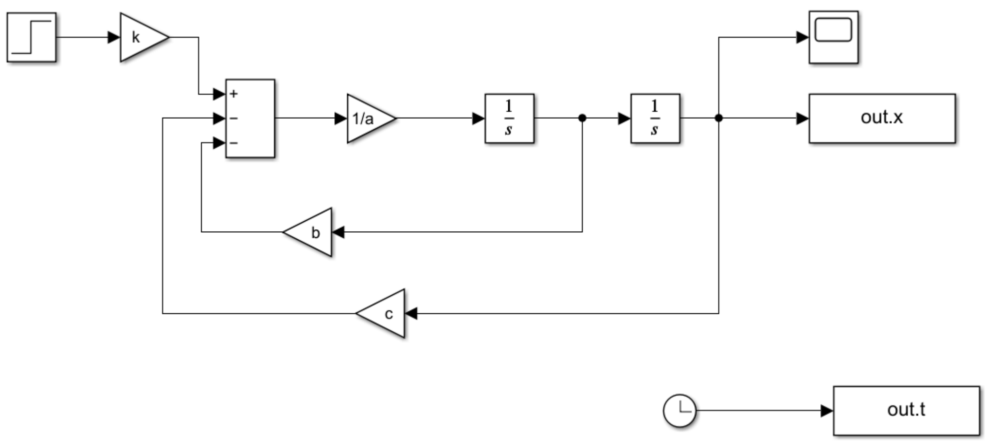
Sprawozdanie z laboratorium 3,4

Robert Walery 249000

Grupa: piątek 11.15

Symulacyjne i analityczne rozwiązywanie równań różniczkowych

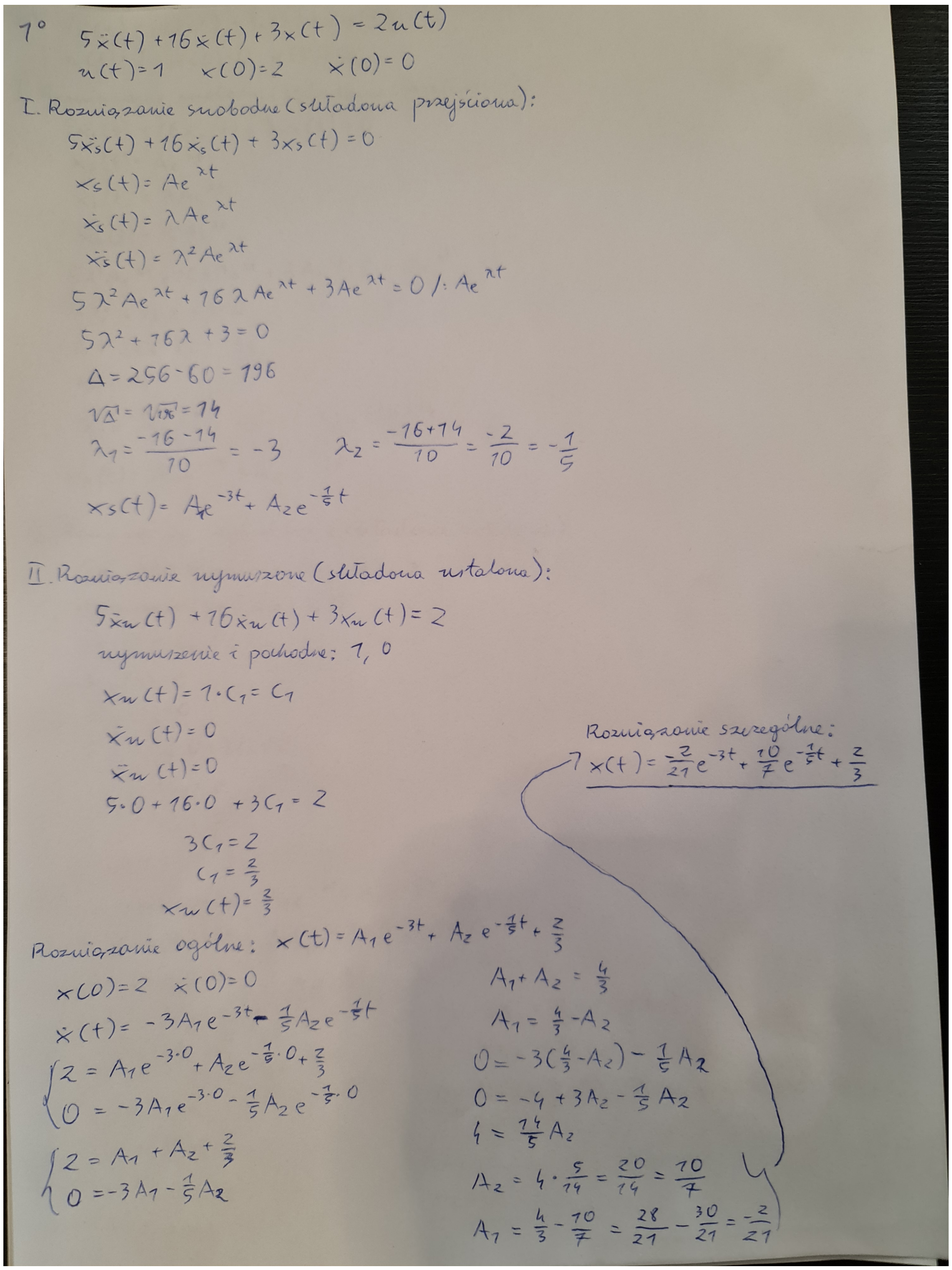


Rysunek 1: Schemat z simulinka

Równanie różniczkowe wyglądało następująco;

$$5\ddot{x} + 16\dot{x} + 3x(t) = 2u(t)$$

1 Rozwiązania dla u(t)=1, x(0)=2 i $\dot{x}(0) = 0$



1° $5\ddot{x}(t) + 16\dot{x}(t) + 3x(t) = 2u(t)$

$u(t) = 1 \quad x(0) = 2 \quad \dot{x}(0) = 0$

I. Rozwiązanie swobodne (składowa przejściowa):

$5\ddot{x}_s(t) + 16\dot{x}_s(t) + 3x_s(t) = 0$

$x_s(t) = Ae^{\lambda t}$

$\dot{x}_s(t) = \lambda A e^{\lambda t}$

$\ddot{x}_s(t) = \lambda^2 A e^{\lambda t}$

$5\lambda^2 A e^{\lambda t} + 16\lambda A e^{\lambda t} + 3Ae^{\lambda t} = 0 \; / : Ae^{\lambda t}$

$5\lambda^2 + 16\lambda + 3 = 0$

$\Delta = 256 - 60 = 196$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{196} = 14$

