Université de Lomé
FDS

CORRIGE TYPE DE TD 1 MTH 104

Exercice III

1. **Expression des nombres $C_k(F)$ en fonction des nombres $C_k(f)$.**
   Par définition on a

$$C_k(F) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F(x)x^k dx.$$

Intégrons par parties $C_k(F)$. Pour cela posons

$$u(x) = F(x) \text{ et } v'(x) = x^k$$
$$\text{on a} u'(x) = f(x) \text{ et } v(x) = \frac{1}{k+1}x^{k+1}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} C_k(F) &= [u(x)v(x)]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u'(x)v(x)dx \\ &= \frac{1}{k+1}\left[F(x)x^{k+1}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{k+1}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)x^{k+1}dx \end{aligned}$$

$$C_k(F) = \frac{1}{k+1}\left[\frac{1}{2^{k+1}}C_0(f) - C_{k+1}(f)\right] \quad \text{car} \begin{cases} F\left(-\frac{1}{2}\right) = \int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} f(x)dx = 0 \\ \text{et} \\ F\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)x^0 dx = C_0(f). \end{cases}$$

2. **Expression simple de $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)P(x)dx$ en fonction des nombres $C_k(f)$.**

Soit $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polynôme de degré n tel que pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}, a_k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)P(x)dx &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{n} f(x)a_k x^k dx \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)x^k dx \\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)P(x)dx &= \sum_{k=0}^{n} a_k C_k(f). \end{aligned}$$

3. *** Montrons que la fonction F est continue sur $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.**

$$F(x) = f(x)\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(t)dt.$$

La fonction g étant intégrable sur $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, l'intégrale $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(t)dt$ est une constante réelle que nous posons $A = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(t)dt$. f est continue sur $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ car f appartient à l'ensemble C . Ainsi

la fonction F est continue sur $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ car elle est le produit d'une fonction continue sur $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ et de la constante A.
* Extrema de F en fonction de m et de M.
Posons $m'=\min\limits_{x\in I}F(x)$ et $M'=\max\limits_{x\in I}F(x)$ avec $I=\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

$$F(x)=f(x)A\,\textbf{avec}\,A=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}g(t)dt.$$

$$g\geqslant 0\,\textbf{sur}\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\Longrightarrow A\geqslant 0.$$

Ainsi

$$m'=\min_{x\in I}F(x)=A\min_{x\in I}f(x)=Am$$

et

$$M'=\max_{x\in I}F(x)=A\max_{x\in I}f(x)=AM$$

* Déduisons que $\exists\, c\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ tel que $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(t)g(t)dt=f(c)\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}g(t)dt$
$\forall t\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, $m\leqslant f(t)\leqslant M$.
Donc

$$mg(t)\leqslant f(t)g(t)\leqslant Mg(t)\,\textbf{car}\,g\geqslant 0\,\textbf{sur}\,I.$$

En passant à l'intégrale, on obtient

$$m\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}g(t)dt\leqslant\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(t)g(t)dt\leqslant M\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}g(t)dt,$$

$$\textbf{soit encore}\,mA\leqslant\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(t)g(t)dt\leqslant MA.$$

D'après l'astérisque précédent, on a $F\left(\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\right)=[mA;MA]$. Comme $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(t)g(t)dt\in[mA;MA]$ et que F est continue sur $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires , il existe un réel $c\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ tel que $F(c)=\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(t)g(t)dt$.

Ainsi

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(t)g(t)dt=f(c)\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}g(t)dt.$$

exercice IV

a) • Relation entre I_n et I_{n+2}

$I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t dt$

$I_{n+2}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2} t dt$

Procédons par intégration par parties. Posons $u'=\sin t$ et $v=\sin^{n+1}t$. On a $u=-\cos t$ et $v'=(n+1)\cos t\sin^n t$. Ainsi on a:

$$\begin{aligned}I_{n+2}&=\left[-\cos t\sin^{n+1}t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin^n t dt.\\&=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t dt-(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}t dt\\&=(n+1)I_n-(n+1)I_{n+2}\end{aligned}$$

$$\textbf{Donc on a}\,I_{n+2}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)I_n\ \forall n\in I_n. \tag{1}$$

