Chapitre 3

Equations différentielles ordinaires

3.1 Définition

Soit F une fonction de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Une équation différentielle d'ordre n est une relation de la forme

$$F\left(x,\ y(x),\ y'(x),\ \cdots,\ y^{(n)}(x)\right) \ = \ 0 \tag{3.1}$$

où y est ne fonction de x et $y^{(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant n$ est la dérivée i^{me} de y par rapport à x.

a) $y' - \sin 2x = 0$ et $y' + 3y = x + e^{-2x}$ sont des équations différentielles d'ordre 1.

b) $yy" + (y')^2 = 0$ et $y" + 6y' - 7y = 2\sin x$ sont des équations différentielles d'ordre 2 ou du second ordre.

c) $xy^4 + (1-x^2)y^3 + y" + 3y' + 2y = e^{-x}$ est une équations différentielles du 4^{me} ordre.

3.2 Solution d'une équation différentielle d'ordre n

Définition 3.1
Une solution de l'équation différentielle (3.1) *est un couple* $(I,\ \phi)$ *où* I *est un intervalle et* ϕ *une fonction définie et* n *fois dérivable sur* I *telle que*

$$F\left(x,\ \phi(x),\ \phi'(x),\ \phi"(x),\ \cdots,\ \phi^{(n)}(x)\right) = 0$$

Exercice 3.1
Montrer que $\left(\mathbb{R},\ x \longmapsto e^{-x} + 2e^{-2x}\right)$ *est une solution de l'équation différentielle* $y' + 2y = e^{-x}$.

Convention
Il n'est pas toujours aisé d'obtenir à partir de (3.1) une équation différentielle résolue par rapport à la dérivée d'ordre le plus élévé i.e.

$$y^{(n)} = f\left(x,\ y(x),\ y'(x),\ y"(x),\ \cdots,\ y^{(n)}(x)\right) \tag{3.2}$$

L'équation $(y')^2 + xy' + 4y = 0$ conduit à deux équations différentielles $y' = \frac{-x+\sqrt{x^2-16y}}{2}$ et $y' = \frac{-x-\sqrt{x^2-16y}}{2}$.

3.3 Equations différentielles linéaires et non linéaires

Définition 3.2
L'équation différentielle (3.1) *est linéaire si et seulement si* F *est une fonction linéaire des variables* y, y', y'', $\cdots$, $y^{(n)}$.
Une équation différentielle linéaire d'ordre n *est donc de la forme*

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + a_2(x)y'' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = 0 \tag{3.3}$$

$y'' + y = 0$, $x^2y'' - xy' + 4y = e^x$ sont des équations différentielles d'ordre 2.

Une équation différentielle qui n'est pas linéaire est non linéaire. $y'' + 4\sin y = e^x$, $yy'' + xy' = x^2 + 1$ sont des équations différentielles non linéaires.

Chapitre 4

Equations différentielles du premier ordre

Définition 4.1
Une équation différentielle du premier ordre est une équation différentielle de la forme

$$y' = f(x, y) \tag{4.1}$$

où f *est une fonction définie de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$.

4.0.1 Equations à variables séparées

Toute équation différentielle du premier ordre peut s'écrire sous la forme

$$m(x, y) + n(x, y)y' = 0 \quad \text{ou} \quad m(x, y) + n(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$$

Par exemple en posant $m(x, y) = -f(x, y)$ et $n(x, y) = 1$.

Lorsque m est une fonction de x seul et n une fonction de y seul, on a une équation à variables séparées :

$$m(x) + n(y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{4.2}$$

Résolution de (??)
L'équation (4.2) équivaut à :

$$m(x)dx + n(y)dy = 0 \tag{4.3}$$

Si M est une primitive de m et N une primitive de N et $(I,\ \phi)$ une solution de (4.3), on a

$$M'(x)dx + N'(\phi)d\phi = 0$$

d'où

$$\int M'(x)dx + \int N'[\phi(x)]d\phi'(x) = 0$$

et

$$M(x) + N[\phi(x)] = 0$$

On obtient ainsi la solution sous la forme implicite

$$M(x) + N(y) = c$$

où c est une constante arbitraire.

