Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences d'Agadir
Dépt. de Mathématiques

Année universitaire 2014/2015
Filières : SMC
Semestre : 4

Corrigé examen
Session printemps
SMC4-M26 : probabilités

Durée : 1h30

I. ....(*3 points)*

Nous avons **:** $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

a. Si les événements A et B sont indépendants alors on a : $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$, d'où :

1

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

b. Si l'événement A implique l'événement B alors $\boldsymbol{A \cup B = B}$

1

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(B) = \frac{1}{2}}$$

c. $\boldsymbol{P(A \cap B) = P\left({}^{A}/_{B}\right)P(B)}$:

1

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P\left({}^{A}/_{B}\right)P(B)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

II. ....(*4 points)*

Un laboratoire d'analyse chimique reçoit un lot de tubes à essai. Ces tubes sont fournis par trois sociétés différentes $\boldsymbol{A, B}$ ***et*** $\boldsymbol{C}$ dans les proportions suivantes : **50%, 30% et 20%**.

2% des tubes fabriqués par A, 3% de ceux fabriqués par B et 4% de ceux fabriqués par C présentent des défauts. On choisit au hasard un tube à essai dans le lot reçu.

On note par $\boldsymbol{D}$ l'évènement « le tube à essai est défectueux »

a. On utilise la formule des probabilités totales

2

$$\boldsymbol{P(D) = P\left({}^{D}/_{A}\right)P(A) + P\left({}^{D}/_{B}\right)P(B) + P\left({}^{D}/_{C}\right)P(C)}$$
$$\boldsymbol{= 0,02 \times 0,5 + 0,03 \times 0,3 + 0,04 \times 0,2 = 0,027}$$

b. On utilise la formule de Bayes

2

$$\boldsymbol{P\left({}^{A}/_{D}\right) = \frac{P\left({}^{D}/_{A}\right)P(A)}{P(D)} = \frac{0,02 \times 0,5}{0,027} = 0,370}$$

III. ....(*4 points)*

La durée de vie d'une lampe électrique, exprimée en heures d'utilisation, est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

a.

2

$$0,9 = P(X > 500) = e^{-\lambda 500}, \qquad d'où\ \lambda = -\frac{\ln(0,9)}{500} = 0,0002$$

b. La durée de vie moyenne d'une lampe est

1

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = 5000\ heures$$

c. La probabilité qu'une lampe fonctionne durant au moins 5000 heures est :

1

$$P(X > 5000) = e^{-0,0002 \times 5000} = e^{-1} = 0,3678$$

IV. .... *(9 points)*

Une usine fabrique des composants mécaniques utilisés dans le montage de voitures. L'épaisseur de ces composants varie selon une loi normale de moyenne $\mu = \mathbf{2\ cm}$ et d'écart-type $\mathbf{0,05\ cm}$.

Tous les composants dont l'épaisseur n'est pas comprise entre 1,88 cm et 2,12 cm sont inutilisables (sont rejetés).

a. La probabilité qu'un composant choisie au hasard soit utilisable :

1

$$P(1,88 \le X \le 2,12) = P\left(-2,4 \le \frac{X-2}{0,05} \le 2,4\right) = \Phi(2,4) - \Phi(-2,4)$$

$$= 2\Phi(2,4) - 1 = 2 \times 0,9918 - 1 = 0,9836$$

$\Phi(\mathrm{t})$ *étant la fonction de réprtition de la loi* $\mathcal{N}(0\,,1\,)$

b. La proportion de composants qui ont une épaisseur inférieure à 2,05 cm parmi les composants utilisables est :

2

$$P\left(\{X < 2,05\} \Big/ \{1,88 \le X \le 2,12\}\right) = \frac{P(\{X < 2,05\} \cap \{1,88 \le X \le 2,12\})}{P(\{1,88 \le X \le 2,12\})}$$

$$= \frac{P(\{1,88 \le X < 2,05\})}{P(\{1,88 \le X \le 2,12\})}$$

$$= \frac{P\left(-2,4 \le \frac{X-2}{0,05} < 1\right)}{P\left(-2,4 \le \frac{X-2}{0,05} \le 2,4\right)}$$

$$= \frac{\Phi(1) + \Phi(2,4) - 1}{2\Phi(2,4) - 1} = \frac{0,8413 + 0,9918 - 1}{0,9836} = 0,847$$

c. On choisit au hasard un lot de **200** composants. On appelle Y la variable aléatoire dont la valeur correspond au nombre de composants inutilisables dans cet échantillon.

i. Quelle est la loi de probabilité Y ? quelles sont sa moyenne et sa variance ?

La variable aléatoire Y suit une loi de binomiale de paramètre n=200 et

2

$$p = P\left(\overline{1,88 \le X \le 2,12}\right) = 1 - P(1,88 \le X \le 2,12) = 0,0164 \ : Y \sim \mathcal{B}(200\,,\ 0,0164).$$

$$P(Y = k) = \binom{200}{k}(0,0164)^k (0,9836)^{200-k}$$

$$E(Y) = np = 200 \times 0,0164 = 3,28$$

$$Var(Y) = np(1-p) = 3,226$$

ii. La probabilité d'avoir au moins un composant inutilisable dans le lot.

1

$$P(Y \ge 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - (0,9836)^{200} = 1 - 0,0366 = 0,9634$$

iii. Utiliser une approximation de la loi de Y pour calculer la valeur de la probabilité d'avoir au plus 5% de de composants inutilisables.

1 Ici nous avons $n = 200$ et $np = 3{,}28 < 5$; on peut approcher la loi de Y par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3{,}28$; $P(Y=k) = \binom{200}{k}(0{,}0164)^k(0{,}9836)^{200-k} \cong \frac{(3{,}28)^k}{k!}e^{-3{,}28}$

2 D'où : $P(Y \leq 10) = \sum_{k=0}^{10} P(Y=k) \cong e^{-3{,}28}\sum_{k=0}^{10}\frac{(3{,}28)^k}{k!} = 0{,}9994$