Correction du contrôle continu : Statistique
Sujet 1

Exercice 1

L'univers est basé sur 4 fleurs rouges discernables $R_1, \ldots, R_4$, 3 fleurs jaunes discernables J_1, J_2, J_3 et 5 fleurs roses discernables $O_1, \ldots, O_5$. On a donc un total de 12 fleurs. On considère que les fleurs sont cueillies simultanément (pas d'ordre), mais on pourrait faire ça de façon ordonné sans que cela ne pose de gros problème (et l'énoncé n'est pas clair à ce sujet). En revanche, il est clair qu'on fait des tirages sans remise. On suppose aussi la probabilité uniforme sur les univers considérés.

Question 1

Evènement A : Roméo cueille trois fleurs de couleur rose qui sont donc choisies dans les cinq fleurs roses.

$$\begin{aligned}
&Card(\Omega) = C_{12}^3 \\
&Card(A) = C_5^3 \\
&P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{C_5^3}{C_{12}^3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{12 \times 11 \times 10}
\end{aligned}$$

Question 2

Evènement B : Roméo cueille trois fleurs, chacune de couleurs différentes. Comme on ne tient pas compte de l'ordre, cela revient à choisir une feuille dans chaque sous-ensemble (indépendamment).

$$\begin{aligned}
&Card(\Omega) = C_{12}^3 \\
&Card(B) = C_3^1 \times C_4^1 \times C_5^1 \\
&P(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{C_3^1 \times C_4^1 \times C_5^1}{C_{12}^3} = \frac{3 \times 4 \times 5 \times 3 \times 2}{12 \times 11 \times 10}
\end{aligned}$$

Question 3

Evènement C : Roméo cueille quatre fleurs, dont aucune jaune. La solution la plus simple est de dire que les fleurs sont choisies non plus parmi les 12 fleurs de départ mais parmi les 9 fleurs non jaunes. Attention aussi au fait que l'univers est maintenant sur 4 fleurs...

$$\begin{aligned}
&Card(\Omega) = C_{12}^4 \\
&Card(C) = C_9^4 \\
&P(C) = \frac{C_9^4}{C_{12}^4} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{12 \times 11 \times 10 \times 9}
\end{aligned}$$

Question 4

Evènement D : Roméo cueille deux fleurs et obtient des fleurs de couleurs différentes. La solution simple est de détailler les différents cas, à savoir une rose et une jaune, une rose et une rouge et une rouge et une jaune (cas disjoints), puis de compter les combinaisons dans chaque cas.

$$Card(\Omega) = C_{12}^2$$
$$Card(D) = C_3^1 \times C_4^1 + C_3^1 \times C_5^1 + C_4^1 \times C_5^1$$
$$P(D) = \frac{Card(D)}{Card(\Omega)} = \frac{C_3^1 \times C_4^1 + C_3^1 \times C_5^1 + C_4^1 \times C_5^1}{C_{12}^2} = \frac{3 \times 4 + 3 \times 5 + 4 \times 5}{12 \times 11}$$

Exercice 2

On note :
C : Le Prince reçoit un Capulet
M : Le Prince reçoit un Montaigu
A : Le Prince reçoit une autre famille
R&J : Le Prince parle de Roméo et Juillette
T : Le Prince parle de taxes
Cr : Le Prince parle de criminalité

Informations données dans l'énoncé :

$$P(C) = 0{,}3 \quad P(R\&J|C) = 0{,}4 \quad P(T|C) = 0{,}3 \quad P(Cr|C) = 0{,}3$$
$$P(M) = 0{,}25 \quad P(R\&J|M) = 0{,}5 \quad P(T|M) = 0{,}15 \quad P(Cr|M) = 0{,}35$$
$$P(A) = 0{,}45 \quad P(T|A) = 0{,}5 \quad P(Cr|A) = 0{,}5$$

Question 1

Probabilité que le Prince parle de la criminalité dans Vérone. On applique la loi des probabilités totales en conditionnant par la partition sur les familles (Capulet, Montaigu et autres familles).

