Corrigé
Examen Session printemps
SMC4-M26 : probabilités

Durée : 1h30

I. .... *(4 points)*

La v.a X représente la durée de vie exprimée en **milliers d'années** d'une particule de carbone 14, elle suit une loi de Poisson de demi-vie T=5,7 milliers d'années : $P\left(X \le t\right)=1-e^{-\lambda t}$, $t \ge 0$.

a. On a par définition $P\left(X > T\right)=\dfrac{1}{2}$

1 Ce qui implique : $e^{-\lambda T}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow T=\dfrac{\ln(2)}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda=\dfrac{\ln(2)}{T}$

D'où : $\lambda=\dfrac{\ln(2)}{5,7}=0,1216..$

0,5 Et $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{T}{\ln(2)}=\dfrac{5,7}{\ln(2)}=8,2234;$

La durée de vie moyenne d'une particule de carbone 14 est 8 223 années.

b. La probabilité qu'une particule de carbone 14 se désintègre au bout de 10 000 ans est :

0,5 $P\left(X \le 10\right)=1-e^{-10\lambda}=1-0,2964+0,7036$

c. La loi de X est sans mémoire : $P\left(X > t+s \middle/ X > t\right)=P\left(X > s\right)$.

1 Ainsi donc : $P\left(X > 15 \middle/ X > 5\right)=P\left(X > 10\right)=1-P\left(X \le 10\right)=0,2964$

d. Cherchons une valeur ***d*** telle que : $P\left(X \le d\right)=0,95$

$P\left(X \le d\right)=0,95 \Leftrightarrow P\left(> d\right)=0,05 \Leftrightarrow e^{-\lambda d}=0,05$

1

Il en résulte : $d=-\dfrac{\ln\left(0,05\right)}{\lambda}=\dfrac{\ln\left(20\right)}{0,1216}=24,6360$

Une particule de carbone 14 se désintègre avec une probabilité de 0,95 au bout <u>24 636 années</u> .

II. .... *(5 points)*

X est une variable aléatoire admettant une densité sous la forme : $f(x)=\begin{cases} K2^{-x}, & si\ x \in \left[0,1\right] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

a. La valeur de K ;

1 $$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=K\int_0^1 e^{-\ln(2)x}dx=\left[-\frac{e^{-\ln(2)x}}{\ln(2)}\right]_0^1=\frac{K}{2\ln(2)} \Rightarrow K=2\ln(2).$$

b. La fonction de répartition de X :

2

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du=\begin{cases}0 & , si\ x<0\\ 2\ln(2)\int_{-\infty}^{x} e^{-\ln(2)u}du & , si\ x\in[0,1]\\ 1 & , si\ x>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & , \quad si\ x<0\\ 2\ln(2)\left(1-e^{-\ln(2)x}\right) & , si\ x\in[0,1]\\ 1 & , \quad si\ x>1\end{cases}$$

c. $P(X\le m)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow F(m)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left(m\in[0,1]\ et\ 2\left(1-e^{-\ln(2)m}\right)=\dfrac{1}{2}\right).$

1

D'où : $m=-\dfrac{\ln(\frac{3}{4})}{\ln(2)}=0,4150$.

d. Espérance de X :

1

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=2\ln(2)\int_{0}^{1} xe^{-\ln(2)x}dx$$

$$=2\ln(2)\left\{\left[-\frac{xe^{-\ln(2)x}}{n(2)}\right]_0^1+\int_0^1\frac{e^{-\ln(2)x}}{\ln(2)}dx\right\}$$

$$=-1+\frac{1}{\ln(2)}=0,4427$$

III. *(Toutes les valeurs doivent être calculées à* 10^{-4} *près)*.. *(11 points)*

On définit les événements suivants : ***A*** = « la bille est fabriquée par la machine A » ;

B = « la bille est fabriquée par la machine B » ; ***C*** = « la bille est conforme ».

Partie A. *(4pts)*

a. Par la formule des probabilités totales, on a : $P(C)=P(C\cap A)-P(C\cap B)$

1

On en déduit :

$P(C\cap B)=P(C)-P(C\cap A)=P(C)-P\left(C/A\right)P(A)=0,96-0,98\times 0,40=0,3720$.

b. La proportion de billes conformes parmi la production de la machine ***B*** :

1

$P(C/B)=\dfrac{P(C\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0,3720}{0,40}=0,9300;$

93% des billes produits par la machine b sont conformes

c. 70 % des billes non conforme proviennent de la machine B, en effet, on a :

$\boxed{2}$

$$P(B/\overline{C}) = \frac{P\left(\overline{C}/B\right)P(B)}{P\left(\overline{C}\right)} = \left(1-P\left(C/B\right)\right)\frac{P(B)}{P\left(\overline{C}\right)} = 0,07\frac{0,40}{0,04} = 0,7000\,.$$

Partie B. *(4pts)*

a. La variable aléatoire Y suit une loi de binomiale, $Y \sim \mathrm{B}(n,p)$, de paramètres

$\boxed{1.5}$

$$n = 100 \text{ et } p = P\left(\overline{C}\right) = 1 - P(C) = 0,04.\ ;$$

$$P(Y = k) = \binom{100}{k}(0,04)^k(0,96)^{100-k},\ k = 0,\cdots,100;$$

$$E(Y) = np = 100 \times 0,04 = 4,0000;$$

$$Var(Y) = np(1-p) = 3,8400.$$

b. La probabilité d'avoir au plus une bille non conforme dans le lot :

$\boxed{1}$

$$\begin{aligned} P(Y \le 1) &= P(Y = 0) + P(Y = 1) \\ &= \binom{100}{0}(0,04)^0(0,96)^{100} + \binom{100}{1}(0,04)(0,96)^{99} \\ &= (0,96)^{99}(0,96 + 4) = 0,08716. \end{aligned}$$

c. Nous avons $n = 100$ et $np = 4 < 5$; on peut approcher la loi de Y par la loi de Poisson de

$\boxed{1.5}$

paramètre $\lambda = 4$; $P(Y = k) \cong \dfrac{(4)^k}{k!}e^{-4},\ k = 0,\cdots,1$

D'où : $P(Y \le 4) = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} P(Y = k) \cong e^{-4}\sum_{k=0}^{4}\frac{(4)^k}{k!} = 0,6288.$

Partie C. *(3pts)*

Pour réduire le nombre de billes non conformes, l'entreprise modifie le réglage de la machine $\boldsymbol{B}$.
Sous ce nouveau réglage la machine $\boldsymbol{B}$ produit des billes dont le diamètre est une variable aléatoire $\boldsymbol{X}$ qui suit une loi normale d'espérance $\mu = \mathbf{0,99}$ et d'écart-type $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0,04}$.

a. La probabilité qu'une bille fabriquée par la machine B soit conforme :

$\boxed{2}$

$$\begin{aligned} P(0,9 \le X \le 1,1) &= P\left(-2,25 \le \frac{X - 0,99}{0,04} \le 2,75\right) \\ &= \Phi(2,75) - \Phi(-2,25) = \Phi(2,75) - \left(1 - \Phi(2,25)\right) \\ &= \Phi(2,75) + \Phi(2,25) - 1 = 0,9970 + 0,9878 - 1 \\ &= 0,9848. \end{aligned}$$

b. Le nouveau pourcentage des billes conformes dans la production totale. On a :

$\boxed{1}$

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C \cap A) - P(C \cap B) = P\left(C/A\right)P(A) + P\left(C/B\right)P(B) \\ &= 0,98 \times 0,60 + 0,9848 \times 0,40 = 0,9819\,. \end{aligned}$$