Chapitre V

LA SYMETRIE DANS LES CRISTAUX

Les cristaux sont classés selon la symétrie de leur formes ou structures. Les éléments de symétrie du système jouent un rôle important dans ce classement. Suivant leurs propriétés les éléments de symétrie sont répartis en deux catégories :

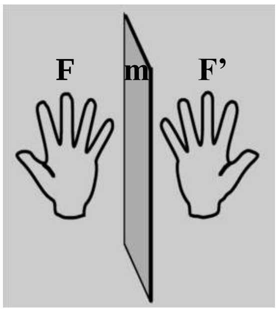
1- Les éléments de symétrie d'orientation qui décrivent l'ensemble de la géométrie du polyèdre (figure finie) que constitue le cristal macroscopique.

2- Les éléments de symétrie de position qui décrivent la structure périodique du milieu cristallin microscopique (figure infinie).

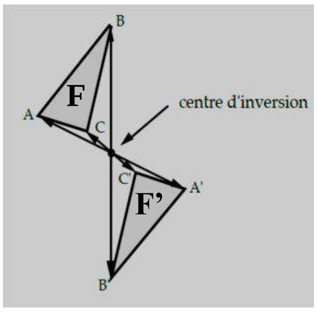
V-1- Les éléments de symétrie d'orientation

Une opération de symétrie (OPSY) est le mouvement de déplacement d'une figure finie F qui la transforme en une figure F' indiscernable de F. F' peut être une figure équivalente ou une figure identique. Le nombre total de points équivalents détermine le degré de symétrie de la figure F.

Un élément de symétrie est un objet géométrique qui sert à définir l'opération de symétrie, c'est un point, un axe ou un plan (ou miroir).



Réflexion



Inversion

Eléments de symétrie ponctuelle et symboles

Elément de symétrie	**Symbole**	**OPSY**
Aucun élément particulier	**1**	Identité
Plan de symétrie ou miroir	**m**	Réflexion par rapport à un plan
Centre de symétrie (ou d'inversion)	$\bar{1}$	Inversion par rapport à un point
Axe de rotation ou axe direct	**n**	Rotation de $2\pi/n$ autour de l'axe
Axe d'inversion ou axe inverse	$\bar{n}$	Rotation de $2\pi/n$ autour de l'axe suivie d'une inversion par rapport à un centre situé sur l'axe.

Les éléments de symétrie sont en général invariants lors des opérations de symétrie.

