Chapitre 6

Tenseur métrique ou tenseur fondamental

Sommaire

6.1 Définitions

Soit un espace vectoriel euclidien affine E, rapporté au repère cartésien absolu $\overrightarrow{I_i}$ et une base quelconque $\overrightarrow{e_i}$. $\forall \overrightarrow{x} \in E$, on peut exprimer ce vecteur dans la base naturelle ou duale par :

$$\overrightarrow{x} = x^i \overrightarrow{e_i} \quad ou \quad \overrightarrow{x} = x_j \overrightarrow{e^j} \tag{6.1}$$

D'où, le calcul des composantes d'un vecteur :

$$\overrightarrow{x}.\overrightarrow{e_i} = x_j \overrightarrow{e^j}.\overrightarrow{e_i} = x_j \delta^i_j = x_j$$

Grâce à la relation (6.1), on peut également remarquer que :

$$x_i = \overrightarrow{x}.\overrightarrow{e_i} = x_j \overrightarrow{e^j}.\overrightarrow{e_i}$$

Ce qui permet d'introduire une nouvelle grandeur telle que :

$$g_{ij} = g_{ji} = \overrightarrow{e_i}.\overrightarrow{e_j} = \overrightarrow{e_j}.\overrightarrow{e_i} \tag{6.2}$$

introduisant une relation entre les composantes covariantes et contravariantes :

$$x_i = g_{ij} x^j \tag{6.3}$$

De la même manière, on a :

$$x^i = \left(x_j \overrightarrow{e^j}\right).\overrightarrow{e^i} = x_j \overrightarrow{e^j}.\overrightarrow{e^i} = x_j g^{ij}$$

$$x^i = x^j \overrightarrow{e_j}.\overrightarrow{e^i} = x^j \delta^i_j = x^j g^i_j = x^j g^j_i$$

Les grandeurs g_{ij} apparaissent comme les composantes d'une opération linéaire qui à un vecteur fait correspondre le même vecteur. C'est un tenseur appelé tenseur fondamental ou tenseur métrique ou tenseur unité tel que :

$$\underset{\sim}{g} = g_{ij}\,\overrightarrow{e^i}.\overrightarrow{e^j} = g^{ij}\,\overrightarrow{e_i}.\overrightarrow{e_j} = \delta_i^j\,\overrightarrow{e_i}.\overrightarrow{e^j} = Id$$

Remarque : Cette notion de tenseur métrique est essentielle. Ce tenseur a un rôle particulier, il permettra d'introduire la notion de déformation en grandes transformations dans le cours de Mécanique des Milieux Continus.

6.2 Propriétés

$g_{ij} = \overrightarrow{e_i}.\overrightarrow{e_j} = \|\overrightarrow{e_i}\|\,\|\overrightarrow{e_j}\|\,cos\,(\overrightarrow{e_i},\overrightarrow{e_j})$
g_{ii} représente le carré de la longueur de $\overrightarrow{e_i}$: $g_{ii} = \overrightarrow{e_i}.\overrightarrow{e_i} = \|\overrightarrow{e_i}\|\,\|\overrightarrow{e_i}\|\,\underbrace{cos\,(\overrightarrow{e_i},\overrightarrow{e_i})}_{=1}$

On note le déterminant de g_{ij} : $det\,[g_{ij}] = g$

$$g = det\,[g_{ij}] = |g_{ij}| = det\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

Remarque : Les composantes du tenseur métrique permettront également le passage entre les différentes variances des composantes d'un tenseur. Par exemple :

$$T^{ij} = T_l^j g^{lj} \tag{6.5}$$