

Examen
Session printemps Rattrapage
SMC4-M26 : probabilités

Durée : 1h30

I.(3 points)

Soit A et B deux événements tels que : $P(A) = 0,2$ et $P(B) = 0,6$.

Calculer $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$, $P(B/A)$ dans les cas suivants :

- a. A et B sont incompatibles.
- b. A et B sont indépendants.
- c. $P(A \cup B) = 0,7$.

II.(5 points)

La durée de vie, en années, d'un composant électronique est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre λ . On suppose que la durée de vie moyenne de ce composant est 10 ans.

- a. Déterminer la valeur de λ .
- b. Quelle est la valeur de la demi-vie du composant (la demi-vie est la durée h telle que $P(T > h) = 1/2$).
- c. Déterminer la probabilité que ce composant fonctionne plus de 3 ans $P(T \geq 3)$.
- d. Déterminer la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 10 ans sachant que le composant continue de fonctionner après 7 ans : $P\left(\frac{T > 10}{T > 7}\right)$.
- e. Chaque vente de composant rapporte 500 Dhs à son fabricant, sauf s'il doit être remplacé pendant les 3 ans de garantie, auquel cas il ne rapporte plus que 250 Dhs. Combien rapporte en moyenne un composant (Indication : utiliser une variable aléatoire X correspondant à ce que rapporte un composant)

III.(6 points)

Une usine fabrique des imprimantes dont la durée de vie X (exprimée en millions de pages) est une variable aléatoire normale de moyenne $\mu = 2$ et d'écart type $\sigma = 0,25$.

- a. Calculer la probabilité que la durée de vie d'une imprimante soit supérieure à 2,5 millions de pages : $P(X > 2,5)$.
- b. Calculer la probabilité que la durée de vie d'une imprimante soit comprise entre 1,5 et 2,5 millions de pages : $P(1,5 < X < 2,5)$.
- c. On choisit au hasard 100 imprimantes dans la production. Soit Y la variable aléatoire qui compte le nombre d'imprimantes dont la durée de vie est supérieure à 2,5 millions de pages.
 - i. Quelle est la loi de probabilité Y ? quelles sont sa moyenne et son écart type ?
 - ii. Calculer la probabilité d'avoir au moins 2 imprimantes dont la durée de vie est supérieure à 2,5 : $P(Y \geq 2)$.
 - iii. Donner, en la justifiant, une loi approchée de Y et calculer la probabilité que parmi les imprimantes testées au moins 5 % aient une durée de vie supérieure à 2,5 millions de pages.

IV.(6 points)

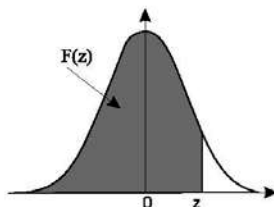
Une personne commence un traitement médical pour arrêter de fumer. On admet que :

- la probabilité qu'elle ne fume pas la première journée de traitement est de 0,2 ;
- si elle ne fume pas un jour donné, alors la probabilité qu'elle ne fume pas le jour suivant est 0,9 ;
- si elle fume un jour donné, la probabilité qu'elle ne fume pas le jour suivant est égale à 0,4 .

On note : F_n l'événement « la personne ne fume pas le n-ième jour du traitement » et p_n la probabilité de l'événement F_n : $p_n = P(F_n)$.

- Calculer la valeur de p_2 .
- Sachant que la personne n'a pas fumé le deuxième jour du traitement quelle est la probabilité qu'il n'ait pas fumé la première journée : $P\left(\frac{F_1}{F_2}\right)$
- Calculer la probabilité que la personne ne fume pas au moins une journée sur les trois premières : $P(F_1 \cup F_2 \cup F_3)$.
- Calculer la valeur de p_{n+1} en fonction de p_n (relation de récurrence).
- On admet la convergence de la suite $(p_n)_{(n \geq 1)}$, quelle est la valeur de sa limite.

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite
(probabilité $F(z)$ de trouver une valeur inférieure à z)



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de z

z	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
F(z)	0,998650	0,999032	0,999313	0,999517	0,999663	0,999767	0,999841	0,999892	0,999928	0,999952
z	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9
F(z)	0,999968	0,999979	0,999987	0,999991	0,999995	0,999997	0,999998	0,999999	0,999999	1,000000

Nota. La table donne $F(z)$ pour z positif. Pour z négatif, il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table. Exemple : $F(-1,37) = 1 - F(1,37) = 1 - 0,9147 = 0,0853$.