L2 sciences économiques **Année universitaire 2011–2012**

Université Paris 1

Examen de statistique
Mercredi 13 juin – Durée 2 heures
Sujet 1

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Au sein d'un exercice, il est conseillé de traiter les questions dans l'ordre. Le barème est indicatif. L'utilisation de documents, calculatrices, téléphones portables ou tout autre appareil électronique, est interdite. Les réponses devront être soigneusement argumentées et justifiées. Vous pouvez laisser les résultats sous la forme de fractions, sans évaluer les fonctions usuelles comme exp ou ln.

Exercice 1 (*5 points*)

On place dans une urne 8 billes numérotées de 1 à 8. Les quatre premières billes (numéro 1 à 4) sont rouges, les billes de numéros 5, 6 et 7 sont vertes et la bille 8 est noire. On choisit au hasard simultanément 2 billes dans l'urne.

Question 1 Définir avec précision l'univers Ω et la probabilité $\mathbb{P}$ associés à l'expérience aléatoire.

Question 2 Calculer la probabilité d'obtenir deux billes rouges.

Question 3 Calculer la probabilité d'obtenir une bille noire parmi les deux billes.

Question 4 Calculer la probabilité d'obtenir simultanément une bille de numéro pair et une bille de numéro impair.

Question 5 Montrer que les évènements $A = \{\text{obtenir exactement une bille verte}\}$ et $B = \{\text{obtenir exactement une bille de numéro pair}\}$ ne sont pas indépendants.

Exercice 2 (*5 points*)

On place dans une urne 3 billes rouges et 4 billes bleues. On effectue successivement deux tirages, et on note T_1 et T_2, la couleur de la bille obtenue dans ces tirages. Après chaque tirage, on remet dans l'urne la bille tirée ainsi qu'une autre bille de la même couleur.

Question 1 Calculer $\mathbb{P}(T_2 = \text{rouge}|T_1 = \text{rouge})$.

Question 2 Déduire de la question précédente $\mathbb{P}(T_2 = \text{rouge})$.

Question 3 Calculer $\mathbb{P}(T_1 = \text{bleue}|T_2 = \text{rouge})$.

Question 4 On note R_2 la variable aléatoire donnant le nombre de billes rouges dans l'urne *après* le deuxième tirage (donc après la remise des billes). Donner les valeurs possibles pour R_2.

Question 5 Donner la loi de R_2.

Question 6 Calculer l'espérance de R_2.

Exercice 3 (*5 points*)

On considère un jeu basé sur une urne contenant 8 billes rouges, 8 billes noires et une bille verte. Le joueur choisit la couleur rouge ou noire, puis prend une bille au hasard dans l'urne. S'il tombe sur la couleur choisie, il gagne, sinon il perd (en particulier, il perd toujours s'il tombe sur une bille verte). Après un tirage, la bille est remise dans l'urne.

Question 1 Calculer la probabilité de gain du joueur à un tirage.

Question 2 On suppose que le joueur paye 1 € pour participer à un tirage. Il reçoit 2 € en cas de gain et rien du tout sinon. On note X la variable aléatoire du gain du joueur après un tirage (négatif en cas de perte). Donner la loi de X.

Question 3 Calculer l'espérance de X.

Question 4 On considère que des tirages successifs sont indépendants. Le joueur joue 5 fois de suite. Calculer la probabilité qu'il gagne au moins 3 fois.

Question 5 Le joueur décide de jouer jusqu'à son premier succès. Calculer la probabilité qu'il joue exactement 3 fois.

Exercice 4 (*5 points*)

On considère un examen de note moyenne 8 et d'écart-type 4. On note X une variable aléatoire distribuée selon une loi Normale utilisant comme moyenne et écart-type les valeurs observées sur les notes d'examen.

Question 1 Calculer la probabilité d'être ajourné, c'est-à-dire que $X \leq 10$.

Question 2 Calculer la probabilité que X soit plus grande que 20 et la probabilité que X soit négative.

Question 3 Est-ce que le choix d'une loi normale vous semble acceptable à la lumière des probabilités calculées dans la question précédente ?

Question 4 D'après la loi de X, quelle note minimale faut-il obtenir pour être dans les 25 % les meilleurs ?

Question 5 Un étudiant a obtenu la note de 4. Est-ce l'une des 20 % plus mauvaises notes (d'après la loi de X) ?

Récapitulatif de lois classiques

Loi	Valeurs prises	Loi	Espérance	Variance
Uniforme $X \sim \mathcal{U}_n$	$\{1,\dots,n\}$	$P(X=k)=\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli $X \sim \mathcal{B}(1,p)$	$\{0,1\}$	$P(X=0)=1-p$ $P(X=1)=p$	p	$p(1-p)$
Binomiale $X \sim \mathcal{B}(n,p)$	$\{0,\dots,n\}$	$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Géométrique $X \sim \mathcal{G}(p)$	$\{1,2,3,\dots,\}$	$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ

Loi	Valeurs prises	Densité/Fonction de répartition	Espérance	Variance
Uniforme $X \sim \mathcal{U}([a,b])$	$[a,b]$	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & \text{si } x\in[a,b]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x\in[a,b]\\ 1 & \text{si } x\geq b\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$	$\mathbb{R}^+$	$f(x)=\begin{cases}\lambda\exp(-\lambda x) & \text{si } x\geq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}1-\exp(-\lambda x) & \text{si } x\geq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normale $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$	m	σ^2

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table 1 – Fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$