Calcul Tensoriel

24 octobre 2023

Table des matières

Table des figures

Chapitre 1

Rappels sur les espaces vectoriels en géométrie différentielle

Sommaire

1.1 Espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Définition : une ensemble de vecteurs **e** est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ si les éléments de **e** composés des vecteurs $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{z}$, ... ont les propriétés suivantes :

1. **Opérations d'addition** (loi de composition interne)

(a) Commutativité : $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x}$
(b) Associativité : $\overrightarrow{x} + (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}) = (\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) + \overrightarrow{z}$
(c) Élément neutre : $\exists$ un vecteur nul $\overrightarrow{0}$ | $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{x}$
(d) Élément symétrique : $\exists$ pour chaque vecteur, un vecteur opposé noté $-\overrightarrow{x}$ tel que : $\overrightarrow{x} + (-\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$

2. **Opération de multiplication par un scalaire** (loi de composition externe)

(a) Pour tout $\overrightarrow{x} \in$ **e** on a : $1.\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$
(b) Associativité : pour tout $\overrightarrow{x} \in$ e et pour tout réel α et β, on a : $\alpha.(\beta.\overrightarrow{x}) = (\alpha.\beta).\overrightarrow{x}$
(c) Distributivité des scalaires par rapport à l'addition : pour tout $\overrightarrow{x} \in e$ et pour tout réel α et β, on a :

$(\alpha+\beta)\,.\overrightarrow{x}=\alpha.\overrightarrow{x}+\beta.\overrightarrow{x}$

(d) Distributivité des vecteurs par rapport à l'addition : pour tout $\overrightarrow{x}\in e$ et pour tous réels α et β, on a : $\alpha.(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y})=\alpha.\overrightarrow{x}+\beta\overrightarrow{y}$

Un espace vectoriel possède les propriétés suivantes :

1. Pour tout $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{z}$ de e : $\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}=\overrightarrow{x}+\overrightarrow{z} \iff \overrightarrow{y}=\overrightarrow{z}$
2. Pour tout $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ de e, il existe un unique vecteur $\overrightarrow{z}$ tel que $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{y}+\overrightarrow{z}$
3. Pour tout $\overrightarrow{x}\in e$ et pour tout réel α on a : $\alpha.\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0} \iff \alpha=0$ ou $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}$

1.2 Sous espace vectoriel

Définition : On nomme sous espace vectoriel d'un espace vectoriel e, toute partie e' non vide de e stable pour les opérations d'addition et de multiplication définies sur e.

$\forall\ \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in$ e' et pour tout réel α et β :

$$(\alpha\overrightarrow{x}+\beta\overrightarrow{y})\in e'$$

On montre alors que e' est un espace vectoriel muni des opérations d'addition et de multiplication.

1.3 Base d'un espace vectoriel

1.3.1 Combinaison linéaire de vecteurs

Soit e un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, ..., \overrightarrow{e}_n)$ un sous ensemble fini de vecteurs de e. On appelle combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, ..., \overrightarrow{e}_n$ tout vecteur $\overrightarrow{v}$ tel que :

$$\overrightarrow{v}=\alpha_1\overrightarrow{e}_1+\alpha_2\overrightarrow{e}_2+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{e}_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{e}_i$$

Remarque : $\overrightarrow{v}$ est toujours un élément de e.

1.3.2 Espace vectoriel engendré et famille génératrice

L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de toute partie finie $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, ..., \overrightarrow{e}_n)$ d'un espace vectoriel e est un sous espace vectoriel de e, appelé sous espace vectoriel engendré par : $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, ..., \overrightarrow{e}_n$.

Une partie G ou famille de vecteur d'un espace vectoriel e est dite génératrice de e si tout vecteur de e est une combinaison linéaire de G.

1.3.3 Partie libre, partie liée d'un espace vectoriel

Une partie d'un espace vectoriel e sur $\mathbb{R}$, est dite libre si pour tout nombre fini d'éléments $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, ..., \overrightarrow{e}_n)$ de cette partie on a :

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{e}_i=\overrightarrow{0} \iff \alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$$

La partie liée dans le cas contraire.

