Contrôle continu : Statistique

Sujet 1

Prénom :
Nom :

Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif. L'utilisation de documents, calculatrices, téléphones portables ou tout autre appareil électronique, est interdite. Les réponses devront être soigneusement argumentées et justifiées. Vous pouvez laisser les résultats sous la forme de fractions. L'énoncé doit impérativement être rendu avec la copie.

Exercice 1

On étudie un dé truqué à six faces. Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ l'univers associé au lancer de ce dé. Après une étude des propriétés physiques du dé, on décide d'utiliser la probabilité suivante sur Ω :

i	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(\{i\})$	a	b	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{20}$

Question 1 Quelles propriétés doivent vérifier a et b pour que $\mathbb{P}$ soit bien une probabilité sur Ω ?

Question 2 Une nouvelle série d'expériences permet de faire l'hypothèse que la probabilité d'obtenir un chiffre impair avec ce dé truqué est de $\frac{11}{20}$. En déduire a puis b (en justifiant votre réponse !).

Question 3 Calculer la probabilité d'obtenir un chiffre inférieur ou égal à 3.

Exercice 2

On utilise des dés spéciaux pour jouer au jeu " LCR ". Chaque dé possède six faces et est équilibré (les faces sont équiprobables). Trois faces ne contiennent aucun symbole (ce sont les faces blanches). Les autres faces comportent les lettres " L ", " C " et " R " (une face par lettre, soit les trois faces restantes).

Question 1 On lance un seul dé : quelle est la probabilité d'obtenir une face blanche ?

Question 2 Quelle est la probabilité d'obtenir trois faces blanches quand on lance trois dés simultanément ?

Pour un tour de jeu normal, le joueur lance trois dés simultanément. Chaque lettre obtenue lui fait payer un 1 euro soit au joueur à sa gauche (pour la lettre " L "), soit au joueur à sa droite (pour la lettre " R "), soit au pot central (pour la lettre " C ").

Question 3 Quelle est la probabilité que le joueur perde exactement 2 euro en faveur du pot ?

Question 4 Quelle est la probabilité que le joueur perde exactement 2 euro quels que soient les bénéficiaires ?

Question 5 Quelle est la probabilité que le joueur perde au plus 1 euro en faveur de son voisin de gauche ?

Exercice 3

On considère les variantes d'un jeu de hasard. Le joueur lance deux dés : le premier a 5 faces et le second 4. Les faces du premier dé sont numérotées de 0 à 4 et celles du second 2, 4, 6, 8.

Question 1 Déterminer l'univers de l'expérience aléatoire et la probabilité associée.

Question 2 Dans la première variante du jeu, on gagne 10 euros si les résultats des dés sont identiques, on gagne 3 euros si le résultat du premier dé est supérieur (strictement) à celui du second, et on gagne 0 euros sinon... Déterminez X la variable aléatoire des gains dans ce jeu, sa loi de probabilité, puis calculez son espérance.

Question 3 Dans la deuxième variante du jeu, on gagne 2 euros si la somme des deux dés fait plus de 8 (inclus) et 1 euro sinon. Déterminez Y la variable aléatoire correspondant aux gains dans cette variante du jeu, sa loi de probabilité ainsi que son espérance. Comparez X et Y

Question 4 Dans la troisième version du jeu, on gagne 10 euros si la somme des dés est strictement supérieure à 10, et 3 euros si la différence entre les deux dés est (en valeur absolue) supérieure à 6 (inclus) et paire et 0 euro sinon. Montrez que Z la variable aléatoire des gains pour la troisième variante du jeu a la même loi de probabilité que X mais que $Z \neq X$. Quelle est, sans calcul, l'espérance de Z ?

Exercice 4

Dans une sordide affaire, les polices scientifiques de Las Vegas, Miami et Manhattan coopèrent afin de confondre le coupable. Sur les lieux du crime, il y avait 11 personnes présentes, et il n'y a pas de doute que le coupable est parmi elles. On trouve sur les lieux du crime un fragment de cheveu qui ne peut appartenir qu'au coupable. Les équipes de Manhattan et de Miami mettent en place deux tests pour identifier le coupable à partir de ce fragment. Les deux tests sont positifs avec certitude si la personne testée est le coupable, mais les deux tests sont également positifs dans 10 % des cas si la personne testée est innocente.

Question 1 (question préliminaire) Montrer que pour toute probabilité et pour deux évènements E_1 et E_2 tels que $\mathbb{P}(E_1) = 1$ et $\mathbb{P}(E_2) = 1$ alors $\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) = 1$.

Question 2 Pour la suite, on notera pour une personne prise au hasard :

- T1 : l'évènement "le test 1 est positif"
- T2 : l'évènement "le test 2 est positif"
- C : l'événement "la personne est coupable"

Donnez une écriture simple de l'événement I : "La personne est innocente" et de l'évènement T : "les résultats aux deux tests (1 et 2) sont positifs".

Question 3 Quelle est la probabilité qu'un suspect pris au hasard, à qui on fait passer le test 1 et que ce dernier est positif, d'être le coupable ? Pour la suite de l'exercice, on admettra, du fait de la symétrie du problème, que $\mathbb{P}(C \mid T_2) = \mathbb{P}(C \mid T_1)$.

Question 4 Les deux équipes de Manhattan et de Miami se rendent compte que pour les personnes innocentes un résultat positif avec le test 1 et un résultat positif avec le test 2 sont des événements indépendants (c'est-à-dire que T_1 et T_2 sont indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}(\cdot \mid C)$). Grâce au résultat de la question 1, déterminez la probabilité que les tests 1 et 2 soient tous les deux positifs sachant que la personne est coupable. Puis, en appliquant la formule des probabilités totales à T_1, T_2 et $T_1 \cap T_2$, déterminez si en général les résultats des tests 1 et 2 sont indépendants ?

Question 5 Quelle est la probabilité d'avoir affaire au coupable lorsque les deux tests 1 et 2 sont administrés à une même personne et sont positifs ?

Question 6 L'équipe de Las Vegas entre en scène et imagine un autre test (le test 3) qui est tel qu'aucune personne non-coupable ne puisse être positif à la fois au test 2 et au test 3. Proposez une procédure pour découvrir de manière certaine le coupable (et justifiez).