$\lambda_1 = \frac{-16-14}{10} = -3 \qquad \lambda_2 = \frac{-16+14}{10} = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5}$

$x_s(t) = A_1 e^{-3t} + A_2 e^{-\frac{1}{5}t}$

II. Rozwiązanie wymuszone (składowa ustalona):

$5\ddot{x}_w(t) + 16\dot{x}_w(t) + 3x_w(t) = 2$

wymuszenie i pochodne: 1, 0

$x_w(t) = 1 \cdot C_1 = C_1$

$\dot{x}_w(t) = 0$

$\ddot{x}_w(t) = 0$

$5 \cdot 0 + 16 \cdot 0 + 3C_1 = 2$

$3C_1 = 2$

$C_1 = \frac{2}{3}$

$x_w(t) = \frac{2}{3}$

Rozwiązanie ogólne: $x(t) = A_1 e^{-3t} + A_2 e^{-\frac{1}{5}t} + \frac{2}{3}$

$x(0) = 2 \quad \dot{x}(0) = 0$

$\dot{x}(t) = -3A_1 e^{-3t} - \frac{1}{5}A_2 e^{-\frac{1}{5}t}$

$$\begin{cases} 2 = A_1 e^{-3\cdot 0} + A_2 e^{-\frac{1}{5}\cdot 0} + \frac{2}{3} \\ 0 = -3A_1 e^{-3\cdot 0} - \frac{1}{5}A_2 e^{-\frac{1}{5}\cdot 0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = A_1 + A_2 + \frac{2}{3} \\ 0 = -3A_1 - \frac{1}{5}A_2 \end{cases}$$