Propriété : si une partie L est une partie liée d'un espace vectoriel, alors l'un au moins des vecteurs de L est une combinaison linéaire d'autres vecteurs de L.

1.3.4 Base d'un espace vectoriel

On nomme base d'un espace vectoriel toute partie génératrice et libre de cet espace vectoriel.

- Propriété caractéristique d'une base : pour qu'une partie B d'un espace vectoriel e soit une base de e, il faut et il suffit que tout vecteur de e s'exprime de façon unique, par une combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs de e.
- Coordonnées d'un vecteur dans une base donnée soit B = $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, ..., \overrightarrow{e}_n)$ une base finie d'un espace vectoriel e sur $\mathbb{R}$. Tout vecteur de e s'exprime de façon unique en fonction des vecteurs $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, ..., \overrightarrow{e}_n$, autrement dit il existe des réels $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, ..., \overrightarrow{x}_n$ tels que :
$$\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{e}_1 + x_2\overrightarrow{e}_2 + \cdots + x_n\overrightarrow{e}_n$$

le n-uplet $(\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, ..., \overrightarrow{x}_n)$ est appelé coordonnée du vecteur $\overrightarrow{v}$ dans la base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, ..., \overrightarrow{e}_n)$.

1.4 Dimension d'un espace vectoriel fini

Si un espace vectoriel e admet une base de n éléments, toute les autres bases de e ont également n éléments, ce nombre d'élément est appelé dimension de l'espace vectoriel e que l'on note *dim* e.

1.5 Espace vectoriel euclidien

Définition : L'espace vectoriel euclidien, noté E est un espace vectoriel possédant une opération particulière, le produit scalaire qui s'écrit :

$$\forall \quad \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \quad et \quad \overrightarrow{z} \in E, \quad on \quad a \ : \ \overrightarrow{x} \quad et \quad \overrightarrow{y} \rightarrow \overrightarrow{x}.\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}$$

Il possède les propriétés suivantes :

1. Commutativité : $\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y} = \overrightarrow{y}.\overrightarrow{x}$
2. Associativité : $\alpha\left(\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y}\right) = \left(\overrightarrow{\alpha x}\right).\overrightarrow{y}$
3. Distributivité : $\overrightarrow{x}.\left(\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}\right) = \overrightarrow{x}.\overrightarrow{y} + \overrightarrow{x}.\overrightarrow{z}$
4. Si $\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y} = 0$: $\forall\ \overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0} \Longrightarrow \overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$
5. Norme associée au produit scalaire : $\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{\left(\overrightarrow{x}.\overrightarrow{x}\right)}$

Remarque : On dit que l'espace vectoriel euclidien est proprement euclidien si : $\|\overrightarrow{x}\| \geq 0$.

1.6 Espace affine euclidien

Définition : L'espace affine est un espace ponctuel ξ muni d'une origine O, associé avec un espace vectoriel euclidien E tel que :

1. $\forall$ A et B $\in \xi$, il existe $\overrightarrow{a} \in$ E tel que :
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$$
2. $\forall\ \overrightarrow{a} \in$ E, il existe un point A unique appartenant à ξ tel que :
$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{0}$$

3. la distance entre 2 points A et B est égale à :

$$AB = \left\| \overrightarrow{AB} \right\|$$

Soit $(\overrightarrow{e}_i)$ avec $i = 1, ..., n$ une base d'un espace vectoriel euclidien, de dimension n. On dit que $(O, \overrightarrow{e}_i)$ forme un repère de l'espace affine euclidien.

Exercice

Considérons les vecteurs de base de E_3 :

$$e_1 = (a, 0, 0)\,, e_2 = (b, c, 0)\,, e_3 = (0, 0, d)$$

1. Démontrer que ces vecteurs sont linéairement indépendants.
2. Calculer la décomposition d'un vecteur donné : $X = (A, B, C)$ sur la base $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Chapitre 2

Introduction à la notion de tenseurs

Sommaire

2.1 Extension de la notion de vecteurs et scalaires

Les vecteurs et scalaires permettent de représenter un grand nombre de grandeurs physique :
- Énergie, puissance : scalaire,
- force, vitesse : vecteur.

