

Probabilités et statistique

Christophe GUYEUX

Jean-François COUCHOT

`guyeux[arobase]iut[moins]bm[point]univ[moins]fcomte[point]fr`
`couchot[arobase]iut[moins]bm[point]univ[moins]fcomte[point]fr`

1^{er} septembre 2010

Table des matières

I	Probabilités	3
1	Eléments d'analyse combinatoire	4
I	Rappels	4
II	Dénombrement : les permutations sans répétition	4
III	Dénombrement : les arrangements sans répétition	5
IV	Dénombrement : arrangements avec répétition	5
V	Dénombrement : les combinaisons sans répétition	6
VI	Propriétés des arrangements et des combinaisons	6
VII	Pascal et Newton	6
VIII	Autres exercices corrigés	7
2	Probabilités	8
I	Notions d'expérience aléatoire	8
II	Vocabulaire des événements	8
III	Définition d'une probabilité	9
IV	Probabilités conditionnelles	10
V	Evénements indépendants	12
VI	Probabilités totales	12
3	Les variables aléatoires discrètes	15
I	Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète	15
II	Fonction de répartition	16
III	Espérance mathématique, variance et écart-type	16
IV	Moment	18
V	Espérance d'une fonction quelconque de Y , $g(Y)$	19
VI	Principales probabilités de vad	20
VI.1	Loi de bernoulli	20
VI.2	Loi binomiale	20
VI.3	Loi de Poisson	21
4	Variables aléatoires continues	24
I	Densité de probabilité	24
I.1	Espérance et variance d'une variable aléatoire continue	25
I.2	Fonction de répartition	25
II	Quelques lois de probabilité de variables aléatoires continues	27
II.1	Loi uniforme ou rectangulaire	27
II.2	Loi exponentielle	29
II.3	La loi normale (ou de Laplace-Gauss)	31
II	Annexes	37
5	Les lois statistiques	38
I	Loi normale centrée réduite	38
I.1	Présentation	38
I.2	Caractéristiques	38

II	Loi du khi-deux	38
II.1	Présentation	38
II.2	Caractéristiques	39
III	Loi de Student	40
III.1	Présentation	40
III.2	Caractéristiques	41
6	Tables statistiques	43
.3	Table de la loi normale centrée réduite	44
.4	Table de la loi du khi-deux	45
.5	Table de la loi de Student	46

Première partie

Probabilités

Chapitre 1

Eléments d'analyse combinatoire

I Rappels

DÉFINITION 1.1. Factorielle La factorielle de n , noté $n!$, est le nombre égal à

- $0! = 1$,
- $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$.

EXEMPLE 1.2. $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ et $6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$.

REMARQUE 1.3. On peut encore définir ce nombre par récurrence :

- $0! = 1$,
- $n! = n \times (n-1)!$

REMARQUE 1.4. $(2n)! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n \times (n+1) \times \dots \times (2n-1) \times 2n$, ce qui n'est pas égal à $2 \times n!$

EXERCICE 1.5. 1. Calculez $7!$

2. Exprimez $(n+1)! - n!$

3. Exprimez le produit des nombres pairs jusqu'à $2n$, et le produit des nombres impairs jusqu'à $2n+1$.

DÉFINITION 1.6 (CARDINAL). On appelle *cardinal* d'un ensemble son nombre d'éléments. On note $\text{Card}(E)$ le cardinal de l'ensemble E .

PROPRIÉTÉ 1.7. $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$

DÉFINITION 1.8 (COMPLÉMENTAIRE). On note C_E^A l'ensemble, appelé *complémentaire de A dans E* , constitué des éléments appartenant à E , mais pas à A . On note parfois \overline{A} quand il n'y a pas d'ambiguïté.

II Dénombrement : les permutations sans répétition

Comme exemple d'introduction, considérons le nombre de dispositions de six objets discernables dans six cases consécutives numérotées avec un et un seul objet par case.

- Chacun des objets peut être placé dans la première case, ce qui donne six possibilités d'occuper la première place. Une fois la première place occupée par l'un des objets,
- il reste encore cinq candidats pour la deuxième place. La deuxième place étant attribuée,
- il reste seulement quatre candidats pour la troisième place,
- etc.
- pour l'avant-dernière place, il ne reste plus que deux objets,
- une fois l'un des deux placé, la dernière place doit être occupée par le dernier objet.

Il y a ainsi $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ ou $6! = 720$ possibilités de disposer six objets discernables.

Disposer des objets d'un ensemble E de cardinal n , dans n cases avec un et un seul objet par case, revient à ordonner les éléments de E . Compter le nombre d'ordonnement revient dans ce cas à compter le nombre de permutations sans répétition des éléments de E .

PROPRIÉTÉ 1.9. Il y a $n!$ permutations sans répétition de n éléments.

PREUVE La preuve se fait par récurrence sur n comme dans l'exemple ci-dessus. ■

EXERCICE 1.10. Dix livres deux à deux distincts sont placés côte à côte sur une étagère. Quel est le nombre de dispositions qui placent côte à côte trois livres fixées de la collection ?

III Dénombrement : les arrangements sans répétition

Nous disposons de n objets discernables et nous voulons en placer k , en tenant compte de l'ordre, dans k cases numérotées de 1 à k avec un et un seul objet par case.

Le nombre de dispositions est alors égal au nombre de listes de longueur k distinctes formées à partir de ces objets. Au lieu de constituer un n -uplet, à partir de n objets discernables, nous formons des k -uplets (x_1, x_2, \dots, x_k) à partir de ces n objets où les x_i sont distincts deux à deux.

DÉFINITION 1.11 (ARRANGEMENT SANS RÉPÉTITION). Un k -uplet (x_1, x_2, \dots, x_k) à partir de n éléments où les x_i sont distincts deux à deux s'appelle un *arrangement sans répétition* de k éléments pris dans n .

PROPRIÉTÉ 1.12. Le nombre d'arrangements sans répétition de k éléments pris dans n est égal à $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ (si $k \leq n$ et 0 sinon).

PREUVE En effet :

- il y a n choix possibles de l'objet qui occupe la première place du k -uplet,
- $n - 1$ choix pour l'objet de la deuxième place,
- etc.
- il ne reste plus que $n - (k - 1)$ objets pour la $k^{ième}$ place.

soit donc $n - k + 1$ choix possibles.

Le produit $n \cdot (n - 1) \dots (n - k + 1)$ s'écrit bien sous la forme : $\frac{n!}{(n-k)!}$. ■

EXERCICE 1.13. Il y a 100 morceaux de musique sur mon baladeur et je décide d'en sélectionner 10. Combien y a-t-il de sélections possibles si je tiens compte de l'ordre des morceaux ?

IV Dénombrement : arrangements avec répétition

On veut placer des objets pris parmi n objets discernables dans k emplacements en tenant compte de l'ordre et en supposant que ces objets puissent apparaître plusieurs fois. On cherche ainsi tous les k -uplets (x_1, x_2, \dots, x_k) formé à partir de ces n où les x_i ne sont pas nécessairement distincts. Un tel k -uplet s'appelle un *arrangement avec répétition* de k éléments pris parmi n .

PROPRIÉTÉ 1.14. Pour $k \geq 0$, il y en a au total n^k *arrangement avec répétition* de k éléments pris parmi n .

EXEMPLE 1.15. On tire 11 fois l'un de 3 numéros en tenant compte de l'ordre d'apparition. On obtient au total $3^{11} = 177147$ tirages différents.

V Dénombrement : les combinaisons sans répétition

Contrairement aux arrangements, les combinaisons sont des dispositions d'objets qui ne tiennent pas compte de l'ordre de placement de ces objets.

EXEMPLE 1.16. Par exemple, si a , b et c sont des boules tirées d'une urne, abc et acb correspondent au même tirage. Il y a donc moins de combinaisons que d'arrangements.

Si nous tirons *sans remise* k objets parmi n objets discernables, et nous les disposons sans tenir compte de l'ordre d'apparition, nous pouvons représenter ces k objets par une partie à k éléments d'un ensemble à n éléments. On appelle, de telles parties, des *combinaisons sans répétition* de k éléments pris dans n .

Pour déterminer le nombre de ces dispositions, nous pouvons calculer le nombre d'arrangements de k objets et diviser par le nombre de dispositions obtenues les unes à partir des autres par une permutation. Il y en a $\binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!}$.

EXEMPLE 1.17. Au loto, un tirage est constitué de cinq numéros entre 1 et 49 et d'un numéro « Chance » compris entre 1 et 10. Il y a ainsi $\binom{49}{5} \times 10 = \frac{49!}{5! \cdot 44!} \times 10 = 19068840$ choix possibles.

EXERCICE 1.18. On considère un jeu de 32 cartes ; les mains sont constituées de 8 cartes (non ordonnées.)

1. Quel est le nombre de mains possibles ?
2. Combien de mains contiennent l'as de cœur ?
3. Combien comprennent au moins un cœur ou une dame ?
4. Combien ne contiennent que des cartes de deux couleurs au plus ?

EXERCICE 1.19. Un gardien de zoo donne à manger à ses 13 singes.

1. Il distribue ses 8 fruits différents (une pomme, une banane, etc. . .). Combien y a-t-il de distributions possibles
 - (a) s'il donne au plus un fruit à chaque singe ?
 - (b) si chaque singe peut recevoir de 0 à 8 fruits ?
2. Mêmes questions si les 8 fruits sont 8 pommes Golden identiques.

VI Propriétés des arrangements et des combinaisons

PROPRIÉTÉ 1.20. Dans ce qui suit soit p et n des entiers tels que $0 \leq p \leq n$. On a

- $A_n^0 = \binom{n}{0} = 1$.
- $A_n^1 = \binom{n}{1} = n$.
- $A_n^n = n!$, mais $\binom{n}{n} = 1$.
- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
- $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$.

EXERCICE 1.21. Montrez toutes les propriétés précédentes

VII Pascal et Newton

Dans le triangle de Pascal ci-dessous, le nombre $\binom{n}{p}$ est donné au croisement de la ligne n et de la colonne p .

p	0	1	2	3	4	5	6	7
n								
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

On utilise le dernier item de la propriété 1.20 pour construire le triangle de Pascal.

PROPRIÉTÉ 1.22 (LE BINÔME DE NEWTON). Si a et b sont des nombres complexes,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

EXEMPLE 1.23. $(a - b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

EXERCICE 1.24. 1. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ et en déduire la valeur de la somme des termes de la n^{ieme} ligne du triangle de Pascal.

2. Montrer que pour tout k et n , $1 \leq k \leq n$ on a $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$
3. En déduire $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$

VIII Autres exercices corrigés

EXERCICE 1.25. On considère un jeu de 52 cartes, et une main de 13 cartes (non ordonnées).

1. Combien y a-t-il de mains en tout ?
2. Combien de mains :
 - (a) Contiennent les 4 as.
 - (b) Contiennent 4 trèfles, dont la dame de trèfle.
 - (c) Ne contiennent aucun coeur.
 - (d) Contiennent trois carreaux au plus.

Réponses : $\binom{52}{13}$, $\binom{48}{9}$, $\binom{12}{3} \times \binom{39}{9}$, $\binom{39}{13}$, et $\binom{39}{13} + \binom{13}{1} \times \binom{39}{12} + \binom{13}{2} \times \binom{39}{11} + \binom{13}{3} \times \binom{39}{10}$.

EXERCICE (CORRIGÉ) 1.26. Un tiroir contient 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures vertes et deux paires de chaussures rouges. On choisit deux chaussures au hasard.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien amènent deux chaussures de même couleur ?
3. Combien amènent un pied gauche et un droit ?
4. Combien permettent de reconstituer une vraie paire de chaussures ?

Réponses : $\binom{20}{2}$, $\binom{10}{2} + \binom{6}{2} + \binom{4}{2}$, 10×10 , $5 \times 5 + 3 \times 3 + 2 \times 2$.

EXERCICE (CORRIGÉ) 1.27. Une urne A contient deux boules blanches, 3 boules bleues et 5 rouges, toutes numérotées. Une urne B contient 4 boules bleues également numérotées. On tire simultanément 2 boules de l'urne A que l'on place dans l'urne B. Puis on tire simultanément 3 boules de l'urne B.

Quel est le nombre de tirages tricolores possibles, si l'on appelle tirage la succession des deux ensembles de numéros obtenus dans l'urne A, puis dans l'urne B ?

Réponse : $(5 \times 2) \times 4$

Chapitre 2

Probabilités

I Notions d'expérience aléatoire

DÉFINITION 2.1 (EXPÉRIENCE ALÉATOIRE). Une *expérience aléatoire* est une expérience ayant un nombre fini de résultats possibles, et dont il est impossible de connaître l'issue à l'avance.

DÉFINITION 2.2 (UNIVERS). L'*univers* est l'ensemble de toutes les issues possibles associées à cette expérience. On le note traditionnellement Ω .

DÉFINITION 2.3 (ÉVÉNEMENT). Un événement lié au lancé d'un dé peut être « Obtenir un nombre pair », ou encore « obtenir 5 ou 6 ». Il concrétise une attente, l'ensemble des résultats acceptables d'une expérience aléatoire. C'est une partie de Ω .

DÉFINITION 2.4 (ÉVÉNEMENT ÉLÉMENTAIRE). Un *événement élémentaire* est une issue possible, c'est-à-dire un sous-ensemble de Ω à un seul élément.

EXEMPLE 2.5. Notre expérience aléatoire consiste à lancer un dé à 6 faces. Alors $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, et $\{5\}$ est un événement élémentaire.

EXEMPLE 2.6. On considère l'expérience aléatoire : « lancer deux dés discernables à 6 faces ». Alors

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (1, 6), (2, 1), \dots, (2, 6), \dots, (6, 6)\}$$

et $\{(3, 3)\}$ est un événement élémentaire.

II Vocabulaire des événements

DÉFINITION 2.7 (PARTIES DE Ω). Soit une expérience aléatoire et Ω l'univers des possibles associé à cette expérience. L'ensemble $P(\Omega)$ de toutes les parties de Ω , est l'ensemble de tous les événements liés à Ω .

