Contrôle continu : Statistique

Sujet 1

Prénom :
Nom :

Les exercices sont indépendants. L'utilisation de documents, calculatrices, téléphones portables ou tout autre appareil électronique, est interdite. Les réponses devront être soigneusement argumentées et justifiées. Vous pouvez laisser les résultats sous la forme de fractions. L'énoncé doit impérativement être rendu avec la copie.

Exercice 1

On considère une urne contenant 3 jetons rouges et 3 jetons bleus. Les jetons rouges portent les numéros 1, 2 et 4, alors que les jetons bleus portent les numéros 1, 1 et 5 (il y a donc deux jetons bleus portant un 1). Dans une première expérience, on tire un jeton dans l'urne. Si le jeton est rouge, on gagne la valeur indiquée sur le jeton en euros. Si le jeton est bleu, on perd la valeur indiquée sur le jeton en euros.

Question 1 Donner l'univers Ω et la probabilité $\mathbb{P}$ associés au tirage.

Question 2 On note X la variable aléatoire correspondant au gain du joueur (négatif en cas de perte). Donner $X(\Omega)$ et la loi de X.

Question 3 Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$

Dans une deuxième expérience basée sur la même urne, on tire deux jetons successivement et sans remise. Si le joueur obtient deux jetons rouges, il gagne la somme des valeurs indiquées (en euros). S'il obtient deux jetons bleus, il perd la somme des valeurs indiquées. S'il obtient un jeton de chaque, on calcule la différence entre la valeur du jeton rouge et celle du jeton bleu. Le « gain » est alors cette différence (il peut donc être négatif).

Question 4 Donner l'univers Ω' et la probabilité $\mathbb{P}'$ associés au tirage.

Question 5 On note Y la variable aléatoire correspondant au gain du joueur (négatif en cas de perte). Donner $Y(\Omega')$ et la loi de Y. Il est vivement conseillé de représenter les valeurs possibles de Y à partir du tirage sous forme d'un tableau.

Exercice 2

On étudie la clientèle d'un opérateur mobile. On s'intéresse en particulier à la variable aléatoire T donnant la taille (en pouces) de la diagonale de l'écran du mobile d'un client pris au hasard dans l'ensemble des clients. Une étude indique que T suit la loi suivante :

t	4,7	5	5,2	5,5
$\mathbb{P}(T = t)$	a	b	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$

On sait aussi que $\mathbb{E}(T) = \frac{615}{120}$.

Question 1 Déterminer a et b pour que le tableau ci-dessus corresponde bien à une loi pour T.

On s'intéresse au coût d'achat d'une coque pour téléphone. Pour simplifier, on ne considère qu'un seul fabricant et qu'un seul modèle par taille de téléphone. Les coques pour téléphone d'écran de diagonale inférieure ou égale à 5 pouces sont vendues 10 € par ce fabricant. Pour un écran de diagonale 5,2 pouces, le prix est de 12 € et enfin, pour un écran de taille 5,5 pouces, le prix de la coque est de 15 €.

On suppose pour simplifier qu'aucun client de l'opérateur ne possède de coque pour son téléphone. Soit X la variable aléatoire donnant le prix d'achat de la coque pour le téléphone d'un client pris au hasard dans l'ensemble des clients.

Question 2 Définir X sous la forme $X = f(T)$ en précisant la fonction f, par exemple sous forme d'un tableau.

Question 3 Déterminer la loi de X.

Question 4 Donner $\mathbb{E}(X)$.

L'opérateur souhaite inciter ses clients à choisir un forfait plus coûteux en offrant un bon d'achat de 10 € pour une coque (quel que soit le coût de la coque). Il constate que la probabilité d'accepter cette offre dépend de la diagonale de l'écran. Soit Z la variable aléatoire indiquant si un client pris au hasard accepte l'offre (dans ce cas Z vaut 1 et 0 dans le cas contraire). On constate que

t	4,7	5	5,2	5,5
$\mathbb{P}(Z = 1 \vert T = t)$	1	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$

Question 5 Déterminer la loi de Z.

Question 6 À quelle dépense totale l'opérateur peut-il s'attendre avec cette offre en supposant qu'il a 12 millions de clients ?

Exercice 3

Deux joueurs, Alice et Bob, s'affrontent sur un jeu de stratégie en ligne. Le jeu est organisé en tours successifs. Dans chaque tour, un joueur peut attaquer une ou plusieurs fois son adversaire.

Alice dispose d'une arme lui permettant de tenter d'atteindre Bob trois fois par tour de jeu (elle a donc trois attaques par tour). La probabilité de toucher Bob est de $\frac{1}{3}$ pour chaque attaque. Les attaques sont supposées indépendantes. Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre d'attaques d'Alice qui touchent Bob lors d'un tour de jeu.

Question 1 Donner la loi de X et préciser son (ou ses) paramètre(s).

Soit Y la variable aléatoire qui vaut 1 si au moins une attaque d'Alice a touché Bob dans le tour, et 0 sinon.

Question 2 Donner la loi de Y et préciser son (ou ses) paramètre(s).

On suppose les tours indépendants et on définit la variable Z comme le nombre de tours que doit faire Alice jusqu'à ce qu'une de ses attaques touche Bob (le tour concerné est inclus dans le décompte).

Question 3 Donner la loi de Z, son (ou ses) paramètre(s) et son espérance.

Bob ne peut faire qu'une seule attaque par tour, avec une probabilité de toucher Alice de $\frac{1}{2}$. Quand Bob touche Alice, il fait 5 points de dégâts. Chaque attaque réussie d'Alice sur Bob effectue 3 points de dégâts. Soit A la variable aléatoire indiquant le total des dégâts effectués par Alice en un tour et B la variable aléatoire indiquant le total des dégâts effectués par Bob en un tour.

Question 4 Calculer $\mathbb{E}(A)$ et $\mathbb{E}(B)$ en exprimant A et B comme des fonctions simples de variables aléatoires comptant les attaques réussies par Alice et Bob.