D'où l'intérêt de développer et de codifier les différentes opérations que l'on peut effectuer sur les vecteurs et les scalaires (cf. chapitre 1 sur les espaces vectoriels).

En fait, la notion de vecteurs peut être considérée comme une extension de la notion de scalaires. En effet, un vecteur exprimé dans une base est représenté par un tableau unidimensionnel de scalaires, c'est-à-dire ses coordonnées :

$$\overrightarrow{V} = \sum_{i=1}^{3} V^i \overrightarrow{e}_i \tag{2.1}$$

Dans certaines branches de la physique (ex : la mécanique), on a besoin pour représenter certaines grandeurs, de tableaux multidimensionnels.

Exemple : matrice des contraintes :

$$\sigma^{ij} \quad avec \quad \begin{cases} i &= 1, \ldots, 3 \\ & et \\ j &= 1, \ldots, 3 \end{cases} \tag{2.2}$$

Ces tableaux sont les composantes d'un vecteur exprimé dans un repère particulier : **les tenseurs sont donc une extension ou une généralisation de la notion de vecteurs.**

Cette notion de tenseurs est fondamentale en Mécanique, en Physique, etc. Elle est assez complexe mais elle permet de représenter les grandeurs physiques, les interpréter et faire les calculs dans n'importe quelle base. Elle devient extrêmement simple et pratique dans le cas d'un espace vectoriel euclidien.

Dans ce cours, nous allons définir, dans un premier temps, de manière abstraite les espaces de tenseurs ainsi que les règles qui les régissent. Dans un deuxième temps, nous définirons des tenseurs particuliers au domaine de la géométrie différentielle (ex : tenseur métrique, tenseur des courbures). Grâce à l'opération de changement de base, nous donnerons ensuite une définition mathématique de la notion de tenseur.

Convention d'Einstein : *ans la suite du cours, nous utiliserons la notation d'Einstein pour les indices muets : chaque fois qu'un indice (inférieur ou supérieur) est répété, la somme est effectuée sur tous les termes en faisant varier les indices de 1 à N (voir également relation (2.1)) :*

Exemple :

$$\sum_{i=1}^{N} a_i x^i = a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 ... + a_N x^N = a_i x^i$$

2.2 Somme de deux sous espace vectoriels

Soient e et f , deux sous espace vectoriels de dimension n et p d'un espace vectoriel euclidien affine E, de bases respectives $(\overrightarrow{e}_i)$ et $\left(\overrightarrow{f}_j\right)$. La méthode classique pour créer un espace plus grand est d'ajouter ces deux espaces vectoriels. S'ils sont disjoints, c'est-à-dire : $e \cap f = 0$, on obtient un espace de dimension n + p généré par la base, $\left(\overrightarrow{e}_i, \overrightarrow{f}_j\right)$. La somme des sous espaces vectoriels e + f est un sous espace vectoriel de E.

2.3 Produit tensoriel

Un **espace des tenseurs** (il peut en exister d'autres) est obtenu à partir du **produit tensoriel d'espaces vectoriels**.

Le produit tensoriel des deux sous espaces vectoriel e et f , noté $e \otimes f$, permet d'obtenir un espace de dimension n.p qui est également un espace vectoriel. Le produit tensoriel des vecteurs de base $\overrightarrow{e}_i \otimes \overrightarrow{f}_j$ conduit à des vecteurs particuliers que l'on

appelle tenseurs d'ordre 2. Un élément de $e \otimes f$ s'écrit :

$$\underset{\sim}{T} = T^{ij} \overrightarrow{e}_i \otimes \overrightarrow{f}_j \tag{2.3}$$

où T^{ij} sont appelées les composantes du tenseur $\underset{\sim}{T}$ exprimées dans la base $\overrightarrow{e}_i \otimes \overrightarrow{f}_j$. Ces composantes sont identiques à une matrice à 2 dimensions de taille np.

