Contrôle continu : Statistique

Correction du sujet 1

Exercice 1

Bertrand change de téléphone portable tous les ans, le jour de son anniversaire. Il conserve toujours un téléphone une année entière. Si le téléphone tombe en panne dans l'année, il le fait réparer et change tout de même de téléphone à la date prévue. On suppose que la probabilité qu'un téléphone portable tombe en panne dans l'année est de p. On suppose aussi qu'un téléphone ne peut pas subir plus d'une panne dans son année de possession par Bertrand. On note X la variable aléatoire « nombre de téléphones tombés en panne dans les dix premières années ».

Question 1 Quelle loi suit la variable aléatoire X ?

Correction

Chaque année, la probabilité d'avoir une panne est de p. En supposant les années indépendantes, on répète donc 10 fois une épreuve de Bernoulli de paramètre fixé p. X compte les succès et suit donc loi Binomiale de paramètres 10 et p.

Question 2 Donner la probabilité que Bertrand subisse 5 pannes de portables sur les dix premières années.

Correction

On cherche $\mathbb{P}(X = 5)$ qui est donné par $C_{10}^{5} p^5 (1-p)^5$ d'après les formules connues de la loi Binomiale.

Question 3 Donner l'espérance et la variance de X.

Correction

On applique aussi les formules connues qui donnent $\mathbb{E}(X) = 10p$ et $\mathbb{V}(X) = 10p(1-p)$.

On suppose qu'un nouveau téléphone portable coûte 100 euros. Lors de l'achat, Bertrand peut l'assurer pour 10 euros auquel cas le portable sera réparé gratuitement (pendant un an). Si le portable n'est pas assuré, le coût d'une réparation est de 50 euros. On note Y la variable aléatoire « montant dépensé par Bertrand en téléphonie s'il ne s'assure jamais » (on compte donc dans Y l'achat des téléphones ainsi que les réparations éventuelles).

Question 4 Donner $Y(\Omega)$ et la loi de Y. On pourra exprimer Y en fonction de X.

Correction

Comme Bertrand achète 10 téléphones, il dépense 1000 pour ces achats. Le nombre de réparations est donné par X et les dépenses associées sont donc de $50X$. Donc la dépense totale de Bertrand (sans assurance) est de $Y = 1000 + 50X$. On en déduit que

$$Y(\Omega) = \{1000, 1050, 1100, \ldots, 1500\}.$$

Pour déterminer la loi de Y, on remarque que $\mathbb{P}(Y = 1000 + 50k) = \mathbb{P}(X = k)$. On a donc

$$\mathbb{P}(Y = 1000 + 50k) = C_{10}^{k} p^k (1-p)^{10-k}.$$

Question 5 Combien dépensera Bertrand en téléphonie les dix premières années s'il assure tous ses téléphones ?

Correction

Si Bertrand assure tous ses téléphones, il paye au total 1100 euros (pas de réparation et 10 assurances).

Question 6 Pour quelles valeurs de p est-il préférable d'assurer son téléphone ?

Correction

On peut comparer les espérances des dépenses. En utilisant la linéarité de l'espérance on a $\mathbb{E}(Y) = 1000 + 50\mathbb{E}(X)$, soit donc

$$\mathbb{E}(Y) = 1000 + 500p.$$

De ce fait, $\mathbb{E}(Y) - 1100 = 500p - 100$. Quand cette valeur est positive, il faut mieux assurer les téléphones (et vice versa). Or $\mathbb{E}(Y) - 1100 \geq 0$ si et seulement si $p \geq \frac{1}{5}$. Il vaut donc mieux assurer son téléphone si la probabilité de panne est supérieure à 20 %.

On s'intéresse ici à la première panne de téléphone que connaît Bertrand. On note Z la variable aléatoire donnant l'année pendant laquelle Bertrand subit sa première panne téléphonique, en numérotant les années à partir de 1 pour l'année d'achat du premier téléphone.

Question 7 Quelle loi suit la variable aléatoire Z ?

Correction

Comme pour la question 1, on considère les années comme indépendantes et on étudie donc le nombre d'années qui doivent passer pour qu'on obtienne une première panne. La probabilité de panne étant fixe, Z suit une loi géométrique de paramètre p.

Question 8 Donner la probabilité que la première panne que connaît Bertrand soit sur son troisième portable.

