Graphes
Problèmes célèbres

Mardi 12 Février

Option Informatique

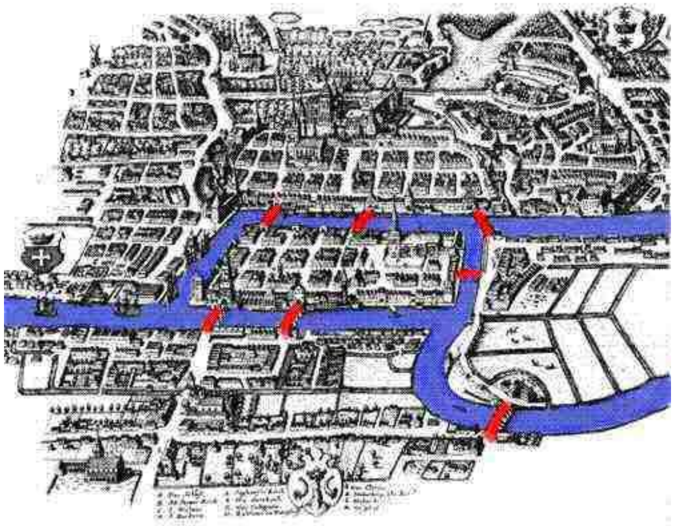
Ecole Alsacienne

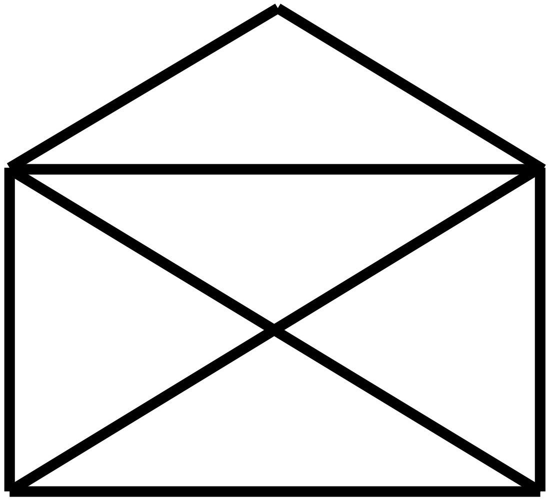
Plan

1. Parcours eulériens
2. Parcours hamiltoniens
3. Des problèmes très difficiles
4. Graphes planaires
5. Colorations de graphes

Parcours eulériens

QUEL EST LE POINT COMMUN …

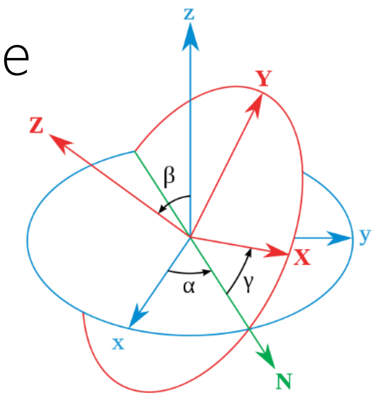




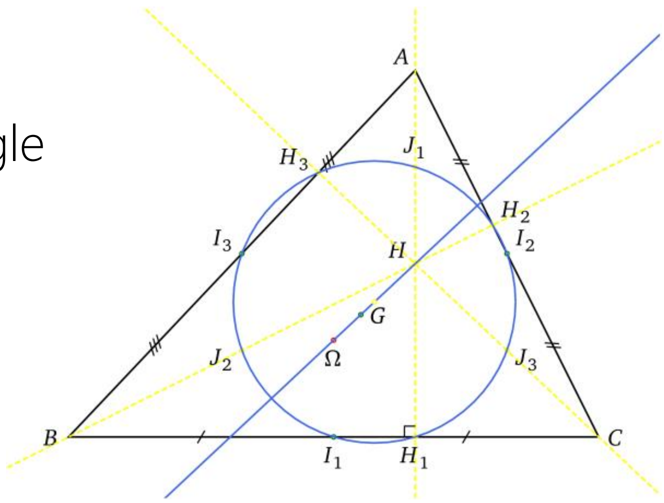
… entre des ponts et une enveloppe ?

Leonhard Paul Euler

- Mathématicien suisse du XVIIIe siècle



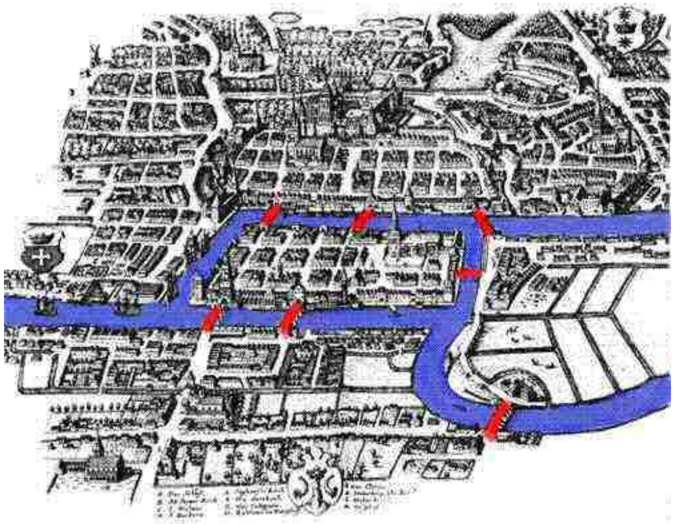
- Extrêmement prolifique :
  - Formule d'Euler : $e^{i\pi} + 1 = 0$
  - Angles d'Euler (mécanique du solide)
  - Droite, cercle et relation d'Euler pour un triangle



  - Développement en séries : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
  - Equation d'Euler (dynamique des fluides)
  - Constante d'Euler : $\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right)$

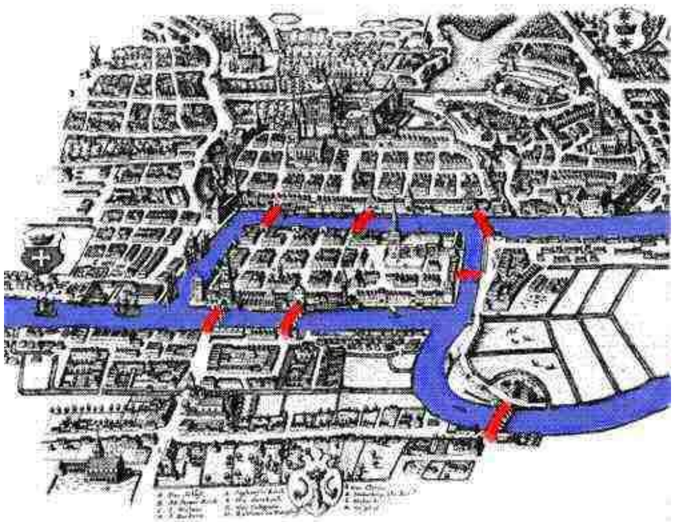
LES SEPT PONTS DE KÖNIGSBERG

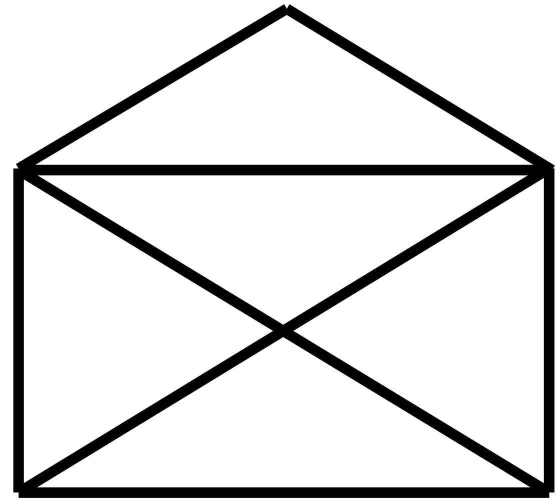
- Ville de Königsberg, en Prusse, traversée par la rivière Pregolia

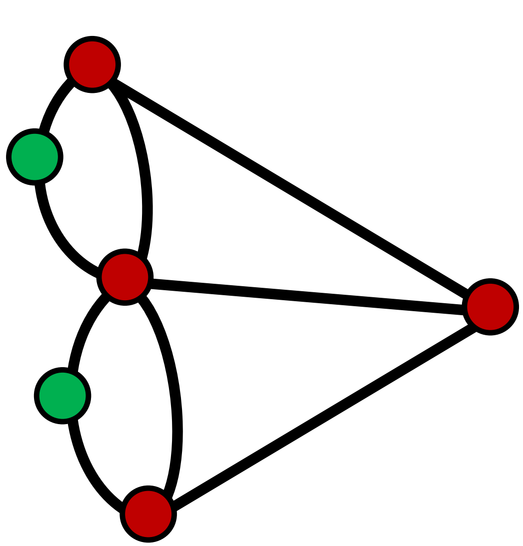


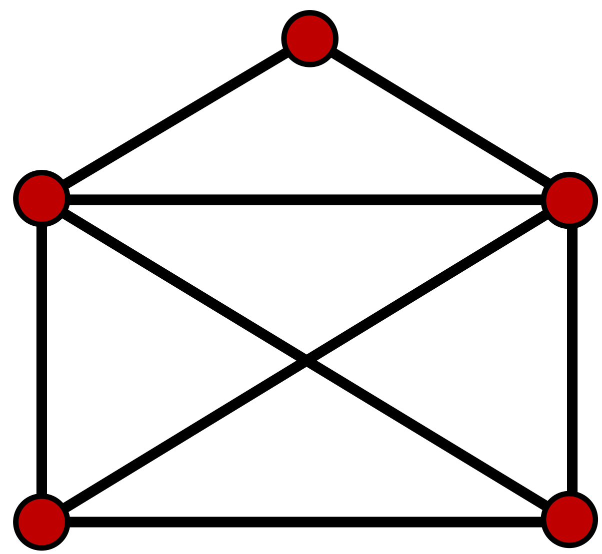
- Quatre zones géographiques
  - Deux rives
  - Deux îles
- **Questions :**
  - Un habitant peut-il faire un tour de la ville et passer exactement une fois par chacun des ponts ?
  - Même sans revenir à son lieu de départ ?

Quel est le lien avec une enveloppe ?





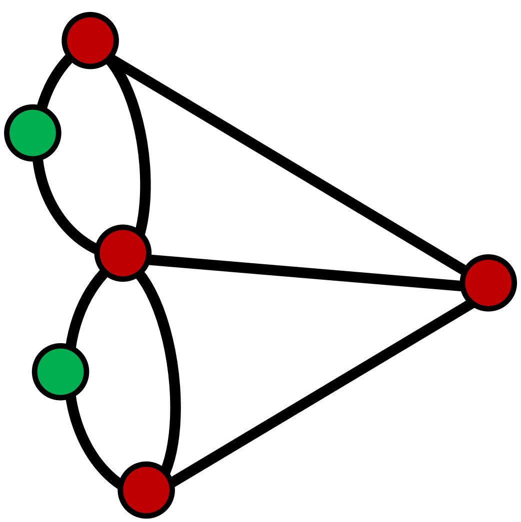


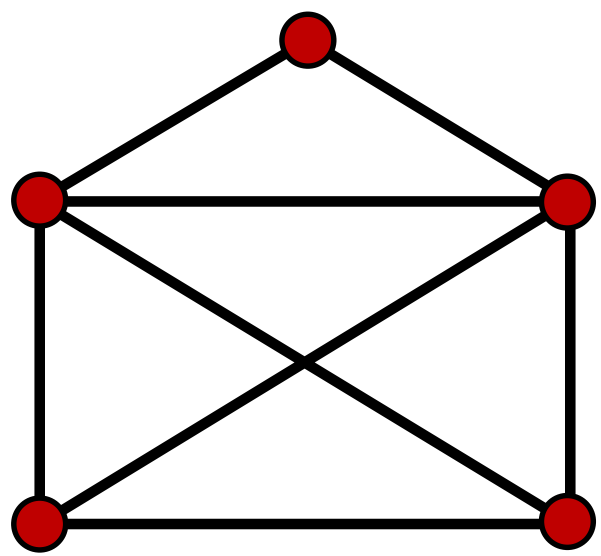


Parcours eulérien

- **Définition** : Un **parcours eulérien** d'un graphe G est un parcours qui contient exactement une fois chaque arête du graphe.

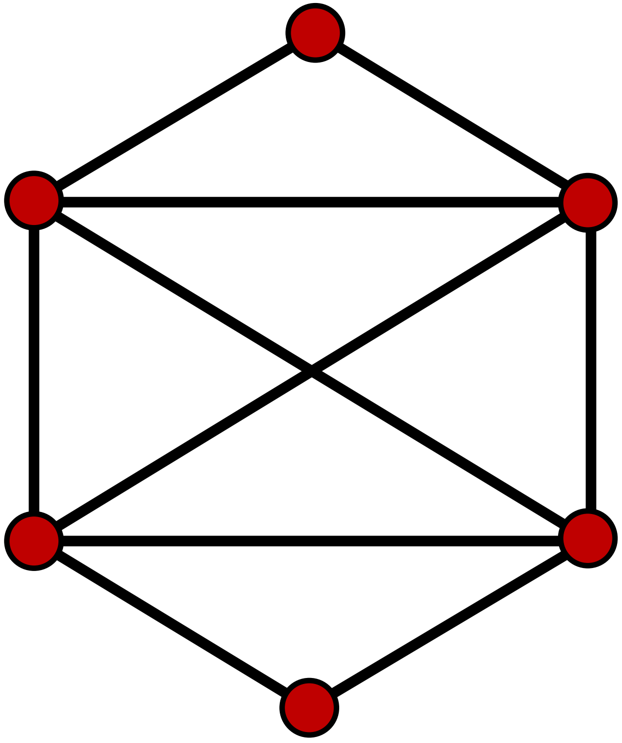
- Sauf indication contraire, on parle de parcours eulériens fermés, c'est-à-dire en revenant au sommet de départ.





OBSERVONS LES DEGRÉS DES SOMMETS

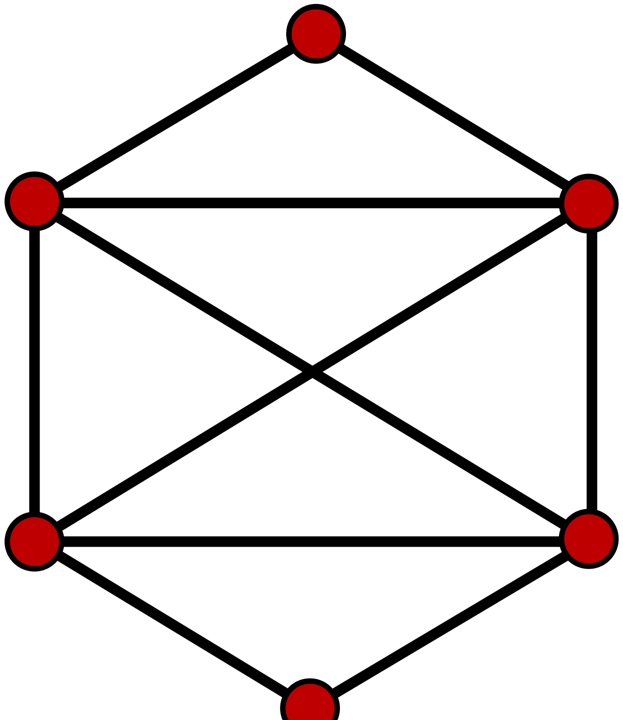
- **Question** : Que peut-on dire des degrés des sommets de ce graphe ?

