានករណីខុសៗគ្នា?

ក. 155 ខ. 185 គ. 175

ឃ. 195 ង. 165

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ទ្រុងមាន៤ ព្រាបមាន៨។ តាង x_1,x_2,x_3,x_4 ជាចំនួនព្រាប ក្នុងទ្រុងទី១ដល់ទី៤ ដែលអាចប្រែប្រួលពី០ទៅ៨។ នោះ ចំនួនករណីរៀបចំព្រាបទាំង៨ ដាក់ក្នុងទ្រុងទាំង៤ គឺជាចំនួននៃគូមានលំដាប់ (ចតុជាតុ) (x_1,x_2,x_3,x_4) ឫសគត់មិនអវិជ្ជមាន នៃសមីការ $x_1+x_2+x_3+x_4=8$ ($x_k\in\mathbb{Z}$, $x_k\geq 0$, $k=\overline{1,4}$)។

តាង $y_k=x_k+1\Rightarrow y_k\in\mathbb{N}$ យើងបានសមីការ៖

$$y_1+y_2+y_3+y_4=12$$

យើងតម្រៀបលេខ 1 ចំនួន១២ដង ហើយប្រើលេខ0 ចំនួន៣ ដើម្បីចែកលេខ 1 ទាំង១២នេះ ជា៤សំណុំ (ត្រូវគ្នានឹង x_1,x_2,x_3,x_4)។ ឧទាហរណ៍៖

1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1

ក្នុងឧទាហរណ៍ខាងលើ $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(2,4,5,1)$ ដែល $x_1+x_2+x_3+x_4=8$ ។

យើងផ្លាស់ទៅមក លេខ0 ចំនួន៣ ឲ្យនៅតែក្នុងចន្លោះចំនួន១១។ ចំនួនករណីសរុប គឺ $C(11,3)=\boxed{165}$ ។

<u>ចម្លើយ៖</u> *ង*

24. គេយក A,B,C ជាមុំក្នុងនៃត្រីកោណមួយ។ តម្លៃអតិបរមានៃ $P=\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)$ គឺ៖

ក. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ខ. 1 គ. $\frac{1}{2}$ ឃ. $\frac{1}{8}$ ង. $\frac{1}{16}$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ដោយប្រើ Cauchy យើងបាន៖

$$P=\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi-(A+B)}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\frac{A+B}{2}$$

$$\leq\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\frac{A+B}{2}$$

$$\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$$

សមភាពកើតឡើងពេល $\cos\frac{A-B}{2}=0$ និង $1-\cos\frac{A-B}{2}=\cos\frac{A-B}{2}$ មានន័យថា

$A=B=C=\frac{\pi}{3}$ ហើយ $P_{\max}=\boxed{\frac{1}{8}}$ ។

ក្បួនកាត់

លំហាត់បែបនេះ តម្លៃអតិបរមា នៅពេលសមភាពកើតឡើង គឺទាល់តែ ជាត្រីកោណសម័ង្ស ដែល

$A=B=C=\frac{\pi}{3}$ ។

ដូច្នេះ $P_{\max}=\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\boxed{\frac{1}{8}}$

ចម្លើយ៖ *ឃ*

25. គេឲ្យស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយ $u_0\geq 0\ ,\ u_{n+1}=\frac{2}{1+u_n^2}$ ។ គេដឹងថា ស្វ៊ីតនេះមានលីមីតកំណត់។ គេបានលីមីតនេះ ស្មើនឹង៖

ក. 1 ខ. $\frac{3}{2}$ គ. $-\frac{1}{2}$ ឃ. 0 ង. $\frac{1}{2}$

ដំណោះស្រាយ

យើងអាចដឹងយ៉ាងងាយថា គ្រប់តួនៃ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ សុទ្ធតែវិជ្ជមាន។

យក $n\to+\infty$ នោះ $u_n\to L\ ,\ L>0$

យើងបាន $L=\frac{2}{1+L^2}$

$\Rightarrow L^3+L-2=0\Rightarrow\boxed{L=1}$

ចម្លើយ៖ *ក*

26. គេឲ្យស្វ៊ីត $S_n=\dfrac{n^{2013}+9+99+\ldots+\overbrace{99\ldots99}^{n}}{n^{2014}+3+33+\ldots+\underbrace{33\ldots33}_{n}}$

និង $S=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ ។ គេបាន៖

ក. $S=0$ ខ. $S=4$ គ. $S=5$

ឃ. $S=6$ ង. $S=3$

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន៖

$$9+99+\ldots+\underbrace{99\ldots99}_{n}$$
$$=\left(10^1-1\right)+\left(10^2-1\right)+\ldots+\left(10^n-1\right)$$
$$=10\cdot\frac{10^n-1}{10-1}-n=\frac{1}{9}\cdot10^{n+1}-n-\frac{10}{9}$$

