Licence 3 – Probabilités
Exercices corrigés de TD

Cécile Mercadier, Johannes Kellendonk, Laurent Tournier
Associés au cours de Stéphane Attal

Année universitaire : 2008-2009

FEUILLE DE TD 1

Dénombrement

Exercice 1
Trois cartes sont tirées d'un jeu de 52 cartes. Calculer les probabilités des événements suivants :
(i) Trois piques (ii) Aucun pique (iii) Un pique et deux "non-piques"
(iv) Au moins un pique (v) Trois cartes de la même famille (vi) Trois cartes de familles différentes
(vii) Trois as (viii) Aucun as (ix) Trois cartes rouges
lorsque :
1. On suppose que les cartes sont, l'une après l'autre, tirées au hasard et remises dans le jeu.
2. On suppose que les cartes sont tirées simultanément au hasard.

Exercice 2 Soit n et p deux entiers non nuls.
1. De combien de façons peut-on répartir p enveloppes identiques dans n boîtes aux lettres ?
2. En déduire le cardinal de l'ensemble $E_1 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n, x_1 + \ldots + x_n = p\}$.
3. Supposons $p \geq n$. De combien de façons peut-on répartir p enveloppes identiques dans n boîtes aux lettres de sorte qu'aucune boîte aux lettres ne reste vide ?
4. De quel ensemble E_2 (construit de façon similaire à E_1) peut-on en déduire le cardinal ?
5. De combien de façons peut-on répartir p enveloppes distinctes dans n boîtes aux lettres ?

Exercice 3 Soit n et p deux entiers non nuls.
1. Déterminer le cardinal de l'ensemble des suites croissantes (au sens strict) de p éléments de $\{1, \ldots, n\}$.
2. Déterminer le cardinal de l'ensemble des suites croissantes (au sens large) de p éléments de $\{1, \ldots, n\}$.

Caractérisation d'une loi de probabilité

Exercice 4 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ définie sur l'espace de probabilité discret $(\Omega, \mathbb{P})$. Démontrer que sa fonction de répartition, notée F_X, définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

vérifie les propriétés suivantes :
1. F_X est croissante avec $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 1$.

2. F_X est continue à droite en tout point et admet des limites à gauche en tout point. De plus $\lim_{y\to x^-} F_X(y) = \mathbb{P}(X < x)$.
3. F_X caractérise la loi de X.

Exercice 5 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie sur l'espace de probabilité discret $(\Omega, \mathbb{P})$. On définit sa fonction génératrice par

$$G_X(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X = k)s^k.$$

1. Montrer que G_X est bien définie sur $[-1, 1]$.
2. Montrer que G_X caractérise la loi de X.
3. Supposons que X et X^2 sont intégrables. Notons G'_X et G''_X les dérivées première et seconde de G_X. Montrer que $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$ et $\mathbb{E}(X^2) = G''_X(1) + G'_X(1)$. En déduire l'expression de $\mathrm{Var}(X)$.

Correction feuille de TD 1

Référence
Introduction aux probabilités
Delmas, Jean-Pierre
Ellipses
BU Maths 19.2 DEL

Rappel de cours : Dénombrement

- Le nombre d'applications d'un ensmble à p éléments vers un ensemble à n éléments est n^p.
- Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments – bijections de cet ensemble dans lui-même – est $n!$.
- Le nombre d'arangements –injections – d'un ensmble à p éléments dans un ensemble à n éléments est $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.
- Le nombre de combinaisons – ou sous-ensembles – à p éléments dans un ensemble à n éléments ($\geq p$) est $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Rappel de cours : Probabilités sur un ensemble fini
On convient de représenter une expérience aléatoire $\mathcal{E}$, c'est-à-dire, une expérience soumise au hasard, par Ω l'ensemble des résultats possibles. Une réalisation ω, un élément de Ω est aussi appelé expérience élémentaire.
Un événement aléatoire A est l'ensemble des expériences élémentaires ω qui réalisent A.
Comme Ω est fini, la probablité $\mathbb{P}$ sur Ω définie par $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/card(\Omega)$ s'appelle la probablité uniforme sur Ω. C'est la probablité qui rend toutes les expériences élémentaires ω équiprobables. On a alors $\mathbb{P}(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} =$ " $\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombres de cas possibles}}$ ".

Exercice 1 On peut décider qu'un jeu de cartes est l'ensemble $\{1, \ldots, 52\}$ avec par exemple $\{1, \ldots, 13\}$ les piques, puis les trêfles, puis les coeurs, puis les carreaux.
1. L'univers Ω est $\{1, \ldots, 52\}^3$ donc $card(\Omega) = 52^3$.
Comme les tirages sont faits au hasard, on peut munir Ω de la probabilité uniforme : tous les événements élémentaires E ont la même probabilité : $1/52^3$. Plus généralement, on sait que la probabilité d'un événement A quelconque se calcule comme $card(A)/card(\Omega)$.
(i) $1/64$ car à chaque fois un pique soit 13^3 cas favorables
(ii) $27/64$ car il s'agit de faire cette expérience sur $52 - 13 = 39$ cartes, autrement dit, 39^3 cas favorables
(iii) $27/64$ car on a $3 \times 13 \times 39^2$ cas favorables
(iv) $37/64$ complémentaire de (ii)
(v) $1/16$ car 3×13^3 cas favorables
(vi) $3/8$ car $52 \times 39 \times 26$ cas favorables
(vii) $1/2197$ car 4^3 cas favorables
(viii) $1728/2197$ car 48^3 cas favorables
(ix) $1/8$ car 26^3 cas favorables
2. Dans cette expérience, Ω est l'ensemble des combinaisons de 3 éléments parmi 52.

Son cardinal vaut donc C_{52}^3. Comme les tirages sont faits au hasard, on peut munir Ω de la probabilité uniforme : tous les événements élémentaires E ont la même probabilité : $1/C_{52}^3$. Plus généralement, on sait que la probabilité d'un événement A quelconque se calcule comme $card(A)/card(\Omega)$.
(i) C_{13}^3/C_{52}^3 (ii) C_{39}^3/C_{52}^3 (iii) $C_{13}^1C_{39}^2/C_{52}^3$ (iv) $1-C_{39}^3/C_{52}^3$ (v) $4C_{13}^3/C_{52}^3$
(vi) $4(C_{13}^1)^3C_{52}^3$ (vii) $4/C_{52}^3$ (viii) C_{48}^3/C_{52}^3 (ix) C_{26}^3/C_{52}^3

Exercice 2 **1.** On peut modéliser les n boîtes aux lettres à l'aide de $n-1$ séparateurs donc une configuration est un ensemble de $n-1+p$ éléments qui est déterminée par exemple par la position des séparateurs, soit en tout C_{n+p-1}^{n-1} possibilités.
2. On peut voir ce problème comme le nombre de répartitions de p enveloppes dans n boîtes aux lettres avec x_i le nombre d'enveloppes dans la boîte aux lettres i. On a bien $x_i \in \mathbb{N}$ et $x_1+\ldots+x_n=p$. Donc $\mathrm{Card}(A)=C_{n-1+p}^{n-1}$.
3. On commence par mettre une enveloppe par boîte aux lettres. Il s'agit alors de calculer le nombre de façons de répartir $p-n$ enveloppes dans n boîtes aux lettres soit C_{p-1}^{n-1} possibilités.
4. $E_2=\{(x_1,\ldots,x_n)\in(\mathbb{N}^\star)^n, x_1+\ldots+x_n=p\}$.
5. Pour chaque enveloppe on attribue une boîte aux lettres, soit n^p possibilités.

Exercice 3 **1.** L'ensemble des suites strictements croissantes de p éléments de $\{1,\ldots,n\}$ est en bijection avec l'ensemble des parties à p éléments de $\{1,\ldots,n\}$. En effet, on peut associer à toute suite strictement croissante $(s_1,\ldots,s_p)$ une partie $\{s_1,\ldots,s_p\}$ à p éléments de $\{1,\ldots,n\}$, et l'application réciproque consiste à ordonner les éléments d'une partie $\{s_1,\ldots,s_p\}$. Le cardinal recherché est donc le nombre de combinaisons de p éléments parmi n, soit C_n^p.
2. Se donner une suite croissante (au sens large) de p éléments de $\{1,\ldots,n\}$ revient à se donner, pour $i=1,\ldots,n$, le nombre x_i d'éléments de la suite égaux à i, avec la condition $\sum_{i=1}^n x_i=p$ et $x_i\geq 0$. On voit ainsi que l'on est ramené à la question 1 de l'exercice 2, donc la réponse est C_{n-1+p}^{n-1}.

Autre solution : on se ramène à la question précédente par la bijection

$$\phi:(x_1,x_2\ldots,x_p)\mapsto(x_1,x_2+1,\ldots,x_p+p-1),$$

qui envoie les suites croissantes (au sens large) de p éléments de $\{1,\ldots,n\}$ dans l'ensemble des suites strictement croissantes de p éléments de $\{1,\ldots,n+p-1\}$. Pour le voir, noter que si $(y_1,\ldots,y_n)$ est strictement croissante à valeurs dans $\{1,\ldots,n+p-1\}$, alors $y_i\geq y_{i-1}+1$ et $y_i\geq i$ pour tout i (par récurrence). L'image par ϕ de notre ensemble est l'ensemble décrit dans la question précédente dans lequel n devient $n+p-1$ donc le cardinal recherché est $C_{n+p-1}^p=C_{n-1+p}^{n-1}$ éléments.

Exercice 4 **1.** F_X est croissante puisque si $x<y$, $F_X(y)=F_X(x)+\mu_X(]x,y])\geq F_X(x)$. $\lim_{n\to+\infty}]-\infty,-n]=\cap_{n\in\mathbb{N}}]-\infty,-n]=\emptyset$ comme limite d'une suite décroissante d'ensembles et $\lim_{n\to+\infty}]-\infty,n]=\cap_{n\in\mathbb{N}}]-\infty,n]=\mathbb{R}$ comme limite d'une suite croissante d'ensembles Par continuité de l'application probabilité, on a $\lim_{n\to-\infty}F_X(n)=\mathbb{P}(\emptyset)=0$ et $\lim_{n\to\infty}F_X(n)=\mathbb{P}(\mathbb{R})=1$.
2. F_X est continue à droite car $\lim_{n\to\infty}]-\infty,x+1/n]=\cap_{n\in dN}]-\infty,x+1/n]=]-\infty,x]$. De plus, $\lim_{n\to\infty}]-\infty,x-1/n]=\cap_{n\in dN}]-\infty,x-1/n]=]-\infty,x[$.
3. On a $F_X(x)-F_X(x^-)=\mu_X(\{x\})$. En particulier, on retrouve toutes les probabilités

$$\mu_X(\{k\})=\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(X^{-1}(\{k\}))=\mathbb{P}(\{\omega,X(\omega)=k\}).$$

Exercice 5 **1.** La série $\sum \mathbb{P}(X = n)s^n$ est absolument convergente pour $|s| \leq 1$ car $|\mathbb{P}(X = n)s^n| \leq \mathbb{P}(X = n)$ et $\sum \mathbb{P}(X = n) = 1$. La fonction est bien définie sur $[-1, 1]$.
2. G_X est la somme de la série entière de terme général $\mathbb{P}(X = n)s^n$. Elle est donc indéfiniment dérivable sur $]-1, 1[$. De plus, on sait que ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme de la série. On a donc $G_X^{(k)}(s) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)P(X = n)s^{n-k}$ et $G_X^{(k)}(0) = k!\mathbb{P}(X = k)$. On peut donc reconstruire la loi de X à l'aide de la formule suivante : $\mathbb{P}(X = k) = G_X^{(k)}(0)/k!$.
3. Si X est intégrable, par définition la série $\sum nP(X = n)$ est convergente. La série $\sum nP(X = n)s^{n-1}$ est normalement convergente pour $|s| \leq 1$ car $\sup_s |nP(X = n)s^{n-1}| = nP(X = n)$. Par conséquent, sa somme est la dérivée de la somme de la série $\sum \mathbb{P}(X = n)s^n = G_X(s)$, autrement dit $G'_X(s)$. En résumé $G'_X(s) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(X = n)s^{n-1}$ et G'_X est bien définie sur $[-1, 1]$.
On montre de la même manière que si $\mathbb{E}(X(X-1))$ existe alors $G''_X(s) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)P(X = n)s^{n-2}$ et G''_X bien définie sur $[-1, 1]$.
Pour $s = 1$, $G'_X(1) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(X = n) = \mathbb{E}(X)$ et $G''_X(1) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)P(X = n) = \mathbb{E}(X(X-1))$. On en déduit que $\mathrm{Var}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$.