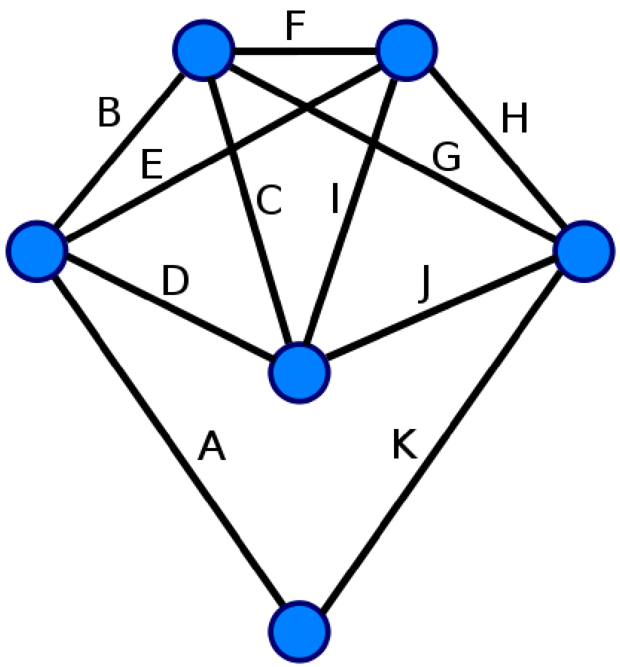


- **Réponse** : Ils sont tous pairs !

Théorème d'Euler

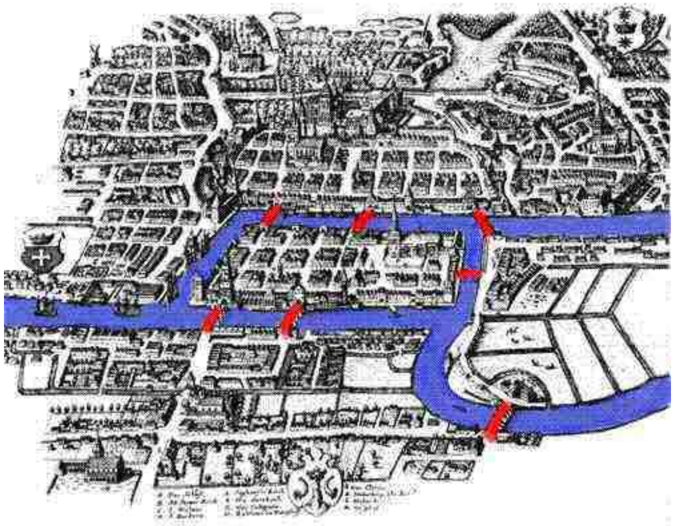
- **Théorème d'Euler** : Un graphe connexe admet un parcours eulérien *si et seulement si* tous ses sommets sont de degré pair.

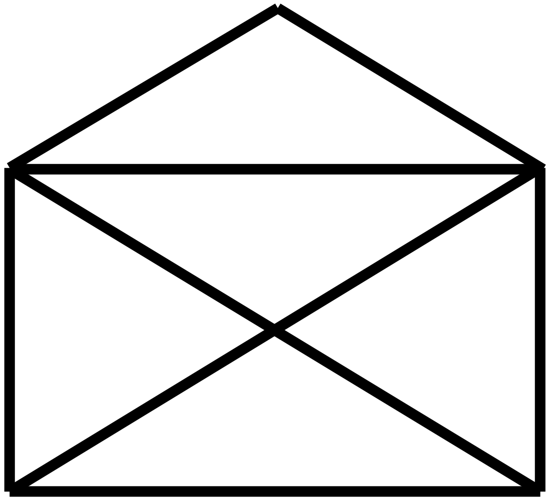




Que était donc le point commun…

… entre des ponts et une enveloppe ?





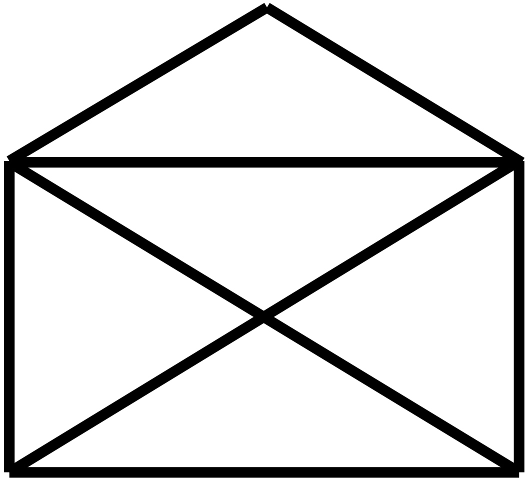
Ils n'admettent pas de parcours eulériens !

Parcours eulérien ouvert

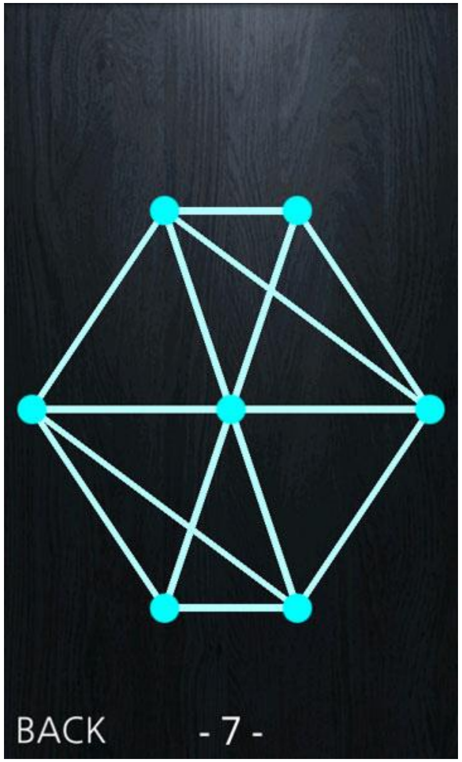
- **Extension naturelle du théorème d'Euler :**

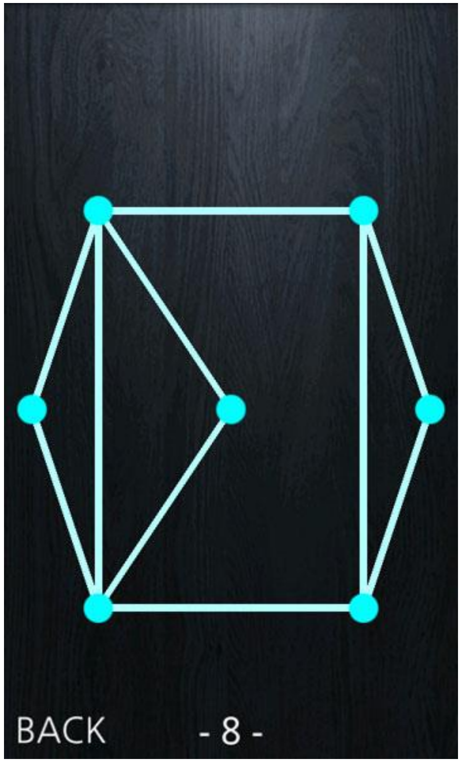
Un graphe admet un parcours eulérien ouvert *si et seulement si* tous ses sommets sauf deux sont de degré pair.

- **Remarque** : Le cas échéant, tout parcours eulérien ouvert a nécessairement pour extrémités les deux sommets de degré impair



EXEMPLES



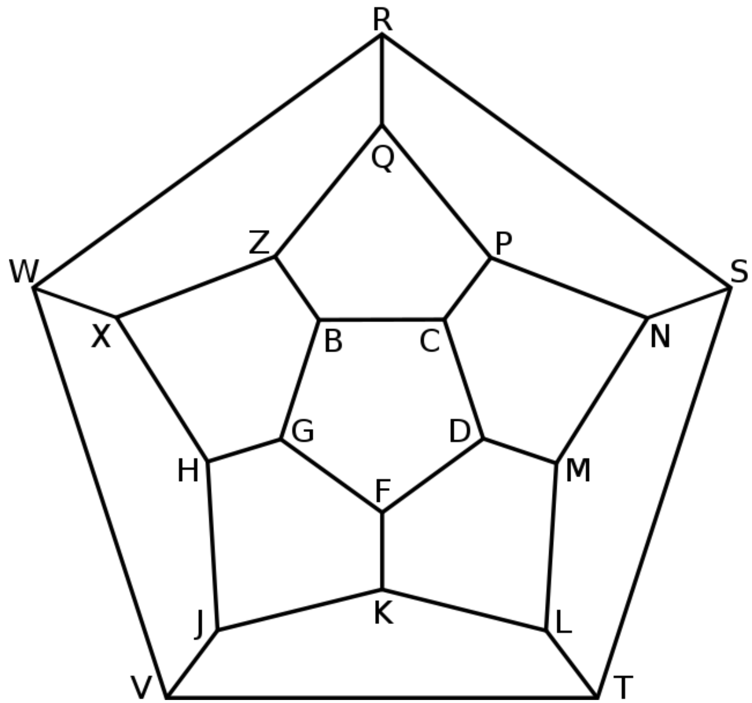


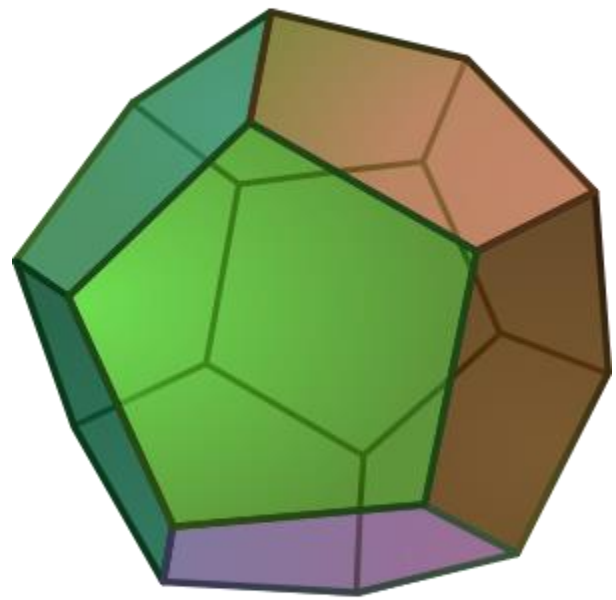
- Application smartphone : "One Touch Drawing"

PARCOURS HAMILTONIENS

Et avec les sommets ?

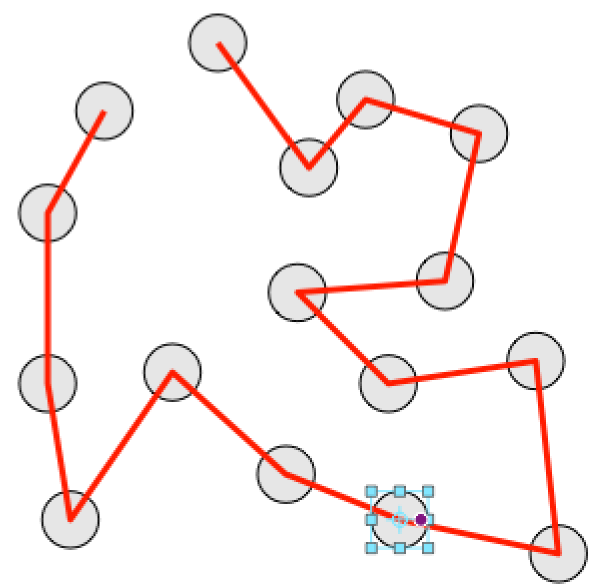
- **Question** : Est-il possible de trouver un parcours passant exactement une fois par chacun des sommets de ce graphe ?





LE PROBLÈME DU VOYAGEUR DE COMMERCE

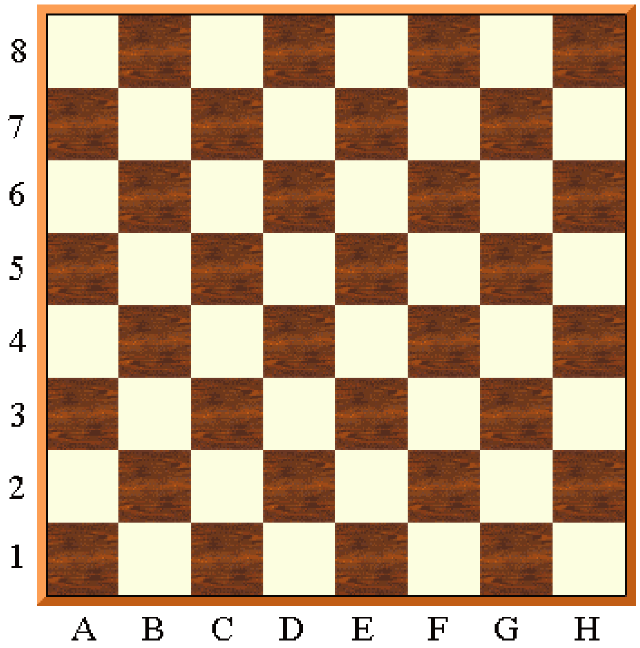
- **Un problème célèbre** : Le problème du voyageur de commerce (en anglais *travelling salesman problem*, ou *TSP*)



- **Question** : Quel est le plus court chemin passant par chacune des villes d'une carte exactement une fois ?

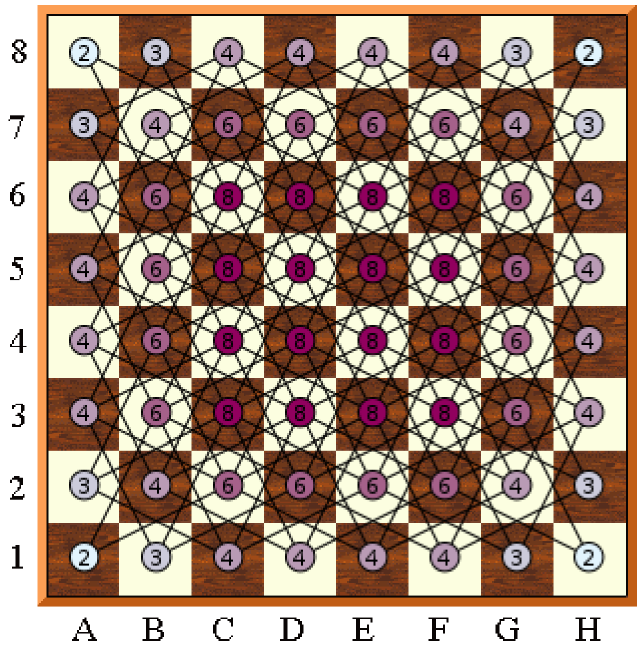
Le problème du cavalier

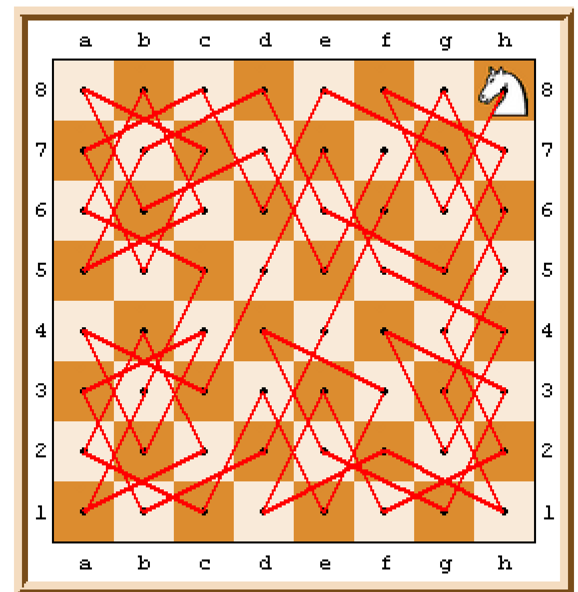
- **Question** : Existe-t-il une suite de coups qui permettent à un cavalier de parcourir toutes les cases de l'échiquier sans repasser deux fois par la même case ?



