Chapitre 7

Coordonnées curvilignes

Sommaire

7.1 Repères rectilignes et curvilignes

La position d'un point M peut être repéré dans un système de référence fixe orthonormé, appelé repère cartésien (ou repère rectiligne) $\overrightarrow{I_a}$. On a alors :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M} = X^a (M) \overrightarrow{I_a} = X^a \overrightarrow{I_a} \tag{7.1}$$

Mais les coordonnées X^a peuvent être fonctions de paramètres θ^i avec $i = 1, ..., 3$.
On ainsi : $\theta^i \in \mathbb{R} \rightleftharpoons M(\theta^i)$.
Dans le cas général, les termes X^a sont des fonctions qui dépendent de θ^i. On a alors :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M} = X^a \left(\theta^i\right) \overrightarrow{I_a} \tag{7.2}$$

Les θ^i forment un système de coordonnées appelées coordonnées curvilignes. Ces coordonnées définissent un repère curviligne $\overrightarrow{g_i}$ qui évolue dans le temps et dépend du point M choisi :

$$\overrightarrow{g_i} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta^i} = \frac{\partial X^a (\theta^i)}{\partial \theta^i} \overrightarrow{I_a} = X^a_{,i} \overrightarrow{I_a} \tag{7.3}$$

Remarque : On suppose que les fonctions $X^a (\theta^i)$ sont n fois différentiables par rapport à θ^i.
Les vecteurs $\overrightarrow{g_i}$ sont tangents à la courbe décrite par M lorsque seul le paramètre θ^i varie (voir figure (7.1)).
La base $\overrightarrow{g_i}$ (base naturelle) est appelée également base curviligne relativement au paramétrage θ^i. On définira de la même façon, la base duale $\overrightarrow{g^i}$ de la base base curviligne $\overrightarrow{g_i}$ par :

$$\overrightarrow{g_j} . \overrightarrow{g^i} = \delta^i_j \tag{7.4}$$

On a une relation entre X^a et θ^i définit par la transformation des coordonnées $X^a \longrightarrow \theta^i$ et caractérisé par la matrice jacobienne :

$$[J] = \left[\frac{\partial X^a}{\partial \theta^i}\right] \tag{7.5}$$

Dans le cas où le déterminant de la matrice jacobienne de la transformation :
$f_i : X^a \longrightarrow \theta^i$ est différent de 0, la transformation est réversible.
Il existe alors la fonction : $p_i : \theta^i \longrightarrow X^a$, et donc f_i et p_i sont des bijections.

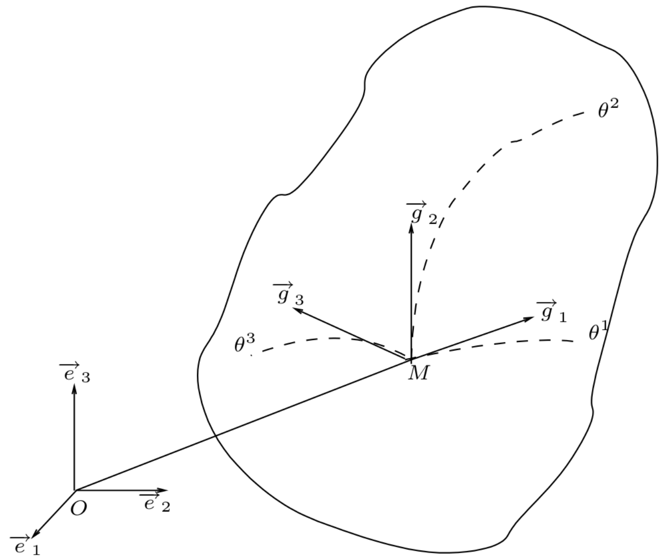

FIGURE 7.1 – Définition des vecteurs de base g_i

7.2 Changement de base

Soit 2 paramétrages curvilignes θ^i et θ'^i et les bases curvilignes associées $\overrightarrow{g_j}$ et $\overrightarrow{g'_i}$. Supposons que l'on peut exprimer $\overrightarrow{g'_i}$ en fonction de $\overrightarrow{g_j}$, c'est-à-dire qu'il existe la matrice de changement de base β_i^j telle que :

$$\overrightarrow{g'_i} = \beta_i^j \overrightarrow{g_j} \tag{7.6}$$

Cherchons à expliciter les termes β_i^j.
On sait que : $\overrightarrow{g_j} = \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial \theta^j} = \frac{\partial X^k}{\partial \theta^j}\overrightarrow{I_k}$ et $\overrightarrow{g'_i} = \frac{\partial X^k}{\partial \theta'^i}\overrightarrow{I_k}$
Donc avec la relation (7.6) :

$$\frac{\partial X^k}{\partial \theta'^i}\overrightarrow{I_k} = \beta_i^j \frac{\partial X^k}{\partial \theta^j}\overrightarrow{I_k}$$