Correction

D'après les propriétés de la loi géométrique $\mathbb{P}(Z = 3) = p(1 - p)^2$.

Exercice 2

Soit deux urnes contenant chacune 3 boules numérotées 0, 1, et 2. On effectue l'expérience suivante : on tire une boule dans la première urne que l'on ajoute dans la deuxième urne. On tire ensuite une boule dans la deuxième urne. On note X la variable aléatoire correspondant au numéro de la boule tirée dans la première urne et Y le numéro de la boule tirée dans la deuxième urne. On suppose que le tirage dans chaque urne est uniforme.

Question 1 Donner $X(\Omega)$ et la loi de X.

Correction

La première boule est tirée dans une première urne contenant les boules numérotées 0, 1, et 2. On a donc $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. Sans mention contraire dans l'énoncé, on suppose les boules équiprobales.

X est donc une variable aléatoire uniforme et sa loi est donc

x	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Question 2 Pour chaque $x \in X(\Omega)$, donner la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$.

Correction

Le contenu de la deuxième urne dépend du résultat du premier tirage. Si par exemple $X = 0$, alors la deuxième urne contient deux boules 0, une boule 1 et une boule 2. En supposant les boules discernables, on a donc comme contenu

$$U_2 = \{0_1, 0_2, 1, 2\}.$$

Comme dans la première question, on suppose que les boules sont équiprobles. La probabilité de tirer une boule particulière est donc de $\frac{1}{4}$. Pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(Y = y|X = 0)$, on a par exemple $\mathbb{P}(Y = 1|X = 0) = \frac{1}{4}$ car il y a une seule boule 1 dans U_2 (sachant que $X = 0$). En revanche, $\mathbb{P}(Y = 0|X = 0) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ car il y a deux boules 0 dans cette situation. On trouve ainsi

y	0	1	2
$\mathbb{P}(Y = y\|X = 0)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

et de la même façon

y	0	1	2
$\mathbb{P}(Y = y\|X = 1)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$\mathbb{P}(Y = y\|X = 2)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Question 3 Déduire des lois précédentes la loi du couple (X, Y).

Correction

On utilise la définition de la loi conditionnelle, à savoir $\mathbb{P}(Y = y|X = x) = \frac{\mathbb{P}(X=x,Y=y)}{\mathbb{P}(X=x)}$. On peut ainsi calculer $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ comme un simple produit des lois obtenues dans les questions précédents. On obtient

$\mathbb{P}(X = x,Y = y)$	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$
$x = 0$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
$x = 1$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
$x = 2$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

Question 4 Donner la loi marginale Y.

Correction

On utilise la propriété $\mathbb{P}(Y = y) = \sum_x \mathbb{P}(X = x, Y = y)$, ce qui revient à sommer les lignes du tableau de la loi jointe. La loi de Y est donc

y	0	1	2
$\mathbb{P}(Y = y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Question 5 Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.

Correction

On constate que $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{6}$ alors que $\mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{9}$. Or pour que X et Y soit indépendantes, il faudrait que pour tout x et tout y, $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$. Le contre-exemple trouvé montre que X et Y ne sont pas indépendantes.

Question 6 Calculer la loi conditionnelle de X sachant $Y = 0$.

Correction

On applique la définition, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X = y|Y = 0) = \frac{\mathbb{P}(X=x,Y=0)}{\mathbb{P}(Y=0)}$, ce qui donne

x	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x\|Y = 0)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Question 7 Calculer $\mathbb{E}(XY)$ et rappeler la formule de $cov(X, Y)$.

Correction

Par le théorème de transport, on a $E(XY) = \sum_{x,y} xy\mathbb{P}(X = x,Y = y)$. Ici on obtient

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x,y} xy\mathbb{P}(X = x,Y = y), \\ &= \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{12} + 2 \times \frac{1}{12} + 4 \times \frac{1}{6}, \\ &= \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

On sait enfin que $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, soit ici

$$\begin{aligned} cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y), \\ &= \frac{7}{6} - \left(\frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3}\right)^2, \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = -ax^2 + b$ sur $[-1; 1]$ et 0 sinon. Dans cette formule a et b sont des paramètres à déterminer.

Question 1 À quelles conditions sur a et b la fonction f est-elle positive ou nulle pour tout $x \in \mathbb{R}$?