LE PROBLÈME DU CAVALIER

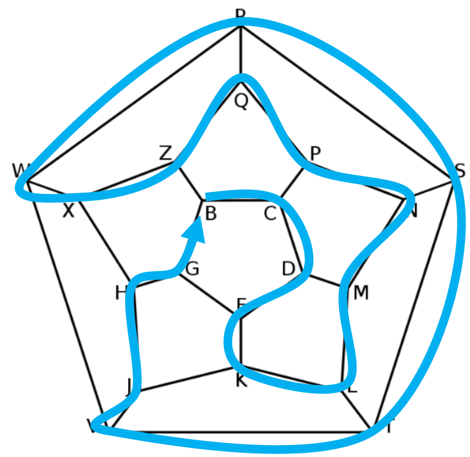
- **Question** : Existe-t-il une suite de coups qui permettent au cavalier de parcourir toutes les cases de l'échiquier sans repasser deux fois par la même case ?

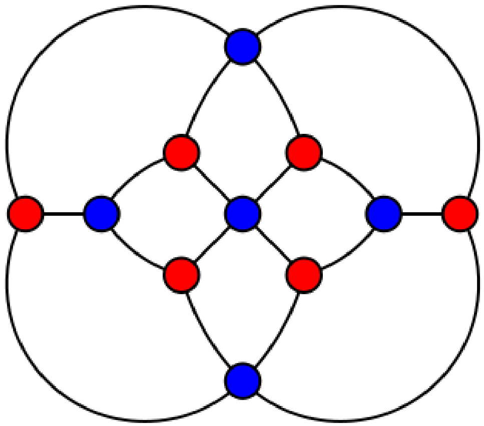




Parcours hamiltonien

- Un **parcours hamiltonien** est un parcours dans un graphe passant exactement une fois par chacun des sommets de ce graphe.





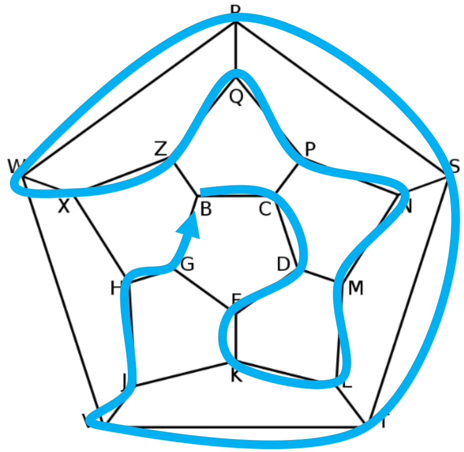
- Un **cycle hamiltonien** est un parcours hamiltonien dont le point de départ et le point d'arrivée sont confondus

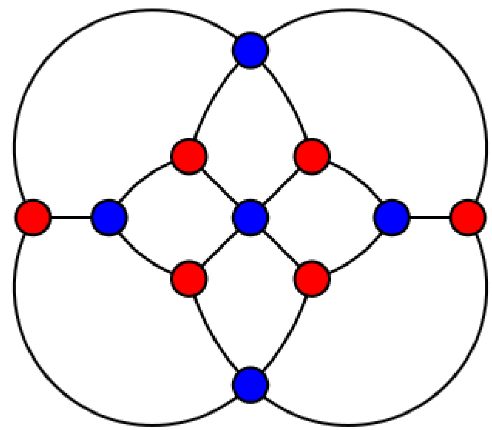
- Un **graphe hamiltonien** est un graphe qui contient un cycle hamiltonien

Des problèmes très difficiles

UNE QUESTION NAÏVE

- **Question** : Comment tester si un graphe est hamiltonien ?
- **Réponse possible** : Tester tous les chemins possibles !



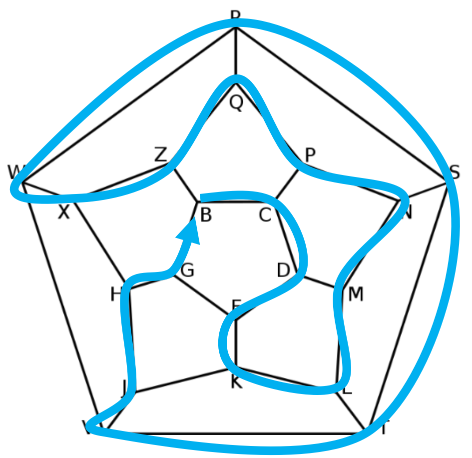


- **Remarques** :
  - Cette méthode risque de prendre beaucoup de temps
  - Mais on ne sait pas faire vraiment mieux aujourd'hui !

DES PROBLÈMES TRÈS DIFFICILES…

- Il existe un certain nombre de problèmes qu'on ne sait aujourd'hui résoudre qu'en testant tous les cas possibles.

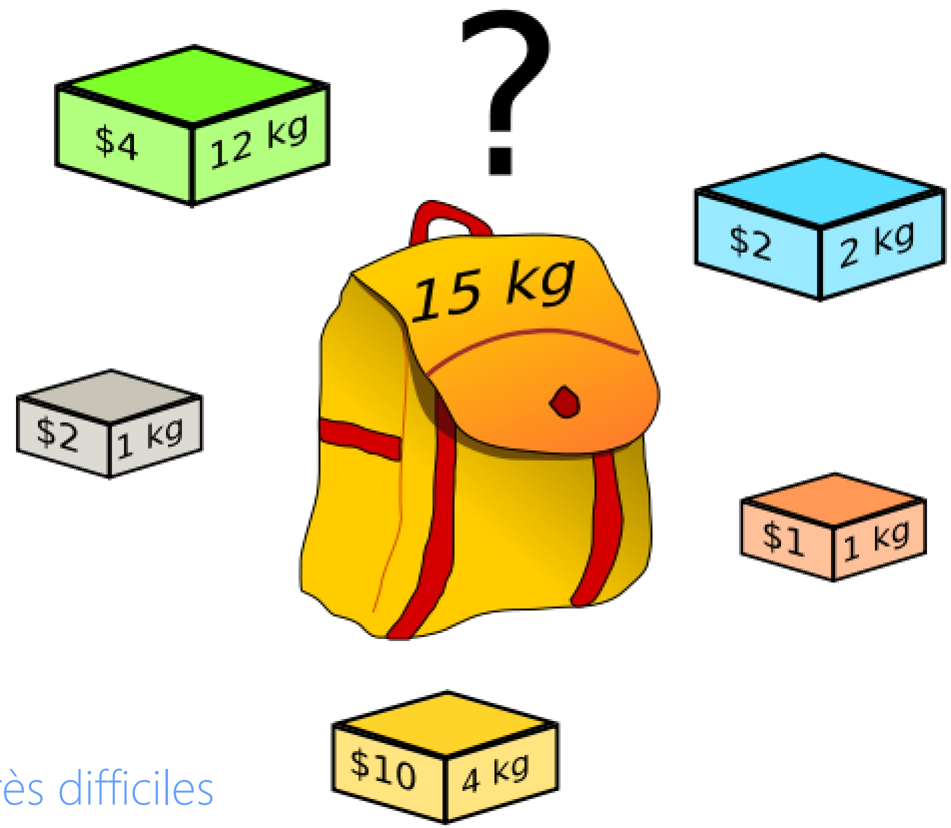
- **Exemple 1** : Tester si un graphe est hamiltonien
- **Variante** : Problème du voyageur de commerce



DES PROBLÈMES TRÈS DIFFICILES…

- Il existe un certain nombre de problèmes qu'on ne sait aujourd'hui résoudre qu'en testant tous les cas possibles.

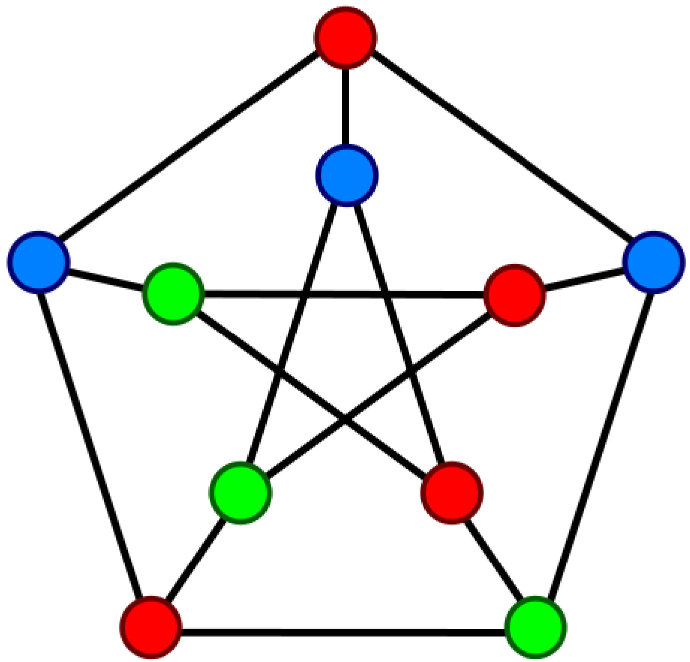
- **Exemple 2** : Problème du sac à dos



DES PROBLÈMES TRÈS DIFFICILES…

- Il existe un certain nombre de problèmes qu'on ne sait aujourd'hui résoudre qu'en testant tous les cas possibles.

- Exemple 3 : Coloration de graphes



NP-Complétude

- Il existe un certain nombre de problèmes qu'on ne sait aujourd'hui résoudre qu'en testant tous les cas possibles.

- On ne sait pas faire vraiment mieux :
  - On arrive généralement à trouver des optimisations pour ne tester qu'une partie des cas possibles
  - Mais on n'a pas trouvé de méthode vraiment plus efficace

- Ces problèmes sont dits **NP-complets**

- Remarques :
  - On ne sait pas aujourd'hui si des méthodes vraiment plus efficaces existent (c'est une question à un million de dollars)
  - Tous ses problèmes sont équivalents : si on trouve une méthode vraiment plus efficace pour l'un d'entre eux, on pourra en déduire de nouvelles approches pour tous les autres problèmes NP-complets

ET DES PROBLÈMES IMPOSSIBLES

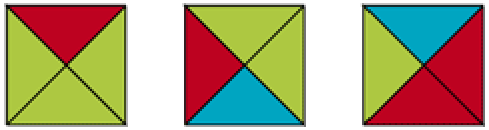
- Il y a même des problèmes qu'on sait qu'on ne pourra jamais résoudre

- Exemple : le problème de l'arrêt :
  - Parfois, un programme se met à tourner en boucle et on finit par tuer Caml pour l'arrêter
  - Dans l'idéal, on aimerait disposer d'un outil qui analyse le code du programme et affiche un avertissement si le programme va tourner en boucle.

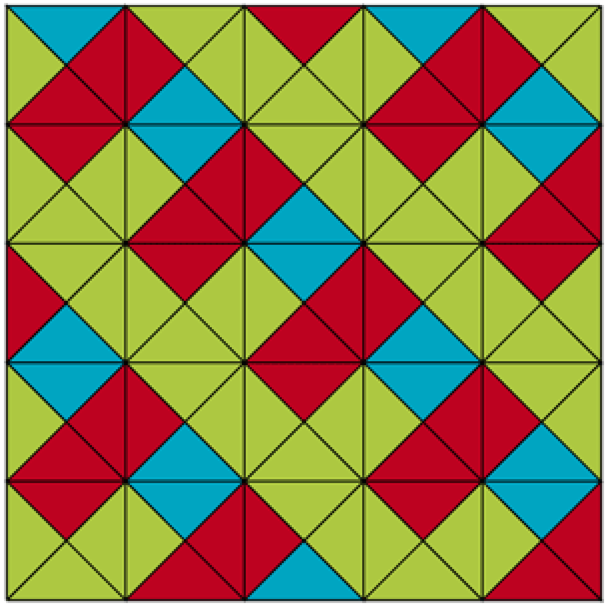
  - **Problème** : Un tel outil n'existe pas.
  - **Pire** : Un tel outil ne peut exister : il n'est pas possible d'écrire un outil qui analyse un programme et déclare à coup sur si ce programme va tourner en boucle ou non.

Problème de pavage du plan

- On dispose de n types de tuiles :
  - Chaque tuile comporte 4 zones
  - Chaque zone porte une certaine couleur
  - On dispose d'un nombre illimité de tuiles de chaque type

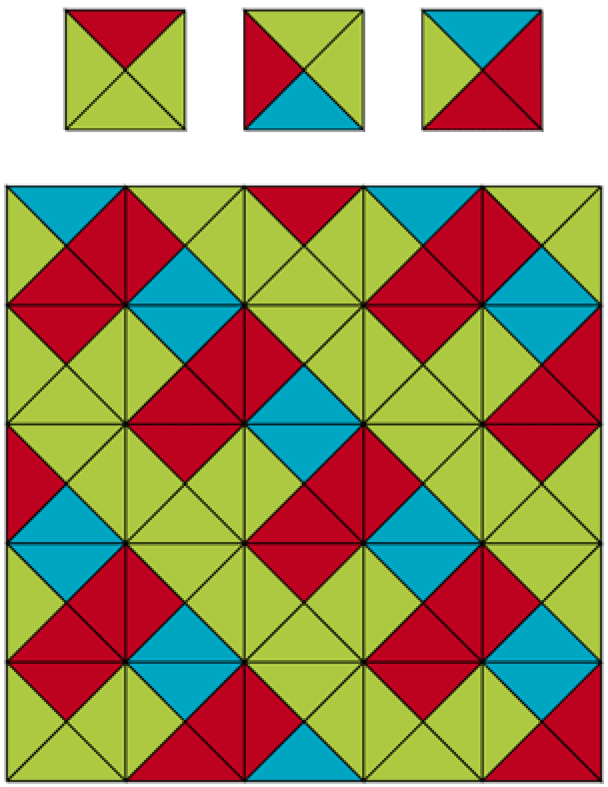


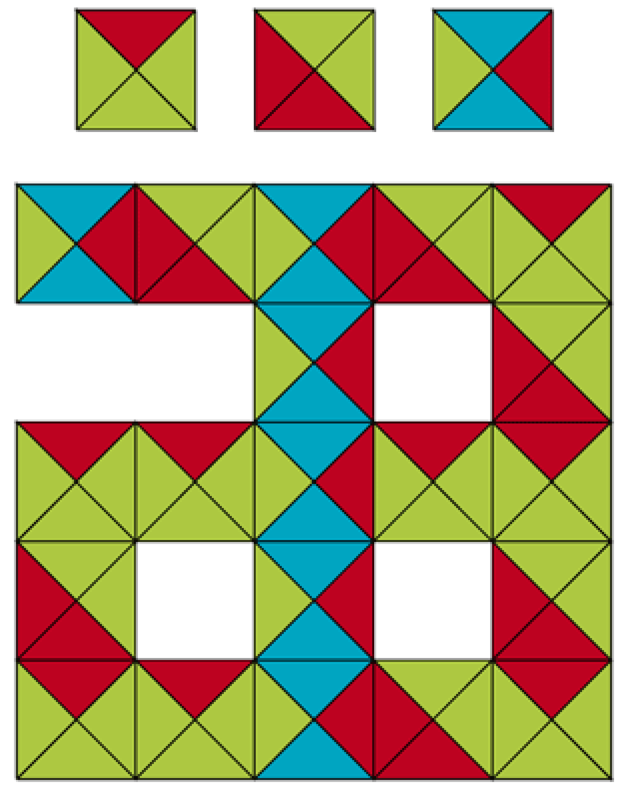
- **Question** : Ces n types de tuiles sont-ils suffisant pour réaliser un "pavage du plan", c'est-à-dire :
  - Chaque case du plan doit recevoir une tuile
  - Deux zones voisines doivent avoir la même couleur (à la frontière entre deux tuiles)



Problème de pavage du plan

- Il est impossible de concevoir un algorithme qui prend en argument une collection de tuiles et indique si un pavage du plan est possible avec cette collection de tuiles.

