

Problème

La construction suivante, due à Otto Mohr (1835-1918), est utile pour l'étude des tenseurs symétriques de rang deux. Elle est employée, par exemple, par les ingénieurs dans l'analyse des déformations et des contraintes.

1. Soit un système d'axes Ox_1, Ox_2, Ox_3 . Une rotation du système d'un angle α autour de l'axe Ox_3 donne les nouveaux axes Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3 . Déterminer la matrice de passage des x_i aux x'_j .
2. Considérons un tenseur S_{ij} ayant pour axes principaux Ox_1, Ox_2, Ox_3 . Dans ce système d'axes, le tenseur a pour seules composantes non nulles $S_1 = S_{11}, S_2 = S_{22}, S_3 = S_{33}$. Déterminer les expressions des composantes S'_{ij} de ce tenseur dans le système d'axes Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3 en fonction des composantes S_k .
3. Écrire les expressions des S'_{ij} en fonction de l'angle 2α . On rappelle les relations suivantes :

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha; \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

4. On suppose que $S_1 < S_2$ et que ces composantes sont positives. Sur l'axe des abscisses d'un graphique, on place deux points P et Q situés à des distances S_1 et S_2 de l'origine O. On trace le cercle centré sur l'axe des abscisses et de diamètre égal à PQ . Démontrer que les valeurs des composantes S'_{ij} du tenseur sont les coordonnées de deux points opposés sur le cercle, appelé cercle de Mohr.
5. Réciproquement, si on se donne les valeurs S'_{ij} , montrer que le cercle de Mohr permet de trouver les composantes principales S_{ij} du tenseur ainsi que la direction des axes principaux.
6. La construction du cercle de Mohr reste valable si l'axe de rotation Ox_3 n'est plus un axe principal du tenseur. Si on considère une section centrale arbitraire de l'ellipsoïde représentative du tenseur, on obtient une conique; soit alors Ox_1 et Ox_2 les axes principaux de cette section. Par rapport aux axes Ox_1, Ox_2 et Ox_3 normal à la section considérée, le tenseur prend la forme :

$$\begin{bmatrix} S_{11} & 0 & S_{31} \\ 0 & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}$$

Déterminer les composantes S'_{ij} du tenseur après une rotation d'un angle α autour de l'axe Ox_3 . Montrer que la construction du cercle de Mohr s'applique également dans ce cas.