យើងបាន៖

$$S=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{2013}+\frac{1}{9}\cdot10^{n+1}-n-\frac{10}{9}}{n^{2014}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\cdot10^{n+1}-n-\frac{10}{9}\right)}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{10^{n+1}}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10^{n+1}}\left(n^{2013}-n-\frac{10}{9}\right)\right)}{\cancel{10^{n+1}}\left(\frac{1}{27}+\frac{1}{10^{n+1}}\left(n^{2014}-\frac{n}{3}-\frac{10}{27}\right)\right)}$$
$$=\frac{\frac{1}{9}+0}{\frac{1}{27}+0}=\boxed{3}$$

ចម្លើយ៖ *ង*

27. ចូររកក្រឡាផ្ទៃនៃដែនប្លង់ ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោងតាង $y=\sqrt{x}\ ,\ y=x-2\ ,\ y=0$ ។

ក. $\frac{10}{3}$ ខ. $\frac{11}{3}$ គ. $\frac{13}{3}$ ឃ. $\frac{10}{7}$ ង. $\frac{3}{10}$

ដំណោះស្រាយ

ផ្ទឹមសមីការទាំងពីរ៖

$\sqrt{x}=x-2\Rightarrow x=x^2-4x+4\Rightarrow x^2-5x+4=0$

$\Rightarrow x=1,4\Rightarrow y=-1,2$ តែ $y\geq 0$

$\Rightarrow x=4\ ,\ y=2$

ហើយ $x-2=0\Rightarrow x=2\ ,\ y=0$

យើងបាន៖

$$S=\int_0^2\left(\sqrt{x}-0\right)dx+\int_2^4\left(\sqrt{x}-\left(x-2\right)\right)dx$$
$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2+\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_2^4$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2}+\frac{2}{3}\cdot\left(8-2\sqrt{2}\right)-6+4=\boxed{\frac{10}{3}}$$

ចម្លើយ៖ *ក*

28. យក $S=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4n^2+1}+\frac{2}{4n^2+4}+...+\frac{n}{4n^2+n^2}\right)$

គេបាន៖

ក. $S=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{7}{4}\right)$ ខ. $S=\ln\left(\frac{5}{4}\right)$

គ. $S=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{4}\right)$ ឃ. $S=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

ង. $S=0$

ដំណោះស្រាយ

យើងបាន៖

$$S=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{4n^2+k^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{4+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$=\int_0^1\frac{x}{4+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d\left(4+x^2\right)}{4+x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(4+x^2\right)\Big|_0^1=\boxed{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{4}\right)}$$

ចម្លើយ៖ *គ*

29. យក x,y,z,t ជាចំនួនពិត ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $x^2-y^2+t^2=21$, $x^2+3y^2+4z^2=101$ នោះតម្លៃតូចជាងគេនៃ $E=x^2+y^2+2z^2+t^2$ គឺ៖

ក. 61 ខ. 51 គ. 71 ឃ. 57 ង. 45

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $x^2-y^2+t^2=21$, $x^2+3y^2+4z^2=101$

បូកអង្គ $\Rightarrow 2x^2+2y^2+4z^2+t^2=122$

$$\Rightarrow x^2+y^2+2z^2+\frac{t^2}{2}=61$$

$$\Rightarrow E=61+\frac{t^2}{2}\geq\boxed{61}\ ,\ \forall t\in\mathbb{R}$$

ចម្លើយ៖ *ក*

30. គ្រួសារទី១ មានសមាជិក២នាក់ គ្រួសារទី២ មានសមាជិក៣នាក់ និងគ្រួសារទី៣ មានសមាជិក៤នាក់។ សមាជិកគ្រួសារទាំងបី ឈរជាជួរ មួយជួរ ដើម្បីថតរូបទុកជាអនុស្សាវរីយ៍។ ចូរគណនាប្រូបាប ដើម្បីឲ្យសមាជិកក្នុងគ្រួសារទីបីឈរជិតគ្នា។

ក. $\frac{17}{21}$ ខ. $\frac{5}{12}$ គ. $\frac{5}{21}$ ឃ. $\frac{1}{23}$ ង. $\frac{1}{21}$

ដំណោះស្រាយ

មនុស្សសរុប $2+3+4=9$ នាក់ នោះ ករណីអាចស្មើនឹង $9!$។

ដោយ សមាជិកគ្រួសារទីបី មាន៤នាក់ នោះយើងចាត់ទុកដូចមនុស្សតែម្នាក់ ដែលមាន $4!$ ករណី។

យើងត្រូវឆ្លាស់ សមាជិកគ្រួសារទីមួយ ២នាក់ ជាមួយនឹង សមាជិកគ្រួសារទីពីរ ៣នាក់ ជាមួយនឹង សមាជិកគ្រួសារទីបី ចាត់ទុកដូច១នាក់ គឺ 6 នាក់។ ករណីស្រេបគឺ $4!6!$។

ដូច្នេះ ប្រូបាបគឺ $\frac{4!6!}{9!}=\frac{24}{9\cdot 8\cdot 7}=\boxed{\frac{1}{21}}$

ចម្លើយ៖ *ង*

ជូនពរសំណាងល្អ ដល់អនាគតវិស្វករទាំងឡាយ!

ស្វាគមន៍មកកាន់ជីវិតមហាវិទ្យាល័យ...