$A_1 + A_2 = \frac{4}{3}$

$A_1 = \frac{4}{3} - A_2$

$0 = -3\left(\frac{4}{3} - A_2\right) - \frac{1}{5}A_2$

$0 = -4 + 3A_2 - \frac{1}{5}A_2$

$4 = \frac{14}{5}A_2$

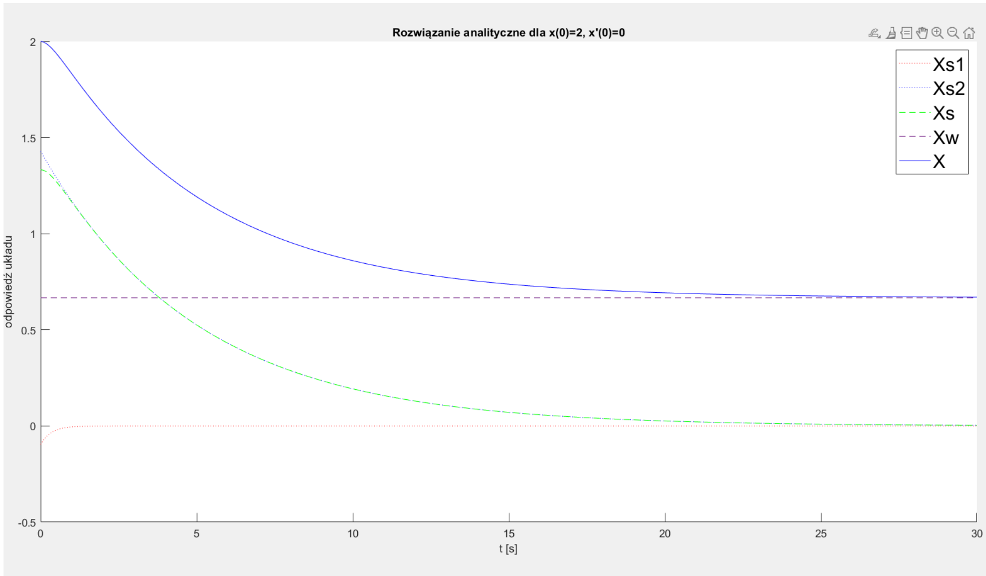
$A_2 = 4 \cdot \frac{5}{14} = \frac{20}{14} = \frac{10}{7}$

$A_1 = \frac{4}{3} - \frac{10}{7} = \frac{28}{21} - \frac{30}{21} = \frac{-2}{21}$

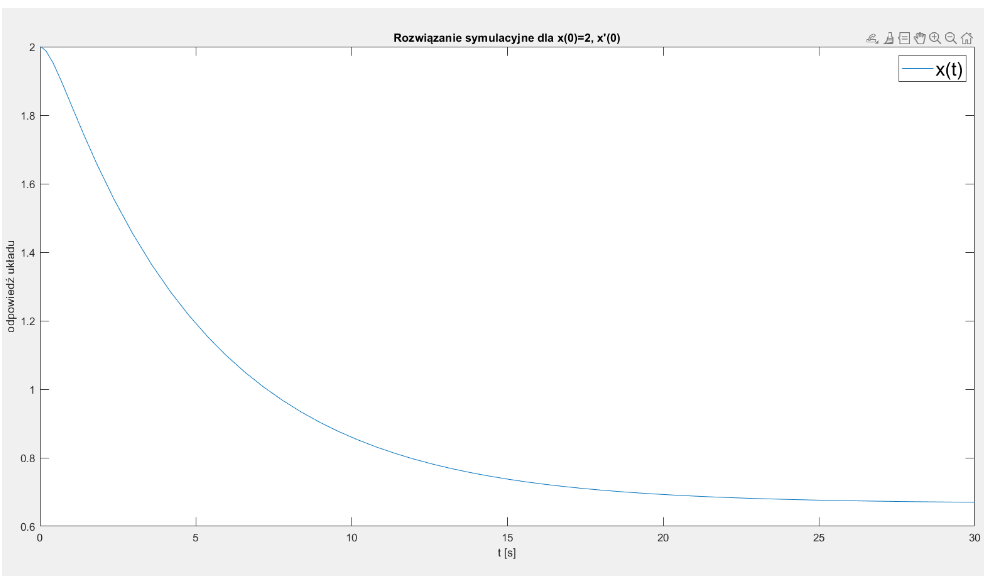
Rozwiązanie szczególne:

