Exercices corrigés de probabilités et statistique

Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne

Cours de deuxième année de licence de sciences économiques

Fabrice Rossi & Fabrice Le Lec

Table des matières

Introduction

Ce document propose des exercices corrigés illustrant le cours de probabilités et statistique. Les corrections sont abondamment commentées pour faciliter la compréhension et expliciter le raisonnement qui conduit à la bonne solution. On trouve ainsi à la suite de l'énoncé d'un exercice une série de commentaires encadrant des éléments de correction. La réponse attendue lors d'une évaluation est constituée de l'ensemble des éléments de correction, à l'exclusion, bien entendu, des commentaires. Pour faciliter la séparation entre correction et commentaires, les éléments de correction sont présentés comme suit :

Correction

Un élément de correction.

Pour profiter au maximum de ce recueil, il est très vivement conseillé de lire l'énoncé seulement, puis de rédiger une correction exhaustive (et pas seulement un brouillon) en se mettant dans les conditions d'une évaluation, c'est-à-dire en se chronométrant, en n'utilisant pas de calculatrice et, enfin, en s'abstenant de consulter des notes de cours ou d'autres documents. Une fois la correction rédigée, on pourra la confronter à la correction type, en repérant notamment les justifications manquantes. On pourra aussi rechercher dans les commentaires un éventuel raisonnement faux typique, si la correction rédigée est fortement éloignée de la correction type.

Chapitre 1

Expériences aléatoires et probabilités

Exercice 1.1

Énoncé *On étudie les connexions d'internautes à un site web. Celui-ci propose six versions de son contenu, réparties en trois versions anglaises (notées en) et trois versions françaises (notées fr). Pour chaque langue, les trois versions sont les suivantes : une version normale (n), une version pour les petits écrans comme ceux des téléphones (p) et une version pour les écrans de taille moyenne comme ceux des tablettes (m). En étudiant l'historique des connexions, on constate que les versions ne sont pas utilisées de façon uniforme. Plus précisément, si on choisit un internaute connecté au hasard, la probabilité de tomber sur chacune des versions est donnée par la table suivante :*

$version$	(fr,n)	(fr,p)	(fr,m)	(en,n)	(en,p)	(en,m)
$\mathbb{P}(\{version\})$	a	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{4}{21}$	b	$\frac{3}{21}$

Dans la table, chaque version est désignée par sa langue et son type. L'ensemble des six versions forme l'univers Ω. Les lettres a et b désignent des paramètres à déterminer.

Question 1 *Quelles propriétés doivent vérifier a et b pour que $\mathbb{P}$ soit bien une probabilité sur Ω ?*

Question 2 *On constate que le site a deux fois plus d'utilisateurs anglophones que d'utilisateurs francophones. En déduite a et b.*

Question 3 *Quel pourcentage d'utilisateurs du site consultent la version pour petit écran ?*

Dans cet exercice, l'univers est déjà fixé et l'objectif est de construire une probabilité sur cet univers. Les questions ont pour objectif de tester la connaissance des propriétés d'une probabilité.

Correction

Pour que $\mathbb{P}$ soit une probabilité sur Ω, il faut que $\mathbb{P}(\{version\}) \in [0,1]$ pour toute version du site web. En particulier, on doit donc avoir :

$$\mathbb{P}(\{(fr,n)\}) = a \in [0,1],$$
$$\mathbb{P}(\{(en,p)\}) = b \in [0,1].$$

De plus, on doit avoir $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Or, Ω est l'union disjointe de tous les évènements élémentaires et $\mathbb{P}(\Omega)$ est donc la somme des probabilités indiquées dans le tableau. On a donc :

$$\mathbb{P}(\Omega) = a + \frac{5}{21} + \frac{1}{21} + \frac{4}{21} + b + \frac{3}{21} = 1,$$

soit

$$a + b = \frac{8}{21}.$$

Il est fréquent que la solution proposée ne soit pas aussi bien justifiée que ce qui précède. Il est pourtant important de ne pas oublier les conditions de la forme $a \in [0,1]$ et surtout de justifier qu'on peut faire la somme des valeurs données dans le tableau. Il se pourrait en effet que Ω ne soit pas couvert complètement par les éléments du tableau (imaginons ici une version allemande du site pour laquelle on ne donne pas de probabilités précises), et il faudrait donc connaître la probabilité de l'ensemble des évènements élémentaires listés dans le tableau pour remplacer l'analyse basée sur $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Correction

Le site ayant deux fois plus d'utilisateurs anglophones que francophones, on suppose que $\mathbb{P}(\{\text{version anglaise}\}) = 2\mathbb{P}(\{\text{version française}\})$. Or l'évènement $\{\text{version anglaise}\}$ est l'union disjointe des trois évènements $\{(en,n)\}$, $\{(en,p)\}$ et $\{(en,m)\}$ et donc la probabilité de l'évènement est la somme des probabilités des trois évènements élémentaires. Donc, d'après le tableau, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{\text{version anglaise}\}) &= \frac{4}{21} + b + \frac{3}{21},\\ &= b + \frac{7}{21}.\end{aligned}$$

De la même façon, on trouve que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{\text{version française}\}) &= a + \frac{5}{21} + \frac{1}{21},\\ &= a + \frac{6}{21},\end{aligned}$$

soit finalement

$$b + \frac{7}{21} = 2\left(a + \frac{6}{21}\right).$$

En combinant cette équation avec le résultat obtenu à la question précédent, à savoir $a + b = \frac{8}{21}$, on trouve

$$b + \frac{7}{21} = 2\left(\frac{8}{21} - b + \frac{6}{21}\right),$$

soit $b = \frac{1}{3}$ et $a = \frac{1}{21}$. On constate que a et b sont bien des éléments de $[0,1]$ ce qui montre que cette solution est acceptable.

Comme pour la première question, il faut justifier les réponses en évoquant au moins une fois la décomposition d'un évènement bien choisi en évènements dont on connaît les probabilités. La dernière question se traite de cette façon aussi.

Correction

L'évènement {petit écran} est l'union disjointe des évènements $\{(en,p)\}$ et $\{(fr,p)\}$, donc sa probabilité est la somme des probabilités de ces deux évènements. On obtient ainsi :

$$\mathbb{P}(\{\text{petit écran}\}) = \mathbb{P}(\{(en,p)\}) + \mathbb{P}(\{(fr,p)\}) = \frac{5}{21} + b = \frac{12}{21}.$$

Exercice 1.2

Énoncé *On place dans un sac 5 billets de 5 €, 7 billets de 10 € et 10 billets de 20 €. On choisit au hasard une poignée de 8 billets, chaque billet ayant la même probabilité d'être attrapé.*

Question 1 *Quelle est la probabilité de n'avoir choisi aucun billet de 5 € ?*

Question 2 *Quelle est la probabilité d'avoir obtenu uniquement des billets de 20 € ?*

Question 3 *Quelle est la probabilité d'avoir obtenu au moins un billet de chaque valeur ?*

Question 4 *On recommence l'expérience en tirant les billets un par un et en remettant le billet dans le sac après son tirage. Calculer les probabilités des trois évènements ci-dessus dans cette nouvelle expérience.*

Comme dans tout exercice de probabilité qui ne fait pas intervenir de variables aléatoires, on doit commencer la résolution par la définition de l'**univers** Ω associé à l'expérience. On rencontre ici une difficulté classique : les billets d'une catégorie ne sont pas (facilement) discernables. On pourrait donc être tenté de tenir compte de ce fait dans Ω : c'est en général une **mauvaise idée**. On suppose donc les billets discernables (numérotés, par exemple).

Correction

On suppose les billets discernables. On appelle $c_1, \dots, c_5$ les 5 billets de 5 €, $d_1, \dots, d_7$ les 7 billets de 10 € et $v_1, \dots, v_{10}$ les 10 billets de 20 €. On note l'ensemble des billets B, avec

$$B = \{c_1, \dots, c_5, d_1, \dots, d_7, v_1, \dots, v_{10}\}.$$

L'univers de l'expérience aléatoire, Ω, est constitué de tous les ensembles de 8 billets distincts, soit donc

$$\Omega = \{\{b_1, \dots, b_8\} \mid \forall i,\ b_i \in B \text{ et } \forall j \neq i,\ b_i \neq b_j\}.$$

La définition de l'univers est ici très formelle. On peut se contenter d'une définition plus informelle, à condition de bien faire ressortir dans celle-ci deux éléments cruciaux de l'énoncé : le nombre d'éléments choisis (ici 8) et la nature du tirage. Ici, on indique qu'on tire une poignée de billets, ce qui implique qu'il n'y a pas de remise et qu'il n'y a pas d'ordre. Ceci est traduit mathématiquement par le fait qu'on considère un ensemble de billets (et pas une liste) et que les billets sont distincts. Ces deux mots clé (*ensemble* et *distinct*) doivent impérativement apparaître dans la réponse. Il faut aussi faire apparaître l'ensemble des objets dans lequel les sous-ensembles sont choisis (ici, B).

Il faut maintenant définir la **probabilité** sur Ω. Comme dans de nombreuses situations, on fait une hypothèse naturelle d'équiprobabilité, ce qui transforme le calcul d'une probabilité en celui de la taille d'un ensemble.

Correction

Les billets étant équiprobables, on suppose que la probabilité est uniforme que Ω et donc que pour tout évènement A, sa probabilité $\mathbb{P}(A)$ est donnée par

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

On sait que $|\Omega|$ est donné par C_{22}^{8} car il s'agit de l'ensemble des sous-ensembles de cardinal 8 de l'ensemble B qui est lui même de cardinal 22.

Notons qu'il est important de justifier brièvement le choix de la probabilité uniforme (comme c'est fait ici) et de rappeler le mode de calcul des probabilités dans cette situation.

Une fois l'expérience décrite par son univers et la probabilité associée, on peut passer aux questions proprement dites. En général, les « solutions » obtenues en s'attaquant directement aux questions sans passer par la phase de modélisation sont totalement fausses.

Correction

Soit l'évènement $A = \{\text{n'avoir aucun billet de 5 €}\}$. Il est clair que A peut aussi s'exprimer

$$A = \{\text{avoir uniquement des billets de 10 € et de 20 €}\}.$$

On cherche donc les sous-ensembles de 8 billets distincts choisis dans B', l'ensemble des 17 billets de 10 € et 20 €. On en déduit alors que $|A| = C_{17}^8$, puis que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{C_{17}^8}{C_{22}^8} = \frac{17!}{9!8!}\frac{14!8!}{22!} = \frac{17 \times 16 \times \cdots \times 10}{22 \times 21 \times \cdots \times 15} \simeq 0,076$$

Notons que le résultat attendu est simplement celui qui fait apparaître les formules explicites pour les C_n^p. La simplification du résultat et la valeur numérique approchée ne doivent pas être fournies en général.

On peut interpréter le résultat sous forme d'un tirage séquentiel. Il est clair en effet que la probabilité de tirer un unique billet qui ne soit pas de 5 € est de $\frac{17}{22}$. Si on tire ensuite un deuxième billet sans remettre le premier, il ne reste plus que 21 billets, dont seulement 16 ne sont pas de 5 €. La probabilité de ne pas tomber sur un billet de 5 € devient donc $\frac{16}{21}$, puis $\frac{15}{20}$ et ainsi de suite jusqu'à $\frac{10}{15}$ pour le huitième billet. En formalisant ce raisonnement et en s'appuyant sur la notion de probabilités conditionnelles, on peut retrouver le résultat sur $\mathbb{P}(A)$. Il est cependant *beaucoup plus simple* de déterminer la taille de A en s'appuyant sur des propriétés connues.

Notons qu'il ne faut surtout pas chercher à déterminer la composition de la poignée de billets ne contenant pas de billets de 5 € au risque de perdre beaucoup de temps. Cet exercice se différencie donc d'autres exercices dans lesquels on étudie une partie complexe de Ω en la décomposant en parties plus simples. Ici, on s'intéresse toujours à des sous-ensembles de taille huit, mais on change l'ensemble dont ils sont des parties : on passe de B tout entier (l'ensemble des 22 billets) à un sous-ensemble de B. On procède exactement de la même façon pour la question suivante.

Correction

Soit l'évènement $D = \{\text{obtenir uniquement des billets de 20 €}\}$. On cherche ainsi les sous-ensembles de taille 8 billets choisis dans l'ensemble des 10 billets de 20 €. On donc $|D| = C_{10}^8$ et

$$\mathbb{P}(D) = \frac{C_{10}^8}{C_{22}^8} = \frac{10!}{8!8!}\frac{14!8!}{22!} \simeq 1,41\,10^{-4}.$$

La troisième question se traite d'une façon assez différente car elle nécessite de réécrire l'évènement.

Correction

Soit l'évènement

$$E = \{\text{obtenir au moins un billet de chaque valeur}\}.$$

On étudie son complémentaire $F = \overline{E}$ qu'on décompose en deux sous-évènements disjoints :

$$F_1 = \{\text{obtenir des billets d'une seule valeur}\}$$
$$F_2 = \{\text{obtenir des billets de deux valeurs}\}.$$

F_1 est en fait l'évènement

$$F_1 = \{\text{obtenir uniquement des billets de 20 €}\} = D,$$

car il n'y a pas assez de billets de 5 € et de 10 € pour obtenir une poignée de 8 billets composée uniquement de l'une ou l'autre des valeurs. On sait déjà que $|F_1| = C_{10}^8$. On décompose F_2 en trois sous-ensembles disjoints :

$$G_5 = \{\text{obtenir des billets de 10 € et de 20 €, et pas de 5 €}\},$$
$$G_{10} = \{\text{obtenir des billets de 5 € et de 20 €, et pas de 10 €}\},$$
$$G_{20} = \{\text{obtenir des billets de 5 € et de 10 €, et pas de 20 €}\}.$$

On remarque que

$$G_{20} = \{\text{n'avoir aucun billet de 20 €}\}.$$

En effet, comme il y a strictement moins de 8 billets de 5 € et de 10 €, ne pas obtenir de billet de 20 € implique d'obtenir au moins un billet de 5 € et au moins un billet de 10 €. D'après le raisonnement de la première question, on a donc $|G_{20}| = C_{12}^8$.

On remarque aussi que

$$G_5 = \{\text{aucun billet de 5 €}\} \setminus \{\text{uniquement des billets de 20 €}\}.$$

D'après la question 1, $|\{\text{aucun billet de 5 €}\}| = C_{17}^8$, alors que d'après la question 2, $|\{\text{uniquement des billets de 20 €}\}| = C_{10}^8$. On a donc

$$|G_5| = C_{17}^8 - C_{10}^8.$$

Un raisonnement similaire conduit à

$$|G_{10}| = C_{15}^8 - C_{10}^8.$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned}|F| &= |F_1| + |G_5| + |G_{10}| + |G_{20}| \\ &= C_{10}^8 + C_{17}^8 - C_{10}^8 + C_{15}^8 - C_{10}^8 + C_{12}^8 \\ &= C_{17}^8 + C_{15}^8 + C_{12}^8 - C_{10}^8\end{aligned}$$

On a donc

$$\mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}(F) = 1 - \frac{C_{17}^8 + C_{15}^8 + C_{12}^8 - C_{10}^8}{C_{22}^8} \simeq 0,902.$$

Cette question est beaucoup plus complexe que les précédentes et peut conduire à des solutions fausses de façon malheureusement assez naturelle. Il est fréquent par exemple de confondre les évènements G_5 et A. Or, dans G_5, on considère les poignées qui ne contiennent pas de billet de 5 € mais qui contiennent aussi au moins un billet de 10 € et au moins un billet de 20 €. L'évènement A est moins restrictif car il demande seulement de ne pas avoir de billet de 5 €. On peut donc obtenir une poignée ne contenant que des billets de 20 €. Pour trouver $|G_5|$, on doit donc enlever de A les poignées ne contenant que des billets de 20 €.

Une autre erreur classique consiste à essayer de construire les résultats de l'expérience qui constituent l'évènement étudié. Cette stratégie fonctionne très bien dans certaines situations, mais elle est parfois délicate à mettre en œuvre. Dans la question précédente, on étudie donc des sous-ensembles de 8 billets contenant au moins un billet de chaque valeur. Pour obtenir un tel sous-ensemble, on peut donc choisir un billet de 5 € (soit 5 possibilités), un billet de 10 € (7 possibilités), un billet de 20 € (10 possibilités) et enfin 5 billets quelconques parmi les 19 billets restants (soit donc C_{19}^5 possibilités). Les choix étant indépendants, on obtient $5 \times 7 \times 10 \times C_{19}^5$ façons de construire une poignée de 8 billets.

Le problème est qu'on construit de cette façon plusieurs fois les mêmes poignées, ce qui revient à les compter plusieurs fois. Si on choisit par exemple les billets (c_1, d_1, v_1) puis la poignée $\{c_2, c_3, d_2, d_3, v_2\}$, on obtient la même poignée que si on commence par choisir (c_2, d_2, v_2) puis la poignée $\{c_1, c_3, d_1, d_3, v_1\}$. En fait $5 \times 7 \times 10 \times C_{19}^5 = 4\ 069\ 800$ alors que $C_{22}^8 = 319\ 770$: on compte donc de très nombreuses fois les mêmes poignées. Il faudrait ainsi trouver un moyen d'éviter ces constructions redondantes, ce qui est assez complexe. La meilleure solution reste alors la technique de décomposition utilisée dans la correction.

Le traitement de la question 4 nécessite l'introduction d'un nouvel univers. Comme indiqué plus haut, cette étape est indispensable pour obtenir des résultats corrects.

Correction

Le tirage étant maintenant séquentiel, on obtient une liste de billets. De plus, comme les billets sont remis dans le sac, on peut obtenir plusieurs fois le même. L'univers est donc le produit cartésien B^8, soit

$$\Omega = \{(b_1, \ldots, b_8) \mid \forall i,\ b_i \in B\}.$$

Comme dans la définition du premier univers, on attend ici des expressions clé importantes : *liste* (par opposition à *ensemble* et pour tenir compte de l'ordre dans le tirage) et *plusieurs fois le même* (par opposition à *distinct* et pour traduire la remise entre chaque tirage).

On introduit ensuite la probabilité sur Ω.

