

# Probabilités & Statistiques L1: Exercices

December 28, 2008

## Dénombrements I

### Exercice 1 Permutations 1

1. On permute les lettres du mot *BANC*.
  - (i) Nb de mots
  - (ii) Nb de mots commençant par *B*
2. On doit asseoir 7 personnes discernables sur 7 chaises discernables.
  - (i) Nb de manières de procéder
  - (ii) Idem sachant que la personne n°4 est sur la chaise n°5 ou 6

#### Solution

1.
  - (i) Permutations de 4 éléments discernables:  $4!$
  - (ii) Permutations de 3 éléments discernables:  $3!$
2.
  - (i) Permutations de 7 éléments discernables  $7!$
  - (ii) 2 cas incompatibles avec le même nombre  $6!$  de possibilités; règle de la somme:  
 $2 \times 6!$

### Exercice 2 Permutations 2

1. On permute les lettres du mot ci-dessous: nb de permutations qui le conservent.
  - (i) *BAOBAB*
  - (ii) *ABRACADABRA*
2. On doit ranger en ligne 7 personnes discernables, dont 4 français, 3 allemands et 2 italiens. Nb de manières de procéder dans les cas suivants:
  - (i) Les français sont tous à gauche et les italiens tous à droite
  - (ii) Les gens de même nationalité restent ensemble

#### Solution

1.
  - (i) Permutations qui conservent un mot de  $5 \equiv (3, 2, 1)$  lettres partiellement discernables:  $3!2!1!$
  - (ii) Permutations qui conservent un mot de  $11 \equiv (5, 2, 2, 1, 1)$  lettres partiellement discernables:  $5!2!2!1!1!$
2.
  - (i) Permutations qui conservent une suite de  $7 = (4, 3, 2)$  éléments partiellement discernables:  $N = 4!3!2!$
  - (ii)  $3!$  cas incompatibles avec le même nombre  $N$  de possibilités; règle de la somme:  
 $3! \times N$

**Exercice 3 Tirages 1**

1. Une plaque minéralogique est composée de 5 caractères parmi les 26 lettres de l'alphabet.
  - (i) Nb de plaques sachant que l'on peut répéter les lettres
  - (ii) Idem sachant que la troisième lettre est un W
  - (iii) Idem sachant que les 3 premiers caractères sont des lettres et les 2 autres des chiffres
2. On répond par OUI ou NON à un questionnaire de 4 questions.
  - (i) Nb de réponses
  - (ii) Nb de réponses qui comportent au moins un OUI

Solution

1.
  - (i) Tirage  $(5, 26)$  de type  $O/R$  :  $26^5$
  - (ii) Tirage  $(4, 26)$  de type  $O/R$  :  $26^4$
  - (iii) Tirage  $(3, 26)$  de type  $O/R$  suivi de tirage  $(2, 10)$  de type  $O/R$ ; règle du produit:  $26^3 \times 10^2$
2.
  - (i) Tirage  $(4, 2)$  de type  $O/R$  :  $2^4$
  - (ii) Passage au complémentaire:  $2^4 - 1$

**Exercice 4 Tirages 2**

1. Une plaque minéralogique est composée de 5 caractères parmi les 26 lettres de l'alphabet.
  - (i) Nb de plaques sachant que toutes les lettres sont différentes
  - (ii) Idem sachant que la troisième lettre est un W
2. Une course comporte 5 chevaux.
  - (i) Nb de tiercés dans l'ordre
  - (ii) Nb de tiercés dans l'ordre qui comportent le cheval n°4

Solution

1.
  - (i) Tirage  $(5, 26)$  de type  $O/\overline{R}$  :  $A_5^{26} = 26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22$
  - (ii) Tirage  $(4, 25)$  de type  $O/\overline{R}$  :  $A_4^{25} = 25 \times 24 \times 23 \times 22$
2.
  - (i) Tirage  $(3, 5)$  de type  $O/\overline{R}$  :  $A_3^5 = 5 \times 4 \times 3$
  - (ii) 3 cas incompatibles avec le même nombre  $A_2^4$  de possibilités; règle de la somme:  $3 \times A_2^4 = 3 \times (4 \times 3)$

**Exercice 5 Tirages 3**

1. Une course comporte 5 chevaux.
  - (i) Nb de tiercés dans le désordre
  - (ii) Nb de tiercés dans le désordre qui comportent le cheval n°4
2. A partir d'un groupe de 5 hommes et 7 femmes on veut former un comité de 5 personnes: toutes les personnes du groupe sont discernables.
  - (i) Nb de comités
  - (ii) Nb de comités comportant 2 hommes et 3 femmes
  - (iii) Nb de comités comportant au plus deux hommes

### Solution

1.
  - (i) Tirage (3, 5) de type  $\overline{O}/\overline{R}$  :  $\binom{5}{3} = \frac{A_3^5}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1}$
  - (ii) Tirage (2, 4) de type  $\overline{O}/\overline{R}$  :  $\binom{4}{2} = \frac{A_2^4}{2!} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1}$
2.
  - (i) Tirage (5, 12) de type  $\overline{O}/\overline{R}$  :  $\binom{12}{5} = \frac{A_{12}^5}{5!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$
  - (ii) Tirage (2, 5) de type  $\overline{O}/\overline{R}$  suivi de tirage (3, 7) de type  $\overline{O}/\overline{R}$ ; règle du produit:  
 $N_2 = \binom{5}{2} \times \binom{7}{3} = \frac{A_2^5}{2!} \times \frac{A_3^7}{3!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1}$
  - (iii) 3 cas incompatibles donc règle de la somme:  $N_0 + N_1 + N_2$  en notant  $N_k$  le nombre de comités comportant  $k$  hommes exactement;  
 $N_0 = \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2 \times 1}$ ,  $N_1 = \binom{5}{1} \times \binom{7}{4} = 5 \times \binom{7}{3} = 5 \times \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1}$

### **Exercice 6** Tirages 4

Une urne contient 3 boules numérotées 1, 2, 3. On effectue 5 tirages avec remise et on note le nombre de fois où chaque boule est apparue.

- (i) Nb de résultats
- (ii) Nb de résultats sachant que la boule n°2 n'est pas apparue
- (iii) Nb de résultats sachant que chaque boule est apparue au moins une fois

### Solution

- (i) Tirage (5, 3) de type  $\overline{O}/R$  :  $\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{A_2^7}{2!} = \frac{7 \times 6}{2 \times 1}$
- (ii) Tirage (5, 2) de type  $\overline{O}/R$  :  $\binom{6}{5} = \binom{6}{1} = 6$
- (iii) Tirage (2, 3) de type  $\overline{O}/R$  :  $\binom{4}{2} = \frac{A_2^4}{2!} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1}$

### **Exercice 7** Lancers 1

On lance une pièce de monnaie 5 fois de suite et on note dans l'ordre l'apparition de PILE ou FACE.

- (i) Nb de suites de PILE ou FACE obtenues
- (ii) Nb de suites comportant deux PILE
- (iii) Nb de suites comportant au moins deux PILE
- (iv) Nb de suites comportant au moins une PILE et une FACE

### Solution

- (i) Lancer (5, 2) de type  $O$  :  $2^5$
- (ii) Tirage (2, 5) de type  $\overline{O}/\overline{R}$  :  $\binom{5}{2} = \frac{A_2^5}{2!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1}$
- (iii) Passage au complémentaire et règle de la somme:  $2^5 - \binom{5}{0} - \binom{5}{1} = 2^5 - 1 - 5$
- (iv) Passage au complémentaire et règle de la somme:  $2^5 - 2$

### **Exercice 8** Lancers 2

On lance 3 dés identiques à 5 faces discernables et on note le nombre de fois où chaque face est apparue.

- (i) Nb de résultats
- (ii) Nb de résultats comportant 2 fois la face 2

Solution

- (i) Lancer  $(3, 5)$  de type  $\overline{O} : \binom{7}{3} = \frac{A_7^3}{3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1}$   
(ii) Lancer  $(1, 4)$  de type  $\overline{O} : \binom{4}{1} = 4$

**Exercice 9 Répartitions 1**

5 films discernables sont classés de 1 à 10 avec éventuellement des ex-aequo.

- (i) Nb de classements  
(ii) Nb de classements sachant que le film 2 a la note 4  
(iii) Nb de classements sachant que la note 1 a été attribuée 1 fois  
(iv) Nb de classements sachant que la note 1 a été attribuée 2 fois

Solution

- (i) Répartiton  $(5, 10)$  de type  $D : 10^5$   
(ii) Répartiton  $(4, 10)$  de type  $D : 10^4$   
(iii) 5 cas incompatibles avec le même nombre  $9^4$  de possibilités; règle de la somme:  
 $5 \times 9^4$   
(iv)  $\binom{5}{2}$  cas incompatibles avec le même nombre  $9^3$  de possibilités; règle de la somme:  
 $\binom{5}{2} \times 9^3 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 9^3$

**Exercice 10 Répartitions 2**

1. 8 enseignants indiscernables sont affectés à 4 écoles discernables.  
(i) Nb d'affectations  
(ii) Nb d'affectations si l'école n°2 reçoit 3 enseignants  
(iii) Nb d'affectations si chaque école reçoit au moins un enseignant  
2. Une personne dispose de 20000 € à investir sur 4 placements discernables.

Donner le nombre de stratégies possibles dans les cas suivants:

- (i) certains placements peuvent être ignorés  
(ii) tous les placements sont pourvus d'au moins un euro

Solution

1.  
(i) Répartiton  $(8, 4)$  de type  $\overline{D} : \binom{11}{3} = \frac{A_{11}^3}{3!} = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1}$   
(ii) Répartiton  $(5, 3)$  de type  $\overline{D} : \binom{7}{2} = \frac{A_7^2}{2!} = \frac{7 \times 6}{2 \times 1}$   
(iii) Répartiton  $(4, 4)$  de type  $\overline{D} : \binom{7}{3} = \frac{A_7^3}{3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1}$   
2.  
(i) Répartiton  $(20000, 4)$  de type  $\overline{D} : \binom{20003}{3} = \frac{A_{20003}^3}{3!} = \frac{20003 \times 20002 \times 20001}{3 \times 2 \times 1}$   
(ii) Répartiton  $(19996, 4)$  de type  $\overline{D} : \binom{19999}{3} = \frac{A_{19999}^3}{3!} = \frac{19999 \times 19998 \times 19997}{3 \times 2 \times 1}$

**Exercice 11 Problèmes divers**

1. Pour disputer un match 10 personnes discernables se répartissent en deux équipes discernables de 5 membres chacune.

- (i) Nb de répartitions possibles  
(ii) Idem sachant qu'il y a deux personnes qui ne veulent pas jouer ensembles  
(iii) Idem sachant qu'il y a deux personnes qui ne veulent pas être opposées

2. L'équipe de police d'un village comporte 8 personnes, qui doivent se répartir en 3 agents de patrouille, 2 agents de garde au commissariat et 3 agent de réserve. Nb de répartitions.

3. On permute les lettres du mot ABRACADABRA. Nb de mots discernables obtenus.

### Solution

1.
  - (i) Répartition 10 en  $(5, 5) : \binom{10}{5} \times \binom{5}{5} = \binom{10}{5}$
  - (ii) 2 cas incompatibles avec le même nombre  $\binom{8}{4}$  de possibilités; règle de la somme:  
 $2 \times \binom{8}{4}$
  - (iii) 2 cas incompatibles avec le même nombre  $\binom{8}{3}$  de possibilités; règle de la somme:  $2 \times \binom{8}{3}$
2. Répartition 8 en  $(3, 2, 3) : \binom{8}{3} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{3} = \frac{8!}{3!2!3!}$
3. Mots de  $11 \equiv (5, 2, 2, 1, 1)$  lettres partiellement discernables:  $\frac{11!}{5!2!2!1!1!}$

### Dénombrements II

#### Exercice 12 Permutations

$$\mathcal{E} = \{A_1, A_2, B_1, B_2, B_3, O\}.$$

- (i) Nb de permutations de  $\mathcal{E}$
- (ii) Nb de permutations de  $\mathcal{E}$  qui conservent la partition  $(\{A_1, A_2\}, \{B_1, B_2, B_3\}, \{O\})$ .

### Solution

- (i)  $6!$     (ii)  $3!2!1!$

#### Exercice 13 Applications

1.  $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $\mathcal{B} = \{A, B, \dots, Z\}$ .