1. Soit $y' = \frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}$. On a :

$$\begin{aligned} 2(y-1)y' &= 3x^2+4x+2 \\ 2(y-1)dy &= (3x^2+4x+2)dx \\ y^2-y+c_1 &= x^3+2x^2+2x+c_2 \\ y^2-y &= x^3+2x^2+2x+c \end{aligned}$$

2. Soit $y' = \frac{y\cos x}{1+y^2}$. On a :

$$\frac{1+2y^2}{y}dy = \cos x dx$$

d'où

$$\ln|y| + y^2 = \sin x + c$$

4.0.2 Equations homogènes

Définition 4.2

Une équation différentielle homogène est une équation différentielle de la forme

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right) \tag{4.4}$$

$$y' = \frac{y^2+2xy}{x^2} \quad \text{et} \quad y' = \ln x - \ln y + \frac{x+y}{x-y}$$

sont des équations homogènes car elles peuvent se mettre sous la forme

$$y' = \frac{y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x} \quad \text{et} \quad y' = \ln\left(\frac{1}{\frac{y}{x}}\right) + \frac{x+\frac{y}{x}}{x-\frac{y}{x}}, \quad \text{pour } x \neq o$$

Résolution d'une équation homogène

On pose $= \frac{y}{x}$. Ainsi $y = zx$ et on obtient par dérivation

$$y' = \frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$$

En remplaç dans (4.4) on a
ant

$$x\frac{dz}{dx} + z = F(z)$$

d'où on déduit l'équation à variables séparées.

$$\frac{dz}{F(z)-z} = \frac{dx}{x} \tag{4.5}$$

La résolution de (4.5) donne après remplacement de z par $\frac{y}{x}$ la résolution de (4.4).

Ex: $y' = \frac{y^2+2xy}{x^2} \Longleftrightarrow y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x}$.
En posant $z = \frac{y}{x}$, on obtient :
$x\frac{dz}{dx} + z = z^2 + 2z \Longleftrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dz}{z(z+1)}$.
Par décomposition en éléments simple, on a :
$\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right)\frac{dz}{z(z+1)}$,
d'où $c + \ln|x| = \ln|z| - \ln|z+1|$.
En posant $c = \ln\lambda$, $\lambda > 0$, on a $\lambda x = \frac{z}{z+1}$, c'est-à dire $\lambda x = \frac{\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}+1} = \frac{y}{y+x}$.
D'où $y = \frac{\lambda x^2}{1-\lambda x}$.

Equations exactes

On vient de voir que toute équation différentielle du premier ordre se met sous la forme :

$$m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0 \tag{4.6}$$

Définition 4.3
L'équation (4.6) est exacte si et seulement si il existe une fonction à deux variables ψ *telle que :* $m = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ *et* $m = \frac{\partial \psi}{\partial y}$.

Théorème 4.1
Si les fonction m, n, $\frac{\partial m}{\partial y}$ *et* $\frac{\partial n}{\partial x}$ *sont continues dans un rectangle* R : $a < x < b$, $c < x < d$ *de* $\mathbb{R}^2$ *alors l'équation (??) est une équation différentielle exacte dans* R *si et seulement si*

$$\frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\partial n}{\partial x} \tag{4.7}$$

en tout point de R.
Si l'équation (4.7) est vérifiée, il existe une fonction ψ *telle que* $m = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ *et* $m = \frac{\partial \psi}{\partial y}$.

Résoudre $(y\cos x + 2xe^y) + \left(\sin x + x^2 e^y - 1\right) y' = 0$.
On a $m(x,y) = y\cos x + 2xe^y$, $n(x,y) = \sin x + x^2e^y - 1$ et $\frac{\partial m}{\partial y} = \cos x + 2xe^y = \frac{\partial n}{\partial x}$.
Donc il existe ψ telle que $m = \psi_x$ et $n = \psi_y$.
$\psi_x = y\cos x + 2xe^y \Longrightarrow \psi(x,y) = y\cos x + x^2e^y + h(y)$.
De $\psi_y = x$ on tire $h'(y) = -1$ et $h(y) = -y$.
Donc $\psi(x,y) = y\cos x + x^2e^y - y$ et la solution est $\psi(x,y) = c$.

4.1 Equations de Bernoulli

Définition 4.4
Une équation de Bernoulli est une équation différentielle de la forme $y' = f(x)y + g(x)y^\alpha$ *où* α *est un réel différent de* 1, f *et* g *des fonctions numérique de la variable réelle* x *continues sur un intervalle* I.

Si α est strictement positif alors la fonction nulle est solution de l'équation de Bernoulli.