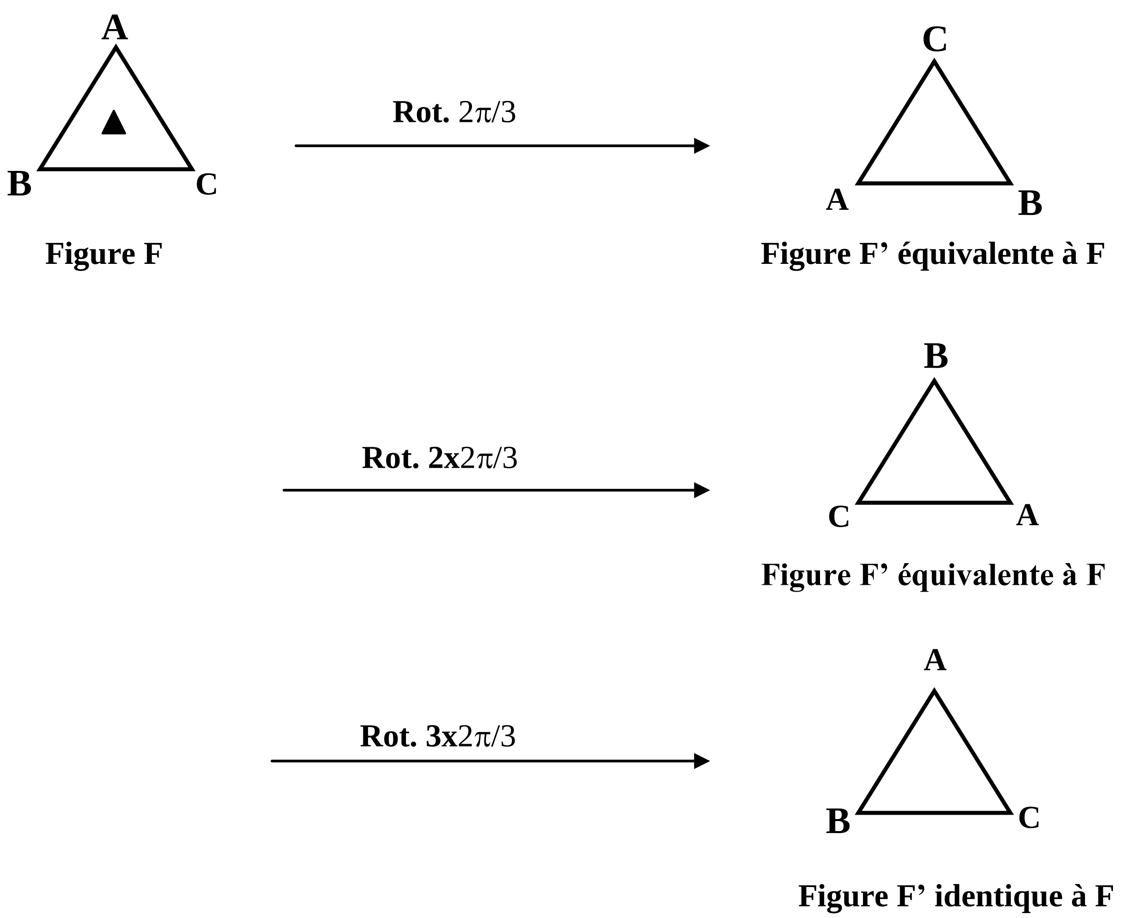
L'ensemble des opérations de symétrie d'orientation d'une figure F constitue un groupe ponctuel au vrai sens mathématique du terme, tous les éléments de symétrie concourent en un même point: centre géométrique de la figure F, ce point est invariant par les OPSY du groupe. Ce point n'est pas forcément un centre de symétrie.

☞ **Les axes de rotation**

Il existe 2 types d'axes de symétrie:

- les axes directs notés n,
- les axes d'inversion notés $\bar{n}$

Pour les axes directs n, l'opération de symétrie est une rotation de 2π /n. n représente l'ordre de l'axe. n=nombre de positions équivalentes + 1(position identique).



Rotations autour d'un axe d'ordre 3 ⊥ plan de la figure F

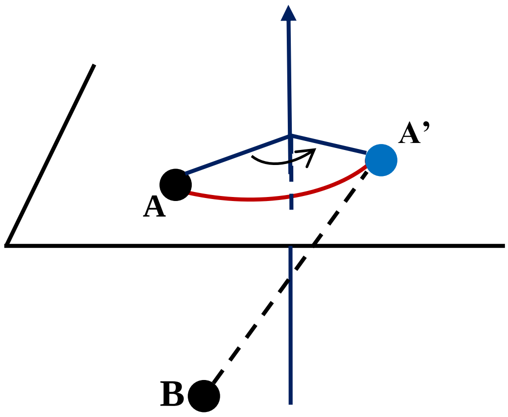
Symbole et représentation graphique des axes directs $\perp$ au plan de projection

Terminologie	Symbole de l'axe	Rotation	Représentation graphique
	1	2π	
Axe binaire	2	$2\pi/2$	⬮
Axe ternaire	3	$2\pi/3$	▲
Axe quaternaire	4	$2\pi/4$	■
Axe quinaire	5	$2\pi/5$	⬟
Axe sénaire	6	$2\pi/6$	⬢

Axe 2 dans le plan de la projection	$\longrightarrow$

Pour les axes d'inversion $\bar{n}$, l'opération de symétrie est une rotation de $2\pi/n$, suivie d'une inversion par rapport à un centre situé sur l'axe. L'existence d'un axe d'inversion n'implique pas forcément l'existence d'un axe ordinaire n et d'un centre d'inversion.