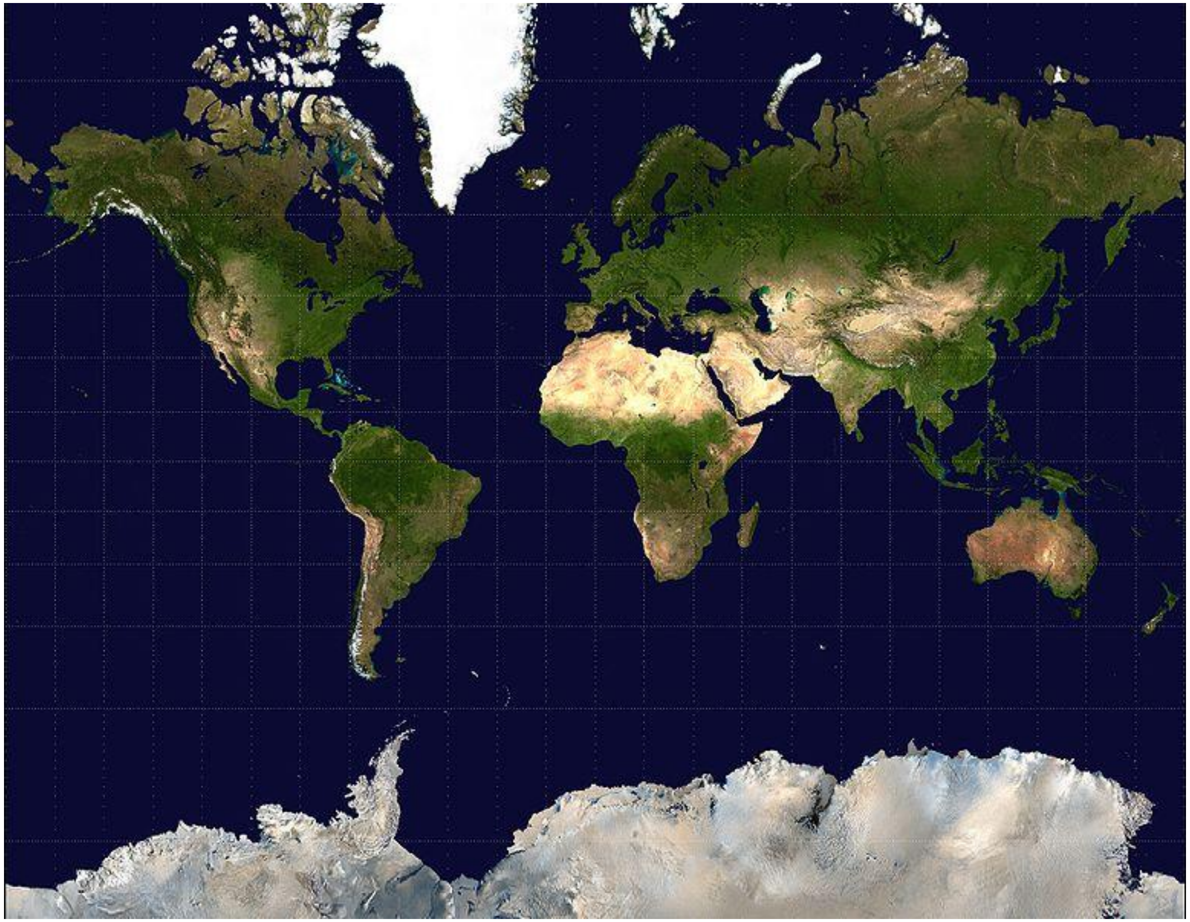




Graphes planaires

Histoires de cartographes

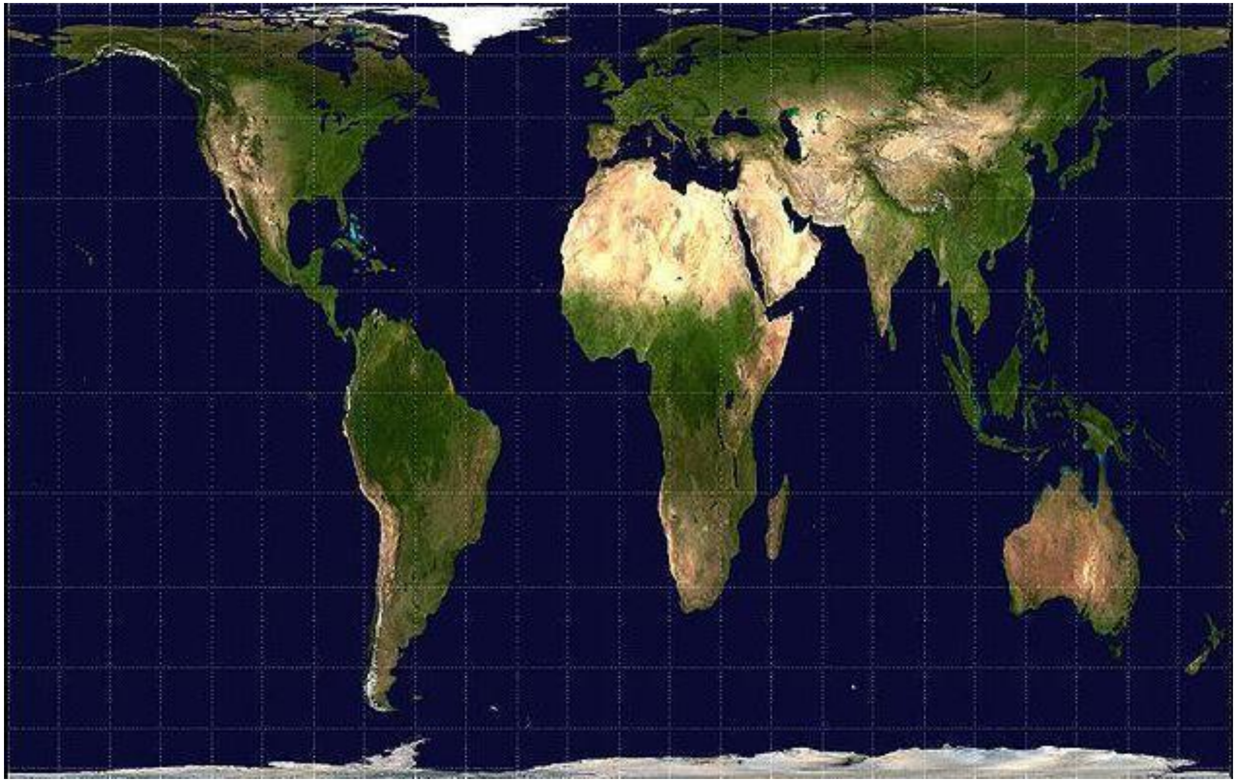
Histoires de cartographes



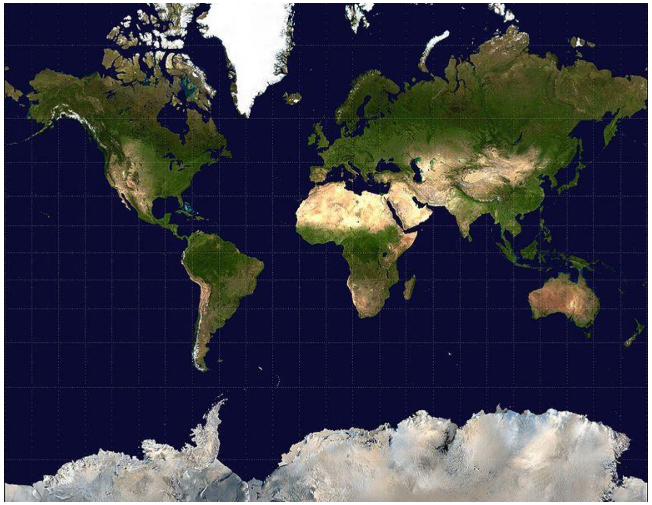
Au fait, le Groenland est-il plus vaste que l'Amérique du Sud ?

HISTOIRES DE CARTOGRAPHES

- Superficies réelles :
  - Amérique du Sud : 17,8 millions de km^2
  - Groenland : 2,1 millions de km^2

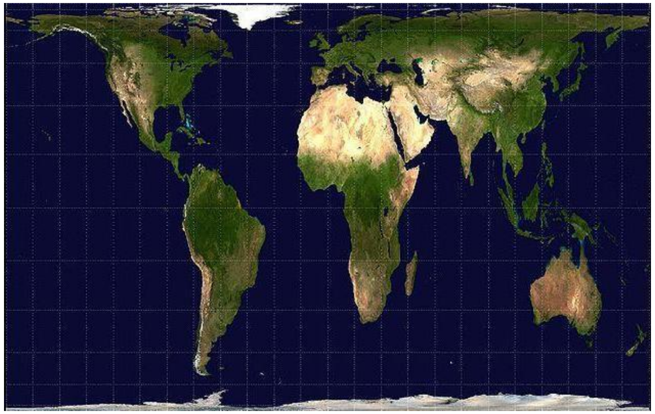


Histoires de cartographes



Projection de Mercator

Respecte la forme des continents

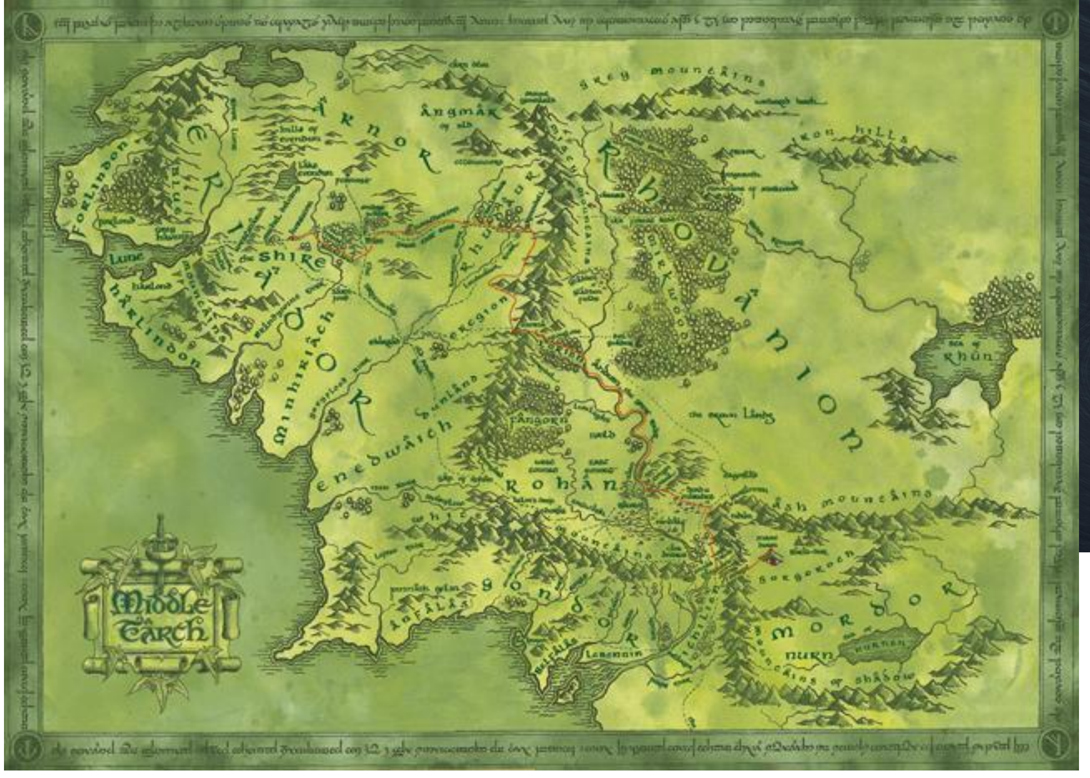


Projection de Peters

Respecte la superficie des continents

Histoires de cartographes

- Et bien d'autres…

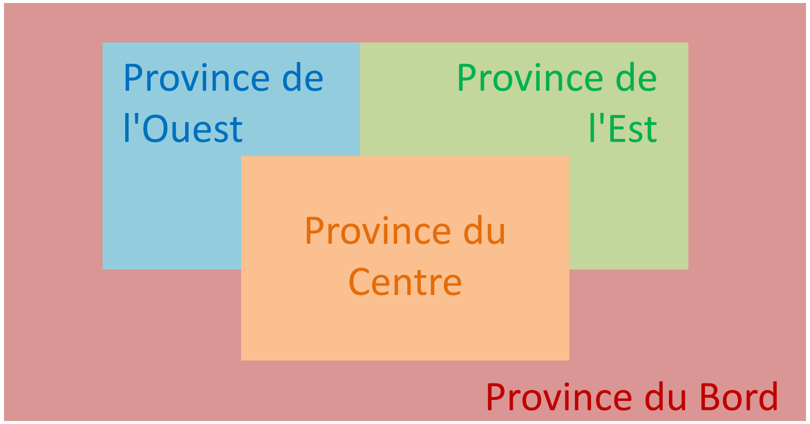


HISTOIRES DE CARTOGRAPHES

- A vous maintenant !