$x(t) = \frac{-2}{21}e^{-3t} + \frac{10}{7}e^{-\frac{1}{5}t} + \frac{2}{3}$

Rysunek 2: Rozwiązanie analityczne



Rysunek 3: Wykres rozwiązania analitycznego



Rysunek 4: Rozwiązanie z simulinka

2 Rozwiązania dla u(t)=1, $\ddot{x}(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$

2° $5\ddot{x}(t) + 16\dot{x}(t) + 3x(t) = 2u(t)$

$u(t) = 1 \quad \ddot{x}(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0$

I. Rozwiązanie swobodne (składowa przejściowa):

$5\ddot{x}_s(t) + 16\dot{x}_s(t) + 3x_s(t) = 0$

$x_s(t) = Ae^{\lambda t}$

$\dot{x}_s(t) = \lambda A e^{\lambda t}$

$\ddot{x}_s(t) = \lambda^2 A e^{\lambda t}$

$5\lambda^2 A e^{\lambda t} + 16\lambda A e^{\lambda t} + 3Ae^{\lambda t} = 0 \; / : Ae^{\lambda t}$

$5\lambda^2 + 16\lambda + 3 = 0$

$\Delta = 256 - 60 = 196$

$\sqrt{\Delta} = 14$

$\lambda_1 = \frac{-16-14}{10} = -3 \qquad \lambda_2 = \frac{-16+14}{10} = -\frac{1}{5}$

$x_s(t) = A_1 e^{-3t} + A_2 e^{-\frac{1}{5}t}$

II. Rozwiązanie wymuszone (składowa ustalona):

$5\ddot{x}_w(t) + 16\dot{x}_w(t) + 3x_w(t) = 2$

wymuszenie i pochodne: 1, 0

$x_w(t) = C_1 \cdot 1 = C_1$

$\dot{x}_w(t) = 0$

$\ddot{x}_w(t) = 0$

$5 \cdot 0 + 16 \cdot 0 + 3C_1 = 2$

$3C_1 = 2$

$C_1 = \frac{2}{3}$

$x_w(t) = \frac{2}{3}$

Rozwiązanie ogólne: $A_1 e^{-3t} + A_2 e^{-\frac{1}{5}t} + \frac{2}{3}$

$\dot{x}(t) = -3A_1 e^{-3t} - \frac{1}{5} A_2 e^{-\frac{1}{5}t}$ | $\dot{x}(0) = 0$

$\ddot{x}(t) = 9A_1 e^{-3t} + \frac{1}{25} A_2 e^{-\frac{1}{5}t}$ | $\ddot{x}(0) = 0$

$$\begin{cases} 0 = -3A_1 e^{-3\cdot 0} - \frac{1}{5} A_2 e^{-\frac{1}{5}\cdot 0} \\ 0 = 9A_1 e^{-3\cdot 0} + \frac{1}{25} A_2 e^{-\frac{1}{5}\cdot 0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = -3A_1 - \frac{1}{5} A_2 \\ 0 = 9A_1 + \frac{1}{25} A_2 \end{cases}$$