- (i) Nb d'applications  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$
  - (ii) Idem sachant que  $f(3) = W$
  - (iii) Idem sachant que  $W$  admet un seul antécédent
2.  $\mathcal{E} = \{P, F\}$ .
- (i) Nb de suites avec répétition de 4 éléments pris dans  $\mathcal{E}$
  - (ii) Idem sachant que  $P$  apparaît une seule fois

### Solution

1.
  - (i)  $26^5$
  - (ii)  $26^4$
  - (iii)  $5 \times 25^4$
2.
  - (i)  $2^4$
  - (ii) 4

#### Exercice 14 Arrangements

1.  $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$ ,  $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .
- (i) Nb d'applications injectives  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$
  - (ii) Idem sachant que 4 admet un seul antécédent
2.  $\mathcal{E} = \{A, B, \dots, Z\}$ .
- (i) Nb de suites sans répétition de 5 éléments pris dans  $\mathcal{E}$
  - (ii) Idem sachant que  $W$  apparaît en troisième position

Solution

1.
  - (i)  $A_5^3 = \frac{5!}{2!}$
  - (ii)  $3 \times A_4^2 = 3 \times \frac{4!}{2!}$
2.
  - (i)  $A_{26}^5 = \frac{26!}{21!}$
  - (ii)  $A_{25}^4 = \frac{25!}{21!}$

**Exercice 15** *Combinaisons*

1.  $\mathcal{E} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .
  - (i) Nb de parties de  $\mathcal{E}$  à 3 éléments
  - (ii) Nb de parties de  $\mathcal{E}$  à 3 éléments et contenant 4
2.  $\mathcal{A} = \{A, B, C, D, E\}$ ,  $\mathcal{B} = \{1, 2, \dots, 7\}$ 
  - (i) Nb de parties à 5 éléments contenant 2 éléments de  $\mathcal{A}$  et 3 de  $\mathcal{B}$
  - (ii) Nb de parties à 5 éléments contenant au plus 2 éléments de  $\mathcal{A}$
3.  $\mathcal{E} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .
  - (i) Nombre de suites strictement croissantes de 3 chiffres pris dans  $\mathcal{E}$
  - (ii) Idem mais suites strictement décroissantes
4. Sur le réseau  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  on note  $\mathcal{E}$  l'ensemble des chemins de longueur 12 qui partent de  $(0, 0)$  et se terminent en  $(7, 5)$ .
  - (i) Nb des chemins de  $\mathcal{E}$
  - (ii) Nb de chemins de  $\mathcal{E}$  qui passent par  $(4, 3)$

Solution

1.
  - (i)  $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!}$
  - (ii)  $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!}$
2.
  - (i)  $\binom{5}{2}\binom{7}{3} = \frac{5!}{2!3!} \frac{7!}{3!4!}$
  - (ii)  $\binom{5}{0}\binom{7}{5} + \binom{5}{1}\binom{7}{4} + \binom{5}{2}\binom{7}{3} = \frac{7!}{5!2!} + 5 \cdot \frac{7!}{4!3!} + 10 \cdot \frac{7!}{3!4!}$
3.
  - (i)  $\frac{A_5^3}{3!} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!}$
  - (ii) idem
4.
  - (i)  $\binom{12}{7,5} = \binom{12}{7} = \binom{12}{5} = \frac{12!}{5!7!}$
  - (ii)  $\binom{7}{4,3}\binom{5}{2,3} = \binom{7}{3}\binom{5}{2} = \frac{7!}{3!4!} \frac{5!}{2!3!}$

**Exercice 16** *Partitions d'un ensemble*

1.  $\mathcal{E} = \{1, 2, \dots, 8\}$ . Nb de partitions de  $\mathcal{E}$  en suite  $(A_1, A_2, A_3)$  de 3 parties de cardinal  $(2, 2, 4)$ .
2. On développe  $(a + b + c + d)^6$ . Coefficient de  $a^3bc^2$ .
3. Sur le réseau  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  on note  $\mathcal{E}$  l'ensemble des chemins de longueur 12 qui partent de  $(0, 0, 0)$  et se terminent en  $(3, 5, 4)$ . Nb des chemins de  $\mathcal{E}$

Solution

1.  $\binom{8}{2,2,4} = \frac{8!}{2!2!4!}$
2.  $\binom{6}{3,1,2,0} = \frac{6!}{3!1!2!0!}$
3.  $\binom{12}{3,5,4} = \frac{12!}{3!5!4!}$

**Exercice 17** Décompositions d'un entier

1. On note  $\mathcal{E}$  l'ensemble des suites  $(p_1, p_2, p_3)$  d'entiers positifs ou nuls de somme donnée 5.

- (i) Nb de suites de  $\mathcal{E}$
  - (ii) Idem sachant que  $p_1 = 2$
  - (iii) Idem sachant que  $p_1 \leq 1$
2. On développe  $(a + b + c + d)^3$ .
- (i) Nb de monômes distincts  $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$
  - (ii) Nb de monômes distincts  $a^\alpha c^\gamma d^\delta$

Solution

1. (i)  $\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!}$  (ii)  $\binom{4}{1} = 4$  (iii)  $\binom{6}{1} + \binom{5}{1} = 6 + 5$   
 2. (i)  $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!}$  (ii)  $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!}$

**Espace probabilisé****Exercice 18** Equiprobabilité 1

1. On permute les lettres du mot *LOUCHE*.

- (i) Pb d'obtenir le mot *CHELOU*
- (ii) Pb que le mot commence par *L*

2. On permute les lettres du mot *BABAR*.

- (i) Pb d'obtenir le même mot
- (ii) Pb que les *A* se suivent

Solution

1.  $\Omega$  = permutations de  $E_6$ , équiprobabilité,  $|\Omega| = 6!$ .  
 (i)  $\text{pr}(\text{CHELOU}) = \frac{1}{6!}$   
 (ii)  $\text{pr}(L - - - -) = \frac{5!}{6!} = \frac{1}{6}$   
 Variante dans (ii):  $\Omega' = E_6$ , équiprobabilité,  $|\Omega'| = 6$  :  $\text{pr}(L - - - -) = \text{pr}'(L) = 1/6$ .
2.  $\Omega$  = permutations de  $E_5$ , équiprobabilité,  $|\Omega| = 5!$   
 (i)  $\text{pr}(\text{BABAR}) = \frac{2!2!1!}{5!} = \frac{1}{30}$   
 (ii) On note  $A_k$  l'évènement "deux *A* aux rangs  $k, k+1$ " et  $A = \bigcup_{k=1}^4 A_k$  : réunion disjointe et  $\text{pr}(A_k) = \frac{2!3!}{5!}$  donc  $\text{pr}(A) = 4 \cdot \frac{2!3!}{5!} = \frac{2}{5}$ .  
 Variante dans (i):  $\Omega' =$  partitions de 5 en  $(2, 2, 1)$ , équiprobabilité,  $|\Omega'| = \binom{5}{2,2,1}$  :  $\text{pr}'(\text{BABAR}) = \frac{1}{\binom{5}{2,2,1}}$ .  
 Variante dans (ii):  $\Omega' =$  combinaisons de 2 parmi 5, équiprobabilité,  $|\Omega'| = \binom{5}{2,2,1}$  :  $\text{pr}'(ii) = \frac{4}{\binom{5}{2}}$ .

**Exercice 19** Equiprobabilité 2

1. On lance une pièce de monnaie 4 fois de suite et on note dans l'ordre l'apparition de *PILE* ou *FACE*.

- (i) Pb d'obtenir le lancer *PFPP*
- (ii) Pb que le lancer finisse par *FACE*
- (iii) Pb que le lancer comporte au moins un *PILE*

2. (i) On choisit une application  $E_{20} \rightarrow E_{365}$ . Pb qu'elle soit injective.

(ii) Une salle contient 20 personnes. Pb que deux personnes (au moins) soient nées le même jour.

### Solution

1.  $\Omega$  = suites avec répétition de 4 parmi 2, équiprobabilité,  $|\Omega| = 2^4$ .
  - (i)  $\text{pr}(PFPP) = \frac{1}{2^4}$
  - (ii)  $\text{pr}(- - - F) = \frac{2^3}{2^4} = \frac{1}{2}$
  - (iii) Passage au complémentaire:  $\text{pr}(iii) = 1 - \text{pr}(FFFF) = 1 - \frac{1}{2^4}$ .
- Variante dans (ii):  $\Omega' = \{P, F\}$ , équiprobabilité,  $|\Omega'| = 2$  :  $\text{pr}(- - - F) = \text{pr}'(F) = 1/2$ .
2.
  - (i)  $\Omega$  = applications 20 dans 365, équiprobabilité,  $|\Omega| = 365^{20}$ .  
 $\text{pr}(i) = \frac{A_{365}^{20}}{365^{20}}$ .
  - (ii) Suite de 20 dates anniversaires = application de 20 dans 365 : par passage au complémentaire on se ramène aux applications injectives, donc  $\text{pr}(ii) = 1 - \frac{A_{365}^{20}}{365^{20}}$ .

### **Exercice 20** Equiprobabilité 3

1. Un groupe de 10 personnes est composé de 4 hommes et 6 femmes: on choisit 5 personnes.
  - (i) Pb qu'il n'y ait aucun homme
  - (ii) Pb d'obtenir 2 hommes et 3 femmes.
2. On répartit 10 oeufs indiscernables dans 3 paniers discernables.
  - (i) Pb de la répartition (2, 5, 3)
  - (ii) Pb que tous les oeufs soient dans le même panier
  - (iii) Pb que tous les oeufs ne soient pas dans le même panier

### Solution

1.  $\Omega$  = combinaisons de 5 parmi 10, équiprobabilité,  $|\Omega| = \binom{10}{5}$ .
  - (i)  $\text{pr}(i) = \frac{\binom{6}{5}}{\binom{10}{5}} = \frac{6}{\binom{10}{5}}$
  - (ii)  $\text{pr}(ii) = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{3}}{\binom{10}{5}}$
2.  $\Omega$  = décompositions de 10 en  $p_1 + p_2 + p_3$ , équiprobabilité,  $|\Omega| = \binom{12}{2}$ .
  - (i)  $\text{pr}(2, 5, 3) = \frac{1}{\binom{12}{2}}$
  - (ii) Disjonction des cas:  $\text{pr}(10, 0, 0) = \text{pr}(0, 10, 0) = \text{pr}(0, 0, 10) = \frac{1}{\binom{12}{2}}$  donc  
 $\text{pr}(ii) = \frac{3}{\binom{12}{2}}$
  - (iii) Passage au complémentaire:  $\text{pr}(iii) = 1 - \frac{3}{\binom{12}{2}}$

### **Exercice 21** Espace probabilisé fini 1

1. On lance 2 dés équiprobables à 6 faces. Pb que la somme des chiffres soit supérieure ou égale à 10.
2. On considère l'univers  $\Omega = \{(i, j), 0 \leq i, j \leq 4\}$ . Les événements élémentaires de la forme  $(2p+1, 2q+1)$  ont la même probabilité  $\alpha$  et les autres événements élémentaires ont la même probabilité  $\alpha/3$ . Calculer  $\alpha$  puis la probabilité de l'évènement  $\{i > j\}$ .



### Solution

1.  $\Omega$  = couples  $(i, j)$ , équiprobabilité,  $|\Omega| = 6^2$ . L'évènement cherché est  $A = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$ ,  $|A| = 6$  :  $\text{pr}(A) = \frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$ .
2.  $|\Omega| = 25$ . Il y a 4 évènements de probabilité  $\alpha$  et 21 de probabilité  $\alpha/3$  donc  $\alpha = 1/11$  :  $\text{pr}(i > j) = 9\frac{\alpha}{3} + \alpha = 4/11$ .

### **Exercice 22** Espace probabilisé fini 2

On rappelle que la probabilité qu'une permutation de  $E_n$  n'ait aucun point fixe est  $p_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ , donc que le nombre de permutations sans points fixes de  $E_n$  est  $n! \times p_n$ .

1. (i) 4 personnes assises sur 4 chaises se lèvent puis se rasseoient aléatoirement. Pb qu'aucune personne ne se rasseoit sur la même chaise.

(ii) Dans un hôtel on distribue 5 clefs à 5 clients pour entrer dans leur chambre: chaque clef n'ouvre qu'une seule porte. Pb qu'au moins un client puisse ouvrir sa porte.

2.  $E = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $s$  est une permutation de  $E$ .

(i) Pb que  $a$  soit point fixe de  $s$

(ii) Pb que  $a$  soit seul point fixe de  $s$

(iii) Pb que  $s$  ait un seul point fixe

(iv) Pb que  $s$  ait au moins un point fixe

### Solution

1.

(i)  $\Omega$  = permutations de  $E_4$ , équiprobabilité,  $|\Omega| = 4!$  (inutile).

$\text{pr}(i) = p_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{3}{8}$ .

(ii)  $\Omega$  = permutations de  $E_5$ , équiprobabilité,  $|\Omega| = 5!$  (inutile).

Passage au complémentaire:  $\text{pr}(ii) = 1 - p_5 = \frac{19}{30}$ .

2.  $\Omega$  = permutations de  $E$ , équiprobabilité,  $|\Omega| = 5!$ .

(i)  $\text{pr}(i) = \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}$

(ii) Il y a  $4! \times p_4$  permutations de  $\{b, c, d, e\}$  sans points fixes donc  $\text{pr}(ii) = \frac{4! \times p_4}{5!} = \frac{p_4}{5} = \frac{3}{40}$

(iii)  $\text{pr}(iii) = 5 \times \text{pr}(ii) = p_4 = \frac{3}{8}$

(iv)  $\text{pr}(iv) = 1 - p_5 = \frac{19}{30}$

Variante dans (i):  $\Omega' = E$ , équiprobabilité,  $|\Omega'| = 5$  :  $\text{pr}(a - - - -) = \text{pr}'(a) = 1/5$ .

### **Exercice 23** Espace probabilisé fini 3

1. On considère deux évènements  $E_1, E_2$  et on donne  $\text{pr}(E_1) = 0.4$ ,  $\text{pr}(E_2) = 0.8$ ,  $\text{pr}(E_1 \cap E_2) = 0.3$ . Pb des évènements:

(i)  $E_1 \cup E_2$  (ii)  $\overline{E_1} \cap \overline{E_2}$  (iii)  $E_1 \cap \overline{E_2}$  (iv)  $\overline{E_1} \cap E_2$ .

2. Dans un groupe 30% des individus portent une bague et un collier, 80% portent une bague et 40% un collier. Pb qu'un individu ne porte ni bague ni collier.

### Solution

1.

$\text{pr}(E_1 \cup E_2) = \text{pr}(E_1) + \text{pr}(E_2) - \text{pr}(E_1 \cap E_2) = 0.9$ .

