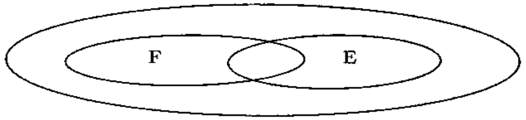
Probabilités conditionnelles et indépendance – Exercices - Devoirs

Exercice 1 corrigé disponible

Une campagne de prévention routière s'intéresse aux défauts constatés sur le freinage et sur l'éclairage de 400 véhicules :

- 60 des 400 véhicules présentent un défaut de freinage.
- 140 des 400 véhicules présentent un défaut d'éclairage.
- 45 véhicules présentent à la fois un défaut de freinage et un défaut d'éclairage.

1. Recopier puis compléter le diagramme de Venn ci-dessous avec des nombres pour représenter la situation.



2. On choisit un véhicule au hasard parmi ceux qui ont été examinés. Quelle est la probabilité que :
   (a) le véhicule présente un défaut de freinage mais pas de défaut d'éclairage ?
   (b) le véhicule présente un défaut d'éclairage mais pas de défaut de freinage ?
   (c) le véhicule ne présente aucun des deux défauts ?
   (d) le véhicule présente au moins un des deux défauts ?

Exercice 2 corrigé disponible

Voici les résultats d'un sondage effectué en 1999 auprès de 2 000 personnes, à propos d'Internet :

- 40% des personnes interrogées déclarent être intéressées par Internet,
- 35% des personnes interrogées ont moins de 30 ans et, parmi celles-ci, quatre cinquièmes déclarent être intéressées par Internet,
- 30% des personnes interrogées ont plus de 60 ans et, parmi celles-ci, 85% ne sont pas intéressées par Internet.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

	intéressées par Internet	non intéressées par internet	**total**
moins de 30 ans			
de 30 à 60 ans			
plus de 60 ans			
total			**2 000**

2. On choisit au hasard une personne parmi les 2 000 interrogées. On suppose que toutes les personnes ont la même probabilité d'être choisies. On considère les événements :
   A : « *la personne interrogée a moins de 30 ans* »,
   B : « *la personne interrogée est intéressée par Internet* ».
   (a) Calculer les probabilités $P(A)$ et $P(B)$.
   (b) Définir par une phrase l'événement $\overline{A}$ puis calculer $P(\overline{A})$.
   (c) Définir par une phrase l'événement $A \cap B$ puis calculer $P(A \cap B)$. En déduire $P(A \cup B)$.
3. On sait maintenant que la personne interrogée est intéressée par Internet.
   Quelle est la probabilité qu'elle ait plus de 30 ans ?

Exercice 3 corrigé disponible

Un groupe d'élèves d'une classe de première générale veut organiser un concert de musique à l'intérieur du lycée. Il fait une enquête pour connaître le nombre d'élèves souhaitant assister à ce concert.
450 élèves ont répondu à cette enquête, 180 garçons et 270 filles.
144 filles et 72 garçons sont favorables.

On note : G l'événement « la fiche est celle d'un garçon »,
$\overline{G}$ l'événement « la fiche est celle d'une fille »,
A l'événement « l'élève souhaite assister au concert »,
$\overline{A}$ l'événement complémentaire de A.

1. Dresser un arbre de probabilité.
2. On sort une fiche au hasard parmi les 450 fiches réponses.
Donner les probabilités $P(G)$, $P(A)$, $P(G\cap A)$ et $P(G\cup A)$.
3. Les événements G et A sont-ils indépendants ?
4. Calculer la probabilité $P(\overline{G}\cap A)$ puis $P_{\overline{G}}(A)$.
5. Calculer les probabilités des événements « A sachant G », « G sachant A ».
6. Compléter l'arbre des probabilités.
7. Donner les probabilités suivantes : $P(\overline{A}\cap\overline{G})$ et $P(\overline{A}\cap G)$.
En déduire $P(\overline{A})$ de deux manières.

Exercice 4 corrigé disponible

Lors d'une enquête réalisée auprès de familles d'une région, concernant leur habitation principale, on apprend que 55% des familles interrogées sont propriétaires de leur logement, 40% en sont locataires et enfin 5% occupent leur logement gratuitement (ces familles seront appelées dans la suite de l'exercice « occupants à titre gratuit »).
Toutes les familles interrogées habitent soit une maison individuelle, soit un appartement ; toute habitation ne contient qu'une seule famille.