FEUILLE DE TD 2

Rappels : Lois usuelles discrètes

Bernoulli(p) avec $p \in [0,1]$: $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$ et $\mathbb{P}(X=1) = p$.
Binomiale(n,p) avec $n > 0$ et $p \in [0,1]$: $\mathbb{P}(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ pour $k = 0, \ldots, n$.
Géométrique(p) avec $p \in [0,1]$: $\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^k$ pour $k \in \mathbb{N}^\star$.
Poisson(λ) avec $\lambda > 0$: $\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Lois discrètes usuelles

Exercice 1 Donner l'expression et "tracer" les fonctions de répartitions de loi de Bernoulli de paramètre 2/3 puis de loi géométrique de paramètre 3/4.

Exercice 2
1. Rappeler la formule du binôme de Newton.
2. En déduire que la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in [0,1]$ définit bien une loi de probabilité puis calculer sa moyenne et sa variance.
3. Rappeler le comportement des séries $\sum_{n\geq 0} a^n$, $\sum_{n\geq 1} na^{n-1}$ et $\sum_{n\geq 2} n(n-1)a^{n-2}$ lorsque $|a| < 1$.
4. En déduire que la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ définit bien une loi de probabilité puis calculer sa moyenne et sa variance.

Exercice 3 Au cours d'une expérience un certain événement E se réalise avec une probabilité $p \in]0,1[$. On répète de façon indépendante l'expérience jusqu'à obtenir r fois E. Soit X la variable aléatoire associée au nombre de réalisations de E^c. Déterminer la loi de X.

Exercice 4 Calculer la fonction génératrice de X lorsque X est une variable aléatoire
1. de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$;
2. de loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in [0,1]$;
3. de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$;
4. de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
5. En déduire l'espérance et la variance de X dans chacun des cas.

Inégalités

Exercice 5
1. Soit X une variable aléatoire intégrable. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}_\star^+$

$$\text{(Markov)} \qquad \mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}.$$

2. En déduire que si X est de carré intégrable alors pour tout $a \in \mathbb{R}_\star^+$

$$\text{(Tchebycheff)} \qquad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}.$$

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On extrait n fois avec remise une boule dans une urne composée de 2 boules vertes et 6 boules blanches. Soit X_n la variable aléatoire associée au nombre de boules vertes obtenues lors des n tirages. On pose $F_n = X_n/n$.

1. Donner la loi de X_n. En déduire l'espérance et la variance de X_n puis de F_n.

2. On suppose dans cette question que $n = 10\,000$. A l'aide de l'exercice précédent, donner une borne inférieure pour la probabilité de l'événement $\{F_n \in]0.22, 0.26[\}$.

3. Donner une estimation du nombre minimal n de tirages nécessaires pour que la probabilité de l'événement $\{F_n \in]0.22, 0.26[\}$ soit au moins 0.99.

Correction feuille de TD 2

Exercice 1 Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = 2/3$, X est à valeurs dans $\{0,1\}$, donc $F_X(x) = P(X \leq x) = 0$ si $x < 0$ et $F_X(x) = 1$ si $x \geq 1$. De plus, si $0 \leq x < 1$, $F_X(x) = P(X \leq x) = P(X = 0) = 1 - p = 1/3$. Faire le dessin correspondant.

Soit X une variable aléatoire de la loi géométrique de paramètre $p = 3/4$. Comme X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on a $F_X(x) = 0$ pour tout $x < 1$. De plus, $F_X(x) = P(X = 1) = 3/4$ si $x \in [1,2[$, $F_X(x) = P(X = 1) + P(X = 2) = 3/4 + 3/16 = 15/16$ si $x \in [2,3[$, $F_X(x) = F_X(2) + P(X = 3) = 15/16 + 3/64$ si $x \in [3,4[, \ldots$

Exercice 2 **1.** Pour x, y réels (ou dans un quelconque anneau commutatif) et $n \in \mathbb{N}$, la formule du binôme de Newton s'écrit $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$.

2. Pour vérifier que $P(X = k) = a_k$ (où $k \in \mathbb{N}$ et $a_k \in \mathbb{R}$) définit bien une mesure de probabilités sur $\mathbb{N}$, il faut vérifier $a_k \geq 0$ et $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$. Pour la loi binomiale de paramètres n et p, la positivité est évidente, et la seconde condition résulte de la formule du binôme : $\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (p + 1 - p)^n = 1$.
À l'aide des formules $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ et $k(k-1)C_n^{k-1} = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$ (la première se vérifie via la définition des C_n^k et la deuxième se déduit de la première), et de la formule du binôme, on calcule :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k} = n \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} p^k (1-p)^{n-1-k} = np$$

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} n(n-1) C_{n-2}^{k-2} p^k (1-p)^{n-k} = n(n-1)p^2,$$

d'où $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$.

3. Si $a \neq 1$ on a, pour tout n, $\sum_{k=0}^{n} a^k = \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$. Pour $|a| < 1$, $\lim_n a^{n+1} = 0$, donc la série géométrique est alors convergente avec $\sum_{k \geq 0} a^k = \dfrac{1}{1-a}$. Par propriété de dérivation des séries entières dans leur intervalle ouvert de convergence, on en déduit $\sum_{k \geq 1} k a^{k-1} = \dfrac{d}{da}\left(\dfrac{1}{1-a}\right) = \dfrac{1}{(1-a)^2}$ et $\sum_{k \geq 2} k(k-1) a^{k-2} = \dfrac{d^2}{da^2}\left(\dfrac{1}{1-a}\right) = \dfrac{2}{(1-a)^3}$.

4. Si pour tout $k \geq 1$ on a $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$, alors $\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X = k) = p \sum_{k \geq 0} (1-p)^k = 1$. Ceci montre que la loi géométrique de paramètre p est bien une loi de probabilités. On calcule :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \geq 1} k \mathbb{P}(X = k) = p \sum_{k \geq 1} k(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p}$$

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{k \geq 2} k(k-1) \mathbb{P}(X = k) = p(1-p) \sum_{k \geq 2} k(k-1)(1-p)^{k-2} = 2\frac{1-p}{p^2}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 = 2\frac{1-p}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

Exercice 3 On a $\Omega = \{E, E^c\}^{\mathbb{N}}$. L'événement $\{E, \ldots, E, E^c, \ldots, E^c, \ldots\}$ où E apparait r fois et E^c apparait n fois dans les $r+n$ premiers termes a une probabilité $p^r(1-p)^n$. Pour trouver la probabilité $\mathbb{P}(X = n)$ il faut calculer le nombre de manières de construire des $r+n$ uplets se terminant par E, et contenant r fois E. C'est donc le nombre de combinaisons de $r-1$ éléments parmi $r+n-1$ puisque un des éléments ainsi que sa position est imposée, soit encore C_{r+n-1}^{r-1}. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\mathbb{P}(X = n) = C_{n+r-1}^{r-1} p^r (1-p)^n$. Il s'agit de la loi binomiale négative de paramètres $r \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in]0, 1]$.

Exercice 4 **1.** Loi de Bernoulli de paramètre p. On a, pour $s \in \mathbb{R}$,

$$G_X(s) = E[X^s] = (1-p) + ps,$$

donc $G'_X(s) = p$ et $G''_X(s) = 0$. Il suit $G'_X(1) = p$ et $G''_X(1) = 0$. Par conséquent (cf. feuille 1, exercice 5 et remarque à la fin du corrigé), $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathrm{Var}(X) = p - p^2 = p(1-p)$.
2. Loi binomiale de paramètres n et p. Pour $s \in \mathbb{R}$, la formule du binôme donne :

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{n} s^k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (sp)^k (1-p)^{n-k} = (1-p+sp)^n.$$

On obtient $G'_X(s) = np(1-p+sp)^{n-1}$ et $G''_X(s) = n(n-1)p^2(1-p+sp)^{n-2}$, d'où $G'_X(1) = np$ et $G''_X(1) = n(n-1)p^2$.
3. Loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Rappelons que dans ce cas $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Le développement en série de l'exponentielle $e^\lambda = \sum_{n=0}^\infty \frac{\lambda^n}{n!}$ (et le fait que $\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \geq 0$) montre qu'il s'agit bien d'une probabilité. Ce même développement fournit, pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$G_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{\lambda s} e^{-\lambda} = e^{\lambda(s-1)},$$

donc $G'_X(s) = \lambda e^{\lambda(s-1)}$ et $G''_X(s) = \lambda^2 e^{\lambda(s-1)}$. $G'_X(1) = \lambda$ et $G''_X(1) = \lambda^2$ impliquent $\mathbb{E}(X) = \lambda$ et $\mathrm{Var}(X) = \lambda$.
4. Loi géométrique de paramètre p. On a, pour tout $s \in]-\dfrac{1}{1-p}, \dfrac{1}{1-p}[$,

$$G_X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} s^k (1-p)^{k-1} p = \frac{sp}{1 - s(1-p)}.$$

Pour ces valeurs de s, on en déduit que $G'_X(s) = \dfrac{p}{(1-s(1-p))^2}$ et $G''_X(s) = \dfrac{2p(1-p)}{(1-s(1-p))^3}$. En particulier, $G'_X(1) = \frac{1}{p}$ et $G''_X(1) = \dfrac{2(1-p)}{p^2}$, d'où $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ et $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{2(1-p)}{p^2} + \dfrac{1}{p} - \left(\dfrac{1}{p}\right)^2 = \dfrac{1-p}{p^2}$.

Remarque 1. Pour déduire le calcul de l'espérance et de la variance, on utilise à vrai dire une *réciproque* partielle de la question 5.3 de la feuille 1. À savoir : si $G'_X(1) < \infty$ (c'est-à-dire, si la série dérivée converge en $s = 1$), alors X est intégrable, et $E(X) = G'_X(1)$. Et si $G''_X(1) < \infty$ (idem pour la série dérivée seconde), alors X est de carré intégrable et $E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X) = G''_X(1) + G'_X(1)$. La preuve est quasiment la même puisque par exemple les propriétés «X est intégrable» et «$G'_X(1) < \infty$» se traduisent exactement par la même condition de convergence : $\sum_k k\mathbb{P}(X = k) < \infty$.