Axe $\bar{n}$

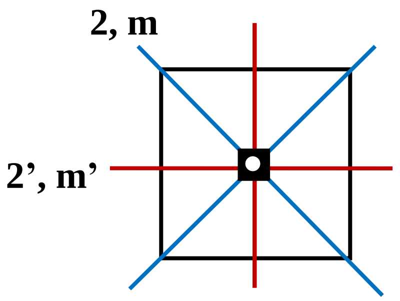
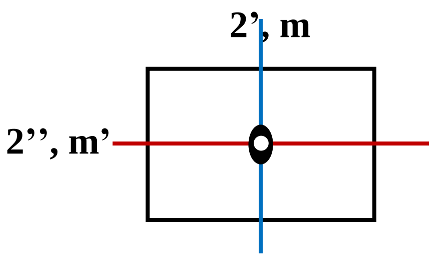
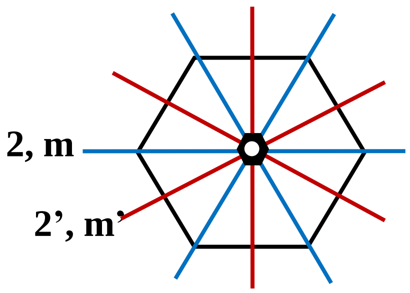
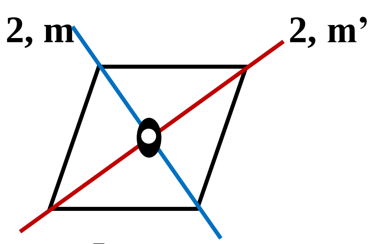
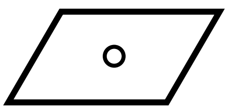


Roto inversion

Symbole et représentation graphique des axes inverses $\perp$ au plan de projection

Terminologie	Symbole	Représentation graphique
Axe d'inversion d'ordre 1 ≡ centre d'inversion	$\bar{1}$	
Axe d'inversion d'ordre 2	$\bar{2}$	
Axe d'inversion d'ordre 3	$\bar{3}$	
Axe d'inversion d'ordre 4	$\bar{4}$	
Axe d'inversion d'ordre 5	$\bar{5}$	
Axe d'inversion d'ordre 6	$\bar{6}$	

Eléments de symétrie de quelques figures géométriques finies

Géométrie de la figure finie	Eléments de symétrie
 **Carré**	- 1 axe direct d'ordre 4 ⊥ plan du carré, - 4 axes directs d'ordre 2 ⊥ axe 4, - 4 plans de symétrie: 2 m et 2 m', - 1 centre d'inversion $\bar{1}$ au centre du carré.
 **Rectangle**	-1 axe direct d'ordre 2 ⊥ plan du rectangle - 2 axes directs 2' et 2'' dans le plan du rectangle - 2 miroirs m et m', - 1 centre d'inversion $\bar{1}$: centre du rectangle
 **Hexagone**	- 1 axe direct d'ordre 6 ⊥ plan de l'hexagone, - 6 axes directs d'ordre 2 ⊥ axe 6, - 6 plans de symétrie: 3 m et 3 m', - 1 centre d'inversion $\bar{1}$ centre de l'hexagone
 **Losange**	- 1 axe direct d'ordre 2 ⊥ plan du losange, - 2 axes directs d'ordre 2: diagonales du losange, - 2 miroirs m et m': plans diagonaux, - 1 centre d'inversion $\bar{1}$: centre du losange.
 **Parallélogramme quelconque**	- 1 centre d'inversion $\bar{1}$: centre de la figure.

I-1-1 Projection stéréographique des points équivalents

Il est souvent utile de représenter un élément de symétrie par l'ensemble des points équivalents à partir d'un premier point. En répétant l'opération de symétrie autant de fois qu'il est nécessaire pour n'obtenir plus aucun nouveau point.
La projection stéréographique donne une représentation d'un ensemble de points situés à la surface d'une sphère (pôles sphériques). C'est une représentation commode car elle est inscrite dans un plan.

☞ **Remarque:**

Les opérateurs de symétrie d'orientation ne modifient pas la coordonnée polaire r, il s'en suit que pour toute opsy les points équivalents se trouvent à la surface d'une sphère.

☞ **Principe de la projection stéréographique**

Selon qu'ils sont dans l'hémisphère Nord ou Sud, les pôles sphériques de coordonnées θ,φ sont reliés par des droites au pôle sud ou nord. Les intersections des droites de liaisons avec le plan de l'équateur sont les pôles stéréographiques.

