Université de Lomé **Année académique: 2020-2021**
Faculté Des Sciences .

TD DE MTH104: Calcul intégral et applications

Exercice 1 1. *Soit* $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$. *Déterminer une équation différentielle dont* f *est solution.*

2. *Soit* $f(x) = 1 + \frac{e^x}{1+x^2}$.*Déterminer une équation différentielle dont* f *est solution.*

Exercice 2 ***(Équations à variables séparées- Équations homogènes)***
Résoudre les équations différentielles suivantes:

$2y+(xy+3x)y' = 0;$ $x^2y'+xy = x^2+y^2;$ $(4-x^2)yy'-2(1+y^2) = 0;$ $y' = \dfrac{x^2y-y}{y+1};$ $2xyy'-y^2+x^2 = 0;$
$x^2y'-2xy+y^2 = 0;$ $(1-y^2\sin x-x)dx+2y(5+\cos x)dy = 0;$ $y'-e^xe^y = 0;$ $(x^2+y^2)dx-2xydy = 0;$

Exercice 3 1. *Décomposer en éléments simples les fonctions suivantes*

(a) $f(x) = \frac{2x^3+2x^2-2x+2}{(x^2-1)(1+x^2)}$

(b) $g(x) = \frac{x^3-3x^2+3}{(x-1)(x-2)}$

2. *Intégrer alors les équations différentielles suivantes*

3. $(1+x^2)y' + \frac{2x^3+2x^2-2x+2}{(x^2-1)}y = 0$

4. $(x-1)(x-2)y' - (x^3-3x^2+3)y = 0$

Exercice 4 *Résoudre les équations différentielles linéaires suivantes.*

1. $-3y' + 6y = (x-1)e^{2x}$

2. $y' - 2y = \cos x + 2\sin x.$

3. $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$ *sur* $]-1;+\infty[$

4. $(1+x^2)y' + xy = \sqrt{1+x^2}$

5. $y' - \left(2x - \frac{1}{x}\right) y = 1$ *sur* $]0;+\infty[$

6. $(1+x^2)y' + \frac{x^2-1}{x}y = -2$

7. $x(1+\ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1$ *sur* $]0;+\infty[$.

Exercice 5 *Dans chacun des cas suivants déterminer la fonction* f *solution de l'équation différentielle et qui vérifie la condition initiale.*

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+x^2)^2y' + 2xy = x\exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ *avec* $y(0) = 0.$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ *avec* $y(0) = 0.$

3. $\forall x \in]0;+\infty[, \quad xy'\ln x = (3\ln x + 1)y$ *avec* $y(e) = e^4.$

Exercice 6 ***(Équations de Bernoulli- Équations de Riccati)***

1. *Résoudre les équations différentielles suivantes:*
$y' + xy = xy^2;$ $y' - \dfrac{3}{x}y - x^4y^{1/3} = 0;$ $xy' + y - xy^3 = 0.$

2. *On considère l'équation différentielle*

$$(E) : x^2(y' + y^2) = xy - 1.$$

(a) *Vérifier que la fonction* $u(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ *est une solution particulière de* (E).

(b) *Résoudre alors l'équation* (E).

3. *On considère l'équation différentielle* $(\mathcal{E}) : (1 - x^3)y' = -2xy^2 + x^2y + 6x^2 + 8x + 1$.

   (a) *Déterminer une solution particulière de* $(\mathcal{E})$ *sous la forme d'un polynôme du premier degré.*

   (b) *Résoudre l'équation* $(\mathcal{E})$.

Exercice 7 1. (a) *Montrer que le système* $\{\ln x, x \ln x\}$ *pour* $x > 0$, *est un système fondamental de solutions de l'équation différentielle*

$$(E) : (\ln^2 x)y'' - \frac{2 \ln x}{x} y' + \frac{(\ln x + 2)}{x^2} y = 0.$$

(b) *Déterminer la solution de* (E) *qui vérifie les conditions* $y(e) = 2$ *et* $y'(e) = \frac{1}{e}$.

2. (a) *Montrer que le système* $\{e^x \cos(2x), e^x \sin(2x)\}$ *est un système fondamental de solutions d'une équation différentielle que l'on précisera.*

   (b) *Déterminer la solution* f *de cette équation qui vérifie les conditions* $f(0) = -1$ *et* $f'(0) = 3$.

Exercice 8 *Résoudre les équations différentielles du second ordre suivants.*

1. $y'' - 3y' + 2y = x^2 + 3x$
2. $y'' + 2y' = -4x + 6$
3. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}$
4. $y'' - 4y' + 3y = (x^2 + 1)e^{2x}$
5. $y'' - 5y' + 6y = (x + 1)e^x$
6. $y'' - 4y' + 13y = \sin x$
7. $y'' + y = \cos(2x)$
8. $y'' - 2y + 2y = e^x cosx$
9. $y'' + 4y' + 5y = x \sin x e^{-2x}$