- ***Calcul de I_n pour n pair. D'après la relation (1), on a:**

$$\begin{array}{lll}
\textbf{Pour} & n=0, & I_2 = \dfrac{1}{2} I_0 \\[2mm]
\textbf{Pour} & n=2, & I_4 = \dfrac{3}{4} I_2 \\[2mm]
\textbf{Pour} & n=4, & I_6 = \dfrac{5}{6} I_4 \\
 & \vdots & \\
\textbf{Pour} & n=2k-2, & I_{2k} = \dfrac{2k-1}{2k} I_{2k-2}
\end{array}$$

Ainsi on a

$$I_{2k} = \frac{1\times 3\times 5\times \ldots \times (2k-1)}{2\times 4\times 6\times \ldots \times 2k} I_0.$$
$$I_{2k} = \frac{(2k)!}{4(k!)^2}\frac{\pi}{2} \textbf{ car } I_0 = \frac{\pi}{2}.$$

***Calcul de I_n pour n impair. D'après la relation (1), on a:**

$$\begin{array}{lll}
\textbf{Pour} & n=1, & I_3 = \dfrac{2}{3} I_1 \\[2mm]
\textbf{Pour} & n=3, & I_5 = \dfrac{4}{5} I_3 \\[2mm]
\textbf{Pour} & n=5, & I_7 = \dfrac{6}{7} I_5 \\
 & \vdots & \\
\textbf{Pour} & n=2k-1, & I_{2k+1} = \dfrac{2k}{2k+1} I_{2k-1}
\end{array}$$

Ainsi on a

$$I_{2k+1} = \frac{2\times 4\times 6\times \ldots \times 2k}{3\times 5\times \ldots \times (2k+1)} I_1.$$
$$I_{2k+1} = \frac{4(k!)^2}{(2k+1)!} \textbf{ car } I_1 = 1.$$

b) - **Calcul de** $I = \displaystyle\int \frac{3(x^4+2x^2-2)}{(x^3-1)(x^2+2x+2)}dx$

$\frac{3(x^4+2x^2-2)}{(x^3-1)(x^2+2x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1} + \frac{dx+e}{x^2+2x+2}$ **et on trouve** $a=1$; $b=2$; $c=1$; $d=0$ **et** $e=-6$. **On a alors**

$$\boxed{I = \ln|x-1| + \ln(x^2+x+1) - 6\arctan(x+1) + C}$$

- **Calcul de** $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{tdt}{(1+t^2)\sqrt{1-t^4}}$.

Posons $u=t^2$. **On a** $du = 2tdt$ **et** $J = \frac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{du}{(1+u)\sqrt{1-u^2}}$.

Posons ensuite $u = \sin x$. **On a** $du = \cos x dx = \sqrt{1-u^2}dx$ **et** $J = \frac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x}$.

Posons enfin $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. **On a** $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ **et**

$$\boxed{J = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2} = \frac{1}{2}}$$

c) **Détermination des primitives de fonctions.**

- Par les formules trigonoétriques on montre que $f(x) = \frac{1-\cos\left(\frac{x}{3}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\sin\left(\frac{x}{6}\right)}{3-4\sin^2\left(\frac{x}{6}\right)}$.

  Ainsi $\displaystyle\int f(x)dx = \int \frac{2\sin\left(\frac{x}{6}\right)}{3-4\sin^2\left(\frac{x}{6}\right)}dx$.

  Posons $u = \cos\left(\frac{x}{6}\right)$. On a $du = -\frac{1}{6}\sin\left(\frac{x}{6}\right)dx$. Par consequent,

  $$\int f(x)dx = -12\int \frac{du}{4u^2-1} = -3\int\left(\frac{1}{u-\frac{1}{2}} - \frac{1}{u+\frac{1}{2}}\right)du = 3\ln\left|\frac{2u+1}{2u-1}\right| + C$$

  $$\boxed{\int f(x)dx = 3\ln\left|\frac{2\cos\left(\frac{x}{6}\right)+1}{2\cos\left(\frac{x}{6}\right)-1}\right| + C}$$

  Autre méthode

  Posons $t = \frac{x}{6}$, on a $\displaystyle\int f(x)dx = 12\int \frac{\sin(t)}{3-4\sin^2(t)}dt$

  Posons ensuite $u = \cos t$. On a $du = -\sin t\,dt$ et $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - u^2$. Ainsi

  $$\int f(x)dx = 12\int \frac{\sin(t)}{3-4\sin^2(t)}dt = -12\int \frac{du}{4u^2-1}.$$

  La suite s'obtient dans la première méthode.