$\text{pr}(\overline{E_1} \cap \overline{E_2}) = \text{pr}(\overline{E_1 \cup E_2}) = 1 - \text{pr}(E_1 \cup E_2) = 0.1$ .

$$\begin{aligned}\text{pr}(E_1 \cap \overline{E_2}) &= \text{pr}(E_1) - \text{pr}(E_1 \cap E_2) = 0.1 \\ \text{pr}(\overline{E_1} \cap E_2) &= \text{pr}(E_2) - \text{pr}(E_1 \cap E_2) = 0.5 \\ 2. \text{ Idem avec } E_2 &= \text{"porte une bague"} \text{ et } E_1 = \text{"porte un collier"}: \text{pr}(\overline{E_1} \cap \overline{E_2}) = 0.1.\end{aligned}$$

**Exercice 24** Espace probabilisé infini 1

On lance une pièce équiprobable un nombre indéterminé de fois.

1. (i) Pb d'obtenir le premier PILE avant le 4-ème lancer
- (ii) Pb d'attendre au moins 4 lancers avant le premier PILE
- (iii) Pb d'obtenir le premier PILE à un rang impair
2. (i) Pb d'obtenir le deuxième FACE avant le 5-ème lancer
- (ii) Pb d'obtenir le deuxième FACE à un rang impair

NB: on admettra que  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$  si  $0 < x < 1$ .

Solution

1.  $\Omega$  = suites  $P, FP, FFP, \dots$ . Si on note  $\omega_n$  la suite "le 1er PILE est au rang  $n$ " on a  $\text{pr}(\omega_n) = \frac{1}{2^n}$  pour  $n \geq 1$ .

$$(i) \text{pr}(i) = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = \frac{7}{8}$$

$$(ii) \text{pr}(ii) = 1 - \text{pr}(i) = \frac{1}{8}$$

$$(iii) \text{pr}(iii) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2p+1}} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Variante dans (ii): } \text{pr}(ii) = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^3}.$$

Variante finie possible dans (i):  $\Omega'$  = suites avec répétition 3 parmi 2, événement (i) = suites qui comportent au moins un PILE.

2.  $\Omega$  = suites  $FF, PFF, FPF, \dots$ . Si on note  $\omega_n$  la suite "le 2ème FACE est au rang  $n$ " on a  $\text{pr}(\omega_n) = \frac{n-1}{2^n}$  pour  $n \geq 2$ .

$$(i) \text{pr}(i) = \sum_{k=2}^4 \frac{k-1}{2^k} = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} = \frac{11}{16}$$

$$(ii) \text{pr}(ii) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2p}{2^{2p+1}} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} p \left(\frac{1}{4}\right)^{p-1} = \frac{4}{9}$$

Variante finie possible dans (i):  $\Omega'$  = suites avec répétition 4 parmi 2, événement (i) = suites qui comportent au moins deux PILE.

**Exercice 25** \* Espace probabilisé infini 2

Trois personnes  $A, B, C$  lancent une pièce équiprobable à tour de rôle: la première qui obtient PILE a gagné. On suppose que  $A$  commence, suivi par  $B$  puis  $C$ . Calculer la probabilité de gagner pour chacun des joueurs.

Solution

$\Omega$  = suites  $P, FP, FFP, \dots$ . Si on note  $\omega_n$  la suite "le 1er PILE est au rang  $n$ " on a  $\text{pr}(\omega_n) = \frac{1}{2^n}$  pour  $n \geq 1$ .

L'évènement  $A$  : " $A$  gagne" est constitué des suites  $\omega_{3p+1}, p \in \mathbb{N}$  donc  $\text{pr}(A) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3p+1}} = \frac{4}{7}$ .

L'évènement  $B$  : " $B$  gagne" est constitué des suites  $\omega_{3p+2}, p \in \mathbb{N}$  donc  $\text{pr}(B) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3p+2}} = \frac{2}{7}$ .

L'évènement  $C$  : " $C$  gagne" est constitué des suites  $\omega_{3p+3}, p \in \mathbb{N}$  donc  $\text{pr}(C) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3p+3}} = \frac{1}{7}$ .

## Probabilité conditionnelle, Indépendance

NB: Les calculs de ce chapitre ne nécessitent pas d'explicitier l'univers dans lequel on travaille, ce qui n'empêche pas de se poser la question.

### Exercice 26 Arbre de choix

1. Un groupe de 10 personnes est composé de 4 hommes et 6 femmes: on choisit deux personnes. Pb qu'elles soient de même sexe.
2. Une urne contient 5 boules dont 3 rouges et 2 noires: on tire deux boules avec remise. Pb que les deux boules soient de couleurs différentes.
3. Dans une loterie on tire sans remise 5 nombres parmi les nombres  $1, \dots, 20$ : on ne tient pas compte de l'ordre et il y a 5 bons numéros parmi les 20. Pb d'obtenir 2 bons numéros exactement.

#### Solution

$$1. \text{pr}(1) = \frac{4}{10} \frac{3}{9} + \frac{6}{10} \frac{5}{9}.$$

$$\text{Variante: par équiprobabilité } \text{pr}(1) = \frac{\binom{4}{2} + \binom{6}{2}}{\binom{10}{2}}.$$

$$2. \text{pr}(2) = \frac{3}{5} \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \frac{3}{4}.$$

$$\text{Variante: par équiprobabilité } \text{pr}(2) = \frac{\binom{3}{1} \binom{2}{1}}{\binom{5}{2}}.$$

$$3. \text{pr}(3) = \binom{5}{2} \times \frac{5}{20} \frac{4}{19} \frac{15}{18} \frac{14}{17} \frac{13}{16}.$$

$$\text{Variante: par équiprobabilité } \text{pr}(3) = \frac{\binom{5}{2} \binom{15}{3}}{\binom{20}{5}}.$$

### Exercice 27 Probabilité conditionnelle 1

Dans une population on sait que la probabilité de naissance d'un garçon est de 0.52, et par ailleurs que 2% des filles et 1% des garçons présentent une luxation congénitale de la hanche.

1. On note  $F$  l'évènement "naissance d'une fille" et  $L$  l'évènement "avoir une luxation de la hanche". Dresser le tableau des probabilités des intersections entre  $F, \bar{F}$  et  $L, \bar{L}$ . Les évènements  $F$  et  $L$  sont-ils indépendants?
2. Calculer la probabilité qu'un nouveau-né présentant une luxation soit une fille.

#### Solution

1. On connaît  $\text{pr}(L | F) = 2\%$ ,  $\text{pr}(L | \bar{F}) = 1\%$  donc (en %)

	$L$	$\bar{L}$	
$F$	0.96	47.04	48
$\bar{F}$	0.52	51.48	52
	1.48	98.52	100

On a  $\text{pr}(F) \text{pr}(L) = 0.48 \times 0.0148 \simeq 0.007$  donc un résultat différent de  $\text{pr}(F \cap L) \simeq 0.0096$ : non indépendance.

$$2. \text{pr}(F | L) = \frac{\text{pr}(L | F) \text{pr}(F)}{\text{pr}(L)} \simeq 0.65.$$

### Exercice 28 Probabilité conditionnelle 2

On lance un dé équiprobable à 6 faces un nombre indéterminé de fois indépendamment: on note  $A$  l'évènement "le 5 apparaît avant le 2" et  $E$  l'évènement

"le 5 sort au premier lancer",  $F$  l'évènement "le 2 sort au premier lancer",  $G$  l'évènement  $\overline{E} \cap \overline{F}$ .

1. Calculer  $\text{pr}(A | E)$  et  $\text{pr}(A | F)$ . Exprimer  $\text{pr}(A | G)$  en fonction de  $\text{pr}(A)$ .
2. Calculer  $\text{pr}(A)$ .

#### Solution

1.  $\text{pr}(A | E) = 1$ ,  $\text{pr}(A | F) = 0$ .  
 $\text{pr}(A | \overline{E} \cap \overline{F}) = \text{pr}(A)$  : évidence difficile à justifier rigoureusement.
2. La formule des probabilités totales donne  $\text{pr}(A) = \text{pr}(E) + \text{pr}(A) \text{pr}(\overline{E} \cap \overline{F}) = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} \text{pr}(A)$ , soit  $\text{pr}(A) = \frac{1}{2}$ .  
 Variante: l'univers peut être réduit aux deux issues équiprobables et complémentaires "le 5 sort avant le 2" et "le 2 sort avant le 5", donc  $\text{pr}(A) = \frac{1}{2}$ .

#### **Exercice 29** Formule de Bayes 1

1. Une urne I contient 2 boules rouges et 4 boules noires, une urne II contient 4 boules rouges et 2 boules noires. On tire aléatoirement (équiprobabilité) une boule dans l'urne I ou II et on sort une boule rouge. Pb que la boule sorte de l'urne II.
2. Même question si la probabilité de tirer dans l'urne II est  $\alpha$  et si l'urne I contient une proportion de  $p_1$  boules rouges, l'urne II une proportion de  $p_2$  boules rouges.

#### Solution

On note  $R$  l'évènement "tirer une boule rouge",  $I$  l'évènement "tirer dans l'urne I" et  $II$  l'évènement "tirer dans l'urne II".

1. On a  $\text{pr}(II | R) = \frac{\text{pr}(II \cap R)}{\text{pr}(R)} = \frac{\text{pr}(R | II) \text{pr}(II)}{\text{pr}(R | I) \text{pr}(I) + \text{pr}(R | II) \text{pr}(II)}$  et  $\text{pr}(R | II) = \frac{2}{3}$ ,  $\text{pr}(R | I) = \frac{1}{3}$  donc  $\text{pr}(II | R) = \frac{2}{3}$ .
2.  $\text{pr}(II | R) = \frac{\alpha p_2}{(1-\alpha)p_1 + \alpha p_2}$ .

#### **Exercice 30** Formule de Bayes 2

Une firme a étudié un alcootest dans une population et a pour cela recruté 500 personnes; elle a fait boire 160 d'entre elles et a obtenu les résultats suivants, où  $A$  désigne l'évènement "alcootest positif" et  $I$  l'évènement "individu ivre".

	$I$	$\overline{I}$
$A$	150	18
$\overline{A}$	10	322

1. Calculer les probabilités conditionnelles  $\text{pr}(A | I)$  et  $\text{pr}(\overline{A} | \overline{I})$ .
2. On suppose qu'un individu est ivre avec la probabilité  $p$ . Calculer les probabilités conditionnelles  $\text{pr}(I | A)$  et  $\text{pr}(\overline{I} | \overline{A})$  en fonction de  $p$  et achever les calculs pour  $p = 0.01$ .

#### Solution

1. On a  $\text{pr}(A | I) = \frac{150}{160} \simeq 0.9375$  et  $\text{pr}(\overline{A} | \overline{I}) = \frac{322}{340} \simeq 0.9471$ .

2. On a  $\text{pr}(I) = p$  et  $\text{pr}(A) = \text{pr}(A | I) \times p + \text{pr}(A | \bar{I}) \times (1 - p) \simeq 0.0529 + 0.8846p$  donc

$$\begin{aligned}\text{pr}(I | A) &= \frac{\text{pr}(A | I) \text{pr}(I)}{\text{pr}(A)} \simeq \frac{0.9375p}{0.0529 + 0.8846p} \\ \text{pr}(\bar{I} | \bar{A}) &= \frac{\text{pr}(\bar{A} | \bar{I}) \text{pr}(\bar{I})}{\text{pr}(\bar{A})} \simeq \frac{0.9471(1 - p)}{0.9471 - 0.8846p}.\end{aligned}$$

Pour  $p = 0.01$  on obtient  $\text{pr}(I | A) \simeq 0.152$ ,  $\text{pr}(\bar{I} | \bar{A}) \simeq 0.999$ .

### Exercice 31 Indépendance 1

1. On lance une pièce de monnaie 5 fois de suite indépendamment et on note dans l'ordre l'apparition de PILE ou FACE :  $\text{pr}(\text{PILE}) = 2/3$ . Pb qu'un lancer comporte deux PILE exactement.

2. Une salle contient  $n$  personnes dont les dates de naissance sont indépendantes. Pb qu'une personne (au moins) soit née le même jour que moi.

#### Solution

1.  $\text{pr}(1) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3$ .
2. Passage au complémentaire:  $\text{pr}(2) = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n$ .

### Exercice 32 Indépendance 2

On lance un dé équiprobable à 6 faces un nombre indéterminé de fois indépendamment: on note  $\Omega_n$  l'évènement "le premier 5 est au rang  $n$ " et  $A$  l'évènement le "le 5 apparaît avant le 2". Calculer:

- (i)  $\text{pr}(\Omega_n)$  (ii)  $\text{pr}(A \cap \Omega_n)$  (iii)  $\text{pr}(A)$

#### Solution

- (i)  $\text{pr}(\Omega_n) = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$   
(ii)  $\text{pr}(A \cap \Omega_n) = \frac{1}{6} \left(\frac{4}{6}\right)^{n-1}$   
(iii)  $\text{pr}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{pr}(A \cap \Omega_n) = \frac{1}{2}$

### Exercice 33 Indépendance 3

On considère deux évènements  $A$  et  $B$ ; on résume par le tableau ci-dessous les probabilités des intersections entre  $A, \bar{A}$  et  $B, \bar{B}$ :

	$B$	$\bar{B}$
$A$	$p$	$q$
$\bar{A}$	$r$	$s$

1. Montrer que  $A$  et  $B$  sont indépendants ssi  $ps = qr$ .
2. Montrer que si  $A$  et  $B$  sont indépendants alors il en va de même de  $\bar{A}$  et  $B$ ,  $A$  et  $\bar{B}$ ,  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$ .