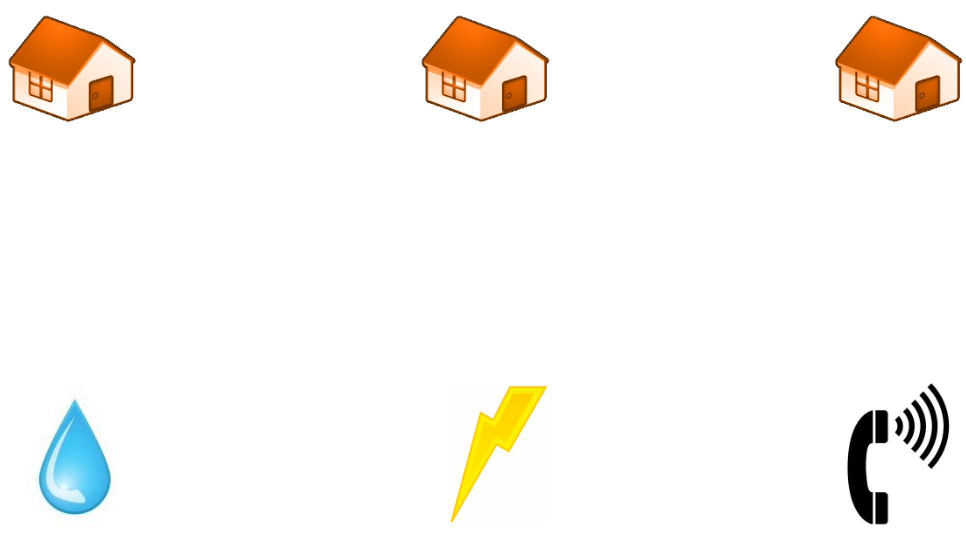
- **Défi** : Tracer une carte du Continent des Cinq Royaumes
  - Un continent composé de 5 pays
  - Chacun pays est voisin des 4 autres (en plus d'un point)

- **Exemple** : La Terre aux Quatre Provinces



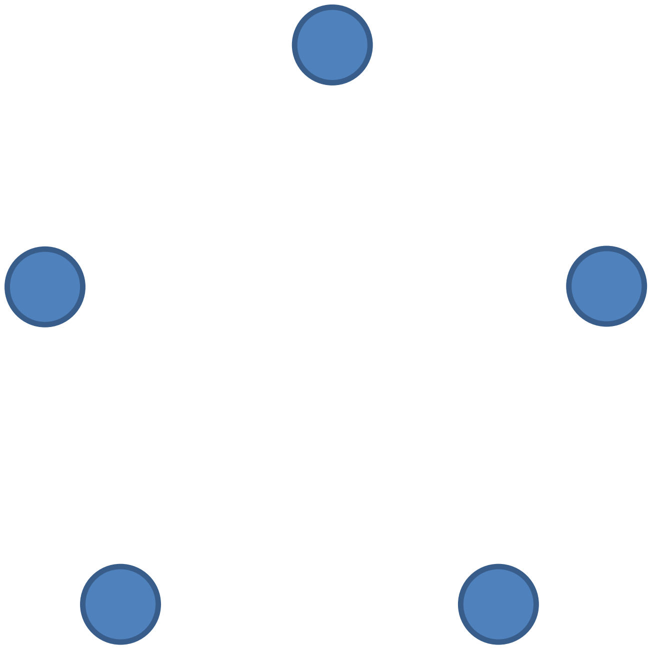
3 MAISONS, 3 RESSOURCES

- On souhaite relier 3 maisons à 3 réseaux
  - Eau
  - Electricité
  - Téléphone
- Les câbles/conduites ne peuvent se croiser



Le défi des 5 points

- Question : Peut-on trouver une façon de relier chacun de ces sommets aux 4 autres sans que les arêtes ne se croisent ?



GRAPHE PLANAIRE

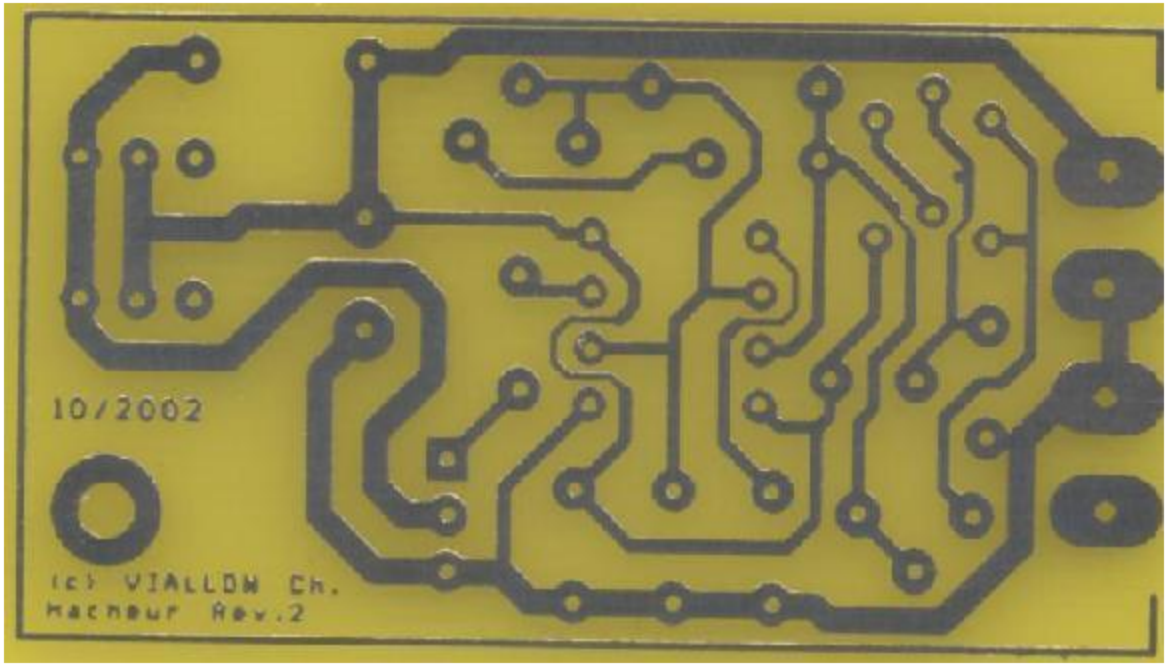
- **Définition** : Un graphe est dit **planaire** s'il existe une représentation de ce graphe dont les arêtes ne se croisent jamais.

- Une telle représentation (sans croisement d'arêtes) est appelée une représentation **plane** du graphe.

- **Remarque** : Les arêtes ne sont pas forcément droites.

Une analogie possible…

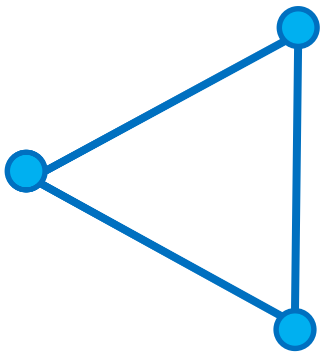
… le circuit imprimé :

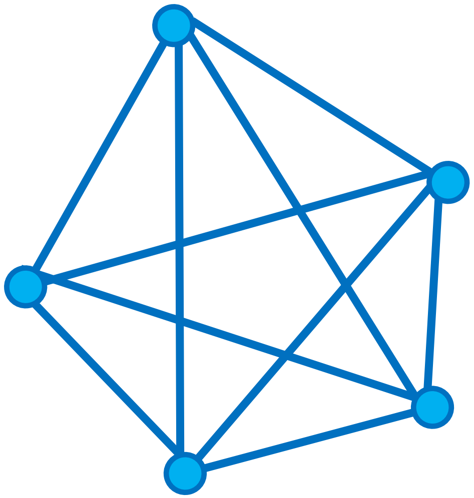


Les pistes métalliques ne doivent pas se croiser !

EXEMPLES

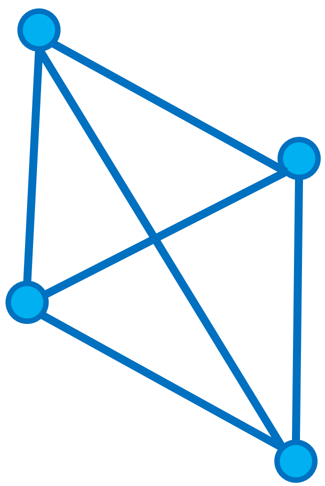
Ces graphes sont-ils planaires ?

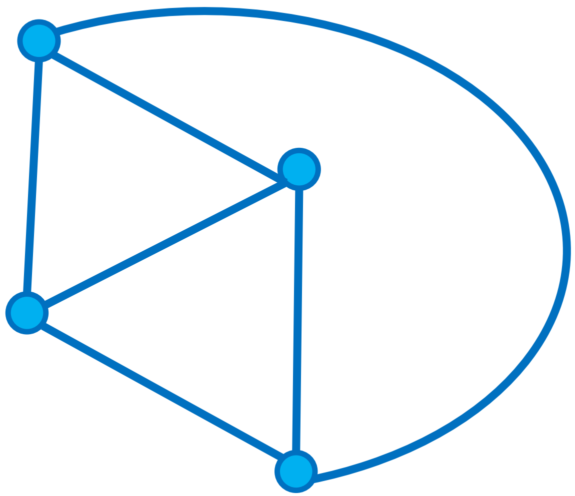




EXEMPLES

Ces graphes sont-ils planaires ?





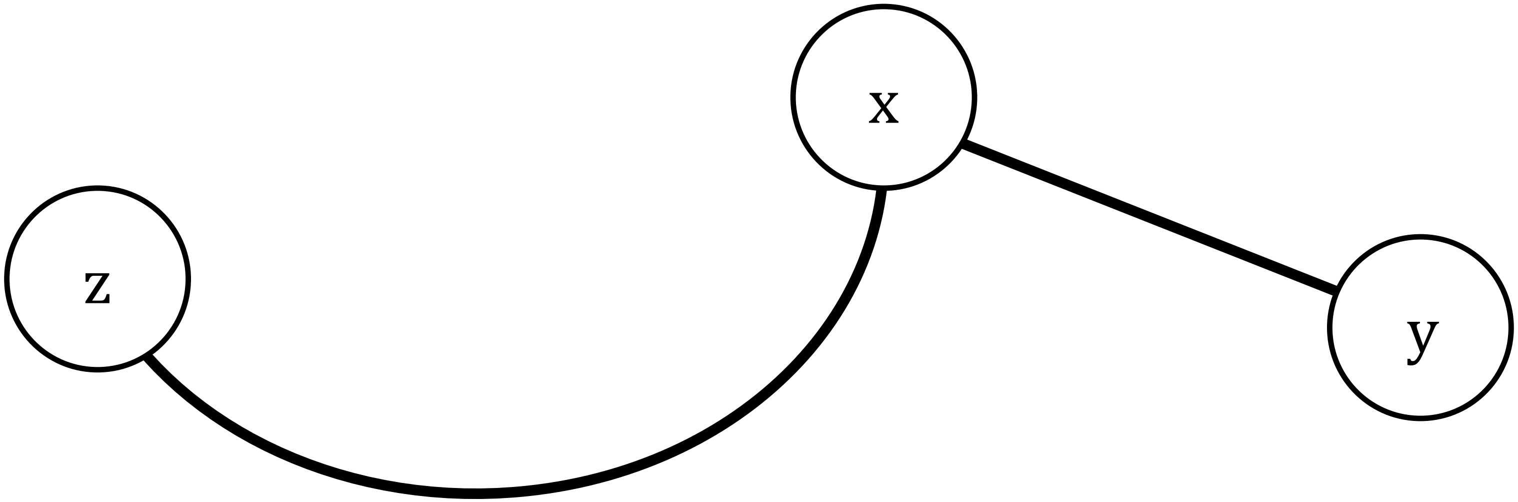
RAPPEL : DÉFINITION D'UN GRAPHE

- Un graphe, c'est :
  - Un ensemble X de sommets

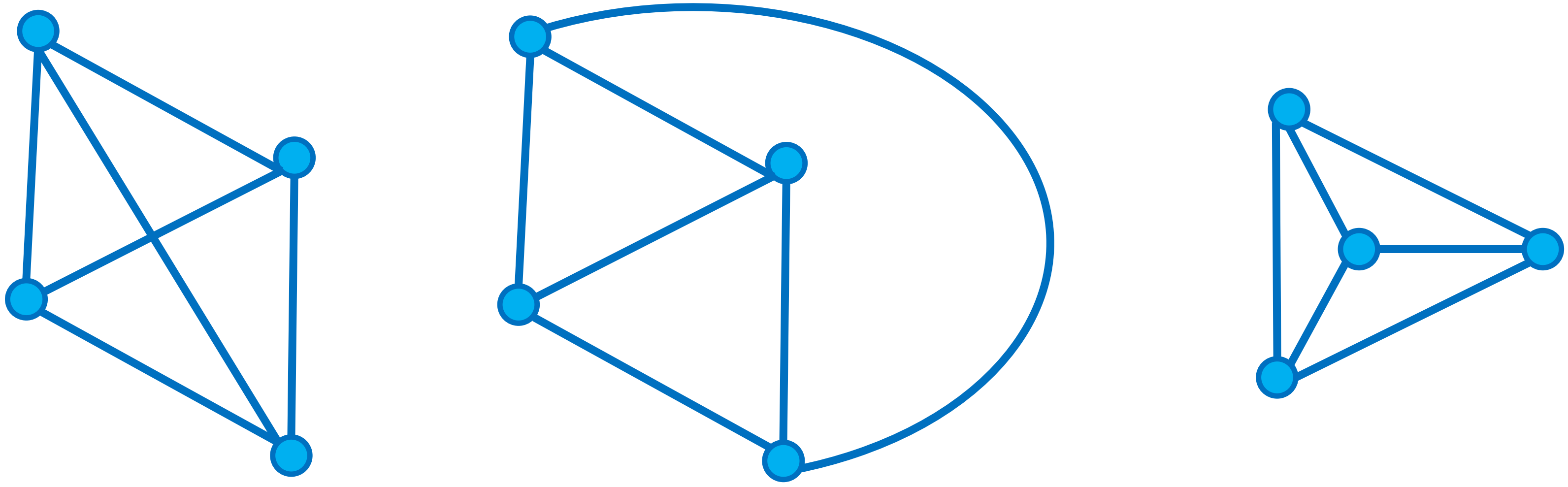
    Ex : $X = \{\, x,\ y,\ z \,\}$

  - Un ensemble d'arêtes E constitué de paires d'éléments de X

    Ex : $E = \{\, (x,y),\ (x,z) \,\}$



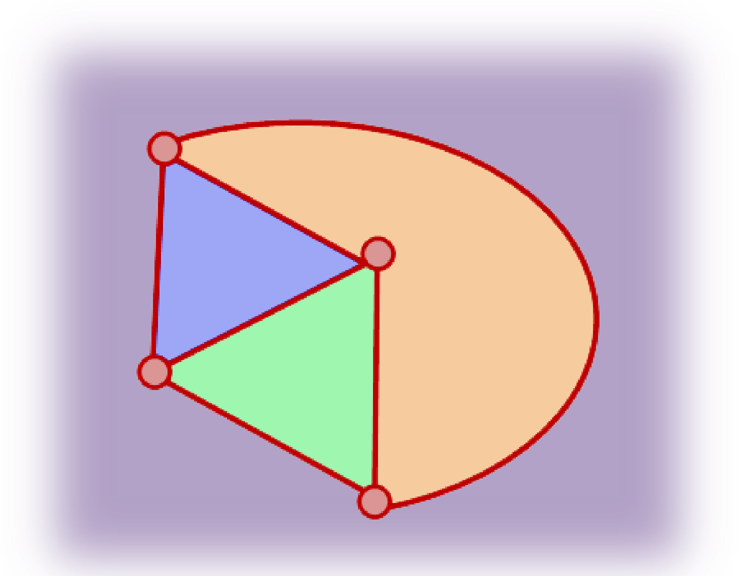
Plusieurs représentations d'un même graphe