On peut également définir le produit tensoriel de plusieurs espaces vectoriels. Par exemple, à l'ordre 3, on a : $e \otimes e \otimes e$. Un élément de cet espace s'écrit :

$$\underset{\sim}{W} = W^{ijk} \overrightarrow{e}_i \otimes \overrightarrow{e}_j \otimes \overrightarrow{e}_k \tag{2.4}$$

NB : D'une manière pratique, dans la suite du cours, s'il n'y a aucune indication supplémentaire, e sera de dimension 3, c'est-à-dire que l'espace e de référence est l'espace de base composé des vecteurs de base $\overrightarrow{e}_i$ avec $i = 1, \ldots, 3$. Les tenseurs d'ordre 2 seront rapportés à : $e \otimes e$, d'ordre 3 à : $e \otimes e \otimes e$, etc.

Propriétés de l'opération produit tensoriel $\otimes$:

$\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2 \in e$ et $\forall \overrightarrow{y}, \overrightarrow{y}_1, \overrightarrow{y}_2 \in f$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

1. Distributivité par rapport à l'addition vectorielle :

$$\overrightarrow{x} \otimes (\overrightarrow{y}_1 + \overrightarrow{y}_2) = \overrightarrow{x} \otimes \overrightarrow{y}_1 + \overrightarrow{x} \otimes \overrightarrow{y}_2$$

$$(\overrightarrow{x}_1 + \overrightarrow{x}_2) \otimes \overrightarrow{y} = \overrightarrow{x}_1 \otimes \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x}_2 \otimes \overrightarrow{y}$$

2. 2. Associativité : $\alpha\,(\overrightarrow{x} \otimes \overrightarrow{y}) = (\alpha\,\overrightarrow{x}) \otimes \overrightarrow{y} = \overrightarrow{x} \otimes (\alpha\,\overrightarrow{y})$

En général, il n'y a pas commutativité : $\overrightarrow{x} \otimes \overrightarrow{y} \neq \overrightarrow{y} \otimes \overrightarrow{x}$

Remarque : *On peut également représenter les tenseurs sous forme de vecteurs uni-colonne puisqu'un espace de tenseurs est un espace vectoriel, c'est ce qu'on appelle l'opération de contraction d'indices (voir également* §5*).*

On considère l'espace vectoriel de dimension 4, obtenu par le produit tensoriel de $e \otimes e$. On note :

$$\overrightarrow{e}_1 \otimes \overrightarrow{e}_1 = \overrightarrow{U}_1 \qquad \overrightarrow{e}_2 \otimes \overrightarrow{e}_2 = \overrightarrow{U}_2$$
$$\overrightarrow{e}_1 \otimes \overrightarrow{e}_2 = \overrightarrow{U}_3 \qquad \overrightarrow{e}_2 \otimes \overrightarrow{e}_1 = \overrightarrow{U}_4$$

Et on a alors :
$\underset{\sim}{T} = T^{11}\overrightarrow{e}_1 \otimes \overrightarrow{e}_1 + T^{22}\overrightarrow{e}_2 \otimes \overrightarrow{e}_2 + T^{12}\overrightarrow{e}_1 \otimes \overrightarrow{e}_2 + T^{21}\overrightarrow{e}_2 \otimes \overrightarrow{e}_1$
$= \alpha^1 U_1 + \alpha^2 U_2 + \alpha^3 U_3 + \alpha^4 U_4$
Soit $\underset{\sim}{T} = \underbrace{T^{ij}}_{i \quad et \quad j=1,2} \overrightarrow{e}_i \otimes \overrightarrow{e}_j = \underbrace{\alpha^k}_{k=1,\ldots,4} \overrightarrow{U}_k$
Donc $T^{11} = \alpha^1\,; T^{22} = \alpha^2\,; T^{12} = \alpha^3\,; T^{21} = \alpha^4$
Le fait d'utiliser des indices doubles, triples, etc permet en fait une plus simple manipulation.