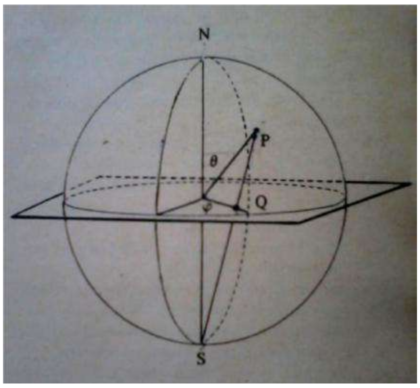
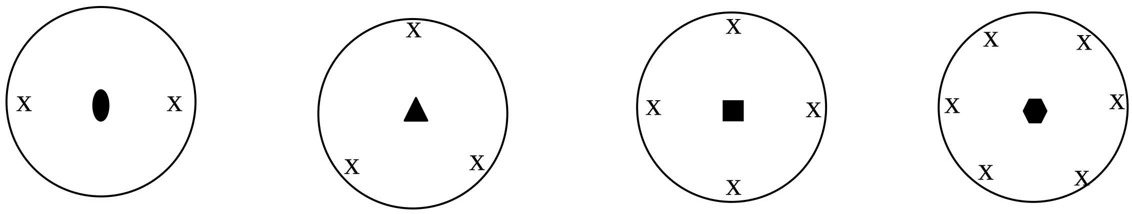


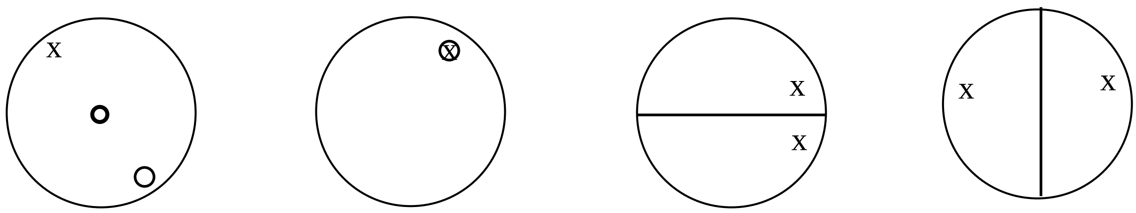
Schéma du principe de la projection stéréographique:

Le point Q est le pôle stéréographique du pôle sphérique P. C'est l'intersection du segment PS avec le plan de l'équateur.
Dans le plan de projection, à l'intérieur du cercle de l'équateur: une croix (x) indique le pôle stéréographique d'un point situé dans l'hèmisphère Nord et un rond (o) représente un point de l'hèmisphère Sud.

☞ **Exemples**: projections stéréographiques des points équivalents dans quelques opérations de symétrie



Axe 2 **Axe 3** **Axe 4** **Axe 6**



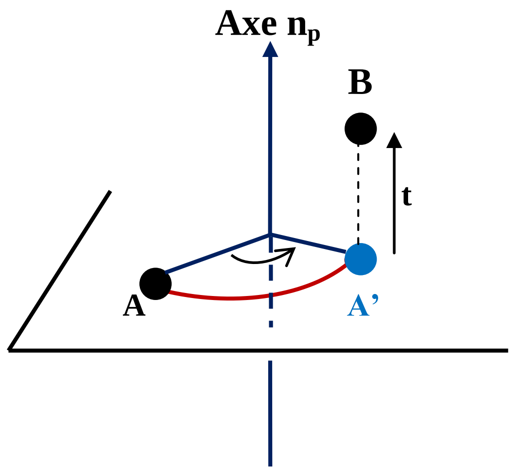
$\bar{1}$ **m: plan de projection** **m⊥plan de projection**

V-2 Les éléments de symétrie de position

La symétrie des figures périodiques infinies permet de mettre en évidence, à côté des éléments de symétrie d'orientation, d'autres éléments de symétrie qui font intervenir une translation de période t, associée ou non à une rotation, ces éléments dits de position sont: les axes hélicoïdaux et les plans de glissement.

➢ **Les axes hélicoïdaux** associent une rotation autour d'un axe directe n suivie d'une translation de vecteur t, parallèle à l'axe n, la compatibilité des 2 opérations implique que: $t = p/n\ H$ avec p un entier compris entre 1 et (n-1).