$$P(Cr) = P(Cr \cap C) + P(Cr \cap M) + P(Cr \cap A)$$
$$P(Cr) = P(Cr|C) \times P(C) + P(Cr|M) \times P(M) + P(Cr|A) \times P(A)$$
$$P(Cr) = 0{,}3 \times 0{,}3 + 0{,}35 \times 0{,}25 + 0{,}5 \times 0{,}45 = 0{,}4025$$

Question 2

Sachant qu'il parle de taxes, on veut la probabilité que le Prince s'entretenir avec un émissaire des Montaigu. On utilise la règle de Bayes pour passer de $P(M|T)$ à $P(T|M)$. Cela nécessite le calcul de $P(T)$ qui est réalisé par la loi des probabilités totales (même partition sur les familles).

$$P(T) = P(T \cap C) + P(T \cap M) + P(T \cap A)$$
$$P(T) = P(T|C) \times P(C) + P(T|M) \times P(M) + P(T|A) \times P(A)$$
$$P(T) = 0{,}3 \times 0{,}3 + 0{,}15 \times 0{,}25 + 0{,}5 \times 0{,}45 = 0{,}3525$$
$$P(M|T) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{P(T|M) \times P(M)}{P(T)} = \frac{0{,}15 \times 0{,}25}{0{,}3525} = 0{,}0979$$

Question 3

Sachant qu'il ne parle pas de criminalité, on veut la probabilité que le Prince s'entretienne avec un émissaire des Capulet. C'est un piège classique, puisqu'on doit calculer $P(C|\overline{Cr})$. On utilise de nouveau la règle de Bayes pour passer au calcul de $P(\overline{Cr}|C) = 1 - P(Cr|C) = 0{,}7$.

$$P(C|\overline{Cr}) = \frac{P(\overline{Cr}|C)P(C)}{P(\overline{Cr})}$$
$$P(C|\overline{Cr}) = \frac{0{,}7 \times 0{,}3}{1 - P(Cr)} = \frac{0{,}7 \times 0{,}3}{0{,}5975} = 0{,}3515$$

Question 4

On veut savoir si les évènements « Parler de Roméo et Juilette » et « Recevoir un Montaigu » sont indépendants. Or on a :

$$P(M) = 0{,}25$$
$$P(R\&J \cap M) = P(R\&J|M) \times P(M)$$
$$P(R\&J \cap M) = 0{,}5 \times 0{,}25 = 0{,}125$$
$$P(R\&J) = P(R\&J|C) \times P(C) + P(R\&J|M) \times P(M)$$
$$P(R\&J) = 0{,}4 \times 0{,}3 + 0{,}5 \times 0{,}25 = 0{,}245$$

On a donc $P(M) \times P(R\&J) = 0{,}06125 \neq P(R\&J \cap M)$, les évènements ne sont pas indépendants.

Exercice 3

Pour se faciliter la tâche, on peut introduire le tableau des résultats des deux lancers. On peut considérer les dés comme discernables pour simplifier les calculs. On a alors la table suivante, avec à gauche la somme et à droite X_7

$L1/L2$	1	2	3	4	5	6
1	$2/-1$	$3/-1$	$4/0$	$5/0$	$6/0$	$7/1$
2	$3/-1$	$4/0$	$5/0$	$6/0$	$7/1$	$8/0$
3	$4/0$	$5/0$	$6/0$	$7/1$	$8/0$	$9/0$
4	$5/0$	$6/0$	$7/1$	$8/0$	$9/0$	$10/0$
5	$6/0$	$7/1$	$8/0$	$9/0$	$10/0$	$11/1$
6	$7/1$	$8/0$	$9/0$	$10/0$	$11/1$	$12/-1$

Le reste est alors assez facile, avec l'hypothèse classique d'uniformité sur Ω.

