Examen
SMC4-M26 : probabilités
Session de printemps

Durée : 2h

I. --(4 pts)

Pour se rendre à son lieu de travail, une personne a le choix entre quatre lignes de bus : $A, B, C\ et\ D$.
La probabilité qu'elle a de choisir la ligne A $(respectivement\ B, C)\ est\ 1/3$ $(resp. 1/4\ , 1/12\ )$.
La probabilité d'arriver au travail en retard par la ligne A $(resp. B, C)\ est\ 1/20$ $(resp. 1/10\ , 1/5\ )$.
Avec $la\ ligne\ D$, la personne n'est jamais en retard.

1) Quelle est la probabilité qu'elle choisisse la $ligne\ D$?
2) Quelle est la probabilité qu'elle arrive en retard à son lieu de travail ?
3) Calculer la probabilité que la personne ait choisi la $ligne\ C$, sachant qu'elle est arrivée en retard.

II. -- (4 pts)

Une usine fabrique des éprouvettes de laboratoire. Un contrôle de qualité montre que 2% des éprouvettes fabriquées ne sont pas conformes. On dispose d'un échantillon de 200 éprouvettes choisies au hasard.
Soit X la variable aléatoire dont la valeur est le nombre des éprouvettes non conformes dans l'échantillon.

1) Quelle est la loi de probabilité de X ? Quelles sont sa moyenne et sa variance ?
2) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins 2 éprouvettes non conformes dans l'échantillon.
3) En utilisant une approximation que l'on justifiera, donner une valeur approchée de $P\left(3 \le X \le 6\right)$.

III. -- (5 pts)

On considère l'élément radioactif $Iode$ 131 pour lequel la demi-vie (période radioactive) est 8,02 jours.
Soit X la variable aléatoire représentant la durée de vie de cet élément.

1) Quelle est la loi de X ? Quelle est la durée de vie moyenne de cet élément ?
2) Calculer la probabilité pour qu'un élément $Iode$ 131 ne soit pas désintégré après 16 jours.
3) Sachant qu'un élément radioactif $Iode$ 131 ne s'est pas désintégré après 16 jours, calculer la probabilité pour que cet élément ne se désintègre pas dans les 24 jours suivants.
4) Au bout de combien de jours cet élément se désintègrera-t-il avec une probabilité de 0,99 ?

IV. -- (3 pts)

Une entreprise produit des bouteilles d'eau minérale de $150\ cl$. Une bouteille est considérée comme « acceptable » si elle contient $150 \pm 2{,}5\ cl$ d'eau. Soit X la variable aléatoire qui correspond au volume d'eau contenu dans une bouteille. On suppose que X suit une loi normale : $N\left(150\ , 1{,}44\right)$.

1) Calculer la probabilité pour qu'une bouteille soit « acceptable ».
2) Sachant qu'une bouteille est « acceptable », quelle est la probabilité qu'elle contienne moins de $150cl$ d'eau ?

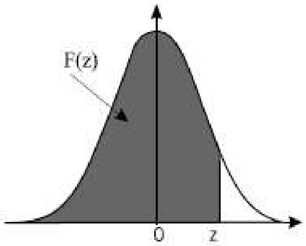
V. -- (4 pts)

Soit X une variable aléatoire continue ayant une densité de probabilité définie par :

$$f(x) = \begin{cases} k\,|x|^{\frac{1}{3}} & -1 \le x \le 1; \\ 0 & alleurs. \end{cases}$$

1) Quelle est la valeur de la constante k ?
2) Déterminer la fonction de répartition de X. En déduire la valeur de $P(-\frac{1}{8} < X \le \frac{1}{8})$.
3) Calculer la valeur de $E(X^2)$.

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite
(probabilité F(z) de trouver une valeur inférieure à z)



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de z

z	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
F(z)	0,998650	0,999032	0,999313	0,999517	0,999663	0,999767	0,999841	0,999892	0,999928	0,999952
z	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9
F(z)	0,999968	0,999979	0,999987	0,999991	0,999995	0,999997	0,999998	0,999999	0,999999	1,000000