Correction

Comme dans les questions précédents, on utilise la probabilité uniforme sur Ω, ce qui demande le calcul du cardinal de cet ensemble. Comme c'est un produit cartésien, on a

$$|\Omega| = |B|^8 = 22^8.$$

Le calcul des trois probabilités se fait ensuite assez facilement en utilisant les mêmes raisonnements que dans la première expérience, avec les adaptations nécessaires au mode de tirage.

Correction

On considère l'évènement $A = \{\text{n'avoir aucun billet de 5 €}\}$. Comme pour la question 1, il s'agit de trouver les tirages ne contenant que des billets de 10 € et de 20 €. On cherche donc les listes de 8 billets choisis dans B', l'ensemble des billets de 10 € et de 20 €. On a donc clairement $|A| = |B'|^8 = 17^8$. Donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{17^8}{22^8} \simeq 0,127.$$

De même, l'évènement $D = \{\text{obtenir uniquement des billets de 20 €}\}$ se traite comme à la question : il s'agit de trouver des listes de 8 billets choisis parmi les 10 billets de 20 €. On a clairement 10^8 listes de ce type, ce qui conduit à

$$\mathbb{P}(D) = \frac{10^8}{22^8} \simeq 1,82\ 10^{-3}.$$

Enfin, l'évènement

$$E = \{\text{obtenir au moins un billet de chaque valeur}\},$$

se traite par décomposition exactement comme dans la question 3. En utilisant les mêmes notations, on cherche donc la taille de son complémentaire F en passant par F_1 et F_2. Une différence avec la question 3 est qu'on peut obtenir ici des listes de 8 billets contenant uniquement des billets de 5 €, ou uniquement des billets de 10 € car on remet les billets. On décompose donc F_1 en trois sous-évènements disjoints :

$$\begin{aligned} H_5 &= \{\text{obtenir uniquement des billets de 5 €}\}, \\ H_{10} &= \{\text{obtenir uniquement des billets de 10 €}\}, \\ H_{20} &= \{\text{obtenir uniquement des billets de 20 €}\}. \end{aligned}$$

Dans chaque cas, on cherche des listes constituées uniquement des billets d'un catégorie, ce qui conduit à un ensemble contenant k^8 listes si on considère k billets. On a donc

$$\begin{aligned} |H_5| &= 5^8, \\ |H_{10}| &= 7^8, \\ |H_{20}| &= 10^8. \end{aligned}$$

Le calcul des cardinaux de G_5, G_{10} et G_{20} se fait selon les mêmes principes que dans la question 3 : on compte d'abord le nombre de listes ne contenant pas de billets de la valeur non souhaitée, puis on enlève au total le nombre de listes composées uniquement d'un type de billet. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} |G_5| &= \underbrace{(7+10)^8}_{\text{pas de 5 €}} - \underbrace{7^8}_{\text{uniquement des 10 €}} - \underbrace{10^8}_{\text{uniquement des 20 €}}, \\ |G_{10}| &= (5+10)^8 - 5^8 - 10^8, \\ |G_{20}| &= (5+7)^8 - 5^8 - 7^8. \end{aligned}$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned} |F| &= |H_5| + |H_{10}| + |H_{20}| + |G_5| + |G_{10}| + |G_{20}|, \\ &= 17^8 + 15^8 + 12^8 - 5^8 - 7^8 - 10^8, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}(F) = 1 - \frac{17^8 + 15^8 + 12^8 - 5^8 - 7^8 - 10^8}{22^8} \simeq 0,820.$$

Chapitre 2

Conditionnement et indépendance

Exercice 2.1

Énoncé *On considère le jeu suivant : le joueur lance d'abord un dé non truqué. Il tire ensuite un jeton dans une urne choisie en fonction du résultat du dé. L'urne A est choisie quand le dé donne 1, 2 ou 3, l'urne B quand on obtient 4 ou 5 et l'urne C quand on obtient 6. Les urnes contiennent les jetons suivants :*

urne A *: deux jetons rouges, trois jetons bleus ;*

urne B *: deux jetons bleus, quatre jetons verts ;*

urne C *: un jeton vert, un jeton rouge.*

Question 1 *Quelle est la probabilité d'obtenir un jeton rouge par ce procédé ?*

Question 2 *On obtient un jeton vert. Quelle est la probabilité que ce jeton soit issu de l'urne B ?*

Question 3 *On obtient un jeton bleu. Quelle est la probabilité que le lancer du dé ait donné 3 ?*

Question 4 *Quelle est la probabilité de ne pas obtenir un jeton vert, sachant que le lancer du dé a donné 3 ou 6 ?*

Question 5 *Est-ce que l'évènement « choisir dans l'urne C »et l'évènement « obtenir un jeton rouge »sont indépendants ? Justifiez votre réponse.*

La résolution de l'exercice passe comme toujours par une première phase de modélisation dans laquelle on traduit l'énoncé sous forme d'hypothèses mathématiques.

Correction

On considère les évènements R, Bl et V qui correspondent respectivement à l'obtention d'un jeton rouge, bleu ou vert à la fin de l'expérience. On considère aussi les évènements A, B et C correspondant respectivement à l'utilisation des urnes désignées par les mêmes lettres.

Comme le dé utilisé n'est pas truqué, on suppose que la probabilité sur l'ensemble des faces du dé $\{1,\ldots,6\}$ est uniforme. D'après l'énoncé, on a

$$\mathbb{P}(A|\{\text{le dé donne 1, 2 ou 3}\}) = 1,$$
$$\mathbb{P}(A|\{\text{le dé donne 4, 5 ou 6}\}) = 0.$$

La probabilité conditionnelle sur $\mathbb{P}(A|\{\text{le dé donne 1, 2 ou 3}\})$ est la traduction naturelle de la relation *déterministe* (c'est-à-dire non aléatoire) entre résultat du lancer de dé et le choix de l'urne. De façon générale, on traduit un énoncé de la forme « si U alors V » en $\mathbb{P}(V|U) = 1$.

Correction

Comme les évènements $\{\text{le dé donne 1, 2 ou 3}\}$ et $\{\text{le dé donne 4, 5 ou 6}\}$ sont disjoints et que leur union forme l'univers tout entier (du point de vue du lancer du dé), on peut appliquer la loi des probabilités totales. On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) =&\mathbb{P}(A|\{\text{le dé donne 1, 2 ou 3}\})\mathbb{P}(\{\text{le dé donne 1, 2 ou 3}\})\\ &+ \mathbb{P}(A|\{\text{le dé donne 4, 5 ou 6}\})\mathbb{P}(\{\text{le dé donne 4, 5 ou 6}\}).\end{aligned}$$

On a donc après simplification

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{\text{le dé donne 1, 2 ou 3}\}) = \frac{|\{1,2,3\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}|} = \frac{1}{2}.$$

De la même façon, on obtient

$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3},$$
$$\mathbb{P}(C) = \frac{1}{6}.$$

On peut obtenir les probabilités des trois évènements A, B et C d'une autre façon en s'appuyant sur la notion de variable aléatoire, voir le chapitre 3. Dans tous les cas, il est indispensable de s'appuyer sur des propriétés connues et des définitions précises. Ici, on utilise la loi des probabilités totales. On commence donc par indiquer que les hypothèses de celle-ci sont remplies (évènements disjoints et dont l'union est l'univers), puis on applique la loi. On ne peut pas se contenter de donner directement le résultat de cette application.

Correction

Considérons le tirage d'un jeton dans l'urne A. L'univers correspondant Ω_A s'écrit

$$\Omega_A = \{r_1, r_2, b_1, b_2, b_3\},$$

où r_1 et r_2 sont les jetons rouges, et b_1, b_2, et b_3 les jetons bleus. Les jetons sont supposés discernables pour faciliter l'analyse. En l'absence d'hypothèse particulière sur les urnes et les jetons, on suppose que la probabilité sur Ω_A, $\mathbb{P}_A$, est uniforme. On a donc

$$\mathbb{P}_A(R) = \mathbb{P}_A(\{r_1, r_2\}) = \frac{|\{r_1, r_2\}|}{|\{r_1, r_2, b_1, b_2, b_3\}|} = \frac{2}{5}.$$

De la même façon, on trouve

$$\mathbb{P}_A(Bl) = \frac{3}{5},$$
$$\mathbb{P}_A(V) = 0.$$

On a donc

$$\mathbb{P}(R|A) = \frac{2}{5},$$
$$\mathbb{P}(Bl|A) = \frac{3}{5},$$
$$\mathbb{P}(V|A) = 0.$$

Un raisonnement similaire permet de calculer les autres probabilités conditionnelles comme par exemple $\mathbb{P}(Bl|B)$ que nous utiliserons pour répondre aux questions.

On note ici un passage de $\mathbb{P}_A$ à $\mathbb{P}(.|A)$: il s'agit de l'utilisation directe de la notion de probabilité conditionnelle. Quand on travaille dans l'urne A, on fait implicitement l'hypothèse que l'évènement A a eu lieu. Toute l'analyse conduite sur l'urne A, en particulier son univers Ω_A et la probabilité associée $\mathbb{P}_A$, n'est donc valide que conditionnellement à l'évènement A. Les probabilités qu'on obtient sont donc des probabilités conditionnelles.

La modélisation étant terminée, on peut passer à la résolution des questions.

Correction

Pour obtenir la probabilité de R (obtention d'un jeton rouge), on utilise d'abord la loi des probabilités totales relativement aux évènements A, B et C. En effet, ces trois évènements sont disjoints et leur union forme l'univers tout entier (puisqu'on choisit toujours une urne). On a donc

$$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(R|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(R|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(R|C)\mathbb{P}(C).$$

Il nous reste à calculer $\mathbb{P}(R|B)$ et $\mathbb{P}(R|C)$. Or l'urne B ne contient pas de jeton rouge, ce qui donne $\mathbb{P}(R|B) = 0$. En appliquant le même raisonnement que celui appliqué à l'urne A, on obtient que $\mathbb{P}(R|C) = \frac{1}{2}$, car il y a deux jetons dans l'urne C dont un seul est rouge. On a donc

$$\mathbb{P}(R) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{17}{60}.$$

Comme dans la phase d'analyse, il est indispensable de bien s'appuyer sur des propriétés connues des probabilités. En fait, c'est encore plus crucial ici que dans le calcul de $\mathbb{P}(A)$ par exemple. En effet, le recours aux probabilités conditionnelles dans le calcul des probabilités des trois urnes est très rigoureux, mais on peut accepter une solution plus intuitive qui consiste simplement à traduire l'évènement A en un évènement correspondant pour le lancer du dé. On peut dire en effet que

$$\{\text{obtenir l'urne } A\} = \{\text{le dé donne 1, 2 ou 3}\},$$

puis calculer $\mathbb{P}(A)$ par simple dénombrement. Ce type de raisonnement n'est pas applicable pour la question 1 qui nécessite au contraire l'utilisation de la loi des probabilités totales.

Correction

On cherche donc à calculer $\mathbb{P}(B|V)$. On applique la règle de Bayes qui donne

$$\mathbb{P}(B|V) = \frac{\mathbb{P}(V|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(V)}.$$

En appliquant toujours le même raisonnement, on voit que $\mathbb{P}(V|B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ car l'urne B contient 6 jetons dont 4 sont verts. Pour calculer enfin $\mathbb{P}(V)$, on applique de nouveau la loi des probabilités totales qui donne

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(V|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(V|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(V|C)\mathbb{P}(C).$$

Comme l'urne A ne contient pas de jeton vert, on a $\mathbb{P}(V|A) = 0$. On a aussi $\mathbb{P}(V|C) = \frac{1}{2}$ car l'urne C contient 2 jetons dont un est vert. On a donc

$$\mathbb{P}(V) = 0 \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{11}{36},$$

ce qui conduit à

$$\mathbb{P}(B|V) = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}}{\frac{11}{36}} = \frac{8}{11}.$$

On note deux points importants dans la solution. Il faut d'abord traduire correctement l'énoncé : ici on sait que V a eu lieu puisqu'on a obtenu un jeton vert. On demande alors la probabilité de B, ce qui sous-entend qu'on cherche la probabilité *conditionnelle* de cet évènement ou, en d'autres termes, qu'on cherche la probabilité de B sachant que V a eu lieu. On doit donc calculer $\mathbb{P}(B|V)$.

Cette grandeur étant inconnue, on utilise l'outil classique pour se ramener à des grandeurs connues, à savoir la règle de Bayes (il faut impérativement rappeler le nom de cette règle pour l'utiliser). Elle permet en effet de « renverser » le conditionnement : on passe ici de $\mathbb{P}(B|V)$ à $\mathbb{P}(V|B)$. Or, cette deuxième grandeur est connue puisqu'elle se déduit du protocole suivi dans l'expérience.

La question suivante se traite exactement de la même manière : on utilise la règle de Bayes et la loi des probabilités totales pour calculer les probabilités conditionnelles recherchées.

Correction

On cherche à calculer $\mathbb{P}(\{\text{le dé donne } 3\}|Bl)$. En notant $\{3\}$ l'évènement sur le dé, la règle de Bayes donne

$$\mathbb{P}(\{3\}|Bl) = \frac{\mathbb{P}(Bl|\{3\})\mathbb{P}(\{3\})}{\mathbb{P}(Bl)}.$$

En appliquant à $\{3\}$ le même raisonnement qu'à A, on a

$$\mathbb{P}(Bl|\{3\}) = \frac{3}{5},$$

car l'évènement $\{3\}$ conduit à un tirage d'un jeton dans l'urne A qui en contient 5 donc 3 sont bleus. D'autre part, comme le dé n'est pas truqué, on a $\mathbb{P}(\{3\}) = \frac{1}{6}$. Enfin, on calcule $\mathbb{P}(Bl)$ par l'intermédiaire de la loi des probabilités totales, ce qui donne

$$\mathbb{P}(Bl) = \mathbb{P}(Bl|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(Bl|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(Bl|C)\mathbb{P}(C).$$

Or, $\mathbb{P}(Bl|C) = 0$ car l'urne C ne contient pas de jeton bleu, et $\mathbb{P}(Bl|C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ car l'urne B contient 6 jetons donc 2 bleus. On a donc

$$\mathbb{P}(Bl) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{6} = \frac{37}{90},$$

ce qui conduit à

$$\mathbb{P}(\{3\}|Bl) = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{1}{6}}{\frac{37}{90}} = \frac{9}{37}.$$

L'étude d'un évènement sur le dé plutôt que sur l'urne demande un peu d'attention : il faut en effet justifier que $\mathbb{P}(Bl|\{3\}) = \mathbb{P}(Bl|A)$ ce qui se fait simplement en indiquant qu'on raisonne de la même façon dans les deux cas. On sait en effet que l'obtention d'un 3 conduit à utiliser l'urne A et donc aux probabilités conditionnelles déjà calculées. Il faut simplement bien faire attention de considérer $\mathbb{P}(Bl|\{3\})$ dans les calculs, et pas $\mathbb{P}(Bl|A)$, pour éviter toute confusion.

La question suivante est un peu plus subtile. Elle est destinée à tester les connaissance sur les probabilités conditionnelles. En effet, si U et V sont deux évènements disjoints, on pourrait croire que pour un autre évènement W, $\mathbb{P}(W|U \text{ ou } V)$ est égal à la somme de $\mathbb{P}(W|U)$ et $\mathbb{P}(W|V)$, ce qui est faux en général. En revanche, comme une probabilité conditionnelle est une probabilité, on a bien

$$\mathbb{P}(U \text{ ou } V|W) = \mathbb{P}(U|W) + \mathbb{P}(U|V),$$

quand U et V sont disjoints. En utilisant la règle de Bayes ou la définition des probabilités conditionnelles, on peut donc calculer $\mathbb{P}(W|U \text{ ou } V)$, mais c'est un peu plus complexe qu'on pourrait le croire de prime abord.

Correction

On cherche donc $\mathbb{P}(\overline{V}|D)$ avec

$$D = \{\text{le dé a donné 3 ou 6}\}.$$

En utilisant le fait que $\mathbb{P}(\overline{V}|D) = 1 - \mathbb{P}(V|D)$, on se ramène au calcul de $\mathbb{P}(V|D)$. Or, par définition des probabilités conditionnelles, on a

$$\mathbb{P}(V|D) = \frac{\mathbb{P}(V \cap D)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{\mathbb{P}(V \cap \{3\}) + \mathbb{P}(V \cap \{6\})}{\mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{6\})},$$

la deuxième égalité provenant du fait que D est l'union disjointe des deux évènements $\{3\}$ et $\{6\}$ (qui désignent respectivement l'obtention d'un 3 et d'un 6).

On sait que $\mathbb{P}(V \cap \{3\}) = 0$ puisque l'obtention d'un 3 conduit à utiliser l'urne A qui ne contient pas de jeton vert. D'autre part, en appliquant de nouveau la définition des probabilités conditionnelles, on a

$$\mathbb{P}(V \cap \{6\}) = \mathbb{P}(V|\{6\})\mathbb{P}(\{6\}).$$

Or, l'obtention d'un 6 conduit à utiliser l'urne C et donc à choisir un jeton parmi deux jetons (dont un est vert). On a donc $\mathbb{P}(V|\{6\}) = \frac{1}{2}$. On en déduit donc

$$\mathbb{P}(V|D) = \frac{0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = \frac{1}{4},$$

et donc finalement que $\mathbb{P}(\overline{V}|D) = \frac{3}{4}$.

La dernière question est essentiellement une question de cours.

Correction

Deux évènements U et V sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(U \cap V) = \mathbb{P}(U)\mathbb{P}(V)$. On considère donc l'évènement $C \cap R$. Par définition des probabilités conditionnelles, on a

$$\mathbb{P}(C \cap R) = \mathbb{P}(R|C)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}.$$

Or, d'après la question 1, $\mathbb{P}(R) = \frac{17}{60}$, donc

$$\mathbb{P}(R) \times \mathbb{P}(C) = \frac{17}{60} \times \frac{1}{6} \neq \mathbb{P}(C \cap R).$$

De ce fait, les deux évènements considérés ne sont pas indépendants.