Question 1

$$X_7(\Omega) = \{-1{,}0{,}1\}$$
$$P(X_7 = -1) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$
$$P(X_7 = 1) = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$
$$P(X_7 = 0) = 1 - [P(X_7 = -1) + P(X_7 = 1)] = 1 - \frac{12}{36} = \frac{24}{36}$$

Fonction de répartition de X_7 :

$$P(X_7 \leq k) = F_{X_7}(k) = \begin{cases} 0 \quad si \quad t < -1 \\ \frac{1}{9} \quad si \quad -1 \leq t < 0 \\ \frac{28}{36} = \frac{7}{9} \quad si \quad 0 \leq t < 1 \\ 1 \quad si \quad t \geq 1 \end{cases}$$

Question 2

$$\begin{aligned} E(X_7) &= \frac{4}{36} \times -1 + \frac{8}{36} \times 1 = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \\ V(X_7) &= E(X_7^2) - E(X_7)^2 \\ E(X_7^2) &= \frac{4}{36} \times 1 + \frac{8}{36} \times 1 = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \\ V(X_7) &= \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{26}{81} \end{aligned}$$

La question 3 se traite exactement comme les questions 1 et 2 (attention aux modifications sur les conditions de gain et de perte).

Question 3

$$\begin{aligned} &X_6(\Omega) = \{-1, 0, 1\} \\ &P(X_6 = -1) = \frac{5}{36} \\ &P(X_6 = 1) = \frac{5}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \\ &P(X_6 = 0) = 1 - [P(X_6 = -1) + P(X_6 = 1)] = 1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36} \\ &E(X_6) = \frac{5}{36} \times -1 + \frac{6}{36} \times 1 = \frac{1}{36} \end{aligned}$$

Question 4

Pour la question 4, il est encore utile de se référer au tableau.

$$C_9(\Omega) = \{4, 5, 6, 7, 8, ND\}$$

Question 5

On se réfère de même au tableau.

$P(C_9 = 4) = \dfrac{3}{36}$
$P(C_9 = 5) = \dfrac{4}{36}$
$P(C_9 = 6) = \dfrac{5}{36}$
$P(C_9 = 7) = \dfrac{6}{36}$
$P(C_9 = 8) = \dfrac{5}{36}$
$P(C_9 = ND) = 1 - [P(C_9 = 4) + P(C_9 = 5) + P(C_9 = 6) + P(C_9 = 7) + P(C_9 = 7)] = 1 - \dfrac{23}{36} = \dfrac{13}{36}$

On ne peut pas calculer $E(C_9)$ car ND n'est pas une valeur numérique.

Exercice 4

Question 1

On a $D(\omega) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Pour qu'il s'agisse d'une loi de probabilité il faut avoir :

$$\begin{aligned}
&0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}2 + a + b = 1 \\
&0{,}6 + a + b = 1 \\
&a + b = 0{,}4
\end{aligned}$$

On a aussi $a \in [0{,}1]$ et $b \in [0{,}1]$.

Question 2

$$\begin{aligned}
&P(D \geq 3) = P(D = 3) + P(D = 4) + P(D = 5) = 0{,}6 \\
&P(D \geq 3) = 0{,}3 + b + 0{,}2 = 0{,}6 \\
&P(D \geq 3) = 0{,}5 + b = 0{,}6 \quad \leftrightarrow \quad b = 0{,}1 \\
&\textit{comme} \quad a + b = 0{,}4 \quad \leftrightarrow \quad a = 0{,}3
\end{aligned}$$

Question 3

Sachant $D(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, le nombre de jours que Balthazar arrive après Frère Jean est donné par $B(\Omega) = \{2, 1, 0, -1, -2\}$. Donc la probabilité que Balthazar arrive strictement avant Frère Jean est :

$$P(B < 0) = P(D = 4) + P(D = 5) = 0{,}3$$

Question 4

$$E(D) = 0{,}1 + 0{,}3 \times 2 + 0{,}3 \times 3 + 0{,}1 \times 4 + 0{,}2 \times 5 = 3$$
$$V(D) = E(D^2) - E(D)^2$$
$$E(D_2) = 0{,}1 + 0{,}3 \times 4 + 0{,}3 \times 9 + 0{,}1 \times 16 + 0{,}2 \times 25 = 10{,}6$$
$$V(D) = 10{,}6 - 3^2$$