Or, on peut écrire : $\frac{\partial X^k}{\partial \theta'^i} = \frac{\partial X^k}{\partial \theta^j}.\frac{\partial \theta^j}{\partial \theta'^i}$, et il vient :

$$\beta_i^j = \frac{\partial \theta^j}{\partial \theta'^i} \tag{7.7}$$

ce qui correspond à la matrice jacobienne de la transformation : $\theta^j \longrightarrow \theta'^i$.
Soit un tenseur $\underset{\sim}{T}$ du 2^{nd} ordre définit en un point M. Les composantes de ce tenseur dans les bases $\overrightarrow{g_i} \otimes \overrightarrow{g_j}$ et $\overrightarrow{g'_i} \otimes \overrightarrow{g'_j}$:

$$\underset{\sim}{T} = T^{ij}\overrightarrow{g_i} \otimes \overrightarrow{g_j} = T'^{ij}\overrightarrow{g'_i} \otimes \overrightarrow{g'_j}$$

On sait que : $T^{ij} = T'^{kl}\beta^i_k\beta^j_l$. D'après (7.7) on a donc :

$$T^{ij} = T'^{kl}\frac{\partial\theta^i}{\partial\theta'^k}\frac{\partial\theta^j}{\partial\theta'^l} \tag{7.8}$$

ce qui correspond à une nouvelle définition du critère de tensorialité que nous avons déjà vu au paragraphe § 4.2.

La relation inverse s'écrit :

$$T'^{kl} = T^{ij}\frac{\partial\theta'^k}{\partial\theta^i}\frac{\partial\theta'^l}{\partial\theta^j} \tag{7.9}$$

Les règles de transformation des composantes d'un tenseur, n fois contravariant, p fois covariant sont données par :

$$relation\,10 \tag{7.10}$$

Remarque : Dans le cas où les grandeurs T^{ij} sont définis $\forall\, M$ et que la formule (7.8) est vérifiée $\forall\, M$, on parle de champ de tenseurs. Dans la pratique, c'est le cas le plus utilisé et on oublie souvent le terme "champ", on parle alors simplement de tenseur lorsqu'il n'y a pas de confusion possible.

Exemple d'application : Soit un tenseur $\underset{\sim}{T}$ exprimé dans la base naturelle $\overrightarrow{g_i}$, on veut ces composantes dans le repère absolu $\overrightarrow{I_k}$:

$$\underset{\sim}{T} = T^{ij}\overrightarrow{g_i} \otimes \overrightarrow{g_j} = T'^{kl}\overrightarrow{I_k} \otimes \overrightarrow{I_l}$$

- méthode 1 : on utilise la formule de changement de base (7.8) où θ^i sont les anciennes coordonnées et X^j sont les nouvelles coordonnées, soit :
$$T'^{kl} = T^{ij}\frac{\partial X^k}{\partial\theta^i}\frac{\partial X^l}{\partial\theta^j}$$
- méthode 2 :
$$T^{ij}\overrightarrow{g_i} \otimes \overrightarrow{g_j} = T^{ij}\left(\frac{\partial X^k}{\partial\theta^i}\overrightarrow{I_k}\right) \otimes \left(\frac{\partial X^l}{\partial\theta^j}\overrightarrow{I_l}\right)$$

$$\begin{aligned} T^{ij}\overrightarrow{g_i} \otimes \overrightarrow{g_j} &= T^{ij}\left(\tfrac{\partial X^k}{\partial\theta^i}\overrightarrow{I_k}\right) \otimes \left(\tfrac{\partial X^l}{\partial\theta^j}\overrightarrow{I_l}\right) \\ &= T^{ij}\tfrac{\partial X^k}{\partial\theta^i}\tfrac{\partial X^l}{\partial\theta^j}\overrightarrow{I_k} \otimes \overrightarrow{I_l} \\ &= T^{ij}\overrightarrow{I_k} \otimes \overrightarrow{I_l} \end{aligned}$$

7.3 Notion de tenseur absolu et relatif

Soit 2 systèmes de coordonnées θ^i et θ'^i et la matrice jacobienne de passage d'un système à l'autre :

$$[j] = \left[\frac{\partial\theta^k}{\partial\theta'^i}\right] \tag{7.11}$$

Le jacobien de la transformation correspond au déterminant de la matrice jacobienne J soit $|J|$. On dit qu'un tenseur est relatif de poids M s'il se transforme selon la formule :

$$T'^{kl} = T^{ij}\,|J|^M\,\frac{\partial\theta'^k}{\partial\theta^i}\frac{\partial\theta'^l}{\partial\theta^j} \tag{7.12}$$

Lorsque M = 0, on parlera de tenseur absolu. Dans la pratique, les seuls tenseurs relatifs utilisés seront de poids 1 ou -1.

A part les opérations de changement de base, les opérations sont identiques pour les tenseurs relatifs et absolus.

NB : *Le produit d'un tenseur relatif de poids* -1 *et d'un de poids* 1 *donne un tenseur absolu. On peut toujours obtenir un tenseur absolu à partir d'un tenseur relatif, soit en le multipliant ou en le divisant par* $|J|$.