Chapitre 4

Changement de base

Sommaire

4.1 Changement de base pour les composantes d'un vecteur

Soit un espace vectoriel euclidien E, rapporté à une base $\overrightarrow{e_i}$ et la base duale associée $\overrightarrow{e^i}$. On considère une nouvelle base de E, notée $\overrightarrow{E_i}$ telle que telle que :

$$\overrightarrow{E_i} = \beta_i^j \overrightarrow{e_j} \tag{4.1}$$

où β_i^j est la matrice de changement de base : $\overrightarrow{e_j} \longrightarrow \overrightarrow{E_i}$.
Pour la base duale, on aura une relation du type :

$$\overrightarrow{E^i} = \alpha_j^i \overrightarrow{e^j} \tag{4.2}$$

Par définition, on aura :

$$\beta_i^j \alpha_j^k = \delta_k^i \tag{4.3}$$

ce qui peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\left[\beta_i^j\right] = \left[\alpha_j^i\right]^{-1} \tag{4.4}$$

Remarque : Sous forme matricielle, on notera :
- indice supérieur pour l'indice de colonne,
- indice inférieur pour l'indice de ligne.

4.1.1 Étude du comportement des composantes contravariantes dans un changement de base

$\forall \overrightarrow{x} \in e$, on peut écrire :

$$\begin{cases} \overrightarrow{x} = x^j \overrightarrow{e_j} \Longrightarrow \overrightarrow{x}.\overrightarrow{e^k} = x^j \overrightarrow{e_j}.\overrightarrow{e^k} = x^j \delta_k^j = x^k \\ \qquad\qquad ou \\ \overrightarrow{x} = X^i \overrightarrow{E_i} = X^i \beta_i^j \overrightarrow{e_j} \Longrightarrow \overrightarrow{x}.\overrightarrow{e^k} = X^i \beta_i^j \overrightarrow{e_j}.\overrightarrow{e^k} = X^i \beta_i^j \delta_k^j = X^i \beta_i^k \end{cases}$$

Donc : $x^k = \beta_i^k X^i$

Ou aussi : $\underbrace{X^i}_{nouvelle\ composantes} = \alpha_k^i \underbrace{x^k}_{ansienne\ composante}$

Alors que : $\underbrace{\overrightarrow{E_i}}_{nouveau\ vecteur} = \beta_i^k \underbrace{\overrightarrow{e_k}}_{ansien\ vecteur}$

Les composantes x^k se transforment de manière "contraire" au comportement des vecteurs de la base initiale $\overrightarrow{e_i}$ lors d'un changement de base : $\longrightarrow$ composantes contravariantes.

4.1.2 Étude du comportement des composantes covariantes dans un changement de base

Dans la base duale, on a également :

$$\begin{cases} \overrightarrow{x} = x_j \overrightarrow{e^j} \Longrightarrow \overrightarrow{x}.\overrightarrow{e_k} = x_j \overrightarrow{e^j}.\overrightarrow{e_k} = x_j \delta_j^k = x_k \\ \qquad\qquad ou \\ \overrightarrow{x} = X_i \overrightarrow{E^i} = X_i \alpha_j^i \overrightarrow{e^j} \Longrightarrow \overrightarrow{x}.\overrightarrow{e_k} = X_i \alpha_j^i \overrightarrow{e^j}.\overrightarrow{e_k} = X_i \alpha_j^i \delta_j^k = X_i \alpha_k^i \end{cases}$$

Donc : $x_k = \alpha_k^i X_i$

Ou aussi : $\underbrace{X_i}_{nouvelle\ composantes} = \beta_i^k \underbrace{x_k}_{ansienne\ composante}$

Alors que : $\underbrace{\overrightarrow{E_i}}_{nouveau\ vecteur} = \beta_i^k \underbrace{\overrightarrow{e_k}}_{ansien\ vecteur}$

Les composantes x_k se transforment de manière "identique" au comportement des vecteurs de la base initiale $\overrightarrow{e_i}$ lors d'un changement de base : $\longrightarrow$ composantes covariantes.