Remarque 2. Dès que le rayon de convergence de G_X est strictement plus grand que 1 (ce qui est le cas dans les exemples précédents), G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en 1, donc X est intégrable, X^2 aussi et, de façon plus générale, X^k est intégrable pour tout k (considérer la dérivée k-ième de G_X).

Exercice 5 Voir page 13 du cours.

Exercice 6 **1.** X_n est de loi binomiale de paramètres n et $p = 2/8 = 1/4$. Donc $\mathbb{E}(X_n) = n/4$ et $Var(X_n) = 3n/16$. On obtient alors $\mathbb{E}(F_n) = 1/4$ et $Var(F_n) = 3/(16n)$.
2. $\mathbb{P}(F_n \in]0.22, 0.26[) = \mathbb{P}(F_n - \mathbb{E}(F_n) \in] - 0.03, 0.01[) > \mathbb{P}(|F_n - \mathbb{E}(F_n)| < 0.01)$ donc $\mathbb{P}(F_n \in]0.22, 0.26[) > 1 - \mathbb{P}(|F_n - \mathbb{E}(F_n)| \geq 0.01) \geq 1 - Var(F_n)/0.01^2 = 1 - 3/16 = 13/16$.
3. $\mathbb{P}(F_n \in]0.22, 0.26[) > \mathbb{P}(|F_n - \mathbb{E}(F_n)| < 0.01)$ donc si $\mathbb{P}(|F_n - \mathbb{E}(F_n)| < 0.01) > 0.99$ alors on aura
$\mathbb{P}(F_n \in]0.22, 0.26[) > 0.99$. Il suffit de chercher n tel que $\mathbb{P}(|F_n - \mathbb{E}(F_n)| \geq 0.01) < 0.01$. Or $\mathbb{P}(|F_n - \mathbb{E}(F_n)| > 0.01) < Var(F_n)/0.01^2$ donc $n > 3/(16\,0.01^3) = 187500$.

FEUILLE DE TD 3

Exercice 1 *Fonctions indicatrices*
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité discret. Si $A \subset \Omega$ est un événement, on note $\mathbf{1}_A : \Omega \to \{0, 1\}$ la fonction indicatrice de A :

$$\text{pour tout } \omega \in \Omega, \qquad \mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A. \end{cases}$$

1. Pour des événements A et B, exprimer $\mathbf{1}_{A^c}$ et $\mathbf{1}_{A \cap B}$ en fonction de $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$.
2. Vérifier que, pour tout événement A, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A]$.
3. Montrer que si X est une variable aléatoire intégrable à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n).$$

Indépendance

Exercice 2 *Indépendance entre 3 événements*
On jette deux dés (non pipés), l'un après l'autre. On note respectivement A, B et C les événements «Le chiffre du premier dé est pair», «Le chiffre du deuxième dé est pair» et «Les deux chiffres ont même parité».
1. Montrer que les événements A, B et C sont deux à deux indépendants.
2. Montrer que A, B et C ne sont pas indépendants dans leur ensemble.

Exercice 3 *Indépendance et passage au complémentaire*
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité discret, et $A_1, \ldots, A_n$ des événements indépendants.
1. Montrer que $A_1^c, A_2, \ldots, A_n$ sont indépendants aussi.
2. En déduire par récurrence la propriété plus générale : pour tous $B_1 \in \{A_1, A_1^c\}, \ldots, B_n \in \{A_n, A_n^c\}$, les événements $B_1, \ldots, B_n$ sont indépendants.
3. Démontrer que les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants si, et seulement si les variables aléatoires $\mathbf{1}_{A_1}, \ldots, \mathbf{1}_{A_n}$ sont indépendantes.

Exercice 4 Soit X et Y des variables aléatoires réelles indépendantes, définies sur un espace de probabilité discret $(\Omega, \mathbb{P})$.
1. Montrer que, pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f(X)$ et $g(Y)$ sont des variables aléatoires indépendantes.
2. On suppose X et Y intégrables. Montrer que XY est intégrable et $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.
3. On suppose X^2 et Y^2 intégrables. Montrer que $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.
4. Généraliser ces résultats à n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes.

Exercice 5 Si X est une variable aléatoire indépendante de Y et si Y est indépendante de Z, est-ce que X est indépendante de Z ?

Lois usuelles et indépendance

Exercice 6 *Interprétation des lois usuelles*
On considère une suite d'expériences indépendantes dont l'issue est un succès avec probabilité p et un échec avec probabilité $1-p$.
1. Montrer que le nombre de succès parmi les n premières expériences suit une loi binomiale de paramètres n et p.
2. Montrer que l'instant où a lieu le premier succès suit une loi géométrique de paramètre p.

Exercice 7 Soit X, Y des variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p_X et p_Y. On définit $Z = \min(X, Y)$.
1. Calculer les fonctions de répartition de X, Y, Z.
2. En déduire la loi de Z.

Conditionnement

Exercice 8 *Formule de Bayes*
1. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité discret, et $(H_1, \ldots, H_n)$ une partition de Ω en n événements de probabilité non nulle. Montrer que, pour $i = 1, \ldots, n$, si A est un événement de probabilité non nulle :

$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A|H_j)\mathbb{P}(H_j)}.$$

2. Une maladie M affecte une personne sur 1000 dans une population donnée. On dispose d'un test sanguin qui détecte M avec une fiabilité de 99% lorsque cette maladie est effectivement présente. Cependant, on obtient aussi un résultat faussement positif pour 0,2% des personnes saines testées. Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsque son test est positif ?

Exercice 9
Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires, indépendantes, de loi de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2 respectivement.
1. Calculer la loi de $X_1 + X_2$.
2. Calculer la loi conditionnelle de X_1 sachant $X_1 + X_2$. Identifier une loi connue.

Correction de la feuille de TD 3

Exercice 1 *Fonctions indicatrices*
1. On a facilement $\mathbf{1}_{A^c} = 1 - \mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.
2. D'après les définitions,

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_A] = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbf{1}_A(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(A).$$

3. On remarque que : pour tout $\omega \in \Omega$,

$$X(\omega) = \sum_{k=1}^{X(\omega)} 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X\geq k\}}(\omega),$$

d'où par théorème de convergence dominée (les sommes partielles sont inférieures à X, intégrable) (ou convergence monotone) :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X\geq k\}}] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k).$$

Indépendance

Exercice 2 *Indépendance entre 3 événements*
L'espace des épreuves est $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$, où la première composante représente la valeur du premier dé, et la seconde celle du second dé. Les couples de résultats sont équiprobables, donc on munit Ω de la loi uniforme $\mathbb{P}$.
1. On a $\mathrm{Card}(A) = 3 \cdot 6 = 18 = \mathrm{Card}(B)$ et $\mathrm{Card}(C) = 6 \cdot 3 = 18$ donc $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 1/2$. D'autre part, on voit que $A \cap C = \{\text{deux lancers pairs}\} = B \cap C = A \cap B$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = (3 \cdot 3)/36 = 1/4$.
2. On a : $A \cap B \cap C = A \cap B$ donc $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 1/4 \neq 1/8 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$.

Exercice 3 *Indépendance et passage au complémentaire*
1. Pour tous $2 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1^c \cap A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) &= \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = (1 - \mathbb{P}(A_1))\mathbb{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_k}) \\ &= \mathbb{P}(A_1^c)\mathbb{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_k})\end{aligned}$$

et $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_k})$.
2. On raisonne par récurrence : on sait que les événements $B_1, A_2, \dots, A_n$ sont indépendants grâce à la question 1 (ou trivialement si $B_1 = A_1$), donc on peut leur appliquer la question 1 pour voir que $B_1, B_2, A_3, \dots, A_n$ sont indépendants, etc.
3. Supposons les variables aléatoires $\mathbf{1}_{A_1}, \dots, \mathbf{1}_{A_n}$ indépendantes. Alors, pour tous $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots A_{i_k}) &= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}}] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_{i_1}}] \cdots \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_{i_k}}] \\ &= \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_k})\end{aligned}$$

d'où l'indépendance des événements. Supposons réciproquement les événements $A_1, \ldots, A_n$ indépendants. Pour tout événement A, lorsque x parcourt $\mathbb{R}$, l'événement $\{\mathbf{1}_A = x\}$ est ou bien égal à A ou à A^c. Il apparaît donc que l'événement $\{A_{i_1} = c_1, \ldots, A_{i_k} = c_k\}$ est de la forme de ceux considérés dans l'exercice 3, d'où :

$$\mathbb{P}(\mathbf{1}_{A_{i_1}} = c_1, \ldots, \mathbf{1}_{A_{i_k}} = c_k) = \mathbb{P}(B_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(B_{i_k}) = \mathbb{P}(\mathbf{1}_{A_{i_1}} = c_1) \cdots \mathbb{P}(\mathbf{1}_{A_{i_k}} = c_k),$$

où $B_i = A_i$ si $c_i = 1$, $B_i = A_i^c$ si $c_i = 0$. D'où l'indépendance de $\mathbf{1}_{A_1}, \ldots, \mathbf{1}_{A_n}$.

Exercice 4
1. On a, pour $a, b \in \mathbb{R}$ (ou $\in f(X(\Omega))$ et $g(Y(\Omega))$:

$$\mathbb{P}(f(X) = a, g(Y) = b) = \mathbb{P}(X \in f^{-1}(a), Y \in g^{-1}(b)) = \mathbb{P}(X \in f^{-1}(a))\mathbb{P}(Y \in g^{-1}(b)) = \mathbb{P}(f(X) = a)\mathbb{P}($$

2. On a : (on peut changer l'énoncé et prendre X et Y à valeurs dans $\mathbb{Z}$ pour coller au cours)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|XY|] &= \sum_{k \in X(\Omega), l \in Y(\Omega)} |kl| \mathbb{P}(X = k, Y = l) = \sum_{k \in X(\Omega), l \in Y(\Omega)} |kl| \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = l) \\
&= \sum_{k \in X(\Omega)} |k| \mathbb{P}(X = k) \sum_{l \in Y(\Omega)} |l| \mathbb{P}(Y = l) = \mathbb{E}[|X|]\mathbb{E}[|Y|] < \infty
\end{aligned}$$

donc XY est intégrable, et en refaisant le calcul sans les valeurs absolues (justifié par Fubini), on trouve $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.
3. On a :

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathbb{E}[(X+Y)^2] - \mathbb{E}[X+Y]^2 = \mathbb{E}[X^2+Y^2+XY] - (\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y])^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]$$

en développant et en utilisant la question précédente.
4. Pas de vraie difficulté pour généraliser, sinon dans l'écriture. On remarque que la question ci-dessus requiert juste l'indépendance des variables 2 à 2.

Exercice 5 Prendre un contre-exemple.

