TD : série 3
Variables aléatoires continues

Variables aléatoires

I. Soit X une variable aléatoire continue ayant une densité de probabilité définie par :

$$f(x)=\begin{cases} k|x|^3, & si\ -1\le x\le 1; \\ 0, & ailleurs. \end{cases}$$

1) La valeur de la constante k :

On a : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du = k\int_{-1}^{1}|u^3|\,du = 2k\int_{0}^{1}u^3du = 2k\left[\frac{u^4}{4}\right]_0^1 = \frac{k}{2}.$

Pour que *f(x)* soit une densité il faut que $f(x)\ge 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du = 1.$

D'où : $k=2$.

2) La fonction de répartition de X.

$$F_X(t)=P(X\le t)=\int_{-1}^{t}(-u^3)\,\mathrm{du}\begin{cases} 0 & si \quad t<-1 \\ 2\int_{-1}^{t}(-u^3)\,\mathrm{du}=\frac{1-t^4}{2} & si \quad -1\le t<0 \\ 2\left(\int_{-1}^{0}(-u^3)\,\mathrm{du}+\int_{-1}^{t}u^3\,\mathrm{du}\right)=\frac{1+t^4}{2} & si \quad 0\le t\le 1 \\ 1 & si \quad t>1 \end{cases}$$

$$P\left(-\frac{1}{2^n}<X\le\frac{1}{2^n}\right)=F_X\left(\frac{1}{2^n}\right)-F_X\left(\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2^{4n}};\mathrm{n}\ge 0\ .$$

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, calculer $E[X^n]$. En déduire la valeur de $E[X]$ et celle de $E[X^2]$.

$$E(X^n)=\int_{-\infty}^{+\infty}u^n f(u)du = 2\int_{-1}^{1}u^n|u^3|\,du = 2\left(\int_{-1}^{0}-u^{n+3}du+\int_{0}^{1}u^{n+3}du\right)$$

$$=2\left(\left[-\frac{u^{n+4}}{n+4}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{u^{n+4}}{n+4}\right]_0^1\right)=\frac{2}{n+4}\left((-1)^n+1\right)$$

Il en résulte : $E(X)=0 \quad et \quad E(X^2)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$

II. On choisit un nombre au hasard entre et –3 et 5. Soit X la valeur obtenue ; c'est une v.a.c uniforme sur l'intervalle $[-3\,,5]$. Alors le fonction de répartition de X est :

$$F_X(t)=P(X\le t)=P(X<t)=\begin{cases} 0 & si \quad t<-3; \\ \frac{t+3}{8} & si \quad -3\le t\le 5; \\ 1 & si \quad t>5. \end{cases}$$

1) La probabilité d'obtenir un nombre strictement inférieur à 1 :

$$P(X<1)=F_X(1)=\frac{1}{2}$$

2) La probabilité d'obtenir le nombre supérieur ou égal à 3 :

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - F_X(3) = 1 - \frac{6}{8} = \frac{1}{4}$$

3) La probabilité de choisir un nombre strictement inférieur à 1, sachant qu'il est strictement positif :

$$P\left({(X<1)}\big/{(X>0)} \right) = \frac{P((0<X<1))}{P(X>0)} = \frac{F_X(1) - F_X(0)}{1 - F_X(0)} = \frac{1}{5}.$$

III. La v.a X représente la durée de vie exprimée en milliers d'années d'une particule de carbone 14, elle suit une loi de Poisson de demi-vie T=5,7 milliers d'années :

1) On a par définition $P(X > T) = \frac{1}{2}$,

Ce qui implique : $e^{-\lambda T} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow T = \frac{\ln(2)}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(2)}{T} = \frac{\ln(2)}{5,7} \cong 0,1216$

La durée de vie moyenne d'une particule de carbone 14 est $E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{T}{\ln(2)} = \frac{5,7}{\ln(2)} = 8,2234.$

2) La probabilité qu'une particule de carbone 14 se désintègre au bout de 10 000 ans est :

$$P(X \leq 10) = 1 - e^{-10\lambda} = 1 - 0,2964 = 0,7036$$

3) La loi de X est sans mémoire : $P\left({X > t+s}\big/{X > t} \right) = P(X > s)$:.

Ainsi donc : $P\left({X > 10}\big/{X > 5} \right) = P(X > 5) = e^{-5\times\left(\frac{\ln(2)}{5,7}\right)} = 0,5444$

4) Cherchons une valeur ***d*** telle que : $P(X \leq d) = 0,95$:

$$P(X \leq d) = 0,95 \Leftrightarrow P(X > d) = 0,05 \Leftrightarrow e^{-\lambda d} = 0,05$$

Il en résulte : $d = -\frac{\ln(0,05)}{\lambda} = \frac{\ln(20)}{0,1216} = 24,6360.$

Une particule de carbone 14 se désintègre avec une probabilité de 0,95 au bout <u>24 636 années</u> .

