# TD : série 1

**Probabilités**

i. Soit $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\mathcal{F}})$ un espace de probabilisable et trois événements A, B et C de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$. Traduire à l'aide des opérations sur les ensembles les expressions pour les événements suivants :

a. A seul se réalise ;
b. A et C se réalisent mais pas B ;
c. au moins l'un des trois événements se réalise ;
d. les trois événements se réalisent ;
e. aucun ne se réalise ;
f. au plus l'un des trois se réalise ;
g. au plus deux des trois se réalisent.

ii. Soit $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\mathcal{F}}, \boldsymbol{P})$ un espace de probabilité.

a. Montrer que si $\boldsymbol{A}$ ***et*** $\boldsymbol{B}$ sont indépendants alors il en va de même pour $\boldsymbol{A}$ ***et*** $\overline{\boldsymbol{B}}$ et pour $\overline{\boldsymbol{A}}$ ***et*** $\overline{\boldsymbol{B}}$ .
b. Montrer que si $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ ***et*** $\boldsymbol{C}$ sont mutuellement indépendants, alors $A$ est indépendant de $\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}$ et de $B \cup \boldsymbol{C}$.

iii. On considère deux événements indépendants A et B de probabilités respectives 1/4 et 1/3. Calculer :

a. la probabilité que les deux événements aient lieu ;
b. la probabilité que l'un au moins des deux événements ait lieu ;
c. la probabilité qu'exactement l'un des deux événements ait lieu .

iv. Soit $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux évènements, d'un même espace de probabilité $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\mathcal{F}}, \boldsymbol{P})$, tels que :

$$P(A)=\frac{2}{3}, P(B)=\frac{1}{3} \quad et \quad P\left(\overline{A}/B\right)=\frac{1}{4}.$$

a. Calculer la valeur de la probabilité conditionnelle de $\boldsymbol{A}$ sachant $\boldsymbol{B}$ et celle de $\boldsymbol{B}$ sachant $\boldsymbol{A}$.
b. Quelle est la probabilité qu'exactement un des deux évènements se réalise ?

v. Soit A, B et C trois évènements, d'un même espace de probabilité (($\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\mathcal{F}}, \boldsymbol{P}$),, tels que :
$P(A) = 2/5,\ P(C) = 1/2\ , P(A \cup B) = 3/4\ , P(B/A) = 3/10\ et\ P(C/A) = 1/4$ .

a. Calculer la valeur de $P(\overline{A}/C)$ .
b. Calculer la valeur de $P(\overline{A}/\overline{\boldsymbol{C}})$.
c. Calculer la valeur de $P(B)$ .

vi. Un sac contient 5 jetons verts (numérotés de 1 à 5) et 4 jetons rouges (numérotés de 1 à 4). On y effectue 3 tirages **successifs** au hasard et sans remise. Calculer les probabilités :

a. de ne tirer que 3 jetons verts ;
b. de ne tirer aucun jeton vert ;
c. de tirer au plus 2 jetons verts ;
d. de tirer exactement 1 jeton vert.

vii. L'oral d'un concours comporte au total 100 sujets ; les candidats tirent au sort trois sujets et choisissent alors le sujet a traité parmi ces trois. Un candidat se présente en ayant préparé 60 sujets sur les 100. Quelle est la probabilité pour que le candidat ait révisé :

a. aucun des trois sujets tirés.
b. un sujet sur les trois tirés ;
c. au moins deux sujets sur les trois tirés.

viii. Une maladie affecte statistiquement une personne sur 1000. Un test de dépistage permet de détecter la maladie avec une fiabilité de 99% (i.e. test positif parmi les malades), mais il y a 0,2% de chances que le test donne un faux positif (i.e. une personne est déclarée malade sans l'être).

a. Une personne est testée positivement. Quelle est la probabilité qu'elle soit réellement malade ?
b. Une personne est testée négativement. Quelle est la probabilité qu'elle soit quand même malade ?

ix. Un laboratoire d'analyse chimique reçoit un lot de tubes à essai. Ces tubes sont fournis par trois sociétés différentes $\boldsymbol{A, B\ et\ C}$ dans les proportions suivantes : 50%, 30% et 20%.
2% des tubes fabriqués par A, 3% de ceux fabriqués par B et 4% de ceux fabriqués par C présentent des défauts. On choisit au hasard un tube à essai dans le lot reçu.

a. Quelle est la probabilité qu'il soit défectueux ?
b. Sachant que le tube choisi est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne de la société A ?

x. Une boîte contient n boules noires et b boules blanches ($n > 1, b > 1$). On tire au hasard une boule puis on la remet dans la boite avec $k$ ($k > 0$) nouvelles boules de la même couleur que la boule tirée. On choisit de nouveau une boule au hasard dans la boite. Soit $N_1$ l'événement « la première boule tirée est noire » et $N_2$ l'événement « la deuxième boule tirée est noire ».

a. Calculer la probabilité de $N_1$.
b. Calculer la probabilité de tirer deux boules noires.
c. Calculer la probabilité de $N_2$. Déduire de ce qui précède que $P(N_1/N_2) = P(N_2/N_1)$.

xi. On considère n urnes numérotées de 1 à $n$. L'urne numéro $k$ contient $k$ boules blanches et $n - k$ boules noires. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule dans cette urne. Soit $p_n$ la probabilité d'obtenir une boule blanche.

a. Déterminer la valeur de $p_1$ et celle de $p_2$ .
b. Calculer la valeur de $p_n$ pour $n \geq 2$.

xii. Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1 ;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8 ;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6 .

On note, pour tout entier naturel n non nul : $G_n$ l'événement « le joueur gagne la n -ième partie »; $p_n$ la probabilité de l'événement $G_n$: $p_n = P(G_n)$ .

a. Calculer la valeur de $p_2$.
b. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
c. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.
d. Calculer la valeur de $p_{n+1}$en fonction de $p_n$ (relation de récurrence). En déduire la valeur limite de cette probabilité lorsque n tend vers l'infini.