Lois usuelles et indépendance

Exercice 6 *Interprétation des lois usuelles*
On considère une suite de variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots$ indépendantes, telle que $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$ (on représente le succès par 1) et $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p$ (et l'échec par 0).
1. On note S le nombre de succès parmi les n premières expériences. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S = k) &= \sum_{S \subset \{1, \ldots, n\}, \mathrm{Card}(S) = k} \mathbb{P}(\forall i \in S, X_i = 1, \forall i \notin S, X_i = 0) \\
&= \sum_{S \subset \{1, \ldots, n\}, \mathrm{Card}(S) = k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.
\end{aligned}$$

2. L'instant N de premier succès est tel qu'il est précédé de $N-1$ échecs, d'où, pour $k \geq 1$:

$$\mathbb{P}(N=k) = \mathbb{P}(X_1 = 0, \ldots, X_{k-1} = 0, X_k = 1) = (1-p)^k p.$$

Autrement dit, N suit la loi géométrique de paramètre p.

Exercice 7 Soit k un entier non nul.
1. $\mathbb{P}(X \leq k) = 1 - \mathbb{P}(X > k) = (1-p_X)^k$ donc $F_X(x) = 1-(1-p_X)^k$ si $x > 0$ et $k \leq x < k+1$; 0 sinon.
De même $F_Y(y) = 1-(1-p_Y)^k$ si $y > 0$ et $k \leq y < k+1$; 0 sinon.
$\mathbb{P}(Z \leq z) = 1 - \mathbb{P}(Z > z) = 1 - \mathbb{P}(X > z, Y > z) = 1 - \mathbb{P}(X > z)\mathbb{P}(Y > z) = 1-(1-p_X)^k(1-p_Y)^k$ si $z > 0$ et $k \leq z < k+1$; 1 sinon.
2. Z est de loi Géométrique de paramètre $p_Z = 1-(1-p_X)(1-p_Y) = p_X + p_Y - p_X p_Y$.

Conditionnement

Exercice 8 *Formule de Bayes.*
1. On a, en remarquant que A est la réunion disjointe des événements $A\cap H_1, \dots, A\cap H_n$:

$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(H_i \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap H_i)}{\sum_j \mathbb{P}(A \cap H_j)} = \frac{\mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i)}{\sum_j \mathbb{P}(A|H_j)\mathbb{P}(H_j)}.$$

2. Ici, Ω est la population considérée, dont une partie E est atteinte par la maladie M, et dont une partie T a une réaction positive au test. Par hypothèse, $\mathbb{P}(E) = 1/1000$, $\mathbb{P}(T|E) = 0,99$ et $\mathbb{P}(T|E^c) = 0,002$, d'où (cas particulier de la formule de Bayes pour la partition de Ω en E et E^c) :

$$\mathbb{P}(E|T) = \frac{P(E)P(T|E)}{P(E)P(T|E) + P(E^c)P(T|E^c)} = \frac{1/1000 \cdot 0,99}{1/1000 \cdot 0,99 + 0,999 \cdot 2/1000} \simeq 0,33$$

Ainsi, le test a deux chances sur trois de donner une réponse positive à une personne saine, ce qui est loin d'être négligeable !

Exercice 9
1. Si X (resp. Y) suit la loi de Poisson de paramètre λ_1 (resp. λ_2), alors :

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s) = e^{\lambda_1(1-s)}e^{\lambda_2(1-s)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(1-s)},$$

donc $X + Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.
Méthode directe : $\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X=j)\mathbb{P}(Y=k-j) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\lambda_1^j}{j!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^j}{j!}e^{-\lambda_2}$
$= (\lambda_1+\lambda_2)^k/k!e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$. C'est bien la loi de Poisson de paramètre la somme des paramètres de X et Y.
2. $\mathbb{P}(X=j|X+Y=k) = \frac{\mathbb{P}(X=j)\mathbb{P}(Y=k-j)}{\mathbb{P}(X+Y=k)} = \frac{\lambda_1^j}{j!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{k-j}}{(k-j)!}e^{-\lambda_2}\frac{k!}{(\lambda_1+\lambda_2)^k e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}$
$= C_k^j \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^j \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{k-j}$
Par conséquent, la loi de X sachant $X+Y=k$ suit la binomiale de paramètre $(k, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})$.

FEUILLE DE TD 4

Somme de v.a. indépendantes et fonction génératrice

Exercice 1 Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité discret, et X, Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{N}$.
1. Exprimer la loi de $X+Y$ en fonction de celles de X et Y.
2. Montrer que, pour tout $s \in [-1,1]$, $G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$. (on pourra donner deux preuves)
3. Généraliser ce qui précède au cas de n variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$.
4. Quelle est la loi de la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p ? Retrouver alors l'espérance et la variance de cette loi.
5. Quelle est la loi de la somme de :
- deux variables aléatoires indépendantes de loi binomiale de paramètres (n, p) et (m, p) ?
- deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre λ et μ ?

Exercice 2 *Dés truqués*
1. Quelle est la fonction génératrice de la loi uniforme sur $\{2, \ldots, 12\}$?
2. Soit X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{1, \ldots, 6\}$. En étudiant les racines du polynôme $G_{X_1}G_{X_2}$, montrer que la loi de $X_1 + X_2$ ne peut pas être la loi uniforme sur $\{2, \ldots, 12\}$.
Indication : on remarquera que $G_{X_i}(s) = s\varphi_i(s)$ où φ_i est un polynôme à coefficients réels de degré impair, qui admet donc une racine réelle (pourquoi ?).
3. Peut-on piper deux dés indépendants de façon à rendre toutes les sommes entre 2 et 12 équiprobables ?

Lois continues usuelles

Exercice 3 Calculer l'espérance et la variance de X lorsque X est une variable aléatoire
1. de loi uniforme $\mathcal{U}([a,b])$ sur l'intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$;
2. de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ de paramètre $m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$;
3. de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$.

Exercice 4 Soit X une variable aléatoire de densité $f(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$ avec $a > 0$. La loi de X est appelée loi de Cauchy de paramètre a.
Vérifier que f est bien une densité. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la variable $|X|^\alpha$ est-elle intégrable ?

Exercice 5 Une variable aléatoire positive X est *sans mémoire* si

$$\mathbb{P}(X > t+s | X > t) = \mathbb{P}(X > s), \quad \forall t, s \geq 0.$$

Montrer qu'une variable aléatoire positive dont la loi admet une densité est sans mémoire si, et seulement si elle suit une loi exponentielle.

Exercice 6 Soit X une variable aléatoire réelle.
1. Supposons que X a pour densité f. Quel lien y a-t-il entre f et la fonction de répartition F_X ?
2. Réciproquement, donner une condition sur F_X pour que la loi de X admette une densité.
3. Soit r un réel > 0. On suppose X à valeurs positives. Montrer que

$$\mathbb{E}[X^r] = \int_0^\infty r x^{r-1} \mathbb{P}(X > x) dx,$$

où les deux membres sont finis ou infinis. On pourra donner une preuve dans le cas à densité (à l'aide de ce qui précède), et une preuve dans le cas général (dans l'esprit de la question 1.3 de la feuille 3).

Exercice 7 Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$.
1. Calculer la loi de $\max_{i=1,\ldots,n} X_i$. *(Indication : calculer la fonction de répartition.)*
2. Calculer la loi de $\min_{i=1,\ldots,n} X_i$.

Somme de v.a. indépendantes et fonction génératrice

Exercice 1 *Somme de v.a. indépendantes et fonctions génératrices*

1. L'événement $\{X+Y=n\}$ est la réunion disjointe des $\{X=k, Y=l\}$ pour $k,l \in \mathbb{N}$ tels que $k+l=n$, d'où :

$$\mathbb{P}(X+Y=n) = \sum_{k,l\in\mathbb{N}, k+l=n} \mathbb{P}(X=k, Y=l) = \sum_{k+l=n} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=l),$$

soit : $\mu_{X+Y}(\{n\}) = \sum_{k=1}^{n} \mu_X(\{k\})\mu_Y(\{n-k\})$.
2. On reconnaît dans la formule précédente l'expression des coefficients de la série entière produit de G_X et G_Y. Comme ces deux séries entières convergent sur $[-1,1]$, on a donc, pour tout $s \in [-1,1]$, $G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$. Autre méthode : X et Y sont indépendantes, donc s^X et s^Y aussi, et celles-ci sont intégrables pour $s \in [-1,1]$, d'où :

$$G_{X+Y}(s) = E[s^{X+Y}] = E[s^X s^Y] = E[s^X]E[s^Y] = G_X(s)G_Y(s).$$

3. La généralisation à n variables ne pose pas de problème.
4. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p. On a $G_{X_1}(s) = \cdots = G_{X_n}(s) = p + (1-p)s$, d'où, pour tout s :

$$G_{X_1+\cdots+X_n}(s) = G_{X_1}(s)\cdots G_{X_n}(s) = (p+(1-p)s)^n = G_S(s),$$

où S est une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et p. Comme la fonction génératrice caractérise la loi, $Y = X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres n et p. En particulier, l'espérance de cette loi est : $E[Y] = E[X_1 + \cdots + X_n] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = np$, et sa variance est (vu l'indépendance) : $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i) = np(1-p)$. Remarquons que l'exercice précédent donnait déjà la loi loi binomiale comme somme de Bernoullis indépendantes.
5.
- Si X (resp. Y) suit la loi binomiale de paramètres n et p (resp. m et p), alors :

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s) = (p+(1-p)s)^n(p+(1-p)s)^m = (p+(1-p)s)^{m+n},$$

  donc $X+Y$ suit la loi binomiale de paramètres $m+n$ et p (ce qui se comprend bien par l'interprétation précédente).
- Si X (resp. Y) suit la loi de Poisson de paramètre λ (resp. μ), alors :

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s) = e^{\lambda(1-s)}e^{\mu(1-s)} = e^{(\lambda+\mu)(1-s)},$$

  donc $X+Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Exercice 2 *Dés truqués*
1. Soit X une variable de loi uniforme sur $\{2,\dots,12\}$. Pour $s\in[-1,1]$ (ou $\mathbb{R}$),

$$G_X(s)=\sum_{i=2}^{12}\frac{1}{11}s^i=\frac{s}{11}\frac{1-s^{11}}{1-s}.$$

2. Supposons que l'on ait $G_{X_1}G_{X_2}=G_X$ (donné ci-dessus). Remarquons que, pour $i=1,2$,

$$G_{X_i}(s)=\sum_{j=1}^{6}\mathbb{P}(X_i=j)s^j=s\varphi_i(s),$$

où φ_i est un polynôme, à coefficients réels, et que la condition $\mathbb{P}(X_1+X_2=12)=1/11$ implique $1/11=\mathbb{P}(X_1=6,X_2=6)=\mathbb{P}(X_1=6)\mathbb{P}(X_2=6)$ et donc que φ_i est de degré 5, impair. Par un argument de valeurs intermédiaires, les polynômes φ_1 et φ_2 ont donc chacun au moins une racine réelle. Or :

$$11s\varphi_1(s)\varphi_2(s)=\frac{1-s^{11}}{1-s},$$

et le polynôme du membre de droite a pour racines les racines onzièmes de l'unité autres que 1, dont aucune n'est réelle : contradiction.
3. Tant que les dés sont indépendants, on ne peut donc les piper (i.e. modifier leur loi) de façon à rendre toutes les sommes entre 2 et 12 équiprobables.