FACES : DÉFINITIONS

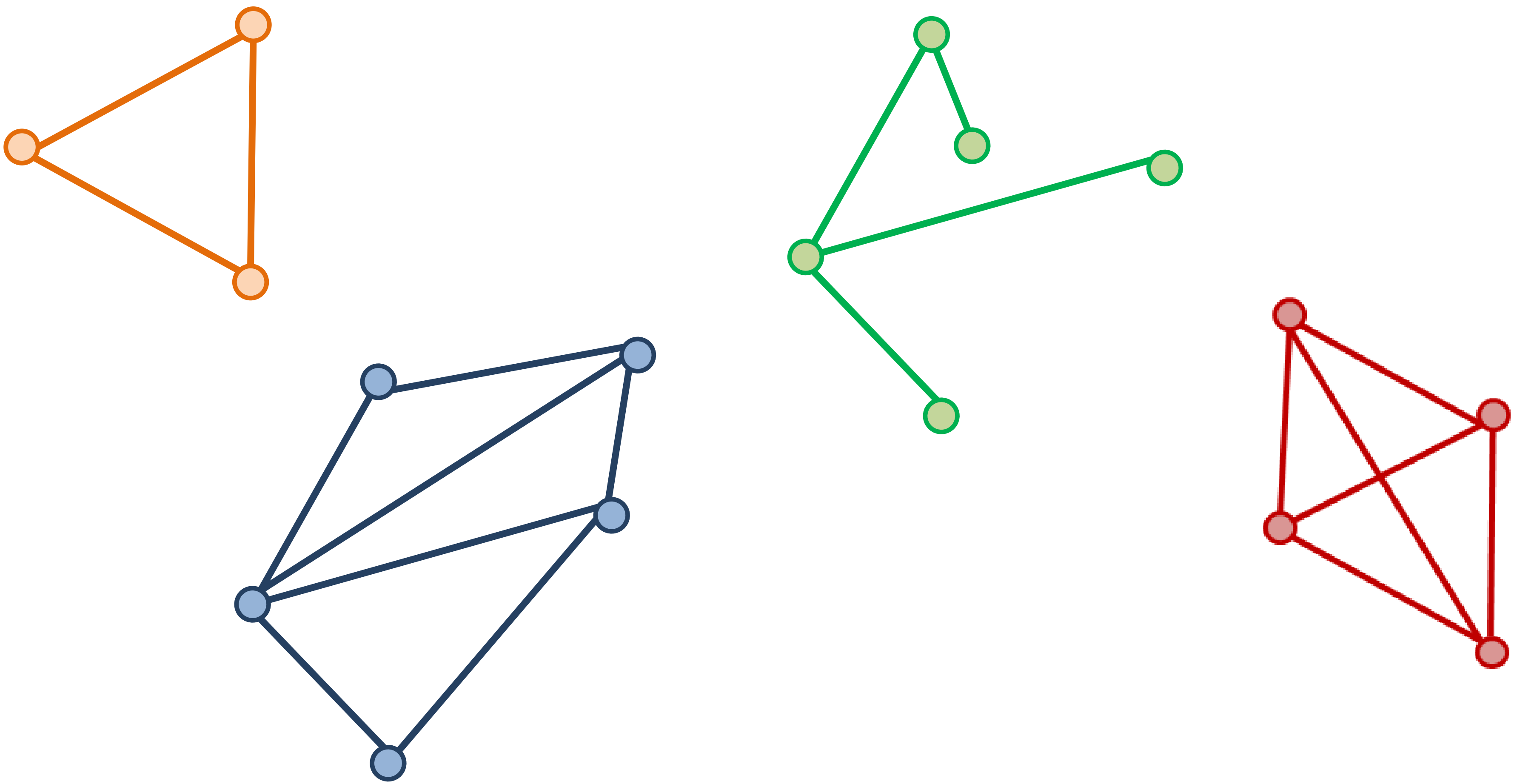
- **Définition** : Les arêtes d'une représentation plane d'un graphe découpe le plan en zones appelées **faces**.

- La zone entourant le graphe est une face particulière, non bornée, appelée **face extérieure**.



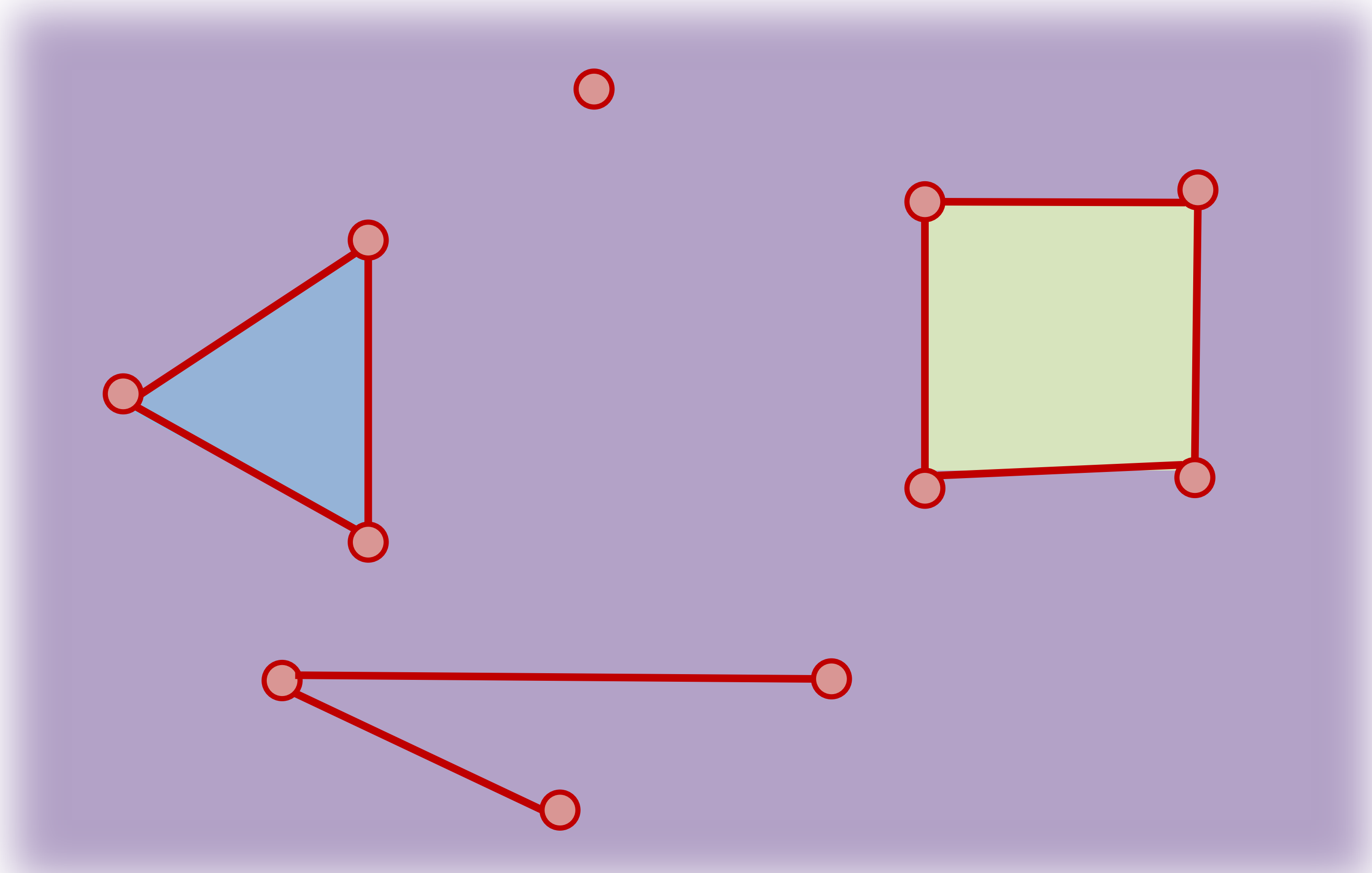
FACES : EXEMPLES

Combien voyez-vous de faces ?



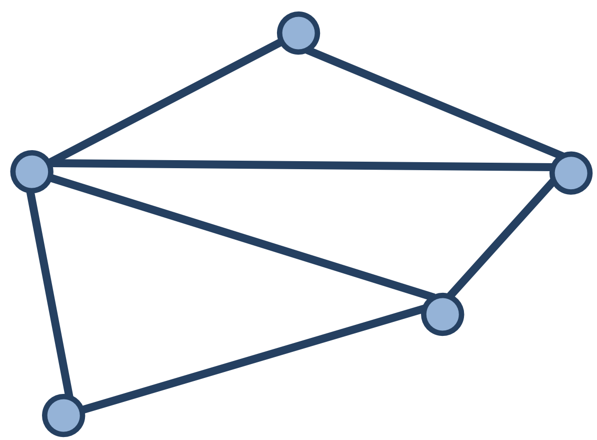
FACES ET CONNEXITÉS

- Un graphe planaire n'est pas nécessairement connexe :



Faces : propriétés

- Propriété sympa mais fausse :
  - Toute arête est la frontière entre deux faces
  - Sa suppression entraîne la fusion entre ces deux faces



- Propriété presque aussi sympa mais vraie :
  - Toute arête **d'un cycle** est la frontière entre deux faces
  - Sa suppression entraîne la fusion entre ces deux faces

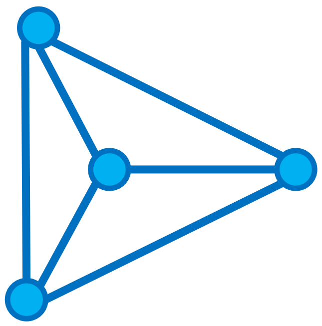
Formule d'Euler

- Pour toute représentation **plane** d'un graphe **connexe**

- Si l'on note
  - f le nombre total de faces (en comptant la face extérieure)
  - n le nombre de sommets du graphe
  - m le nombre d'arêtes du graphe

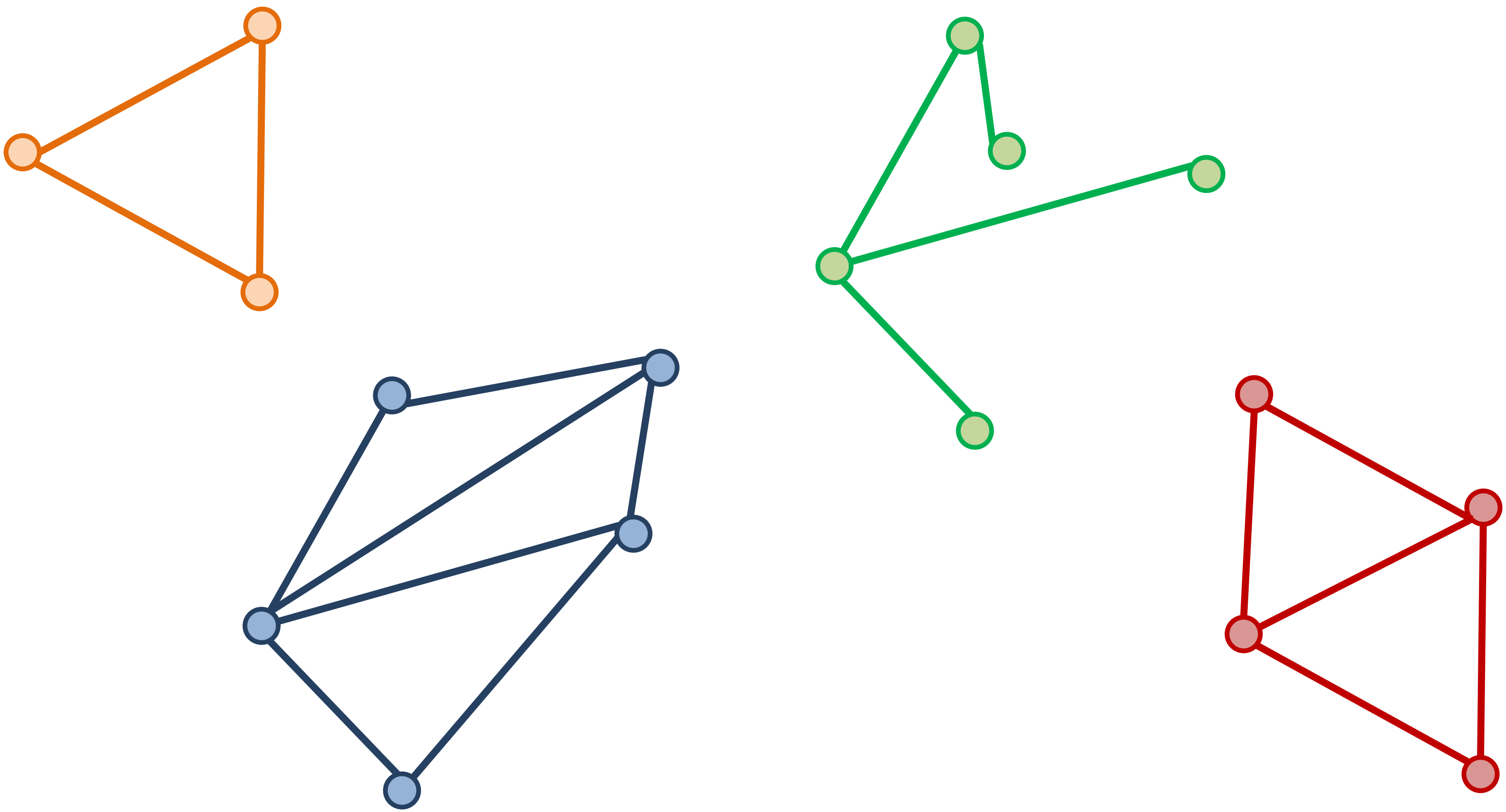
- Alors

$$n + f = m + 2$$



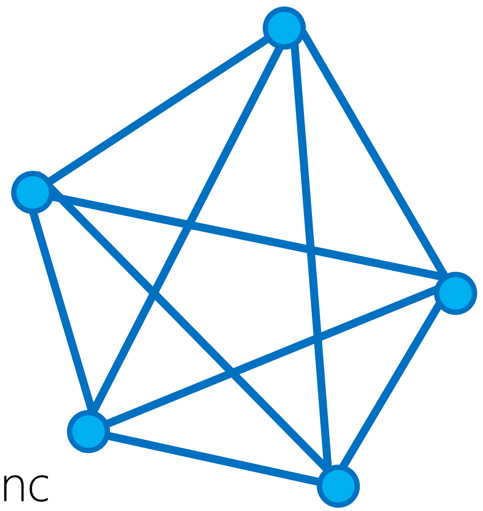
Illustrations

$$n + f = m + 2$$



K_5 EST NON PLANAIRE

- **Propriété** : Le graphe complet à 5 sommets (chacun étant relié aux 4 autres), noté K_5, est non planaire.



- **Démonstration** :
  - Par l'absurde, supposons que K_5 est planaire.
  - Il vérifie donc la formule d'Euler : $n + f = m + 2$, soit donc $5 + f = 10 + 2$
  - On a donc notamment $f = 7$
  - Le nombre moyen $\bar{f}$ d'arêtes bordant une face est donc

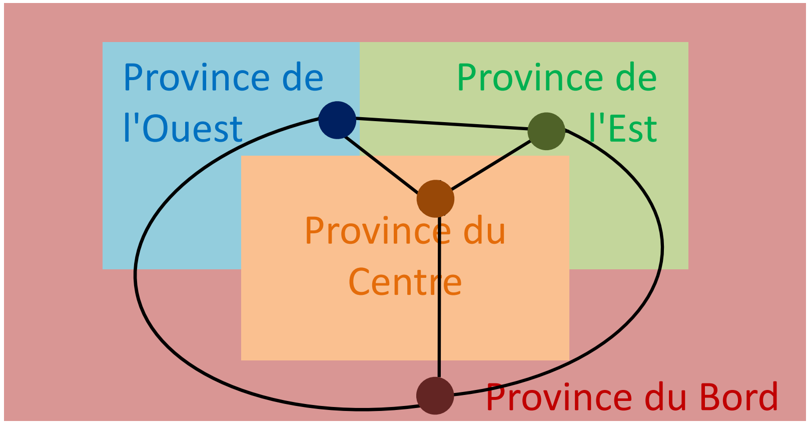
$$\bar{f} = \frac{2 \cdot m}{f} = \frac{20}{7} < 3$$

  - Pour que ce nombre moyen $\bar{f}$ d'arêtes par face soit strictement inférieur à 3, il faut qu'il existe au moins une face qui soit bordée par 2 arêtes ou moins.
  - Or une face est toujours bordée par au moins 3 arêtes. Contradiction !