Exercice

Utiliser la convention de sommation pour écrire les expressions qui suivent ; préciser la valeur de n dans chaque cas ainsi que les indices muets et libres.
1. $b_{j1}x_1 + b_{j2}x_2 + b_{j3}x_3 = 6$
2. $b_{11}d_{11} + b_{12}d_{12} + b_{13}d_{13} + b_{14}d_{14} = C$

Chapitre 3

Base duale

Sommaire

3.1 Produit scalaire dans une base $\overrightarrow{e}_i$

Soit un espace vectoriel affine euclidien E rapporté à une base $\overrightarrow{e}_i$. Les coordonnées x^i et y^j des vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ dans la base $\overrightarrow{e}_i$ se notent d'après la convention d'Einstein :

$$\overrightarrow{x} = x^i \overrightarrow{e}_i \quad et \quad \overrightarrow{y} = y^j \overrightarrow{e}_j \tag{3.1}$$

On définit classiquement l'opération du produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ par :

$$\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y} = x^i y^j \overrightarrow{e}_i.\overrightarrow{e}_j \tag{3.2}$$

Dans le cas d'une base orthonormée, il apparaît :

$$\overrightarrow{e}_i.\overrightarrow{e}_j = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq j \\ 1 & si \quad i = j \end{cases} \tag{3.3}$$

3.2 Utilisation du symbole de Kronecker

$$\delta_{ij} = \delta^i_j = \delta^{ij} = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq j \\ 1 & si \quad i = j \end{cases} \tag{3.4}$$

Si $\overrightarrow{e}_i$ est une base orthonormée, la relation (3.2) devient :

$$\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y} = x^i y^j \delta_{ii} = x^i y^i \tag{3.5}$$

3.3 Base duale

De manière à obtenir une formule analogue à l'équation (3.3), mais pour tout espace vectoriel (c'est-à-dire pour une base quelconque $\overrightarrow{e}_i$), on définit une base duale à $\overrightarrow{e}_i$, notée $\overrightarrow{e^i}$, telle que :

$$\overrightarrow{e_i}.\overrightarrow{e^j} = \delta_i^j \tag{3.6}$$

Démonstration : On considère le repère de référence fixe $\overrightarrow{I_i}$. Chaque vecteur de base $\overrightarrow{e}_i$ se décompose dans $\overrightarrow{I_k}$ par le changement de base suivant :

$$\overrightarrow{e}_i = \beta_i^k \overrightarrow{I_k}$$

où β_i^k est la matrice de changement de base : $\overrightarrow{I_k} \longrightarrow \overrightarrow{e_i}$ c'est-à-dire β_i^k est la k i-ème composante du vecteur $\overrightarrow{e_i}$ sur la base $\overrightarrow{I_k}$. De même, on suppose qu'il existe une base telle que :

$$\overrightarrow{e^j} = \alpha_l^j \overrightarrow{I_l}$$

L'équation (3.6) devient :

$$\overrightarrow{e_i}.\overrightarrow{e^j} = \delta_i^j = \beta_i^k \overrightarrow{I_k} \alpha_l^j \overrightarrow{I_l} = \beta_i^k \alpha_l^j \delta_{kl} = \beta_i^k \alpha_k^j = \delta_i^j$$

Ce que l'on peut écrire sous forme matricielle : $\left[\beta_i^k\right].\left[\alpha_k^j\right] = [Id]$

$\overrightarrow{e_i}$ étant une base, la matrice $\left[\beta_i^k\right]$ a un déterminant non nul (sinon vecteur liés) et on peut donc l'inverser :

$$\left[\beta_i^k\right] = \left[\alpha_k^j\right]^{-1} \quad (matrice \quad inverse)$$

Donc $\overrightarrow{e^j}$ forme donc une base appelée base duale de $\overrightarrow{e_i}$.

Interprétation géométrique : Un vecteur dual $\overrightarrow{e^i}$ est orthogonal à tous les vecteurs de la base naturelle d'indice différent et est tel que son produit scalaire avec celui de même indice est égal à 1.