REMARQUE 2.8.

- Dans tout ce qui suit, on confond parfois l'événement avec la partie de Ω qui le définit ;
- Ω est l'événement certain ;
- \emptyset est l'événement impossible.

EXEMPLE 2.9. Soit l'expérience « Tirer à pile ou face ». Alors $\Omega = \{P, F\}$. Ici, $P(\Omega) = \{\emptyset, \{P\}, \{F\}, \{P, F\}\}$, ce qui représente tous les événements possibles et imaginables liés à une pièce.

EXEMPLE 2.10. Soit l'expérience « Lancer un dé imaginaire à 3 faces ». Alors

- $\Omega = \{1, 2, 3\}$,
- $P(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

et $\{1, 2\}$ est l'événement « obtenir un nombre strictement plus petit que 3 ».

DÉFINITION 2.11 (RÉUNION D'ÉVÉNEMENTS). La loi \cup dans $P(\Omega)$ correspond à l'emploi du *ou* inclusif entre deux événements.

EXEMPLE 2.12. Dans l'expérience « lancer un dé à 6 faces », $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, on considère les événements :

- A : « obtenir un nombre pair » = $\{2, 4, 6\}$,
- B : « obtenir un nombre impair » = $\{1, 3, 5\}$.

Alors $A \cup B$ est l'événement « obtenir un nombre pair ou un nombre impair », qui est égal à Ω .

DÉFINITION 2.13 (INTERSECTION D'ÉVÉNEMENTS). La loi \cap dans $P(\Omega)$ correspond à l'emploi du *et* entre deux événements.

EXEMPLE 2.14. Dans l'expérience précédente, on considère l'événement : C : « obtenir un nombre premier » = $\{2, 3, 5\}$. Alors $A \cap C$ est l'événement « obtenir un nombre pair et premier », qui est égal à $\{2\}$.

DÉFINITION 2.15 (ÉVÉNEMENT COMPLÉMENTAIRE). Soit A un événement lié à une expérience aléatoire d'univers associé Ω . On appelle *événement complémentaire* de A , et l'on note \overline{A} , l'ensemble

$$\{e_i \in \Omega \text{ tel que } e_i \notin A\}$$

des événements élémentaires n'appartenant pas à A .

EXEMPLE 2.16. On reprend l'expérience aléatoire précédente. L'événement complémentaire « d'obtenir un nombre pair en lançant un dé à six faces » est « obtenir un nombre impair en lançant un dé à six faces ». Celui « d'obtenir un nombre premier » est « obtenir 1, 4 ou 6 ».

EXERCICE 2.17. Écrire, à l'aide des opérations ensemblistes \cup , \cap , le passage au complémentaire et à l'aide des événements A , B , C , A_1, \dots, A_n , les événements suivants :

1. l'un au moins des événements A, B, C est réalisé,
2. l'un et l'un seulement des événements A ou B se réalise,
3. A et B se réalisent, mais pas C ,
4. Tous les événements $A_n, n \geq 1$ se réalisent,

propriétés

$$\text{PROPRIÉTÉ 2.18. } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

III Définition d'une probabilité

DÉFINITION 2.19 (PROBABILITÉ). Soit une expérience aléatoire et Ω son univers associé (supposé fini ou dénombrable). On appelle *probabilité*, notée p , toute application de l'ensemble des événements $P(\Omega)$ dans \mathbb{R} , qui vérifie :

- pour tout événement E , $0 \leq p(E) \leq 1$;
- $p(\Omega) = 1$;
- si deux événements E et F sont incompatibles ($E \cap F = \emptyset$), alors $p(E \cup F) = p(E) + p(F)$.

PROPRIÉTÉ 2.20. Si $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ (où les e_i sont donc des événements élémentaires), alors

$$p(E) = p(e_1) + p(e_2) + \dots + p(e_n).$$

$$\text{PROPRIÉTÉ 2.21. } p(\overline{E}) = 1 - p(E)$$

DÉFINITION 2.22 (EQUIPROBABILITÉ). L'équiprobabilité correspond au cas où les événements ont tous la même probabilité.

EXEMPLE 2.23. Lancer d'un dé non pipé, etc.

PROPRIÉTÉ 2.24. S'il y a n événements élémentaires équiprobables dans Ω , alors la probabilité de chaque événement élémentaire vaut $\frac{1}{n}$ et, pour tout événement E ,

$$p(E) = \frac{\text{nombre d'éléments de } E}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total } \Omega}$$

EXEMPLE 2.25. On tire au hasard un ensemble de 5 cartes dans un jeu de 32. Alors la probabilité que cette main contienne au moins un As est égale à $1 - \frac{C_{28}^5}{C_{32}^5}$

EXERCICE 2.26. $ABCDEF$ est un hexagone régulier. On place dans un sac six jetons indiscernables au toucher marqués de ces six lettres. On tire au hasard, et simultanément, trois jetons qui permettent de définir un triangle.

Quelle est la probabilité que ce triangle soit équilatéral ? Isocèle (sans être équilatéral) ? Rectangle ?

EXERCICE 2.27. Un représentant de commerce doit visiter successivement quatre villes A , B , C et D .

1. Déterminez tous les itinéraires permettant de visiter les quatre villes.
2. Le représentant choisit au hasard l'un de ces itinéraires.
 - (a) Calculez la probabilité que, sur cet itinéraire, les villes C et D se suivent dans cet ordre.
 - (b) Calculez la probabilité que cet itinéraire commence par la ville C et se termine par la ville D .
 - (c) Calculez la probabilité que, sur cet itinéraire, la ville C soit située avant la ville D .

EXERCICE 2.28. Une urne contient six jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à 6. On en tire simultanément deux au hasard. Calculez la probabilité de tirer :

1. deux numéros consécutifs,
2. deux numéros dont la somme vaut 7,
3. deux numéros premiers entre eux.

IV Probabilités conditionnelles

DÉFINITION 2.29 (PROBABILITÉ CONDITIONNELLE). Soit p une probabilité sur un univers Ω et A un événement de probabilité non nulle. La « probabilité que l'événement B soit réalisé sachant que A l'est déjà » est définie par

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

On l'appelle *probabilité conditionnelle*.

NOTATION : On note encore $P_A(B)$.

EXERCICE 2.31. Une société comprend 40% de cadres, 20% d'entre eux parlent l'anglais. On interroge au hasard un employé de la société et on considère les événements :

- C : « l'employé est un cadre »,
- A : « l'employé parle anglais ».

On demande :

1. De traduire, à l'aide des deux événements précédents, les données de l'énoncé.
2. Calculer la probabilité que l'employé interrogé soit un cadre qui parle anglais.

EXERCICE 2.32. Dans une population, 60% des familles ont une voiture, 65% des familles ont un téléviseur et 24% des familles n'ont ni voiture, ni téléviseur. On choisit une famille au hasard, calculer la probabilité que cette famille ait une voiture sachant qu'elle possède un téléviseur.

PROPRIÉTÉ 2.33.

$$p(\Omega/A) = 1$$

PROPRIÉTÉ 2.34 (FORMULE DES PROBABILITÉS COMPOSÉES).

$$p(A \cap B) = p(A/B)p(B) = p(B/A)p(A).$$

EXERCICE 2.35. Dans un lycée, 55% des élèves sont des filles, 22% d'entre-elles étudient l'allemand. On choisit au hasard un élève du lycée et on considère les événements :

- F : « L'élève est une fille ».
- A : « L'élève étudie l'allemand ».

On demande de :

1. traduire à l'aide des événements A et F , les données de l'énoncé ;
2. calculer la probabilité que l'élève choisi soit une fille qui étudie l'allemand.e

EXERCICE 2.36 (D'APRÈS BANQUE D'ÉPREUVES MATHÉMATIQUES BTS DUT 2006). Une chaîne de production fabrique des pièces mécaniques dont 80% sont bonnes (notations B) et 20% défectueuses (notation \overline{B}). Un test de contrôle rapide à la sortie de la chaîne permet d'accepter ou de refuser chaque pièce, mais celui ci est aléatoire. On note A l'événement « la pièce est acceptée », \overline{A} l'événement « la pièce n'est pas acceptée » par le test rapide. On observe que : Si la pièce est bonne, elle est acceptée avec une probabilité de 90%. Si la pièce est défectueuse, elle n'est pas acceptée avec une probabilité de 85%.

Pour chacune des questions suivantes, répondre par vrai ou faux en justifiant :

1. $P(A \cap B) = 72\%$;
2. $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 15\%$;
3. $P(A) = 75\%$;
4. la probabilité que la pièce soit bonne sachant qu'elle est acceptée est 72% ;
5. La probabilité que la pièce soit défectueuse sachant qu'elle n'est pas acceptée est 68%.

EXERCICE 2.37 (D'APRÈS BANQUE D'ÉPREUVES MATHÉMATIQUES BTS DUT 2005). Alice et Bruno sont les seuls candidats à un examen. La probabilité de la réussite d'Alice est de 90%, et celle de Bruno est de 60%. Leurs réussites sont indépendantes. On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre total de réussites à l'examen. X vaut donc 0 si tous les deux échouent, 1 si un seul des deux réussit, et 2 si tous les deux réussissent l'examen.

Pour chacune des questions suivantes, répondre par vrai ou faux en justifiant :

1. la probabilité d'avoir $X = 0$ (les deux échouent) est 50% ;
2. la probabilité d'avoir $X = 2$ (les deux réussissent) est 54% ;
3. la probabilité d'avoir $X = 1$ (un seul réussit) est 36% ;
4. la probabilité qu'Alice ait réussi, sachant que $X = 1$ est $\frac{6}{7}$
5. la probabilité que $X = 1$, sachant qu'Alice a réussi est $\frac{3}{7}$

EXERCICE 2.38. Dans une population, on étudie deux caractères génétiques notés A et B . 55% des individus possèdent le caractère A , 42% le caractère B , et 27% ne possèdent ni A ni B . On choisit un individu au hasard dans la population.

1. Calculez la probabilité qu'il possède le caractère A sachant qu'il possède déjà le caractère B .
2. Calculez la probabilité qu'il possède le caractère B sachant qu'il possède déjà le caractère A .

V Événements indépendants

DÉFINITION 2.39 (ÉVÉNEMENTS INDÉPENDANTS). Deux événements sont indépendants si $p(A \cap B) = p(A)p(B)$.

REMARQUE 2.40. Cela signifie que la réalisation de A n'intervient pas dans la réalisation de B . On a alors : $p(B/A) = p(B)$ et $p(A/B) = p(A)$.

EXEMPLE 2.41. On lance un dé rouge et un dé bleu, simultanément, tous deux ayant six faces. Les événements :

- A : « obtenir 1 avec le dé bleu »,
- B : « obtenir 4 avec le dé rouge »,

sont indépendants : le dé rouge se moque de savoir quel sera le résultat du dé bleu.

REMARQUE 2.42. $A \cap B$ est l'événement « obtenir 1 avec le dé bleu et 4 avec le rouge », et on a $p(A \cap B) = p(A)p(B) = 1/6/6 = 1/36$

EXERCICE 2.43. On fait l'hypothèse que chacun des moteurs d'un avion bi-moteur tombe en panne avec une probabilité égale à 0,0001 et ceci d'une façon indépendante de l'autre moteur.

Quelle est la probabilité que l'avion arrive à bon port sachant qu'il peut voler avec un seul moteur ?

VI Probabilités totales

DÉFINITION 2.44 (PARTITION DE L'UNIVERS). Dire que les événements B_1, \dots, B_n forment une partition de l'univers Ω signifie que les événements B_i sont deux à deux disjoints, et que leur réunion est égale à Ω .

PROPRIÉTÉ 2.45 (FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES). On suppose que les événements B_1, \dots, B_n forment une partition de l'univers Ω . Alors, pour tout événement A :

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n)$$

ou encore :

$$P(A) = P_{B_1}(A).P(B_1) + P_{B_2}(A).P(B_2) + \dots + P_{B_n}(A).P(B_n)$$

EXEMPLE 2.46. Deux étudiants e_1 et e_2 produisent du code. Ils produisent respectivement $1/3$ et $2/3$ des lignes de code d'un projet à rendre.

- e_1 écrit 50% de lignes boguées,
- e_2 écrit 60% de lignes boguées,

Soit les événements :

- A_1 : « la ligne de code provient de l'étudiant e_1 »,
- A_2 : « la ligne de code provient de l'étudiant e_2 »,
- B : « la ligne de code est boguée ».

1. Quelle est la probabilité que la ligne de code considérée provienne de e_1 ? Réponse : $p(A_1) = \frac{1}{3}$.
2. On choisit au hasard une ligne de code de e_1 . Quelle est la probabilité qu'elle soit boguée ? Réponse : $p(B/A_1) = \frac{50}{100}$.
3. On choisit une ligne au hasard du projet. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de e_1 et qu'elle soit boguée ? Réponse : $p(A_1 \cap B) = p(B/A_1)p(A_1) = \frac{1}{6}$.
4. On choisit au hasard une ligne du projet. Quelle est la probabilité qu'elle soit boguée ? Réponse : $p(B) = p(B/A_1)p(A_1) + p(B/A_2)p(A_2) = 1/6 + 2/5 = 17/30$.
5. Quelle est la probabilité qu'une ligne boguée soit écrite par e_1 ? Réponse : $p(A_1/B) = p(A_1 \cap B)/p(B) = 1/6/17 = 5/17$

EXERCICE 2.47. On dispose de deux urnes U_1 et U_2 indiscernables. U_1 contient 4 boules rouges et 3 vertes, U_2 contient 2 rouges et 1 verte. On choisit une urne au hasard, et on tire une boule de cette urne. Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?