#### Solution

1.  $\text{pr}(A \cap B) = p$  et  $\text{pr}(A) \text{pr}(B) = (p + q)(p + r) = p^2 + rp + pq + qr$ . Comme  $p + q + r + s = 1$  on obtient  $\text{pr}(A) \text{pr}(B) = p(1 - s) + qr$  donc l'égalité ssi  $qr - ps = 0$ .

2. Si  $A$  et  $B$  sont indépendants alors:

$$\begin{aligned}\text{pr}(\bar{A} \cap B) &= \text{pr}(B) - \text{pr}(A \cap B) = \text{pr}(B) - \text{pr}(A) \text{pr}(B) = \text{pr}(B) \text{pr}(\bar{A}), \\ \text{pr}(\bar{A} \cap \bar{B}) &= \text{pr}(\bar{A}) - \text{pr}(A \cap \bar{B}) = \text{pr}(\bar{A}) - \text{pr}(B) \text{pr}(\bar{A}) = \text{pr}(\bar{A}) \text{pr}(\bar{B}).\end{aligned}$$

Variante: permuter les rôles de  $p, q, r, s$  puis appliquer 1.

**Exercice 34** Systèmes série et parallèle

On dispose de composants électroniques de même type  $E$ , qui fonctionnent en indépendance totale: on note  $p$  leur taux de panne.

1. On considère les systèmes suivants, où le symbole  $=$  désigne la mise en série et le symbole  $\parallel$  la mise en parallèle:

$$(i) E = (E \parallel E) \quad (ii) (E = E) \parallel E$$

Taux de panne des circuits.

2. On veut améliorer la fiabilité du système  $E = E$  et on hésite entre deux stratégies:

$$(i) (E = E) \parallel (E = E) \quad (ii) (E \parallel E) = (E \parallel E)$$

Déterminer la meilleure stratégie.

Solution

1. On note  $S_\alpha$  tout système de taux de panne  $\alpha$ . Le taux de panne du système  $S_{p_1} = S_{p_2}$  est  $\phi(p_1, p_2) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)$  tandis que celui du système  $S_{p_1} \parallel S_{p_2}$  est  $\psi(p_1, p_2) = p_1 p_2$ .

$$(i) \text{ système } S_p = S_{\psi(p,p)} \text{ donc taux de panne } \phi(p, p^2) = p(1 + p - p^2)$$

$$(ii) \text{ système } S_{\phi(p,p)} \parallel S_p \text{ donc taux de panne } \psi(1 - (1 - p)^2, p) = p^2(2 - p)$$

2. Le taux de panne du système  $E = E$  est  $\phi(p, p) = 1 - (1 - p)^2$  tandis que celui du système  $E \parallel E$  est  $\psi(p, p) = p^2$ .

$$(i) \text{ système } S_{\phi(p,p)} \parallel S_{\phi(p,p)} \text{ donc taux de panne } p_1 = (\phi(p, p))^2 = p^2(2 - p)^2$$

$$(ii) \text{ système } S_{\psi(p,p)} = S_{\psi(p,p)} \text{ donc taux de panne } p_2 = 1 - (1 - \psi(p, p))^2 = p^2(2 - p^2)$$

$$\text{Donc } p_1 - p_2 = 2p^2(1 - p)^2 \geq 0 \text{ pour tout } p.$$

**Statistique I****Exercice 35** Série discrète

Dans un enseignement on a effectué deux partiels: les résultats sont résumés par le tableau des effectifs suivant, où  $n_k$  et  $n'_k$  sont les effectifs correspondants à la note  $x_k$  dans les partiels 1 et 2.

$x_k$	0	5	10	15	20
$n_k$	10	40	20	20	10
$n'_k$	0	20	60	20	0

1. (i) Tracer les diagrammes des fréquences des deux partiels sur un même graphique, et idem pour les FCC.

(ii) Calculer les moyennes  $\mu, \mu'$  et écart-types  $\sigma, \sigma'$  des deux partiels.

2. On pose  $e_k = (x_k - \mu)^2$ ,  $e'_k = (x_k - \mu')^2$ . Tracer les diagrammes des fréquences des séries  $(e_k, n_k)_{k=1..5}$  et  $(e'_k, n'_k)_{k=1..5}$  sur un même graphique (après un éventuel regroupement et réordonnement). Que valent les moyennes de ces séries?

3. (i) On effectue une première normalisation des données par les formules  $y_k = \frac{x_k - \mu}{\sigma}$ ,  $y'_k = \frac{x_k - \mu'}{\sigma'}$ . Tracer les diagrammes des fréquences des séries  $(y_k, n_k)_{k=1..5}$  et  $(y'_k, n'_k)_{k=1..5}$  sur un même graphique. Que valent les moyennes et écart-types de ces séries?

(ii) On effectue une deuxième normalisation des notes en attribuant la note  $z_k$  selon le principe ci-dessous:

$y_k < -1.8$	$-1.8 < y_k < -0.8$	$ y_k  < 0.8$	$0.8 < y_k < 1.8$	$1.8 < y_k$
$y'_k < -1.8$	$-1.8 < y'_k < -0.8$	$ y'_k  < 0.8$	$0.8 < y'_k < 1.8$	$1.8 < y'_k$
0	5	10	15	20

Tracer les diagrammes des fréquences des nouvelles séries sur un même graphique.

#### Solution

1.
 

$x_k$	0	5	10	15	20
(i) $f_k$	0.1	0.4	0.2	0.2	0.1
$f'_k$	0	0.2	0.6	0.2	0

 (ii)  $\mu = 9$ ,  $\sigma^2 = 34$ ,  $\sigma = 5.83$  et  $\mu' = 10$ ,  $\sigma'^2 = 10$ ,  $\sigma' = 3.16$
2.
 

$e_k$	1	16	36	81	121	$e'_k$	0	25	100
$g_k$	0.2	0.4	0.2	0.1	0.1	$g'_k$	0.6	0.4	0

 moyenne = variance des séries précédentes.
3.
 (i)
 

$y_k$	-1.54	-0.69	0.17	1.03	1.89
$f_k$	0.1	0.4	0.2	0.2	0.1
$y'_k$	-3.16	-1.58	0	1.58	3.16
$f'_k$	0	0.2	0.6	0.2	0

 moyenne 0, écart-type 1.
 (ii)
 

$z_k$	0	5	10	15	20
$f_k$	0	0.1	0.6	0.2	0.1
$f'_k$	0	0.2	0.6	0.2	0

#### **Exercice 36** Série continue

Une étude statistique a donné le tableau des fréquences suivant:

$]x_{k-1}, x_k]$	$[3, 5]$	$]5, 6]$	$]6, 9]$	$]9, 15]$
$f_k$	0.2	0.3	0.3	0.2

1. (i) Tracer l'histogramme des fréquences et expliciter la densité  $\mathbf{p}$  sur chaque intervalle.  
 (ii) Utiliser  $\mathbf{p}$  pour calculer  $\text{fr}([4, 7])$ .
2. (i) Tracer le polygone des FCC et expliciter la fonction de répartition  $\mathbf{F}$  sur chaque intervalle.  
 (ii) Estimer la médiane d'après le graphique.  
 (iii) Utiliser  $\mathbf{F}$  pour calculer:  
 $a/\text{fr}([4, 7])$   $b/$  le premier et le troisième quartile

#### Solution

1.
 (i)
 

$x$	$[3, 5]$	$]5, 6]$	$]6, 9]$	$]9, 15]$
$\mathbf{p}(x)$	0.2	0.3	0.3	0.2

$$(ii) \text{ fr } ([4, 7]) = \int_4^7 \mathbf{p}(x) dx = \frac{1}{2} \times 0.2 + 0.3 + \frac{1}{3} \times 0.3 = 0.5.$$

2.

(i)

$$\mathbf{F}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 3 \\ \frac{0.2}{2}(x-3) & 3 \leq x \leq 5 \\ \frac{0.3}{2}(x-5) + 0.2 & 5 \leq x \leq 6 \\ \frac{0.3}{3}(x-6) + 0.5 & 6 \leq x \leq 9 \\ \frac{0.2}{6}(x-9) + 0.8 & 9 \leq x \leq 15 \end{cases}$$

(ii)  $m = 6$ .

(iii)

$$a/ \text{ fr } ([4, 7]) = \mathbf{F}(7) - \mathbf{F}(4) = 0.6 - 0.1 = 0.5.$$

$$b/ \mathbf{F}(q_1) = 0.25 \Leftrightarrow 0.15(x-5) + 0.2 = 0.25 : q_1 = 5.33.$$

$$\mathbf{F}(q_3) = 0.75 \Leftrightarrow 0.1(x-6) + 0.5 = 0.75 : q_3 = 8.5.$$

### Exercice 37 \*\* Courbe de Lorenz

Une étude INSEE a fourni les résultats ci-dessous sur les revenus 2004 (en €) des ménages en France: l'étude a porté sur 24837000 ménages.

% de la population	10%	20%	30%	40%	50%
Revenu <	11477	14408	17581	20942	24599

  

60%	70%	80%	90%	95%
28623	33171	39356	49554	62095

Par exemple 30% des ménages ont gagné moins de 17581 €. Les données concernant les 5% les plus riches de la population ne sont pas fournies: on pourra convenir qu'ils gagnent moins de 110000 €.

1. Calculer le revenu moyen et le revenu total des français.
2. Calculer pour  $k = 1, \dots, 10$  la fraction du revenu total détenue par la  $k$ -ème fraction la plus pauvre de la population.
3. Tracer la courbe de Lorenz à partir de ces données. Donner une estimation de l'indice de Gini.

### Solution

On rajoute la colonne 100%, 110000 et on discrétise le tableau: on connaît donc le revenu moyen  $r_k$  par tranche de  $f_k = 10\%$ , et 5% pour les deux dernières colonnes.

1. Revenu moyen:  $\bar{r} = 28587$  €. Revenu total:  $R = 710$  milliards d'€.

2.

$f_k$	10%	10%	10%	10%	10%
$\frac{N}{R} f_k r_k$	2.0%	4.5%	5.6%	6.7%	8.0%
10%	10%	10%	10%	10%	
9.3%	10.8%	12.7%	15.6%	24.8%	
$F_k$	10%	20%	30%	40%	50%
$R_k$	2.0%	6.5%	12.1%	18.9%	26.8%
60%	70%	80%	90%	100%	
36.1%	46.9%	59.6%	75.2%	100%	

3.

Indice de Gini: on compte les rectangles d'aire 0.02...

### Variables aléatoires I

#### Exercice 38 VA 1

Une urne contient les mots LE, GRANDS, HANCHE, LA, FOU, ROSEAU et on tire un mot dans l'urne: on note  $X$  la longueur du mot tiré,  $Y$  le nombre



de voyelles,  $Z = X - Y$  et  $W$  la variable indicatrice de l'évènement "le mot commence par la lettre L".

1. Déterminer et représenter la loi de chaque VA. Calculer leur espérance et leur variance.

2. Déterminer explicitement les évènements  $\{X \geq 3\}$ ,  $\{Y \leq 3\}$ ,  $\{X \geq 3 \text{ et } Y \leq 3\}$ ,  $\{Y > Z\}$ ,  $\{\max(Y, Z) = 2\}$  puis calculer leur probabilité.

#### Solution

1.  $\Omega = \{LE, GRANDS, HANCHE, LA, FOU, ROSEAU\}$ ,  $|\Omega| = 6$ , équiprobabilité.

$Z$  = nombre de consonnes.

$x$	0	1	2	3	4	5	6
-----	---	---	---	---	---	---	---

$\mathbf{p}_X(x)$	0	0	2/6	1/6	0	0	3/6
-------------------	---	---	-----	-----	---	---	-----

$y$	0	1	2	3	4	5	6
-----	---	---	---	---	---	---	---

$\mathbf{p}_Y(y)$	0	3/6	2/6	0	1/6	0	0
-------------------	---	-----	-----	---	-----	---	---

$z$	0	1	2	3	4	5	6
-----	---	---	---	---	---	---	---

$\mathbf{p}_Z(z)$	0	3/6	1/6	0	1/6	1/6	0
-------------------	---	-----	-----	---	-----	-----	---

$w$	0	1	2	3	4	5	6
-----	---	---	---	---	---	---	---

$\mathbf{p}_W(w)$	4/6	2/6	0	0	0	0	0
-------------------	-----	-----	---	---	---	---	---

$\mathbf{E}(X) = 4.17$ ,  $\sigma^2(X) = 3.47$ ,  $\mathbf{E}(Y) = 1.83$ ,  $\sigma^2(Y) = 1.14$ .

$\mathbf{E}(Z) = 2.33$ ,  $\sigma^2(Z) = 2.56$ ,  $\mathbf{E}(W) = 0.33$ ,  $\sigma^2(W) = 0.22$ .

2.

$\{X \geq 3\} = \{GRANDS, HANCHE, FOU, ROSEAU\} : \text{pr}(X \geq 3) = \frac{4}{6}$ .

$\{Y \leq 3\} = \{LE, GRANDS, LA, HANCHE, FOU\} : \text{pr}(Y \leq 3) = \frac{5}{6}$ .

$\{X \geq 3 \text{ et } Y \leq 3\} = \{GRANDS, HANCHE, FOU\} : \text{pr}(X \geq 3 \text{ et } Y \leq 3) = \frac{3}{6} \neq \text{pr}(X \geq 3) \text{pr}(Y \leq 3)$ .

$\{Y > Z\} = \{FOU, ROSEAU\} : \text{pr}(Y > Z) = \frac{2}{6}$ .

$\{\max(Y, Z) = 2\} = \{FOU\} : \text{pr}(\max(Y, Z) = 2) = \frac{1}{6}$ .