Conséquences cartographiques

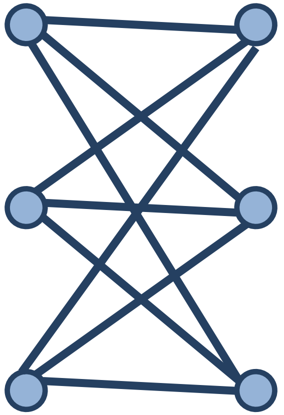
- **Conséquence** : Le Continent des Cinq Royaumes n'existe pas !

- Par contre, le graphe complet à 4 sommets est planaire, c'est pourquoi la Terre aux Quatre Provinces existe.



$K_{3,3}$ EST NON PLANAIRE

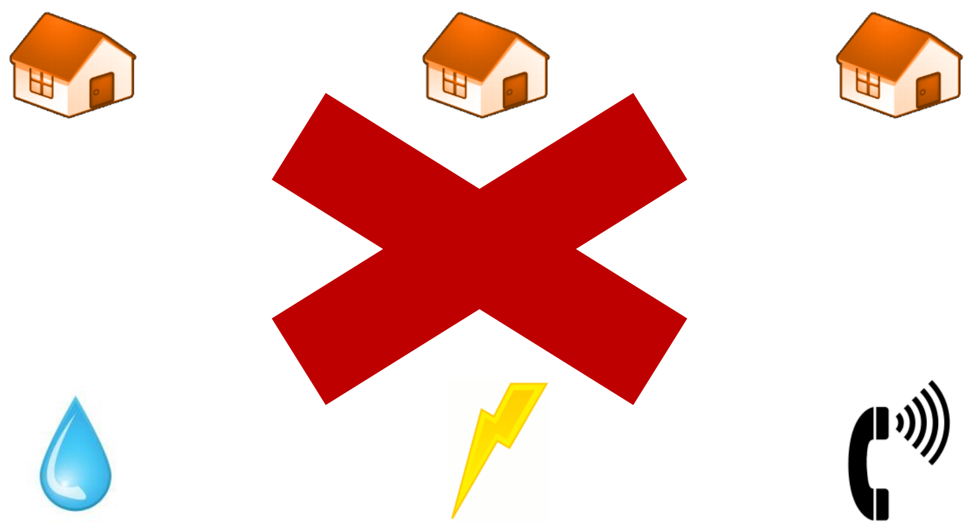
- **Propriété** : Le graphe biparti à 3x3 sommets (cf schéma ci-dessous), noté $K_{3,3}$, est non planaire.



- **Démonstration** :
  - Par l'absurde, supposons que $K_{3,3}$ est planaire.
  - Il vérifie donc la formule d'Euler : $n + f = m + 2$, soit donc $6 + f = 9 + 2$
  - On a donc notamment $f = 5$
  - Le nombre moyen $\bar{f}$ d'arêtes bordant une face est donc
  $$\bar{f} = \frac{2 \cdot m}{f} = \frac{18}{5} < 4$$
  - Pour que ce nombre moyen $\bar{f}$ d'arêtes par face soit strictement inférieur à 4, il faut qu'il existe au moins une face qui soit bordée par 3 arêtes ou moins.
  - Or une face correspond à un cycle, et tout cycle dans un tel graphe est au moins de longueur 4. Contradiction !

3 MAISONS, 3 RESSOURCES

- **Conséquence** : Le problème des 3 maisons et des 3 ressources n'a pas de solution

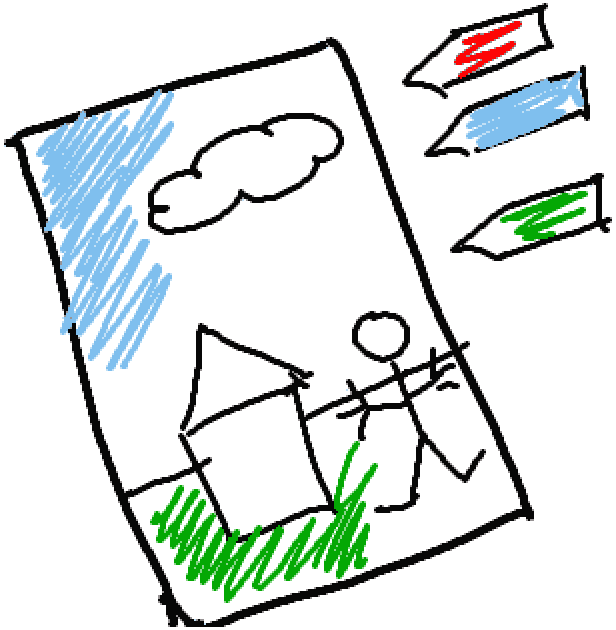


Et maintenant on sait pourquoi !

Colorations de graphe

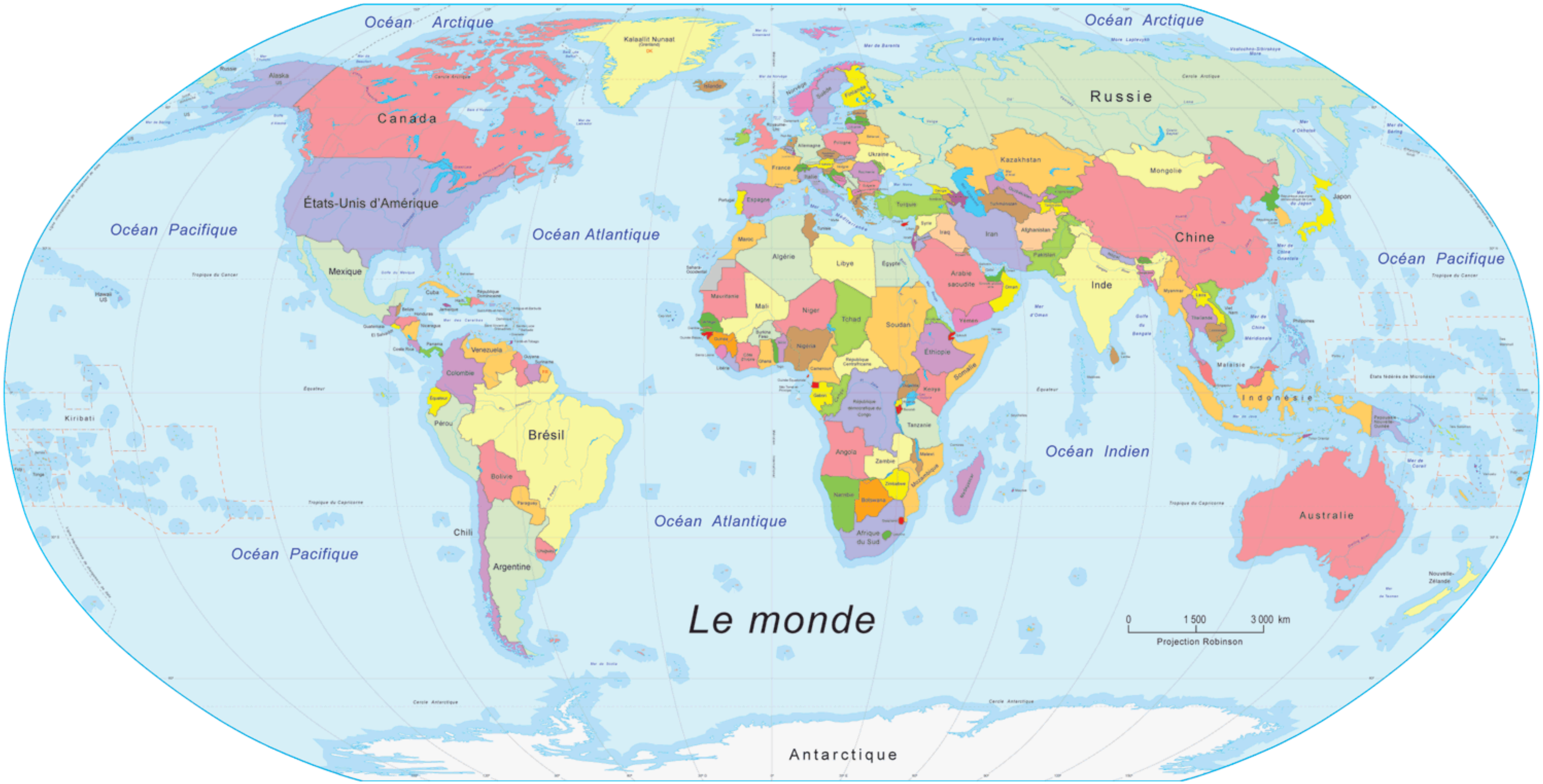
COLORATION OU COLORIAGE ?

Coloration VS Coloriage



Les deux mots existent,
mais ce n'est pas ce que vous croyez…

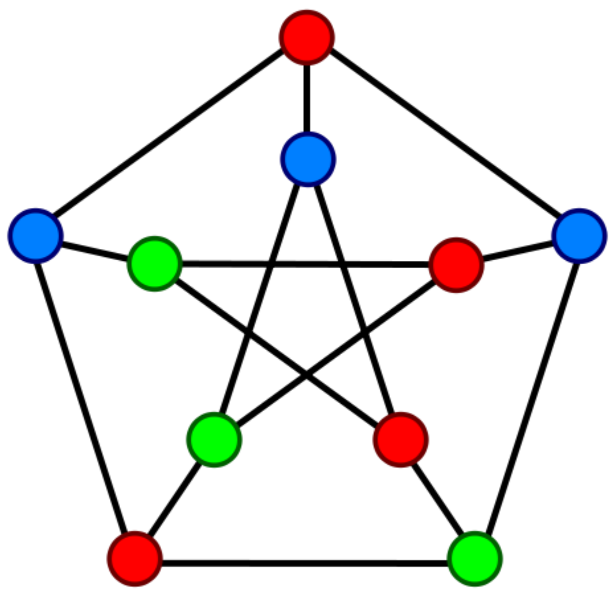
Par contre…


Océan Arctique
Océan Arctique
Canada
États-Unis d'Amérique
Mexique
Russie
Kazakhstan
Mongolie
Chine
Japon
Inde
Iran
Arabie saoudite
Algérie
Libye
Égypte
Mali
Niger
Tchad
Soudan
Éthiopie
Angola
Brésil
Pérou
Bolivie
Chili
Argentine
Australie
Océan Pacifique
Océan Atlantique
Océan Pacifique
Océan Atlantique
Océan Indien
Océan Pacifique
Le monde
0
1 500
3 000 km
Projection Robinson
Antarctique

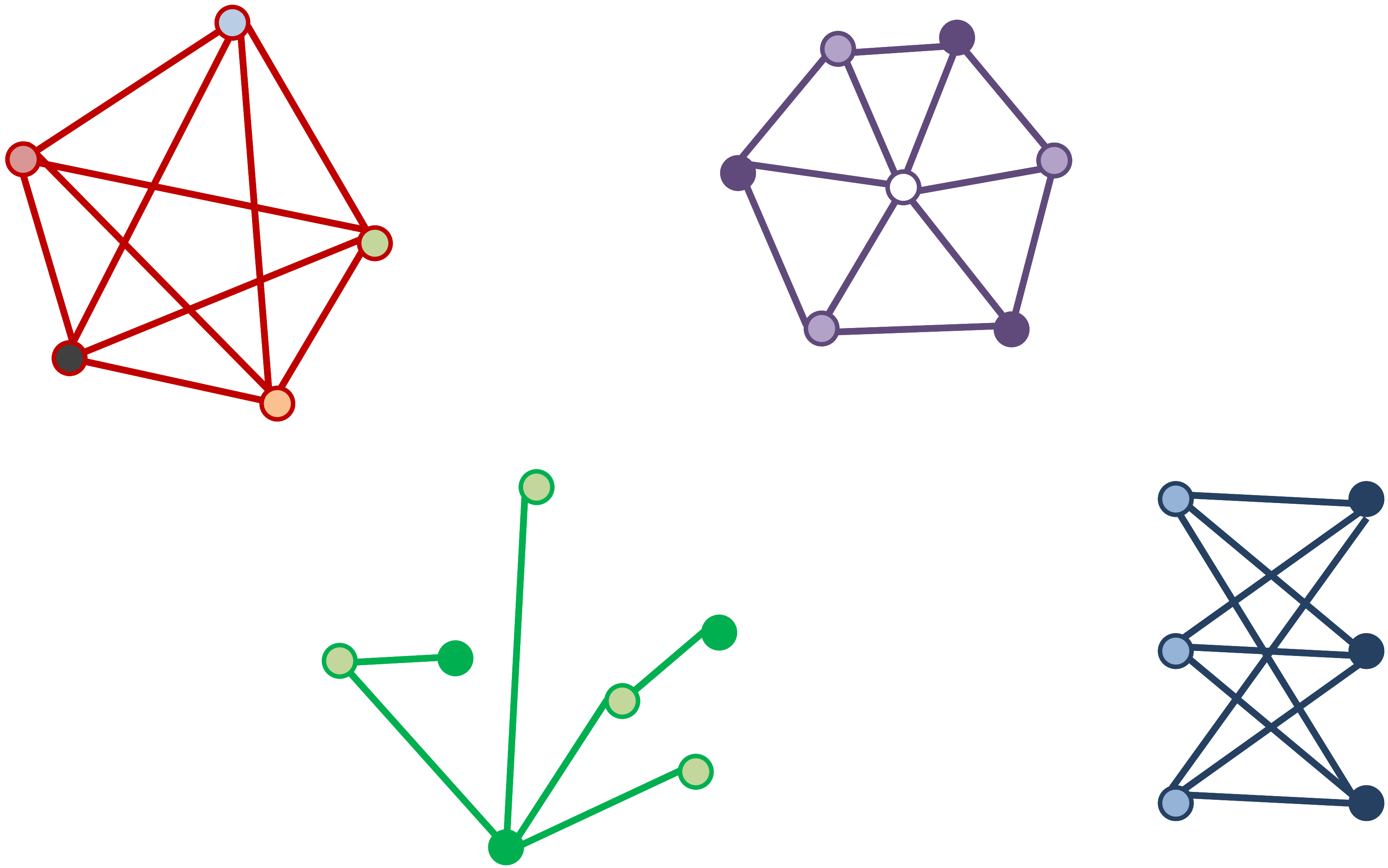
Coloration de sommets

- **Définition** : On appelle **coloration** des sommets d'un graphe toute attribution d'une couleur à chaque sommet.

- On s'intéresse en pratique aux colorations dites **valides**, c'est-à-dire telles que deux sommets voisins n'ont pas la même couleur :



Cas classiques



Avec des graphes planaires ?

- **Théorème des six couleurs** : Tout graphe planaire peut être colorié avec maximum 6 couleurs.

Plus difficile

- **Théorème des cinq couleurs** (Heawood, 1890)

Tout graphe planaire peut être colorié avec au plus 5 couleurs.