Lois continues usuelles

Exercice 3 UNIFORME la densité est $\dfrac{\mathbf{1}_{[a,b]}(x)}{b-a}$ et la f.r. est $F(x)=\dfrac{x-a}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b[}(x)+\mathbf{1}_{[b,\infty[}(x)$.
Pour tout $r>0$, la fonction $|x|^r f_X(x)$ est bornée par $\dfrac{\max(|a|,b)^r}{b-a}$ intégrable sur $[a,b]$ donc X admet des moments de tout ordre. En particulier $\mathbb{E}(X)=\dfrac{a+b}{2}$ et $Var(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.
On peut également noter que si $X\sim U(0,1)$ alors $Y=(b-a)X+a\sim U(a,b)$. On en déduit facilement les moment de Y à partir de ceux de X.

NORMALE La densité est $f_{m,\sigma}(x)=\dfrac{\exp(-(x-m)^2/(2\sigma^2))}{\sqrt{2\pi}\sigma}$, la fonction de répartition n'a pas d'expression explicite, seulement la forme intégrale $\int_{-\infty}^x f_{m,\sigma}(y)dy$.
C'est bien une loi de proba : $I=\int_{-\infty}^{\infty}f_{m,\sigma}(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}f_{0,1}(y)dy=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ par changement de variable $x->\dfrac{x-m}{\sigma}$, la parité puis le changement de variable $x->\sqrt{2}x$.
D'autre part :
$\left(\int_{\mathbb{R}^+}e^{-x^2}dx\right)^2=\iint_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+}e^{-x^2-y^2}dxdy=\iint_{\mathbb{R}^+\times[0,\pi/2]}e^{-r^2}rdrd\theta=\left(\int_0^\infty e^{-r^2}rdr\right)\left(\int_0^{\pi/2}d\theta\right)=1/2\times\pi/2=\pi/4$. Donc $I=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi/4}=1$. Cette loi admet des moments de tous les ordres.
En effet, pour tout $r>0$, on a $|x|^r f_{m,\sigma}(x)$ est intégrable.

On peut également montrer que si $X \sim N(m,\sigma)$ alors $Y = \dfrac{X-m}{\sigma} \sim N(0,1)$. On en déduit facilement que $\mathbb{E}(X) = m + \mathbb{E}(Y)\sigma$ et $Var(X) = \sigma^2 Var(Y)$. Il suffit de calculer les moments de la $N(0,1)$. Par parité, on a que pour tout m entier impair, $\mathbb{E}(Y^m) = 0$. Soit maintenant un entier pair. On a $\mathbb{E}(Y^m) = \int y^{m-1} y f_{0,1}(y)dy = (m-1)\int y^{m-2} f_{0,1}(y)dy$ en intégrant par parties. Donc on obtient la relation $E(Y^m) = (m-1)E(Y^{m-2})$ lorsque m est pair.
Comme $E(Y^2) = 1$ on obtient $\mathbb{E}(Y^m) = 1\ldots 3\ldots(m-1) = \dfrac{(2k)!}{2^k k!}$ en posant $m = 2k$.

EXPONENTIELLE La densité est $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{x\in\mathbb{R}_+}$. Donc la f.r. est $F_\lambda(x) = 1 - e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{x\in\mathbb{R}_+}$. La loi exponentielle sert à modéliser les durées de vie. On a $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$ et $Var(X) = 1/\lambda^2$.

Exercice 4
1. $\frac{a|x|^\alpha}{\pi(a^2+x^2)}$ est intégrable ssi $\alpha - 2 < -1$, i.e. $\alpha < 1$.
2. $\int e^{-|t|}e^{i\xi t}dt = \int_{-\infty}^0 e^{-t(1+i\xi)}dt + \int_0^\infty e^{-t(1+i\xi)}dt = \dfrac{1}{1-i\xi} + \dfrac{1}{1+i\xi} = \dfrac{2}{1+\xi^2}$.
3. On déduit de la question précédente et de la transformée de fourier inverse que $e^{-|t|} = \dfrac{1}{2\pi}\int \dfrac{2}{1+\xi^2}e^{i\xi t}d\xi$. En particulier, la fonction caractéristique de Y une variable de loi de cauchy de paramètre 1 est $e^{-|t|}$.
De plus, il faut noter que si X est de loi cauchy de paramètre a alors $Y = X/a$ est de loi cauchy de paramètre 1.
En effet, $\mathbb{P}(X/a \le x) = \mathbb{P}(X \le ax) = \int_{-\infty}^{ax} \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{a}{\pi(a^2+(ay)^2)}ady = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi(1+y^2)}dy$.
$\mathbb{E}(e^{itX}) = \mathbb{E}(e^{itaa^{-1}X}) = \mathbb{E}(e^{itaY}) = e^{-|ta|} = e^{-a|t|}$.

Exercice 5 Soit f la densité de notre variable et posons $\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \int_x^\infty f(t)dt$. $\bar{F}$ est différentiable avec dérivée $\bar{F}'(x) = -f(x)$. La propriété "sans mémoire" s'écrit $\bar{F}(s+t) = \bar{F}(t)\bar{F}(s)$. Dériver cette equation par rapport à t en $t=0$ donne l'equation différentielle

$$\bar{F}'(s) = -f(0)\bar{F}(s)$$

qui a comme solution $\bar{F}(s) = ce^{-f(0)s}$. Donc $f(t) = cf(0)e^{-f(0)t}$ et $c = 1$ est déterminé par la normalisation. On obtient donc les lois exponentielles.

Exercice 6 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ de densité f et $r > 0$.

$$\int_0^\infty rx^{r-1}\mathbb{P}(X > x)dx = \int_0^\infty\int_y^\infty rx^{r-1}f(y)dydx = \int_0^\infty\int_0^y rx^{r-1}f(y)dxdy = \int_0^\infty x^r f(y)dy = \mathbb{E}(X^r).$$

On peut justifier l'échange d'intégration dans le cas où $\mathbb{E}(X^r)$ est fini car cette finitude est l'hypothèse dans le Thm de Tonelli.
Si $E(X^r)$ est fini alors

$$\mathbb{E}(X^r) = \lim_{b\to\infty}\int_0^b x^r F\{dx\} = -b^r(1-F(b)) + \int_0^b rb^{r-1}(1-F(x))dx$$

en appliquant avec $G = 1 - F$ la formule

$$\int_a^b u(x)G\{dx\} = u(b)G(b) - u(a)G(a) - \int_a^b u'(x)G(x)dx.$$

On sait que $\lim \int x^r F\{dx\}$ finie donc $\int_b^\infty x^r F\{dx\} \geq b^r(1-F(b))$ permet de déduire que la limite du terme de droite vaut 0. Il suit le résultat. On a d'autre part $\int_0^b x^r F\{dx\} \leq \int_0^b rb^{r-1}(1-F(x))dx$ car pour b positif on a $b^r(1-F(b))$ positif. Donc lorsque $E(X^r)$ est infini alors il en est de même de $\int_0^\infty rb^{r-1}(1-F(x))dx$.

Exercice 7 Pour une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, on a une densité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{x>0}$ et une fonction de répartition $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ si $x > 0$ et $F(x) = 0$ sinon.
Il suit $\mathbb{P}(\max_{i=1,\ldots,n} X_i \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x)^n = (1-e^{-\lambda x})^n$.
D'autre part, $\mathbb{P}(\min_{i=1,\ldots,n} X_i \leq x) = 1 - \mathbb{P}(\min_{i=1,\ldots,n} X_i > x) = 1 - \mathbb{P}(X > x)^n = 1 - e^{-n\lambda x}$.

FEUILLE DE TD 5

Obtenir une loi à partir d'une autre

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = f(X)$.
1. On suppose que X admet une densité et que f est injective et C^1 par morceau. Déterminer la densité de Y à l'aide d'un changement de variable.
2. On suppose que la loi de X est uniforme sur $[0,1]$ et $f(x) = -\ln x$. Quelle est la loi de Y ?
3. Si X est de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$, trouver une fonction f telle que Y est de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
4. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, \pi]$. Donner la loi de $\sin(U)$.
5. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-1,1]$. Donner la loi de
(a) $|U|$ (b) U^2 (c) $\frac{1}{2} \ln \frac{1+U}{1-U}$.

Exercice 2 Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
1. Calculer la loi de la variable $\frac{X}{Y}$.
2. En déduire la loi de Z^{-1} si Z est une variable aléatoire de loi de Cauchy.

Exercice 3 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Calculer, en fonction de m et σ, l'espérance $\mathbb{E}[(X+Y)^2]$.

Quelques inégalités

Exercice 4 Soit X et Y des variables aléatoires positives de carré intégrable sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
1. A quelle condition a-t-on $\mathbb{E}(X^2) = 0$? On exclut cette possibilité dans la suite.
2. En considérant la fonction $\lambda \mapsto \mathbb{E}\left[(X + \lambda Y)^2\right]$, retrouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\mathbb{E}(XY)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2).$$

3. Montrer que pour tout $a \in [0,1]$:

$$(1-a)\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}\left(X \mathbf{1}_{[a\mathbb{E}(X), \infty[}(X)\right).$$

4. En déduire que pour tout $a \in [0,1]$:

$$\mathbb{P}(X \geq a\mathbb{E}(X)) \geq (1-a)^2 \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}.$$

Exercice 5 *L'inégalité de Jensen*
Soit $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe définie sur un intervalle E qui contient les valeurs d'une variable aléatoire X. On suppose que X et $f(X)$ sont intégrables. Montrer que

$$f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X)).$$

Montrer que si f est strictement convexe, alors l'égalité $f(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(f(X))$ implique que X est constante sur un événement presque sûr (c'est-à-dire de mesure 1 pour $\mathbb{P}$).

Exercice 6 Soit Ω un ensemble fini.
L'*entropie* d'une probabilité P sur Ω est $H(P) = -\sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\}) \log_2 P(\{\omega\})$, où $\log_2$ est le logarithme en base 2 et on adopte la convention $0 \log_2 0 = 0$. Pour P, Q probabilités sur Ω avec $Q(\{\omega\}) > 0$ pour tout $\omega \in \Omega$, leur *entropie relative* est $D(P\|Q) = \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\}) \log_2 \left(\frac{P(\{\omega\})}{Q(\{\omega\})}\right)$.
1. Montrer à l'aide de l'inégalité de Jensen que D est positive et que $D(P\|Q) = 0$ implique $P = Q$.
2. En déduire que, parmi les probabilités sur Ω, l'entropie est maximale pour la loi uniforme sur Ω et uniquement pour celle-ci.

Entropie

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité fini. L'entropie (sur la base b) de la distribution $\mathbb{P}$ est la valeur

$$H_b(\mathbb{P}) := -\sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) \log_b(\mathbb{P}(\{\omega\}))$$

où $b > 0$ est la base du logarithme. Ici on définit $0 \log_b(0) = 0$.
Remarque : En théorie de l'information on utilise surtout $b = 2$, c'est l'entropie binaire qu'on va noter H. Autrement dit, l'entropie binaire H est l'espérance de la variable aléatoire $Z(\omega) = -\log_2(\mathbb{P}(\{\omega\}))$. L'entropie binaire de la loi μ_X d'une variable aléatoire finie X est notée $H(\mu_X)$ ou bien $H(X)$.