$\frac{1}{5} A_2 = -3A_1 \; / \cdot 5$

$A_2 = -15A_1$

$0 = 9A_1 + \frac{1}{25} \cdot (-15A_1)$

$0 = 9A_1 - \frac{15}{25} A_1$

$0 = 9A_1 - \frac{3}{5} A_1$

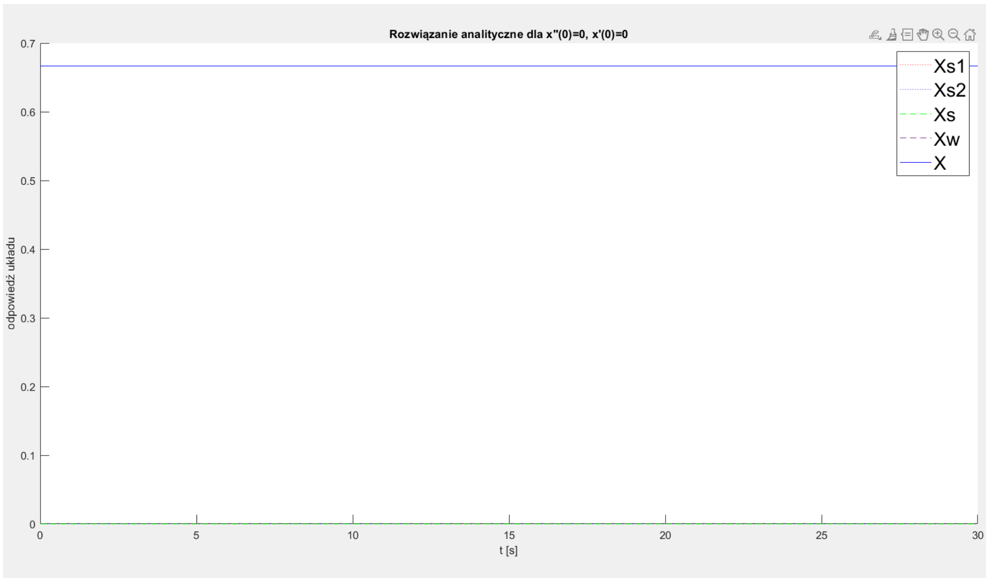
$0 = 8\frac{2}{5} A_1$

$$\begin{cases} A_1 = 0 \\ A_2 = 0 \end{cases}$$

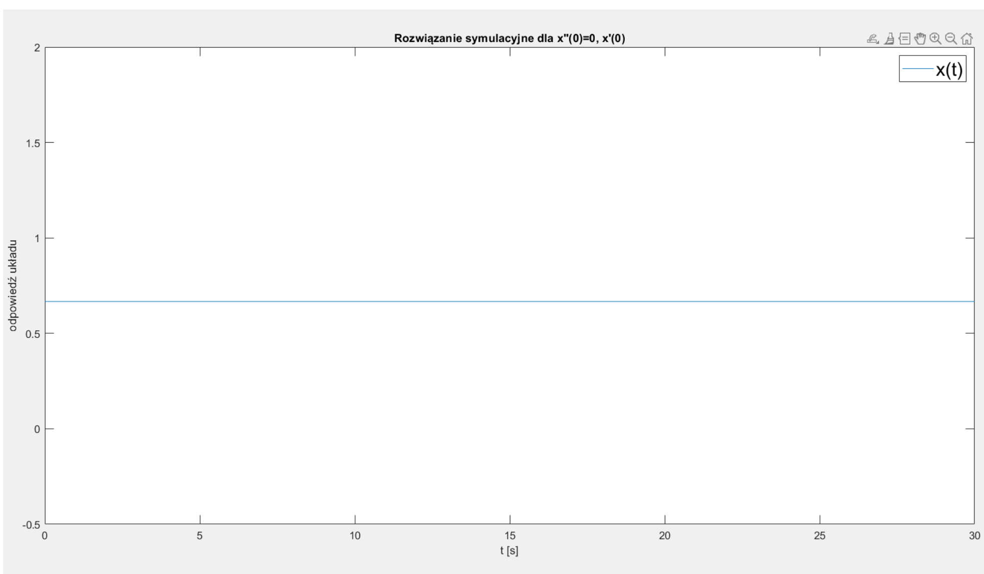
Rozwiązanie szczególne:

