# TD : série 2
# Variables aléatoires discrètes

I. Un joueur effectue deux tirages successifs dans une urne contenant 5 boules blanches et 10 noires. Mais, avant d'effectuer ces tirages il lance un dé équilibré ; s'il obtient 1 ou 6 alors il effectue des tirages avec remise ; dans les autres cas il effectue des tirages sans remise.
Le joueur gagne 2dhs pour chaque boule blanche tirée et il perd 1dh pour chaque boule noire.
On désigne par X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

a. Donner la loi de $X$ et calculer son espérance $E(X)$.

b. Calculer la probabilité pour que le joueur ne perde pas d'argent $P(X \geq 0)$.

II. Un Casino propose une machine de jeu contenant quatre boules blanches et trois boules rouges. Lorsque le joueur introduit un jeton dans l'appareil, trois boules tombent dans un panier. Toutes les boules ont la même probabilité de tomber dans le panier. Si les boules obtenues sont toutes blanches le joueur ne gagne rien sinon il gagne 35 $dhs$ par boule rouge obtenue. Le prix du jeton est fixé à $\boldsymbol{n}\, dhs$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

a. Soit $X$ la variable aléatoire désignant la valeur du lot gagné par le joueur. Donner la loi de $X$ et calculer son espérance $E(X)$ et son écart type $\sigma(X)$.

b. Soit $Y$ la variable aléatoire désignant le gain algébrique du Casino par partie de jeu.
   i. Quelle est la relation entre les variables $X$ et $Y$ ? En déduire les valeurs $E(Y)$ et $\sigma(Y)$ .
   ii. Le Casino souhaite fixer le prix du jeton de telle manière que chaque partie de jeu lui rapporte en moyenne un gain de 10 $dhs$. Quel est ce prix minimum ?
   iii. Calculer la probabilité pour que le Casino ne perde pas d'argent : $P(Y \geq 0)$.

III. Lors d'une compétition de tir à l'arc, on a constaté qu'un tireur entraîné a 80 % de chances d'atteindre sa cible. Parmi les participants, 40 % sont des tireurs entraînés. Les autres ont 50 % de chances d'atteindre la cible.

a. On choisit un participant au hasard et soit X la $v.a$ qui égale à 1 si le joueur atteint la cible et 0 sinon ; donner la loi de X.

b. On choisit un tireur au hasard, on lui fait faire 10 tirs consécutifs, indépendants. Soit Z la $v.a.d$ qui correspond au nombre de fois qu'il atteint la cible. Donner la loi de Z.

IV. Pour se rendre au bureau, une personne passe par une station de bus où elle peut choisir entre deux lignes indépendantes.
- Ligne A : les bus arrivent selon une loi géométrique de moyenne 3 minutes et le trajet dure 13 minutes.
- Ligne B : les bus arrivent selon une loi géométrique de moyenne 6 minutes et le trajet dure 8 minutes.

Soit $X$ le temps d'attente d'un bus de la Ligne A. soit $Y$ le temps d'attente d'un bus de la Ligne B.

a. Déterminer les lois de $X$ et $Y$ ?

b. Quelle est la probabilité d'attendre au moins 10 minutes avant que n'arrive le bus A ?

c. Quelle est la probabilité qu'aucun bus n'arrive pendant les cinq premières minutes ?

d. Calculer la probabilité que le bus A arrive avant le bus B.

e. La personne choisit au hasard l'une des deux lignes. Soit Z la durée totale du déplacement (attente + trajet) ; quelle est la probabilité que la durée du déplacement dépasse 20 minutes ; $(Z > 20)$ ?

V. Sur la voie express Agadir-Taroudant, il y a en moyenne 2 accidents par semaine. On suppose que le nombre d'accidents durant une semaine est indépendant de celui des autres semaines. Soit X le nombre d'accidents enregistrés par semaine sur cette voie. cette variable suit une loi de Poisson.

a. Une semaine, il y a eu 4 accidents. Quelle était la probabilité d'un tel événement ?

b. Quelle est la probabilité qu'il se passe 2 semaines sans accident ?

c. Quelle est la probabilité que en 2 semaines on ait au plus 2 accidents ?

VI. Le nombre d'ordinateurs vendus chaque jour dans un magasin spécialisé suit une loi de Poisson de paramètre 4. On suppose que le nombre le ventes durant une journée est indépendant de celui des autres journées.

a. Calculer la probabilité qu'aucun ordinateur ne soit vendu dans une journée.

b. Quelle est la probabilité de vendre au moins 2 d'ordinateurs dans une journée ?

c. Quelle est la probabilité qu'en 2 journées on ait au maximum 2 ventes d'ordinateurs ?

VII. La probabilité pour qu'une imprimante imprime incorrectement un caractère est de 0,004.
On admet que les erreurs d'impression sont indépendantes les unes des autres. On imprime un texte de 1000 caractères et soit $X$ le nombre de caractères incorrectement transcrits dans ce texte.

a. Déterminer la loi de probabilité de $X$.

b. Quelle est la probabilité d'avoir au moins une erreur dans le texte ?

c. Par quelle loi de probabilité peut-on approximer la loi de $X$ ?

d. En utilisant l'approximation évoquée à la question précédente, calculer la probabilité d'avoir au moins 5 erreurs dans le texte.

VIII. On sait que la probabilité qu'une personne soit allergique à un certain médicament est égale à $10^{-3}$.
On s'intéresse à un échantillon de 1000 personnes. On appelle $X$ la variable aléatoire dont la valeur est le nombre de personnes allergiques dans l'échantillon.

a. Déterminer la loi de probabilité de $X$. Donner sa moyenne et sa variance

b. Exprimer sous forme d'une somme la probabilité $P(1 < \mathrm{X} < 6)$

c. En utilisant une approximation que l'on justifiera, donner une valeur approchée de $P(1 < \mathrm{X} < 6)$

d. Calculer la probabilité d'observer au moins deux personnes allergiques dans l'échantillon.

IX. Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre un ballon afin de le crever. À chacun de ces tirs, il a la probabilité 0,2 de crever le ballon. Le tireur s'arrête quand le ballon est crevé. Les tirs successifs sont supposés indépendants. Soit X le nombre de tirs nécessaires pour crever le ballon.

a. Quelle est la loi de $X$ ? Quel est le nombre de tirs moyen pour crever le ballon ? Quel est son écart type ?

b. Calculer $P\big(|X - E(X)| \geq 2\sigma(X)\big)$ et comparer avec l'inégalité de Tchebychev.

c. Ce tireur participe au jeu suivant :
dans un premier temps il lance un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6; soit k le numéro de la face obtenue. Le tireur se rend alors au stand de tir et il a droit à k tirs pour crever le ballon. Soit $Y$ la $v.a$ qui égale à 1 si le joueur crève le ballon et 0 sinon.
Quelle est la loi de $Y$ ?