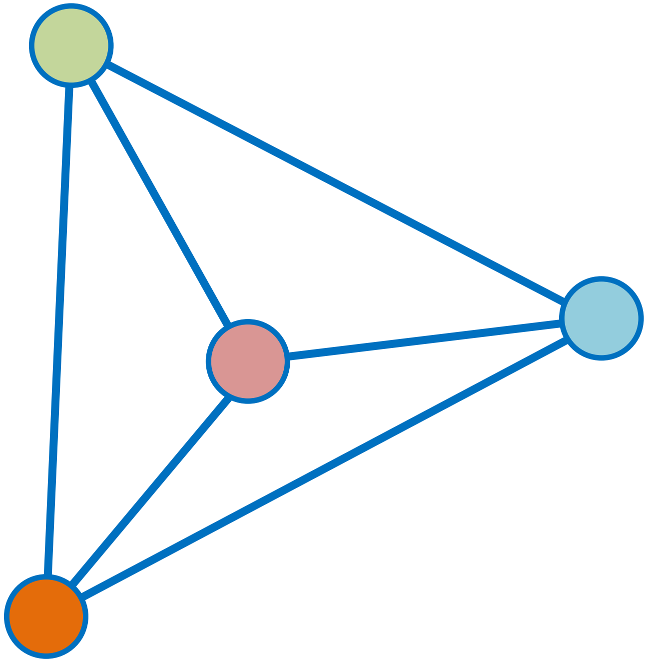
- **Théorème des quatre couleurs** (1976, Appel & Haken)

Tout graphe planaire peut être colorié avec au plus 4 couleurs.

- Remarque : la démonstration de ce dernier théorème comporte des calculs infaisables à la main

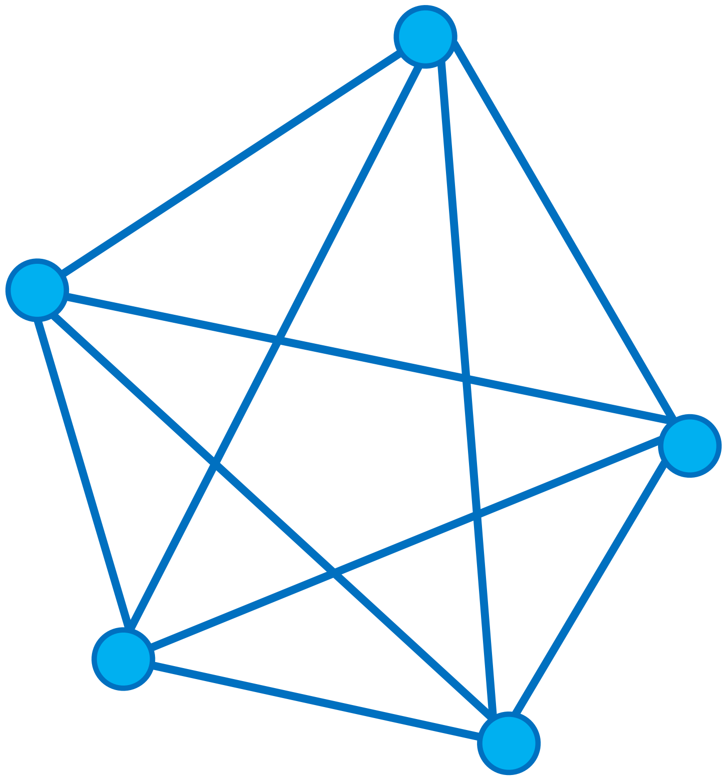
Peut-on faire encore mieux ?

Il n'y aura jamais de théorème des trois couleurs.



AU PASSAGE…

Nous avons confirmation que K_5 n'est pas planaire

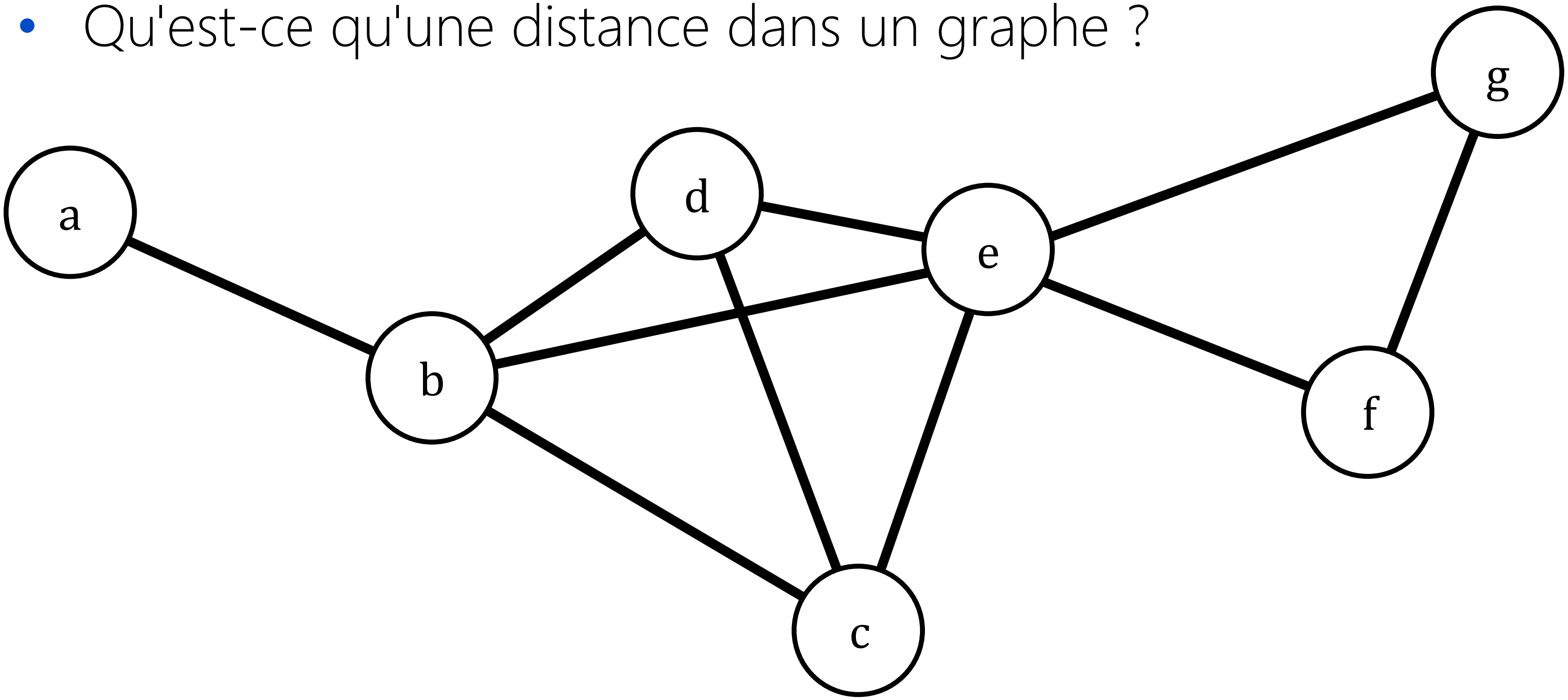


car il serait alors coloriable avec au plus 4 couleurs.

Calcul du plus court chemin

PETIT TEST DE MÉMOIRE

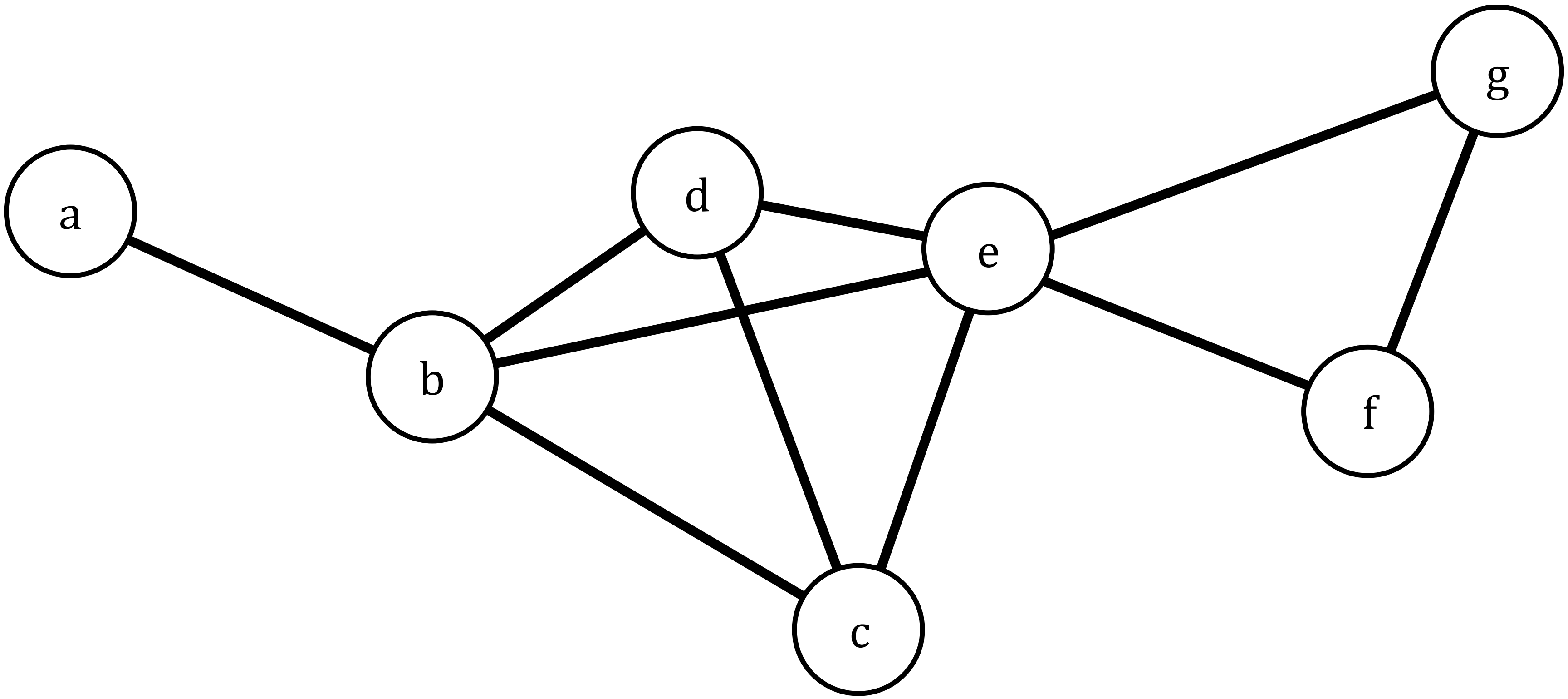
- Qu'est-ce qu'une distance dans un graphe ?



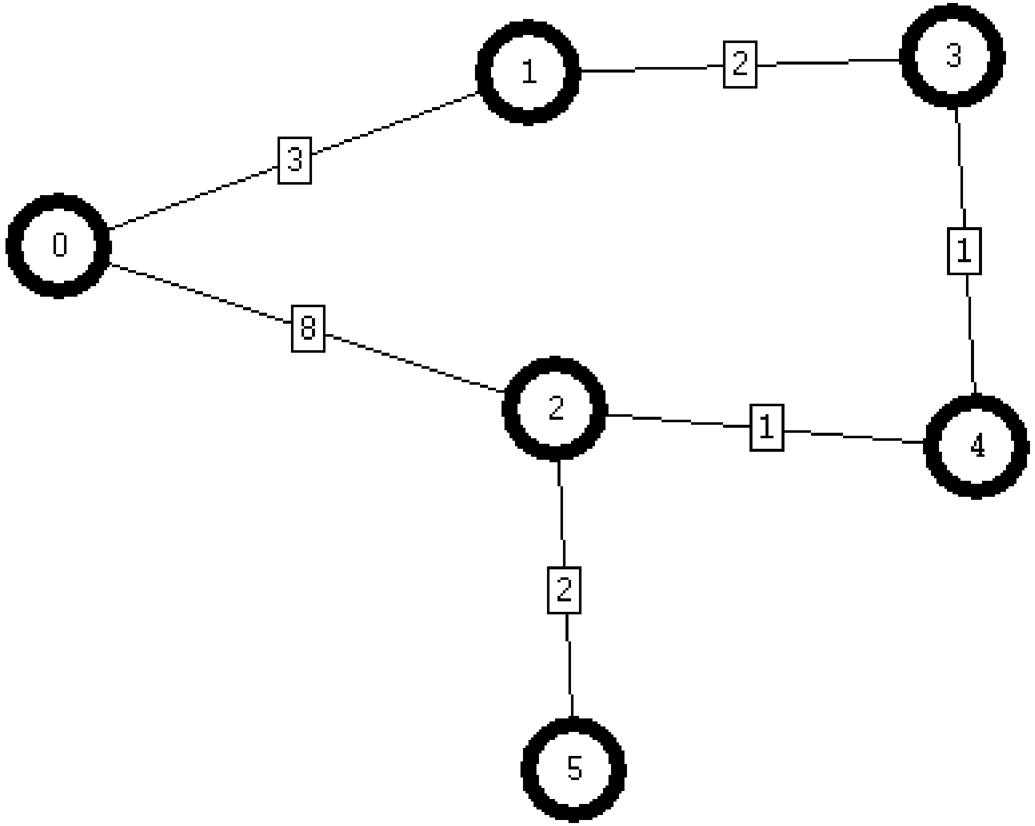
- **Définition** : Dans un graphe connexe $G = (X, E)$, la **distance** entre deux sommets $(x, y) \in X^2$ est la longueur de la plus courte chaîne entre ces deux points.

Calcul du plus court chemin dans un graphe

- Comment calculer le plus court chemin de a à f ?

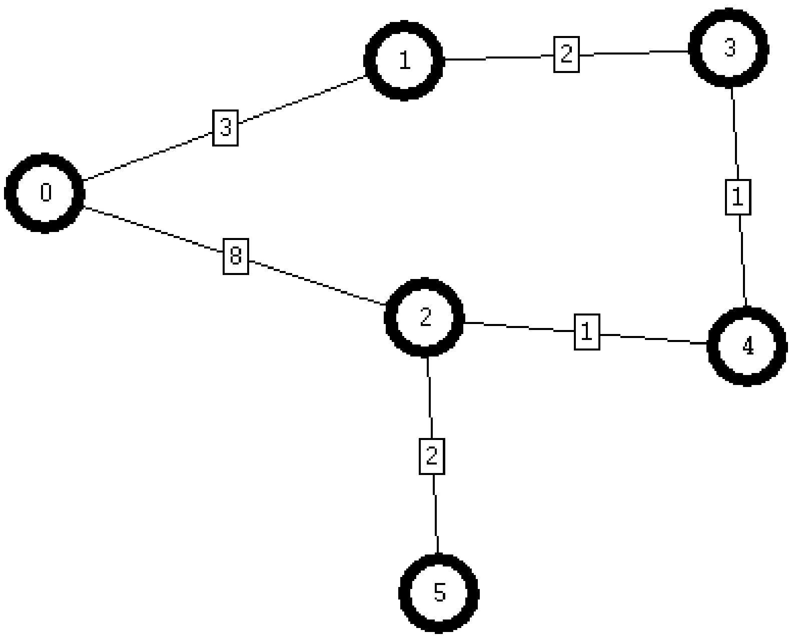


Et avec un graphe étiqueté ?



ALGORITHME DE DIJKSTRA

- **Intuition** : Plutôt que d'utiliser un parcours en largeur, on va traiter les sommets "les plus proches" de la source.



Prochaine séance

Mardi 19 Février

[TD] Graphes et labyrinthes