Exercice 7 On considère un jeux de 32 cartes et la variable aléatoire X définie par

$$X(\text{carte}) = \begin{cases} a & \text{si la carte est noir} \\ b & \text{si la carte est un coeur} \\ c & \text{si la carte est le } 7, 8, 9, 10 \text{ de carreau} \\ d & \text{pour les autres cartes} \end{cases}$$

où a, b, c, d sont quatre réels distincts.
1. Déterminer $H(X)$.
2. Alice et Bob jouent au jeu suivant : Alice tire une carte C et demande Bob de déterminer la valeur $X(C)$ en posant des questions de type "$X(C)$ appartient-il à A ?" où A est une partie de $\{a, b, c, d\}$. Supposons que Bob choisit les questions "$X(C) = a$?", "$X(C) = b$?" et "$X(C) = c$?" dans cet ordre. Montrer que la valeur moyenne du nombre de questions que Bob à besoin de poser vaut $H(X)$.

Exercice 8 Soit maintenant $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}'$ deux probabilités sur Ω. L'entropie relative notée $D(\mathbb{P}\|\mathbb{P}')$ est définie comme l'espérance de la variable $\omega \to \log_2(\mathbb{P}(\{\omega\})) - \log_2(\mathbb{P}'(\{\omega\}))$ par rapport à $\mathbb{P}$:

$$D(\mathbb{P}\|\mathbb{P}') = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) \log_2(\frac{\mathbb{P}(\{\omega\})}{\mathbb{P}'(\{\omega\})}).$$

1. Montrer à l'aide de l'inégalité de Jensen que D est positif et que $D(\mathbb{P}\|\mathbb{P}') = 0$ implique $\mathbb{P} = \mathbb{P}'$.

2. Soit u la distribution uniforme sur Ω. Montrer que

$$D(\mathbb{P}\|u) = H(u) - H(\mathbb{P}).$$

3. En déduire que l'entropie binaire d'une distribution sur Ω prend ses valeurs entre 0 et $\log_2 |\Omega|$ et que la distribution uniforme est l'unique point maximal de H.

Obtenir une loi à partir d'une autre

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Soit $Y = f(X)$.
1. $\mathbb{P}(Y \in A) = \mathbb{P}(f(X) \in A) = \mathbb{P}(X \in f^{-1}(A))$. En particular $\mathbb{P}(Y \in \mathbb{R}) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1$ et les autres axiomes.
2. Soit ρ_X la densité de X. On regarde le cas où f est injective et C^1.
$\mathbb{P}(Y \in A) = \int 1_A(f(t))\rho_X(t)dt = \int 1_A(s)\frac{\rho_X(f^{-1}(s))}{|f'(f^{-1}(s))|}ds$.
Donc $\rho_Y(s) = \frac{\rho_X(f^{-1}(s))}{|f'(f^{-1}(s))|}$ (ou $\rho_Y = |f^{-1\prime}|\rho_X \circ f^{-1}$).
3. $\rho_X = 1_{[0,1]}$, $f^{-1}(s) = e^{-s}$, $f^{-1\prime}(s) = -e^{-s}$. Donc $\rho_Y(s) = e^{-s}1_{[0,\infty[}(s)$, ce qui est la loi exponentielle de paramètre 1.
4. Réponse : $f(x) = \sigma^{-1}(x - m)$.
5. Par application du théorème du transfert, si g est une fonction mesurable bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors

$$\mathbb{E}(g(\sin(U))) = \int_{\mathbb{R}} g(\sin(u))\mu_U(du)$$

et

$$\mathbb{E}(g(\sin(U))) = \int_{\mathbb{R}} g(t)\mu_{\sin(U)}(dt).$$

On sait que U a pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue $1/\pi\mathbf{1}_{[0,\pi]}(u)$. Donc

$$\int_{\mathbb{R}} g(\sin(u))\mu_U(du) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} g(\sin(u))du = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} g(\sin(u))du.$$

En posant $t = \sin(u)$ on a $u = \arcsin(t)$ et

$$\mathbb{E}(g(\sin(U))) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 g(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

Par conséquent, $\mu_{\sin(U)}(dt) = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathbf{1}_{[0,1]}(t)dt$, donc la densité de $\sin(U)$ au point t par rapport à la mesure de Lebesgue est $\dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathbf{1}_{[0,1]}(t)$.
6. Pour $|U|$ et U^2, il est plus direct de passer par la fonction de répartition. On trouve que $|U|$ est de loi uniforme sur $[0,1]$, U^2 a pour densité au point t par rapport à la mesure de Lebesgue $\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\mathbf{1}_{[0,1]}(t)$. Pour la transformation par $h(u) := \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+u}{1-u}$, on peut remarquer que cette fonction est strictement croissante de $]-1,1[$ vers $\mathbb{R}$. On peut leur faire appliquer ce qui precede, on obtient une densité au point t donnée par $\dfrac{2e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}$.

Exercice 2 Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
1. La densité de (X,Y) est $\rho(t_1,t_2) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(t_1^2+t_2^2)}$. Alors

$$\mathbb{P}(\frac{X}{Y} \in A) = \int_{\mathbb{R}^2} 1_A(\frac{t_1}{t_2})\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(t_1^2+t_2^2)}dt_1dt_2 = \int_{\mathbb{R}^2} 1_A(s)\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(s^2+1)t_2^2}ds|t_2|dt_2.$$

Par Fubini on peut evaluer

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(s^2+1)t_2^2}|t_2|dt_2 = \frac{1}{\pi(1+s^2)}$$

ce qui est donc la densité de la loi de Y.
2. Si Z est une variable aléatoire de loi de Cauchy alors sa loi est la même que celle de $\frac{X}{Y}$. Par symmetrie $\frac{Y}{X}$ a la même loi que $\frac{X}{Y}$. Donc Z^{-1} a la même loi que Z.

Exercice 3 On trouve $\mathbb{E}[(X+Y)^2] = \mathbb{E}[X^2]+\mathbb{E}[Y^2]+2\mathbb{E}[XY] = m^2+\sigma^2+m^2+\sigma^2+2m^2 = 4m^2+2\sigma^2$.

Quelques inégalités

Exercice 4 Soit X et Y des variables aléatoires positives de carré intégrables sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
1. La variable aléatoire X^2 est positive ou nulle donc $\mathbb{E}(X^2) = 0$ si et seulement si X^2 est nulle presque sûrement ou encore si et seulement si X est nulle presque sûrement.
2. La fonction $\lambda \to \mathbb{E}\left[(X+\lambda Y)^2\right] = \mathbb{E}(X^2) + 2\lambda\mathbb{E}(XY) + \lambda^2\mathbb{E}(Y^2)$ est un trinôme du second degré toujours positif. Par conséquent son discriminant est négatif : $4\mathbb{E}(XY)^2 - 4\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) \leq 0$ autrement dit, $\mathbb{E}(XY)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$.
3. Comme X est une variable positive on a $\mathbf{1}_{[a\mathbb{E}(X),\infty[}(X) = 1 - \mathbf{1}_{[0,a\mathbb{E}(X)[}(X)$.
Or $\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{[0,a\mathbb{E}(X)[}(X)) \leq a\mathbb{E}(X)$ donc $\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{[a\mathbb{E}(X),\infty[}(X)) \geq \mathbb{E}(X) - a\mathbb{E}(X)$.
4. En utilisant les deux questions précédentes on a :

$$(1-a)^2\mathbb{E}(X)^2 \leq \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{[a\mathbb{E}(X),\infty[}(X))^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{P}(X \geq a\mathbb{E}(X)).$$

Exercice 5 *L'inégalité de Jensen* A faire

Exercice 6 **1.** Appliquer Jensen à $-\ln$ et la mesure $\mathbb{P}$: $\sum P(\omega)(-\log\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}) \geq -\log\sum P(\omega)\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = 0$, ou alors à $x \mapsto x\ln x$ qui est strictement convexe (dérivée $\ln x+1$ strictement croissante) et à la mesure Q : $\sum\frac{P(\omega)}{Q(\omega)}(-\log\frac{Q(\omega)}{P(\omega)})Q(\omega) \geq (\sum\frac{P}{Q}Q)\ln(\sum\frac{P}{Q}Q) = 0$. Le cas dégalité correspond à $\frac{P}{Q}$ constant Q-p.s., c'est-à-dire pour tout ω car $Q > 0$. La constante doit être 1 puisque ce sont des probas.
2. Prendre pour Q la mesure uniforme : l'inégalité devient $0 \leq \sum P(\omega)\log\frac{P(\omega)}{1/|\Omega|} = -H(P) + \log|\Omega| = -H(P) + H(u)$ (u proba uniforme), d'où $H(P) \leq H(u)$ et l'égalité donne une égalité dans la question d'avant donc $P = u$.

Entropie

Exercice 7 On considère un jeux de 32 cartes avec la variable aléatoire X où

$$X(carte) = \begin{cases} a & \text{si la carte est noir} \\ b & \text{si la carte est coeur} \\ c & \text{si la carte est carreau } 7,8,9,10 \\ d & \text{pour les autres cartes} \end{cases}$$

où a, b, c, d sont quatre nombres différents.
1. $H(X) = -\sum_{i\in\{a,b,c,d\}} \mathbb{P}(X=i)\log_2(\mathbb{P}(X=i)) = \frac{1}{2}\log_2(2) + \frac{1}{4}\log_2(4) + 2\frac{1}{8}\log_2(8) = 1,75$.
2. Alice et Bob jouent un jeu : Alice tire une carte C et demande Bob de déterminer la valeur $X(C)$ en posant des questions de type "$X(C)$, appartient-il à A?" où A est une partie de $\{a, b, c, d\}$. Supposons que Bob choisit les questions "$X(C) = a$?", "$X(C) = b$?", "$X(C) = c$?", dans cet ordre. Déterminer la valeur moyenne de nombre de questions que Bob à besoin de poser.
Soit L la variable aléatoire de nombre de questions Bob a du demander pour connaître le resultat. Alors $\mathbb{E}(L) = \frac{1}{2}1 + \frac{1}{4}2 + \frac{1}{8}3 + \frac{1}{8}3 = 1,75 = H(X)$.

Exercice 8 Voir copie de l'an passe.

FEUILLE DE TD 6

Exercice 1 *Généralisation d'inégalités du cours*
Soit X une variable aléatoire réelle de carré intégrable sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ telle que $g(x) \geq b > 0$ pour tout $x \in I \subset \mathbb{R}$. Montrer que

$$\mathbb{P}(X \in I) \leq b^{-1}\mathbb{E}(g(X)).$$

2. Retrouver à l'aide du résultat précédent les inégalités de Markov et Tchebycheff.
3. En utilisant la fonction $g(x) = (x + c)^2$ pour $c > 0$ montrer que si $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ alors pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}(X > t) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}.$$

Exercice 2 *Loi Gamma*
Pour $a > 0$ et $\lambda > 0$, on définit la loi $\gamma_{a,\lambda}$ par sa densité relativement à la mesure de Lebesgue :

$$f_{a,\lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \exp(-\lambda x) x^{a-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

1. Vérifier que cette fonction définit bien une densité.
2. Déterminer l'espérance de cette loi.

Soit $V_1, V_2, \ldots, V_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
3. Montrer par récurrence que la loi de la somme $V_1 + \cdots + V_n$ est la loi $\gamma_{n,\lambda}$.

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\gamma_{a,\lambda}$.
4. Déterminer la loi de λX.
5. Montrer que $X + Y$ et X/Y sont des v.a. indépendantes dont on calculera les lois.
6. Montrer que $X + Y$ et $X/(X + Y)$ sont des v.a. indépendantes. Calculer la loi de $X/(X + Y)$.