60% des propriétaires habitent une maison individuelle, 80% des locataires habitent un appartement et enfin 10% des occupants à titre gratuit habitent une maison individuelle.
On interroge au hasard une famille de la région et on note :
A l'événement : « la famille habite un appartement »,
L l'événement : « la famille est locataire »,
P l'événement : « la famille est propriétaire »,
G l'événement : « la famille occupe à titre gratuit »,

Les probabilités seront données sous forme décimale, arrondies au millième.

1. a. Construire un arbre pondéré résumant la situation.

b. Préciser à l'aide de l'énoncé les probabilités suivantes :

$$P_P(\overline{A}) \qquad P_L(A) \quad \text{et} \quad P_G(\overline{A})$$

2. Calculer la probabilité de l'événement : « la famille est propriétaire et habite un appartement ».

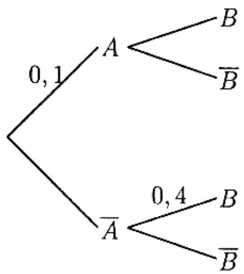
3. Montrer que la probabilité de l'événement A est égale à 0,585.

4. On interroge au hasard une famille habitant un appartement. Calculer la probabilité pour qu'elle en soit propriétaire.

Exercice 5 corrigé disponible

Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre pondéré ci-contre.
On sait de plus que $P(B) = 0,39$.

1. Calculer la probabilité de l'événement $A \cap B$.
2. En déduire la probabilité de B sachant A.



Exercice 6 corrigé disponible

Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse et justifier soigneusement la réponse.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

Zoé se rend à son travail à pied ou en voiture. Là où elle habite, il pleut un jour sur quatre.
Lorsqu'il pleut, Zoé se rend en voiture à son travail dans 80 % des cas.
Lorsqu'il ne pleut pas, elle se rend à pied à son travail avec une probabilité égale à 0, 6.

Affirmation : « Zoé utilise la voiture un jour sur deux. »

Exercice 7 corrigé disponible

Une compagnie d'assurance automobile fait un bilan des frais d'intervention, parmi ses dossiers d'accidents de la circulation.
85 % des dossiers entraînent des frais de réparation matérielle. 20 % des dossiers entraînent des frais de dommages corporels. Parmi les dossiers entraînant des frais de réparation matérielle, 12 % entraînent des frais de dommages corporels.

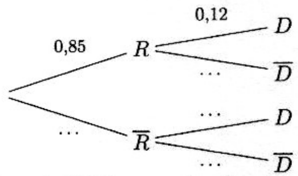
Soit les événements suivants : R : « le dossier traité entraîne des frais de réparation matérielle » ;
D : « le dossier traité entraîne des frais de dommages corporels ».

On choisit un dossier au hasard.
Dans tout l'exercice, les résultats seront donnés <u>`sous forme décimale`</u>, arrondis au millième près.

1. a. Recopier et compléter le tableau.

	R	$\overline{R}$	Total
D			
$\overline{D}$			
Total	85		100

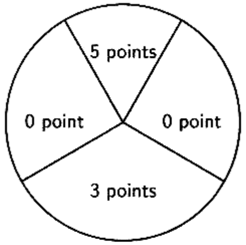
b. Recopier et compléter l'arbre pondéré.



2. On choisit un dossier au hasard. Calculer la probabilité pour qu'un dossier :
   a. entraîne des frais de réparation matérielle et des frais de dommages corporels ;
   b. entraîne seulement des frais de réparation matérielle ;
   c. entraîne seulement des frais de dommages corporels ;
   d. n'entraîne ni frais de réparation matérielle ni frais de dommages corporels ;
   e. entraîne des frais de réparation matérielle sachant qu'il entraîne des frais de dommages corporels.

Exercice 8 corrigé disponible

Un jeu consiste à lancer des fléchettes sur une cible. La cible est partagée en quatre secteurs, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



On suppose que les lancers sont indépendants et que le joueur touche la cible à tous les coups.