$x(t) = \frac{2}{3}$

Rysunek 5: Rozwiązanie analityczne

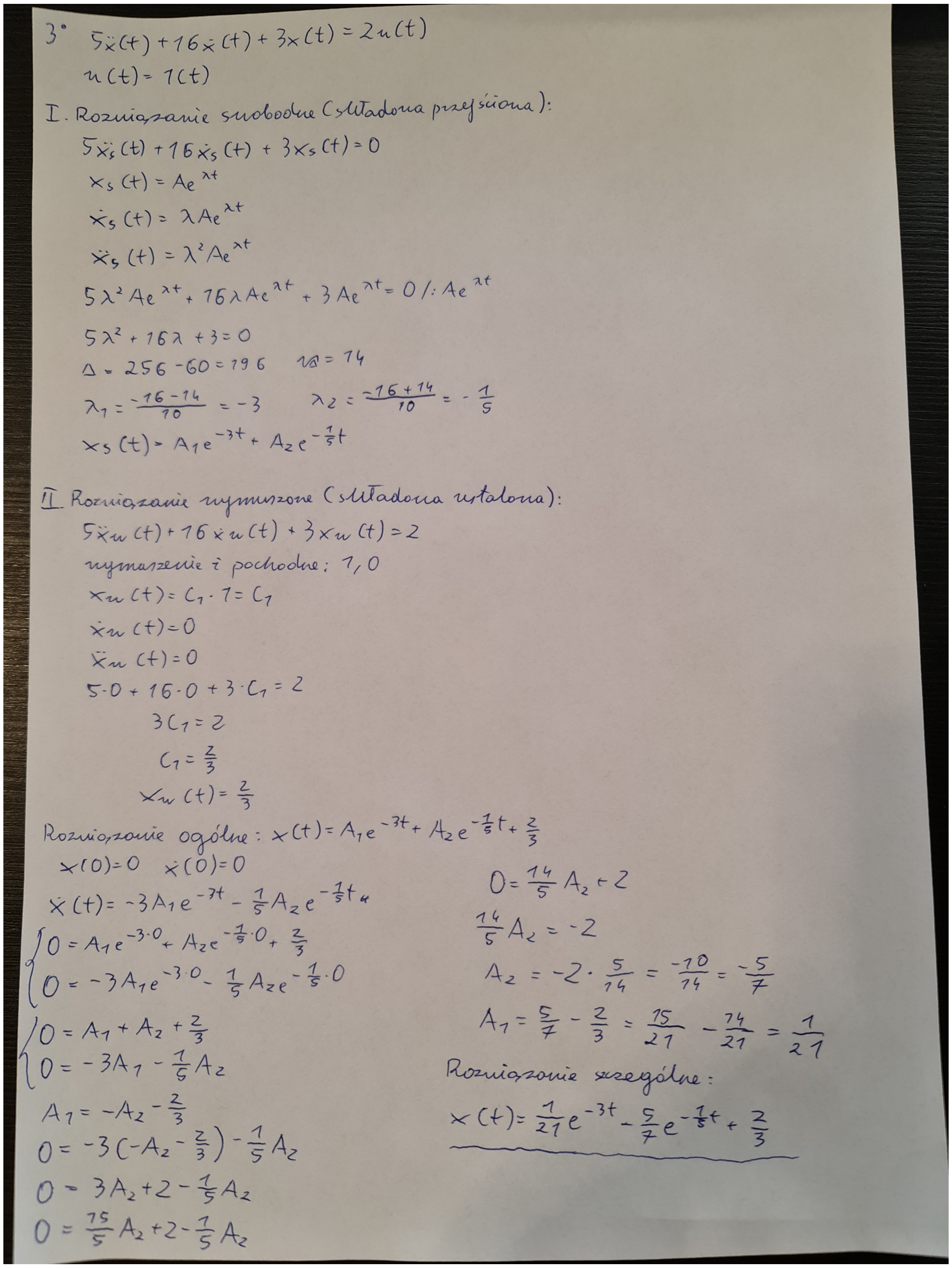


Rysunek 6: Wykres rozwiązania analitycznego



Rysunek 7: Rozwiązanie z simulinka

3 Rozwiązania dla u(t)=1(t)



3° $5\ddot{x}(t)+16\dot{x}(t)+3x(t)=2u(t)$

$u(t)=1(t)$

I. Rozwiązanie swobodne (składowa przejściowa):

$5\ddot{x}_s(t)+16\dot{x}_s(t)+3x_s(t)=0$

$x_s(t)=Ae^{\lambda t}$

$\dot{x}_s(t)=\lambda Ae^{\lambda t}$

$\ddot{x}_s(t)=\lambda^2 Ae^{\lambda t}$

$5\lambda^2 Ae^{\lambda t}+16\lambda Ae^{\lambda t}+3Ae^{\lambda t}=0 \;/: Ae^{\lambda t}$

$5\lambda^2+16\lambda+3=0$

$\Delta=256-60=196 \qquad \sqrt{\Delta}=14$

$\lambda_1=\frac{-16-14}{10}=-3 \qquad \lambda_2=\frac{-16+14}{10}=-\frac{1}{5}$