**Exercice 39** VA 2

1. On tire 2 boules avec remise dans une urne contenant 3 boules numérotées 1, 2, 3 : on note  $X$  la somme des chiffres apparus. Loi, fonction de répartition et espérance de  $X$ .
2. Idem si tirage sans remise.

Solution

1.  $\Omega$  = suites avec répétitions de 2 parmi 3,  $|\Omega| = 3^2$ , équiprobabilité.

$x$	2	3	4	5	6
$\mathbf{p}_X(x)$	1/9	2/9	3/9	2/9	1/9
$\mathbf{F}_X(x)$	1/9	3/9	6/9	8/9	1

$$\mathbf{E}(X) = 4.$$

2.  $\Omega$  = suites sans répétitions de 2 parmi 3,  $|\Omega| = A_3^2$ , équiprobabilité.

$x$	3	4	5
$\mathbf{p}_X(x)$	1/3	1/3	1/3
$\mathbf{F}_X(x)$	1/3	2/3	1

$$\mathbf{E}(X) = 4.$$

**Exercice 40** \* VA 3

1. On permute les lettres du mot *BABAR* et on note  $X$  le nombre de *A* par lequel commence le mot obtenu. Loi et espérance de  $X$ .
2. 4 personnes assises sur 4 chaises se lèvent puis se rasseoient aléatoirement: on note  $X$  le nombre personnes qui retrouvent leur chaise. Loi et espérance de  $X$ .
3. Une salle contient 3 personnes et on note  $X$  le nombre de personnes qui sont nées le même mois. Loi et espérance de  $X$ .

Solution

1.  $\Omega$  = permutations de  $\{B_1, A_1, B_2, A_2, R\}$ ,  $|\Omega| = 5!$ , équiprobabilité.

$x$	0	1	2
$\mathbf{p}_X(x)$	3/5	3/10	1/10

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{2}.$$

2.  $\Omega$  = permutations de  $E_4$ ,  $|\Omega| = 4!$ , équiprobabilité.

La probabilité qu'une permutation de  $E_n$  soit sans point fixe est  $p_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ , donc le nombre de telles permutations est  $n! \times p_n$  : il y a  $\binom{n}{k}$  manières de choisir  $k$  points fixes et  $(n-k)! \times p_{n-k}$  permutations qui ne laissent pas les autres points invariants donc  $\text{pr}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot \frac{(n-k)! \times p_{n-k}}{n!} = \frac{p_{n-k}}{k!}$ .

$$\text{Ici } p_2 = \frac{1}{2}, p_3 = \frac{1}{3}, p_4 = \frac{3}{8}.$$

$x$	0	1	2	4
$\mathbf{p}_X(x)$	9/24	8/24	6/24	1/24

$$\mathbf{E}(X) = 1.$$

3.  $\Omega$  = applications de 3 dans 12,  $|\Omega| = 12^3$ , équiprobabilité.

$x$	0	2	3
$\mathbf{p}_X(x)$	$A_{12}^3/12^3$	$3 \cdot A_{12}^2/12^3$	$A_{12}^1/12^3$

**Exercice 41** VA standards 1

1. On lance une pièce de monnaie équiprobable 4 fois de suite indépendamment et on note dans l'ordre l'apparition de *PILE* ou *FACE* : on note  $X$  le nombre de *PILE* apparus. Loi et espérance de  $X$ .

2. Une urne contient 2 boules rouges et 1 boule noire et on tire avec remise 4 boules: on note  $X$  le nombre de boules rouges obtenues. Loi de  $X$ .

3. Dans une loterie on tire sans remise 3 nombres parmi les nombres  $1, \dots, 5$ : on ne tient pas compte de l'ordre et il y a 3 bons numéros parmi les 5. On note  $X$  le nombre de bons numéros obtenus. Loi et espérance de  $X$ .

4. Un groupe de 10 personnes est composé de 4 hommes et 6 femmes et on choisit 5 personnes: on note  $X$  le nombre d'hommes et  $Y$  celui de femmes. Loi de  $X$  et  $Y$ .

#### Solution

1. Arbre de choix ou équiprobabilité.

$$\mathbf{p}_X(k) = \binom{4}{k} \cdot \frac{1}{2^4} \text{ pour } k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

$$\mathbf{E}(X) = 2.$$

2. Arbre de choix ou équiprobabilité.

$$\mathbf{p}_X(k) = \binom{4}{k} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{4-k} \text{ pour } k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

$$\mathbf{E}(X) = \frac{8}{3}.$$

3. Arbre de choix ou équiprobabilité.

$$\mathbf{p}_X(k) = \frac{\binom{3}{k} \binom{2}{3-k}}{\binom{5}{3}} \text{ pour } k = 1, 2, 3.$$

$$\mathbf{E}(X) = 1.8.$$

4. Arbre de choix ou équiprobabilité.

$$\mathbf{p}_X(k) = \frac{\binom{4}{k} \binom{6}{5-k}}{\binom{10}{5}} \text{ pour } k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

$$Y = 5 - X \text{ donc } \mathbf{p}_Y(k) = \mathbf{p}_X(5 - k) \text{ pour } k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

#### **Exercice 42** VA standards 2

1. On lance une pièce équiprobable un nombre indéterminé de fois indépendamment.

(i) On note  $X$  le rang du premier PILE apparue. Loi de  $X$ .

(ii) On note  $Y$  le rang du deuxième PILE apparue. Loi de  $Y$ .

2. Idem si  $\text{pr}(PILE) = 1/3$ .

#### Solution

1. Indépendance des lancers.

$$(i) \mathbf{p}_X(k) = \frac{1}{2^k} \text{ pour } k = 1, 2, \dots$$

$$(ii) \mathbf{p}_Y(k) = (k-1) \cdot \frac{1}{2^k} \text{ pour } k = 2, 3, \dots$$

2. Indépendance des lancers.

$$(i) \mathbf{p}_X(k) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \text{ pour } k = 1, 2, \dots$$

$$(ii) \mathbf{p}_Y(k) = (k-1) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \text{ pour } k = 2, 3, \dots$$

#### **Exercice 43** \* Probabilités conditionnelles

On effectue un tirage successif avec remise dans une urne qui contient  $n$  boules discernables: on arrête dès que l'on tire une boule déjà obtenue auparavant. On note  $X$  le nombre de tirages.

1. Calculer  $\text{pr}(X > k \mid X > k-1)$  puis  $\text{pr}(X > k)$ . En déduire la loi de  $X$ : application au cas  $n = 4$ .

2. Calculer directement  $\text{pr}(X = k)$ .

### Solution

1.  $\{X > k-1\}$  signifie que l'on a déjà tiré  $k-1$  boules distinctes, donc il en reste  $n - (k-1)$  non encore tirées:  $\text{pr}(X > k \mid X > k-1) = \frac{n-(k-1)}{n}$  donc  $\text{pr}(X > k) = \prod_{j=2}^k \text{pr}(X > j \mid X > j-1) = \frac{A_n^k}{n^k}$ .

$$\mathbf{p}_X(k) = \text{pr}(X > k-1) - \text{pr}(X > k) = (k-1) \cdot \frac{A_n^{k-1}}{n^k} \text{ pour } k = 2, 3, \dots, n+1.$$

Cas  $n = 4$  :

$k$	2	3	4	5
$\mathbf{p}_X(k)$	16/64	24/64	18/64	6/64

2. Raisonnement par équiprobabilité. On effectue  $k$  tirages avec remise, donc  $|\Omega| = n^k$ . L'évènement  $\{X = k\}$  est l'ensemble des suites formées de  $k-1$  boules distinctes parmi  $n$  suivies d'une boule déjà obtenue parmi ces  $k-1$  : il y en a donc  $(k-1) \cdot A_n^{k-1}$ .

#### Exercice 44 Espérance

Un joueur parie et mise sur un chiffre compris entre 1 et 6 puis lance 3 dés équiprobables à 6 faces: il gagne  $k$  euros si le chiffre choisi apparaît  $k$  fois et perd 1 euro s'il n'apparaît pas. On note  $X$  le nombre de fois où le chiffre choisi apparaît et  $G$  le gain du joueur.

1. Donner la loi de  $X$  et  $G$  puis calculer l'espérance de gain  $\mu$  du joueur.
2. Le gain du joueur est désormais  $G' = G^2 - \mu^2$ . Calculer son espérance.

### Solution

Soit  $p = \frac{1}{6}$  la probabilité que le numéro choisi sorte sur un dé,  $q = 1 - p$ .

1.  $X$  peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3 avec les probabilités  $\mathbf{p}_X(k) = \binom{3}{k} \cdot p^k q^{3-k}$  :
- |                   |                              |   |   |                              |
|-------------------|------------------------------|---|---|------------------------------|
| $k$               | 0                            | 1   | 2   | 3                            |
| $\mathbf{p}_X(k)$ | $\left(\frac{5}{6}\right)^3$ | $3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^2$ | $3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)$ | $\left(\frac{1}{6}\right)^3$ |
- $G$  vaut  $-1, 1, 2, 3$  si  $X = 0, 1, 2, 3$  et  $\mathbf{p}_G(-1) = \mathbf{p}_X(0)$ ,  $\mathbf{p}_G(k) = \mathbf{p}_X(k)$  si  $k = 1, 2, 3$  : donc  $E(G) = -\frac{17}{216}$ .
2.  $\mathbf{E}(G') = \mathbf{V}(G) = \sum_{k=-1,1,2,3} k^2 \cdot \mathbf{p}_G(k) - \mu^2 \simeq 1.24$ .

## Variables aléatoires II

#### Exercice 45 VA indépendantes 1

Un gène peut présenter deux caractères, dominant  $D$  et récessif  $R$  : on suppose que chacun présente le caractère  $D$  avec la même probabilité  $p$ .

1. On considère deux gènes  $X, Y$  indépendants. Calculer la probabilité qu'un gène au moins ait le caractère  $D$ .
2. On considère  $n$  gènes  $X_1, \dots, X_n$  indépendants. Calculer la probabilité que deux gènes au moins aient le caractère  $D$ .

### Solution

1.  $X, Y$  sont des copies indépendantes de la VA indicatrice du caractère  $D$  :  $\text{pr}(X = 1) = \text{pr}(Y = 1) = p$ . Passage au complémentaire:  $\text{pr}(X = 1 \text{ ou } Y = 1) = 1 - (1 - p)^2$ .
2.  $\text{pr}(2) = 1 - (1 - p)^n$ .

**Exercice 46** \* VA indépendantes 2

Un étudiant passe 2 examens, supposés indépendants. On note  $X$  et  $Y$  ses notes au premier et deuxième examen. Les notes peuvent prendre les valeurs normalisées et équiprobables 1, 2, 3, 4, 5.

1. Déterminer la loi conjointe et la fonction de répartition conjointe de  $(X, Y)$ .
2. Calculer les probabilités  $\text{pr}(X = Y)$ ,  $\text{pr}(X > Y)$ ,  $\text{pr}(X < Y)$ .
3. On pose  $U = \max(X, Y)$ ,  $V = \min(X, Y)$ .
  - (i) Calculer la probabilité  $\text{pr}(U \leq k)$ . En déduire la loi et l'espérance de  $U$ .
  - (ii) Adopter un raisonnement analogue pour la loi et l'espérance de  $V$ .

Solution

1.  $\mathbf{p}_X(k) = \mathbf{p}_Y(k) = \mathbf{p}(k) = \frac{1}{5}$  pour  $k = 1, 2, \dots, 5$  et  $\mathbf{p}_{X,Y}(i, j) = \mathbf{p}(i)\mathbf{p}(j) = \frac{1}{5^2}$ .  
 $\mathbf{F}_X(k) = \mathbf{F}_Y(k) = \mathbf{F}(k) = \frac{k}{5}$  pour  $k = 1, 2, \dots, 5$  et  $\mathbf{F}_{X,Y}(i, j) = \mathbf{F}(i)\mathbf{F}(j) = \frac{ij}{5^2}$ .
2.  $\text{pr}(X = Y) = \sum_{k=1}^5 \mathbf{p}_{X,Y}(k, k) = 5 \cdot \frac{1}{5^2} = \frac{1}{5}$ .  
 $\text{pr}(X > Y) = \sum_{i=2}^5 \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{p}_{X,Y}(i, j) = (1 + 2 + 3 + 4) \cdot \frac{1}{5^2} = \frac{2}{5}$ .  
 $\text{pr}(X < Y) = \text{pr}(X > Y)$  pour des raisons de symétrie ou par complémentaire.  
 Variante: argument de symétrie a priori donne  $2\text{pr}(X > Y) = 1 - \text{pr}(X = Y)$ .
3.
  - (i)  $\{U \leq k\} = \{X \leq k, Y \leq k\}$  donc  $\text{pr}(U \leq k) = \frac{k^2}{5^2}$ , valable pour  $k = 0, 1, \dots, 5$ .  
 $\mathbf{p}_U(k) = \text{pr}(U \leq k) - \text{pr}(U \leq k-1) = \frac{2k-1}{5^2}$ .
  - (ii)  $\{V \geq k\} = \{X \geq k, Y \geq k\}$  donc  $\text{pr}(V \geq k) = \frac{(5-k+1)^2}{5^2}$ , valable pour  $k = 1, 2, \dots, 6$ .  
 $\mathbf{p}_V(k) = \text{pr}(V \geq k) - \text{pr}(V \geq k+1) = \frac{11-2k}{5^2}$ .

**Exercice 47** Loi conjointe 1

On tire sans remise 3 boules dans une urne qui en contient 2 rouges et 4 noires: on note  $X$  le nombre des boules rouges tirées et  $Y$  le rang de la première boule noire.

Déterminer les lois de  $X$  et  $Y$  puis leur loi conjointe. Les VA sont elles indépendantes?

