Contrôle continu : Statistique

Sujet 1

Prénom :
Nom :

Les exercices sont indépendants. L'utilisation de documents, calculatrices, téléphones portables ou tout autre appareil électronique, est interdite. Les réponses devront être soigneusement argumentées et justifiées. Vous pouvez laisser les résultats sous la forme de fractions. L'énoncé doit impérativement être rendu avec la copie.

Exercice 1

Bertrand change de téléphone portable tous les ans, le jour de son anniversaire. Il conserve toujours un téléphone une année entière. Si le téléphone tombe en panne dans l'année, il le fait réparer et change tout de même de téléphone à la date prévue. On suppose que la probabilité qu'un téléphone portable tombe en panne dans l'année est de p. On suppose aussi qu'un téléphone ne peut pas subir plus d'une panne dans son année de possession par Bertrand. On note X la variable aléatoire « nombre de téléphones tombés en panne dans les dix premières années ».

Question 1 Quelle loi suit la variable aléatoire X ?

Question 2 Donner la probabilité que Bertrand subisse 5 pannes de portables sur les dix premières années.

Question 3 Donner l'espérance et la variance de X.

On suppose qu'un nouveau téléphone portable coûte 100 euros. Lors de l'achat, Bertrand peut l'assurer pour 10 euros auquel cas le portable sera réparé gratuitement (pendant un an). Si le portable n'est pas assuré, le coût d'une réparation est de 50 euros. On note Y la variable aléatoire « montant dépensé par Bertrand en téléphonie s'il ne s'assure jamais » (on compte donc dans Y l'achat des téléphones ainsi que les réparations éventuelles).

Question 4 Donner $Y(\Omega)$ et la loi de Y. On pourra exprimer Y en fonction de X.

Question 5 Combien dépensera Bertrand en téléphonie les dix premières années s'il assure tous ses téléphones ?

Question 6 Pour quelles valeurs de p est-il préférable d'assurer son téléphone ?

On s'intéresse ici à la première panne de téléphone que connaît Bertrand. On note Z la variable aléatoire donnant l'année pendant laquelle Bertrand subit sa première panne téléphonique, en numérotant les années à partir de 1 pour l'année d'achat du premier téléphone.

Question 7 Quelle loi suit la variable aléatoire Z ?

Question 8 Donner la probabilité que la première panne que connaît Bertrand soit sur son troisième portable.

Exercice 2

Soit deux urnes contenant chacune 3 boules numérotées 0, 1, et 2. On effectue l'expérience suivante : on tire une boule dans la première urne que l'on ajoute dans la deuxième urne. On tire ensuite une boule dans la deuxième urne. On note X la variable aléatoire correspondant au numéro de la boule tirée dans la première urne et Y le numéro de la boule tirée dans la deuxième urne. On suppose que le tirage dans chaque urne est uniforme.

Question 1 Donner $X(\Omega)$ et la loi de X.

Question 2 Pour chaque $x \in X(\Omega)$, donner la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$.

Question 3 Déduire des lois précédentes la loi du couple (X, Y).

Question 4 Donner la loi marginale Y.

Question 5 Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.

Question 6 Calculer la loi conditionnelle de X sachant $Y = 0$.

Question 7 Calculer $\mathbb{E}(XY)$ et rappeler la formule de $cov(X, Y)$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = -ax^2 + b$ sur $[-1; 1]$ et 0 sinon. Dans cette formule a et b sont des paramètres à déterminer.

Question 1 À quelles conditions sur a et b la fonction f est-elle positive ou nulle pour tout $x \in \mathbb{R}$?

Question 2 Calculer $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ en fonction de a et b.

Question 3 On suppose que pour a et b bien choisis, f est la densité d'une variable aléatoire X telle que $\mathbb{P}(X \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) = \frac{11}{16}$. En déduire a et b.

Question 4 Calculer la fonction de répartition, l'espérance et la variance de X.