Exercice 2.2

Énoncé *Un fabricant prépare des films de protection d'écran pour téléphones portables. Il retient trois longueurs pour la diagonale des écrans (et donc pour les films), 4 pouces, 4,7 pouces et 5 pouces. On se limite ici aux possesseurs de téléphones avec ces trois tailles d'écran. Une étude de marché indique au fabricant que les écrans de 4 pouces équipent 30 % des téléphones. Cette étude lui indique aussi que 30 % des possesseurs d'écran 4 pouces ont une protection d'écran. C'est aussi le cas de 25 % des possesseurs d'écran 4,7 pouces et de 40 % des possesseurs d'écran 5 pouces.*

Question 1 *Sachant que 34 % des possesseurs de téléphone possèdent une protection d'écran, calculer le pourcentage de possesseurs d'écran de 4,7 pouces et de 5 pouces.*

Question 2 *On considère un possesseur de protection d'écran. Calculer la probabilité qu'il possède un téléphone avec un écran de 5 pouces.*

Question 3 *On considère maintenant une personne possédant une protection d'écran et dont le téléphone n'a pas un écran de 4,7 pouces. Calculer la probabilité qu'elle possède un téléphone avec un écran de 5 pouces.*

Dans cet énoncé, on utilise volontairement un vocabulaire imprécis du point de vue mathématique, en parlant de pourcentage plutôt que de probabilité. On interprète alors ces pourcentages comme des probabilités afin de bénéficier des résultats classiques comme la loi des probabilités totales et la règle de Bayes. La résolution passe donc par une phase de modélisation mathématique avant même de pouvoir songer à répondre aux questions.

Correction

On appelle Ω l'ensemble de tous les possesseurs de téléphone pris en compte dans l'étude. L'expérience aléatoire consiste à choisir au hasard une personne dans cet ensemble. L'énoncé se traduit alors comme suit :

— on note E_4 l'évènement « la personne choisie possède un téléphone avec un écran de 4 pouces » (idem pour $E_{4,7}$ et E_5) ;

— on note PE l'évènement « le téléphone de la personne choisie possède une protection d'écran » ;

— on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_4) &= 0{,}3,\\ \mathbb{P}(PE|E_4) &= 0{,}3,\\ \mathbb{P}(PE|E_{4,7}) &= 0{,}25,\\ \mathbb{P}(PE|E_5) &= 0{,}4.\end{aligned}$$

Notons que sans la modélisation effectuée ci-dessus, la résolution de l'exercice devient délicate et hasardeuse. Il faut aussi que la modélisation soit juste ! Il est ainsi fréquent d'inverser le conditionnement lors de la traduction de l'énoncé. Ici, on parle par exemple des « possesseurs d'écran 4 pouces », ce qui sous-entend que l'évènement E_4 est réalisé de façon sûre. On est donc bien en train de spécifier $\mathbb{P}(PE|E_4)$ et non pas $\mathbb{P}(E_4|PE)$. Pour donner une indication sur cette dernière probabilité, on aurait écrit quelque chose comme « parmi les possesseurs de protection d'écran, x % possèdent un écran 4 pouces », soit donc $\mathbb{P}(PE|E_4) = x$. Dans tous les cas, il faut impérativement identifier ce qui est certain pour déterminer l'évènement de conditionnement.

Correction

L'énoncé précise que $\mathbb{P}(PE) = 0{,}34$. Or, les évènements E_4, $E_{4,7}$ et E_5 forment une partition de Ω (d'après l'énoncé, le fabricant se limite à ces tailles), on peut appliquer la loi des probabilités totales, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(PE) &= 0{,}34,\\ &= \mathbb{P}(PE|E_4)\mathbb{P}(E_4) + \mathbb{P}(PE|E_{4,7})\mathbb{P}(E_{4,7}) + \mathbb{P}(PE|E_5)\mathbb{P}(E_5),\\ &= 0{,}09 + 0{,}25 \times \mathbb{P}(E_{4,7}) + 0{,}4 \times \mathbb{P}(E_5).\end{aligned}$$

Pour la même raison, on a $\mathbb{P}(E_4) + \mathbb{P}(E_{4,7}) + \mathbb{P}(E_5) = 1$. On obtient ainsi deux équations à deux inconnues :

$$\begin{aligned}0{,}25 &= 0{,}25 \times \mathbb{P}(E_{4,7}) + 0{,}4 \times \mathbb{P}(E_5),\\ 0{,}7 &= \mathbb{P}(E_{4,7}) + \mathbb{P}(E_5).\end{aligned}$$

En soustrayant la deuxième équation à la première multipliée par 4, on obtient :

$$0{,}3 = 0{,}6\mathbb{P}(E_5),$$

soit $\mathbb{P}(E_5) = 0{,}5$ et donc $\mathbb{P}(E_{4,7}) = 0{,}2$.

La résolution ci-dessus ne comporte pas de difficulté particulière. Il faut bien entendu invoquer la loi des probabilités totales en précisant que ses conditions d'application sont bien vérifiées. Attention, il faudrait en toute rigueur dire qu'on suppose que les évènements $E_{4,7}$ et E_5 sont tous deux de probabilité non nulle, car cette condition est nécessaire pour appliquer la loi.

Correction

On cherche ici $\mathbb{P}(E_5|PE)$. En appliquant la règle de Bayes, on obtient :

$$\mathbb{P}(E_5|PE) = \frac{\mathbb{P}(PE|E_5)\mathbb{P}(E_5)}{\mathbb{P}(PE)} = \frac{0{,}4 \times 0{,}5}{0{,}34} = \frac{10}{17} \simeq 0{,}59.$$

De nouveau, ce calcul ne présente aucune difficulté, mais il faut justifier son utilisation (application de la règle de Bayes). Comme pour la loi des probabilités totales, il faudrait en toute rigueur rappeler que la résultat s'applique car $\mathbb{P}(PE) > 0$.

Correction

On cherche enfin la valeur de $\mathbb{P}(E_5|PE \cap \overline{E_{4,7}})$. On remarque que $PE \cap \overline{E_{4,7}} \cap E_5 = PE \cap E_5$ car $\overline{E_{4,7}} = E_4 \cup E_5$ et que cette dernière union est disjointe. Donc, en appliquant la définition des probabilités conditionnelles, on obtient :

$$\mathbb{P}(E_5|PE \cap \overline{E_{4,7}}) = \frac{\mathbb{P}(PE \cap \overline{E_{4,7}} \cap E_5)}{\mathbb{P}(PE \cap \overline{E_{4,7}})} = \frac{\mathbb{P}(PE \cap E_5)}{\mathbb{P}(PE \cap \overline{E_{4,7}})}.$$

Or, en appliquant de nouveau la définition des probabilités conditionnelles, on obtient :

$$\mathbb{P}(PE \cap E_5) = \mathbb{P}(PE|E_5)\mathbb{P}(E_5) = 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}2.$$

De plus, d'après l'écriture de $\overline{E_{4,7}}$ comme l'union disjointe $E_4 \cup E_5$ et en appliquant encore la définition des probabilités conditionnelles, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(PE \cap \overline{E_{4,7}}) &= \mathbb{P}(PE \cap E_5) + \mathbb{P}(PE \cap E_4) \\
&= \mathbb{P}(PE|E_5)\mathbb{P}(E_5) + \mathbb{P}(PE|E_4)\mathbb{P}(E_4), \\
&= 0{,}2 + 0{,}3 \times 0{,}3, \\
&= 0{,}29.
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\mathbb{P}(E_5|PE \cap \overline{E_{4,7}}) = \frac{0{,}2}{0{,}29} = \frac{20}{29} \simeq 0{,}69.$$

La dernière question ne comporte pas non plus de difficulté spécifique. Cependant, elle peut paraître surprenante, notamment parce qu'on n'utilise pas pour sa résolution la règle de Bayes ou la loi des probabilités totales. Ceci vient du fait que l'évènement de conditionnement $PE \cap \overline{E_{4,7}}$ mélange une « cause » (la taille de l'écran) et une « conséquence » (la possession d'une protection d'écran). De ce fait, la probabilité associée à ce conditionnement est totalement inconnue. En passant par la règle de Bayes, on obtiendrait :

$$\mathbb{P}(E_5|PE \cap \overline{E_{4,7}}) = \frac{\mathbb{P}(PE \cap \overline{E_{4,7}}|E_5)\mathbb{P}(E_5)}{\mathbb{P}(PE \cap \overline{E_{4,7}})},$$

ce qui n'aide pas beaucoup, seule $\mathbb{P}(E_5)$ étant connue. En particulier, le calcul de $\mathbb{P}(PE \cap \overline{E_{4,7}}|E_5)$ n'est pas plus facile que celui de la probabilité d'origine, notamment parce qu'on ne sait rien de particulier sur l'évènement $PE \cap \overline{E_{4,7}}$. Autrement dit, le passage pas la règle de Bayes ne fait ici que compliquer le calcul.

Exercice 2.3

Énoncé *Dans une sordide affaire, les polices scientifiques de Las Vegas, Miami et Manhattan coopèrent afin de confondre le coupable. Sur les lieux du crime, il y avait onze personnes présentes, et il n'y a pas de doute que le coupable est parmi elles. On trouve sur les lieux du crime un fragment de cheveu qui ne peut appartenir qu'au coupable. Les équipes de Manhattan et de Miami mettent en place deux tests pour identifier le coupable à partir de ce fragment. Les deux tests sont positifs avec certitude si la personne testée est le coupable, mais les deux tests sont également positifs dans 10 % des cas si la personne testée est innocente.*

Question 1 *(question préliminaire) Montrer que pour toute probabilité et pour deux évènements E_1 et E_2 tels que $\mathbb{P}(E_1) = 1$ et $\mathbb{P}(E_2) = 1$ alors $\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) = 1$.*

Pour la suite, on notera pour une personne prise au hasard :

— *T_1 : l'évènement « le test 1 est positif »*

— *T_2 : l'évènement « le test 2 est positif »*

— *C : l'événement « la personne est coupable »*

On suppose que chaque suspect à la même probabilité que les autres d'être choisi au hasard parmi les onze suspects.

Question 2 *Donner une écriture simple de l'événement I : « La personne est innocente » et de l'évènement T : « les résultats aux deux tests (1 et 2) sont positifs ».*

Question 3 *Quelle est la probabilité qu'un suspect pris au hasard soit le coupable sachant que le test 1 est positif ?*

Pour la suite de l'exercice, on admettra, du fait de la symétrie du problème, que $\mathbb{P}(C|T_2) = \mathbb{P}(C|T_1)$. Les deux équipes de Manhattan et de Miami se rendent compte que pour les personnes innocentes un résultat positif avec le test 1 et un résultat positif avec le test 2 sont des événements indépendants. Plus formellement T_1 et T_2 sont conditionnellement indépendants sachant I.

Question 4 *Grâce au résultat de la question 1, déterminez la probabilité que les tests 1 et 2 soient tous les deux positifs sachant que la personne est coupable.*

Question 5 *En appliquant la formule des probabilités totales à T_1, T_2 et $T_1 \cap T_2$, déterminez si en général T_1 et T_2 sont indépendants.*

Question 6 *Quelle est la probabilité d'avoir affaire au coupable lorsque les deux tests 1 et 2 sont administrés à une même personne et sont positifs ?*

Question 7 *L'équipe de Las Vegas entre en scène et imagine un autre test (le test 3) qui est tel qu'aucune personne non-coupable ne puisse être positive à la fois au test 2 et au test 3. Comme les deux autres tests, le test 3 est positif avec certitude si la personne testée est coupable. Proposez une procédure pour découvrir de manière certaine le coupable (et justifiez).*

Cet énoncé est représentatif du raisonnement probabiliste. Il est assez délicat car il fait intervenir la notion d'indépendance conditionnelle. Ceci dit, la première question est élémentaire et ne demande que d'appliquer les propriétés classiques des probabilités.

Correction

On sait que pour deux évènements quelconques

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) - \mathbb{P}(E_1 \cup E_2),$$

et donc ici

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) = 1 + 1 - \mathbb{P}(E_1 \cup E_2).$$

Or une probabilité est toujours inférieure ou égale à 1, donc $\mathbb{P}(E_1 \cup E_2) \leq 1$, et donc $2 - \mathbb{P}(E_1 \cup E_2) \geq 1$. Comme $\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) \leq 1$, on obtient $\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) = 1$ (ainsi que $\mathbb{P}(E_1 \cup E_2) = 1$, d'ailleurs).

La deuxième question est aussi assez élémentaire et repose sur la traduction des formules logiques en opérations ensemblistes.

Correction

On a clairement $I = \overline{C}$ car on est soit coupable, soit innocent. On a aussi de façon évidente $T = T_1 \cap T_2$.

La troisième question demande de traduire l'énoncé mathématiquement, puis d'appliquer les résultats classiques dans ce genre de situation (règle de Bayes et formule des probabilités totales).

Correction

On a 11 suspects (qui forment Ω) et le choix d'un suspect dans la liste est équiprobable. Comme il n'y a qu'un coupable, la probabilité de C est donc $\mathbb{P}(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{1}{11}$ (et donc $\mathbb{P}(I) = \frac{10}{11}$). Si la personne testée est le coupable, les tests le détectent avec certitude, donc $\mathbb{P}(T_1|C) = \mathbb{P}(T_2|C) = 1$. Enfin, si la personne est innocente, les tests sont tout de même vrais avec une probabilité de 10 %. Donc $\mathbb{P}(T_1|I) = \mathbb{P}(T_2|I) = 0{,}1$.

On cherche $\mathbb{P}(C|T_1)$. En appliquant la règle de Bayes, on sait que

$$\mathbb{P}(C|T_1) = \frac{\mathbb{P}(T_1|C)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(T_1)}.$$

Dans cette formule, seule $\mathbb{P}(T_1)$ n'est pas connue. On l'obtient en appliquant la règle des probabilités totales à $(C{,}I)$ (qui sont complémentaires). On obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_1) &= \mathbb{P}(T_1|C)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(T_1|I)\mathbb{P}(I),\\ &= 1 \times \frac{1}{11} + 0{,}1 \times \frac{10}{11},\\ &= \frac{2}{11}.\end{aligned}$$

Ceci nous permet de vérifier au passage que $\mathbb{P}(.|T_1)$ est bien définie. On en déduit de plus que

$$\mathbb{P}(C|T_1) = \frac{1 \times \frac{1}{11}}{\frac{2}{11}} = \frac{1}{2}.$$

On note au passage qu'en retenant un suspect en raison du résultat d'un seul test, on n'a tout de même une chance sur deux de le déclarer coupable à tort. Cela est du au fait qu'il y a beaucoup plus d'innocents que de coupables dans la population (10 fois plus ici) et à la probabilité non négligeable d'un « faux positif » (le test est positif alors que la personne est innocente).

Remarquons aussi que le résultat admis dans l'énoncé $\mathbb{P}(C|T_1) = \mathbb{P}(C|T_2)$ est très facile à obtenir puisque les calculs pour T_2 sont exactement les mêmes que pour T_1.

La question suivante est très simple en pratique mais délicate conceptuellement. Il faut en effet bien comprendre que pour tout évènement A tel que $\mathbb{P}(A) > 0$, le conditionnement par A correspond à la construction d'une nouvelle probabilité sur Ω, $\mathbb{P}(.|A)$. Or, la question 1 s'applique à tout Ω et à toute probabilité sur Ω, donc en particulier aux probabilités conditionnelles.

Correction

On s'intéresse à $\mathbb{P}(T_1 \cap T_2|C)$. Comme $\mathbb{P}(.|C)$ est une probabilité comme une autre, on peut lui appliquer le résultat de la question 1. On sait en effet que $\mathbb{P}(T_1|C) = \mathbb{P}(T_2|C) = 1$ et donc $\mathbb{P}(T_1 \cap T_2|C) = 1$.

On demande très souvent de déterminer si deux évènements sont indépendants. Ici la difficulté vient du fait qu'il faut s'appuyer sur tout ce qui est connu sur les hypothèses formulées sur les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}(.|C)$ et $\mathbb{P}(.|I)$ alors qu'en général, on se contente d'un calcul numérique simple.

Correction

Pour étudier l'indépendance entre T_1 et T_2, on calcule $\mathbb{P}(T_1 \cap T_2)$. Pour cela on applique la règle des probabilités totales pour le couple (C, I). On a donc

$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2) = \mathbb{P}(T_1 \cap T_2|C)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(T_1 \cap T_2|I)\mathbb{P}(I).$$

On sait que $\mathbb{P}(T_1 \cap T_2|C) = 1$ (question précédente). De plus T_1 et T_2 sont conditionnellement indépendants sachant I, donc

$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2|I) = \mathbb{P}(T_1|I)\mathbb{P}(T_2|I) = 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}01.$$

Donc finalement

$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2) = 1 \times \frac{1}{11} + 0{,}01 \times \frac{10}{11} = \frac{1}{10}.$$

Nous avons déjà calculé $\mathbb{P}(T_1) = \frac{2}{11}$ à la question 3. Par symétrie, $\mathbb{P}(T2) = \mathbb{P}(T_1)$ et donc $\mathbb{P}(T_1) \times \mathbb{P}(T_2) = \frac{4}{121} \neq \frac{1}{10}$. On en déduit donc que T_1 et T_2 ne sont pas indépendants.

La question suivante est plus classique et s'appuie naturellement sur la règle de Bayes.

Correction

En appliquant la règle de Bayes, on a

$$\mathbb{P}(C \mid T_1 \cap T_2) = \frac{\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 \mid C)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(T_1 \cap T_2)}.$$

Toutes les valeurs ont été calculées dans les questions précédentes et on a donc

$$\mathbb{P}(C \mid T_1 \cap T_2) = \frac{1 \times \frac{1}{11}}{\frac{1}{10}} = \frac{10}{11}.$$

On constate une nette amélioration par rapport à l'utilisation d'un seul test.

La dernière question est formulée de façon ouverte. Il est important dans ce type de situation de commencer par formuler de façon mathématique les nouvelles hypothèses, avant même de chercher une solution. Ces hypothèses conduisent en général de façon assez directe à une solution naturelle, comme c'est le cas ici.