4.1.1 Recherche des solutions

On fait le changement de fonctions $z = y^{1-\alpha}$. On obtient alors pour z une équation différentielle linéaire :

$$z' = (1-\alpha)f(x)z + (1-\alpha)g(x) \tag{4.8}$$

On résout (??) et on en déduit $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$

4.2 Equation de Riccati

Définition 4.5
Une équation de Riccati est une équation différentielle de la forme $y' = c(x) + b(x)y + a(x)y^2$ *où* a, b *et* c *des fonctions numérique de la variable réelle* x *continues sur un intervalle* I.

4.2.1 Recherche des solutions

Si on connait une solution (I, ϕ) de l'équation de Riccati , on cherche la solution générale (I, y) sous la forme

$$y = \phi - \frac{1}{u} \tag{4.9}$$

En remplaçant dans l'équation de Riccati on trouve pour u l'équation différentielle linéaire $u' = -(b + 2a\phi)u - a$.

4.3 Equations linéaires du premier ordre

Définition 4.6
Une équations différentielle linéaire du premier ordre est une équations différentielle de la forme

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{4.10}$$

où a et b sont des fonctions numériques de la variable réelle.
L'équation

$$y' + a(x)y = 0 \tag{4.11}$$

est l'équation sans second membre ou l'équation homogène associée à (4.10).

Résolution de l'équation(4.11)

On a :

$$\begin{aligned} y' + a(x)y = 0 &\iff \frac{dy}{dx} = -a(x)y \\ &\iff \frac{dy}{y} = -a(x)dx \\ &\iff \ln|y| = -\int a(t)dt \end{aligned}$$

Si A est une primitive de a, on a $\ln|y| = -A(x) + c$, d'où $y = \lambda e^{-A(x)}$.

Résolution de l'équation (4.10)

Propriété 4.1
Une solution générale de l'équation différentielle(4.10) est la somme d'une solution générale de l'équation(4.11) et d'une solution particulière de l'équation (4.10).

Si y_p est une solution particulière de (4.10)alors on a :

$$y_p' + a(x)y_p = b(x) \tag{4.12}$$

On obtient alors par soustraction(4.10) − (4.12) :

$$(y - y_p)' + a(x)(y - y_p) = b(x)$$

Donc $y - y_p = y_h$ est une solution de l'équation(4.11)et $y = y_h + y_p$.

Recherche d'une solution particulière (4.10)

On cherche la solution particulière (4.10) sous la forme $y_p = \lambda(x)e^{-A(x)}$.
En injectant dans (4.10) on a :

$$\lambda'(x)e^{-A(x)} - \lambda(x)A'(x)e^{-A(x)} + a(x)\lambda(x)e^{-A(x)} = b(x)$$

Comme $A'(x) = a(x)$ on obtient

$$\lambda'(x)e^{-A(x)} = b(x) \Longleftrightarrow \lambda'(x) = b(x)e^{A(x)}$$

D'où

$$\lambda(x) = \int b(t)e^{A(t)}dt \quad \text{et} \quad y_p(x) = e^{-A(x)} \int b(t)e^{A(t)}dt$$

La solution générale de (4.10) est donc

$$y_g(x) = \left[\lambda + \int b(t)e^{A(t)}dt\right] e^{-A(x)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4.1

1. *Résoudre l'équation* $y' + 2y = x$.
2. *Résoudre les équations différentielles suivantes sachant que* y_1 *est une solution particulière :*
   (a) $y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2, \qquad y_1(x) = x.$
   (b) $y' = -\frac{1}{x^2} + \frac{y}{x} + y^2, \qquad y_1(x) = \frac{1}{x}.$
   (c) $y' = \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x + y^2}{2\cos x}, \qquad y_1(x) = \sin x.$

4.3.1 Application

Décroisance radioactive

Exercice 4.2

L'isotrope radioactive thorium -234 *se désintègre proportionnellement à la quantité de lélément considéré.*

1. *Si* 100mg *de ce matériau est réduit à* $82,04\text{mg}$ *en 7 jours, déterminer l'expression de la quantité de thorium* -234 *présent en fonction du temps.*
2. *Déterminer le temps nécéssaire pour que la masse du thorium diminue de moitié.*

Solution

1. Si $Q(t)$ est la quantité de thorium présente au temps t, on mesure Q en mg et t en jours. Le matériau se désintégrant proportionnellement à la quantité de lélément considéré, on a donc

$$\frac{dQ}{dt} = -kQ \tag{4.13}$$

$k > 0$ est le taux de désintégration, le signe moins (signe négatif) indiquant la diminution $\frac{dQ}{dt} < 0$ et $\frac{dQ}{dt}$ étant le taux de variation instantané de Q.