Solution

	$x$	0	1	2
$\mathbf{P}_X :$	$\mathbf{p}_X(x)$	4/20	12/20	4/20
	$y$	1	2	3
$\mathbf{P}_Y :$	$\mathbf{p}_Y(y)$	20/30	8/30	2/30
	$x, y$	1	2	3
	0	24/120	0	0
$\mathbf{p}_{X,Y} :$	1	48/120	24/120	0
	2	8/120	8/120	8/120

Non indépendance car  $\mathbf{p}_{X,Y}(0, 3) \neq \mathbf{p}_X(0)\mathbf{p}_Y(3)$ .

**Exercice 48** \*\* Loi conjointe 2

Deux VA  $X$  et  $Y$  prennent les valeurs 1, 2, 3.

1. On donne la loi conjointe  $\mathbf{p}_{X,Y}(i, j) = \frac{\alpha}{ij}$ , où  $\alpha$  est un réel convenable.

(i) Déterminer les lois marginales de  $(X, Y)$ . Les VA sont-elles indépendantes?

(ii) Espérance de  $X, Y, S = X + Y$  et  $P = XY$ .

2. Idem si  $\mathbf{p}_{X,Y}(i, j) = \frac{\alpha}{i+j}$ .

Solution

1.

(i) On note  $\gamma = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{j} = \frac{11}{6} : \alpha = \gamma^{-2}$ .

	$i, j$	1	2	3
$\mathbf{p}_{X,Y} :$	1	$\alpha$	$\alpha/2$	$\alpha/3$
	2	$\alpha/2$	$\alpha/4$	$\alpha/6$
	3	$\alpha/3$	$\alpha/6$	$\alpha/9$

$X$  et  $Y$  ont même loi  $\mathbf{p} : \mathbf{p}(i) = \sum_{j=1}^3 \frac{\alpha}{ij} = \frac{\alpha}{i} \cdot \sum_{j=1}^3 \frac{1}{j} = \frac{1}{\gamma i}$ .

Indépendance car  $\mathbf{p}_{X,Y}(i, j) = \mathbf{p}_X(i) \mathbf{p}_Y(j)$ .

(ii)  $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y) = \frac{3}{\gamma} \simeq 1.6$ .

$\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y) = \frac{6}{\gamma} \simeq 3.3$ .

$\mathbf{E}(P) = \mathbf{E}(X) \mathbf{E}(Y) = \frac{9}{\gamma^2} \simeq 2.7$ .

2.

$\alpha = \frac{60}{149}$ .

	$i, j$	1	2	3
$\mathbf{p}_{X,Y} :$	1	$\alpha/2$	$\alpha/3$	$\alpha/4$
	2	$\alpha/3$	$\alpha/4$	$\alpha/5$
	3	$\alpha/4$	$\alpha/5$	$\alpha/6$

$X$  et  $Y$  ont même loi  $\mathbf{p} :$

$k$	1	2	3
$\mathbf{p}(k)$	$\alpha \cdot \frac{65}{60}$	$\alpha \cdot \frac{47}{60}$	$\alpha \cdot \frac{37}{60}$

Non indépendance car  $\mathbf{p}_{X,Y}(1, 1) \neq \mathbf{p}(1) \mathbf{p}(1)$ .

(ii)  $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y) = \frac{9}{2}\alpha \simeq 1.8$ .

$\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y) = 9\alpha \simeq 3.6$ .

$\mathbf{E}(P) = \sum_{1 \leq i, j \leq 3} ij \cdot \mathbf{p}_{X,Y}(i, j) = \alpha \left( \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{10}{4} + \frac{12}{5} + \frac{9}{6} \right)$ .

**Exercice 49** \*\* Epreuves indépendamment répétées

1. On tire 4 boules avec remise dans une urne qui contient 2 boules rouges et 3 boules noires: on note  $X_k$  la VA indicatrice de l'évènement "la  $k$ -ème boule est rouge". On note  $S = \sum_{k=1}^4 X_k$  et  $F = \frac{1}{4}S$ . Loi, espérance et variance de  $S$  et  $F$ .

2. On effectue 3 lancers successifs et indépendants d'un dé équiprobable à 6 faces: on désigne par  $X_k$  le chiffre apparu au lancer  $k$ .

Loi conjointe de  $(X_1, X_2, X_3)$  et probabilités  $\text{pr}(X_1 = X_2 = X_3)$ ,  $\text{pr}(X_1 < X_2 < X_3)$ .

Solution

1.  $\mathbf{p}_S(k) = \binom{4}{k} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{4-k}$  pour  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ .

$\mathbf{E}(S) = \frac{8}{5}$ ,  $\mathbf{V}(S) = \frac{24}{25}$ .

$\mathbf{p}_F(x) = \mathbf{p}_S(4x)$  pour  $x = 0, 1/4, 2/4, 3/4, 1$ .

$$\mathbf{E}(F) = \frac{1}{4}, \mathbf{E}(S) = \frac{2}{5}, \mathbf{V}(F) = \frac{1}{16}, \mathbf{V}(S) = \frac{6}{100}.$$

2. On note  $\mathbf{p}$  la loi commune de  $X_1, X_2, X_3$  :  $\mathbf{p}(k) = \frac{1}{6}$  pour  $k = 1, 2, \dots, 6$ .

$$\mathbf{p}_{X_1, X_2, X_3}(i, j, k) = \mathbf{p}(i) \mathbf{p}(j) \mathbf{p}(k) = \frac{1}{6^3} \text{ pour } 1 \leq i, j, k \leq 6.$$

$$\text{pr}(X_1 = X_2 = X_3) = \sum_{k=1}^6 \mathbf{p}_{X_1, X_2, X_3}(k, k, k) = 6 \cdot \frac{1}{6^3}.$$

$$\text{pr}(X_1 < X_2 < X_3) = \sum_{k=1}^6 \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{p}_{X_1, X_2, X_3}(i, j, k) = 20 \cdot \frac{1}{6^3}.$$

Variante: il y a  $\binom{6}{3}$  suites strictement croissantes (donc sans répétition) 3 parmi 6; par équiprobabilité on retrouve le résultat.

### Exercice 50 Espérance 1

Un QCM à  $n$  questions et  $p = 4$  réponses par question est noté de la manière suivante:  $+1$  point si la réponse est bonne,  $-\alpha$  points si la réponse est mauvaise. Un étudiant répond aléatoirement au questionnaire et indépendamment à chaque question: on note  $X_k = 1$  si la réponse  $k$  est bonne,  $X_k = 0$  sinon.

1. Exprimer la note  $N_k$  de la réponse  $k$  comme fonction affine  $aX_k + b$ .
2. Déterminer la loi et l'espérance de  $X_k$  puis de la note globale. En déduire les valeurs de  $\alpha$  nécessaires pour pénaliser les réponses au hasard.

#### Solution

1.  $a + b = 1$ ,  $b = -\alpha$  donc la note  $N_k = (1 + \alpha) X_k - \alpha$ .

2. On a  $\mathbf{p}_{X_k}(1) = \frac{1}{p}$ ,  $\mathbf{p}_{X_k}(0) = 1 - \frac{1}{p}$  donc  $\mathbf{E}(X_k) = \frac{1}{p}$ .

La note globale est  $N = \sum_{k=1}^n N_k$  donc  $\mathbf{E}(N) = (1 + \alpha) \cdot \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(X_k) - n\alpha = \frac{n}{p} (1 + \alpha (1 - p))$  :  $\mathbf{E}(N) < 0 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{p-1} = \frac{1}{3}$ .

### Exercice 51 \* Espérance 2

Dans une population nombreuse une maladie affecte chaque individu avec la probabilité  $1 - p = 0.2$ . On veut détecter cette maladie à l'aide d'une analyse sanguine et on a le choix entre deux stratégies:

- faire une analyse individuelle de chaque individu.
- regrouper les prélèvements sanguins de  $r$  personnes et analyser cet échantillon; si le test est négatif cela signifie que les  $r$  individus sont sains sinon on refait une analyse individuelle pour détecter le ou les individus malades.

On note  $X_1(r)$  et  $X_2(r)$  le nombre d'analyses par individu lors des première et deuxième stratégies.

1. Déterminer la loi de  $X_1(r)$  et  $X_2(r)$  ainsi que leur espérance. En déduire l'espérance de  $G(r) = X_1(r) - X_2(r)$ .
2. Donner une condition sur  $r$  pour que cette espérance soit positive.

#### Solution

1.  $\text{pr}(X_1(r) = 1) = 1$  et  $\text{pr}(X_2(r) = 1/r) = p^r$ ,  $\text{pr}(X_2(r) = 1 + 1/r) = 1 - p^r$ .

$$\mathbf{E}(X_1(r)) = 1, \mathbf{E}(X_2(r)) = \frac{1}{r} \cdot p^r + \left(1 + \frac{1}{r}\right) (1 - p^r), \text{ donc } \mathbf{E}(G(r)) = \mathbf{E}(X_1(r)) - \mathbf{E}(X_2(r)) = p^r - \frac{1}{r}.$$

2.  $\mathbf{E}(G(r)) \geq 0$  ssi  $p \geq r^{-1/r}$  :  $r \in [2, 10]$ .

### Exercice 52 \*\* Espérance 3

On définit sur l'ensemble des permutations de  $E_n$  la VA  $S_n$  égale au nombre de points fixes d'une permutation.

1. On note  $X_k$  la VA indicatrice de l'évènement "k est un point fixe" pour  $k = 1, \dots, n$ . Calculer  $\mathbf{E}(X_k)$  puis  $\mathbf{E}(X_i X_j)$ . Les VA  $X_i$  et  $X_j$  sont-elles indépendantes?
2. Exprimer  $S_n$  à l'aide des  $X_k$ . Calculer  $\mathbf{E}(S_n)$  puis  $\sigma^2(S_n)$ .

Solution

1.  $\mathbf{E}(X_k) = \text{pr}(X_k = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$ .  
 $\mathbf{E}(X_i X_j) = \text{pr}(X_i = 1, X_j = 1) = \frac{1}{n}$  si  $i = j$ ,  $\frac{1}{n(n-1)}$  sinon.  
 $\mathbf{E}(X_i X_j) \neq \mathbf{E}(X_i) \mathbf{E}(X_j)$  pour tous  $i, j$  donc VA non indépendantes.
2.  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$  donc  $\mathbf{E}(S_n) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(X_k) = 1$ .  
 $\sigma^2(S_n) = \mathbf{E}(S_n^2) - (\mathbf{E}(S_n))^2 = 1$  car  $\mathbf{E}(S_n^2) = \sum_{i \neq j} \mathbf{E}(X_i X_j) + \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i^2)$   
 $= 2$ .

**Lois discrètes finies**

**Exercice 53** Loi binomiale 1

1. Deux joueurs s'affrontent dans un sport: le joueur 1 est plus faible que le joueur 2, et n'a qu'une probabilité  $p = 0.4$  de gagner. On suppose que les joueurs jouent 5 parties indépendantes et on note  $X$  le nombre de parties gagnées par le joueur 1.
  - (i) Déterminer la loi et l'espérance de  $X$ .
  - (ii) Calculer la probabilité que le joueur 1 gagne plus de la moitié des parties.
2. Un canal de transmission véhicule des 0 et des 1: à chaque seconde le chiffre transmis a une probabilité  $p = 0.2$  d'être modifié en son contraire. On note  $X$  le nombre de changements en 10 secondes.
  - (i) Déterminer la loi et l'espérance de  $X$ .
  - (ii) Calculer la probabilité que le chiffre reçu soit identique au chiffre émis au bout de 10 secondes.



### Solution

1.
    - (i)  $X$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(5, p)$  donc  $\mathbf{p}_X(k) = \binom{5}{k} p^k q^{5-k}$  pour  $k = 0, 1, \dots, 5$ .  
 $\mathbf{E}(X) = 2$ .
    - (ii)  $\text{pr}(X \geq 3) = \sum_{k=3}^5 \binom{5}{k} p^k q^{5-k} \simeq 0.32$ .
  2.
    - (i)  $X$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(10, p)$  donc  $\mathbf{p}_X(k) = \binom{10}{k} p^k q^{10-k}$  pour  $k = 0, 1, \dots, 10$ .  
 $\mathbf{E}(X) = 2$ .
    - (ii)  $\text{pr}(ii) = \text{pr}(X \text{ est pair}) = \sum_{k=0}^5 \binom{10}{2k} p^{2k} q^{10-2k} \simeq 0.50$ .
- Remarque: cf exercice suivant  $\text{pr}(X \text{ est pair}) = \frac{1}{2} [1 + (q - p)^{10}]$ .

### **Exercice 54** \* Loi binomiale 2

1. Dans un jury chaque membre prend sa décision indépendamment des autres et cette décision est correcte avec la probabilité  $\theta = 0.7$  : pour qu'un jugement soit exécutoire il faut qu'au moins 8 des 12 membres du jury prennent la même décision. On note  $X$  le nombre de décisions correctes parmi les 12 membres du jury.

- (i) Déterminer la loi et l'espérance de  $X$ .
- (ii) Calculer la probabilité d'une sentence juste sachant que l'inculpé est coupable, puis sachant qu'il est innocent.

2. On lance une pièce 10 fois de suite: la probabilité de PILE est  $p = 0.4$ . On note  $X$  le nombre de PILE,  $Y$  le nombre de FACE et  $Z = X - Y$ .

- (i) Déterminer la loi de  $X, Y$  et  $Z$ .
- (ii) Calculer l'espérance de  $Z$  et la probabilité  $\text{pr}(Z = 0)$ .