IV. X suit la loi normale d'espérance $\mu = 5$ et d'écart-type $\sigma = 0,02$.

1) La probabilité pour que la longueur de la barre soit comprise entre 4,98 m et 5,0l9 m :

$$\begin{aligned} P(4,98 \leq X \leq 5,019) &= P\left(\frac{-0,02}{0,02} < \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{0,019}{0,02} \right) = P\left(-1 < \frac{X-\mu}{\sigma} \leq 0,95 \right) \\ &= \varphi(0,95) - \varphi(-1) = \varphi(0,95) - (1 - \varphi(1)) \\ &= \varphi(0,95) + \varphi(1) - 1 = 0,8289 + 0,8413 - 1 \\ &= 0,6702. \end{aligned}$$

2) Parmi les barres ayant une longueur supérieure à 5 m, quelle est la proportion de celles qui ont une longueur inférieure à 5,019 m.

$$P\left({(X < 5{,}019)}\Big/{(X > 5)} \right) = \frac{P\left((5 < X < 5{,}019)\right)}{P(X > 5)} = \frac{P\left(0 < \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{0{,}019}{0{,}02} \right)}{P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > 0 \right)}$$

$$= \frac{\varphi(0{,}95) - \varphi(0)}{1 - \varphi(0)}$$

$$= \frac{0{,}8289 - 0{,}5}{1 - 0{,}5}$$

$$= 0{,}6578.$$

3) La valeur du nombre réel a tel que : $P(\ \mu - a < X \leq \mu + a) = 95\%.$

On a :

$$P(\ \mu - a < X \leq \mu + a) = P\left(-\frac{a}{0{,}02} < \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{a}{0{,}02} \right)$$

$$= \varphi\left(\frac{a}{0{,}02}\right) - \varphi\left(-\frac{a}{0{,}02}\right) = 2\varphi\left(\frac{a}{0{,}02}\right) - 1$$

D'où :

$$P(\ \mu - a < X \leq \mu + a) = 95\% \Leftrightarrow 2\varphi\left(\frac{a}{0{,}02}\right) - 1 = 0{,}95 \Leftrightarrow \varphi\left(\frac{a}{0{,}02}\right) = 0{,}975$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{0{,}02} = 1{,}96 \Leftrightarrow a = 0{,}0392 \cong 0{,}04.$$

Remarque : On peut aboutir à ce résultat en utilisant les propriétés de la distribution de la loi normale : $P(\ \mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 95\%.$

V. L'épaisseur des composants varie selon une loi normale de moyenne $\mu = \mathbf{2}\ \boldsymbol{cm}$ et d'écart-type $\mathbf{0{,}05}\ \boldsymbol{cm}$.
Tous les composants dont l'épaisseur n'est pas comprise entre 1,88 cm et 2,12 cm sont inutilisables (sont rejetés).

1) La probabilité qu'un composant choisie au hasard soit utilisable :

$$P(1{,}88 \leq X \leq 2{,}12) = P\left(-2{,}4 \leq \frac{X-2}{0{,}05} \leq 2{,}4 \right) = \Phi(2{,}4) - \Phi(-2{,}4)$$

$$= 2\Phi(2{,}4) - 1 = 2 \times 0{,}9918 - 1 = 0{,}984$$

$\Phi(\mathrm{t})\ \textit{étant la fonction de réprtition de la loi}\ \mathcal{N}(0\ ,1\ )$

2) La proportion de composants qui ont une épaisseur inférieure à 2,05 cm parmi les composants utilisables est :

$$P\left(\{X<2,05\}\big/\{1,88\le X\le 2,12\}\right)=\frac{P\left(\{X<2,05\}\cap\{1,88\le X\le 2,12\}\right)}{P\left(\{1,88\le X\le 2,12\}\right)}$$

$$=\frac{P\left(\{1,88\le X<2,05\}\right)}{P\left(\{1,88\le X\le 2,12\}\right)}$$

$$=\frac{P\left(-2,4\le\frac{X-2}{0,05}<1\right)}{P\left(-2,4\le\frac{X-2}{0,05}\le 2,4\right)}$$

$$=\frac{\Phi(1)+\Phi(2,4)-1}{2\Phi(2,4)-1}=\frac{0,8413+0,9918-1}{0,9836}=0,847$$

3) On choisit au hasard un lot de $\boldsymbol{n}$ composants. On appelle Y la variable aléatoire dont la valeur correspond au nombre de composants inutilisables dans cet échantillon.

i. La loi de probabilité Y : Y est le nombre de succès (composant inutilisable) dans n répétitions d'épreuves de Bernoulli. La variable aléatoire Y suit alors une loi de binomiale de paramètres n et $p=P\left(\overline{1,88\le X\le 2,12}\right)=1-P\left(1,88\le X\le 2,12\right)=0,016$: $Y\sim\mathcal{B}(n\ ,\ 0{,}016)$

$$P(Y=k)=\binom{n}{k}(0,016)^k(0,984)^{n-k}$$

ii. La valeur de la probabilité d'avoir au plus 2% de de composants inutilisables.

- Dans le cas $n=200$, on a $np=3{,}28<5$; on peut approcher la loi de Y par la loi de Poisson de paramètre $\lambda=3{,}28$;

$$P(Y=k)=\binom{200}{k}(0,0164)^k(0,9836)^{200-k}\cong\frac{(3,28)^k}{k!}e^{-3,28}$$

D'où : $P(Y\le 4)=\sum_{k=0}^{4}P(Y=k)\cong e^{-3,28}\sum_{k=0}^{4}\frac{(3,28)^k}{k!}=0,766$

- Pour le cas $n=350$, on a $np=5{,}74>5\ \ et\ n(1-p)>5$; on peut approcher la loi de Y par la loi normale de paramètre $\mu=5{,}74\ et\ \sigma=\sqrt{np(1-p)}=2{,}377.$

On note par Z une v a de loi normale $\mathcal{N}(\mu\ ,\sigma^2\ )$:

$$P(Y\le 7)\approx P(Z<7,5)=P\left(\frac{Z-5,74}{2,377}<\frac{7,5-5,74}{2,377}\right)$$

$$=\Phi(0,74)=0,7704.$$