Exemple : Soit un espace vectoriel à 2 dimensions où la base $\overrightarrow{e_i}$ est une base non-orthogonale (voir figure (3.1)).

D'après la relation (3.6), on a : $\overrightarrow{e^1}.\overrightarrow{e_2} = \delta_1^2 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{e^1} \perp \overrightarrow{e_2} \longrightarrow$ d'où la direction de $\overrightarrow{e^1}$.

De même : $\overrightarrow{e^1}.\overrightarrow{e_1} = \delta_1^1 = 1 = cos\theta \left\|\overrightarrow{e^1}\right\| \|\overrightarrow{e_1}\|$

Comme $cos\theta \neq 0$ sinon $\overrightarrow{e_1}$ colinéaire à $\overrightarrow{e^1}$, on a : $\left\|\overrightarrow{e^1}\right\| = \frac{1}{\|\overrightarrow{e_1}\| cos\theta} \longrightarrow$ sens et norme de $\overrightarrow{e^1}$.

$\longrightarrow$ idem pour la construction de $\overrightarrow{e^2}$.

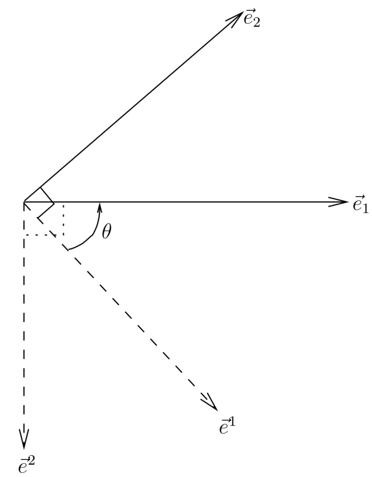

FIGURE 3.1 – Base naturelle et duale

3.4 Définition générale du produit scalaire

En exprimant les vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ dans la base duale $\overrightarrow{e^i}$, il vient :

$$\forall \quad \overrightarrow{x} \quad et \quad \overrightarrow{y}, \quad \exists\, x_i \quad et \quad y_i \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{x} = x_i \overrightarrow{e^i} \quad et \quad \overrightarrow{y} = x_j \overrightarrow{e^j} \tag{3.7}$$

Pour tout type de base, il est alors possible de définir le produit scalaire sous la forme :

$$\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y} = \begin{cases} x^i \overrightarrow{e_i}.x_j \overrightarrow{e^j} = x^i y_j \overrightarrow{e_i}.\overrightarrow{e^j} = x^i y_j \delta^i_j = x^i y_i \\ ou \\ x_i \overrightarrow{e^i}.x^j \overrightarrow{e_j} = x_i y^j \overrightarrow{e^i}.\overrightarrow{e_j} = x_i y^j \delta^j_i = x_i y^i \end{cases}$$

3.5 Composantes contravariantes et covariantes

D'après la relation (3.7), il existe deux composantes possibles x^i et x_i pour exprimer un vecteur $\overrightarrow{x}$:

$$\overrightarrow{x} = x^i \overrightarrow{e_i} = x_i \overrightarrow{e^i} \tag{3.8}$$

où par rapport à la base $\overrightarrow{e_i}$:
x^i sont les **composantes contravariantes** de $\overrightarrow{x}$
x_i sont les **composantes covariantes** de $\overrightarrow{x}$

Exercice

Soient deux vecteurs de E_3 :

$$A = (a_1, a_2, a_3)\,; \quad B = (b_1, b_2, b_3)$$

et une base de E_3 definie par : $\{e_1 = (1,1,1)\,, e_2 = (0,1,1)\,, e_3 = (0,0,1)\}$

1. Déterminer les composantes contravariantes de A et B.
2. Déterminer les composantes covariantes de A et B à l'aide de deux manières différentes.

3. On considère les deux vecteurs particuliers : A = (4, 1, 2) ; B = (1, 3, 5). Calculer les valeurs numériques des composantes contravariantes et covariantes des vecteurs A et B.
4. Calculer le produit scalaire des vecteurs A et B à l'aide des composantes contravariantes et covariantes.