L2 sciences économiques **Année universitaire 2011–2012**

Université Paris 1

Examen de statistique
Mercredi 13 juin – Durée 2 heures
Correction du sujet 1

Exercice 1

Question 1 On appelle U l'ensemble des 8 billes. L'univers est alors

$$\Omega = \{\{b_1,b_2\} \mid b_1 \neq b_2,\, b_i \in U\},$$

car le tirage est simultané : les billes sont donc différentes et le résultat n'est pas ordonné. En l'absence d'hypothèse particulière, on suppose que la probabilité est uniforme sur Ω. Pour un évènement A dans Ω, la probabilité de A est donc donnée par

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{C_8^2}.$$

Notons que $C_8^2 = \frac{8\times 7}{2} = 28$.

Question 2 Obtenir deux billes rouges, c'est choisir les deux billes sans remise (et sans ordre) dans l'ensemble des 4 billes rouges. On a ainsi C_4^2 possibilités et la probabilité recherchée est donc

$$\mathbb{P}(\text{deux billes rouges}) = \frac{C_4^2}{C_8^2} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14} \simeq 0{,}21.$$

Question 3 Obtenir une bille noire, c'est choisir une bille dans les 7 autres billes, soit 7 possibilités. La probabilité recherchée est donc

$$\mathbb{P}(\text{une bille noire}) = \frac{7}{C_8^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Question 4 Le plus simple est de raisonner sur le complémentaire de l'évènement pour éviter des erreurs de comptage. Le complémentaire est ici avoir deux billes paires ou deux billes impaires. Dans les deux cas, on choisit 2 billes parmi 4, soit $C_4^2 = 6$ possibilités et donc au total 12 combinaisons. La probabilité recherchée est donc

$$\mathbb{P}(\text{une paire une impaire}) = 1 - \frac{12}{28} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7} \simeq 0{,}57.$$

On peut aussi dire qu'on choisit la bille paire parmi 4, soit $C_4^1 = 4$ possibilités et la bille impaire parmi 4 aussi, soit $C_4^1 = 4$ possibilités aussi, puis qu'on considère toutes les paires ainsi formées, soit $4 \times 4 = 16$ possibilités et le même résultat final.

Question 5 L'évènement A correspond au choix d'une bille verte, soit 3 possibilités, combiné au choix d'une autre bille, soit 5 possibilités, pour un total de $3 \times 5 = 15$ possibilités. On a donc

$$\mathbb{P}(U) = \frac{15}{28} \simeq 0{,}54.$$

On a déjà calculé à la question précédente la probabilité de V qui est $\mathbb{P}(V) = \frac{4}{7}$. Considérons $W = U \cap V$, l'évènement consistant à obtenir exactement une bille verte et exactement une bille paire. On peut décomposer W en deux évènements disjoints, W_p dans lequel la bille verte est paire et W_i dans lequel elle est impaire. Dans W_p, on a la bille verte numéro 6, et on doit choisir pour la seconde bille une bille impaire non verte (soit 2 possibilités, les billes 1 et 3). Donc $|W_p| = 2$. Dans W_i, on a deux choix possibles pour la bille verte (5 et 7) et on doit choisir une bille paire non verte, soit 3 possibilités (2, 4 et 8). On a donc $|W_i| = 6$ et finalement $|W| = 8$. Donc

$$\mathbb{P}(W) = \frac{8}{28} \neq \frac{15}{28} \times \frac{4}{7}.$$

Comme $\mathbb{P}(U \cap V) \neq \mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(V)$, U et V ne sont pas indépendants.

Exercice 2

Question 1 D'après la description de l'expérience, $T_1 = \text{rouge}$ conduit à une urne contenant 4 billes rouges et 4 billes bleues. Par symétrie, la probabilité dans cet univers est supposée uniforme et la probabilité d'obtenir une bille rouge est donc de 0,5. Par définition, cette probabilité est $\mathbb{P}(T_2 = \text{rouge}|T_1 = \text{rouge})$.

Question 2 On souhaite appliquer la loi des probabilités totales, à savoir ici :

$$\mathbb{P}(T_2 = \text{rouge}) = \mathbb{P}(T_2 = \text{rouge}|T_1 = \text{rouge}) \times \mathbb{P}(T_1 = \text{rouge}) + \mathbb{P}(T_2 = \text{rouge}|T_1 = \text{bleue}) \times \mathbb{P}(T_1 = \text{bleue}).$$

Par un raisonnement similaire à celui de la question précédente, on a

$$\mathbb{P}(T_2 = \text{rouge}|T_1 = \text{bleue}) = \frac{3}{8},$$

car on ajoute cette fois-ci une bille bleue dans l'urne. D'autre part, on a clairement $\mathbb{P}(T_1 = \text{rouge}) = \frac{3}{7}$ et $\mathbb{P}(T_1 = \text{bleue}) = \frac{4}{7}$, ce qui donne

$$\mathbb{P}(T_2 = \text{rouge}) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{3}{7}.$$

Question 3 On applique la règle de Bayes qui dit ici

$$\mathbb{P}(T_1 = \text{bleue}|T_2 = \text{rouge}) = \frac{\mathbb{P}(T_2 = \text{rouge}|T_1 = \text{bleue}) \times \mathbb{P}(T_1 = \text{bleue})}{\mathbb{P}(T_2 = \text{rouge})}.$$

Toutes les grandeurs sont déjà connues et donc

$$\mathbb{P}(T_1 = \text{bleue}|T_2 = \text{rouge}) = \frac{\frac{3}{8} \times \frac{4}{7}}{\frac{3}{7}} = \frac{1}{2}.$$

Question 4 On doit raisonner sur les quatre cas possibles pour T_1 et T_2. Le tableau suivant donne le nombre de billes rouges dans l'urne après le deuxième tirage :

$(T_1 = a, T_2 = b)$	$b = \text{rouge}$	$b = \text{bleue}$
$a = \text{rouge}$	5	4
$a = \text{bleue}$	4	3

Les valeurs possibles sont donc 3, 4 et 5.