EXERCICE 2.48. On teste l'efficacité d'un médicament sur un échantillon d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé. Dans cette expérience, 60% des individus prennent le médicament, les autres reçoivent un placebo. On étudie la baisse du taux de glycémie après l'expérimentation. On constate une baisse de ce taux chez 80% d'individus ayant pris le médicament : on ne constate aucune baisse pour 90% des personnes ayant pris le placebo. On choisit au hasard une personne dans l'ensemble Ω des individus ayant participé à l'expérience. Calculez la probabilité de l'événement « L'individu a une baisse du taux de glycémie ».

EXERCICE 2.49. Au RU, dans la vitrine pâtisserie,

- 60% des gâteaux sont à base de crème,
- parmi ceux qui sont à base de crème, 30% ont aussi des fruits,
- parmi les gâteaux qui n'ont pas de crème, 80% ont des fruits.

On prend un gâteau au hasard.

1. Calculez la probabilité d'avoir un gâteau à la crème et comportant des fruits.
2. Calculez la probabilité d'avoir un gâteau avec des fruits et sans crème.
3. Calculez la probabilité d'avoir un gâteau avec des fruits.

EXERCICE 2.50. Dans une usine, l'énergie électrique est fournie par deux générateurs. On fait l'hypothèse que sur une période donnée, chacun des générateurs tombe en panne avec une probabilité égale à 0,005 et ceci d'une façon indépendante de l'autre générateur. Quelle est la probabilité que sur cette période l'usine possède toujours un générateur en état de marche ?

EXERCICE (CORRIGÉ) 2.51. Battez un jeu ordinaire de 52 cartes, puis retournez les cartes à partir du dessus du paquet, une à une, jusqu'à ce que vous ayez retourné un as. Combien aurez-vous alors retourné de cartes, en moyenne ?

Réponse : 10,6.

EXERCICE (CORRIGÉ) 2.52. Dans un pays où il naît autant de filles que de garçons et où l'échographie n'est pas encore répandue, le docteur X prévoit le sexe des enfants à naître. Il se trompe une fois sur dix si c'est un garçon, et une fois sur 20 sinon. Il vient de dire à madame Y qu'elle attend une fille. Quelle est la probabilité que ce soit vrai ?

Réponse : $\frac{19}{21}$

EXERCICE (CORRIGÉ) 2.53. On suppose que la probabilité que l'anniversaire d'une personne tombe un mois donné est égale à $1/12$.

Six amis vont dîner ensemble au restaurant. Quelle est la probabilité que les anniversaires de ces six amis tombent tous dans des mois différents ?

Réponse : 0,00137.

EXERCICE (CORRIGÉ) 2.54. Denis affirme que Carine lui avait dit que Bob lui avait confié qu'Alice lui avait assuré qu'elle avait réussi les épreuves de son examen.

On sait que chacun des quatre amis dit la vérité une fois sur trois et ment deux fois sur trois. Quelle est la probabilité qu'Alice ait vraiment réussi son examen ?

Réponse : $\frac{41}{81}$.

EXERCICE 2.55. Une urne contient 3 boules bleues, 6 blanches et 9 rouges. On tire successivement deux boules. Déterminer la probabilité d'obtenir une boule blanche puis une rouge quand :

1. le tirage a lieu avec remise,
2. le tirage a lieu sans remise.

EXERCICE 2.56. Une urne contient 7 billets de 50 \$ et trois billets de 20 \$. On suppose que les 10 billets ont le même format. Soit l'expérience aléatoire consistant à tirer deux billets successivement et sans remise dans l'urne.

1. Si $A =$ « tirer deux billets de 50 \$, calculer $p(A)$
2. Si $A =$ « tirer un billet de 50 \$, puis un billet de 20, calculer $p(A)$

3. Si $A =$ « tirer un billet de 20 \$, puis un billet de 50, calculer $p(A)$
4. Quelle en est la loi de probabilité ?

EXERCICE 2.57. Soit l'expérience aléatoire consistant à tirer une carte d'un paquet de 52. Déterminer la probabilité des événements « tirer un as », et « tirer un coeur ».

EXERCICE 2.58. Une urne U_1 contient 6 boules rouges et 9 noires. Une urne U_2 contient 7 boules rouges, 3 noires et 18 vertes.

Soit l'expérience aléatoire consistant à tirer simultanément une boule dans chaque urne. Calculer la probabilité de tirer deux boules noires.

EXERCICE 2.59. On considère une partie de tarot à cinq. Soit les événements A : « il y a trois bouts dans le chien » ; B : « il y a deux bouts dans le chien » ; C : « il y a un bout dans le chien » et D : « il n'y a pas de bout dans le chien ».

1. Calculer $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$ et $p(D)$.
2. Calculer la probabilité d'avoir trois atouts dans le chien.
3. Calculer la probabilité de ne rien avoir de cela dans le chien.
4. Que se passe-t-il quand on joue à quatre ?

EXERCICE 2.60. Un club de tennis comporte, comme adhérents : 60% d'hommes pour 40% de femmes. Parmi les hommes, 30% pratiquent le tennis en compétition, pour 20% chez les femmes. On choisit au hasard un adhérent, et on note :

- H l'événement : « L'adhérent est un homme » ,
- F l'événement : « L'adhérent est une femme » ,
- C l'événement : « L'adhérent pratique le sport en compétition. »

On vous demande de

1. Trouvez les probabilités $p(H)$, $p(F)$ et $p_F(C)$.
2. Décrire l'événement $C \cup F$ et calculer sa probabilité.
3. Justifiez que $p(C) = \frac{13}{50}$.
4. L'adhérent choisi pratique le tennis en compétition. Quelle est la probabilité que cet adhérent soit une femme ?

Chapitre 3

Les variables aléatoires discrètes

I Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Considérons l'expérience aléatoire qui consiste à lancer trois fois une pièce de monnaie. Voici tous les résultats possibles de l'expérience :

$$\Omega = \{(F, F, F), (F, F, P), (F, P, F), (P, F, F), (F, P, P), (P, F, P), (P, P, F), (P, P, P)\}$$

Relions maintenant à chaque résultat le nombre de piles :

Résultats	(F, F, F)	$(F, F, P), (F, P, F), (P, F, F)$	$(F, P, P), (P, F, P), (P, P, F)$	(P, P, P)
Nombre de piles	0	1	2	3
Effectifs	1	3	3	1
Fréquence	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

La fonction Y qui fait correspondre à chaque triplet $(\dots, \dots, \dots) \in \Omega$ son nombre de piles est appelée une variable aléatoire.

DÉFINITION 3.1 (VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE). Une variable aléatoire discrète (vad) est une fonction définie sur l'ensemble Ω à valeur dans $Y(\Omega)$ qui est fini.

Dans l'exemple précédent, $\{0, 1, 2, 3\}$ étant fini, la variable aléatoire est discrète.

DÉFINITION 3.2 (FONCTION DE PROBABILITÉ D'UNE VAD). Soit Y une vad et $\{y_1, \dots, y_n\} = Y(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par Y . La *fonction de probabilité* de Y , notée f_Y , est définie par

$$\begin{aligned} f_Y : \{y_1, \dots, y_n\} &\rightarrow [0, 1] \\ y_i &\mapsto f_Y(y_i) = \frac{\text{effectif des antécédants de } y_i \text{ par } Y}{\text{effectif de } \Omega} = p(Y = y_i) \end{aligned}$$

La fonction de probabilité d'une vad possède deux propriétés.

PROPRIÉTÉ 3.3.

1. $0 \leq f_Y(y_i) \leq 1$ pour tout $y_i \in \{y_1, y_2, \dots\}$,
2. $\sum_{i \in \{1, 2, \dots\}} f_Y(y_i) = 1$.

REMARQUE 3.4. Par la suite,

- par souci de concision, on définit p_i par $p_i = f_Y(y_i) = p(Y = y_i)$;
- on trouve parfois les termes *loi* de probabilité de Y à la place de *fonction* de probabilité de Y .

EXERCICE 3.5. On lance deux fois un dé à six faces. Soit la variable aléatoire discrète X représentant le nombre de 6 obtenus. Déterminer la fonction de probabilité de X .

EXERCICE 3.6. Dans une fête foraine, pour une mise initiale de 3 €, le joueur est invité à lancer deux dés équilibrés à six faces, numérotées de 1 à 6.

1. Si les deux dés présentent le même chiffre, le joueur empoche le montant marqué par les dés (deux € pour le double un, etc.).
2. Si un seul 6 apparaît, le joueur gagne la valeur de l'autre dé.
3. Sinon, il a perdu.

En désignant par G la variable aléatoire définie par le gain algébrique du joueur, déterminez la loi de probabilité de G .

De façon générale, on dira qu'une loi d'une variable aléatoire discrète est connue si, pour chacune des valeurs possibles de cette variable, on connaît la probabilité. Ces probabilités sont soit écrites de façon exhaustive :

y_i	0	1	2	3	Total
p_i	0,064	0,288	0,432	0,216	1

(3.1)

ou soit sous une forme analytique :

$$p_i = C_3^i (0.6)^i (0.4)^{3-i} \text{ pour } i = 0, 1, 2, 3 \quad (3.2)$$

Ce sont deux formes équivalentes d'une même loi.

II Fonction de répartition

DÉFINITION 3.7. On appelle *fonction de répartition* de la variable aléatoire X l'application :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto p(X \leq x) \end{aligned}$$

PROPRIÉTÉ 3.8. la fonction de répartition F est croissante, continue par morceaux, et en escalier. On a de plus :

- $p(X > x) = 1 - F(x)$
- $p(a < X < b) = F(b) - F(a)$

III Espérance mathématique, variance et écart-type

Soit une variable aléatoire discrète Y dont la fonction de probabilité est notée $f_Y(y)$.

DÉFINITION 3.9 (ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE). L'*espérance mathématique* de Y , notée $E(Y)$, est la moyenne pondérée de Y (notée aussi μ_Y) :

$$E(Y) = \sum_{y_i \in \{y_1, y_2, \dots\}} y_i \cdot f_Y(y_i)$$

EXEMPLE 3.10. On a placé dans une urne cinq boules indiscernables au toucher : trois noires et deux blanches. On tire au hasard une à une toutes les boules de cette urne, et on appelle R le rang de la première boule blanche tirée. Déterminer la loi de probabilité de R et son espérance.

Réponse :

- le rang vaut 1 si on tire une blanche au premier tirage soit 2 chances sur 5 ;
- le rang vaut 2 si on tire une noire au premier tirage puis une blanche au second tirage soit 2 chances sur 5, soit $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$

– ...

x_i	1	2	3	4
p_i	$\frac{2}{5}$ = 0.4	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$ = 0.3	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3}$ = 0.2	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2}$ = 0.1

On a

$$E(X) = 1 \times 0.4 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.2 + 4 \times 0.1 = 2$$

EXERCICE 3.11. On lance deux dés cubiques bien équilibrés, dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Si la somme des résultats est paire, le joueur gagne 1 € ; sinon, il perd 1 €.

1. Précisez l'univers associé à l'expérience du lancer des dés, ainsi que la loi de probabilité correspondante.
2. G désigne la variable aléatoire donnant le gain d'un joueur ; déterminer la loi de probabilité de G , puis calculez son espérance.

PROPRIÉTÉ 3.12. On a :

- $E(k) = k$ (l'espérance d'une v.a.d. constante est cette constante)
- $E(X + k) = E(X) + k$
- $E(kX) = kE(X)$
- $E(kX + k') = kE(X) + k'$

DÉFINITION 3.13 (VARIANCE). La *variance* d'une v.a.d. Y est l'espérance des carrés des écarts à l'espérance

$$V(Y) = E\left((Y - E(Y))^2\right) = \sum_{y_i \in \{y_1, y_2, \dots\}} (y_i - E(Y))^2 \times f_Y(y_i)$$

NOTATION : On note souvent $\sigma_Y^2 = V(Y)$

PROPRIÉTÉ 3.15. La *variance* d'une v.a.d. Y s'obtient aussi par la formule

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$$

PREUVE 1 :

$$\begin{aligned} V(Y) &= \sum_{y_i} (y_i - E(Y))^2 f_Y(y_i) = \sum_{y_i} y_i^2 \times f_Y(y_i) - 2E(Y) \sum_{y_i} y_i \times f_Y(y_i) + E(Y)^2 \sum_{y_i} f_Y(y_i) \\ &= \sum_{y_i} y_i^2 \times f_Y(y_i) - 2E(Y) \times E(Y) + E(Y)^2 \times 1 \\ &= E(Y^2) - E(Y)^2 \end{aligned}$$

REMARQUE 3.16. La variance de X , v.a.d. prenant les valeurs x_1, x_2, \dots, x_n avec des probabilités p_1, p_2, \dots, p_n est

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - E(X)^2 = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \dots + p_n x_n^2 - E(X)^2$$

La variance est une estimation de l'écart moyen à la moyenne : plus les valeurs seront éloignées de la moyenne, plus la variance sera grande. Seulement, pour certaines raisons techniques, la variance s'intéresse au carré des écarts : elle n'est donc pas dans la même unité que X (si la variable aléatoire X est en €, la variance sera donc en carrés d'€). Pour cette raison, on introduit l'écart type, égal à la racine carrée de la variance.

DÉFINITION 3.17 (ÉCART TYPE). L'écart type de X est $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

REMARQUE 3.18. Cet écart type mesure l'écart moyen à la moyenne (de combien de points on s'écarte, en moyenne, de la moyenne μ_X).

EXERCICE 3.19. Calculez l'espérance, la variance et l'écart type de la loi de probabilité

x_i	-5	2	3
$p(X = x_i)$	0,3	0,6	0,1

EXERCICE 3.20. Faire de même avec

x_i	-10	-5	0	15	20
$p(X = x_i)$	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

IV Moment

DÉFINITION 3.21 (MOMENT D'ORDRE s). Le *moment d'ordre s* de Y est

$$m_s(Y) = \sum_{i=1}^n p_i y_i^s = p_1 y_1^s + p_2 y_2^s + \dots + p_n y_n^s$$

DÉFINITION 3.22 (MOMENT CENTRÉ D'ORDRE s). Le *moment centré d'ordre s* de Y est

$$\mu_s(Y) = \sum_{y \in Y(\omega)} (y - E(Y))^s f_Y(y)$$

REMARQUE 3.23. Pour $s = 2$, on retrouve la variance.