On cherche donc la solution de l'équation différentielle (4.13)qui satisfait $Q(0) = 100$ et $Q(7) = 82,04$.

$$(4.13) \Longrightarrow Q(t) = \lambda e^{-kt}$$

On a donc

$$Q(0) = \lambda = 100 \quad \text{d'où} \quad \lambda = 100,$$

et

$$100e^{-7k} = 82,04 \quad \text{d'où} \quad k = \frac{\ln(0,8204}{7} = 0,02828/\text{jour}.$$

Ainsi $\boxed{Q(t) = 100e^{-0,02828t}mg}$.

2. Le temps mis pour arriver à la moitié de la masse initiale est t_m tel que

$$50 = 100e^{-kt_m} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{2} = e^{-kt_m}.$$

D'où $\boxed{t_m = \frac{\ln 2}{k} \simeq 24,5\text{jours}}$.

Détermination du moment de décès

Pour les besoin d'enquête après un accident ou un homicide, il est très important de déterminer l'instant (ou la date) du décès.
Des observations expérimentales ont montré que la tepérature de surface d'un objet change à un taux proportionnel à la différence entre la température de l'objet et celle de son environnement. Si $\theta(t)$ est la température de l'objet à l'instant t et T la température constante du milieu environnant, on a :

$$\frac{d\theta}{dt} = k(\theta - T) \tag{4.14}$$

où k est la constante de proportionnalité.

On a supposé dans (4.14)que $\theta > t$ et que θ diminue au cours du temps.

Supposons qu'à l'instant $t = 0$ un corps a été découvert à la température θ_0. On suppose qu'au moment du décès $t = t_d$ le corps avait la température normale $37°C = \theta_d$. On va utiliser (4.14) pour déterminer t_d.
La résolution de (4.14)avec la condition initial $\theta(0) = \theta_0$ donne

$$\theta(t) = T + (\theta_0 - T)e^{-kt} \tag{4.15}$$

Pour déreminer k on peut faire une autre mesure θ_1 de la température à un temps ultérieur $t_1 > 0$. On a alors

$$\theta_1 = \theta(t_1) = T + (\theta_0 - T)e^{-kt_1} \tag{4.16}$$

d'où $\boxed{k = -\frac{1}{t_1} \ln\left(\frac{\theta_1 - T}{\theta_0 - T}\right)}$, θ_0, θ_1 T et t_1 sont connus.
On détermine alors t_1 en résolvant l'équation

$$\theta_d = T + (\theta_0 - T)e^{-kt_d}$$

en t_d et on obtient $\boxed{t_d = -\frac{1}{k}\ln\left(\frac{\theta_d - T}{\theta_0 - T}\right)}$.

Si par exemple la température du corps était de 25°C au moment de la découverte, de 13°C deux heures plus tard et que la température ambiante est de 7°C, on a :

$$\begin{array}{rcl} k & = & -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{13-7}{25-7}\right) = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\ln 3/h \\ t_d & = & -\frac{2}{\ln 3}\ln\left(\frac{37-7}{25-7}\right) = -\frac{2}{\ln 3}\ln\frac{5}{3} \end{array}$$

Chapitre 5

équations différentielles du second ordre

Définition 5.1
Une équations différentielles du second ordre est une équation de la forme

$$y" = f(x, y, y')$$

où f *est une fonction de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}$.

$(1-x^2)\,y" - 2xy' + (x^2+2x)\,y = 0$, $x^2y" + yy' + (x^2-1)\,y = e^x$ sont des équations différentielles du second ordre.

Comme pour les équations différentielles du premier ordre, les équations différentielles du second ordre sont linéaires ou non linéaires. La résolution des équations non linéaires du second ordre n'est pas aisée, mais il existe des cas particuliers dans lesquels elle est simple.

1. Cas où f ne dépend pas explicitement de f : On a alors

$$y" = f(x, y') \tag{5.1}$$

On pose alors $z = y'$ et on obtient une équation du premier ordre pour z :

$$z' = f(x, z) \tag{5.2}$$

2. Cas où f ne dépend pas explicitement de x : On a alors

$$y" = f(y, y') \tag{5.3}$$

On pose $z = y'$ et on a $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}$. L'équation (5.1) se met alors sous la forme :

$$z\frac{dz}{dy} = f(y, z) \tag{5.4}$$

On obtient encore une équation du premier ordre pour z.