Question 5 La loi de R_2 s'obtient simplement à partir de la loi du couple (T_1,T_2). Or, on a en général, par définition

$$\mathbb{P}(T_1 = a, T_2 = b) = \mathbb{P}(T_2 = b|T_1 = a)\mathbb{P}(T_1 = a),$$

ce qui conduit à la loi jointe suivante :

$\mathbb{P}(T_1 = a, T_2 = b)$	$b =$ rouge	$b =$ bleue
$a =$ rouge	$\frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$	$\frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$
$a =$ bleue	$\frac{3}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{3}{14}$	$\frac{5}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{5}{14}$

Donc la loi de R_2 est donnée par

r	3	4	5
$\mathbb{P}(R_2 = r)$	$\frac{5}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{14}$

Question 6 On obtient donc pour l'espérance

$$\mathbb{E}(R_2) = 3 \times \frac{5}{14} + 4 \times \frac{3}{7} + 5 \times \frac{3}{14} = \frac{27}{7} \simeq 3{,}86.$$

Exercice 3

Question 1 Il est clair par symétrie que le choix du joueur n'est pas important. Pour gagner, il faut simplement qu'il prenne une bille de la couleur choisie, c'est-à-dire une des 8 billes parmi 17. Sa probabilité de gain est donc $\frac{8}{17}$ (en supposant que les probabilités sont uniformes).

Question 2 Le gain est donc de 1 € en cas de réussite et de -1 € en cas de perte. La loi de X est donc donnée par

x	-1	1
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{9}{17}$	$\frac{8}{17}$

Question 3 On a clairement $\mathbb{E}(X) = \frac{8}{17} - \frac{9}{17} = -\frac{1}{17}$.

Question 4 Comme les tirages sont indépendants, le nombre de tirages gagnés est une variable de loi binomiale de paramètre 5 et $p = \frac{8}{17}$. On note Z ce nombre de tirages gagnés. On veut donc $\mathbb{P}(Z \geq 3)$. Or,

$$\mathbb{P}(Z \geq 3) = \mathbb{P}(Z = 3) + \mathbb{P}(Z = 4) + \mathbb{P}(Z = 5),$$

donc

$$\mathbb{P}(Z \geq 3) = C_5^3 p^3(1-p)^2 + C_5^4 p^4(1-p) + C_5^5 p^5.$$

Question 5 Le nombre de tirages effectués dans cette configuration suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{8}{17}$. La probabilité de jouer trois fois exactement est donc $= (1-p)^2 p$.

Exercice 4

On pose $Y = \frac{X-8}{4}$ qui suit donc une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Question 1 $X \leq 10$ est équivalent à $Y \leq 0{,}5$. On cherche donc $F_Y(0{,}5)$ qui est environ égal à 0,6915 d'après la table.

Question 2 $X \geq 20$ est équivalent à $Y \geq 3$. On cherche donc $\mathbb{P}(Y \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq 3) = 1 - F_Y(3)$. Or la table s'arrête à 2,99 donc on peut seulement dire que $F_Y(3) \geq 0{,}9986$ et donc que $\mathbb{P}(X \geq 20) \leq 0{,}0014$.

$X \leq 0$ est équivalent à $Y \leq -2$. On cherche donc $\mathbb{P}(Y \leq -2) = F_Y(-2) = 1 - F_Y(2)$ par symétrie de la loi normale. La lecture de la table donne $F_Y(2) = 0{,}9772$ et donc $\mathbb{P}(X \leq 0) = 0{,}0228$.

Question 3 La probabilité de sortie de l'intervalle [0,20] n'est pas trop élevée (moins de 3%) et l'erreur de modélisation semble donc acceptable.

Question 4 On cherche a minimal tel que $\mathbb{P}(X \geq a) = 0{,}25$. Or $X \geq a$ est équivalent à $Y \geq b$ avec $b = \frac{a-8}{4}$. On cherche donc b tel que $\mathbb{P}(Y \geq b) = 0{,}25$, soit $1 - F_Y(b) = 0{,}25$ et donc $F_Y(b) = 0{,}75$. La table donne $b \simeq 0{,}67$. On en déduit que $a = 8 + 4 \times 0{,}67 = 10{,}68$.

Question 5 Il suffit ici de calculer $\mathbb{P}(X \leq 4)$, soit $\mathbb{P}(Y \leq -1)$. Par symétrie de la loi normale, $\mathbb{P}(Y \leq -1) = 1 - F_Y(1)$. La table donne $F_Y(1) = 0{,}8413$ et donc $\mathbb{P}(X \leq 4) = 0{,}1586$. La note est donc dans les 20 % les plus faibles.