EXEMPLE 3.24. Dans une classe de 20 étudiants, sur un devoir, 5 étudiants ont eu la note 12, 10 étudiants la note 13 et 5 étudiants la note 14.

Loi de probabilité :

x_i	12	13	14
$p(X = x_i)$	5/20	10/20	5/20

- $E(X) = (5/20)12 + (10/20)13 + (5/20)14 = 13$
- $V(X) = (5/20)12^2 + (10/20)13^2 + (5/20)14^2 - 13^2 = 0,25$
- $\sigma = \sqrt{0,25} = 0,5$
- $m_3(X) = (5/20)12^3 + (10/20)13^3 + (5/20)14^3$
- $\mu_3(X) = (5/20)(12 - 13)^3 + (10/20)(13 - 13)^3 + (5/20)(14 - 13)^3$

EXEMPLE 3.25. Sur un deuxième devoir, 10 étudiants ont eu 20, 10 autres ont eu la note 6. Loi de probabilité :

x_i	6	20
$p(X = x_i)$	10/20	10/20

- $E(X) = (10/20)6 + (10/20)20 = 13;$
- $V(X) = (10/20)6^2 + (10/20)20^2 - 13^2 = 49;$
- $\sigma = \sqrt{49} = 7.$

EXEMPLE 3.26. On lance un dé au hasard. Un 6 rapporte 10 €, un 5 ou un 4 rapporte 6 €, un 3 rapporte 5 €, enfin un 2 ou un 1 ne rapporte rien. Soit X la v.a.d. qui à un événement associe son gain.

Loi de probabilité :

x_i	0	5	6	10
$p(X = x_i)$	1/3	1/6	1/3	1/6

- $E(X) = 4, 5$,
- $V(X) = 12, 58$ et
- $\sigma = 3, 55$

EXERCICE 3.27. On lance trois fois une pièce de monnaie équilibrée. Soit X la variable aléatoire discrète représentant le nombre de piles obtenus.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Déterminer la fonction de répartition F_X .
3. Calculer le mode, $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
4. Calculer le moment non centré d'ordre 3 ainsi que le moment centré d'ordre 3.

EXERCICE 3.28. Soit l'expérience aléatoire consistant à lancer simultanément deux dés non pipés distincts. Soit X la variable aléatoire discrète représentant la somme du résultat du premier dé avec celui du second dé.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Déterminer la fonction de répartition F_X .
3. Calculer le mode, $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

EXERCICE 3.29. On choisit au hasard deux numéros distincts de l'ensemble $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et on désigne par X leur produit, X étant une variable aléatoire discrète.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Déterminer la fonction de répartition F_X .
3. Calculer le mode, $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

EXERCICE 3.30. Soit l'expérience aléatoire consistant à lancer simultanément un dé non pipé et une pièce de monnaie dont les faces sont marquées $+3$ et -3 . Soit X la variable aléatoire discrète représentant la somme des chiffres obtenus.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Déterminer la fonction de répartition F_X .
3. Calculer le mode, $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

V Espérance d'une fonction quelconque de Y , $g(Y)$

Nous venons de définir et d'apprendre à calculer

$$\begin{aligned}\mu_Y &= E(Y) \\ \sigma_Y^2 &= E(Y - \mu_Y)^2\end{aligned}$$

On remarque alors que ces deux paramètres de la population sont, en quelque sorte, des moyennes. En statistiques, le concept de moyenne est très important. Souvent, on doit calculer la moyenne d'une fonction de Y , disons $g(Y)$, alors qu'on connaît la loi de Y et non celle de $g(Y)$.

DÉFINITION 3.31 (ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE DE $g(y)$). L'espérance mathématique de $g(Y)$, notée $E(g(Y))$, est définie par :

$$E(g(Y)) = \sum_{y \in Y(\Omega)} g(y) f_Y(y)$$

EXERCICE 3.32. Soit l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé non pipé. Soit X la variable aléatoire discrète représentant le numéro obtenu.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Si Y et W sont deux variables aléatoires discrètes avec $Y = (X - 3)$ et $W = Y^2$, déterminer la loi de probabilité de Y et celle de W .
3. Déterminer la fonction de répartition de Y et de W .
4. Calculer $E(X)$, $V(X)$.
5. En déduire $E(Y)$, $V(Y)$ et $E(W)$.

EXERCICE 3.33. Soit X une variable aléatoire discrète telle que : $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$. On suppose que les valeurs prises par X sont équiprobables. Si $Z = \frac{1}{X}$ est une variable aléatoire discrète, calculer $E(Z)$.

VI Principales probabilités de vad

VI.1 Loi de bernoulli

DÉFINITION 3.34 (EXPÉRIENCE DE BERNOULLI). On appelle *expérience de Bernoulli* une expérience ne donnant suite qu'à deux résultats possibles distincts généralement appelés succès (S) et échec (E) tel que $p(S) = \pi$.

EXEMPLE 3.35. Choisir aléatoirement une boule dans une urne ne contenant que deux types de boules, est une expérience de Bernoulli où s (obtenir une boule blanche, par exemple) et e (obtenir une boule noire) sont les deux seuls résultats possibles.

Les exemples d'application de ce modèle sont nombreux : les résultats S et E s'appellent souvent mâle et femelle, observé et non observé, mort et vivant, présent et absent, etc.

A partir d'une expérience de Bernoulli, on définit la variable aléatoire discrète Y comme suit :

- $Y = 0$ si échec,
- $Y = 1$ si réussite.

La variable de Bernoulli ne prend que deux valeurs, 0 et 1 avec les probabilités respectives $(1 - \pi)$ et π . On écrit alors :

y	0	1	Total
$f_Y(y)$	$1 - \pi$	π	1

Pour cette loi, on a

$$E(Y) = 0(1 - \pi) + 1\pi = \pi$$

et

$$E(Y^2) = 0^2(1 - \pi) + 1^2\pi = \pi$$

donc

$$V(Y) = \pi - \pi^2 = \pi(1 - \pi)$$

VI.2 Loi binomiale

DÉFINITION 3.36 (LOI BINOMIALE). Si l'on effectue n épreuves indépendantes, avec uniquement deux issues possibles (la réussite et l'échec), et si la variable aléatoire discrète X représente le nombre de réussites obtenues au bout des n épreuves, alors on dit que X suit une *loi binomiale* $B(n, \pi)$, où π est la probabilité de réussite. On a dans ce cas

$$p(X = x_i) = C_n^{x_i} \pi^{x_i} (1 - \pi)^{n-x_i}$$

REMARQUE 3.37. Cela revient à reproduire n fois une expérience de Bernoulli de paramètre π .

PROPRIÉTÉ 3.38. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale, alors $E(X) = n\pi$, et $V(X) = n\pi(1 - \pi)$.

La preuve de ce théorème est admise.

EXEMPLE 3.39. On effectue trois lancers d'une pièce. Soit X la variable aléatoire comptabilisant le nombre de Piles à la fin de ces lancers. Alors X suit une loi binomiale $B(3, 0.5)$, et l'on a

$$p(X = x_i) = C_3^{x_i} (0.5)^{x_i} (0.5)^{3-x_i} = C_3^{x_i} 0,125$$

D'où la loi de probabilité :

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	0,125	0,375	0,375	0,125

EXERCICE 3.40. Soit X une v.a. binomiale de paramètres $n=30$ et $\pi=6\%$.

1. Calculer $p(X = 6)$, $p(X \leq 3)$, $p(X < 3)$, $p(X = 7, 5)$, $p(3 \leq X \leq 6)$, $p(3 < X \leq 6)$.
2. Déterminer les valeurs de x_0 telles que $P(x_0 \leq X) \leq 0,63$.
3. Calculer $p(X = 24)$ dans le cas où $\pi=0,94$.

EXERCICE 3.41. Sachant que la probabilité d'avoir un garçon est de 48%, quelle est la probabilité pour une famille de 5 enfants, d'avoir 3 garçons et deux filles ?

EXERCICE 3.42. On considère une population où chaque individu est susceptible de posséder un caractère C avec la probabilité $\pi = 0,9$. On effectue 20 observations et on désigne par X le nombre d'individus ayant le caractère C dans l'échantillon.

1. Donner la loi de la variable aléatoire discrète X .
2. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.

EXERCICE 3.43. Dans un stand de tir, la probabilité pour qu'un tireur atteigne la cible est 0,4.

1. Sachant qu'il tire 10 fois, quelle est la probabilité pour qu'il atteigne la cible au moins 4 fois ?
2. Combien de fois doit-il tirer pour que la probabilité qu'il atteigne la cible au moins une fois soit supérieur à 0,9 ?

EXERCICE 3.44. On tire avec remise 7 cartes d'un jeu de 32 cartes. Soit X le nombre de rois obtenus. Déterminer la loi de probabilité, l'espérance et la variance de X .

EXERCICE 3.45. On dispose de 12 jetons numérotés de 1 à 12. On appelle « main » 4 jetons de numéros distincts tirés sans remise dans les 12 jetons, sans tenir compte de l'ordre de la distribution.

Pour chacune des questions suivantes, répondre par vrai ou faux en justifiant :

1. le nombre total de « mains » est 495 ;
2. il y a 30 « mains » ne comportant que des numéros pairs ;
3. il y a 120 « mains » comportant trois numéros pairs et un numéro impair ;
4. il y a 8 « mains » comportant 4 numéros consécutifs ;
5. il y a 70 « mains » comportant 4 numéros dont seulement 3 sont consécutifs ;
6. la probabilité de tirer une « main » dont la somme des numéros est 42 est $1/490$;
7. la probabilité de tirer une « main » ayant trois numéros pairs et un numéro impair est $8/33$;
8. la probabilité de tirer une « main » dont la somme des numéros est paire est 0,5 ;
9. la probabilité de tirer une « main » comportant 4 numéros consécutifs est $1/55$.

VI.3 Loi de Poisson

La loi de Poisson peut être vue comme une bonne approximation de la loi binomiale, dans le cas particulier où un succès est un événement rare (c'est-à-dire quand π est petit). De plus, elle est très utile pour étudier des phénomènes dont les résultats sont du type succès-échecs, mais dont le nombre d'échecs ne peut être évalué.

DÉFINITION 3.46 (LOI DE POISSON). Soit X une variable aléatoire discrète telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, f_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Alors on dit que X suit une *loi de Poisson* de paramètre λ que l'on note $P(\lambda)$.

On admettra le théorème suivant :

PROPRIÉTÉ 3.47.

$$E(X) = \lambda, V(X) = \lambda.$$

EXERCICE 3.48. Soit une v.a. de Poisson de paramètre $\lambda = 3$.

1. Calculer $P(X = 3)$, $P(X < 6)$, $P(7 \leq X)$, $P(6 < X < 9)$.
2. Déterminer les valeurs de x_0 telles que $P(X < x_0) \leq 0,9$.

EXERCICE 3.49. Le central téléphonique de la société X reçoit des appels à raison de 60 appels par heure en moyenne. En supposant que le nombre d'appels pendant un intervalle de temps quelconque suit une loi de Poisson, calculer la probabilité pour que, durant deux minutes, le central reçoive exactement trois appels.

EXERCICE 3.50. Le nombre d'accidents hebdomadaires à un croisement donné peut être modélisé par une variable X suivant une loi de Poisson $P(1)$.

1. Calculer la probabilité qu'une semaine donnée on n'enregistre aucun accident.
2. Calculer la probabilité qu'une semaine donnée on enregistre au plus trois accidents.
3. Sachant qu'une année comporte 52 semaines, déterminer le nombre moyen de semaines sans accident au cours d'une année.

Approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson

Lorsque n (le nombre d'expériences de Bernoulli) est grand, il devient techniquement difficile de calculer la probabilité normalement obtenue par la loi de Bernoulli.

Par exemple, la probabilité

$$p(Y = y) = C_{1000}^y (0,01)^y (0,99)^{1000-y}$$

est difficile à évaluer à moins d'utiliser une très grande précision de calcul exigée par la petite valeur de $\pi = 0,01$.

Lorsque n est grand et π est petit, le nombre $\lambda = n\pi$ est modéré, on peut prouver que :

$$C_n^y \pi^y (1 - \pi)^{n-y} \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!}$$

et donc

$$B(n, \pi) \approx P(\lambda)$$

C'est l'*approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson*.

Illustrons cela pour $\pi = 0.01$ et $n = 1000$ et $\lambda = n\pi = 10$

y	$C_{1000}^y \pi^y (1 - \pi)^{1000-y}$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!}$	Erreur
0	4.31712474107.10 ⁻⁵	4.53999297625.10 ⁻⁵	2.22868235183.10 ⁻⁶
1	0.000436073206168	0.000453999297625	1.79260914566.10 ⁻⁵
2	0.00220018754021	0.00226999648812	6.98089479117.10 ⁻⁵
3	0.00739322277822	0.00756665496041	0.000173432182191
4	0.018613745227	0.018916637401	0.000302892174045
5	0.0374531116082	0.0378332748021	0.000380163193824
6	0.0627371145626	0.0630554580035	0.000318343440815
7	0.0899865683626	0.0900792257192	9.26573566474.10 ⁻⁵
...
Total	1,0000	1,0000	

Si une erreur dans le calcul de la probabilité d'au plus 0,0020 est acceptable, alors l'approximation par la loi de Poisson est utilisée. Pour π et λ un peu plus grand, l'approximation est forcément moins bonne.

EXERCICE 3.51. Un restaurateur a un stock de 700 kg de steak de viande. Ces 700 kg contiennent des virus avec une moyenne de 3 virus par kilo. Une étude médicale montre qu'il est dangereux d'avaler au moins 9 virus. Un client commande un steak de 1 kilo et le mange ; quelle est la probabilité qu'il soit gravement malade ?

La nécessité de la loi de Poisson si le nombre d'échecs est inconnu

Pour utiliser une loi binomiale, on doit, en particulier, fixer la taille de l'échantillon n . Il existe des expériences où, même si l'observation est de type succès-échecs, le nombre d'échecs est, soit infini, soit inconnu.