Correction

On note T_3 l'évènement « le test 3 est positif ». D'après l'énoncé, on a

$$\mathbb{P}(T_2 \cap T_3 \cap I) = 0,$$

car il est impossible d'être à la fois innocent et d'obtenir un résultat positif aux tests 2 et 3. Il semble donc naturel d'étudier la probabilité d'être coupable sachant $T_2 \cap T_3$, soit $\mathbb{P}(C|T_2 \cap T_3)$. Notons que cette probabilité est bien définie car $C \subset T_2 \cap T_3$ et $\mathbb{P}(C) > 0$. Par la règle de Bayes, on a donc

$$\mathbb{P}(C|T_2 \cap T_3) = \frac{\mathbb{P}(T_2 \cap T_3|C)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(T_2 \cap T_3)}$$

Or, on a

$$T_2 \cap T_3 = (T_2 \cap T_3 \cap I) \cup (T_2 \cap T_3 \cap C),$$

et l'union est disjointe. Donc, d'après l'énoncé,

$$\mathbb{P}(T_2 \cap T_3) = \mathbb{P}(T_2 \cap T_3 \cap C),$$

et d'après la définition des probabilités conditionnelles

$$\mathbb{P}(T_2 \cap T_3 \cap C) = \mathbb{P}(T_2 \cap T_3|C)\mathbb{P}(C),$$

et donc

$$\mathbb{P}(C|T_2 \cap T_3) = 1.$$

On trouve donc le coupable avec certitude en considérant le seul suspect pour lequel les tests 2 et 3 donnent un résultat positif.

Notons que dans cette dernière question, la vérification de $\mathbb{P}(T_2 \cap T_3) > 0$ est un point crucial. En effet, on pourrait très bien avoir $\mathbb{P}(T_2 \cap T_3) = 0$, soit donc bien $\mathbb{P}(T_2 \cap T_3 \cap C) = 0$. Il est donc important de s'assurer que le test 3 est toujours positif pour le coupable. Si on relâchait cette hypothèse, rien dans l'énoncé ne permettrait de conclure.

Chapitre 3

Variables aléatoires discrètes

3.1 Loi, fonction de répartition, espérance et variance

Exercice 3.1

Énoncé *Pour les jeux suivants, on utilise un dé à quatre faces numérotées 0, 2, 3 et 5. On dispose aussi d'une urne contenant trois billes numérotées respectivement 1, 3 et 5.*

Dans premier jeu, on procède de la façon suivante : on lance le dé puis on tire une bille. Si le dé donne 0, on ne gagne rien. Sinon, on gagne 5 € si le dé et la bille portent le même numéro. Sinon, on gagne 1 €.

Question 1 *Donner l'univers Ω_1 et la probabilité associés à l'expérience aléatoire.*

Soit X la variable aléatoire correspondant au gain du joueur.

Question 2 *Donner la définition de X sous forme d'une fonction (on pourra utiliser un tableau) et expliciter $X(\Omega_1)$.*

Question 3 *Donner la loi de X et son espérance $\mathbb{E}(X)$.*

Le second jeu est plus complexe. On lance un dé puis on place dans l'urne une bille portant le numéro de la face obtenue lors du lancer du dé (par exemple, on place une deuxième bille portant un 3 si on obtient 3). On tire ensuite une bille dans l'urne ainsi modifiée. Le gain en euros est alors le montant indiqué sur la bille obtenue. On note Y la variable aléatoire correspondante.

Question 4 *Donner $Y(\Omega_2)$ (il n'est pas nécessaire de décrire explicitement Ω_2, même si cela peut être utile).*

Question 5 *Donner la loi de Y.*

Question 6 *Donner $\mathbb{E}(Y)$. L'organisateur qui propose ce jeu demande de payer 3 € pour jouer une fois. Quelle est sa rémunération moyenne ?*

La première question est très classique et n'appelle pas de commentaire particulier (il faut toujours une rédaction rigoureuse, bien entendu).

Correction

L'expérience consiste à lancer un dé dont les faces sont $F = \{0, 2, 3, 5\}$ puis à choisir une bille dans l'ensemble $B = \{1, 3, 5\}$. L'univers est alors l'ensemble des couples obtenus, soit

$$\Omega_1 = F \times B.$$

En absence d'indication particulière dans l'énoncé, on considère que le dé et l'urne ne sont pas truqués et donc que la probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω_1 est uniforme. Pour tout $A \subset \Omega_1$, on a donc $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega_1|}$. On a de plus $|\Omega_1| = 12$.

Quand une variable aléatoire est définie explicitement comme c'est le cas ici, il est très important de bien préciser son comportement, notamment quand l'univers est suffisamment petit pour permettre un calcul exhaustif.

Correction

Le tableau suivant donne le résultat du dé en ligne, celui du tirage dans l'urne en colonne et la valeur de X à chaque intersection :

F/B	1	3	5
0	0	0	0
2	1	1	1
3	1	5	1
5	1	1	5

D'après l'énoncé, les gains sont soit 0 €, soit 1 €, soit enfin 5 €. De ce fait, on a clairement

$$X(\Omega) = \{0, 1, 5\}.$$

Notons que $X(\Omega)$ est obtenu ici directement à partir de l'énoncé. Si la variable aléatoire avait été plus complexe, on se serait basé sur le tableau donnant ses valeurs en fonction de $\omega \in \Omega$.

Correction

Pour calculer la loi de X, il faut déterminer $\mathbb{P}_X(\{x\}$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

Par exemple ici, on constate que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_X(\{0\}) &= \mathbb{P}(X^{-1}(\{0\}) && \text{par définition de } \mathbb{P}_X \\
&= \mathbb{P}(\{0\} \times \{1,3,5\}) && \text{par définition de } X \\
&= \frac{|\{0\} \times \{1,3,5\}|}{|\Omega_1|} && \text{car } \mathbb{P} \text{ est uniforme} \\
&= \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

En procédant de la même manière pour 1 et 5, on obtient la loi suivante

x	0	1	5
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{6}$

L'espérance de X est alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{7}{12} + 5 \times \frac{1}{6}, \\
&= \frac{17}{12}.
\end{aligned}$$

On applique ici simplement les définitions. Comme toujours, il est important de justifier les calculs. Ceci nécessite le rappel de la définition de $\mathbb{P}_X$ (comme ci-dessus, on peut se contenter d'expliciter un calcul) et celui de $\mathbb{E}(X)$ (comme ci-dessus, il suffit de donner la formule appliquée au cas concret).

Correction

Commençons par expliciter Ω_2. Chaque tirage constitue une paire de deux chiffres, la face du dé et le numéro de la bille. Cependant, il est important de distinguer les billes qui portent le même numéro afin de pouvoir faire l'hypothèse d'uniformité. Pour faciliter l'écriture, on décompte Ω_2 en 4 sous ensembles, O_f avec $f \in F$ en fonction du résultat du dé. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
O_0 &= \{0\} \times \{0,1,3,5\}, \\
O_2 &= \{2\} \times \{1,2,3,5\}, \\
O_3 &= \{3\} \times \{1,3_1,3_2,5\}, \\
O_5 &= \{5\} \times \{1,3,5_1,5_2\},
\end{aligned}$$

et $\Omega_2 = 0_0 \cup O_2 \cup O_3 \cup O_5$. On a noté 3_1 et 3_2 les deux billes portant la valeur 3 (idem pour 5_1 et 5_2). Par symétrie du problème, et sans mention spécifique dans l'énoncé, il est naturel de supposer que la probabilité est uniforme sur Ω_2.

Cette partie de l'exercice est plus délicate en tant qu'expérience composée et en raison des valeurs identiques sur certaines billes. Comme toujours dans cette seconde situation, il faut supposer les billes discernables car c'est la seule solution simple pour définir la probabilité. L'expérience se faisant en deux temps, il serait plus rigoureux de passer par les probabilités conditionnelles pour déterminer la probabilité sur Ω_2. On écrirait ainsi que $\mathbb{P}(f \text{ et } b) = \mathbb{P}(b|f)\mathbb{P}(f)$ où f désigne l'évènement « obtenir la face f par le lancer du dé » et b désigne l'évènement « obtenir la bille b ». $\mathbb{P}(f)$ vaut clairement $\frac{1}{4}$ pour tout f car le dé n'est pas truqué (pas de mention à ce sujet dans l'énoncé). Ensuite, pour tout f, l'urne contient toujours 4 billes (discernables !) et donc $\mathbb{P}(b|f) = \frac{1}{4}$ car les billes sont à priori équiprobables. Donc tout évènement « f et b » est de probabilité $\frac{1}{16}$ ce qui revient exactement à dire que la probabilité est uniforme sur Ω_2.

Notons pour finir que cette analyse n'est pas nécessaire pour déterminer $Y(\Omega)$ car le texte de l'énoncé permet d'énumérer les valeurs possibles de façon directe. Cependant, le calcul de $\mathbb{P}_Y$ est facilité par l'écriture explicite de Ω_2 et la détermination de $\mathbb{P}$.

Correction

On constate dans Ω_2 que Y peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3 et 5. On obtient donc

$$Y(\Omega_2) = \{0, 1, 2, 3, 5\}.$$

Correction

Le calcul de $\mathbb{P}_Y$ se fait comme celui de $\mathbb{P}_X$ ci-dessus. Par exemple on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_Y(\{2\}) &= \mathbb{P}(Y^{-1}(\{2\}) && \text{par définition de } \mathbb{P}_Y \\
&= \mathbb{P}(\{2\} \times \{2\}) && \text{par définition de } Y \\
&= \frac{|\{2\} \times \{2\}|}{|\Omega_2|} && \text{car } \mathbb{P} \text{ est uniforme} \\
&= \frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

En procédant de la même manière pour les autres valeurs, on obtient la loi suivante

y	0	1	2	3	5
$\mathbb{P}(Y = y)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$

Le rappel de définition proposé ci-dessus pour $\mathbb{P}_Y$ n'est pas nécessaire, puisque nous avons déjà fait ce rappel pour $\mathbb{P}_X$. En revanche, tout le développement sur l'univers Ω_2 et sa probabilité doivent se trouver dans la réponse (soit donc dans la réponse précédent, soit ici), faute de quoi le calcul de la loi de Y n'est pas justifié. Une stratégie peut être par exemple de détailler le calcul de $\mathbb{P}(Y = y)$ pour une valeur de y en revenant à des évènements sur Ω_2, comme dans la remarque précédente qui s'appuyait sur le conditionnement. Quelle que soit la solution choisie, il faut impérativement une justification !

Correction

On calcule $\mathbb{E}(Y)$ comme suit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= 0\times\frac{1}{16}+1\times\frac{4}{16}+2\times\frac{1}{16}+3\times\frac{5}{16}+5\times\frac{5}{16},\\ &= \frac{46}{16}=\frac{23}{8}.\end{aligned}$$

La rémunération moyenne de l'organisation est de $3-\mathbb{E}(Y)$, soit $\frac{1}{8}$ €.

Exercice 3.2

Énoncé *On considère le jeu suivant : le joueur lance d'abord un dé non truqué. S'il obtient* 1, 2 *ou* 3*, il gagne l'équivalent en euros (c'est-à-dire 1 € s'il obtient* 1*, par exemple). Sinon, il perd 2 €. On note X la variable aléatoire correspondant au gain du joueur (négatif en cas de perte).*

Question 1 *Donnez la loi de X et sa fonction de répartition F_X.*

Question 2 *Calculez l'espérance de X.*

Question 3 *Calculez la variance de X.*

On modifie le jeu de la façon suivante : les gains restent les mêmes pour les résultats 1, 2 *ou* 3*, mais si le joueur obtient autre chose, il relance le dé. S'il obtient* 3 *ou moins, il gagne 3 €, sinon il perd 5 €.*

Question 4 *Décrivez formellement l'univers du nouveau jeu.*

Question 5 *Donnez la loi de Y (qui désigne de nouveau le gain du joueur) et calculez son espérance.*

Question 6 *Quelle variante du jeu est la plus avantageuse pour le joueur ?*

Quand une variable aléatoire est définie de façon explicite, il est important de bien définir l'univers de l'expérience aléatoire de départ afin d'éviter toute confusion. Cela sera particulièrement important dans la deuxième partie de l'exercice.

Correction

L'expérience aléatoire est un lancer de dé dont l'univers est donc

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\},$$

muni d'une probabilité uniforme (car le dé n'est pas truqué). La variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

ω	1	2	3	4	5	6
$X(\omega)$	1	2	3	-2	-2	-2

On en déduit donc que $X(\Omega) = \{-2, 1, 2, 3\}$. La loi de X est donnée par $\mathbb{P}(\{X(\omega) = x\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(\{x\}))$ pour les $x \in X(\Omega)$. En utilisant le fait que la probabilité $\mathbb{P}$ est uniforme, on obtient les résultats résumés dans le tableau suivant, dont la dernière ligne donne la loi de X :

x	-2	1	2	3
$X^{-1}(\{x\})$	$\{4,5,6\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$
$\mathbb{P}_X(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Une fois la loi de X déterminée, les questions suivantes sont essentiellement des questions de cours, associées à la réalisation de quelques calculs.

Correction

La fonction de répartition F_X définie par $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ est alors

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -2, \\ \frac{1}{2} & \text{pour } -2 \leq x < 1, \\ \frac{2}{3} & \text{pour } 1 \leq x < 2, \\ \frac{5}{6} & \text{pour } 2 \leq x < 3, \\ 1 & \text{pour } x \geq 3. \end{cases}$$

Pour calculer $\mathbb{E}(X)$, on applique la définition de l'espérance, à savoir

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}_X(x).$$

On obtient ainsi

$$\mathbb{E}(X) = -2 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} = 0.$$

Pour calculer $V(X)$, on utilise $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$. On a

$$\mathbb{E}(X^2) = (-2)^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{6} = \frac{13}{3},$$

et donc $V(X) = \frac{13}{3} \simeq 4{,}33$.

Pour le calcul de la variance, il est rare que le passage par la formule de définition, c'est-à-dire

$$V(X) = \mathbb{E}\left\{(X - \mathbb{E}(X))^2\right\},$$

soit très pratique. En général, il vaut mieux passer par la formule utilisée ci-dessus. Dans le calcul de $\mathbb{E}(X^2)$, deux erreurs classiques sont à éviter. On doit tout d'abord mettre au carré les valeurs prises par X, pas les probabilités de ces valeurs. De plus, il faut être attentif au signe de ces valeurs : dans le calcul ci-dessus, on a bien $(-2)^2 = 4$ et non pas $-(2^2) = -4$, ce qui donnerait un résultat complètement faux.

La deuxième partie de l'exercice est plus délicate car l'expérience ne semple pas symétrique. La solution la plus simple pour l'analyser est de faire comme si elle était symétrique : on considère deux lancers de dé, le deuxième étant inutile pour la définition de Y dans certaines situations. Cette approche s'apparente à celle utilisée pour faciliter le traitement de certains problèmes dans lesquels on fait comme si les objets étudiés (des jetons par exemple) étaient discernables alors qu'ils ne le sont pas.

Correction

On choisit comme univers celui d'une expérience dans laquelle on lance toujours deux fois le dé. On a donc

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\},$$

muni de la probabilité uniforme.

La variable aléatoire Y est alors donnée par le tableau suivant en fonction du résultat de l'expérience $\omega = (u,v)$:

(u,v)	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3
4	3	3	3	-5	-5	-5
5	3	3	3	-5	-5	-5
6	3	3	3	-5	-5	-5

On constate que $Y(\Omega) = \{-5,1,2,3\}$. Pour tout $y \in Y(\Omega)$, on doit déterminer $Y^{-1}(\{y\})$ pour calculer la probabilité de cet évènement et ainsi la loi de Y. D'après le tableau, on a

$$\begin{aligned} Y^{-1}(\{-5\}) =& \{4,5,6\} \times \{4,5,6\}, \\ Y^{-1}(\{1\}) =& \{1\} \times \{1,2,3,4,5,6\}, \\ Y^{-1}(\{2\}) =& \{2\} \times \{1,2,3,4,5,6\}, \\ Y^{-1}(\{3\}) =& (\{3\} \times \{1,2,3,4,5,6\}) \cup (\{4,5,6\} \times \{1,2,3\}). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que la probabilité sur Ω est uniforme, on obtient le tableau suivant qui résume la loi de Y :

y	-5	1	2	3
$\mathbb{P}_Y(y)$	$\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	$\frac{6}{36} + \frac{9}{36} = \frac{5}{12}$

Comme dans la première partie de l'exercice, une fois la loi de Y déterminée, le reste n'est que calcul...

Correction

On a
$$\mathbb{E}(Y) = -5 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{5}{12} = \frac{1}{2}.$$
Comme $\mathbb{E}(Y) > \mathbb{E}(X)$, on gagne en moyenne plus à la deuxième variante qui est donc plus avantageuse pour le joueur.

Exercice 3.3

Énoncé *On étudie dans cet exercice l'ancêtre du jeu de* craps, *le* hazard. *Le joueur commence par choisir un entier entre 5 et 9 inclus qu'on appelle le* principal. *Le joueur lance alors 2 dés (à six faces non truqués) et fait la somme des résultats. Dans une version simplifiée du jeu, les gains sont les suivants. Si la somme obtenue est le principal, le joueur gagne 1 €. Sinon, si la somme est 2 ou 3, le joueur perd 1 €. Si la somme est 11, le joueur gagne si le principal vaut 7, sinon il perd (1 € dans les deux cas). Si la somme est 12, le joueur gagne si le principal vaut 6 ou 8, sinon il perd (toujours 1 €). Enfin, dans tous les autres cas, il ne se passe rien (ni gain, ni perte).*

Question 1 *On appelle S la variable aléatoire donnant la somme des deux dés. Donner $S(\Omega)$ et la loi de S.*

Question 2 *On appelle X_7 la variable aléatoire donnant le gain (négatif en cas de perte) du joueur quand le principal vaut 7. Donner $X_7(\Omega)$, puis la loi de X_7 et sa fonction de répartition.*

Question 3 *Calculer $\mathbb{E}(X_7)$ et $V(X_7)$.*

Question 4 *On considère X_6 le gain du joueur quand le principal vaut 6. Donner la loi de X_6 et $\mathbb{E}(X_6)$.*

Dans le vrai jeu du hazard, *la situation « neutre » ne correspond pas à un gain nul. En effet, si le joueur n'obtient ni son principal, ni 2, 3, 11 ou 12, on note la somme obtenue et on l'appelle la* chance. *Le joueur doit alors relancer les dés. S'il obtient son principal, il perd 1 € alors que s'il obtient la chance, il gagne 1 €. Sinon, le résultat est nul (ni gain, ni perte).*

Question 5 *On suppose que le joueur a choisit* 7 *comme principal. On note G_7 la variable aléatoire de son gain final. Déterminer la loi de G_7 sachant que le premier tirage est « neutre ».*

Question 6 *Déterminer la loi de G_7 (sans conditionnement).*

La principale difficulté de la première partie cet exercice est la complexité des règles du jeu (qui sont seulement une version simplifiée des règles d'origines).