Les axes hélicoïdaux sont notés n_p. L'axe n_p correspond à une rotation de $2\pi/n$ autour de l'axe n, suivie d'une translation de $t= p/n\ H$ parallèlement à cet axe, avec $1\leq p\leq n-1$ et H la période ou pas de l'hélice (H=c si l'axe hélicoïdal est porté par oz).



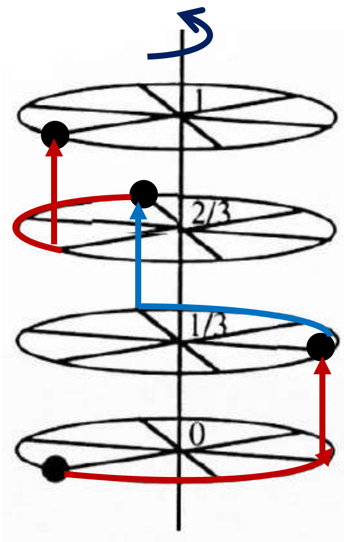
Pr. N. EL JOUHARI
UNIVERSITE MOHAMMED V, FACULTE DES SCIENCES, DEPARTEMENT DE CHIMIE

Symbole et représentation graphique des axes hélicoïdaux ⊥ plan de projection

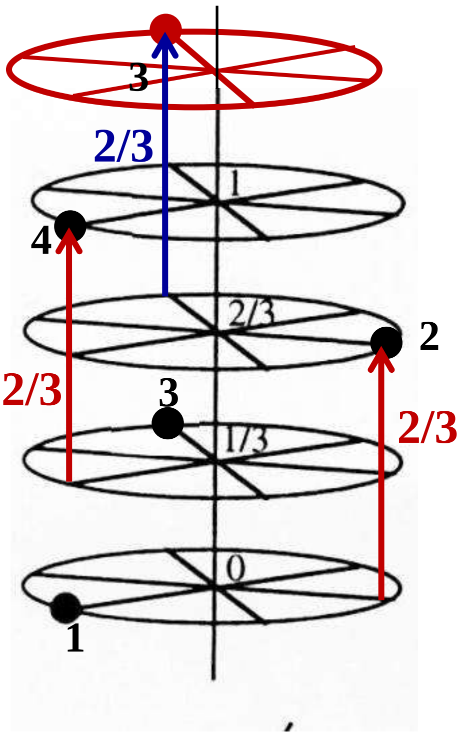
Symbole	Représentation graphique	Symbole	Représentation graphique
2_1		6_1	
3_1		6_2	
3_2		6_3	
4_1		6_4	
4_2		6_5	
4_3			

Axe 2_1 dans le plan de la projection	

Exemple: L'axe 3_1 associe une rotation de $2\pi/3$ suivie d'une translation de (1/3)H parallèlement à cet axe et l'axe. L'axe 3_2 associe une rotation de $2\pi/3$ suivie d'une translation de (2/3)H parallèlement à cet axe et l'axe.

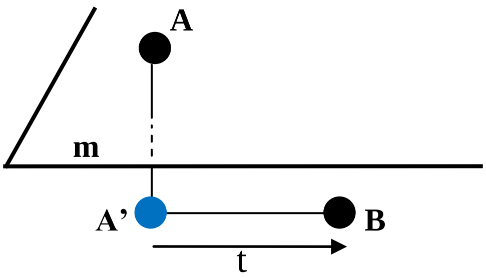


Axe hélicoïdal 3_1



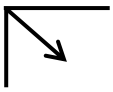
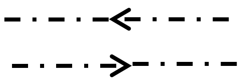
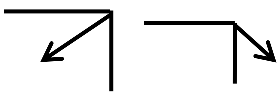
Axe hélicoïdal 3_2

➢ **Les plans de glissement** associent une réflexion par rapport à un plan de symétrie de type m, suivie d'une translation t parallèlement à ce à ce plan.