Ex:
1. (a) $x^2y" + 2xy' - 1 = 0, \quad x > 0$
   (b) $xy" + y' - 1 = 0, \quad x > 0$
   (c) $x^2y" - (y')^2 = 0, \quad x > 0$
   (d) $2x^2y" + (y')^3 - 2xy' = 0, \quad x > 0$
   (e) $y" + x(y')^2 = 0$
   (f) $y" + y' = e^{-x}$

2. (a) $yy'' + (y')^2 = 0$
   (b) $y'' + y(y')^3 = 0$
   (c) $y^2y'' + 2y(y')^2 = 1$
   (d) $y'' + (y')^2 = 2e^y$ (Equation de Bernoulli)

5.0.2 Equations linéaires du second ordre

Définition 5.2
Une équation différentielle linéaire du second ordre est une équation différentielle de la forme

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x) \tag{5.5}$$

où a, b *et* c *sont des fonctions de numériques de la variable réelle.*
L'équation

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{5.6}$$

est l'équation sans second membre associée à (5.5).

En notant $\mathcal{L}$ l'opérateur $\frac{d^2}{dx^2} + a(x)\frac{d}{dx} + b(x)$, les équations (5.5) et (5.6) s'écrive respectivement sous la forme

$$\mathcal{L}(y) = c(x) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(y) = 0$$

Théorème 5.1
Si y_1 *et* y_2 *sont deux solutions de l'équation différentielle (5.6) (i.e* $\mathcal{L}(y) = 0$*) alors toute combinaison linéaire* $y = \alpha y_1 + \beta y_2$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, *est une solution de (5.6).*

Supposons y_1 et y_2 sont deux solutions de $\mathcal{L}(y) = 0$ i.e $\mathcal{L}(y_1) = y_1'' + ay_1' + by_1 = 0$ et $\mathcal{L}(y_2) = y_2'' + ay_2' + by_2 = 0$.
Alors $\forall\alpha,\ \beta,\ \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\alpha y_1 + \beta y_2) &= (\alpha y_1 + \beta y_2)'' + a(\alpha y_1 + \beta y_2)' + b(\alpha y_1 + \beta y_2) \\ &= \alpha(y_1'' + ay_1' + by_1)'' + \beta(y_2'' + ay_2' + by_2)'' = 0 \end{aligned}$$

Théorème 5.2 (Existence et Unicité de la solution)
Si les fonctions a, b *et* c *sont continues sur un intervalle ouvert* I *de* $\mathbb{R}$, *alors il existe une et une fonction* ϕ *vérifiant l'équation différentielle linéaire (5.5) i.e.*

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

et satisfaisant les conditions $y(x_0) = y_0$ *et* $y'(x_0) = y_0'$ *en un point* $x_0 \in I$.

Admise

Théorème 5.3
Si les fonctions a *et* b *sont continues sur un intervalle ouvert* I *de* $\mathbb{R}$ *et si* y_1 *et* y_2 *sont solutions de l'équation sans second membre (5.6) i.c.*

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

et satisfaisant les conditions $y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \neq 0$ *en un point* $x_0 \in I$ *alors toute solution de (5.6) s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire de* y_1 *et* y_2.

On sait que si y_1 et y_2 sont deux solutions de (5.3) toute combinaison linéaire de y_1 et y_2 est une solution de (5.3). On veut montrer que toute solution y de (5.3) est une combinaison linéaire de y_1 et y_1.
Soit y une solution de (5.3) vérifiant $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_0'$ pour $x_0 \in I$. S'il existe α, β $\mathbb{R}$ tels que $\alpha y_1(x_0) + \beta y_2(x_0) = y_0$ et $\alpha y_1'(x_0) + \beta y_2'(x_0) = y_0'$ alors d'après le théorème d'existence et d'unicité de la solution d'une équation linéaire du second ordre on a $y = \alpha y_1 + \beta y_2$.
Or le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha y_1(x_0) + \beta y_2(x_0) & = & y_0 \\ \alpha y_1'(x_0) + \beta y_2'(x_0) & = & y_0' \end{array}\right.$$

admet une solution unique $(\alpha, \ \beta)$ si et seulement si le déterminant $\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$
Donc si $y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \neq 0$, y s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire de y_1 et y_2.