$x_s(t)=A_1e^{-3t}+A_2e^{-\frac{1}{5}t}$

II. Rozwiązanie wymuszone (składowa ustalona):

$5\ddot{x}_w(t)+16\dot{x}_w(t)+3x_w(t)=2$

wymuszenie i pochodne: 1, 0

$x_w(t)=C_1\cdot 1=C_1$

$\dot{x}_w(t)=0$

$\ddot{x}_w(t)=0$

$5\cdot 0+16\cdot 0+3\cdot C_1=2$

$3C_1=2$

$C_1=\frac{2}{3}$

$x_w(t)=\frac{2}{3}$

Rozwiązanie ogólne: $x(t)=A_1e^{-3t}+A_2e^{-\frac{1}{5}t}+\frac{2}{3}$

$x(0)=0 \qquad \dot{x}(0)=0$

$\dot{x}(t)=-3A_1e^{-3t}-\frac{1}{5}A_2e^{-\frac{1}{5}t}$

$$\begin{cases} 0=A_1e^{-3\cdot 0}+A_2e^{-\frac{1}{5}\cdot 0}+\frac{2}{3} \\ 0=-3A_1e^{-3\cdot 0}-\frac{1}{5}A_2e^{-\frac{1}{5}\cdot 0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0=A_1+A_2+\frac{2}{3} \\ 0=-3A_1-\frac{1}{5}A_2 \end{cases}$$

