Corrigé examen
SMC4-M26 : probabilités
Session de printemps

I. -- **(5 pts)**

D'après l'énoncé, on a :

$$P(M)=0{,}01,\ P\left(T/\overline{M}\right)=0{,}015\ \ et\ P\left(T/M\right)=0{,}98.$$

a. La probabilité d'avoir un test positif :
on utilise la formule des probabilités totale

1

$$P(T)=P\left(T/M\right)P(M)+P\left(T/\overline{M}\right)P\left(\overline{M}\right)=0{,}98\times0{,}01+0{,}015\times0{,}99=0{,}02465$$

b. La probabilité que le test donne une indication correcte :

1,5

$$\begin{aligned}P(T\cap M)+P\left(\overline{T}\cap\overline{M}\right)&=P\left(T/M\right)P(M)+P\left(\overline{T}/\overline{M}\right)P\left(\overline{M}\right)\\&=P\left(T/M\right)P(M)+\left(1-P\left(T/\overline{M}\right)\right)P\left(\overline{M}\right)\\&=0{,}98\times0{,}01+0{,}985\times0{,}99=0{,}9849.\end{aligned}$$

c. La probabilité qu'une personne soit malade lorsque le test est positif :
On utilise la formule de Bayes ;

1

$$P\left(M/T\right)=\frac{P\left(T/M\right)P(M)}{P(T)}=\frac{0{,}98\times0{,}01}{0{,}02465}=0{,}3976.$$

d. La probabilité qu'une personne ne soit pas malade lorsque le test est négatif :
On utilise la formule de Bayes ;

1,5

$$P\left(\overline{M}/\overline{T}\right)=\frac{P\left(\overline{T}/\overline{M}\right)P\left(\overline{M}\right)}{P\left(\overline{T}\right)}=\frac{\left(1-P\left(T/\overline{M}\right)\right)P\left(\overline{M}\right)}{1-P(T)}=\frac{0{,}985\times0{,}99}{1-0{,}02465}=0{,}9998.$$

II. -- **(4 pts)**

a. La variable X suit une loi de poisson de paramètre $\lambda=E(X)=\dfrac{225}{300}=0{,}75.$

1

Et $P(X=k)=\dfrac{0{,}75^k}{k!}e^{-0{,}75}\ ,\ \forall\ k\in IN$

b. La probabilité qu'une page donnée ne contienne pas de faute d'impression :

1

$$P(X=0)=e^{-0{,}75}=0{,}4724\,.$$

c. La probabilité qu'une page contienne au plus deux fautes d'impression :

1

$$P(X\le2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\left(1+0{,}75+\frac{0{,}75^2}{2!}\right)e^{-0{,}75}=0{,}9595\,.$$

d. La probabilité qu'une page contienne au moins une fautes d'impression :

1

$$P(X\ge1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-e^{-0{,}75}=0{,}5276\,.$$

III. -- **(5 pts)**

a. La loi de probabilité de Y :
La variable aléatoire Y est le nombre de succès (écran déffectueux) dans un lot de taille 50 (répétitions indépendantes d'épreuves de Bernoulli) ; la variable Y suit alors une loi de binomiale de paramètres :
$\boldsymbol{n = 50 \; et \; p = 0,06}$ (probabilité d'observer un succès) : $\boldsymbol{X \sim \mathcal{B}(50\,,\; 0,06)}$;

1 $P(Y=k) = C_{50}^{k}(0,06)^{k}(0,94)^{50-k}$, $k = 0,1,\cdots,50.$

$E(Y) = np = 50 \times 0,06 = 3;$

$Var(Y) = np(1-p) = 2,82.$

b. La probabilité qu'il y ait exactement deux écrans défectueux dans le lot :

1 $P(Y=2) = C_{50}^{2}(0,06)^{2}(0,94)^{48} = 0,2226$

c. La probabilité qu'il y ait au moins un écran défectueux dans le lot :

1,5 $P(X \ge 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,94^{50} = 0,9547.$

d. On a : $n = 50 \; et \; np = 3 < 5$; on peut alors approcher la loi de Y par la loi de Poisson de paramètre

$\lambda = np = 3\,;\;\; P(X=k) \cong \dfrac{(3)^{k}}{k!}e^{-3}, k = 0,1\cdots, 50\,.$

1,5 D'où :

$$P(X \le 4) = \sum_{k=0}^{4} P(X=k) \cong e^{-3}\sum_{k=0}^{4}\frac{3^{k}}{k!} \cong 0,8153.$$

IV. -- **(6pts)**.

a. La variable Z suit une loi géométrique de paramètre $p = \dfrac{1}{E(Z)} = \dfrac{1}{5} = 0,2$:

1 $P(Z=k) = p(1-p)^{k-1} = 0,2 \times 0,8^{k-1}$, $k \in IN^{*}$

$Var(Z) = \dfrac{(1-p)}{p^{2}} = 20.$

b. La probabilité d'attendre exactement 3 minutes pour avoir un taxi :

1 $P(Z=3) = (0,2)(0,8)^{2} = 0,128.$

c. La probabilité d'attendre au moins 5 minutes pour avoir un taxi :
pour une loi géométrique, on a : $P(X > k) = (1-p)^{k}$;

1 d'où :
$P(Z \ge 5) = P(Z > 4) = 0,8^{4} = 0,4096.$

d. La probabilité que la durée d'attente dépasse 8 minutes sachant que la personne attend un taxi depuis 5 minutes :

1,5 La loi géométrique est une loi sans mémoire : $P\left((X > n+k) \big/ (X > n)\right) = P(X > k)$;

il en résulte : $P\left((Z > 8) \big/ (Z > 5)\right) = P(Z > 3) = 0,8^{3} = 0,512.$

e. La probabilité que la durée du déplacement dépasse 30 minutes :
on a $T = Z + 20$ (attente + trajet) ;

1,5 d'où : $P(T > 30) = P(Z + 20 > 30) = P(Z > 10) = 0,8^{10} = 0,1074.$