### Solution

1.
  - (i)  $X$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(12, \theta)$  donc  $\mathbf{p}_X(k) = \binom{12}{k} \theta^k (1 - \theta)^{12-k}$  pour  $k = 0, 1, \dots, 12$ .  
 $\mathbf{E}(X) = 8.4$ .
  - (ii) Si l'accusé est coupable une sentence juste signifie que au moins 8 jurys le désignent coupable, donc qu'ils prennent une décision correcte: probabilité  $\text{pr}(X \geq 8) = \sum_{k=8}^{12} \binom{12}{k} \theta^k (1 - \theta)^{12-k} \simeq 0.72$ .  
Si l'accusé est innocent une sentence juste signifie que moins de 8 jurys le désignent coupable, donc que au moins 5 prennent une décision correcte: probabilité  $\text{pr}(X \geq 5) = \sum_{k=5}^{12} \binom{12}{k} \theta^k (1 - \theta)^{12-k} \simeq 0.99$ .
2.
  - (i)  $X$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(10, p)$  donc  $\mathbf{p}_X(k) = \binom{10}{k} p^k q^{10-k}$  pour  $k = 0, 1, \dots, 10$ .  
 $Y$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(10, q)$  donc  $\mathbf{p}_Y(k) = \binom{10}{k} q^k p^{10-k}$  pour  $k = 0, 1, \dots, 10$ .  
 $X + Y = 10$  donc  $Z = 2X - 10$  :  $Z$  ne prend que les valeurs paires  $-10, -8, \dots, 8, 10$  et  $\text{pr}(Z = 2k) = \text{pr}(X = 5 + k) = \binom{10}{k+5} p^{5+k} q^{5-k}$  pour  $k = -5, \dots, 5$ .
  - (ii)  $\mathbf{E}(Z) = 2\mathbf{E}(X) - 10 = -2$ .  
 $\text{pr}(Z = 0) = \binom{10}{5} (pq)^5 \simeq 0.20$ .

**Exercice 55** \*\* Loi binomiale 3

1. On suppose que  $X$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$ .
  - (i) Montrer que  $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} \cdot p^{2k} q^{n-2k} = \frac{1}{2} [(q+p)^n + (q-p)^n]$ .
  - (ii) Montrer que  $\text{pr}("X \text{ est pair}") = \frac{1}{2} [1 + (q-p)^n]$ .
2. On suppose que  $X$  et  $Y$  sont deux VA binomiales indépendantes de paramètres respectifs  $(n, p)$  et  $(m, p)$ .
  - (i) Montrer que  $\sum_{k=0}^r \binom{n}{k} \binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r}$ , avec la convention  $\binom{s}{t} = 0$  si  $t < 0$  ou  $t > s$ .
  - (ii) Montrer que  $X + Y$  est une VA binomiale de paramètres  $(n+m, p)$ .

Solution

1.
  - (i) Développer et distinguer les cas  $n$  pair et  $n$  impair.
  - (ii)  $p + q = 1$ .
2.
  - (i)  $\binom{n+m}{r}$  est le coefficient binomial de  $a^r b^{n+m-r}$  dans le développement de  $(a+b)^{n+m} = (a+b)^n (a+b)^m$ .  
 Calcul analytique: on développe.  
 Calcul combinatoire: disjonction des cas.  
 $\sum_{k=0}^r \binom{n}{k} \binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r}$
  - (ii)  $\text{pr}(X + Y = r) = \sum_{k=0}^r \text{pr}(X = k) \text{pr}(Y = r - k) = p^r q^{n+m-r} \cdot \binom{n+m}{r}$ .

**Exercice 56** Loi hypergéométrique 1

Un électricien achète des composants par paquets de 10 : dans chaque paquet il teste au hasard 3 composants et accepte le paquet si ces trois là sont sans défaut. On note  $N_1$  le nombre de composants défectueux dans ce paquet et  $X_{N_1}$  le nombre de composants défectueux sur les 3 tirés parmi 10 du paquet

1. Déterminer la loi de  $X_{N_1}$  lorsque  $N_1 = 1$  et lorsque  $N_1 = 4$ .
2. On suppose que 30% des paquets contiennent 4 composants défectueux et que les 70% restant n'en contiennent qu'un: calculer la proportion des paquets qui seront rejetés.

Solution

1.  $X_{N_1}$  suit une loi hypergéométrique  $\mathcal{H}(10, N_1, 3)$  donc  $\mathbf{p}_{X_{N_1}}(k) = \frac{\binom{N_1}{k} \binom{10-N_1}{3-k}}{\binom{10}{3}}$  avec les conventions du cours.
 

Si $N_1 = 1$ :	$x$	0	1
	$\mathbf{p}_{X_1}(x)$	7/10	3/10

  

Si $N_1 = 4$ :	$x$	0	1	2	3
	$\mathbf{p}_{X_4}(x)$	5/30	15/30	9/30	1/30
2. On note  $A_k$  l'évènement "le paquet contient  $k$  composants défectueux":  
 $\text{pr}(\text{"accepter"}) = \text{pr}(X_4 = 0 \mid A_4) \text{pr}(A_4) + \text{pr}(X_1 = 0 \mid A_1) \text{pr}(A_1) = 0.54$   
 donc  $\text{pr}(\text{"rejet"}) = 0.46$ .

**Exercice 57** \* Loi hypergéométrique 2

On tire  $n = 3$  boules sans remise dans une urne qui en contient  $N = 5$  : les boules sont numérotées 1, 2, ...,  $N$ . On note  $M$  le plus grand numéro tiré.

1. Calculer la probabilité que tous les numéros tirés soient inférieurs ou égaux à  $m$ . En déduire la probabilité  $\text{pr}(M \leq m)$ .
2. Déterminer la loi et l'espérance de  $M$ .

### Solution

$$\begin{aligned}
 1. \quad \text{pr}(1) &= \frac{\binom{m}{n}}{\binom{N}{n}} \text{ si } n \leq m, \quad 0 \text{ sinon.} \\
 \text{pr}(M \leq m) &= \frac{\binom{m}{n}}{\binom{N}{n}} \text{ si } m = n, n+1, \dots, N. \\
 2. \quad \mathbf{p}_M(m) &= \text{pr}(M \leq m) - \text{pr}(M \leq m-1) = \frac{\binom{m-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} \text{ si } m = n, n+1, \dots, N. \\
 \mathbf{p}_M(m) &= \frac{m-1}{N-1} \cdot \frac{\binom{m-1}{n-1}}{\binom{N-1}{n-1}} \\
 \mathbf{E}(M) &= \frac{1}{\binom{N}{n}} \cdot \sum_{m=n}^N m \cdot \binom{m-1}{n-1} = \frac{n}{\binom{N}{n}} \cdot \sum_{m=n}^N \binom{m-1}{n-1} = \frac{9}{2}.
 \end{aligned}$$

### **Exercice 58** Approximation binomiale d'une loi hypergéométrique

Une société imprime  $N$  tickets, dont 1% sont gagnants: elle les vend par lots de 10. On note  $X_N$  le nombre de tickets gagnants dans un lot.

1. (i) Donner la loi de  $X_N$  et calculer la proportion des lots qui contiennent au moins un ticket gagnant lorsque  $N = 1000$ ,  $N = 500$ ,  $N = 100$ .

(ii) Comparer avec le résultat fourni par l'approximation binomiale de la loi de  $X$ .

2. Chaque lot est vendu au prix de  $1000/N$  euro et la société rembourse  $k$  fois le prix du lot si celui-ci contient  $k$  tickets gagnants. Un client achète un lot de tickets: calculer l'espérance de son gain.

### Solution

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \text{(i) } X_N \text{ suit la loi hypergéométrique } \mathcal{H}(N, 0.01N, 10). \\
 & \text{Si } N = 1000 : \mathbf{p}_{X_{1000}}(k) = \frac{\binom{10}{k} \binom{990}{10-k}}{\binom{1000}{10}} \text{ pour } k = 0, \dots, 10 \text{ et } \text{pr}(X \geq 1) \simeq 0.0960. \\
 & \text{Si } N = 500 : \mathbf{p}_{X_{500}}(k) = \frac{\binom{5}{k} \binom{495}{10-k}}{\binom{500}{10}} \text{ pour } k = 0, \dots, 5 \text{ et } \text{pr}(X \geq 1) \simeq 0.0964. \\
 & \text{Si } N = 100 : \mathbf{p}_{X_{100}}(k) = \frac{\binom{1}{k} \binom{99}{10-k}}{\binom{100}{10}} \text{ pour } k = 0, 1 \text{ et } \text{pr}(X \geq 1) \simeq 0.1000. \\
 & \text{(ii) On obtiendrait } \text{pr}(X \geq 1) \simeq 0.0956 \text{ avec la loi binomiale } \mathcal{B}(10, 0.01). \\
 2. \quad & \text{Le gain est } G = \frac{1000}{N}(X - 1) : \mathbf{E}(X) = 0.1 \text{ donc } \mathbf{E}(G) = \frac{1000}{N}(\mathbf{E}(X) - 1) = -\frac{900}{N}.
 \end{aligned}$$

### **Exercice 59** Loi multinomiale

1. 10 personnes votent indépendamment et aléatoirement pour 4 candidats équiprobables. On note  $X_k$  le nombre de votes recueillis par le candidat  $k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ).

(i) Déterminer la loi de  $(X_1, \dots, X_4)$ .

(ii) Calculer la probabilité que  $(X_1, \dots, X_4) = (5, 2, 2, 1)$ .

2. On tire indépendamment 4 fois sur une cible divisée en 3 zones: la probabilité d'atteindre la zone  $k$  est 2 fois supérieure à celle d'atteindre la zone  $k+1$ . On note  $X_k$  le nombre de fois où la zone  $k$  a été atteinte ( $k = 1, 2, 3$ ).

(i) Déterminer la loi de  $(X_1, X_2, X_3)$ .

(ii) Calculer la probabilité que  $(X_1, X_2, X_3) = (3, 1, 0)$ .

### Solution

1.
  - (i)  $(X_1, \dots, X_4)$  suit la loi multinomiale  $\mathcal{M}(4; 1/4, \dots, 1/4)$  :  
 $\text{pr}(X_1 = n_1, \dots, X_4 = n_4) = \binom{10}{n_1, \dots, n_4} \cdot \frac{1}{4^{10}}$ .
  - (ii)  
 $\text{pr}((X_1, \dots, X_4) = (5, 2, 2, 1)) = \binom{10}{5, 2, 2, 1} \cdot \frac{1}{4^{10}}$ .
2. On note  $p_k$  la probabilité d'atteindre la zone  $k$  :  $p_1 = 4/7$ ,  $p_2 = 2/7$ ,  $p_3 = 1/7$ .
  - (i)  $(X_1, X_2, X_3)$  suit la loi multinomiale  $\mathcal{M}(4; p_1, p_2, p_3)$  :  
 $\text{pr}(X_1 = n_1, X_2 = n_2, X_3 = n_3) = \binom{4}{n_1, n_2, n_3} \cdot p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3}$ .
  - (ii)  $\text{pr}((X_1, X_2, X_3) = (3, 1, 0)) = \binom{4}{3, 1, 0} \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^3 \left(\frac{2}{7}\right)^1 \left(\frac{1}{7}\right)^0 = 4 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^3 \left(\frac{2}{7}\right)$ .

#### **Exercice 60** Test d'hypothèse

On veut déterminer si les rats distinguent les couleurs et on procède à une expérience où 10 rats doivent choisir entre deux couleurs ROUGE ou VERT : on note  $p = \text{pr}(\text{"choisir le VERT"})$ . On fait l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  que les rats sont indifférents aux deux couleurs, donc que la probabilité de choisir chaque couleur est  $p_0 = 0.5$ .

1. On note  $X$  le nombre de rats qui choisissent le VERT. Déterminer la loi de  $X$  sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$ .
2. (i) L'expérience a montré que 2 rats ont choisi le VERT et on décide d'accepter  $\mathcal{H}_0$  contre l'hypothèse opposée  $\mathcal{H}_1 : p < 0.5$  si  $\text{pr}(X \leq 2) > 5\%$ . Que décide-t-on ici ?
- (ii) L'expérience a montré que 9 rats ont choisi le VERT et on décide d'accepter  $\mathcal{H}_0$  contre l'hypothèse opposée  $\mathcal{H}_1 : p > 0.5$  si  $\text{pr}(X \geq 9) > 5\%$ . Que décide-t-on ici ?

### Solution

1.  $X$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(10, 0.5)$ .
2.
  - (i)  $\text{pr}(X \leq 2) \simeq 0.055 > 5\%$  donc on accepte  $\mathcal{H}_0$  contre  $\mathcal{H}_1$ .
  - (ii)  $\text{pr}(X \geq 9) \simeq 0.011 < 5\%$  donc on rejette  $\mathcal{H}_0$  contre  $\mathcal{H}_1$ .

#### **Exercice 61** \* Loi du $\chi^2$ discrète

On lance un dé à 6 faces  $n$  fois indépendamment: on note  $p_k$  la probabilité d'apparition du numéro  $k$  et  $X_k$  le nombre d'apparitions de ce numéro.

1. On pose  $\chi^2 = \sum_{k=1}^6 \frac{(X_k - np_k)^2}{np_k}$ . Déterminer la loi de  $X_k$  et calculer l'espérance de  $\chi^2$ .
2. On fait une hypothèse  $\mathcal{H}_0$  d'équiprobabilité et on procède à une expérience de  $n = 120$  lancers, avec les résultats suivants:

$k$	1	2	3	4	5	6
$X_k$	15	21	25	19	14	26

- (i) Calculer la valeur  $\alpha$  de  $\chi^2$  dans ce cas.
- (ii) On décide d'accepter  $\mathcal{H}_0$  si  $\text{pr}(\chi^2 \geq \alpha) > 5\%$  sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$ . On donne les probabilités suivantes:

$x$	0.55	1.15	1.61	9.24	11.07	15.09
$\text{pr}(\chi^2 \geq x)$	0.99	0.95	0.90	0.10	0.05	0.01

Que décide-t-on ici ?

