

Contrôle continu : Statistique

Sujet 1

Prénom :

Nom :

Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif. L'utilisation de documents, calculatrices, téléphones portables ou tout autre appareil électronique, est interdite. Les réponses devront être soigneusement argumentées et justifiées. Vous pouvez laisser les résultats sous la forme de fractions. L'énoncé doit impérativement être rendu avec la copie.

Exercice 1 (5 points)

Sous le balcon de Juliette, Roméo cueille des fleurs pour lui lancer un bouquet. Le parterre de roses (la fleur) comporte 4 fleurs rouges, 3 fleurs jaunes et 5 fleurs roses. Roméo procédant dans l'obscurité, il ne peut pas contrôler la couleur des fleurs qui est donc considérée comme aléatoire.

Question 1 Si Roméo cueille trois fleurs, quelle est la probabilité qu'il obtienne trois fleurs de couleur rose ?

Question 2 Si Roméo cueille trois fleurs, quelle est la probabilité qu'il obtienne une fleur de chaque couleur ?

Question 3 Si Roméo cueille quatre fleurs, quelle est la probabilité qu'il n'obtienne aucune fleur jaune ?

Question 4 Si Roméo cueille deux fleurs, quelle est la probabilité qu'il obtienne des fleurs de couleurs différentes ?

Exercice 2 (5 points)

Tous les jours, le Prince de Vérone reçoit en audience soit un émissaire des deux familles, Capulet et Montaigu, soit un émissaire d'une autre grande famille. Il choisit au hasard l'émissaire selon les proportions suivantes : le Prince reçoit un Capulet dans 30 % des cas, un Montaigu dans 25 % des cas et quelqu'un d'une autre famille le reste du temps.

Quand il reçoit un Capulet, le Prince parle dans 40 % des cas de Roméo et Juliette, dans 30 % des cas des taxes et les autres cas de la criminalité dans Vérone. Quand il reçoit un Montaigu, le Prince parle dans 50 % des cas de Roméo et Juliette, dans 15 % des cas des taxes et le reste du temps de la criminalité dans Vérone. Enfin, quand il reçoit un émissaire d'une autre famille, il parle la moitié du temps des taxes, l'autre de la criminalité (et jamais de Roméo et Juliette).

Question 1 Quelle est la probabilité que le Prince parle de la criminalité dans Vérone ?

Question 2 Sachant qu'il parle des taxes, quelle est la probabilité que le Prince soit en train de s'entretenir avec un émissaire des Montaigu ?

Question 3 Sachant qu'il ne parle pas de criminalité quelle est la probabilité que le Prince soit en train de s'entretenir avec un émissaire des Capulet ?

Question 4 Les événements « Parler de Roméo et Juliette » et « Recevoir un Montaigu » sont ils indépendants ?

Exercice 3 (6 points)

Exilé à Mantoue, Roméo s'adonne à des jeux de hasard, en particulier à un ancêtre du *craps*. Pour jouer, on choisit un entier entre 5 et 9 (inclus) qu'on appelle le **principal**, puis on lance deux dés. Si la somme obtenue est le principal, on gagne 1 €. Si on obtient 2 ou 3, on perd 1 €. Si on obtient 11, on gagne si le principal vaut 7, sinon on perd (1 € dans les deux cas). Si on obtient 12, on gagne si le principal vaut 6 ou 8, sinon on perd (toujours 1 €). Enfin, dans tous les autres cas, il ne se passe rien (ni gain, ni perte).

Il est vivement conseillé, pour cet exercice, d'utiliser un tableau donnant l'univers associé au lancé des deux dés.

Question 1 On appelle X_7 la variable aléatoire donnant le gain (négatif en cas de perte) du joueur quand le principal vaut 7. Donner $X_7(\Omega)$, puis la loi de X_7 et sa fonction de répartition.

Question 2 Calculer $\mathbb{E}(X_7)$ et $V(X_7)$.

Question 3 On considère X_6 le gain du joueur quand le principal vaut 6. Donner la loi de X_6 et $\mathbb{E}(X_6)$.

Quand le joueur n'obtient ni son principal, ni 2, 3, 11 ou 12, on note la somme obtenue et on l'appelle la **chance**.

Question 4 On appelle C_9 la variable aléatoire donnant la **chance** quand le **principal** vaut 9. On note ND une valeur spéciale indiquant que la chance n'est pas définie, c'est-à-dire que le joueur a obtenu son principal ou 2, 3, 11 ou 12. Donner alors $C_9(\Omega)$.

Question 5 Donner la loi de C_9 . Peut-on calculer $\mathbb{E}(C_9)$?

Exercice 4 (4 points)

Le Frère Jean apporte un message du Frère Laurent à Roméo. Une épidémie de peste rend le trajet très hasardeux entre Vérone et Mantoue. Soit D la variable aléatoire donnant le temps de trajet du Frère Jean, exprimé en jours. On suppose que $D(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et que la loi de D est donnée par le tableau suivant

$$\begin{array}{c|ccccc} d & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline \mathbb{P}(D=d) & 0,1 & a & 0,3 & b & 0,2 \end{array} \quad (1)$$

Question 1 Quelles propriétés doivent vérifier les nombres réels a et b pour que les valeurs numériques du tableau correspondent bien à la loi d'une variable aléatoire.

Question 2 On suppose que $\mathbb{P}(D \geq 3) = 0,6$. En déduire a et b .

Question 3 On suppose que Balthazar apporte la nouvelle de la « mort » de Juliette en deux jours mais qu'il quitte Vérone le lendemain du départ de Frère Jean. Quelle est la probabilité que Balthazar arrive strictement avant Frère Jean ?

Question 4 Calculer $\mathbb{E}(D)$ et $V(D)$