Série 3
Travaux dirigés d'algèbre tensoriel

Exercice 1

Soit un espace vectoriel E_2 ayant pour base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$. On considère deux vecteurs : $\overrightarrow{X} = 4\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2}$ $\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2}$.

1. Déterminer les composantes contravariantes du produit tensoriel de $\overrightarrow{X}$ par $\overrightarrow{Y}$. Écrire la matrice de ce tenseur sur la base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$.
2. On effectue un changement de base défini par :
$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{e'_1} \\ \overrightarrow{e'_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \end{bmatrix}$$
Déterminer les nouvelles composantes contravariantes du produit tensoriel.
3. Écrire la matrice du produit tensoriel pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2

1. Écrire chacune des expressions suivantes en utilisant la convention d'Einstein :
$$a.\ \ a_{j1}x^1 + a_{j2}x^2 + \cdots + a_{jN}x^N$$
$$b.\ \ ds^2 = g_{11}dx^1dx^1 + g_{22}dx^2dx^2 + g_{33}dx^3dx^3$$
$$c.\ \ d\phi = \frac{\partial\phi}{dx_1}dx^1 + \frac{\partial\phi}{dx_2}dx^2 + \cdots + \frac{\partial\phi}{dx_n}dx^n$$
2. Écrire les termes dans les sommes suivantes :
$$a.\ \ A_{pq}A^{qr} \qquad avec\ q = 1, \cdots N$$
$$b.\ \ g'_{rs} = g_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial x'^r}.\frac{\partial x^k}{\partial x'^s} \qquad avec\ N = 3$$
$$c.\ \ \overrightarrow{e_i} = \left[\beta_i^j\right]\overrightarrow{E_j} \qquad avec\ i, j = 1, \cdots, 3$$

Exercice 3

Soit un repère $\overrightarrow{e_i}$ avec $(1 = 1, 2, 3)$ d'origine O, tel que $\overrightarrow{e_1}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{e_2}$, mais tel que $\overrightarrow{e_3}$ ne soit pas orthogonal au plan $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. On effectue le changement de base suivant :
$$\overrightarrow{E_1} = \overrightarrow{e_1} \quad \overrightarrow{E_2} = \overrightarrow{e_2} \quad \overrightarrow{E_3} = -\overrightarrow{e_3}$$

1. Un vecteur $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{x}$ a pour composante (x^1, x^2, x^3) dans la base $\overrightarrow{e_i}$. Donner ces composantes contravariantes X^i dans la base $\overrightarrow{E_i}$.
2. Donner les matrices de changement de base pour les vecteurs de base et les composantes de $\overrightarrow{x}$. Écrire ces expressions sous forme tensorielle.