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\gamma_{a,\lambda}$ et $\gamma_{b,\lambda}$ respectivement.
7. Déterminer la loi de $X + Y$.

Soit $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
8. Montrer que Z_1^2 suit une loi $\gamma_{1/2,1/2}$.
9. Montrer que $Z_1^2 + \cdots + Z_n^2$ suit une loi $\gamma_{n/2,1/2}$. *(La loi $\gamma_{n/2,1/2}$ est également appelée loi $\chi^2(n)$).*

Exercice 3 *Loi Normale*
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
1. Notons $\Phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$ la fonction caractéristique de X. Donner $Re\,(\Phi_X(t))$ et

$Im\,(\Phi_X(t))$ puis montrer à l'aide d'intégrations par parties que $\Phi'_X(t) = -t\Phi_X(t)$. En déduire l'expression de Φ_X.
2. Soit $\theta \in [0, 2\pi]$. Déterminer la loi de $X_\theta = X\cos(\theta) + Y\sin(\theta)$ et $Y_\theta = -X\sin(\theta) + Y\cos(\theta)$.
3. Les variables X_θ et Y_θ sont-elles indépendantes ?

Exercice 4 *Extrait du partiel d'avril 2008*
1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $N(m, \sigma^2)$ et $N(m', \sigma'^2)$. Quelle est la loi de $X + Y$?
2. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, toutes de loi $N(m, \sigma^2)$. Quelle est la loi de $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$?
3. Montrer que $\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X}_n - m)$ suit une loi $N(0, 1)$.
4. Soit $\alpha \in]0, 1[$, montrer qu'il existe (sans l'expliciter) un unique nombre réel positif ϕ_α tel que

$$\int_{-\phi_\alpha}^{\phi_\alpha} e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = 1 - \alpha.$$

5. En déduire qu'il existe un intervalle $I_\alpha = [m - t, m + t]$, avec t à préciser en fonction des constantes de l'exercice, tel que $P(\overline{X}_n \in I_\alpha) = 1 - \alpha$.
6. En déduire que pour tout $t > 0$ on a $\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}_n - m| > t) = 0$.
7. On applique 5) au cas où $m = 1/2, \sigma = 1/2$, $n = 1000$ et $\alpha = 0,05$. On a $\phi_\alpha = 1,96$ dans ce cas. Que peut-on dire de $\mathbb{P}(\overline{X}_n \leq 0,45)$?

Correction de la feuille de TD 6

Exercice 1 *Généralisation d'inégalités du cours*
Soit X une variable aléatoire réelle de carré intégrable sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
1. g positive donne $\mathbb{E}(g(X)\mathbf{1}_{X\notin I}) \geq 0$ et g minorée par b sur I donne $\mathbb{E}(g(X)\mathbf{1}_{X\in I}) \geq b\mathbb{P}(X \in I)$.
2. Markov : X positive, $t > 0$, $g(x) = x$ et $I = [t, \infty[$.
Tchebycheff : $t > 0$, $g(x) = (x - E(X))^2$ et $I =]-\infty, \mathbb{E}(X) - t] \cup [\mathbb{E}(X) + t, +\infty[$.
3. Pour $g(x) = (x + c)^2$ pour $c > 0$, on a bien $g(x) \geq 0$ pour tout x et $g(x) \geq (t + c)^2$ pour $x \geq t > 0$. Donc

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{1}{(t+c)^2}\mathbb{E}\left[(X+c)^2\right].$$

Si $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{E}(X^2) = \sigma^2$, cela donne :

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\sigma^2 + c^2}{(t+c)^2}.$$

Le terme de droite est une fonction en c qui atteint son minimum au point $c = \sigma^2/t > 0$ et donne le résultat attendu.

Exercice 2 *Loi Uniforme*

Exercice 3 *Loi Gamma*
1. Direct.
2. On utilise le fait que $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ pour obtenir que l'espérance de cette loi est a/λ.
3. Pour $n = 1$, ok. Supposons $n \geq 2$ et $S := V_1 + \ldots + V_{n-1}$ de loi $\gamma_{n-1,\lambda}$. Soit g une fonction mesurable bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a

$$\mathbb{E}(g(V_1 + \ldots + V_n)) = \mathbb{E}(g(S + V_n)) = \int_{\mathbb{R}} g(x+y)\mu_{(S,V_n)}(dx, dy)$$

et

$$\mathbb{E}(g(V_1 + \ldots + V_n)) = \int_{\mathbb{R}} g(t)\mu_{V_1+\ldots+V_n}(dt).$$

Comme $f(v_1, \ldots, v_{n-1}) = v_1 + \ldots + v_{n-1}$ et $g(v_n) = v_n^2$ mesurables on en déduit que S et V_n sont indépendantes car $(V_1, \ldots, V_{n-1})$ et V_n le sont,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} g(x+y)\mu_{(S,V_n)}(dx,dy) &= \int_0^\infty dx \int_x^\infty dt g(t)\frac{\lambda^{n-1}}{\Gamma(n-1)}e^{-\lambda t}x^{n-2} \\
&= \int_0^\infty g(t)\frac{\lambda^{n-1}}{\Gamma(n-1)}e^{-\lambda t}\left[x^{n-1}/(n-1)\right]_0^t dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(t)\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\exp(-\lambda t)t^{n-1}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(t)dt
\end{aligned}$$

4. On peut utiliser la fonction de répartition. Avec un changement de variable on voit

que $\lambda X \sim \gamma_{a,1}$.
5. Soit g une fonction mesurable bornée de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On a

$$\mathbb{E}(g(X+Y, X/Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} g(u,v)\mu_{(X+Y,X/Y)}(du,dv)$$

et

$$\mathbb{E}(g(X+Y, X/Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} g\circ f(x,y)\mu_{(X,Y)}(dx,dy)$$

où $f(x,y) = (x+y, x/y)$ définie de $(\mathbb{R}^{*+})^2$ vers $(\mathbb{R}^{*+})^2$. Comme les variables X et Y sont indépendantes, le couple (X,Y) a pour densité $\mu_X(dx)\mu_Y(dy)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.
On fait alors le changement de variable $u = x+y$, $v = x/y$, pour $x > 0$ et $y > 0$;
Ceci est équivalent à $x = uv/(v+1)$ et $y = u/(v+1)$ pour $u > 0$ et $v > 0$.
On a de plus $|J(u,v)| = \begin{vmatrix} v/(v+1) & u/(v+1) \\ 1/(v+1) & -u/(v+1)^2 \end{vmatrix} = \dfrac{u}{(v+1)^2}$. Il suit

$$\mathbb{E}(g(X+Y, X/Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} g(u,v)u^{2a-1}e^{-\lambda u}\mathbf{1}_{u>0}\frac{v^{a-1}}{(v+1)^{2a}}\mathbf{1}_{v>0}\frac{\lambda^{2a}}{\Gamma(a)^2}dudv.$$

Les variables sont indépendantes, $\mu_{X+Y}(du) = \dfrac{\lambda^{2a}}{\Gamma(2a)}u^{2a-1}e^{-\lambda u}\mathbf{1}_{u>0}du$ et $\mu_{X/Y}(dv) = \dfrac{\Gamma(2a)}{\Gamma(a)^2}\dfrac{v^{a-1}}{(v+1)^{2a}}\mathbf{1}_{v>0}dv.$
6. Soit g une fonction mesurable bornée de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On a

$$\mathbb{E}(g(X+Y, X/(X+Y))) = \int_{\mathbb{R}^2} g(u,v)\mu_{(X+Y,X/(X+Y))}(du,dv)$$

et

$$\mathbb{E}(g(X+Y, X/(X+Y))) = \int_{\mathbb{R}^2} g\circ f(x,y)\mu_{(X+Y,X/(X+Y))}(dx,dy)$$

où $f(x,y) = (x+y, x/(x+y))$ définie de $(\mathbb{R}^{*+})^2$ vers $(\mathbb{R}^{*+})^2$. Comme les variables X et Y sont indépendantes, le couple (X,Y) a pour densité $\mu_X(dx)\mu_Y(dy)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.
On fait alors le changement de variable $u = x+y$, $v = x/(x+y)$, pour $x > 0$ et $y > 0$;
Ceci est équivalent à $x = uv$ et $y = u(1-v)$ pour $u > 0$ et $v \in (0,1)$.
On a de plus $|J(u,v)| = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = u$. Il suit

$$\mathbb{E}(g(X+Y, X/(X+Y))) = \int_{\mathbb{R}^2} g(u,v)\frac{\lambda^{2a}}{\Gamma(2a)}u^{2a-1}e^{-\lambda u}\mathbf{1}_{u>0}\frac{\Gamma(2a)}{\Gamma(a)^2}\left(v(1-v)\right)^{a-1}\mathbf{1}_{0<v<1}dudv.$$

Les variables sont indépendantes et on a de plus $\mu_{X/(X+Y)}(dv) = \dfrac{\Gamma(2a)}{\Gamma(a)^2}\left(v(1-v)\right)^{a-1}\mathbf{1}_{0<v<1}dv.$
7. Le seul point délicat est de calculer $\int_0^t x^{a-1}(t-x)^{b-1}dx = t^{a+b-1}\int_0^1 y^{a-1}(1-y)^{b-1}dy = t^{a+b-1}C_{a,b}$. La constante $C_{a,b}$ est forcément égale à $\Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$ en tenant compte de la normalisation.
8. Si Z_1 est de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et g une fonction mesurable bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a

$$\mathbb{E}(g(X^2)) = \int_{\mathbb{R}} g(u)\mu_{X^2}(du) \qquad \mathbb{E}(g(X^2)) = \int_{\mathbb{R}} g(x^2)\mu_X(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} g(x^2)e^{-x^2/2}dx.$$

Par parité de $x \mapsto g(x^2)e^{-x^2/2}$ on a $\mathbb{E}(g(X^2)) = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty g(x^2)e^{-x^2}dx = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty g(y)e^{-y/2}\dfrac{dy}{2\sqrt{y}}$ donc $\mu_{X^2}(dx) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y/2}y^{-1/2}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(y)$.

9. On le montre par récurrence. Pour $n = 1$ c'est vrai. Supposons que $S_{n-1} = Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2 \sim \gamma_{\frac{n-1}{2},\frac{1}{2}}$ et $Z_n \sim \mathcal{N}(0,1)$. On a $S_n = S_{n-1} + Z_n^2$. Comme $f(z_1,\ldots,z_{n-1}) = z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2$ et $g(x_n) = z_n^2$ mesurables on en déduit que S_{n-1} et Z_n^2 sont indépendantes car $(Z_1,\ldots,Z_{n-1})$ et Z_n le sont. On utilise ensuite la question 7 et 8 donnant S_n suit une $\gamma_{\frac{n-1}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \gamma_{\frac{n}{2},\frac{1}{2}}$.

Exercice 4 *Loi Normale*

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. On montre avec les indications que $\Phi'_X(t) = -t\Phi_X(t)$. En utilisant le fait que $\Phi_X(0) = 1$ on obtient que $\log(\Phi_X(t)) = -t^2/2$ et $\Phi_X(t) = \exp(-t^2/2)$.