Il faut donc être très méticuleux dans l'analyse de l'énoncé et dans l'écriture des variables aléatoires identifiées. La second partie de l'énoncé est beaucoup plus complexe.

Correction

On suppose les dés discernables avec un « premier » lancer L_1 et un « second » lancer L_2. On écrit alors l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ et on suppose que la probabilité $\mathbb{P}$ est uniforme (car l'énoncé parle de dés non truqués). On a $|\Omega| = 36$.

Comme presque toujours, le choix discernable s'impose pour pouvoir faire l'hypothèse d'équiprobabilité.

Correction

Pour décrire la variable aléatoire S, on la représente par un tableau avec en ligne le premier lancer et en colonne le second, et dans chaque case la somme. On obtient

$S(L_1, L_2)$		L_2 = 1	2	3	4	5	6
L_1	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

On constate que $S(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Pour calculer la loi de S, on applique la définition $\mathbb{P}(S = s) = \mathbb{P}(S^{-1}(\{s\}))$. On a par exemple

$$S^{-1}(\{4\}) = \{(3, 1), (2, 2), (1, 3)\},$$

et donc $\mathbb{P}(S = 4) = \mathbb{P}(\{(3, 1), (2, 2), (1, 3)\})$. Comme $\mathbb{P}$ est uniforme $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ et donc $\mathbb{P}(S = 4) = \frac{3}{36}$. En répétant ce type de calcul, on obtient la loi de S :

s	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(S = s)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

L'analyse de S suit le schéma classique d'étude d'une variable aléatoire avec la définition formelle de la fonction (ici par un tableau), puis le calcul de l'image de Ω par la variable aléatoire. On illustre ensuite le calcul d'une valeur de la probabilité à partir de la définition formelle (calcul de l'image réciproque). On termine par le tableau donnant la loi complète sans détailler les autres calculs.

Le seul risque dans ce type d'analyse réside dans le choix de l'univers et de la probabilité. Ici, si on ne fait pas l'hypothèse que les dés sont discernables, la probabilité n'est plus uniforme et l'analyse devient plus complexe (mais reste faisable).

Correction

On définit X_7 avec un tableau, comme pour S. Il est clair qu'on a

$X_7(L_1, L_2)$		L_2: 1	2	3	4	5	6
L_1	1	-1	-1	0	0	0	1
	2	-1	0	0	0	1	0
	3	0	0	0	1	0	0
	4	0	0	1	0	0	0
	5	0	1	0	0	0	1
	6	1	0	0	0	1	-1

En effet, on gagne 1 quand la somme est 7 (principal) et on perd 1 quand on obtient 2 ou 3. On gagne 1 quand on obtient 11 (car le principal est 7) et on perd 1 quand on obtient 12 (car le principal n'est ni 6, ni 8). Tous les autres résultats conduisent à un gain nul.

On constate dans le tableau que $X_7(\Omega) = \{-1,0,1\}$. On calcule la loi de X comme celle de S, ce qui donne

x	-1	0	1
$\mathbb{P}(X_7 = x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{2}{9}$

Comme indiqué en introduction, on voit qu'il n'y a ici aucune difficulté de nature probabiliste mais simplement un besoin de précision dans la traduction des règles en gains et pertes. Comme souvent, les tableaux précisant la définition des variables aléatoires sont l'outil de choix.

Notons que comme toujours, on ne justifie pas en détail les calculs conduisant à la loi de X_7 car on a déjà produit cette justification pour la loi de S.

Correction

Le calcul de la fonction de répartition est évident en utilisant la définition, soit $F_{X_7}(x) = \mathbb{P}(X_7 \leq x)$. On obtient

$$F_{X_7}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -1 \\ \frac{1}{9} & \text{si } -1 \leq t < 0 \\ \frac{7}{9} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

On sait que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_7) &= \sum_{x\in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}(X_7 = x),\\ &= -1 \times \frac{1}{9} + 0 \times \frac{6}{9} + 1 \times \frac{2}{9},\\ &= \frac{1}{9}.\end{aligned}$$

On sait aussi que $V(X_7) = \mathbb{E}(X_7^2) - \mathbb{E}(X_7)^2$. On calcule $\mathbb{E}(X_7^2)$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_7^2) &= \sum_{x\in X(\Omega)} x^2 \times \mathbb{P}(X_7 = x),\\ &= (-1)^2 \times \frac{1}{9} + 0^2 \times \frac{6}{9} + 1^2 \times \frac{2}{9},\\ &= \frac{3}{9},\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}V(X_7) &= \frac{3}{9} - \left(\frac{1}{9}\right)^2,\\ &= \frac{26}{81}.\end{aligned}$$

Pour les calculs qui précèdent, il suffit de rappeler une fois chaque définition ou propriété, puis de donner les résultats.

Correction

Pour étudier X_6, on procède de la même façon que pour X_7. Le tableau des valeurs est

$X_6(L_1, L_2)$		L_2 = 1	2	3	4	5	6
L_1	1	-1	-1	0	0	1	0
	2	-1	0	0	1	0	0
	3	0	0	1	0	0	0
	4	0	1	0	0	0	0
	5	1	0	0	0	0	-1
	6	0	0	0	0	-1	1

Le tableau est proche de celui de X_7 avec comme différences principales qu'on gagne pour la somme égale à 6 et qu'on inverse les gains pour les cas particuliers correspondant à 11 et 12.

Correction

On constate que $X_6(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ (par simple lecture du tableau). La loi de X_6 est obtenue comme celle de X_7 en utilisant l'équiprobabilité sur Ω et le tableau. On trouve ainsi

x	-1	0	1
$\mathbb{P}(X_6 = x)$	$\frac{5}{36}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{1}{6}$

On calcule $\mathbb{E}(X_6)$ comme $\mathbb{E}(X_7)$, soit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_6) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}(X_6 = x),\\ &= -1 \times \frac{5}{36} + 0 \times \frac{25}{36} + 1 \times \frac{1}{6},\\ &= \frac{1}{36}.\end{aligned}$$

Comme la démarche est strictement identique pour X_6 et pour X_7, les justifications et les détails donnés pour X_7 n'ont pas besoin d'être répétés pour X_6. On se contente donc de dire qu'on utilise les mêmes techniques et de produire les résultats.

Correction

On s'intéresse donc à la loi de G_7 sachant que le résultat est neutre. On définit d'abord S la variable aléatoire donnant la somme des deux dés lors du premier lancer. La loi de S est facile à obtenir en utilisant le premier tableau qui donne justement les valeurs de S en fonction du lancer. On trouve

s	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(S = s)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Pas de difficulté particulière jusqu'ici, il s'agit encore d'une application directe du tableau introduit au début du corrigé.

Correction

Considérons maintenant G_7 sachant que le résultat est neutre. On note N l'évènement « obtenir un tirage neutre ». Par définition, on a

$$\mathbb{P}(G_7 = g|N) = \frac{\mathbb{P}(\{G_7 = g\} \cap N)}{\mathbb{P}(S = s)}$$

Or, N est réalisé quand la variable S pour le premier tirage vaut 4, 5, 6, 8, 9 ou 10 (et seulement dans ces situations). On peut donc écrire l'évènement N « obtenir un tirage neutre » comme l'union disjointe des évènements

$\{S=4\}$, $\{S=5\}$, ..., $\{S=10\}$, c'est-à-dire

$$N = \{S=4\} \cup \{S=5\} \cup \{S=6\} \cup \{S=8\} \cup \{S=9\} \cup \{S=10\},$$

et donc

$$\{G_7 = g\} \cap N = (\{G_7 = g\} \cap \{S=4\}) \cup \ldots \cup (\{G_7 = g\} \cap \{S=10\}),$$

avec une union disjointe. Donc pour calculer $\mathbb{P}(\{G_7 = g\} \cap N)$, il suffit de calculer les $\mathbb{P}(\{G_7 = g\} \cap \{S=s\})$ pour s dans $\{4,5,6,8,9,10\}$.

La difficulté réside ici dans le fait que l'évènement N ne permet pas directement d'obtenir le comportant de G_7. En effet, selon la raison qui cause N ($S=4$ ou $S=5$, par exemple), la probabilité de retomber sur la chance n'est pas la même. Il est donc indispensable de décomposer N en des évènements plus élémentaires qui permettent un calcul plus simple de G_7 sachant ceux-ci.

Correction

Par définition, on a

$$\mathbb{P}(\{G_7 = g\} \cap \{S=s\}) = \mathbb{P}(G_7 = g|S=s)\mathbb{P}(S=s).$$

D'après les règles du jeu, on gagne 1 € si le second tirage donne le même résultat que le premier. Or le second tirage S_2 a la même loi que le premier S. Donc $\mathbb{P}(G_7 = 1|S=s)$ est donné par la table suivante

s	4	5	6	8	9	10
$\mathbb{P}(G_7 = 1\|S=s)$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$

D'autre part, on perd 1 € si le second tirage est le principal. Pour tout s, on a donc $\mathbb{P}(G_7 = -1|S=s) = \frac{6}{36}$ car le principal est ici 7.

La deuxième difficulté de cette partie de l'énoncé est qu'on doit de nouveau appliquer la définition des probabilités conditionnelles. En effet, le découpage de l'évènement de conditionnement N ne peut se faire qu'au niveau de l'intersection entre $G_7 = g$ et N. En effet, on ne peut rien dire de particulier en général sur $\mathbb{P}(A|B \cup C)$. On pourrait croire que si B et C sont disjoints, un lien simple existe entre $\mathbb{P}(A|B \cup C)$ d'une part et $\mathbb{P}(A|B)$ et $\mathbb{P}(A|C)$ d'autre part, mais ce n'est pas le cas. Cela est lié au fait que si $B \cap C = \emptyset$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A|B \cup C) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap (B \cup C))}{\mathbb{P}(B \cup C)},\\ &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)},\end{aligned}$$

ce qui ne peut pas être relié simplement à

$$\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} + \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)}.$$

Au contraire, le calcul de $\mathbb{P}(\{G_7 = g\} \cap \{S = s\})$ ne peut pas se faire de façon directe car les règles du jeu ne donnent que $\mathbb{P}(G_7 = g | S = s)$.

Notons en outre que le calcul de ces probabilités nécessite de bien préciser que le second tirage a la même loi que le premier.

Correction

En combinant avec la loi de S, on a

s	4	5	6	8	9	10
$\mathbb{P}(\{G_7 = 1\} \cap \{S = s\})$	$\left(\frac{3}{36}\right)^2$	$\left(\frac{4}{36}\right)^2$	$\left(\frac{5}{36}\right)^2$	$\left(\frac{5}{36}\right)^2$	$\left(\frac{4}{36}\right)^2$	$\left(\frac{3}{36}\right)^2$

et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{G_7 = 1 \cap N\}) &= \left(\frac{3}{36}\right)^2 + \left(\frac{4}{36}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{3}{36}\right)^2, \\ &= \frac{100}{36^2},\end{aligned}$$

De même on a

s	4	5	6	8	9	10
$\mathbb{P}(\{G_7 = -1\} \cap \{S = s\})$	$\frac{6}{36}\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}\frac{3}{36}$

et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{G_7 = -1\} \cap N) &= \frac{6}{36} \times \left(\frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \ldots + \frac{3}{36}\right), \\ &= \frac{144}{36^2}.\end{aligned}$$

De plus, on peut calculer $\mathbb{P}(N)$, en utilisant de la décomposition de N en une union de $\{S = s\}$. On trouve ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N) &= \mathbb{P}(S = 4) + \ldots + \mathbb{P}(S = 10), \\ &= \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \ldots + \frac{3}{36} \\ &= \frac{24}{36}.\end{aligned}$$

Comme la seule autre valeur de G_7 est 0, on a

$$\mathbb{P}(N) = \mathbb{P}(\{G_7 = -1\} \cap N) + \mathbb{P}(\{G_7 = 0\} \cap N) + \mathbb{P}(\{G_7 = 1\} \cap N),$$
$$\frac{24}{36} = \frac{144}{36^2} + \mathbb{P}(\{G_7 = 0\} \cap N) + \frac{100}{36^2},$$

et donc $\mathbb{P}(\{G_7 = 0\} \cap N) = \frac{620}{36^2}$.

On peut alors calculer $\mathbb{P}(G_7 = g|N)$ par simple division, ce qui donne

g	-1	0	1
$\mathbb{P}(G_7 = g\|N)$	$\frac{25}{216}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{155}{216}$

Cette partie n'introduit pas de difficultés supplémentaires, mais nécessite de nouveau de passer d'une vision « intersection » à une vision « sachant que » pour la variable G_7 et l'évènement N.

Correction

On applique les probabilités totales à $\{G_7 = g\}$ et N, ce qui donne

$$\mathbb{P}(G_7 = g) = \mathbb{P}(\{G_7 = g\} \cap N) + \mathbb{P}(\{G_7 = g\} \cap \overline{N}).$$

D'après les règles du jeu $\mathbb{P}(\{G_7 = 0\} \cap \overline{N}) = 0$ car si on n'est pas dans la situation neutre, on a directement gagné ou perdu quelque chose.

D'autre par $\mathbb{P}(\{G_7 = g\} \cap \overline{N})$ pour $g \neq 0$ s'obtient par simple comptage, comme dans le calcul de X_7. On a ainsi $\mathbb{P}(\{G_7 = 1\} \cap \overline{N}) = \frac{2}{9}$ et $\mathbb{P}(\{G_7 = -1\} \cap \overline{N}) = \frac{1}{9}$). On en déduit la loi de G_7, donnée par

g	-1	0	1
$\mathbb{P}(G_7 = g)$	$\frac{288}{36^2}$	$\frac{620}{36^2}$	$\frac{388}{36^2}$

3.2 Lois discrètes classiques

Exercice 3.4

Énoncé *Pour améliorer la sûreté de fonctionnement d'un serveur informatique, on envisage d'introduire de la redondance, c'est-à-dire d'avoir plusieurs exemplaires des composants importants. On peut réaliser les opérations suivantes :*

— *on utilise trois alimentations de 300 Watts chacune : le serveur peut continuer à fonctionner avec une alimentation en panne car il consomme au maximum 500 Watts.*

— *on place les quatre disques durs en configuration RAID 5 : le serveur peut continuer à fonctionner avec un disque dur en panne.*

On suppose que la probabilité de panne d'une alimentation est p et que celle d'une panne de disque dur est q. On suppose en outre que tous les composants sont indépendants.

Question 1 *Soit un serveur avec alimentations redondantes : calculer la probabilité de panne du serveur en supposant qu'aucun autre composant que les alimentations ne peut tomber en panne.*

Question 2 *Soit un serveur avec disques durs RAID 5 : calculer la probabilité de panne du serveur en supposant qu'aucun autre composant que les disques dur ne peut tomber en panne.*

Question 3 *Si $p = q$, quelle solution de redondance est la plus intéressante ?*

Cet exercice consiste avant tout en la modélisation d'un problème réel au moyen d'outils probabilistes classiques. Il faut donc reconnaître dans l'énoncé les hypothèses qui permettent de se ramener à des modèles connus.

Correction

Comme un composant possède ici deux états (en panne ou pas), on considère cet état comme une variable de Bernoulli, l'état de panne correspondant au « succès » de la variable.

Donc, l'état de l'alimentation i est représenté par une variable A_i distribuée selon $B(p)$ une variable aléatoire Bernoulli qui vaut 1 si l'alimentation est en panne.

Cette modélisation est très fréquente et très classique. À chaque fois qu'on rencontre une grandeur aléatoire qui peut prendre deux valeurs, on est en fait en présence d'une variable de Bernoulli. La valeur à représenter par 1 dépend de ce qu'on veut faire dans la suite. Ici, on doit compter le nombre de composants en panne pour savoir si l'ordinateur continue de fonctionner. Il est donc naturel de représenter par 1 la panne plutôt que le bon fonctionnement.

Correction

L'alimentation globale est constituée de trois alimentations A_1, A_2 et A_3. Comme les alimentations sont des variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p, le nombre d'alimentation en panne, qui est la somme $A_1 + A_2 + A_3$ est une variable de loi Binomiale $B(3, p)$.

De nouveau, nous utilisons ici une modélisation très classique. Pour justifier l'utilisation d'une loi Binomiale, il faut rappeler les propriétés importantes suivantes : on compte les succès de variables de Bernoulli *indépendantes* et de *même paramètre*. Si les variables ne sont pas indépendantes ou si elles ont des paramètres différents, le résultat n'est pas une loi Binomiale. Notons aussi que compter les succès ou faire la somme des variables est exactement la même chose et qu'on peut donc utiliser la justification la plus adaptée au contexte.

Correction

Le serveur est en panne si deux au moins des alimentations sont en panne. On note A l'évènement « panne de l'alimentation globale ». On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A_1 + A_2 + A_3 \geq 2),\\ &= \mathbb{P}(A_1 + A_2 + A_3 = 2) + \mathbb{P}(A_1 + A_2 + A_3 = 3),\\ &= C_3^2 p^2(1-p) + C_3^3 p^3,\\ &= p^2(3-2p),\end{aligned}$$

en utilisant les propriétés de la loi Binomiale.

La deuxième question est exactement la même que la première mais avec des paramètres numériques légèrement différents...