$A_1=-A_2-\frac{2}{3}$

$0=-3(-A_2-\frac{2}{3})-\frac{1}{5}A_2$

$0=3A_2+2-\frac{1}{5}A_2$

$0=\frac{15}{5}A_2+2-\frac{1}{5}A_2$

$0=\frac{14}{5}A_2+2$

$\frac{14}{5}A_2=-2$

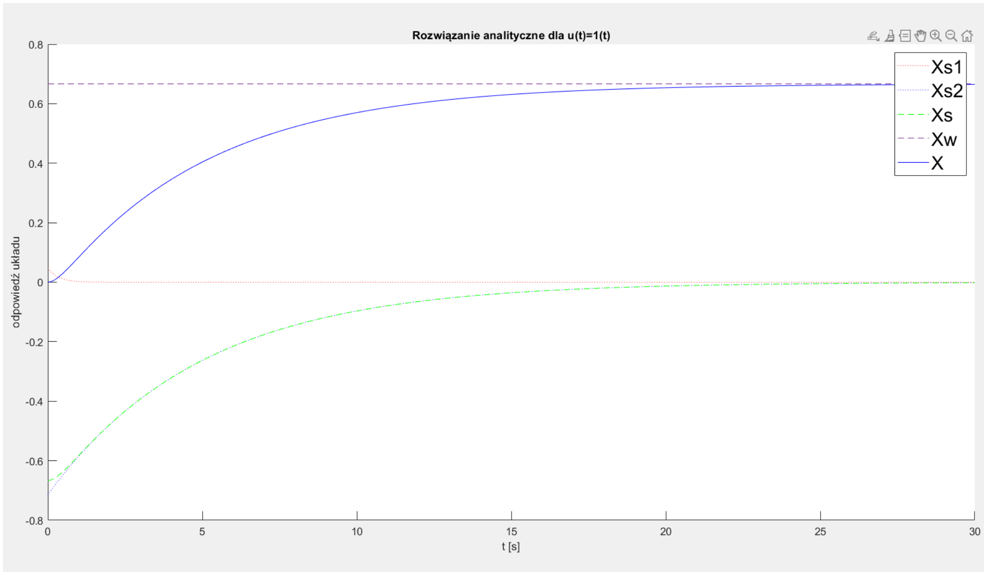
$A_2=-2\cdot\frac{5}{14}=\frac{-10}{14}=-\frac{5}{7}$

$A_1=\frac{5}{7}-\frac{2}{3}=\frac{15}{21}-\frac{14}{21}=\frac{1}{21}$

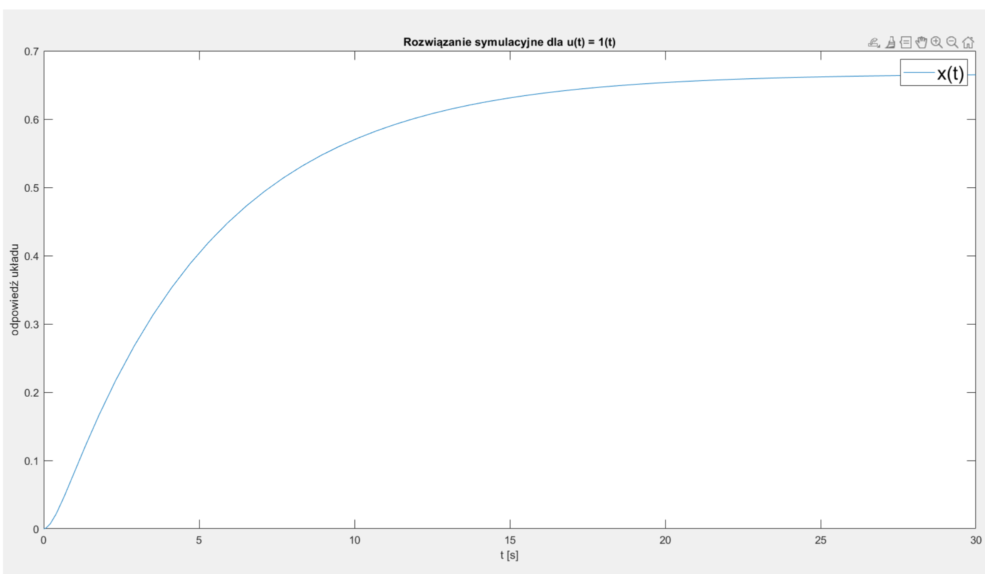
Rozwiązanie szczególne:

$x(t)=\frac{1}{21}e^{-3t}-\frac{5}{7}e^{-\frac{1}{5}t}+\frac{2}{3}$

Rysunek 8: Rozwiązanie analityczne



Rysunek 9: Wykres rozwiązania analitycznego



Rysunek 10: Rozwiązanie z simulinka

4 Wnioski

Rozwiązania symulacyjne pokrywają się z rozwiązaniami analitycznymi co świadczy o poprawnwym wykorzystaniu obu metod.