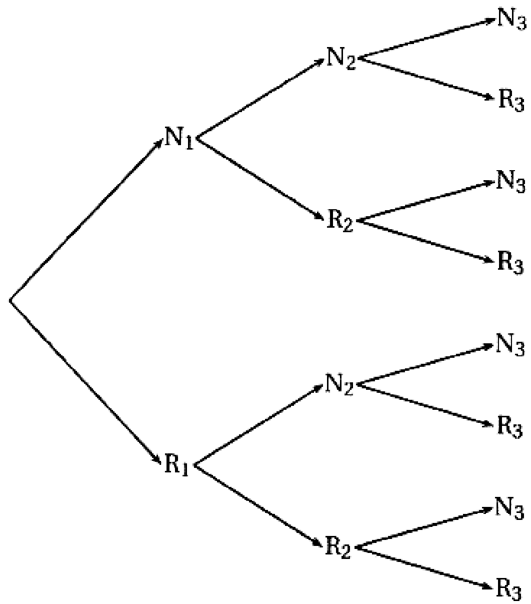
1. Le joueur lance une fléchette.
   On note p_0 la probabilité d'obtenir 0 point.
   On note p_3 la probabilité d'obtenir 3 points.
   On note p_5 la probabilité d'obtenir 5 points.
   On a donc $p_0 + p_3 + p_5 = 1$.
   Sachant que $p_5 = \frac{1}{2}p_3$ et que $p_5 = \frac{1}{3}p_0$ déterminer les valeurs de p_0, p_3 et p_5.
2. Une partie de ce jeu consiste à lancer trois fléchettes au maximum. Le joueur gagne la partie s'il obtient un total (pour les 3 lancers) supérieur ou égal à 8 points. Si au bout de 2 lancers, il a un total supérieur ou égal à 8 points, il ne lance pas la troisième fléchette.
   On note G_2 l'évènement : « le joueur gagne la partie en 2 lancers ».
   On note G_3 l'évènement : « le joueur gagne la partie en 3 lancers ».
   On note P l'évènement : « le joueur perd la partie ».
   On note $p(A)$ la probabilité d'un évènement A.
   a. Montrer, en utilisant un arbre pondéré, que $p(G_2) = \frac{5}{36}$.
   On admettra dans la suite que $p(G_3) = \frac{7}{36}$
   b. En déduire $p(P)$.

Exercice 9 corrigé disponible

On considère trois urnes U_1, U_2, et U_3.
L'urne U_1 contient deux boules noires et trois boules rouges ; l'urne U_2 contient une boule noire et quatre boules rouges ; l'urne U_3 contient trois boules noires et quatre boules rouges.

Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de U_1 et une boule de U_2, à les mettre dans U_3, puis à tirer au hasard une boule de U_3.
Pour i prenant les valeurs 1, 2 et 3, on désigne par N_i, (respectivement R_i) l'évènement « on tire une boule noire de l'urne U_i » (respectivement « on tire une boule rouge de l'urne U_i »).

1. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités suivant :



2. **a.** Calculer la probabilité des évènements $N_1 \cap N_2 \cap N_3$, et $N_1 \cap R_2 \cap N_3$.
   b. En déduire la probabilité de l'évènement $N_1 \cap N_3$.
   c. Calculer de façon analogue la probabilité de l'évènement $R_1 \cap N_3$.
3. Déduire de la question précédente la probabilité de l'évènement N_3.
4. Les évènements N_1 et N_3 sont-ils indépendants ?
5. Sachant que la boule tirée dans U_3 est noire, quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

Exercice 10 corrigé disponible

Les deux parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.
Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

Partie A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0, 99 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0, 97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.
On note V l'évènement « la personne est contaminée par le virus » et T l'évènement « le test est positif ».
$\overline{\text{V}}$ et $\overline{\text{T}}$ désignent respectivement les évènements contraires de V et T.

1) a) Préciser les valeurs des probabilités $P(\text{V})$, $P_{\text{V}}(\text{T})$, $P_{\overline{\text{V}}}(\overline{\text{T}})$.
Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

   b) En déduire la probabilité de l'évènement $\text{V} \cap \text{T}$.

2) Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,049 2.

3) a) Justifier par un calcul la phrase :
« Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».

   b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif. Que peut-on en conclure.

Exercice 11 corrigé disponible

Les 300 personnes travaillant dans un immeuble de bureaux de trois niveaux ont répondu aux deux questions suivantes :

- « À quel niveau est votre bureau ? »
- « Empruntez-vous l'ascenseur ou l'escalier pour vous y rendre ? »

Voici les réponses :

- 225 personnes utilisent l'ascenseur et, parmi celles-ci, 50 vont au 1er niveau, 75 vont au 2e niveau et les autres vont au 3e niveau.
- Les autres personnes utilisent l'escalier et, parmi celles-ci, un tiers va au 2e niveau, les autres vont au 1er niveau.