Correction

Comme pour les alimentations, on modélise les disques durs par des variables D_j de Bernoulli $B(q)$, indépendantes. Le nombre de disques en panne est alors une variable de loi Binomiale $B(4,q)$. Le serveur est en panne si au moins deux des disques sont en panne, l'évènement correspondant D étant de probabilité

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{4} D_j \geq 2\right),\\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{4} D_j = 2\right) + \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{4} D_j = 3\right) + \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{4} D_j = 4\right)\\ &= C_4^2 q^2(1-q)^2 + C_4^3 q^3(1-q) + C_4^4 q^4,\\ &= q^2(6(1-q)^2 + 4q(1-q) + q^2),\\ &= q^2(3q^2 - 8q + 6).\end{aligned}$$

Pour choisir la meilleure solution, on compare les probabilités de panne en supposant que $p = q$. On a ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(D) &= p^2(3-2p) - p^2(3p^2 - 8p + 6),\\ &= p^2(-3p^2 + 6p - 3).\end{aligned}$$

Le signe de cette différence est alors celui de $f(p) = -3p^2 + 6p - 3$. La dérivée de f est $f'(p) = 6(1-p)$ qui s'annule en $p = 1$ et qui est donc positive sur l'intervalle $[0,1]$. La fonction est donc croissante sur cet intervalle. Or, $f(1) = 0$ (et $f(0) = -3$. Donc, sur l'intervalle $[0,1]$,

$f(p) \leq 0$. La probabilité de défaillance des alimentations est donc toujours inférieure à celle des disques durs et il est donc plus intéressante d'utiliser une redondance sur les alimentations.

On pourrait considérer que l'approche choisie pour évaluer l'intérêt de la redondance est un peu naïve. En effet, un ordinateur classique comprend nécessairement une alimentation et un stockage pérenne de type disque dur. De ce fait, on devrait normalement étudier l'ordinateur comme un ensemble comportant un sous-système redondant (par exemple les disques durs) et un sous-système non redondant (ici l'alimentation), puis calculer la probabilité de panne et comparer les deux solutions.

Il s'avère en fait que l'approche proposée dans l'exercice donne un résultat identique à celui de l'approche plus complexe. Considérons le cas d'un ordinateur avec une alimentation redondante et un unique disque dur. On s'intéresse à l'évènement « l'ordinateur ne tombe pas en panne », ce qui s'écrit $\overline{A} \cap \overline{D}$ avec les notations de la correction. En supposant les sous-systèmes indépendants, on a

$$\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{D}) = \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(\overline{D}) = (1 - \mathbb{P}(A))(1 - \mathbb{P}(D)).$$

En utilisant les résultats de la correction pour A et les hypothèses pour D, on a donc

$$\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{D}) = (1 - p^2(3 - 2p))(1 - q).$$

Un raisonnement similaire conduit la probabilité suivant dans le cas d'un serveur aux disques durs redondants et à l'alimentation unique :

$$\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{D}) = (1 - p)(1 - q^2(3q^2 - 8q + 6)).$$

Si on suppose maintenant que $p = q$, on voit apparaître dans les deux expressions un facteur $(1 - p)$ commun qu'on peut donc supprimer dans l'analyse. On se retrouve ainsi à comparer $\mathbb{P}(\overline{A})$ et $\mathbb{P}(\overline{D})$ dans le cas de redondance pour les deux sous-systèmes. Or, il s'agit de la comparaison des probabilités des complémentaires des évènements étudiés dans la correction. On obtient donc exactement les mêmes conclusion que dans cette correction : il est plus intéressant de rendre les alimentations redondantes.

Exercice 3.5

Énoncé *Un magasin spécialisé reçoit en moyenne 4 clients par jour, le nombre de clients étant distribué selon une loi de Poisson. Calculer la probabilité que le magasin soit visité le mercredi par :*

Question 1 *aucun client ;*

Question 2 *5 clients ;*

Question 3 *au moins 6 clients.*

Correction

On note C la variable aléatoire donnant le nombre de clients reçus par jour dans le magasin. Par hypothèse, C est distribuée selon une loi de Poisson de paramètre λ et telle que $\mathbb{E}(C) = 4$. Or, on sait que si $C \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\mathbb{E}(C) = \lambda$, donc $\lambda = 4$.

La phase de modélisation traditionnelle consiste ici à traduire les hypothèses de l'énoncé exprimées en français en hypothèses mathématiques. Ici, l'énoncé fait une hypothèse indirecte sur le paramètre de la loi de Poisson en indiquant l'espérance de la variable. Une simple phrase de justification permet de transformer cette hypothèse sur l'espérance en une hypothèse sur la valeur de λ. Le reste l'exercice est alors très simple et consiste essentiellement en une application des propriétés élémentaires de la loi de Poisson.

Correction

Comme $C \sim \mathcal{P}(4)$, on a

$$\mathbb{P}(C = 0) = e^{-4}\frac{4^0}{0!} = e^{-4} \simeq 0.0183.$$

En appliquant de nouveau la formule de la loi de Poisson, on a

$$\mathbb{P}(C = 5) = e^{-4}\frac{4^5}{5!} \simeq 0.156.$$

Enfin, pour calculer $\mathbb{P}(C \geq 6)$, on note que

$$\overline{\{C \geq 6\}} = \{C \leq 5\} = \bigcup_{k=0}^{5}\{C = k\},$$

car C prend seulement des valeurs entières. On a donc

$$\mathbb{P}(C \geq 6) = 1 - \sum_{k=0}^{5}\mathbb{P}(C = k) = 1 - e^{-4}\sum_{k=0}^{5}\frac{4^k}{k!} \simeq 0.215.$$

Seule la dernière question demande un peu de réflexion, puisqu'il faut écrire l'évènement $\{C \geq 6\}$ en terme d'évènements de la forme $\{C = k\}$ qui sont les seuls dont on connaît les probabilités (grâce à la loi de la variable C). Comme la variable aléatoire est discrète, un évènement de la forme $\{C \in A\}$ s'écrit sous forme de l'union disjointe des évènements $\{C = a\}$ pour toutes les valeurs $a \in A$. Pour éviter d'avoir à écrire une somme infinie pour $\{C \geq 6\}$, on utilise le complémentaire de cet évènement, ce qui donne la correction proposée.

3.3 Variable fonction d'une autre variable

Exercice 3.6

Énoncé *On suppose que la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'ensemble*

$$X(\Omega) = \{-3, -2, 1, 4\}.$$

Question 1 *Donner la loi de X.*

Question 2 *Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.*

On définit la variable aléatoire $Y = 2X + 1$.

Question 3 *Donner $Y(\Omega)$ et la loi de Y.*

Question 4 *Calculer $\mathbb{E}(Y)$ de deux façons différentes.*

Reprendre les deux questions précédentes pour la variable $Z = (X + 1)^2$.

Correction

Par hypothèse, la loi de X est uniforme et la probabilité d'avoir $X = x$ pour tout élément x de $X(\Omega)$ est donc constante. De ce fait, cette probabilité est de $\frac{1}{|X(\Omega)|} = \frac{1}{4}$. La loi de X est donc résumée par le tableau suivant

x	-3	-2	1	4
$\mathbb{P}_X(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

On applique ici directement les résultats de cours sur la loi uniforme pour une variable aléatoire discrète (à ne pas confondre avec le cas continu).

Correction

L'espérance de X est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}_X(x), \\
&= \frac{1}{4} \sum_{x \in X(\Omega)} x, \\
&= \frac{1}{4}(-3 - 2 + 1 + 4), \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Il faut toujours mentionner au moins une fois la formule qui définit l'espérance pour pouvoir l'utiliser dans une solution.

Correction

Pour calculer la variance, on utilise la formule $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$ dont le deuxième terme est nul. On sait aussi que pour toute fonction ϕ,

$$\mathbb{E}(\phi(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \phi(x)\mathbb{P}_X(x).$$

On a donc

$$\begin{aligned} V(X) &= \mathbb{E}(X^2), \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 \mathbb{P}_X(x), \\ &= \frac{1}{4}((-3)^2 + (-2)^2 + 1^2 + 4^2), \\ &= 7. \end{aligned}$$

Le rappel de la propriété générale qui permet de calculer $\mathbb{E}(\phi(X))$ n'est pas nécessaire pour le calcul de $\mathbb{E}(X^2)$ mais il est conseillé car il permet de ne pas faire l'erreur fréquente qui consiste à mettre les probabilités au carré plutôt que les valeurs de x.

Correction

Considérons $Y = 2X + 1$. Le tableau suivant donne la valeur de Y pour toutes les valeurs possibles de X :

x	-3	-2	1	4
$2x+1$	-5	-3	3	9

On a donc $Y(\Omega) = \{5, -3, 3, 9\}$.

Comme Y est une variable discrète, sa loi est déterminée par les probabilités $\mathbb{P}_Y(y)$ pour tout $y \in Y(\Omega)$. Or, $\mathbb{P}_Y(y) = \mathbb{P}_X\left(\frac{y-1}{2}\right)$ car $Y = 2X + 1$ et donc $X = \frac{Y-1}{2}$. De plus, pour tout $y \in \Omega$, $\frac{y-1}{2}$ puisqu'on a dans $Y(\Omega)$ les images par Y des valeurs de $X(\Omega)$. De ce fait, pour tout $y \in \Omega$, $\mathbb{P}_X\left(\frac{y-1}{2}\right) = \frac{1}{4}$. Donc la loi de Y est la loi uniforme sur $Y(\Omega)$.

On applique ci-dessus les propriétés classiques pour la loi d'une variable aléatoire obtenue comme fonction d'une autre variable, $Y = f(X)$. On sait en effet que pour sous-ensemble A de $Y(\Omega)$,

$$\mathbb{P}_Y(A) = \mathbb{P}_X(Y^{-1}(A)),$$

où Y^{-1} est défini par

$$Y^{-1}(A) = \{x \in X(\Omega) \mid f(x) \in A\}.$$

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète qui nous intéresse ici, il suffit de considérer les ensembles A réduits à une seule valeur, ce qui conduit à la solution proposée. Notons que celle-ci est simple car la transformation $Y = 2X + 1$ est *bijective*. La variable Z sera légèrement plus complexe à étudier.

Correction

Pour calculer $\mathbb{E}(Y)$, on peut appliquer en fait trois résultats différents. On sait que pour tout α et β déterministes, et toute variable aléatoire X, $\mathbb{E}(\alpha X + \beta) = \alpha\mathbb{E}(X) + \beta$. Ici on a donc

$$\mathbb{E}(Y) = 2\mathbb{E}(X) + 1 = 1.$$

On peut aussi appliquer le résultat rappelé ci-dessus à la fonction $\phi(x) = 2x + 1$. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(\phi(X)), \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} \phi(x)\mathbb{P}_X(x), \\
&= \frac{1}{4}\sum_{x\in X(\Omega)} (2x+1), \\
&= \frac{1}{4}(-5-3+3+9), \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Enfin, on peut appliquer la définition de l'espérance à Y, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{y\in Y(\Omega)} y\mathbb{P}_Y(y), \\
&= \frac{1}{4}\sum_{y\in Y(\Omega)} y, \\
&= \frac{1}{4}(-5-3+3+9), \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Quand on demande d'obtenir une espérance par deux méthodes différentes, c'est en général qu'on veut que le calcul soit réalisé une fois avec la définition de l'espérance (troisième calcul ci-dessus) et une autre fois en s'appuyant sur une propriété classique de l'espérance comme sa linéarité (utilisée dans le premier calcul) ou la formule pour $\mathbb{E}(\phi(X))$, appliquée très régulièrement (deuxième calcul dans la correction).

Correction

On étudie maintenant $Z = (X+1)^2$. On calcule $Z(\Omega)$ au moyen du tableau suivant qui donne les valeurs de Z en fonction des valeurs de X :

x	-3	-2	1	4
$(x+1)^2$	4	1	4	25

On constate que $Z(\Omega) = \{1, 4, 25\}$. Pour calculer la loi de Z on doit déterminer $Z^{-1}(z)$ pour tout $z \in Z(\Omega)$. Le tableau suivant résume ce calcul et la loi de Z obtenue ainsi, en appliquant la propriété $\mathbb{P}_Z(z) = \mathbb{P}_X(Z^{-1}(z))$:

z	1	4	25
$Z^{-1}(z)$	$\{-2\}$	$\{-3, 1\}$	$\{4\}$
$\mathbb{P}_Z(z) = \mathbb{P}_X(Z^{-1}(z))$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

On utilise ici le fait que la loi de X sur $X(\Omega)$ est uniforme et donc que la probabilité d'un ensemble A est donnée par le ratio entre le cardinal de A et celui de $X(\Omega)$. On remarque que le calcul est légèrement plus complexe que celui de Y car la fonction $x \mapsto (x+1)^2$ n'est pas injective : les deux valeurs distinctes -3 et 1 que peut prendre X sont toutes deux transformées en la valeur 4 pour Z. De ce fait, la loi de Z sur $Z(\Omega)$ n'est pas uniforme.

Correction

Pour calculer $\mathbb{E}(Z)$, on peut appliquer le résultat classique à $Z = \phi(X)$ avec $\phi(x) = (x+1)^2$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \mathbb{E}(\phi(X)), \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \phi(x) \mathbb{P}_X(x), \\
&= \frac{1}{4} \sum_{x \in X(\Omega)} (x+1)^2, \\
&= \frac{1}{4}(4 + 1 + 4 + 25), \\
&= \frac{17}{2}.
\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser la définition de l'espérance, ce qui donne

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= \sum_{z\in Z(\Omega)} z\mathbb{P}_Z(z),\\ &= \frac{1}{4}\times 1+\frac{1}{2}\times 4+\frac{1}{4}\times 25,\\ &= \frac{17}{2}.\end{aligned}$$

Contrairement au cas de la variable Y, les deux approches utilisées ci-dessus conduisent à des calculs légèrement différents. Dans le deuxième calcul, on a déjà « factorisé » les valeurs identiques de Z, c'est pourquoi la probabilité de 4 est de $\frac{1}{2}$. Dans le premier cas, on travaille du point de vue de X et tous les probabilités sont de $\frac{1}{2}$. Mais comme on transforme les valeurs de X en valeurs de Z, on obtient deux fois la valeur 4, ce qui conduit bien entendu au même résultat final.

3.4 Couples de variables aléatoires

Exercice 3.7

Énoncé *Soit un couple de variables aléatoires (X, Y) tel que $X(\Omega) = \{-2, 0, 1\}$ et $Y(\Omega) = \{-1, 1, 2\}$ dont la loi jointe est donnée par le tableau suivant :*

$\mathbb{P}(X = x, Y = y)$	$y = -1$	$y = 1$	$y = 2$
$x = -2$	0,2	0,2	α
$x = 0$	0,1	0,1	0,05
$x = 1$	0,2	0	0,1

Question 1 *Donner l'unique valeur possible pour α en justifiant brièvement la réponse.*

Question 2 *Calculer les lois marginales de X et de Y.*

Question 3 *Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.*

Question 4 *Calculer la loi conditionnelle de X sachant $Y = 1$. En déduire $E(X|Y = 1)$.*

Question 5 *Calculer l'espérance conditionnelle de X sachant que $Y \neq 2$.*

Question 6 *Calculer $\mathbb{E}(XY)$ et en déduire $Cov(X,Y)$.*

Question 7 *On pose $Z = X + Y$. Calculer la loi de Z, puis $\mathbb{E}(Z)$ et $V(Z)$.*

Correction

On sait que $\mathbb{P}(X \in X(\Omega), Y \in Y(\Omega)) = 1$ et que

$$\mathbb{P}(X \in X(\Omega), Y \in Y(\Omega)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

Donc la somme des probabilités contenues dans le tableau doit être égale à 1. On constate que la somme est ici $0{,}95 + \alpha$. Donc $\alpha = 0{,}05$.

La justification proposée est assez détaillée. On peut se contenter de dire que la somme des probabilités doit être égale à 1, puisque c'est une propriété majeure des tableaux utilisés pour donner les lois de couple de variables aléatoires discrètes.

Correction

La loi marginale de X est donnée par

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

Un simple calcul donne les résultats résumés dans le tableau suivant

x	-2	0	1
$\mathbb{P}(X = x)$	0,45	0,25	0,3

De la même façon, on obtient la loi de Y donnée par

y	-1	1	2
$\mathbb{P}(Y = y)$	0,5	0,3	0,2

On se contente ici de justifier les calculs dans un des deux cas, par symétrie. Il est utile de vérifier que la somme des probabilités de la loi obtenue pour chaque variable est bien 1.

Correction

Les variables X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout x et y, $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y)$. Or, on remarque dans le tableau que $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 0$, alors que $\mathbb{P}(X = 1) \times \mathbb{P}(Y = 1) = 0{,}3 \times 0{,}3 \neq 0$. Les deux variables ne sont donc pas indépendantes.

Pour les questions d'indépendance, on doit toujours rappeler la définition puis essayer de l'appliquer. Quand on cherche comme ici à montrer que les variables ne sont pas indépendantes, il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur pour chaque variable telles que la probabilité du couple soit différente du produit des probabilités de chaque variable. Si on cherche à montrer l'indépendance, on doit au contraire vérifier que toutes les paires de valeurs satisfont l'égalité demandée.

Correction

On utilise la définition de la loi conditionnelle, $\mathbb{P}(X = x|Y = 1) = \frac{\mathbb{P}(X=x,Y=1)}{\mathbb{P}(Y=1)}$, ce qui conduit immédiatement à la loi résumée dans le tableau suivant

x	-2	0	1
$\mathbb{P}(X = x\|Y = 1)$	$\frac{0{,}2}{0{,}3} = \frac{2}{3}$	$\frac{0{,}1}{0{,}3} = \frac{1}{3}$	$\frac{0}{0{,}3} = 0$

L'espérance conditionnelle est obtenue en appliquant la définition, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X|Y = 1) &= \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x|Y = 1),\\ &= -2 \times \frac{2}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times 0,\\ &= -\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

On se contente ici d'appliquer les définitions et de faire des calculs élémentaires. La question suivante est légèrement plus complexe puisqu'il faut considérer un conditionnement qui ne s'exprime pas sous la forme $Y = y$.