Par exemple, si on peut compter le nombre d'appels téléphoniques reçus (succès) pour une période d'une heure, on ne peut pas, par contre, évaluer ceux qu'on aurait pu recevoir (échecs). De même, on peut compter le nombre de pucerons (succès) présents sur une feuille de chou, mais on ne peut pas évaluer le nombre de pucerons qui auraient pu être là, mais qui n'y sont pas (échecs).

On utilise la loi de Poisson lorsque l'espérance et la variance de l'échantillon sont du même ordre de grandeur.

EXEMPLE 3.52. A un péage d'autoroute, le nombre moyen d'arrivée des véhicules est de 30 véhicules par heure. Quelle est la probabilité pour que, durant 12 minutes, trois véhicules passent le péage ?

Réponse Nous sommes ici dans le cadre d'une loi de Poisson : les voitures arrivent au compte-goutte, on a affaire à un phénomène rare. Soit donc X la variable aléatoire (discrète) qui compte le nombre de véhicules arrivant audit péage en 12 minutes ; on vient de voir que X suit une loi de Poisson $P(\lambda)$. Il reste à déterminer le paramètre λ .

Sachant que trente véhicules, en moyenne, arrivent à ce péage en une heure, on en déduit qu'en 12 minutes, on est en droit d'attendre 6 véhicules. Or, λ est aussi l'espérance de la variable aléatoire X . Ainsi, $\lambda = 6$.

D'où $P(X_t = 3) = e^{-6} \frac{6^3}{3!} = 0,0892$: la probabilité pour que, durant 12 minutes, trois véhicules passent le péage est donc de 0,0892.

EXERCICE 3.53. On lance indéfiniment une pièce de monnaie avec laquelle la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0, 1[$. On note A_i l'événement "le i^{ieme} lancer donne un pile" et X la variable aléatoire discrète égale au numéro du lancer où est obtenu le premier face.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(X = k)$ en fonction des événements $A_i, i \in \mathbb{N}^*$ et calculer $P(X = k)$.
2. Déterminer l'espérance mathématique et la variance de X .

EXERCICE 3.54. Soit l'expérience aléatoire qui consiste à lancer indéfiniment un dé non pipé. Soit X la v.a. qui indique le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le nombre 3.

1. Déterminer la loi de la v.a. X .
2. Calculer la probabilité d'obtenir le numéro 3 au 12^e lancer.
3. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X .

EXERCICE 3.55. Supposons que le temps d'attente à un guichet automatique obéisse à une loi exponentielle avec une moyenne de temps d'attente égale à 15 minutes. Quelle est la probabilité qu'une personne attende entre 5 et 10 minutes à ce guichet ?

EXERCICE 3.56. Soit X une variable aléatoire discrète qui peut prendre chacune des valeurs 1,2,3,...,24 avec la même probabilité

1. Déterminer la loi de la v.a. X .
2. Calculer $P(X = 3)$.
3. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X .

EXERCICE 3.57. On tire avec remise 37 jetons d'une urne contenant 666 jetons numérotés de 1 à 666. Soit S la somme des numéros obtenus. Calculer l'espérance et la variance de S .

Chapitre 4

Variables aléatoires continues

I Densité de probabilité

Lorsque la variable aléatoire observée est continue, l'ensemble des valeurs prises par cette variable n'est pas dénombrable et, généralement, il est donné par un intervalle fini ou infini $[a, b]$. Sont généralement considérées comme variable aléatoire continues des variables du type suivant :

- la durée de vie,
- le poids,
- la température,
- la longueur,
- la vitesse,
- etc.

Le concept de variable aléatoire continue est une abstraction mathématique : la durée de vie d'une pièce électronique, le poids de la récolte de blé par hectare sont des caractères qui ne peuvent être mesurés qu'avec une précision limitée. Cela contredit, par le fait même, la définition de variable aléatoire continue dont l'ensemble des valeurs forme un intervalle.

Mais le modèle mathématique qu'entraîne le concept de variable continue nous fournit une simplification mathématique plus importante que l'imprécision qu'on doit accepter.

Pour une variable aléatoire discrète X , nous avons défini la densité de probabilité comme étant :

$$f_X(x) = p(X = x), x \in D_X (\text{domaine des valeurs de } X)$$

Cette fonction de densité possède les deux caractéristiques suivantes :

1. $f_X(x) \geq 0, \forall x \in D_X$,
2. $\sum_{x \in D_X} f_X(x) = 1$.

De façon semblable, on définit la densité de probabilité d'une variable aléatoire continue par les deux propriétés suivantes :

1. $f_X(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$,
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$.

EXEMPLE 4.1. Vérifions que la fonction

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ &= 0 & \text{ailleurs} \end{aligned}$$

satisfait aux propriétés d'une densité d'une variable aléatoire continue.

1. $f(x) = 3x^2 > 0$ pour $0 < x < 1$,
- 2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} 3x^2 dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^1 3x^2 dx + \int_1^{\infty} 0 dx = 1$$

DÉFINITION 4.2 (DENSITÉ DE PROBABILITÉ). On dit alors que cette fonction est une *densité de probabilité d'une variable aléatoire continue*, la densité de probabilité $f_X(x)$ n'est pas une probabilité, mais simplement une fonction à intégrer sur un intervalle pour obtenir la probabilité associée à cet intervalle.

Ainsi, la probabilité que la variable aléatoire X prenne une valeur dans un intervalle $[c, d]$ se calcule comme suit :

$$p(c \leq X \leq d) = \int_c^d f_X(x) dx$$

I.1 Espérance et variance d'une variable aléatoire continue

Soit une variable aléatoire continue X dont la densité est notée $f_X(x)$.

DÉFINITION 4.3 (ESPÉRANCE D'UNE VAC). On définit l'espérance de X , (appelé aussi moyenne), notée $E(X)$ (ou μ_X), le nombre

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

EXEMPLE 4.4. Soit la densité

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ &= 0 & \text{ailleurs} \end{aligned}$$

Notant que la densité n'est non nulle que sur l'intervalle $]0,1]$, on a

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x 3x^2 dx = \frac{3}{4}$$

Considérons la variable aléatoire continue X dont la densité est notée $f_X(x)$ et l'espérance $E(X)$.

DÉFINITION 4.5 (VARIANCE). On définit la *variance* de X , notée $V(X)$ (ou σ_X^2) par

$$V(X) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f_X(x) dx$$

REMARQUE 4.6. Il est souvent plus facile d'utiliser la formule suivante pour calculer une variance (que l'on admettra) :

$$V(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - E^2(X)$$

EXEMPLE 4.7. Reprenant l'exemple précédent, on veut calculer $V(X)$ en utilisant la formule précédente :

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 3x^2 dx = \frac{3}{5}$$

Alors

$$V(X) = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

PROPRIÉTÉ 4.8. Comme dans le cas discret, on a, pour une variable aléatoire continue,

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

I.2 Fonction de répartition

DÉFINITION 4.9 (FONCTION DE RÉPARTITION). La fonction de répartition d'une variable aléatoire X est la fonction

$$F_X(x) = p(X \leq x)$$

PROPRIÉTÉ 4.10. On a les liens suivants entre la densité de probabilité et la fonction de répartition :

1. $\int_{-\infty}^a f_X(x)dx = F_X(a) = p(X \leq a)$,
2. $\int_a^b f_X(x)dx = F_X(b) - F_X(a) = p(a < x \leq b)$,
3. $\int_a^{\infty} f_X(x)dx = 1 - F_X(a) = p(X > a)$.

DÉFINITION 4.11 (MÉDIANE). La *médiane* d'une VAC X de fonction de répartition F_X est le nombre m tel que $F_X(m) = \frac{1}{2}$.

EXERCICE 4.12. Si p est une loi de probabilité sur $[0; +\infty[$ de densité f définie par $f(x) = 2e^{-2x}$. Calculez $p([n; n+1])$ pour tout entier naturel n .

EXERCICE 4.13. P est une loi de probabilité sur $[1; 10]$ de densité f définie par $f(x) = \lambda x^{-2}$. Déterminez λ .

EXERCICE 4.14. Soit X la v.a. continue de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{32}x(4-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire X .

EXERCICE 4.15. Soit X la v.a. continue de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} ax & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où θ est un paramètre positif fixé

1. Déterminer la constante a en fonction de θ .
2. Calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire X .

EXERCICE (CORRIGÉ) 4.16. Soit X la v.a. continue de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer le mode de X .
2. Calculer l'espérance mathématique de X .
3. Calculer la variance de X et en déduire $\sigma(X)$.

Réponses : 1. 0, 2. 0, 3. $\frac{1}{6}$.

EXERCICE 4.17. Soit X la v.a. continue de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\theta-1} & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où θ est un réel positif fixé

1. Calculer l'espérance mathématique de X .
2. En déduire $V(X)$.
3. Sachant que la fonction de répartition de la v.a. X est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\theta} & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

déterminer la médiane de X .

EXERCICE 4.18. Soit X la v.a. continue de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2} & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où θ est un nombre positif fixé.

Calculer l'espérance mathématique de X , et $V(X)$.

EXERCICE 4.19. Soit X la v.a. continue de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{k}{(1-x)^2} & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la constante k .
2. Calculer la fonction de répartition de la v.a. X .
3. Calculer $E(X)$.

EXERCICE (CORRIGÉ) 4.20. Soit X la v.a. continue de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} ke^{-x} & \text{si } x > 4 \\ 0 & \text{si } x \leq a \end{cases}$$

où a est un réel donné

1. Déterminer la constante k .
2. Calculer la médiane de X .

Réponses : 1. $k = -\frac{3}{2}$

EXERCICE 4.21. Soit X la v.a. continue de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^3} & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que f_X est bien une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition de la v.a. X .
3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

EXERCICE 4.22. La variable aléatoire X a pour densité de probabilité au point x réel :

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|}, \theta \in \mathbb{R}$$

Déterminer la médiane de X , et calculer $E(X)$.

II Quelques lois de probabilité de variables aléatoires continues

Se rapportant aux deux conditions nécessaires pour dire qu'une fonction est une densité de probabilité, il est facile d'en écrire une infinité. Par contre, il y a des lois connues dont l'interprétation est facile et utile. Nous allons en détailler certaines.

II.1 Loi uniforme ou rectangulaire

DÉFINITION 4.23 (LOI UNIFORME). La *loi uniforme*, définie sur l'intervalle $[a, b]$ a pour densité de probabilité :

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}, x \in [a, b]$$

dont la courbe représentative est donnée à la figure 4.1. On note $U([a, b])$ une telle loi.

EXERCICE 4.24. Un appareil de mesure automatique du potassium sanguin est déréglé et donne des résultats entre 0 et 10 mmol/L de façon uniforme. Déterminer la densité de cette loi uniforme sur $[0, 10]$.

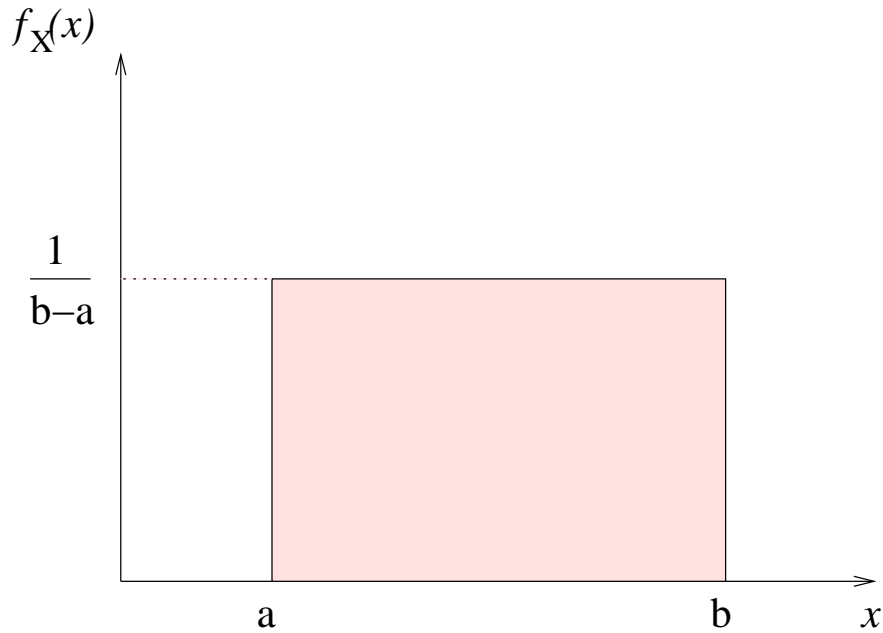


FIGURE 4.1 – Densité de probabilité d'une loi uniforme

PROPRIÉTÉ 4.25 (FONCTION DE RÉPARTITION D'UNE LOI UNIFORME). Si X suit une loi uniforme sur $[a, b]$, alors sa fonction de répartition est égale à

$$F_X(x) = p(X \leq x) = \frac{x - a}{b - a}$$

EXEMPLE 4.26. On tire aléatoirement un nombre réel entre -2 et 7. On considère donc une loi uniforme sur $[-2, 7]$. Dans ce cas, la probabilité d'obtenir un nombre inférieur à π vaut

$$F(\pi) = \frac{\pi - (-2)}{7 - (-2)} = \frac{\pi + 2}{9}$$

On peut calculer la moyenne et la variance de cette loi uniforme :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

De même,

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

Et donc

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dots = \frac{(a-b)^2}{12}$$

PROPRIÉTÉ 4.27. Si $X : U([a, b])$, alors

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, V(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$$

EXERCICE (CORRIGÉ) 4.28. On choisit un réel au hasard entre 0 et 1. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre entre $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{6}$.

Réponse : $P\left(\left[\frac{1}{8}; \frac{1}{6}\right]\right) = \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{6}} 1dx = \frac{1}{24}$.

EXERCICE 4.29. On tire aléatoirement un nombre entre 0 et 10.