On choisit au hasard une personne de cette population.
On pourra considérer les évènements suivants :

- N_1 : « La personne va au premier niveau. »
- N_2 : « La personne va au deuxième niveau. »
- N_3 : « La personne va au troisième niveau. »
- E : « La personne emprunte l'escalier. »

1) Recopier et remplir le tableau d'effectifs suivants :

	N_1	N_2	N_3	Total
E				
$\overline{\text{E}}$				
Total				300

2) a) Déterminer la probabilité que la personne aille au 2e niveau par l'escalier. (On donnera la réponse sous forme de fraction)

   b) Montrer que les évènements N_1, N_2 et N_3 sont équiprobables.

   c) Déterminer la probabilité que la personne emprunte l'escalier sachant qu'elle va au 2e niveau.

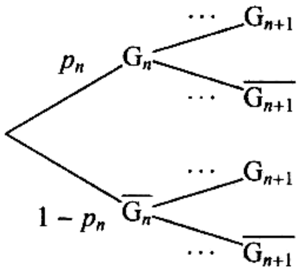
Exercice 12 corrigé disponible

Un site internet propose un jeu en ligne dont les probabilités sont les suivantes :

- si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante vaut $\frac{2}{5}$.
- si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante vaut $\frac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par G_n l'évènement « l'internaute gagne la n-ième partie » et on note p_n la probabilité de l'évènement G_n.
L'internaute gagne toujours la première partie et donc $p_1 = 1$.

1) Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2) Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$.

Exercice 13 corrigé disponible

Dans un groupe, 65% des personnes possèdent un smartphone, 35% un ordinateur portable, 25% une tablette tactile. On notera :

- ▷ A : "la personne possède un smartphone" $P(A) = 0{,}65$
- ▷ B : "la personne possède un ordinateur portable" $P(B) = 0{,}35$
- ▷ C : "la personne possède une tablette tactile" $P(C) = 0{,}25$

De plus, 45%, 20%, et 5% d'entre eux possèdent, respectivement, uniquement un smartphone, uniquement un ordinateur portable et uniquement une tablette tactile :

1/ Calculer la probabilité qu'une personne possède un smartphone (**A**) et un ordinateur (**B**) mais pas de tablette ($\bar{C}$)

2/ Les événements $A \cup B$ et $\bar{A} \cup \bar{B}$ sont-ils incompatibles (ensembles disjoints) ?

Exercice 14 corrigé disponible

Un ostréiculteur élève deux espèces d'huîtres : « *la plate* » et « *la japonaise* ». Chaque année, les huîtres plates représentent 15 % de sa production.
Les huîtres sont dites de calibre n° 3 lorsque leur masse est comprise entre 66 g et 85 g.
Seulement 10 % des huîtres plates sont de calibre n° 3, alors que 80 % des huîtres japonaises le sont.

1) Le service sanitaire prélève une huître au hasard dans la production de l'ostréiculteur. On suppose que toutes les huîtres ont la même chance d'être choisies.
On considère les événements suivants :
   - J : « *l'huître prélevée est une huître japonaise* »,
   - C : « *l'huître prélevée est de calibre n° 3* ».

   a) Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.

   b) Calculer la probabilité que l'huître prélevée soit une huître plate de calibre n° 3.

   c) Justifier que la probabilité d'obtenir une huître de calibre n° 3 est $0,695$.

   d) Le service sanitaire a prélevé une huître de calibre n° 3. Quelle est la probabilité que ce soit une huître plate ?

Exercice 15 corrigé disponible

Ce club fait des commandes groupées de roulements pour ses adhérents auprès de deux fournisseurs A et B.

— Le fournisseur A propose des tarifs plus élevés mais les roulements qu'il vend sont sans défaut avec une probabilité de 0,97.

— Le fournisseur B propose des tarifs plus avantageux mais ses roulements sont défectueux avec une probabilité de 0,05.

On choisit au hasard un roulement dans le stock du club et on considère les évènements :
A : « le roulement provient du fournisseur A »,
B : « le roulement provient du fournisseur B »,
D : « le roulement est défectueux ».