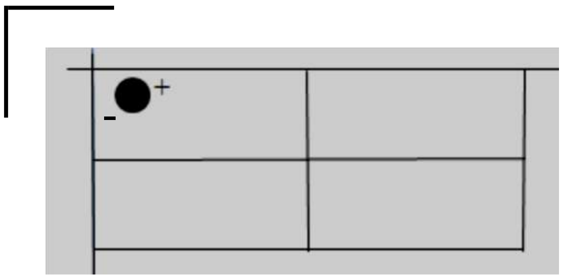
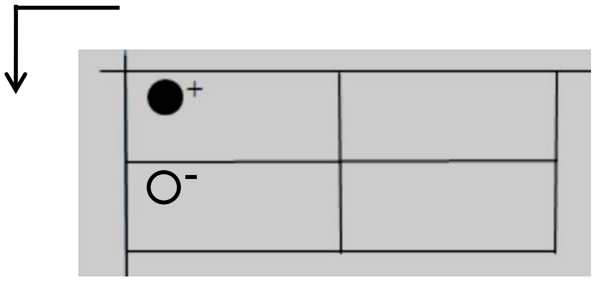
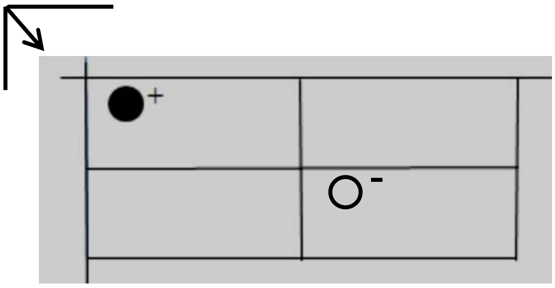
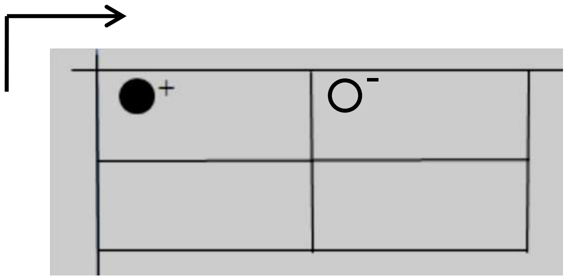


La notation des plans de glissement tient compte à la fois de la valeur de t et des directions de l'espace concernées.

Symbole et représentations graphiques des plans de symétrie
(a et b sont dans le plan de projection)

Symbole	Représentation graphique		Nature de la translation
	⊥ au plan du dessin	// au plan du dessin	
m			Plan ordinaire, sans translation
a, b			a/2 le long de x ou b/2 le long de y
c			c/2 le long de z, (a+b+c)/2 le long de [111] en axes rhomboédriques
n			(a+b)/2 ou (b+c)/2 ou (a+c)/2 ou (a+b+c)/2 (quadratique et cubique)
d			(a±b)/4 ou (b±c)/4 ou (a±c)/4 ou (a±b±c)/4 (quadratique et cubique)

Exemples :

 **Plan de symétrie m** Simple réflexion par rapport au plan xoy	 **Plan de glissement de type a // (xoy)** Réflexion suivie d'une translation de a/2 suivant ox
 **Plan de glissement de type n // (xoy)** Réflexion suivie d'une translation de (a+b)/2	 **Plan de glissement de type b // (xoy)** Réflexion suivie d'une translation de b/2 suivant oy

Si on considère un cristal à l'échelle macroscopique (ordre à grande distance), cad sans tenir compte de la répartition des atomes, la symétrie des cristaux se ramène à celle d'un polyèdre ne possédant, comme seuls éléments de symétrie potentiels, que les éléments d'orientation: 1, 2, 3, 4 , 6, $\bar{1}$ et m. L'association de ces divers éléments conduit aux 7 systèmes cristallins, chacun d'eux étant caractérisés par un polyèdre de référence et par un degré de symétrie donné.

Si on considère un cristal à l'échelle microscopique, le passage à l'échelle atomique (ordre à courte distance) permet localement:

- Soit de prendre en considération les autres éléments de symétrie d'orientation $\bar{3}$, $\bar{4}$ et $\bar{6}$.

- Soit d'abaisser la symétrie du réseau par l'absence d'un élément de symétrie de base, le centre de symétrie par exemple.

L'étude de toutes les combinaisons possibles entre les éléments de symétrie d'orientation conduit aux 32 groupes ponctuels.

L'ensemble de tous les éléments de symétrie d'orientation et de position décrit la symétrie la plus fine. La combinaison des 2 types d'éléments de symétrie conduit aux 230 groupes d'espace qui sont répertoriés dans les tables internationales de cristallographie.