Correction

On doit d'abord calculer $\mathbb{P}(X = x|Y \neq 2) = \frac{\mathbb{P}(X=x,Y\neq 2)}{\mathbb{P}(Y\neq 2)}$. Or, $\{Y \neq 2\} = \{Y = -1\} \cup \{Y = 1\}$, avec une union disjointe. Donc

$$\mathbb{P}(X = x, Y \neq 2) = \mathbb{P}(X = x, Y = -1) + \mathbb{P}(X = x, Y = 1),$$

ainsi que $\mathbb{P}(Y \neq 2) = \mathbb{P}(Y = -1) + \mathbb{P}(Y = 1)$, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X = x|Y \neq 2) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = -1) + \mathbb{P}(X = x, Y = 1)}{\mathbb{P}(Y = -1) + \mathbb{P}(Y = 1)}.$$

En appliquant cette formule, on obtient la loi conditionnelle résumée dans le tableau suivant

x	-2	0	1
$\mathbb{P}(X = x\|Y \neq 2)$	$\frac{0{,}4}{0{,}8} = \frac{1}{2}$	$\frac{0{,}2}{0{,}8} = \frac{1}{4}$	$\frac{0{,}2}{0{,}8} = \frac{1}{4}$

On en déduit l'espérance conditionnelle souhaitée par le calcul suivant

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X|Y \neq 2) &= \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x|Y \neq 2),\\ &= -2 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4},\\ &= -\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Comme dans l'exercice 2.1, la difficulté de l'analyse vient essentiellement de la tentation d'inventer des propriétés fausses en « généralisant » des propriétés vraies. En particulier, ici, on pourrait être tenter de croire que la probabilité $\mathbb{P}(X = x|Y \neq 2)$ est égale à la probabilité $1 - \mathbb{P}(X = x|Y = 2)$. Or, c'est en général faux. Dans le cas présent, si on considère par exemple $x = -2$, on a

$$\begin{aligned}1 - \mathbb{P}(X = -2|Y = 2) &= 1 - \frac{\mathbb{P}(X = -2, Y = 2)}{\mathbb{P}(Y = 2)},\\ &= 1 - \frac{0{,}05}{0{,}2},\\ &= \frac{3}{4},\end{aligned}$$

alors que $\mathbb{P}(X = -2|Y \neq 2) = \frac{1}{2}$. En fait, on a bien

$$1 - \mathbb{P}(X = x|Y = 2) = \mathbb{P}(X \neq x|Y = 2),$$

mais ce n'est pas utile pour calculer $\mathbb{P}(X = -2|Y \neq 2)$!

Correction

On calcule $\mathbb{E}(XY)$ en appliquant la propriété classique : pour toute fonction ϕ, on a

$$\mathbb{E}(\phi(X,Y)) = \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} \phi(x,y)\mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

Le tableau suivant donne les calculs intermédiaires $xy\mathbb{P}(X = x, Y = y)$:

$\mathbb{P}(X = x, Y = y)$	$y = -1$	$y = 1$	$y = 2$
$x = -2$	$0{,}2 \times 2 = 0{,}4$	$0{,}2 \times -2 = -0{,}4$	$0{,}05 \times -4 = -0{,}2$
$x = 0$	$0{,}1 \times 0 = 0$	$0{,}1 \times 0 = 0$	$0{,}05 \times 0 = 0$
$x = 1$	$0{,}2 \times -1 = -0{,}2$	$0 \times 1 = 0$	$0{,}1 \times 2 = 0{,}2$

On obtient ainsi $\mathbb{E}(XY) = -0{,}2$.

Comme dans la plupart des questions de calcul, il est important de rappeler la définition de ce qu'on calcule et les propriétés utilisées, comme nous l'avons fait ci-dessus. On procède de la même façon pour la suite de la question, en rappelant la définition de la covariance et de l'espérance d'une variable seule.

Correction

On sait que $Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. On calcule donc $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$ en utilisant les définitions de ces espérances :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)\\ &= -2 \times 0{,}45 + 0 \times 0{,}25 + 1 \times 0{,}3\\ &= -0{,}6.\end{aligned}$$

De la même façon

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= -1 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}3 + 2 \times 0{,}2\\ &= 0{,}2.\end{aligned}$$

On obtient finalement $Cov(X,Y) = -0{,}2 - (-0{,}6) \times 0{,}2 = -0{,}08$.

Correction

Étudions maintenant $Z = X + Y$. Le tableau suivant donne les valeurs prises par Z en fonction de celles de X et Y :

$z = x + y$	$y = -1$	$y = 1$	$y = 2$
$x = -2$	-3	-1	0
$x = 0$	-1	1	2
$x = 1$	0	2	3

On a donc $Z(\Omega) = \{-3, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Pour calculer la loi de $Z = f(X,Y)$, on doit déterminer $f^{-1}(z)$ pour tout $z \in Z(\Omega)$ puis calculer la probabilité de $f^{-1}(z)$ à partir de la loi jointe de X et Y, en utilisant la propriété $\mathbb{P}(Z = z) = \mathbb{P}((X,Y) \in f^{-1}(z))$. On obtient les résultats suivants :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z = -3) &= \mathbb{P}(X = -2, Y = -1) = 0{,}2\\ \mathbb{P}(Z = -1) &= \mathbb{P}((X,Y) \in \{(-2, 1), (0, -1)\}) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3\\ \mathbb{P}(Z = 0) &= \mathbb{P}((X,Y) \in \{(-2, 0), (1, -1)\}) = 0{,}05 + 0{,}2 = 0{,}25\\ \mathbb{P}(Z = 1) &= \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = 0{,}1\\ \mathbb{P}(Z = 2) &= \mathbb{P}((X,Y) \in \{(0, 2), (1, 1)\}) = 0{,}05 + 0 = 0{,}05\\ \mathbb{P}(Z = 3) &= \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) = 0{,}1\end{aligned}$$

On utilise la propriété classique qui caractérise la loi d'une variable définie comme fonction d'autres variables à partir de la fonction réciproque (ici f^{-1}) et de la loi jointe des autres variables.

Correction

Comme $Z = X + Y$ et que l'espérance est linéaire, on a

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = -0{,}6 + 0{,}2 = -0{,}4.$$

De plus, on sait que

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y).$$

On calcule donc les variances de X et Y. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= (-2)^2 \times 0{,}45 + 0^2 \times 0{,}25 + 1^2 \times 0{,}3 \\ &= 2{,}1,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y^2) &= (-1)^2 \times 0{,}5 + 1^2 \times 0{,}3 + 2^2 \times 0{,}2 \\ &= 1.6.\end{aligned}$$

Donc $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 1{,}74$ et $V(Y) = 1{,}56$. On obtient finalement

$$V(Z) = 1{,}74 + 1{,}56 + 2 \times (-0{,}08) = 3{,}14.$$

Notons que l'espérance et la variance de Z qui sont obtenues ici au moyen de propriétés de ces deux grandeurs pourraient aussi être calculées directement à partir de la loi de Z. Quelle que soit l'option choisie, il faut rappeler les propriétés et définitions utilisées.

Chapitre 4

Variables aléatoires absolument continues

4.1 Densité, fonction de répartition et moments

Exercice 4.1

Énoncé *Soit la fonction f définie par*

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \textit{si } x \in [0,1] \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Question 1 *À quelles conditions sur a et b la fonction f est-elle la densité d'une variable aléatoire continue ?*

Question 2 *On suppose que a et b vérifient les conditions déterminées à la question précédente. Soit X une variable aléatoire de densité f. On suppose que $\mathbb{P}(X \geq 0{,}5) = \frac{7}{8}$. En déduire a et b.*

Question 3 *Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$ en utilisant les valeurs de a et b obtenues à la question précédente.*

Correction

Pour que f soit une densité, il faut que pour tout x, $f(x) \geq 0$ et que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. On commence par la première condition. Comme f est nulle en dehors de l'intervalle $[0,1]$, il suffit de considérer le cas $x \in [0,1]$ pour lequel on doit avoir $ax^2 + b \geq 0$.

Pour les deux conditions, on peut en général se focaliser uniquement sur les intervalles pour lesquels la fonction proposée n'est pas nulle.

Correction

On remarque que $f(0) = b$, et il faut donc que $b \geq 0$. Si $a = 0$, il n'y a pas d'autre condition nécessaire pour assurer la positivité.

La dérivée de f est donnée par $f'(x) = 2ax$. Sur l'intervalle [0,1], le signe de f' est donc celui de a. Si $a > 0$, f est croissante sur [0,1] et on a donc $f(x) \geq b$ pour tout $x \in [0,1]$. De ce fait, la condition $b \geq 0$ est encore suffisante pour assurer $f(x) \geq 0$. Si $a < 0$, f est décroissante sur [0,1], et donc a donc $f(x) \geq f(1) = a + b$ pour tout $x \in [0,1]$. On doit donc avoir $a + b \geq 0$.

En résumé si $b \geq 0$ et si $a \geq -b$, alors f est positive (le cas $a \geq -b$ inclus en particulier le cas $a \geq 0$).

Calculons maintenant $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. D'après les propriétés classiques de l'intégrale, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{\infty} f(x)dx.$$

Comme f est nulle en dehors de [0,1], on a donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{1} f(x)dx.$$

Il faut toujours justifier (brièvement) la réduction de l'intervalle d'intégration. On peut cependant se contenter d'écrire directement la deuxième égalité, avec la justification qui la précède.

Correction

La fonction $x \mapsto ax^2 + b$ admet comme primitive possible la fonction $x \mapsto \frac{a}{3}x^3 + bx$. On a donc

$$\int_0^1 ax^2 + b\,dx = \left[\frac{a}{3}x^3 + bx\right]_0^1 = \frac{a}{3} + b.$$

On doit donc avoir $\frac{a}{3} + b = 1$ (en plus de $b \geq 0$ et si $a \geq -b$). Comme $b = 1 - \frac{a}{3}$, on a doit donc avoir $1 - \frac{a}{3} \geq 0$, soit $a \leq 3$. De plus $a + b \geq 0$ devient $a + 1 - \frac{a}{3} \geq 0$, soit $a \geq -\frac{3}{2}$.

Finalement, f est une densité si et seulement si $a \in \left[-\frac{3}{2}, 3\right]$ et $b = 1 - \frac{a}{3}$.

Il n'y a pas de difficulté majeure dans l'analyse qui précède, mais il faut tout de même être attentif dans le calcul de la primitive (il faut bien faire la primitive deux termes de la somme $ax^2 + b$ et ne pas écrire seulement $\frac{1}{3}ax^3 + b$, par exemple). De même, l'analyse des conditions sur a et b doit être réalisée avec soin afin de ne pas oublier une condition lors des transformations. Ici, on a bien conservé la condition qui donne une intégrale de 1, puis on a utiliser les deux conditions d'inégalités pour obtenir deux bornes sur a. On a donc conservé trois conditions, comme il le fallait.

Correction

On sait que $\mathbb{P}(X \geq 0{,}5) = \int_{0,5}^{\infty} f(x)dx$. Comme f est nulle en dehors de $[0{,}1]$, et en utilisant la primitive déterminée à la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq 0{,}5) &= \int_{0,5}^{\infty} f(x)dx, \\
&= \int_{0,5}^{1} f(x)dx, \\
&= \left[\frac{a}{3}x^3 + bx\right]_{0,5}^{1}, \\
&= \frac{a}{3} + b - \frac{a}{3} \times \frac{1}{8} - b \times \frac{1}{2}, \\
&= 1 - \frac{a}{24} - \frac{b}{2}.
\end{aligned}$$

Une erreur courante dans l'analyse précédente consiste à confondre densité f et fonction de répartition F. On sait en effet que, par définition, si F_X est la fonction de répartition de X, $\mathbb{P}(X \geq 0{,}5) = 1 - F_X(0{,}5)$ (on a utilisé la continuité de X pour s'affranchir de problèmes aux bornes de intervalles). Si on confond f et F, on peut être tenté d'écrire (ce qui est faux !) que $\mathbb{P}(X \geq 0{,}5) = 1 - f(0{,}5) = 1 - \frac{a}{4} - b$. On obtient alors un résultat totalement différent dans la suite (et, insistons sur ce point, faux).

Correction

En utilisant les résultats de la première question, on a donc deux équations à deux inconnues :

$$\begin{aligned}
\frac{a}{3} + b &= 1, \\
1 - \frac{a}{24} - \frac{b}{2} &= \frac{7}{8}.
\end{aligned}$$

En utilisant $b = 1 - \frac{a}{3}$ dans la deuxième équation, on obtient

$$1 - \frac{a}{24} - \frac{1}{2} + \frac{a}{6} = \frac{7}{8},$$

ce qui donne $a = 3$, puis $b = 0$ (et donc $f(x) = 3x^2$ sur $[0, 1]$). On remarque que les valeurs de a et b sont compatibles avec les inégalités établies à la question 1 et donc qu'on obtient bien une densité.

La dernière vérification est très importante. On pourrait en effet supposer par exemple que $\mathbb{P}(X \geq 0{,}5) = \frac{1}{8}$. Des calculs similaires à ceux effectués ci-dessus donnent $a = -3$ et $b = 2$. Or, ces valeurs ne sont pas acceptables d'après les contraintes obtenues à la question 1. L'hypothèse $\mathbb{P}(X \geq 0{,}5) = \frac{1}{8}$ entre donc en contradiction avec l'hypothèse sur la densité de X. Ce n'est pas le cas avec l'hypothèse $\mathbb{P}(X \geq 0{,}5) = \frac{7}{8}$!

Correction

On sait que $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$. ce qui donne ici (en tenant compte de la nullité de f en dehors de $[0{,}1]$) :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_0^1 x \times 3x^2 dx,\\ &= \int_0^1 3x^3 dx,\\ &= \left[\frac{3}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{3}{4},\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $x \mapsto \frac{3}{4}x^4$ est une primitive de $x \mapsto 3x^3$.

Pour calculer $V(X)$, on utilise la relation $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$. Comme $\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \int_0^1 3x^4 dx,\\ &= \left[\frac{3}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{3}{5},\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $x \mapsto \frac{3}{5}x^5$ est une primitive de $x \mapsto 3x^4$. On a donc

$$V(X) = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}.$$

Exercice 4.2

Soit une fonction F définie de la façon suivante :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -2 \\ a(x+b)^2 & \text{si } x \in]-2{,}0] \\ cx + d & \text{si } x \in]0{,}1] \\ e & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Question 1 Donner les conditions que doivent vérifier les nombres réels a, b, c, d et e pour que F soit la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle absolument continue.

Question 2 On suppose que F est la fonction de répartition de X, une variable aléatoire réelle absolument continue (et donc que les conditions établies à la question précédente sont vérifiées). On suppose que $\mathbb{P}(X \leq -1) = 0$. En déduire les valeurs des réels a, b, c, d et e. À quelle loi classique la fonction ainsi obtenue correspond elle ?

Question 3 On suppose maintenant que F est la fonction de répartition de Y, une variable aléatoire réelle absolument continue (et donc que les conditions établies à la première question sont vérifiées). On suppose de plus que $\mathbb{P}(Y \in [-1; 0{,}5]) = \frac{5}{8}$. En déduire les valeurs des réels a, b, c, d et e.

Question 4 Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $V(Y)$ pour la variable Y décrire à la question précédente.

Correction

On vérifie dans un premier temps les conditions sur les limites. On constate que $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, comme cela doit être le cas. On constate d'autre part que $\lim_{x\to\infty} F(x) = e$, ce qui impose $e = 1$.

Le traitement des conditions limites est en général la partie la plus facile de l'analyse d'une fonction de répartition. On conseille donc de commencer par cette partie.

Correction

Comme F doit être la fonction de répartition d'une variable aléatoire *absolument continue*, il faut que F soit continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. On constate que sur chaque intervalle de sa définition, F est continue, car elle est soit constante, soit affine, soit quadratique. Il faut donc simplement vérifier que F est continue aux bornes de ces intervalles.

Par continuité de $x \mapsto a(x+b)^2$, on a $\lim_{x\to-2} a(x+b)^2 = a(b-2)^2$. Pour que F soit continue en -2, il faut donc que $a(b-2)^2 = F(-2) = 0$.

De même, par continuité de $x \mapsto cx+d$, on a $\lim_{x\to 0} cx+d = d$. Pour que F soit continue en 0, il faut donc que $d = F(0) = ab^2$.

Enfin, on a $\lim_{x\to 1} e = e = 1$. Pour que F soit continue en 1, il faut donc que $F(1) = c + d = 1$.

En résumé, F est continue si et seulement si :

$$\begin{aligned} a(b-2)^2 &= 0 \\ d &= ab^2 \\ c+d &= 1 \end{aligned}$$

Le raisonnement présenté au dessus est typique d'une démonstration de continuité pour une fonction définie par morceaux. Pour que la fonction soit continue, il faut en effet qu'elle soit continue sur chaque morceau, mais aussi que tout se passe bien à chaque transition entre deux morceaux. Pour analyser ces points, on s'appuie sur la continuité de la fonction sur chaque intervalle, en faisant comme si la définition sur l'intervalle s'appliquait aussi aux bornes. Dans l'exemple ci-dessus, on considère par exemple qu'il y a deux définitions pour la valeur de F en 0, la vraie définition (donnée par $a(x+b)^2$ évalué en 0) et la « définition » obtenue en calculant la limite de la formule sur l'autre intervalle (ici la limite en 0 de $cx+d$). La continuité est garantie si les deux définitions ne sont pas contradictoires, c'est-à-dire si elles donnent la même valeur.

Correction

On vérifie enfin que F est croissante. Comme F est continue (avec les conditions établies ci-dessus), il suffit de vérifier que F est croissante sur chaque intervalle. C'est évident pour les intervalles où elle est constante. Pour l'intervalle $]-2{,}0]$, $F'(x) = 2a(x+b)$. Pour que F soit croissante il faut donc que $2a(x+b) \geq 0$ pour tout $x \in]-2{,}0]$. Or, nous avons vu que $a(b-2)^2 = 0$, ce qui implique soit $a = 0$, soit $b = 2$ (soit les deux). Si $a = 0$, F est identiquement nulle sur $]-2{,}0]$ et est donc croissante. Si $a \neq 0$, alors $b = 2$. Dans ce cas, on ne peut pas avoir $a < 0$. En effet cela impliquerait $F(0) = 4a < 0$ ce qui est impossible pour une fonction de répartition. On doit donc avoir $a > 0$ et donc $F'(x) = 2a(x+2) \geq 0$ sur $]-2{,}0]$, soit F croissante sur cet intervalle.

