UNIVERSITE DE LOME ANNEE UNIVERSITAIRE 2020-2021
Faculté des Sciences

Travaux dirigés de MTH 104

Exercice I

Soient $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a<b)$, $\mathcal{S}_{a,b}$ l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$ et f une fonction définie sur $[a,b]$. Pour la subdivision $X=\{x_0,\ldots,x_n\}\in\mathcal{S}_{a,b}$ on pose $s(f,X)=\sum_{i=1}^n h_i inf_{I_i} f$, $S(f,X)=\sum_{i=1}^n h_i sup_{I_i} f$, $I_i=[x_{i-1},x_i]$, $h_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1,\ldots,n$, $inf_{I_i}f$ et $sup_{I_i}f$ étant respectivement le minimum et le maximum de f sur l'intervalle I_i. Le réel $S(f,X)$ (resp $s(f,X)$) est la somme de Darboux supérieure (resp inférieure) de la fonction f relativement à la subdivision X. Montrer que :

1- Si $Y=X\cup\{y_i\}$ avec $y_i\in]x_{i-1},x_i[$ alors $s(f,X)\leq s(f,Y)$. En déduire que $\forall X,Y\in\mathcal{S}_{a,b}$ si $X\subset Y$ alors $s(f,X)\leq s(f,Y)$ et $S(f,Y)\leq S(f,X)$.

2- $\forall X,Y\in\mathcal{S}_{a,b}$, $s(f,X)\leq S(f,Y)$.

3- Une fonction f définie sur l'intervalle $[a,b]$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ si les deux réels $s(f)=sup_{X\in\mathcal{S}_{a,b}}s(f,X)$ et $S(f)=inf_{X\in\mathcal{S}_{a,b}}S(f,X)$ sont égaux. Montrer que f est Riemman-intégrable si et seulement si $\forall\epsilon>0, \exists X\in\mathcal{S}_{a,b}$, $S(f,X)-s(f,X)<\epsilon$

Exercice II

Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $I=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ telles que g soit strictement positive sur I, montrer qu'il existe $c\in I$ tel que $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)g(t)dt=f(c)\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(t)dt$

Exercice III

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles, définies et continues sur l'intervalle $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, à tout élément f de $\mathcal{C}$ on associe la suite des nombres $C_k(f)=\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)x^k dx$, $k\in\mathbb{N}$

1) Soient f une fonction de $\mathcal{C}$ et F la primitive de f qui s'annule pour la valeur $-\frac{1}{2}$. Calculer les nombres $C_k(F)$ en fonction des nombres $C_k(f)$.

2) Montrer que si P est un polynôme à coefficients réels et f une fonction de $\mathcal{C}$, l'intégrale $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)P(x)dx$ s'exprime simplement en fonction des nombres $C_k(f)$.

3) Soit g une fonction positive et intégrable sur $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. On désigne par m (resp M) le minimum(resp maximum) de f sur $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. Démontrer que pour $f\in\mathcal{C}$ la fonction F définie sur $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ par $F(x)=f(x)\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(t)dt$ est continue et trouver ses extréma en fonction de m et M. En déduire qu'il existe c élément de $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ tel que $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)g(t)dt=f(c)\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(t)dt$

Exercice IV

a- Pour chaque entier naturel n on pose $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n t dt$

Trouver une relation entre I_n et I_{n+2}

Calculer I_n en fonction de n pour n pair et n impair.

b- Calculer $I=\displaystyle\int\frac{3(x^4+2x^2+2)dx}{(x^3-1)(x^2+2x+2)}$ et $J=\displaystyle\int_0^1\frac{tdt}{(1+t^2)\sqrt{1-t^4}}$ (on pourra poser $u=t^2$)

c- Déterminer les primitives des fonctions définies par $f(x)=\dfrac{1-cos(\frac{x}{3})}{sin(\frac{x}{2})}$, $g(x)=\dfrac{1}{x^8+x^4+1}$, $h(x)=\dfrac{cosx+2sinx}{sinx-cosx}$, $l(x)=\dfrac{1}{(x-1)^3(x^2+x+1)}$

d- Calculer $K=\displaystyle\int_{-1}^1\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}Log\frac{1+x}{1-x}dx$. On pourra remarquer que la fonction à intégrer est paire.