- $g(x) = \dfrac{1}{x^8+x^4+1}$ en éléments simples dans $\mathbb{C}$ puis obtenir la décomposition dans $\mathbb{R}$.

  $g(x) = \dfrac{1}{x^8+x^4+1} = \dfrac{1}{(x^4+1)^4 - x^4}$

  $g(x) = \frac{1}{[(x^2+1)^2-3x^2][(x^2+1)^2-x^2]} = \frac{1}{(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$

  En déterminant les racines des polynômes $(x^2-\sqrt{3}x+1)$, $(x^2+\sqrt{3}x+1$, (x^2+x+1) et (x^2-x+1) dans $\mathbb{C}$, on remarque que: $(x^2-\sqrt{3}x+1) = (x-\alpha)(x-\bar{\alpha})$, $(x^2+\sqrt{3}x+1 = (x+\alpha)(x+\bar{\alpha})$, $(x^2+x+1) = (x-\beta)(x-\bar{\beta})$ et $(x^2-x+1) = (x+\beta)(x+\bar{\beta})$ avec $\alpha = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $\beta = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Ainsi

  $$g(x) = \frac{1}{(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})(x+\alpha)(x+\bar{\alpha})(x-\beta)(x-\bar{\beta})(x+\beta)(x+\bar{\beta})}.$$

  Par conséquent, la décomposition de g dans $\mathbb{C}$ donne

  $$g(x) = \frac{a_1}{x-\alpha} + \frac{a_2}{x-\bar{\alpha}} + \frac{b_1}{x+\alpha} + \frac{b_2}{x+\bar{\alpha}} + \frac{c_1}{x-\beta} + \frac{c_2}{x-\bar{\beta}} + \frac{d_1}{x+\beta} + \frac{d_2}{x+\bar{\beta}}. \qquad (1)$$

  La fonction g étant paire on a aussi

  $$g(x) = -\frac{a_1}{x+\alpha} - \frac{a_2}{x+\bar{\alpha}} - \frac{b_1}{x-\alpha} - \frac{b_2}{x-\bar{\alpha}} - \frac{c_1}{x+\beta} - \frac{c_2}{x+\bar{\beta}} - \frac{d_1}{x-\beta} - \frac{d_2}{x-\bar{\beta}}. \qquad (2)$$

  En identifiant (1) et (2) on a: $\begin{cases} a_1 = -b_1 \\ a_2 = -b_2 \\ c_1 = -d_1 \\ c_2 = -d_2 \end{cases}$ Il ne reste qu'à déterminer a_1, a_2, c_1 et c_2. On a :

  $$a_1 = \frac{1}{2\alpha(\alpha^2-\bar{\alpha}^2)(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2-\bar{\beta}^2)} = \frac{1}{i(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})(1)} = -\frac{1}{4\sqrt{3}}$$

  $$a_2 = \frac{1}{2\bar{\alpha}(\bar{\alpha}^2-\alpha^2)(\bar{\alpha}^2-\beta^2)(\bar{\alpha}^2-\bar{\beta}^2)} = \frac{1}{-i(\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)(1)(1-i\sqrt{3})} = -\frac{1}{4\sqrt{3}}$$

  $$c_1 = \frac{1}{2\beta(\beta^2-\alpha^2)(\beta^2-\bar{\alpha}^2)(\beta^2-\bar{\beta}^2)} = \frac{1}{(-1+i\sqrt{3}))(-1-i\sqrt{3})(-1)(-i\sqrt{3})} = -\frac{i}{4\sqrt{3}}$$

  $$c_2 = \frac{1}{2\bar{\beta}(\bar{\beta}^2-\alpha^2)(\bar{\beta}^2-\bar{\alpha}^2)(\bar{\beta}^2-\beta^2)} = \frac{1}{(-1-i\sqrt{3})(-1)(-1+i\sqrt{3})(i\sqrt{3})} = \frac{i}{4\sqrt{3}}$$