5.0.3 Indépendance linéaire de deux fonctions

Définition 5.3
Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I. On appelle Wronskien de f et g la fonction $W(f, g)$ définie sur I par

$$W(f, g) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x), \quad \forall x \in I$$

On note $W(f, g) = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g.$

Théorème 5.4
Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I. f et g sont linéairement indépendantes si et seulement si $\exists x_0 \in I \ / \ W(f, g) \neq 0$.

f et g sont linéairement indépendantes si et seulement si $\alpha f + \beta g = 0 \implies \alpha = \beta = 0$.
Soient α, β, $\in \mathbb{R}$. $\alpha f + \beta g = 0 \implies \alpha f' + \beta g' = 0$.
Soit $x_0 \in I$, on a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha f(x_0) + \beta g(x_0) & = & 0 \\ \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0) & = & 0 \end{array}\right.$$

Le déterminant de ce système est $W(f, g)(x_0)$. Donc $\alpha = \beta = 0$ si et seulement si $\exists x_0 \in I \ / \ W(f, g) \neq 0$.
Ainsi f et g sont linéairement dépendantes si et seulement si $W(f, g) = 0$

5.0.4 Système fondamental de solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre homogène

Propriété 5.1
Si les fonctions a et b sont continues sur un intervalle ouvert I et si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équations différentielle (5.6)

$$y'' + ay' + by = 0$$

définies sur I alors $W(y_1, y_2)$ est soit identiquement nul sur I, soit ne s'annule jamais sur I.

On a :

$$y_1'' + ay_1' + by_1 = 0 \tag{5.7}$$
$$y_2'' + ay_2' + by_2 = 0 \tag{5.8}$$

On multiplie (5.7) par $-y_2$ et (5.8) par y_1 et on obtient par addition

$$(y_1y''_2 - y_2y''_1) + a\,(y_1y_2' - y_2y_1') = 0 \tag{5.9}$$

Comme $[W(y_1, y_2)] = y_1y''_2 - y_2y''_1$, l'équation (5.9) s'écrit $[W(y_1, y_2)]' + a\,[W(y_1, y_2)] = 0$.
D'où $W(y_1, y_2)(x) = c \exp\left[-\int a(t)dt\right]$.
c est une constante et la fonction exponentielle ne s'annule jamais dans $\mathbb{R}$. Ainsi si $c = 0$ $W(y_1, y_2)(x) = 0$ et si $c \neq 0$ $W(y_1, y_2)(x)$ est non nul.

Si les fonctions a et b sont continues sur un intervalle ouvert I et si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équations différentielle (5.6) sur I, s'il existe $x_0 \in I$ tel que $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ alors toute solution de (5.6) s'écrit comme une combinaison linéaire de y_1 et y_2.

Définition 5.4
Dans ce cas on dit que $\{y_1,\ y_2\}$ est un système fondamental de solutions de (5.6).

5.0.5 Equations linéaires homogènes à coefficients constants

Définition 5.5
Une équation différentielle homogène du second ordre à coefficients constants est une équation différentielle de la forme

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{5.10}$$

a et b sont des constantes.

Résolution de (5.10)
On appelle équation caractéristique de (5.10) l'équation du second degré

$$r^2 + ar + b = 0 \tag{5.11}$$

1) L'équation (5.11) a des solutions réels :
   a) Si (5.11) a une solution double r_0 alors la solution générale de (5.10) est
   $$y = (\alpha + \beta x)e^{r_0 x}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$
   b) Si (5.11) a deux solutions distinctes r_1 et r_2 alors la solution générale de (5.10) est
   $$y = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$
2) L'équation (5.11) a des racines complexes conjuguées $z = \alpha \pm i\beta$ alors la solution générale de (5.10) est
   $$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

5.0.6 Equations non homogènes à coefficients constants

Définition 5.6

Une équation différentielle linéaire du second à coefficients constants est une équation différentielle de la forme

$$y" + ay' + by = c(x) \qquad (5.5)$$

a *et* b *sont des constantes et* c *une fonction numérique de la variable réelle.*