1. Quelle loi de probabilité est ici concernée.
2. On obtient quel nombre en moyenne?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir 5?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre dont la partie entière est paire?

II.2 Loi exponentielle

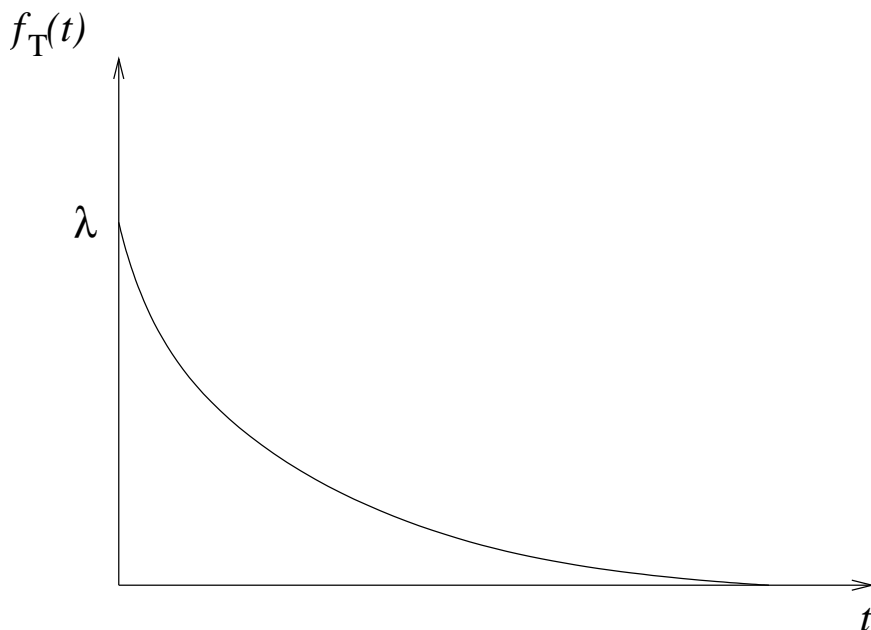
La loi exponentielle est associée à l'étude de la durée de vie, au temps d'attente entre deux événements aléatoires, ou à un temps d'attente pour une première observation d'un événement aléatoire A .

La variable aléatoire T (temps) peut prendre (conceptuellement, du moins) toutes les valeurs de $[0, \infty[$, et sa densité devrait décroître avec les grandes valeurs de T . Si T , par exemple, est la durée d'un appel téléphonique, il est vraisemblable que les longs appels téléphoniques soient moins fréquents.

DÉFINITION 4.30 (LOI EXPONENTIELLE). La variable aléatoire T obéit à une *loi exponentielle* de paramètre $\lambda > 0$, si sa densité est donnée par

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t} \text{ si } t > 0, \text{ et } 0 \text{ sinon}$$

Son graphe a alors l'allure suivante :



PROPRIÉTÉ 4.31 (FONCTION DE RÉPARTITION D'UNE LOI EXPONENTIELLE). La fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre λ vaut

$$F(t) = p(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} (t > 0)$$

PREUVE En effet, puisque la densité est nulle pour les valeurs négatives, on a

$$\forall t > 0, F(t) = \int_0^t f(t)dt = \int_0^t \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$$

EXEMPLE 4.32. On suppose que le temps d'attente dans une clinique vétérinaire obéit à une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2$. Calculons la probabilité que le temps d'attente soit inférieur à 3mn.

$$p(T \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda t} dt$$

donc

$$p(T \leq 3) = \int_0^3 0,2 e^{-0,2t} dt = 0,4512$$

EXERCICE (CORRIGÉ) 4.33. Une variable aléatoire X a une loi de probabilité exponentielle de paramètre λ sur $[0; +\infty[$. Calculez la valeur de λ sachant que la probabilité pour que X soit inférieur à 400 est égale à 0,01.

Réponse : $2,51 \cdot 10^{-5}$.

PROPRIÉTÉ 4.34. Soit X suivant une loi exponentielle de paramètre λ , alors

$$E(T) = \frac{1}{\lambda}, V(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

REMARQUE 4.35. La valeur de l'espérance permet, souvent, de déterminer le paramètre de la loi exponentielle. Si l'on pense que la durée de vie d'une ampoule peut être modélisée par une loi exponentielle, et si l'on sait que l'espérance de vie de l'ampoule est de 2000 heures, alors

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = 2000 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2000}.$$

EXERCICE 4.36. Calculez l'espérance et la variance de la variable aléatoire de l'exercice précédent.

La loi exponentielle est la loi des phénomènes sans mémoire : quand on s'intéresse à la désintégration du carbone C_{14} , l'atome ne sait pas combien d'années il a déjà vécu.

De même, la probabilité qu'une lampe grille ces dix prochaines heures sachant qu'elle a déjà servie 500 heures, n'est ni plus grande ni plus faible que la probabilité qu'elle grille au cours des dix premières heures de son existence : ces deux événements ont autant de chance de se produire.

PROPRIÉTÉ 4.37 (PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE D'UNE LOI EXPONENTIELLE). Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle. Alors

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^{+2}. P_{(X>t)}(X > s + t) = p(X > s)$$

EXEMPLE 4.38. Déterminer la probabilité que le bus arrive durant ces 20 prochaines minutes, sachant que l'on a déjà attendu 30 minutes, revient à déterminer la probabilité que le bus arrive durant les 20 (premières) minutes.

Autrement dit, la probabilité d'attendre (au moins) 20 minutes supplémentaires sachant que l'on a déjà attendu 30 minutes, est égale à la probabilité d'attendre 20 minutes.

Du fait de cette propriété fondamentale de la loi exponentielle (absence de mémoire), on utilise cette dernière dans les cas suivants :

- durée de vie de composants électronique
- probabilité, pour un camion, d'avoir une panne dans les x prochains kilomètres,
- désintégration des atomes de carbone 14,
- etc.

EXERCICE 4.39. Un camion roule en moyenne 40000 km avant d'avoir une panne. Calculez la probabilité :

1. Qu'il roule 50000km sans panne.

2. Qu'il roule 30000km sans panne, sachant qu'il a déjà fait 20000km.
3. Qu'il roule 20000 km sans panne, sachant qu'il a déjà fait 15000 km.

EXERCICE 4.40. On admet que la durée de vie (en heures) d'une ampoule d'un certain modèle peut être modélisée par une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,002$.

1. Calculez la probabilité qu'une ampoule du modèle étudié ait une durée de vie supérieure à 800 heures.
2. Calculez la probabilité qu'une ampoule du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 500 heures.
3. Calculez la valeur de t pour laquelle $p(X \leq t) = p(X \geq t)$. Que représente concrètement cette valeur de t ?

EXERCICE (CORRIGÉ) 4.41. Une variable aléatoire X a une loi de probabilité exponentielle de paramètre λ sur $[0; +\infty[$. Calculez la valeur de λ sachant que la probabilité pour que X soit inférieur à 70 est égal à 0,05.

Réponse : $7,33 * 10^{-4}$

EXERCICE 4.42. La durée de vie X (en heures) d'un composant électronique a été modélisée par la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0006$ sur $[0; +\infty[$.

1. Quelle est la probabilité qu'un de ces composants, pris au hasard, ait une durée de vie inférieure à 1000 heures ?
2. Quelle est la probabilité qu'un de ces composants, pris au hasard, soit encore en état de marche au bout de 500 heures ?

EXERCICE 4.43 (D'APRÈS BANQUE D'ÉPREUVES MATHÉMATIQUES BTS DUT 2005). Une usine fabrique des ampoules électriques. La durée de fonctionnement exprimée en années d'une ampoule électrique produite par cette usine est une variable aléatoire T de densité f avec $f(t) = 2e^{-2t}$ pour $t \geq 0$, et $f(t) = 0$ pour $t < 0$. Pour chacune des questions suivantes, répondre par vrai ou faux en justifiant :

1. La durée de vie moyenne d'une ampoule électrique est de 2 ans.
2. L'écart type de la durée de vie d'une ampoule électrique est d'une demi année.
3. La probabilité qu'une ampoule électrique dure plus d'un an est $\frac{1}{e}$
4. Il est impossible qu'une ampoule électrique dure plus de 4 ans.
5. La probabilité qu'une ampoule dure plus de 2 ans, sachant qu'elle a déjà fonctionné 1 an est de $\frac{1}{e^2}$.

II.3 La loi normale (ou de Laplace-Gauss)

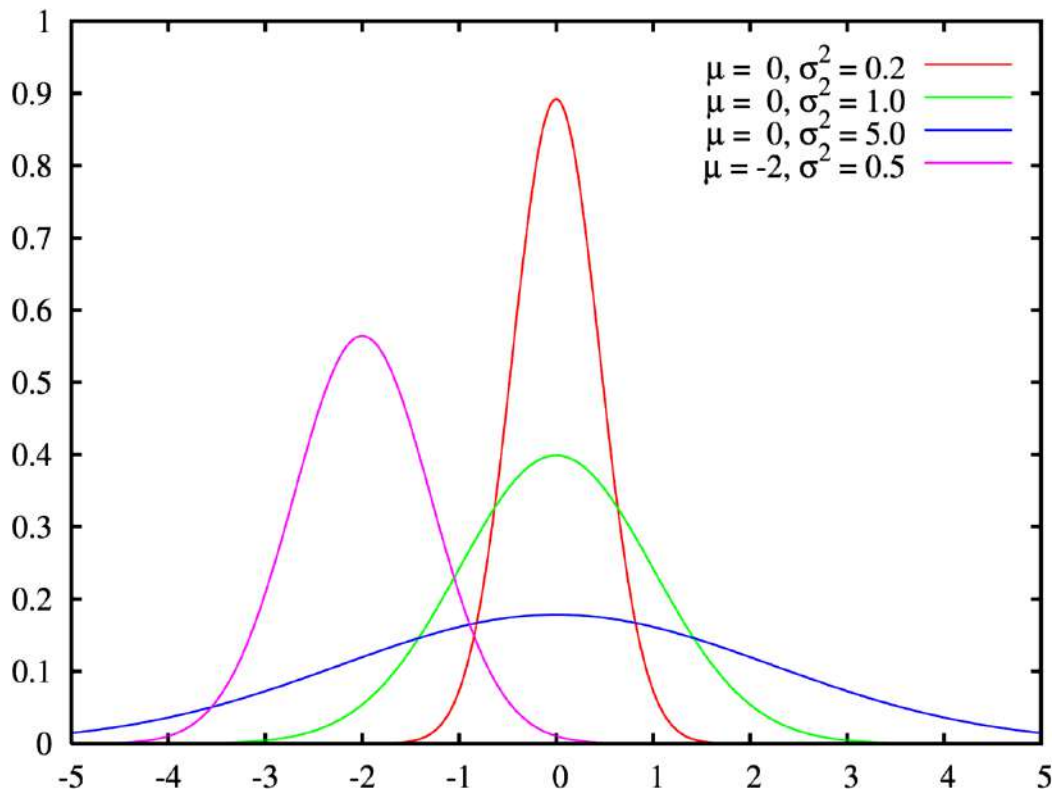
Au XVIII^e s., Abraham de Moivre chercha à comprendre le comportement à la limite de la loi binomiale : quelle loi suit $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$, avec X_n suivant une loi de Bernoulli de probabilité $\frac{1}{2}$ (comment se comporte, à l'infini, le tirage à pile ou face...)

DÉFINITION 4.44 (LOI NORMALE). On dit qu'une VAC X suit une *loi normale* de paramètre μ et σ si sa densité est égale à :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

PROPRIÉTÉ 4.45. μ et σ^2 sont respectivement la moyenne et la variance de la variable aléatoire X .

La densité de la loi normale est symétrique par rapport à la droite $x = \mu$ et possède deux points d'inflexion dont les abscisses sont $\mu - \sigma$ et $\mu + \sigma$.



NOTATION : Puisque la loi normale est caractérisée complètement par les paramètres μ et σ^2 , on écrit $X : N(\mu, \sigma^2)$ pour indiquer que X obéit à la loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 .

PROPRIÉTÉ 4.47. On pourrait montrer que

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \mu$$

et que

$$V(X) = \sigma^2$$

Il est aussi possible de calculer

$$p(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = \int_{\mu - \sigma}^{\mu + \sigma} f_X(x) dx \simeq 0,68$$

$$p(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = \int_{\mu - 2\sigma}^{\mu + 2\sigma} f_X(x) dx \simeq 0,95$$

$$p(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = \int_{\mu - 3\sigma}^{\mu + 3\sigma} f_X(x) dx \simeq 0,995$$

Il en résulte que si $X : N(\mu, \sigma^2)$, on doit s'attendre à trouver, pour un échantillon de grande taille ($n > 100$) :

- 68 % des observations dans l'intervalle $\mu \pm \sigma$
- 95 % des observations dans l'intervalle $\mu \pm 2\sigma$
- et presque toutes les observations dans l'intervalle $\mu \pm 3\sigma$

EXEMPLE 4.48. La durée de la grossesse pour les humains suit une loi normale de moyenne 266 jours et d'écart-type 16 jours. Il est possible de calculer la proportion de nourrissons se présentant avec deux semaines de retard en calculant :

$$p(X \geq 280) = \int_{280}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}16} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-266}{16}\right)^2} dx$$

Après quelques calculs laborieux, on trouverait :

$$p(X \geq 280) = 0,1908 \text{ (ou 19\% des nourissons)}$$

Il serait extrêmement pénible de calculer des intégrales de ce type à chaque fois que l'on désire évaluer une probabilité d'une loi normale. Pour éviter cela, on va utiliser un changement de variable qui amènera une variable $X : N(\mu, \sigma^2)$ à une variable $Z : N(0, 1)$...

La loi normale centrée réduite

La primitive de la densité de probabilité f de la loi normale centrée réduite ne peut pas s'exprimer à l'aide des fonctions de référence.

