

Examen
SMC4-M26 : probabilités
Session de printemps

Durée : 2h

I. -----(5 pts)

Un laboratoire pharmaceutique a mis au point un test pour identifier une maladie ayant une prévalence estimée à 1% (le pourcentage de personnes malades dans la population). L'évaluation de ce test a permis de constater que :

- il y a 1,5% de chances que le test donne un faux positif (test positif sur des personnes non malades),
- il y a 98% de chances que le test donne un vrai positif (test positif sur des personnes malades).

On note M l'événement « être malade » et T l'événement « le test est positif ».

- a) Calculer la probabilité d'avoir un test positif.
- b) Calculer la probabilité que le test donne une indication correcte : $P(T \cap M) + P(\overline{T} \cap \overline{M})$.
- c) Quelle est la probabilité qu'une personne soit malade lorsque le test est positif ?
- d) Calculer la probabilité qu'une personne ne soit pas malade lorsque le test est négatif.

II. -----(5 pts)

Un livre de 300 pages contient 225 fautes d'impression distribuées au hasard. Soit X la variable aléatoire qui mesure le nombre de fautes par page, on suppose que X suit une loi de Poisson.

- a) Quelle est la valeur du paramètre de cette loi ?
- b) Calculer la probabilité qu'une page donnée ne contienne pas de faute d'impression.
- c) Déterminer la probabilité qu'une page contienne au plus deux fautes d'impression ;
- d) Déterminer la probabilité qu'une page contienne au moins une faute d'impression.

III. -----(5 pts)

Une entreprise fabrique des écrans de portable. La probabilité qu'un écran, choisi au hasard dans la production, soit défectueux est $p=0,06$.

On choisit au hasard des lots de 50 écrans dans la production. Soit Y la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre d'écrans défectueux d'un lot.

- a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire Y ? Donner son espérance mathématique et sa variance.
- b) Calculer la probabilité qu'il y ait exactement deux écrans défectueux dans le lot.
- c) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins un écran défectueux dans le lot.
- d) Par quelle loi peut-on approcher la loi de Y ? Utiliser cette approximation pour évaluer la probabilité qu'il y ait au plus 4 écrans défectueux dans le lot

IV. -----(5 pts)

Une personne prend un taxi pour se rendre à son lieu de travail. Le temps d'attente d'un taxi est aléatoire et suit une loi géométrique de moyenne 5 minutes. Le trajet en taxi pour arriver au lieu de travail dure 20 minutes.

Soit Z la variable aléatoire prenant pour valeur la durée, en minutes, d'attente d'un taxi.

- a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire Z ? Donner sa variance.
- b) Calculer la probabilité d'attendre exactement 3 minutes pour avoir un taxi.
- c) Quelle est la probabilité d'attendre au moins 5 minutes pour avoir un taxi ?
- d) Sachant que la personne attend un taxi depuis 5 minutes quelle est la probabilité que la durée d'attente dépasse 8 minutes ?
- e) Soit T la durée totale du déplacement (attente + trajet) ; quelle est la probabilité que la durée du déplacement dépasse 30 minutes ; $P(T > 30)$?