4.2 Changement de base pour les composantes d'un tenseur

On considère un tenseur d'ordre 2 : $\underset{\sim}{T} = T^{ij} \overrightarrow{e_i} \otimes \overrightarrow{e_j}$

En utilisant la base duale, il est possible de définir quatre types de composantes :

$$\underset{\sim}{T} = T^{i.}_{.j} \overrightarrow{e_i} \otimes \overrightarrow{e^j} = T_{i.}^{.j} \overrightarrow{e_j} \otimes \overrightarrow{e^i} = T^{ij} \overrightarrow{e_i} \otimes \overrightarrow{e_j} = T_{ij} \overrightarrow{e^i} \otimes \overrightarrow{e^j} \tag{4.5}$$

D'où quatre types de changement de base, avec : $\overrightarrow{E_k} = \beta_k^i \overrightarrow{e_i}$ et $\overrightarrow{E^k} = \alpha_i^k \overrightarrow{e^i}$

Premier cas :

$\underset{\sim}{T} = T^{ij} \overrightarrow{e_i} \otimes \overrightarrow{e_j} = T'^{kl} \overrightarrow{E_k} \otimes \overrightarrow{E_l} = T'^{kl} \beta_k^i \beta_l^j \overrightarrow{e_i} \otimes \overrightarrow{e_j}$

La décomposition étant unique, on a donc :

$$T^{ij} = T'^{kl} \beta_k^i \beta_l^j \longrightarrow composantes\ 2\ fois\ contravariantes \tag{4.6}$$

ou l'inverse : $T'^{kl} = T^{ij} \alpha_i^k \alpha_j^l$

Deuxième cas
$\underset{\sim}{T} = T_{ij}\,\overrightarrow{e^i} \otimes \overrightarrow{e^j} = T'_{kl}\overrightarrow{E^k} \otimes \overrightarrow{E^l} = T'_{kl}\alpha_i^k\alpha_j^l\,\overrightarrow{e^i} \otimes \overrightarrow{e^j}$
D'où :

$$T_{ij} = T'_{kl}\alpha_i^k\alpha_j^l \longrightarrow composantes\ 2\ fois\ covariantes \tag{4.7}$$

ou l'inverse : $T'_{kl} = T_{ij}\beta_k^i\beta_l^j$
Troisième cas
$\underset{\sim}{T} = T_{i.}^{.j}\,\overrightarrow{e^i} \otimes \overrightarrow{e_j} = T'^{.l}_{k.}\overrightarrow{E^k} \otimes \overrightarrow{E_l} = T'^{.l}_{k.}\alpha_i^k\beta_l^j\,\overrightarrow{e^i} \otimes \overrightarrow{e_j}$
D'où :

$$T_{i.}^{.j} = T'^{.l}_{k.}\alpha_i^k\beta_l^j \longrightarrow composantes\ mixtes\ 1\ fois\ covar\ et\ 1\ fois\ contravar \tag{4.8}$$

Quatrième cas

$$T^{i.}_{.j} = T'^{k.}_{.l}\beta_k^i\alpha_j^l \longrightarrow composantes\ mixtes\ 1\ fois\ contravar\ et\ 1\ fois\ covar \tag{4.9}$$

Ces cas se généralisent pour un tenseur d'ordre n :
$\underset{\sim}{T} = \underbrace{T^{i_1\,i_2\,\cdots\,i_r\,.\,.}_{.\,.\,i_{r+1}\,i_{r+2}\,\cdots\,i_n}}_{comp\ r\ fois\ contravar\ et\ (n-r)\ fois\ covar}\ \overrightarrow{e_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \overrightarrow{e_{i_r}} \otimes \overrightarrow{e^{i_{r+1}}} \otimes \cdots \otimes \overrightarrow{e^{i_n}}$
Par changement de base, on obtient :

$$T^{i_1\,\cdots\,i_r\,.\,.}_{.\,.\,i_{r+1}\,\cdots\,i_n} = \beta_{k_1}^{i_1}\cdots\beta_{k_r}^{i_r}\alpha_{i_{r+1}}^{k_{r+1}}\cdots\alpha_{i_n}^{k_n}T'^{k_1\,\cdots\,k_r\,.\,.}_{.\,.\,k_{r+1}\,\cdots\,k_n} \tag{4.10}$$

Cette formule est un critère de tensorialité, c'est-à-dire que tout élément ayant des composantes qui satisfait à cette relation lors d'un changement de base est un tenseur.

Cette définition est la véritable définition d'un tenseur. Pour vérifier qu'un tenseur est bien un tenseur, il faudra que ses composantes vérifient l'équation (4.10).