Correction

Il suffit d'étudier f sur $[-1; 1]$ puisqu'elle est nulle en dehors de cet intervalle. On a $f'(x) = -2ax$. On étudie les variations de f en fonction du signe de a :

— si $a = 0$, alors $f(x) = b$ sur $[-1; 1]$ et il faut donc $b \geq 0$;

— si $a > 0$, alors $f'(x)$ est positive sur $[-1; 0]$ puis négative sur $[0; 1]$. Donc f est d'abord croissante puis décroissante. On en déduit que les plus petites valeurs de f sont prises en -1 et 1. Or $f(-1) = f(1) = b - a$. On doit donc avoir $b \geq a$;

— enfin si $a < 0$, la situation est inversée par rapport au cas précédent : f est décroissante sur $[-1; 0]$ puis croissante sur $[0; 1]$. La plus petite valeur est donc prise en 0, avec $f(0) = b$. On doit donc avoir $b \geq 0$.

Donc finalement, il faut que $b \geq \max(0, a)$.

Question 2 Calculer $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ en fonction de a et b.

Correction

Une primitive de f est $h(x) = -\frac{a}{3}x^3 + bx$. On a donc

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)dx &= \Big[-\frac{a}{3}x^3 + bx\Big]_{-1}^{1} \\ &= -\frac{a}{3} + b - \Big(-\frac{a}{3} + b\Big) \\ &= 2b - \frac{2a}{3}.\end{aligned}$$

Question 3 On suppose que pour a et b bien choisis, f est la densité d'une variable aléatoire X telle que $\mathbb{P}(X \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) = \frac{11}{16}$. En déduire a et b.

Correction

Si f est la densité d'une variable aléatoire, alors on a $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Comme f est nulle en dehors de $[-1; 1]$, on $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 1$ et donc $2b - \frac{2a}{3} = 1$.
De plus les propriétés des densités font que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx, \\ &= \Big[-\frac{a}{3}x^3 + bx\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}, \\ &= 2\left(\frac{b}{2} - \frac{a}{3} \times \frac{1}{8}\right), \\ &= \frac{11}{16}.\end{aligned}$$

On doit donc résoudre le système

$$\begin{aligned}2\left(\frac{b}{2} - \frac{a}{3} \times \frac{1}{8}\right) &= \frac{11}{16} \\ 2\left(b - \frac{a}{3}\right) &= 1\end{aligned}$$

En soustrayant $\frac{1}{2}$ fois la deuxième équation à la première, on obtient après simplification

$$\frac{1}{4}a = \frac{3}{16},$$

et donc $a = \frac{3}{4}$. En réinjectant la valeur dans la deuxième équation, on obtient $b = \frac{3}{4}$. On remarque que ces valeurs sont compatibles avec les conditions trouvées à la question 1 (positivité de f).

Question 4 Calculer la fonction de répartition, l'espérance et la variance de X.

Correction

La fonction de répartition est donnée par

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx.$$

Si $t \leq -1$, f étant nulle sur $]-\infty;-1]$, on a $F_X(t) = 0$. Si $t \in [-1;1]$, l'intégrale se réduit à

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \int_{-\infty}^{t} f(x)dx, \\ &= \int_{-1}^{t} \frac{3}{4}(1-x^2)dx, \\ &= \left[\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x^3\right]_{-1}^{t}, \\ &= \frac{3}{4}t - \frac{1}{4}t^3 + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Enfin, si $t \geq 1$, on constate que l'intégrale se réduit à $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ qui vaut 1. On a donc

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq -1, \\ \frac{3}{4}t - \frac{1}{4}t^3 + \frac{1}{2} & \text{si } t \in [-1;1], \\ 1 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

L'espérance de X est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx & &\text{par définition,} \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{3}{4}(x-x^3)dx & &\text{par nullité en dehors de } [-1;1], \\ &= \left[\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{16}x^4\right]_{-1}^{1}, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pour calculer la variance de X, on passe par le calcul de $\mathbb{E}(X^2)$ qui est obtenu grâce au théorème de transport par l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx & &\text{par transport,} \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{3}{4}(x^2-x^4)dx & &\text{par nullité en dehors de } [-1;1], \\ &= \left[\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{20}x^5\right]_{-1}^{1}, & &= 2\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{20}\right), = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{1}{5}$.