Les probabilités associées à la loi normale centrée réduite ne peuvent donc pas se calculer directement, en utilisant une primitive. Il a donc été décidé de calculer approximativement (calcul approché d'intégrales) un grand nombre de probabilités pour $N(0; 1)$, et de collecter ces données dans une table (voir annexe).

On trouve, dans cette table (qu'il faut savoir lire), les probabilités $P(X \leq x_0)$, pour x_0 allant de 0 à 3,99. Ces valeurs suffisent, car :

1. Si l'on souhaite calculer $P(X \leq x_0)$, pour $x_0 > 3,99$, alors cette probabilité est supérieure à $P(X \leq 3,99)$, qui est égale à 1.
2. Si l'on souhaite calculer $P(X \leq -x_0)$, pour $x_0 > 0$, alors (du fait de la propriété suivante) on calcule $P(X \geq x_0)$, qui vaut ce que l'on cherche :

$$P(X \geq x_0) = P(X \leq -x_0) \text{ pour } X : \mathcal{N}(0; 1)$$

3. Enfin, rappelons que $P(X \geq x_0) = 1 - P(X \leq x_0)$.

PROPRIÉTÉ 4.49 (PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION DE LA LOI $N(0; 1)$). Soit

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Alors on a

$$F(-x) = 1 - F(x)$$

EXEMPLE 4.50. En utilisant la table de la loi normale centrée réduite :

1. $p(X \leq 3,17) = F(3,17) = 0,9992$,
2. $p(X \geq 2,24) = 1 - p(X \leq 2,24) = 1 - F(2,24) = 1 - 0,9875 = 0,0125$,
3. $p(1,56 \leq X \leq 2,13) = p(X \leq 2,13) - p(X \leq 1,56) = F(2,13) - F(1,56) = 0,9834 - 0,9406 = 0,0428$
4. $p(X \leq -1,5) = F(-1,5) = 1 - F(1,50) = 1 - 0,9332 = 0,0668$.

EXERCICE 4.51. La v.a. X suit une loi normale $N(0, 1)$. Calculer $p(X < 0,33)$, $p(X < 2,1)$, $p(X \leq 2,57)$, $p(X > 1)$, $p(X < -0,42)$, $p(X \leq -0,7)$, $p(X > -0,12)$.

Remarquons pour finir que l'on a toujours (indépendamment de la loi considérée :

- $P(|X| \geq x_0) = P(X \geq x_0) + P(X \leq -x_0)$,
- $P(|X| \leq x_0) = P(X \leq x_0) - P(X \leq -x_0)$ (attention au signe).

Relation entre la loi normale $N(\mu; \sigma^2)$ et $N(0; 1)$

Si la loi normale est quelconque, disons $N(\mu, \sigma^2)$, il faut d'abord utiliser la transformation :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

avant d'utiliser la table de $N(0; 1)$.

Voici un exemple illustrant les principaux cas :

EXEMPLE 4.52. Considérons $X : N(3, 4)$:

1. $p(X \leq 5) = p(Z \leq (5 - 3)/2) = p(Z \leq 1) = 0,8413$,
2. $p(X \leq 3,9) = p(Z \leq (3,9 - 3)/2) = p(Z \leq 0,45) = 0,6736$,
3. $p(X \geq 2,2) = p(Z \geq (2,2 - 3)/2) = 1 - p(Z \leq -0,4) = 1 - (1 - F(0,4)) = 1 - 0,2446 = 0,6554$,
4. $p(|X| \geq 3,4) = p(X \leq -3,4) + p(X \geq 3,4) = 0,4214$,
5. $p(|X| \leq 2,0) = 0,3023$.

REMARQUE 4.53. On remarquera que, pour $X : \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, où $\mu \neq 0$, on n'a plus $P(X \leq -x_0) = P(X \geq x_0)$.

EXERCICE 4.54. La v.a. X suit une loi normale $N(1, 4)$. Calculer $p(X < 0,33)$, $p(X < 2,1)$, $p(X \leq 2,57)$, $p(X > 1)$, $p(X < -0,42)$, $p(X \leq -0,7)$, $p(X > -0,12)$.

EXERCICE 4.55 (D'APRÈS BANQUE D'ÉPREUVES MATHÉMATIQUES BTS DUT 2006). Des objets fabriqués en usine ont une durée de fonctionnement (en années) T qui suit la loi normale $N(m, \sigma^2)$. On sait que : $P(\{T < 8,335\}) = 5\%$ et $P(\{T > 11,96\}) = 2,5\%$.

En consultant une table de la loi normale centrée-réduite $N(0, 1)$, on constate que si X suit cette loi, $P(\{X < 1,645\}) = 95\%$, $P(\{X < 1,96\}) = 97,5\%$, $P(\{X < 2,575\}) = 99,5\%$.

Pour chacune des questions suivantes, répondre par vrai ou faux en justifiant :

1. on a $\frac{8,335-m}{\sigma} = 1,645$
2. on a $\frac{11,96-m}{\sigma} = 1,96$
3. on a $\begin{cases} m - 1,645\sigma &= -8,335 \\ m + 1,96\sigma &= 11,96 \end{cases}$
4. on a $m = 10$
5. on a $\sigma = 2$
6. on a $P(8,335 < T < 11,96) = 92,5\%$
7. on a $P(8,04 < T < 11,96) = 95\%$
8. on a $P(T > 2,575) = 1\%$
9. La probabilité conditionnelle que $T < 11,96$ sachant que $T > 8,04$ est $P(T < 11,96 | T > 8,04) = 5\%$
10. La probabilité conditionnelle que $T > 11,96$ sachant que $T < 8,04$ est $P(T > 11,96 | T < 8,04) = 0$

EXEMPLE 4.56. Supposons que la théorie dise que le contenu en acide ascorbique par 100 grammes de haricots de Lima obéisse à la loi $N(96mg, 620mg^2)$.

La proportion des observations Y d'acide ascorbique par 100 grammes de haricots qui dépasse 110 mg est selon ce modèle donné par :

$$p(Y > 110) = p\left(\frac{110 - 96}{\sqrt{620}}\right) \approx 1 - p(Z \leq 0,56) = 0,2877$$

EXERCICE 4.57. Soit Z la variable aléatoire obéissant à la loi normale centrée réduite. Calculez :

1. $p(Z \geq 1)$,
2. $p(Z \leq -1)$,
3. $p(Z \geq 0)$,
4. $p(|Z| \leq 1,645)$,

5. $p(|Z| \geq 1,96)$,
6. $p(Z^2 \geq 3,84)$.

EXERCICE 4.58. Soit X la variable aléatoire obéissant à la $N(2,9)$. Calculez :

1. $p(X \leq 3)$,
2. $p(1 \leq X \leq 3)$,
3. $p(|X| \geq 1)$,
4. $p(|X| \leq 1,5)$,
5. $p(X \geq 2)$,
6. $p(X^2 \geq 4)$.

EXERCICE 4.59. On suppose que la longueur d'une espèce de serpent suit une loi normale de moyenne 200 cm et de variance 50 cm^2 . Quelle est la longueur qu'un serpent doit avoir ; pour qu'il y ait 5 % des serpents de son espèce dont la longueur soit plus petite ou égale à la sienne ?

Réponse : $X : N(200; 50)$. On cherche l tel que $p(X \leq l) = 0,05 \iff P\left(Y \leq \frac{l-200}{\sqrt{50}}\right) = F\left(Y \leq \frac{l-200}{\sqrt{50}}\right) = 1 - 0,05 = 0,95. \iff \frac{l-200}{\sqrt{50}} = 1,645 \iff l = 211,45$.

EXERCICE 4.60. Soit une loi normale centrée réduite. Déterminer le réel x_0 dans les trois cas suivants :

1. $p(X \leq x_0) = 0,0239$
2. $p(X > x_0) = 0,8315$
3. $p(X < x_0) = 0,0082$

Réponses : 1. $F(x_0) = 0,0239 \iff 1 - F(-x_0) = 0,0239 \iff F(-x_0) = 0,9761 \iff -x_0 = 1,98$ 2. $p(X > x_0) = 0,8315 \iff 1 - F(x_0) = 0,8315 \iff F(x_0) = 0,1685 \iff F(-x_0) = 1 - 0,1685 = 0,8315 \iff -x_0 = 0,96$

EXERCICE 4.61. La v.a. X suit une loi normale $N(3,4)$. Calculer $p(X < 4)$, $p(X < 6)$, $p(X \leq 5)$, $p(X > 1)$, $p(X < 4)$, $p(1 \leq X \leq 2)$, $p(X > 3)$. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $Y = 3X + 1$?

EXERCICE 4.62. Soit X une variable aléatoire de loi normale $N(m, \sigma^2)$. On sait que $p(X > 3) = 0,8413$ et $p(X > 9) = 0,0228$. Calculer m et σ .

Réponse : $P(X > 3) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} > \frac{3-m}{\sigma}\right) = P\left(Y > \frac{3-m}{\sigma}\right)$ où $Y : N(0,1)$.

$$\iff P\left(Y > \frac{3-m}{\sigma}\right) = 1 - F\left(\frac{3-m}{\sigma}\right) = 0,8413$$

$$\iff F\left(\frac{m-3}{\sigma}\right) = F(1,00) \iff \frac{m-3}{\sigma} = 1$$

La deuxième égalité donne : $\frac{9-m}{\sigma} = 2$.

On est donc ramené à un système de deux équations à deux inconnues, dont les solutions sont $\sigma = 2, m = 5$.

EXERCICE 4.63. Soit Y une variable aléatoire de loi $N(1,2)$. On définit la variable aléatoire X par $Y = \ln(X-2)$.

1. Calculer $p(2,1 < X < 3)$
2. Sachant que X est une variable aléatoire normale telle que $p(X < -1) = 0,5$ et $p(-1,6 < X < -0,4) = 0,7$, déterminer $E(X)$ et $V(X)$.

EXERCICE 4.64. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale $N(m_1, \sigma_1^2)$. Soit Y une variable aléatoire qui suit une loi normale $N(m_2, \sigma_2^2)$. Y et X sont deux v.a. indépendantes.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire $Z = X + Y$.
2. Même question pour la variable aléatoire $W = aX + bY$.
3. Quelle est la loi de $\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$? On supposera les v.a. X_i indépendantes et de même loi que X .

PROPRIÉTÉ 4.65. Soit une variable aléatoire X suivant une loi normale $N(m; \sigma^2)$, et $T = \frac{X - m}{\sigma}$, qui suit donc une loi normale centrée réduite. Alors

1. $p(m - \sigma < X < m + \sigma) = p(-1 < T < 1) = 2\pi(1) - 1 = 0,64$. Par exemple, 64% d'une population est proche de l'âge moyen m à σ près.
2. $p(m - 2\sigma < X < m + 2\sigma) = p(-2 < T < 2) = 95\%$.
3. $p(m - 3\sigma < X < m + 3\sigma) = p(-3 < T < 3) = 99,8\%$.

EXERCICE 4.66. Le prix X d'un ordinateur est supposé distribué selon une loi normale de paramètres $m=1000$ euros et $\sigma = 70$ euros.

1. Calculer les probabilité des événements $\{m - \sigma < X < m + \sigma\}$ et $\{X > 1000\}$
2. Déterminer un intervalle centré sur la moyenne m et ayant 95% de chances de contenir X .

Réponses : n°1 0,65. 0,5. n°2 [860;1140].

Deuxième partie

Annexes

Chapitre 5

Les lois statistiques

I Loi normale centrée réduite

I.1 Présentation

Il y a convergence d'une loi binomiale vers une loi normale (encore appelée de Gauss) quand le nombre d'épreuves augmente.

De plus, l'expérience montre qu'un grand nombre de grandeurs physiques suivent une loi normale : le théorème central limite justifie d'ailleurs que la loi normale est la loi des phénomènes naturels.

EXEMPLE 5.1. Si une usine fabrique des barres métalliques de longueur 2m, la longueur d'une barre donnée n'est jamais exactement 2m. Elle suit une loi normale d'espérance 2, et de variance d'autant plus petite que les tolérances des machines sont faibles.

I.2 Caractéristiques

Densité de probabilité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Espérance et variance

$$E(X) = 0, V(X) = 1.$$

De même, tous les moments d'ordre impair sont nuls.

Fonction de répartition

Il est difficile de calculer les valeurs de la fonction de répartition, car on ne connaît pas de primitives à la densité f (en fait, on définit une nouvelle fonction usuelle, appelée *fonction d'erreur*, à partir de cette fonction de répartition). On utilise plutôt des tables.

Courbes représentatives

On remarque que la loi normale se concentre essentiellement autour de sa moyenne : c'est la célèbre *courbe en cloche*.