Solution

1.  $X_k$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p_k)$ .  
 $\mathbf{E}(\chi^2) = \sum_{k=1}^6 \frac{1}{np_k} \cdot \mathbf{V}[X_k] = \sum_{k=1}^6 (1 - p_k) = 5$ .
2.
  - (i) On a ici  $p_k = \frac{1}{6}$  pour tout  $k$  donc  $np_k = 20$  et  $\chi^2 = \sum_{k=1}^6 \frac{(X_k - 20)^2}{20} : \alpha \simeq 6.2$ .
  - (ii)  $\text{pr}(\chi^2 \geq \alpha) \geq \text{pr}(\chi^2 \geq 9.24) = 0.10$  donc on accepte  $\mathcal{H}_0$ .

**Lois discrètes dénombrables**

**Exercice 62** Loi géométrique 1

1. On lance une pièce un nombre indéterminé de fois: la probabilité d'obtenir *PILE* est  $p = 1/3$  et on note  $T$  le temps d'attente du premier *PILE*. Déterminer la loi de  $T$  et calculer les probabilités suivantes:

- (i)  $\text{pr}(T > 4)$       (ii)  $\text{pr}(T \leq 10)$

2. On tire 4 boules simultanément dans une urne qui contient 4 boules blanches et 4 boules rouges: si on obtient 2 boules blanches et 2 boules rouges on s'arrête, sinon on remet les boules dans l'urne et on recommence le tirage. On note  $T$  le nombre de tirages avant de s'arrêter.

(i) Calculer la probabilité d'obtenir 2 boules blanches et 2 boules rouges en un tirage.

(ii) Déterminer la loi de  $T$  et son espérance.

Solution

1.  $T$  suit la loi  $\mathcal{G}(p) : \text{pr}(T = k) = pq^{k-1}$  pour  $k = 1, 2, \dots$   
 $\text{pr}(T > 4) = q^4 \simeq 0.198$ .  
 $\text{pr}(T \leq 10) = 1 - \text{pr}(T > 10) = 1 - q^{10} \simeq 0.983$ .
2.
  - (i)  $\text{pr}(\text{"2 boules B et 2 boules R"}) = \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{18}{35}$ , noté  $p$ .
  - (ii)  $T$  suit la loi géométrique  $\mathcal{G}(p)$  donc  $\mathbf{p}_T(k) = pq^{k-1}$  pour  $k = 1, 2, \dots$   
 $\mathbf{E}(T) = \frac{1}{p} \simeq 1.94$ .

**Exercice 63** Loi géométrique 2

Dans un jeu de hasard la probabilité de gagner est  $p = 10^{-8}$ .

1. Une personne joue tous les jours indépendamment: on note  $T$  le temps d'attente (en jours) du premier gain. Déterminer la loi de  $T$  et le temps d'attente moyen.

2.  $n$  de personnes jouent tous les jours et indépendamment les uns des autres: on note  $T(n)$  le temps d'attente (en jours) avant qu'au moins une personne gagne.

(i) Calculer la probabilité qu'au moins une personne gagne en une journée, puis déterminer la loi de  $T(n)$ .

(ii) Calculer le temps d'attente moyen avant qu'au moins une personne gagne. Donner une approximation de celui-ci: combien de personnes faut-il réunir pour que l'attente moyenne soit inférieure à un mois?

### Solution

1.  $T$  suit  $\mathcal{G}(p)$ .  
 $\text{pr}(T = k) = pq^{k-1}$  pour  $k = 1, 2, \dots$   
 $\mathbf{E}(T) = \frac{1}{p} \simeq 273973$  années.
2.  
(i)  $\text{pr}(\text{"au moins un gagnant en une journée"}) = 1 - q^n = p_n$ .  
 $T(n)$  suit la loi  $\mathcal{G}(p_n)$  donc  $\text{pr}(T(n) = k) = p_n(1 - p_n)^{k-1} = (1 - q^n)q^{n(k-1)}$  pour  $k = 1, 2, \dots$   
(ii)  $\mathbf{E}(T(n)) = \frac{1}{p_n}$  et  $p_n \simeq np$  donc  $\mathbf{E}(T(n)) \simeq \frac{1}{np} : \mathbf{E}(T(n)) < 30$  si  $n > \frac{1}{30p} \simeq 3.3 \times 10^6$ .

### **Exercice 64** \* Loi géométrique 3

1. On lance un dé équiprobable à 6 faces un nombre indéterminé de fois indépendamment..  
(i) On note  $T_k$  le temps d'attente d'un  $k$ -ème nouveau numéro sachant qu'on en a déjà obtenu  $k - 1$  distincts. Déterminer la loi de  $T_k$  et son espérance.  
(ii) On note  $T$  le temps d'attente avant d'obtenir les 6 numéros. Exprimer  $T$  à l'aide des  $T_k$  puis donner son espérance.
2. Combien faut-il réunir de personnes en moyenne pour que les 365 jours de l'année soient des dates anniversaires?

### Solution

1.  
(i)  $T_k$  suit la loi géométrique  $\mathcal{G}(\frac{6-k+1}{6})$  d'espérance  $\mathbf{E}(T_k) = \frac{6}{6-k+1}$ .  
(ii)  $T = \sum_{k=1}^6 T_k$ , d'espérance  $\mathbf{E}(T) = \sum_{k=1}^6 \mathbf{E}(T_k) = 6 \cdot \sum_{k=1}^6 \frac{1}{k} \simeq 14.7$ .
2. Au sein d'une population infinie  $T_k$  est désormais le nombre d'individus tirés nécessaire à l'obtention d'une nouvelle date anniversaire sachant qu'on en a déjà obtenu  $k - 1$  distinctes:  $T_k$  suit la loi géométrique  $\mathcal{G}(\frac{365-k+1}{365})$  d'espérance  $\mathbf{E}(T_k) = \frac{365}{365-k+1}$ . Le temps d'attente avant d'obtenir les 365 dates est  $T = \sum_{k=1}^{365} T_k$ , d'espérance  $\mathbf{E}(T) = 365 \cdot \sum_{k=1}^{365} \frac{1}{k} \simeq 2365$ .

### **Exercice 65** Loi binomiale négative 1

1. Pour obtenir un correspondant téléphonique le taux de succès d'un appel est de 70%. On note  $T$  le nombre d'appels nécessaires pour obtenir ce correspondant 4 fois. Déterminer la loi et l'espérance de  $T$ .
2. On lance une pièce équiprobable jusqu'à obtenir PILE pour la deuxième fois. On note  $X$  le nombre de FACE apparus. Déterminer la loi et l'espérance de  $X$ .

### Solution

1.  $T$  suit la loi binomiale négative  $\mathcal{BN}(4, p)$ , avec  $p = 0.7$  :  $\text{pr}(T = k) = \binom{k-1}{3} \cdot p^4 q^{k-4}$  pour  $k = 4, 5, \dots$   
 $\mathbf{E}(T) \simeq 5.7$ .
2. On note  $T$  le temps d'attente du deuxième PILE:  $X = T - 2$ .  
On a  $\text{pr}(X = k) = \text{pr}(T = k + 2) = \binom{k+1}{1} \cdot \frac{1}{2^{k+2}}$  pour  $k = 0, 1, 2, \dots$   
 $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(T) - 2 = 2$ .

**Exercice 66** Loi binomiale négative 2

On lance une pièce un nombre indéterminé de fois: la probabilité d'obtenir PILE est  $p = 1/4$ . On note  $T_r$  le temps d'attente du  $r$ -ème PILE.

1. Rappeler la loi de  $T_1$  et  $T_2$  et calculer les probabilités  $\text{pr}(T_1 > 2)$  et  $\text{pr}(T_2 > 3)$ .
2. Calculer les probabilités  $\text{pr}(T_4 - T_3 > 2)$  et  $\text{pr}(T_4 - T_2 > 3)$ .

Solution

$T_r$  suit la loi  $\mathcal{BN}(r, p)$  :  $\text{pr}(T_r = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$  pour  $k = r, r+1, \dots$

1.  $T_1$  suit la loi  $\mathcal{BN}(1, p)$  :  $\text{pr}(T = k) = pq^{k-1}$  pour  $k = 1, 2, \dots$

$T_2$  suit la loi  $\mathcal{BN}(2, p)$  :  $\text{pr}(T = k) = (k-1) p^2 q^{k-2}$  pour  $k = 2, 3, \dots$

$\text{pr}(T_1 > 2) = q^2 = \frac{9}{16} \simeq 0.56$ .

$\text{pr}(T_2 > 3) = 1 - p^2 - 2p^2q = \frac{27}{32} \simeq 0.84$ .

2.

$T_4 - T_3$  est le temps d'attente entre le 3ème et le 4ème PILE, donc le temps d'attente d'un PILE sachant qu'on en a déjà obtenu 3 : l'indépendance des lancers assure que  $T_4 - T_3 = T_1$ . De même  $T_4 - T_2 = T_2$ .

**Exercice 67** Approximation de Poisson d'une loi binomiale

1. Dans une loterie chaque tirage donne une probabilité  $p = 0.01$  de gagner: on achète 50 billets. Calculer la probabilité de gagner au moins une fois et en donner une approximation de Poisson.

2. Dans un régiment de 500 soldats chaque individu est porteur d'une certaine maladie avec la probabilité  $p = 0.001$ . Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux soldats malades et en donner une approximation de Poisson.

Solution

1. On note  $X$  le nombre de billets gagnants:  $X$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(50, 0.01)$  d'espérance  $\lambda = 0.5$ , que l'on approche par la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ . Alors  $\text{pr}(X = n) \simeq e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!}$  et  $\text{pr}(X \geq 1) = 1 - e^{-\lambda} \simeq 0.39$ .

2. On note  $X$  le nombre de soldats malades:  $X$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(500, 0.001)$  d'espérance  $\lambda = 0.5$ , que l'on approche par la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ . Alors  $\text{pr}(X = n) \simeq e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!}$  et  $\text{pr}(X \geq 2) = 1 - e^{-\lambda} (1 + \lambda) \simeq 0.09$ .

**Exercice 68** Loi de Poisson 1

1. Sur une autoroute il y a en moyenne 2 accident par jours: on suppose que le nombre d'accidents est un processus de Poisson. Calculer la probabilité qu'il y ait plus d'un accident:

(i) par jour (ii) par heure

2. Dans un casino les gens rentrent au rythme moyen d'une personne toute les deux minutes: on suppose qu'il s'agit d'un processus de Poisson. Calculer la probabilité que personne n'entre entre 12h et 12h05 ?

Solution

1. Le nombre d'accidents par période de  $t$  jours est une VA de Poisson  $X(t)$  de paramètre  $\lambda t = 2t$  ( $\lambda = 2$ ).

(i)  $\text{pr}(X(1) > 1) = 1 - 3e^{-2} \simeq 0.59$ .

(ii)  $\text{pr}(X(1/24) > 1) \simeq 0.003$ .

2. Le nombre d'entrées par période de  $t$  minutes est une VA de Poisson  $X(t)$  de paramètre  $\lambda t = 0.5t$  :  $\text{pr}(X(5) = 0) = e^{-2.5} \simeq 0.08$ .

**Exercice 69** \*\* Loi de Poisson 2

1. On note  $S_n$  le nombre de points fixes d'une permutation de  $E_n$  : on rappelle que  $\text{pr}(S_n = 0) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ , noté  $p_n$ . Déterminer la loi de  $S_n$  et expliquer dans quelle mesure on peut approcher cette loi par une loi de Poisson de paramètre  $\lambda = 1$ .

2. Pour tester la compétence d'un étudiant on lui propose un QCM comportant 10 questions ainsi que les 10 réponses dans un ordre aléatoire: on demande à l'étudiant d'associer une réponse à chaque question et on note  $X$  le nombre de bonnes associations.

(i) On fait l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  selon laquelle l'étudiant répond au hasard. Déterminer la loi de  $X$  sous cette hypothèse.

(ii) On suppose que l'étudiant donne 4 bonnes associations. On considère que le test est positif si la probabilité d'obtenir au hasard un résultat au moins aussi bon est inférieure à 5% : autrement dit l'étudiant réussit le test si  $\text{pr}(X \geq 4) < 5\%$  sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$ . Qu'en est-il ici ?

Solution

1. Une permutation admet  $k$  points fixes  $I = \{x_1, \dots, x_k\}$  donnés (et  $k$  seulement) ssi sa restriction à  $E_n - I$  est sans point fixe: comme la probabilité d'un tel évènement est  $p_{n-k}$  il y a  $(n-k)! \times p_{n-k}$  telles permutations. Alors  $\text{pr}(S_n = k) = \binom{n}{k} \cdot \frac{(n-k)! \times p_{n-k}}{n!} = \frac{p_{n-k}}{k!}$  pour  $k = 0, 1, \dots, n$ .

Lorsque  $n$  est grand et  $k$  petit devant  $n$  on a  $p_{n-k} \simeq e^{-1}$  d'où l'approximation par  $\mathcal{P}(1)$ .

2.

(i)  $X = S_{10}$  donc  $\text{pr}(X = k) = \frac{p_{10-k}}{k!}$  pour  $k = 0, 1, \dots, 10$ .

(ii)  $\text{pr}(X \geq 4) = 0.019 < 0.05$ , donc test réussi.