Ainsi la décomposition de g dans $\mathbb{C}$ est donnée par:

$$g(x) = -\frac{1}{4\sqrt{3}(x-\alpha)} - \frac{1}{4\sqrt{3}(x-\bar{\alpha})} + \frac{1}{4\sqrt{3}(x+\alpha)} + \frac{1}{4\sqrt{3}(x+\bar{\alpha})} - \frac{i}{4\sqrt{3}(x-\beta)}$$
$$+ \frac{i}{4\sqrt{3}(x-\bar{\beta})} + \frac{i}{4\sqrt{3}(x+\beta)} - \frac{i}{4\sqrt{3}(x+\bar{\beta})}$$

Ainsi dans $\mathbb{R}$, on a: $g(x) = -\frac{2x-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}(x^2-\sqrt{3}x+1)} + \frac{2x+\sqrt{3}}{4\sqrt{3}(x^2+\sqrt{3}x+1)} + \frac{1}{4(x^2+x+1)} + \frac{1}{4(x^2-x+1)}$.

$$\int g(x)dx = \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln\left(\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right) + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}$$

$$\int g(x)dx = \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln\left(\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right) + \frac{\sqrt{3}}{6}\left[\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] + C;\ C \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{\int q(x)dx = \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln\left(\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right) + \frac{\sqrt{3}}{6}\left[\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] + C}$$

- $h(x) = \frac{\cos x+2\sin x}{\sin x-cosx} = \frac{\cos x+\sin x}{\sin x-cosx} + \frac{\sin x}{\sin x-cosx} = \frac{\cos x+\sin x}{\sin x-cosx} + \frac{1}{2}\left(\frac{\cos x+\sin x}{\sin x-cosx} + \frac{\sin x-\cos x}{\sin x-cosx}\right) = \frac{3}{2}\frac{\cos x+\sin x}{\sin x-cosx} + \frac{1}{2}$ **Ainsi,**

$$\boxed{\int h(x)dx = \frac{3}{2}\ln|\sin x - \cos x| + \frac{1}{2}x + C.}$$

Autre méthode

On pourra aussi poser $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Dans ce cas on a $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ **et** $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$**. Ainsi on a** $\int h(x)dx = \int \frac{-2(t^2-4t-1)}{(t^2+2t-1)(1+t^2)}dt$**. On passe donc par la décomposition en éléments simples pour en déduire les primitives de** $h(x)$**.**

- **Primitives de** $l(x) = \frac{1}{(x-1)^3(x^2+x+1)}$
La décomposition en éléments simples de $l(x)$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit:

$$\frac{1}{(x-1)^3(x^2+x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-1)^3} + \frac{dx+e}{x^2+x+1}. \tag{2}$$

-En multipliant (3) **par** $(x-1)^3$ **et en prenant** $x=1$**, on obtient**

$$c = \frac{1}{3}.$$

- le polynôme du second degré x^2+x+1 **admet pour racine** $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
En multipliant (3) **par** x^2+x+1 **et en prenant** $x=j$**, on a**

$$\begin{aligned}
dj + e &= \frac{1}{(j-1)^3} \\
\left(-\frac{d}{2}+e\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2}d &= \frac{1}{\left[e^{i\frac{\pi}{3}}\left(e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\right]^3} \\
&= \frac{-1}{\left(2i\sin\frac{\pi}{3}\right)^3} \\
&= \frac{1}{3i\sqrt{3}} \\
\left(-\frac{d}{2}+e\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2}d &= \frac{-i\sqrt{3}}{9}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$e = \frac{d}{2} = \frac{-1}{9} \text{ et } d = \frac{-2}{9}.$$

En prenant $x=0$ **et** $x=2$ **dans** (3)**, on obtient le système**

$$\begin{cases} -a+b &= \frac{-5}{9} \\ a+b &= \frac{-1}{9} \end{cases}$$

Ainsi

$$a = \frac{2}{9} \textbf{ et } b = \frac{-1}{3}.$$

On a alors

$$\frac{1}{(x-1)^3(x^2+x+1)} = \frac{2}{9(x-1)} - \frac{1}{3(x-1)^2} + \frac{1}{3(x-1)^3} - \frac{2x+1}{9(x^2+x+1)}. \tag{3}$$

Finalement

$$\begin{aligned}\int l(x)dx &= \frac{2}{9}\int \frac{1}{(x-1)}dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x-1)^2}dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x-1)^3}dx - \frac{1}{9}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)}dx \\ &= \frac{2}{9}\ln|x-1| + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{6(x-1)^2} - \frac{1}{9}\ln(x^2+x+1) + C, \textbf{ avec } C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$