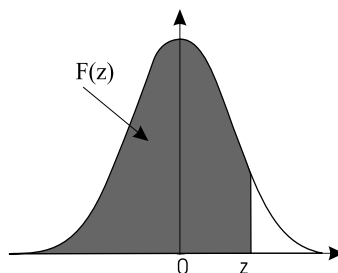


Examen
Session printemps
SMC4-M26 : probabilités

Durée : 1h30

- I.** (4 points)
La durée de vie d'une particule radioactive peut être modélisée par une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle. Notons X la durée de vie exprimée en milliers d'années d'une particule de carbone 14, élément radioactif de demi-vie 5 700 ans (5,7 milliers d'années).
- Déterminer le paramètre λ de la loi exponentielle suivie par X . En déduire la durée de vie moyenne en année d'une particule de carbone 14. (On arrondira la valeur de λ à 10^{-4})
 - Quelle est la probabilité qu'une particule de carbone 14 se désintègre au bout de 10 000 ans ?
 - Sachant qu'une particule de carbone 14 ne s'est pas désintégrée au bout de 5 000 ans, quelle est la probabilité qu'elle ne se désintègre pas dans les 10 000 années suivantes.
 - Au bout de combien d'années cette particule se désintègre-elle avec une probabilité de 0,95 ?
- II.** (5 points)
Soit X une variable aléatoire admettant une densité sous la forme :
- $$f(x) = \begin{cases} K2^{-x}, & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$
- Calculer la valeur de K .
 - Déterminer la fonction de répartition de X .
 - Calculer la valeur de m tel que $P(X \leq m) = 0,5$.
 - Calculer l'espérance de X .
- III.** (Dans cet exercice toutes les valeurs doivent être calculées à 10^{-4} près)..... (11 points)
Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques par deux machines de production A et B.
L'entreprise considère qu'une bille est conforme lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.
Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :
- 96 % de la production totale est conforme.
 - La machine A produit 60 % de la production.
 - 98% des billes produits par la machine A sont conformes.
- On définit les événements suivants : A = « la bille est fabriquée par la machine A » ;
 B = « la bille est fabriquée par la machine B » ; C = « la bille est conforme ».
- Partie A.** (4pts)
 - Calculer $P(C \cap B)$.
 - En déduire la proportion de billes conformes parmi la production de la machine B .
 - Montrer que 70 % des billes non conforme proviennent de la machine B .
- Partie B.** (4pts)
On choisit au hasard un lot de **100** billes. On appelle Y la variable aléatoire dont la valeur correspond au nombre de billes non conformes dans cet échantillon.
- Quelle est la loi de probabilité Y ? Quelles sont sa moyenne et sa variance ?
 - Calculer la probabilité d'avoir au plus une bille non conforme dans le lot.
 - Par quelle loi peut-on approximer de la loi de Y ? Utiliser cette approximation pour calculer la probabilité d'avoir au moins 96% de billes conformes.
- Partie C.** (3pts)
Pour réduire le nombre de billes non conformes, l'entreprise modifie le réglage de la machine B . Sous ce nouveau réglage la machine B produit des billes dont le diamètre est une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 0,99$ et d'écart-type $\sigma = 0,04$.
- Quelle est la probabilité qu'une bille fabriquée par la machine B soit conforme ?
 - Recalculer le pourcentage des billes conformes dans la production totale ?

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite
(probabilité $F(z)$ de trouver une valeur inférieure à z)



| z | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |

Table pour les grandes valeurs de z

| z | 3,0 | 3,1 | 3,2 | 3,3 | 3,4 | 3,5 | 3,6 | 3,7 | 3,8 | 3,9 |
|------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| F(z) | 0,998650 | 0,999032 | 0,999313 | 0,999517 | 0,999663 | 0,999767 | 0,999841 | 0,999892 | 0,999928 | 0,999952 |
| z | 4,0 | 4,1 | 4,2 | 4,3 | 4,4 | 4,5 | 4,6 | 4,7 | 4,8 | 4,9 |
| F(z) | 0,999968 | 0,999979 | 0,999987 | 0,999991 | 0,999995 | 0,999997 | 0,999998 | 0,999999 | 0,999999 | 1,000000 |