1. Le club achète 40 % de ses roulements chez le fournisseur A et le reste chez le fournisseur B.

   a. Calculer la probabilité que le roulement provienne du fournisseur A et soit défectueux.

   b. Le roulement est défectueux. Calculer la probabilité qu'il provienne du fournisseur B.

2. Si le club souhaite que moins de 3,5 % des roulements soient défectueux, quelle proportion minimale de roulements doit-il commander au fournisseur A?

Exercice 16 **corrigé disponible**

Lors d'une communication électronique, tout échange d'information se fait par l'envoi d'une suite de 0 ou de 1, appelés bits, et cela par le biais d'un canal qui est généralement un câble électrique, des ondes radio, ...
Une suite de 8 bits est appelé un octet. Par exemple, 10010110 est un octet.

Afin de détecter si un ou plusieurs bits de l'octet sont mal transmis, on utilise un protocole de détection d'erreur. Il consiste à ajouter, à la fin de l'octet à transmettre, un bit, appelé bit de parité et qui est transmis après les huit bits de l'octet.

On s'intéresse désormais à la transmission de l'octet suivi de son bit de parité.
Une étude statistique a permis d'obtenir que :

- la probabilité que les huit bits (octet) soient transmis sans erreur vaut 0,922;
- la probabilité que les huit bits (octet) soient transmis avec exactement une erreur vaut 0,075;
- si les huit bits (octet) ont été transmis sans erreur, la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut 0,99;
- si les huit bits (octet) ont été transmis avec exactement une erreur, la probabilité que le bit de parité ait été envoyé sans erreur vaut 0,9;
- si les huit bits (octet) ont été transmis avec au moins deux erreurs, la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut 0,99.

On choisit au hasard un octet suivi de son bit de parité. On considère les évènements suivants :

- Z : « les huit bits de l'octet sont transmis avec aucune erreur »;
- E : « les huit bits de l'octet sont transmis avec exactement une erreur »;
- D : « les huit bits de l'octet sont transmis avec au moins deux erreurs »;
- B : « le bit de parité est transmis sans erreur ».

1. Construire un arbre de probabilité tenant compte de la situation.
2. Quelle est la probabilité que l'octet soit transmis avec une erreur exactement et que le bit de parité soit transmis sans erreur?
3. Calculer la probabilité de l'évènement B.

Exercice 17 **corrigé disponible**

1. **Restitution organisée de connaissances :**

   Prérequis : On rappelle que deux évènements A et B sont indépendants pour la probabilité p si et seulement si : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

   Soient A et B deux évènements associés à une expérience aléatoire.

   a. Démontrer que $p(B) = p(B \cap A) + p\left(B \cap \overline{A}\right)$.

   b. Démontrer que, si les évènements A et B sont indépendants pour la probabilité p, alors les évènements $\overline{A}$ et B le sont également.

2. **Application :** Chaque matin de classe, Stéphane peut être victime de deux évènements indépendants :
   - R : « il n'entend pas son réveil sonner »;
   - S : « Son scooter, mal entretenu, tombe en panne ».

   Il a observé que chaque jour de classe, la probabilité de R est égale 0,1 et que celle de S est égale à 0,05. Lorsque qu'au moins l'un des deux évènements se produit, Stéphane est en retard au lycée sinon il est à l'heure.

   a. Calculer la probabilité qu'un jour de classe donné, Stéphane entende son réveil sonner et que son scooter tombe en panne.

   b. Calculer la probabilité que Stéphane soit à l'heure au lycée un jour de classe donné.

Exercice 18 corrigé disponible

Une association offre à ses adhérents des paniers de légumes. Chaque adhérent a le choix entre trois tailles de panier :

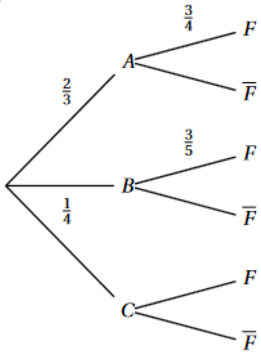
- un panier de petite taille ;
- un panier de taille moyenne ;
- un panier de grande taille.