II Loi du khi-deux

II.1 Présentation

La principale utilisation de cette loi consiste à apprécier l'adéquation d'une loi de probabilité à une distribution empirique en utilisant le test du χ^2

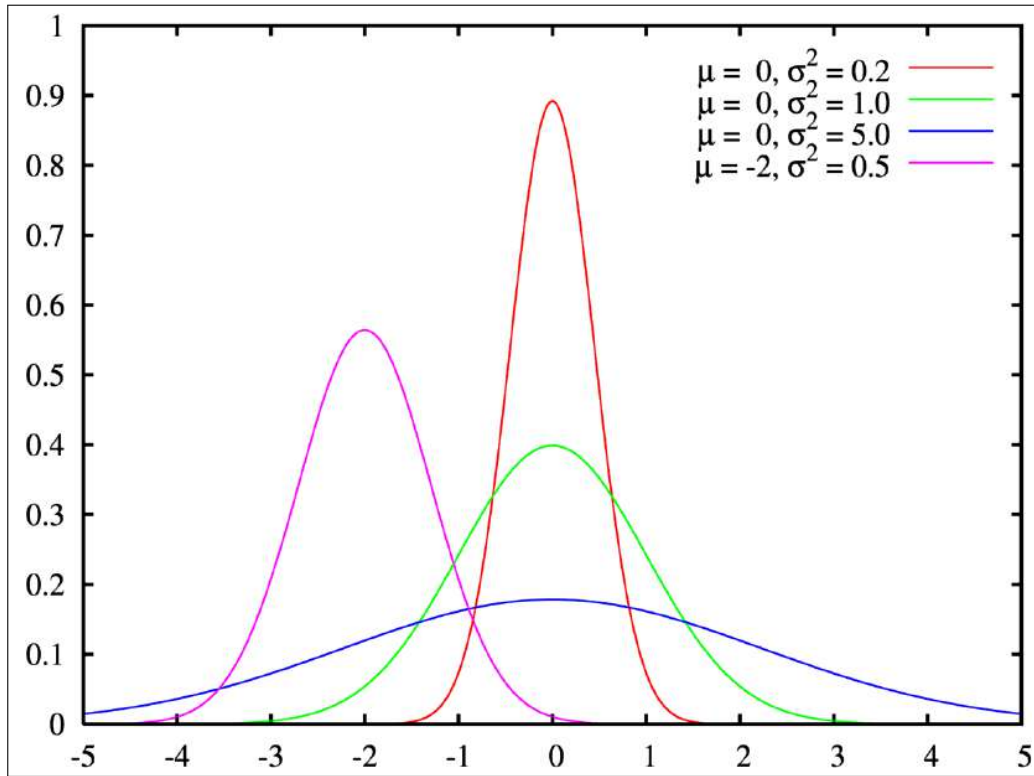


FIGURE 5.1 – Densité de la loi normale

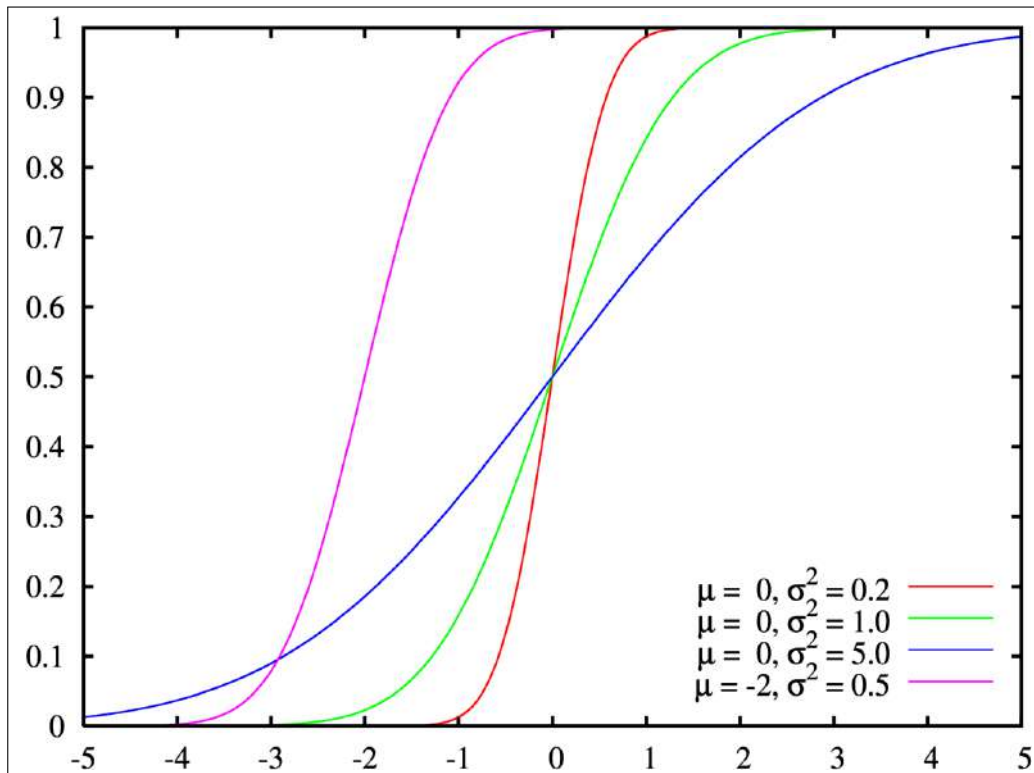


FIGURE 5.2 – Fonction de répartition de la loi normale

II.2 Caractéristiques

Densité de probabilité

Elle fait intervenir la fonction Γ de Euler :

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{x^2}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} \chi_{[0, \infty[}(x)$$

Espérance et variance

$$E(X) = n, V(X) = 2n.$$

Médiane

Approximativement $n - \frac{2}{3}$

Courbes représentatives

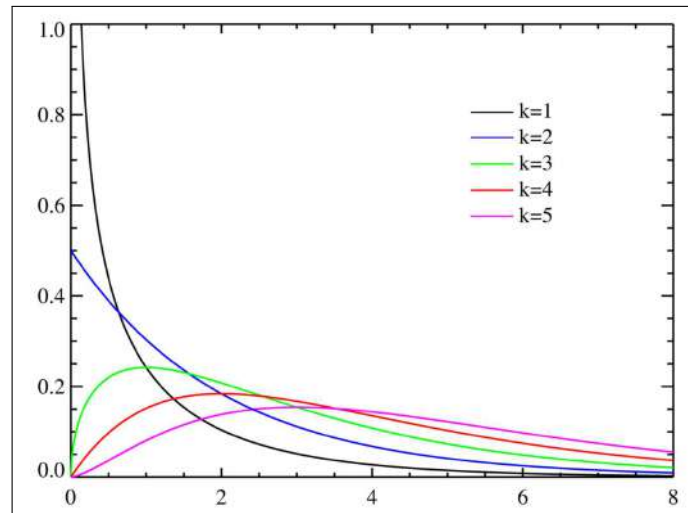


FIGURE 5.3 – Densité de la loi du khi-deux

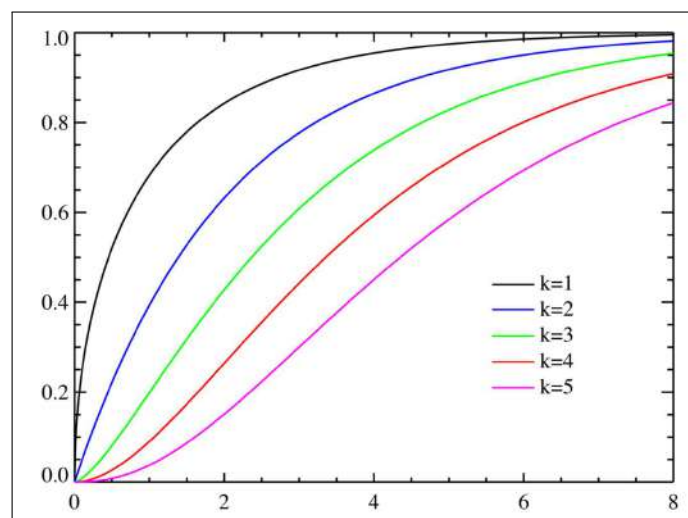


FIGURE 5.4 – Fonction de répartition de la loi du khi-deux

III Loi de Student

III.1 Présentation

Soient Z une variable aléatoire de loi normale centrée et réduite et U une variable indépendante de Z et distribuée suivant la loi du χ^2 à k degrés de liberté. Par définition la variable

$$T = \frac{Z}{\sqrt{U/k}}$$

suit une *loi de Student* à k degrés de liberté.

Elle permet d'estimer l'espérance μ d'une loi normale dont la variance σ^2 est supposée inconnue.

Lorsque k est grand, la loi de Student peut être approchée par la loi normale centrée réduite.

III.2 Caractéristiques

Densité de probabilité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \frac{\Gamma(\frac{k-1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$$

Espérance et variance

Son espérance ne peut pas être définie pour $k = 1$, et est nulle pour $k > 1$.

Sa variance est infinie pour $k \leq 2$ et vaut $\frac{k}{k-2}$ pour $k > 2$.

Médiane, mode

Ils sont nuls tous les deux.

Fonction de répartition

Il est difficile de calculer les valeurs de la fonction de répartition, car on ne connaît pas de primitives à la densité f . On utilise plutôt des tables.

Courbes représentatives

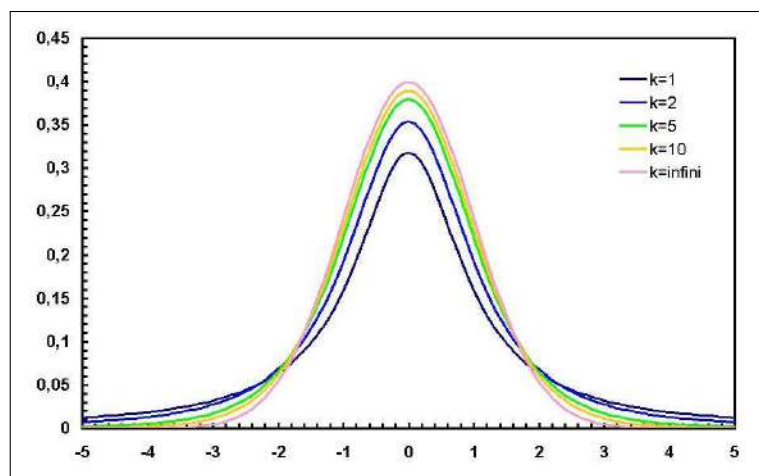


FIGURE 5.5 – Densité de la loi de Student

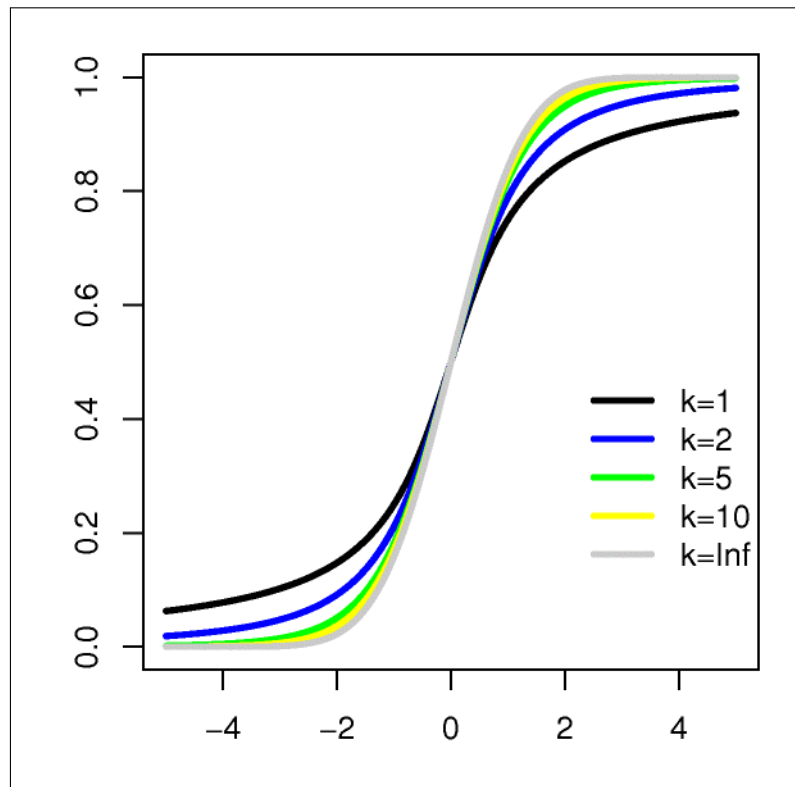


FIGURE 5.6 – Fonction de répartition de la loi de Student

Chapitre 6

Tables statistiques

.3 Table de la loi normale centrée réduite

La table ci-dessous comporte les valeurs de la fonction de répartition de la loi normale :

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8906	0.8925	0.8943	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9986	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

.4 Table de la loi du khi-deux

k	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.500	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.45	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	1.39	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	2.37	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	3.36	7.78	9.94	11.14	13.28	14.86
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	4.35	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	5.35	10.65	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	6.35	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	7.34	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	8.34	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	9.34	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	10.34	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	11.34	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	12.34	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	13.34	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.27	7.26	8.55	14.34	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	15.34	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	16.34	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.87	17.34	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.81	10.12	11.65	18.34	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	19.34	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	20.34	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	21.34	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	22.34	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	23.34	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	24.34	34.28	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	25.34	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	26.34	36.74	40.11	43.19	46.96	49.65
28	12.46	13.57	15.31	16.93	18.94	27.34	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	28.34	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	29.34	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	39.34	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	49.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	59.33	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	69.33	85.53	90.53	95.02	100.42	104.22
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	79.33	96.58	101.88	106.63	112.33	116.32
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	89.33	107.57	113.14	118.14	124.12	128.30
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	99.33	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17

.5 Table de la loi de Student

	γ										
k	0,25	0,20	0,15	0,10	0,05	0,025	0,010	0,005	0,0025	0,0010	0,0005
1	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	127,3	318,3	636,6
2	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	14,09	22,33	31,60
3	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	7,453	10,21	12,92
4	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	5,598	7,173	8,610
5	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773	5,893	6,869
6	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317	5,208	5,959
7	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,029	4,785	5,408
8	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	3,833	4,501	5,041
9	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	3,690	4,297	4,781
10	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	3,581	4,144	4,587
11	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	3,497	4,025	4,437
12	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,428	3,930	4,318
13	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,372	3,852	4,221
14	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,326	3,787	4,140
15	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,286	3,733	4,073
16	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,252	3,686	4,015
17	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,222	3,646	3,965
18	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,197	3,610	3,922
19	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,174	3,579	3,883
20	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,153	3,552	3,850
21	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,135	3,527	3,819
22	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,119	3,505	3,792
23	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,104	3,485	3,767
24	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,091	3,467	3,745
25	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,078	3,450	3,725
26	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,067	3,435	3,707
27	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,057	3,421	3,690
28	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,047	3,408	3,674
29	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,038	3,396	3,659
30	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,030	3,385	3,646
40	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	2,971	3,307	3,551
50	0,679	0,849	1,047	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	2,937	3,261	3,496
60	0,679	0,848	1,045	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	2,915	3,232	3,460
80	0,678	0,846	1,043	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	2,887	3,195	3,416
100	0,677	0,845	1,042	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	2,871	3,174	3,390
120	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	2,860	3,160	3,373
∞	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291