Propriété 5.2

La différence $y_1 - y_2$ *de deux solutions* y_1 *et* y_2 *de l'équation différentielle du second ordre* ~~(27)~~

$$y" + a(x)y' + b(x)y = c(x) \qquad (5.5)$$

est une solution de l'équation homogène associée ~~(27)~~

$$y" + a(x)y' + b(x)y = 0 \qquad (5.6)$$

Evidente

Toute solution y de (5.5) est donc la somme d'une solution générale y_H de (5.6) et d'une solution particulière y_P de (5.5)

$$y = y_H + y_P$$

Evidente

Théorème 5.5

Soit y_P *une solution particulière de* (5.5) *i.e.* $y" + ay' + by = c$. *Alors toute solution de* (5.5) *s'écrit sous la forme*

$$y(x) = y_P(x) + \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$$

où y_1 *et* y_2 *sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation sans second membre associé* (5.6) *:* $y" + a(x)y' + b(x)y = 0$.

On a $y = y_P + y_H$ avec y_H une solution générale de l'équation (5.5). Alors si $\{y_1,\ y_2\}$ est un système fondamental de solution de (5.6), il existe un couple unique $(\alpha,\ \beta)$ tel que $y_H = \alpha y_1 + \beta y_2$. D'où $y = y_P + \alpha y_1 + \beta y_2$.

5.0.7 Recherche de la solution particulière y_P pour un équation du second ordre à coefficients constants $y" + ay' + by = c(x)$

1) Si $c(x) = e^{rx} P_n(x)$ où $P_n(x)$ est une fonction polynôme de degré n alors :

   a) Si α est une solution simple de léquation caractéristique, on cherche y_P sous la forme

$$y_P = x\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x_n\right) e^{\alpha x}$$

   b) Si α est une solution double de léquation caractéristique, on cherche y_P sous la forme

$$y_P = x^2\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x_n\right) e^{\alpha x}$$

c) Si α n'est pas une solution de léquation caractéristique, on cherche y_P sous la forme

$$y_P = \left(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_nx_n\right) e^{\alpha x}$$

2) Si $c(x) = e^{\alpha x}P_n(x)\cos\beta x$ ou $c(x) = e^{\alpha x}P_n(x)\sin\beta x$:

a) Si $z = \alpha + i\beta$ est une racine du polynôme caractéristique, on cherche y_P sous la forme

$$\begin{aligned} y_P &= xe^{\alpha x}\left(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_nx_n\right)\cos\beta x + \\ &\quad xe^{\alpha x}\left(B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx_n\right)\sin\beta x \end{aligned}$$

b) Si $z = \alpha + i\beta$ n'est pas racine du polynôme caractéristique, on cherche y_P sous la forme

$$\begin{aligned} y_P &= e^{\alpha x}\left(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_nx_n\right)\cos\beta x + \\ &\quad e^{\alpha x}\left(B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx_n\right)\sin\beta x \end{aligned}$$

1) On remplace y_P dans l'équation et on a :
$y_P(x) = e^{\alpha x}u(x)$, $\quad y_P'(x) = e^{\alpha x}\left[u'(x) + \alpha u(x)\right]$, $\quad y''_P(x) = e^{\alpha x}\left[u''(x) + 2\alpha u'(x) + \alpha^2 u(x)\right]$
d'où

$$u''(x) + (2\alpha + a)u'(x) + \left(\alpha^2 + a\alpha + b\right)u(x) = P_n(x) \qquad (5.12)$$

On a donc à déterminer une solution particulière de (??).

a) Si $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ et $2\alpha + a \neq 0$, c'est-à-dire α est une solution simple de $r^2 + ar + b = 0$, alors on a $u''(x) + (2\alpha + a)u'(x) = P_n(x)$.
On choisit donc $u(x) = x\left(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_nx_n\right)$.

b) Si $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ et $2\alpha + a = 0$, c'est-à-dire α est une solution double de $r^2 + ar + b = 0$, alors on a $u''(x) = P_n(x)$.
On choisit donc $u(x) = x^2\left(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_nx_n\right)$.

c) Si $\alpha^2 + a\alpha + b \neq 0$ et $2\alpha + a \neq 0$ alors on choisit $u(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_nx_n$.

2) $c(x) = P_n(x)\frac{e^{\alpha+i\beta} - e^{\alpha-i\beta}}{2i} = P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$. On cherche

$$\begin{aligned} y_P &= e^{(\alpha+i\beta)x}\left(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_nx_n\right) + \\ &\quad e^{(\alpha-i\beta)x}\left(B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx_n\right) \end{aligned}$$

D'où le résultat.