Partie A

L'association envisage de proposer en outre des livraisons d'œufs frais. Pour savoir si ses adhérents sont intéressés, elle réalise un sondage.
On interroge un adhérent au hasard. On considère les évènements suivants :

- A : « l'adhérent choisit un panier de petite taille » ;
- B : « l'adhérent choisit un panier de taille moyenne » ;
- C : « l'adhérent choisit un panier de grande taille » ;
- F : « l'adhérent est intéressé par une livraison d'œufs frais ».

On dispose de certaines données, qui sont résumées dans l'arbre ci-dessous :



1. Dans cette question, on ne cherchera pas à compléter l'arbre.

a. Calculer la probabilité que l'adhérent choisisse un panier de petite taille et soit intéressé par une livraison d'œufs frais.

b. Calculer $P\left(B \cap \overline{F}\right)$, puis interpréter ce résultat à l'aide d'une phrase.

c. La livraison d'œufs frais ne sera mise en place que si la probabilité de l'évènement F est supérieure à $0,6$. Pourquoi peut-on affirmer que cette livraison sera mise en place ?

2. Dans cette question, on suppose que $P(F) = 0,675$.

a. Démontrer que la probabilité conditionnelle de F sachant C, notée $P_C(F)$, est égale à $0,3$.

b. L'adhérent interrogé est intéressé par la livraison d'œufs frais.
Quelle est la probabilité qu'il ait choisi un panier de grande taille ? Arrondir le résultat à 10^{-2}.

Exercice 19

On lance un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

On considère les événements suivants :

- A : « Le nombre obtenu est pair »
- B : « Le nombre obtenu est un multiple de 3 »

Les événements A et B sont ils indépendants ?

Exercice 20

Un restaurant propose à sa carte deux desserts différents :

- le premier dessert est un assortiment de macarons et est choisi par 40 % des clients,
- le second dessert est une part de tarte et est choisie par 30 % des clients.

Les autres clients ne prennent pas de dessert. Aucun client ne prend plusieurs desserts.

Le restaurateur a remarqué que 70 % des clients qui ont pris un assortiment de macarons commandent ensuite un café, 40 % de ceux qui ont pris une part de tarte demandent par la suite un café et 90 % de ceux qui ne prennent pas de dessert terminent leur repas par un café. On interroge au hasard un client et on note :

- M : « Le client prend un assortiment de macarons. »
- T : « Le client prend une part de tarte. »
- N : « Le client ne prend pas de dessert. »
- C : « Le client prend un café. »

1. Construire un arbre de probabilités décrivant la situation.
2. Définir par une phrase les probabilités $P(T \cap C)$ et $P_M(C)$ (on ne demande pas de les calculer).
3. Calculer $P(T \cap C)$ puis $P(C)$.
4. On rencontre un client ayant pris un café. Quelle est la probabilité qu'il ait commandé une part de tarte ?
   On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

Exercice 21

On dispose d'un de équilibré à 6 faces et de deux urnes : l'urne U_1 contient deux boules vertes et 3 rouges, et l'urne U_2 contient 1 boule verte et deux rouges. On lance le dé et si le résultat est 1 ou 2 alors on tire une boule dans l'urne U_1, sinon on tire dans l'urne U_2. On considère que la partie est gagnante si on tire une boule verte.

1. Écrire un algorithme en Python permettant de simuler cette partie.
2. Modifier cet algorithme pour qu'il simule n parties et compte le nombre de parties gagnantes.

Exercice 22

Afin d'établir les liens entre le surpoids et l'alimentation, on interroge les enfants des écoles primaires d'une ville.

L'enquête révèle que 60 % des enfants boivent 1 boisson sucrée ou plus par jour. Parmi les enfants buvant 1 boisson sucrée ou plus par jour, un enfant sur 8 est en surpoids, contre seulement 8 % pour les enfants buvant moins d'une boisson sucrée par jour.

On choisit un enfant au hasard parmi ceux des écoles primaires de la ville et on considère les événements :

- B : « L'enfant boit 1 boisson sucrée ou plus par jour »
- S : « L'enfant est en surpoids »

1. Justifier que $P_B(S) = 0,125$.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
3. Calculer $P(B \cap S)$ puis interpréter le résultat obtenu.
4. Déterminer la probabilité que l'enfant soit en surpoids.
5. On a choisi un enfant en surpoids. Quelle est la probabilité qu'il boive 1 boisson sucrée ou plus par jour ? On arrondira le résultat au millième.
6. Les événements B et S sont-ils indépendants ?