Sur l'intervalle $]0{,}1]$, $F'(x) = c$ et F est donc croissante si et seulement si $c \geq 0$. En combinant toutes les conditions, on trouve que F est une fonction de répartition si et seulement si :

$$\begin{aligned} a(b-2)^2 &= 0 \\ d &= ab^2 \\ c+d &= 1 \\ e &= 1 \\ c &\geq 0 \\ a &\geq 0 \end{aligned}$$

L'analyse de croissance est souvent la phase la plus délicate. La méthode générale de résolution consiste à calculer les dérivées sur chaque intervalle et à s'assurer de leur positivité. Il est important de s'appuyer sur l'analyse de continuité à ce moment car une fonction peut très bien être croissante (strictement) sur chacun de ses intervalles de définition sans être croissante globale si elle n'est pas continue.

Correction

On suppose maintenant que $\mathbb{P}(X \leq -1) = 0$. Par définition de la fonction de répartition, on a donc $F(-1) = 0 = a(b-1)^2$. Ceci n'est possible que si

$a = 0$ ou $b = 1$. Or, si $b = 1$, la condition $a(b-2)^2 = 0$ devient $a = 0$. De ce fait, on doit nécessairement avoir $a = 0$. Dans cette situation, la valeur de b n'importe plus. En revanche, $d = ab^2$ devient $d = 0$, ce qui implique $c = 1$. On obtient donc

a	b	c	d	e
0	quelconque	1	0	1

La fonction F devient alors beaucoup plus simple et est donnée par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \in]0{,}1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi uniforme sur l'intervalle $[0{,}1]$.

Correction

On suppose maintenant que $\mathbb{P}(Y \in [-1; 0{,}5]) = \frac{5}{8}$. On a

$$\begin{aligned} \frac{5}{8} &= \mathbb{P}(Y \in [-1; 0{,}5]) \\ &= \mathbb{P}(Y \in]-1; 0{,}5]) && \text{car } Y \text{ est une variable aléatoire continue} \\ &= F(0{,}5) - F(-1) && \text{par définition d'une fonction de répartition} \\ &= \frac{c}{2} + d - a(b-1)^2 \end{aligned}$$

Comme dans la question précédente, on étudie d'abord la condition $a(b-2)^2 = 0$. Si $a = 0$, on a aussi $d = ab^2 = 0$ (et la valeur de b n'importe plus). D'après la condition $c + d = 1$, on a $c = 1$. L'équation sur $\mathbb{P}(Y \in [-1; 0{,}5])$ ne peut alors pas être satisfaite car $\frac{c}{2} + d - a(b-1)^2 = \frac{1}{2}$.

Donc $a > 0$, ce qui impose $b = 2$ et $d = 4a$. En remplaçant dans l'équation sur $\mathbb{P}(Y \in [-1; 0{,}5])$, on obtient

$$\frac{5}{8} = \frac{c}{2} + 3a.$$

En utilisant $c + d = 1 = c + 4a$, on obtient $\frac{c}{2} = 1 - 2a$ puis, $a = \frac{1}{8}$ puis $d = \frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{2}$. En résumé

a	b	c	d	e
$\frac{1}{8}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Correction

Pour calculer l'espérance et la variance de Y, on doit déterminer sa densité f_Y, c'est-à-dire la dérivée de F. On obtient directement :

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq -2 \\ \frac{1}{4}(y+2) & \text{si } y \in]-2{,}0] \\ \frac{1}{2} & \text{si } y \in]0{,}1] \\ 0 & \text{si } y > 1 \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{-2} y f_Y(y) dy + \int_{-2}^{0} y f_Y(y) dy + \int_{0}^{1} y f_Y(y) dy + \int_{1}^{\infty} y f_Y(y) dy \\
&= \int_{-2}^{0} \frac{y}{4}(y+2) dy + \int_{0}^{1} \frac{y}{2} dy \\
&= \left[\frac{y^3}{12} + \frac{y^2}{4}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{y^2}{4}\right]_{0}^{1} \\
&= -\frac{(-2)^3}{12} - \frac{(-2)^2}{4} + \frac{1}{4} \\
&= -\frac{1}{12}
\end{aligned}$$

On calcule $V(Y)$ en utilisant la relation $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y) dy \\
&= \int_{-2}^{0} \frac{y^2}{4}(y+2) dy + \int_{0}^{1} \frac{y^2}{2} dy \\
&= \left[\frac{y^4}{16} + \frac{y^3}{6}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{y^3}{6}\right]_{0}^{1} \\
&= -\frac{(-2)^4}{16} - \frac{(-2)^3}{6} + \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

et donc $V(Y) = \frac{71}{144}$.

4.2 Lois continues classiques

Exercice 4.3

Énoncé *On remplit un verre de volume 20 cl d'une quantité aléatoire d'eau choisie uniformément entre 0 et 20 cl :*

Question 1 *quelle est la probabilité d'obtenir moins de 5 cl d'eau ?*

Question 2 *on vide 5 verres ainsi remplis dans une très grande bassine. Quelle quantité moyenne d'eau obtient-on dans la bassine ?*

Correction

Soit V la variable aléatoire correspondant à la quantité d'eau dans un verre. Par hypothèse, V suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 20]$.

La seule difficulté de modélisation est de bien comprendre qu'on travaille ici avec une variable aléatoire continue et pas avec une variable discrète. En effet, il n'y a pas de raison de supposer que la quantité d'eau est nécessairement un entier, par exemple.

Correction

On cherche $\mathbb{P}(V \leq 5)$. Par définition de la fonction de répartition, on a $\mathbb{P}(V \leq 5) = F_V(5)$. Or, pour une variable uniforme sur $[0, 20]$, on a

$$F_V(5) = \frac{5-0}{20-0} = \frac{1}{4},$$

qui est donc la probabilité recherchée.

Quand on vide 5 verres remplis aléatoirement, $V_1, \ldots, V_5$, on obtient la quantité aléatoire $V_1 + \cdots + V_5$. Par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}(V_1 + \cdots + V_5) = \mathbb{E}(V1) + \cdots + \mathbb{E}(V_5).$$

Les variables étant toutes uniformes sur $[0, 20]$, elles sont toutes d'espérance $\frac{0+20}{2} = 10$. La quantité moyenne d'eau obtenue dans la bassine est de donc $5 \times 10 = 50$ cl.

Il est important de rappeler la propriété utilisée ici pour calculer la quantité moyenne d'eau, à savoir la linéarité de l'espérance. On note en particulier que cette propriété ne nécessite pas l'indépendance entre les variables aléatoires.

Exercice 4.4

Énoncé *On suppose que la durée de vie d'un disque dur est distribuée selon une loi exponentielle. Le fabricant veut garantir que le disque dur a une probabilité* *inférieure à* 0.001 *de tomber en panne sur un an. Quelle durée de vie moyenne minimale doit avoir le disque dur ?*

Correction

On appelle D la variable aléatoire donnant la durée de vie du disque dur. D suit une loi exponentielle de paramètre λ. Le fabricant veut garantir que

$$\mathbb{P}(D \leq 1) \leq 0.001.$$

Comme $\mathbb{P}(D \leq a) = F_D(a)$ par définition, on obtient l'inégalité

$$1 - \exp(-\lambda \times 1) \leq 0.001,$$

en appliquant la formule classique pour la fonction de répartition d'une variable de loi exponentielle. On a alors

$$\begin{aligned} 1 - \exp(-\lambda) &\leq 0.001, \\ 0.999 &\leq \exp(-\lambda), \\ \ln(0.999) &\leq -\lambda, && \text{en utilisant la croissance de ln} \\ \lambda &\leq -\ln(0.999), \\ \frac{-1}{\ln(0.999)} &\leq \frac{1}{\lambda}, && \text{en utilisant la décroissance de } \frac{1}{x} \\ 999{,}5 &\leq \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Or, comme D suit une loi exponentielle, son espérance est $\frac{1}{\lambda}$. La durée de vie moyenne du disque dur doit donc être d'au moins 999,5 ans !

Cet exercice est une simple application des propriétés de la loi exponentielle et de la définition de la fonction de répartition. Il faut simplement être attentif dans la manipulation des inégalités pour bien obtenir une minoration de l'espérance et donc de la durée de vie.

Exercice 4.5

Énoncé *D'après une étude récente, la taille des femmes françaises est distribuée selon une loi normale de moyenne* $m = 1{,}58$ *et d'écart-type* $\sigma = 0{,}06$*. Pour produire un stock de vêtements, un fabricant souhaite utiliser cette loi.*

Question 1 *Il commence par déterminer un intervalle de la forme* $[m-a, m+a]$ *(donc symétrique autour de la moyenne) contenant en moyenne 90 % (environ) des tailles des femmes françaises : calculer* a.

Question 2 *Il en déduit trois tailles, S, M et L, correspondant respectivement aux intervalles $[m-a, m-a/3]$, $[m-a/3, m+a/3]$ et $[m+a/3, m+a]$. Calculer le pourcentage de la production qui doit être affecté à chaque taille.*

Correction

Soit T la variable aléatoire représentant la taille d'une femme. Par hypothèse, T suit une loi normale $\mathcal{N}(1{,}58; 0{,}06^2)$. On cherche $a > 0$ tel que

$$\mathbb{P}(T \in [m-a, m+a]) = 0{,}9.$$

Dans cet exercice, il n'y pas d'étape de modélisation car la loi de la variable d'intérêt est donnée explicitement, avec la valeur de ses paramètres. La traduction de l'énoncé se limite donc à exprimer mathématiquement l'évènement étudié et à donner les hypothèses sur cet évènement.

Correction

Soit la variable $Y = \frac{T-m}{\sigma}$. On sait que Y suit une loi normale standard $\mathcal{N}(0; 1^2)$. De plus, on a

$$\begin{array}{rcl} m-a \leq & T & \leq m+a, \\ -a \leq & T-m & \leq a, \\ -\dfrac{a}{\sigma} \leq & \dfrac{T-m}{\sigma} & \leq \dfrac{a}{\sigma}. \end{array}$$

Donc $\mathbb{P}(T \in [m-a, m+a]) = 0{,}9$ est équivalent a $\mathbb{P}(Y \in [-\frac{a}{\sigma}, \frac{a}{\sigma}]) = 0{,}9$. Cherchons donc λ tel que $\mathbb{P}(Y \in [-\lambda, \lambda]) = 0{,}9$.

On utilise ci-dessus la manipulation classique permettant de se ramener à une variable aléatoire distribuée selon une loi normale standard pour laquelle on dispose d'une table. La technique consiste à appliquer à l'évènement défini sur la variable d'origine (ici T) les transformations qui conduisent à la variable centrée et réduite (ici Y). On transforme ainsi l'évènement sur T en un évènement sur Y pour lequel on pourra appliquer la table.

Correction

On sait que

$$\mathbb{P}(Y \in [-\lambda, \lambda]) = F_Y(\lambda) - F_Y(-\lambda),$$

car Y est une variable aléatoire continue. De plus, par symétrie de la loi normale standard, on $F_Y(-\lambda) = 1 - F_Y(\lambda)$, et ainsi

$$\mathbb{P}(Y \in [-\lambda, \lambda]) = 2F_Y(\lambda) - 1.$$

De ce fait, chercher λ tel que $\mathbb{P}(Y \in [-\lambda, \lambda]) = 0{,}9$ est équivalent à chercher λ tel que $F_Y(\lambda) = \frac{1+0{,}9}{2} = 0{,}95$.

La table ne donne que la fonction de répartition de la loi normale. Il faut donc se ramener à une équation portant sur cette fonction. On utilise d'abord le fait que pour toute variable aléatoire continue (c'est faux pour une variable discrète), on a

$$\mathbb{P}(X \in [a, b]) = F_X(b) - F_X(a).$$

Ensuite, on applique la propriété de symétrie de la loi normale pour se débarrasser du terme négatif (le terme $F_Y(-\lambda)$).

Correction

La lecture de la table de la loi normale donne :

$$F_Y(1{,}64) = 0{,}9495,$$
$$F_Y(1{,}65) = 0{,}9505.$$

Pour avoir un intervalle légèrement plus grand que celui recherché par le fabricant, on choisit $\lambda = 1{,}65$. Si on pose $a = \sigma\lambda = 0{,}06 \times 1{,}65 = 0{,}099$, on a donc

$$\mathbb{P}(T \in [m - a, m + a]) = \mathbb{P}(T \in [1{,}481; 1{,}679]) \simeq 0{,}9$$

Il faut être attentif à l'inversion de la relation dans le calcul final de a. On a en effet trouvé λ grâce à la table, mais ce n'est pas la grandeur recherchée puisque l'évènement étudié est $Y \in [-\frac{a}{\sigma}, \frac{a}{\sigma}]$ alors qu'on ajusté la probabilité de $Y \in [-\lambda, \lambda]$. On doit donc faire $\frac{a}{\sigma} = \lambda$, ce qui donne a.

Le reste de l'exercice est une application de la même stratégie de centrage et de réduction de T, mais avec une utilisation « inverse » de la table : l'évènement étudié est fixé et on doit calculer sa probabilité. On a intérêt à conserver la formule $a = \sigma\lambda$ pour simplifier les calculs.

Correction

Étudions le premier intervalle. On a

$$\begin{array}{rcl} m-a \leq & T & \leq m-\frac{a}{3}, \\ -a \leq & T-m & \leq -\frac{a}{3}, \\ -\dfrac{a}{\sigma} \leq & \dfrac{T-m}{\sigma} & \leq \dfrac{a}{3\sigma}, \\ -\lambda \leq & Y & \leq -\dfrac{\lambda}{3}, \end{array}$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(T \in \left[m-a, m-\frac{a}{3}\right]\right) &= \mathbb{P}\left(Y \in \left[-\lambda, -\frac{\lambda}{3}\right]\right), \\ &= F_Y\left(-\frac{\lambda}{3}\right) - F_Y(-\lambda), \\ &= 1 - F_Y\left(\frac{\lambda}{3}\right) - 1 + F_Y(\lambda), && \text{par symétrie} \\ &= 0{,}9505 - F_Y\left(\frac{1{,}65}{3}\right), && \text{selon l'analyse précédente} \\ &= 0{,}9505 - 0{,}7088, && \text{par lecture dans la table} \\ &= 0{,}2417. \end{aligned}$$

On a de la même façon

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(T \in \left[m-\frac{a}{3}, m+\frac{a}{3}\right]\right) &= \mathbb{P}\left(Y \in \left[-\frac{\lambda}{3}, \frac{\lambda}{3}\right]\right), \\ &= F_Y\left(\frac{\lambda}{3}\right) - F_Y\left(-\frac{\lambda}{3}\right), \\ &= 2F_Y\left(\frac{\lambda}{3}\right) - 1, \\ &= 2 \times 0{,}7088 - 1, \\ &= 0{,}4176. \end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(T \in \left[m+\frac{a}{3}, m+a\right]\right) &= \mathbb{P}\left(Y \in \left[\frac{\lambda}{3}, \lambda\right]\right), \\ &= F_Y(\lambda) - F_Y\left(\frac{\lambda}{3}\right), \\ &= 0{,}9505 - 0{,}7088, \\ &= 0{,}2417, \end{aligned}$$

ce dernier résultat étant évident par symétrie de la loi normale autour de sa moyenne.

On calcule enfin les pourcentages à partir de ces probabilités. La production totale correspond à 90% de la population et on doit donc diviser les probabilités obtenues par cette valeur. On obtient alors

$$\begin{aligned} \text{\% de S} &= \tfrac{0{,}2417}{0{,}90} &\simeq 27\% \\ \text{\% de M} &= \tfrac{0{,}4176}{0{,}90} &\simeq 46\% \\ \text{\% de L} &= \tfrac{0{,}2417}{0{,}90} &\simeq 27\% \end{aligned}$$

L'exercice se termine par un piège classique : comme le fabricant se contente de cibler 90 % de la population, les probabilités d'obtenir les différentes tailles ne donnent pas directement les pourcentages de la production. On doit passer par un ratio pour obtenir ces pourcentages.

Annexes

Évolutions de ce document

La dernière version de ce document se trouve sur la page
http://apiacoa.org/teaching/statistics/index.fr.html.

05/04/2016 : version 0.2.1 correction d'une erreur numérique dans la correction de l'exercice 2.2.

18/02/2016 : version 0.2.0

— ajout d'un exercice sur les variables aléatoires discrètes ;

— amélioration de la présentation.

30/04/2015 : version 0.1.1 correction d'une erreur dans l'énoncé de l'exercice 4.1.

26/01/2015 : version 0.1.0

— réorganisation pour mieux refléter la structure du cours

— ajout d'un exercice sur l'indépendance conditionnelle

12/03/2014 : version 0.0.9

— amélioration de la présentation ;

— ajout d'un « mode d'emploi » ;

— ajout d'un exercice sur les variables aléatoires discrètes.

07/03/2014 : version 0.0.8
ajout d'un exercice de conditionnement.

02/03/2014 : version 0.0.7
ajout d'un exercice sur une probabilité non uniforme.

05/04/2013 : version 0.0.6
ajout d'un exercice sur les variables aléatoires continues (fonction de répartition).

05/04/2013 : version 0.0.5
ajout d'un exercice sur les variables aléatoires continues (densité).

28/04/2012 : version 0.0.4

- ajout d'un exercice sur les variables fonction d'autres variables ;
- ajout d'un exercice sur les couples de variables.

27/04/2012 : version 0.0.3

- ajout d'un exercice sur la loi de Poisson ;
- ajout d'un exercice sur la loi uniforme ;
- ajout d'un exercice sur la loi exponentielle ;
- ajout d'un exercice sur la loi normale.

26/04/2012 : version 0.0.2

- ajout d'un exercice sur les variables aléatoires discrètes ;
- ajout d'un exercice sur les lois Bernoulli et Binomiale.

23/04/2012 : version 0.0.1

première version diffusée avec deux exercices corrigés.