2. En utilisant l'indépendance et la question précédente on trouve $\Phi_{X_\theta}(t) = \Phi_{Y_\theta}(t) = \exp(-t^2/2)$. Ces variables sont donc de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

3. On définit $h_\theta(x,y) = (x\cos(\theta) + y\sin(\theta), -x\sin(\theta) + y\cos(\theta))$ sur $\mathbb{R}^2$. Par application du théorème du transfert, si g est un fonction mesurable bornée de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, alors

$$\mathbb{E}(g(X_\theta, Y_\theta)) = \int_{\mathbb{R}^2} g(u,v)\mu_{(X_\theta,Y_\theta)}(du,dv)$$

et

$$\mathbb{E}(g(X_\theta, Y_\theta)) = \mathbb{E}(g \circ h_\theta(X,Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} g \circ h_\theta(x,y)\mu_{(X,Y)}(dx,dy).$$

X et Y sont indépendantes donc (X,Y) a pour densité $e^{-(x^2+y^2)/2}/(2\pi)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. On fait le changement de variable $u = x\cos(\theta) + y\sin(\theta)$, $v = -x\sin(\theta) + y\cos(\theta)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ceci est équivalent à $x = u\cos(\theta) - v\sin(\theta)$ et $y = u\sin(\theta) + v\cos(\theta)$ pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

Le jacobien vaut $|J(u,v)| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} = 1$. On obtient, en utilisant le fait que $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$,

$$\mathbb{E}(g \circ h_\theta(X,Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} g(u,v)e^{-(u^2+v^2)/2}/(2\pi)dudv.$$

Par conséquent, $\mu_{(X_\theta,Y_\theta)} = \mu_{X_\theta} \otimes \mu_{Y_\theta}$. Ces deux variables aléatoires sont indépendantes.

Exercice 5 Voir Test partiel du 11 avril 2008

Université Claude Bernard Lyon 1 | PROBABILITÉS
Année universitaire 2008-2009

FEUILLE DE TD 7

Fonction caractéristique

Exercice 1 *Lois symétriques, fonction caractéristique*
La loi d'une variable aléatoire réelle X est dite *symétrique* lorsque X et $-X$ ont même loi.
1. À quelle condition une loi de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue est-elle symétrique ?
2. Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes de même loi. Exprimer en fonction de la fonction caractéristique Φ_X de X les fonctions caractéristiques suivantes : Φ_{-X}, Φ_{X+Y}, Φ_{X-Y}.
3. Montrer que la loi d'une variable aléatoire réelle X est symétrique si, et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_X(t) \in \mathbb{R}$.
4. Soit Y une v.a. réelle, et Z une v.a. indépendante de Y et de loi donnée par :

$$\mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(Z = -1).$$

Montrer que la loi de $X = ZY$ est symétrique et calculer sa fonction caractéristique (en fonction de Φ_Y). Si Y admet une densité f, quelle est la loi de X ?

Exercice 2 *Calculs de fonctions caractéristiques*
1. Calculer Φ_X où X suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$. En déduire Φ_Z où Z suit la loi $\gamma_{n,\lambda}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Laplace, c'est-à-dire que la loi de X a pour densité $x \mapsto \frac{1}{2}e^{-|x|}$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_X(t) = \frac{1}{1+t^2}$. (on pourra utiliser la dernière question de l'exercice précédent)
3. En déduire la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy de paramètre 1 (densité $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$). Quelle est la loi de la moyenne de deux variables aléatoires de loi de Cauchy de paramètre 1 indépendantes ?
4. Soit X_1, X_2, X_3, X_4 des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Rappeler la valeur de $\Phi_{X_i}(t)$. Calculer $\Phi_{X_1X_2}$ (en utilisant le théorème de Fubini), puis $\Phi_{X_1X_2+X_3X_4}$, et en déduire la loi de $X_1X_2 + X_3X_4$.

Loi conditionnelle (cas général, cas à densité)

Exercice 3 Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. Quelle est la loi conditionnelle de X sachant Y ? Plus généralement, pour $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mesurable, quelle est la loi conditionnelle de $\varphi(X,Y)$ sachant Y ?

Exercice 4 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Déterminer la loi du couple $(X, X+Y)$, et en déduire la loi conditionnelle de X sachant $X+Y$.

Exercice 5 Soit X, Y des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
1. Déterminer la loi du couple $(X,Z) = (X, X^2+Y^2)$.
2. En déduire la loi de X^2+Y^2 puis la loi conditionnelle de X sachant X^2+Y^2.
3. Calculer $\mathbb{E}[\,|X|\,|X^2+Y^2]$.
4. On note $R = \sqrt{Z}$ et on définit $\Theta \in [0, 2\pi[$ par les équations $X = R\cos\Theta$ et $Y = R\sin\Theta$. Déterminer la loi du couple (R,Θ). Ces variables sont-elles indépendantes ? Retrouver alors rapidement le résultat de la question précédente.

Exercice 6 *Loi conditionnelle autour de la loi de Poisson*
Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires, indépendantes, de loi de Poisson de paramètre λ_1 et λ_2 respectivement.
1. Calculer la loi de $X_1 + X_2$.
2. Calculer la loi conditionnelle de X_1 sachant $X_1 + X_2$. Identifier une loi connue puis interpréter.

Exercice 7 *Loi conditionnelle autour de la loi de Bernoulli*
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes toutes de même loi : $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p$ pour un $p \in]0, 1[$. Soit $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.
1. Quelle est la loi de S_n ?
2. Quelle est la loi du couple (X_1, S_n) ?
3. Quelle est la loi conditionnelle de X_1 sachant S_n ?
4. Quelle est la loi de conditionnelle de S_n sachant X_1 ?

Exercice 8 *Loi conditionnelle autour de la loi exponentielle*
Soient T_1 et T_2 des variables aléatoires, indépendantes, de loi $\mathrm{Exp}(\lambda)$.
1. Calculer la loi de $T_1 + T_2$.
2. Calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(T_1 \in [a, b] | T_1 \leq t \leq T_1 + T_2)$: Qu'en concluez-vous ?

Correction de la feuille de TD 7

Fonction caractéristique

Exercice 1 *Lois symétriques, fonction caractéristique*
La loi d'une variable aléatoire réelle X est dite *symétrique* lorsque X et $-X$ ont même loi.
1. X de loi $f(x)dx$. Il faut et il suffit que f soit paire (ou plutôt, soit égale Lebesgue-presque-partout à une fonction paire) pour que la loi de X soit symétrique. En effet la loi de $-X$ est de densité $-f$; et si deux densités f et g fournissent la même loi, elles sont telles que $\int_A f(x)dx = \int_A g(x)dx$ pour tout borélien A, d'où $0 = \int_{\{f-g>0\}}(f-g) - \int_{\{f-g<0\}}(f-g) = \int_{\mathbb{R}} |f(x)-g(x)|dx$ et donc $f(x) = g(x)$ dx-presque partout.
2. $\Phi_{-X}(t) = \Phi_X(-t) = \overline{\Phi_X(t)}$ (car $X(\omega) \in \mathbb{R}$), $\Phi_{X+Y} = (\Phi_X)^2$, $\Phi_{X-Y} = |\Phi_X|^2$.
3. $\Phi_X(t) \in \mathbb{R}$ ssi $\Phi_X(t) = \overline{\Phi_X(t)}$ ssi $\Phi_X(t) = \Phi_{-X}(t)$.
4. La variable Z est symétrique, et est indépendante de Y. Donc le couple $(-Z, Y)$ a même loi que (Z, Y). Donc $-ZY$ et ZY ont même loi. Et, en découpant selon les valeurs de Z, $\Phi_X(t) = \frac{1}{2}(E[e^{itY}] + E[e^{-itY}]) = \mathrm{Re}(\Phi_Y(t))$. Si Y a pour densité f, $-Y$ a pour densité $y \mapsto f(-y)$, donc $\Phi_X(t) = \frac{1}{2}(\Phi_Y(t) + \Phi_{-Y}(t)) = \int e^{ity}\frac{f(y)+f(-y)}{2}dy$ pour tout t, ce qui montre que X a pour densité $\frac{f(y)+f(-y)}{2}$.

Exercice 2 *Calculs de fonctions caractéristiques*
1. Si X suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$, $\Phi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$. Comme (voir fiche 4) la loi $\gamma_{n,\lambda}$ est la loi de la somme de n variables de loi exponentielle indépendantes,

$$\Phi_Z(t) = (\Phi_X(t))^n = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^n.$$

2. On peut voir que, si on note $f(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ la densité de la loi exponentielle de paramètre 1, alors $\frac{1}{2}e^{-|x|} = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$, donc X se déduit d'une variable Y de loi $\mathcal{E}(1)$ de la même façon qu'à la fin de l'exercice 1. Ainsi, on a $\Phi_X(t) = \mathrm{Re}(\frac{1}{1-it}) = \frac{1}{1+t^2}$.
3. Comme Φ_X est intégrable sur $\mathbb{R}$ on a, par la formule d'inversion de Fourier (ou Corollaire II.14 du cours 7), $\frac{1}{2}e^{-|x|} = \frac{1}{2\pi}\int e^{-itx}\Phi_X(t)dt$ où X est comme à la question d'avant. En réécrivant cette égalité, on a $\int e^{-itx}\frac{dt}{\pi(1+t^2)} = e^{-|x|}$, c'est-à-dire $\Phi_Y(t) = e^{-|t|}$ si Y est de loi de Cauchy de paramètre 1. Soit X_1, X_2 de loi de Cauchy de paramètre 1. $\Phi_{\frac{X_1+X_2}{2}}(t) = E[e^{i\frac{t}{2}(X_1+X_2)}] = \Phi_{X_1}(t/2)^2 = e^{-|t|} = \Phi_{X_1}(t)$. Donc la loi de $\frac{X_1+X_2}{2}$ est celle de X_1.
4. On a :

$$\begin{aligned}
\Phi_{X_1X_2}(t) &= \int\left(\int e^{-itxy}e^{-\frac{y^2}{2}}\frac{dy}{\sqrt{2\pi}}\right)e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \int \Phi_{X_2}(tx)e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \int e^{-(t^2+1)\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.
\end{aligned}$$

Puis $\Phi_{X_1X_2+X_3X_4}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, et la question précédente montre que $X_1X_2 + X_3X_4$ suit la loi $\frac{1}{2}e^{-|t|}dt$.

Lois conditionnelles

Exercice 3 examen de rattrapage du 25 juin 2008. Pour toute $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(\varphi(X,Y))] &= \int f(\varphi(x,y))d\mu_{(X,Y)}(x,y) = \int \left(\int f(\varphi(x,y))d\mu_X(x) \right) d\mu_Y(y) \\
&= \int \left(\int f(\phi)d\mu_{\varphi(X,y)}(\phi) \right) d\mu_Y(y),
\end{aligned}$$

donc la loi conditionnelle de $\varphi(X,Y)$ sachant $Y = y$ est la loi de $\varphi(X,y)$.

Exercice 4 On trouve $(X,Z) = (X, X+Y)$ de densité $e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\frac{1}{2\pi}$, et comme Z a pour loi $\mathcal{N}(0,2)$, la loi de X conditionnellement à Z a pour densité $e^{-\frac{x^2}{2}-\frac{(z-x)^2}{2}+\frac{z^2}{4}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ et l'exposant s'écrit $-(x^2 - zx + z^2/4) = -(x - \frac{z}{2})^2$, donc c'est la loi $\mathcal{N}(\frac{z}{2}, 2)$.

Exercice 5 *Loi conditionnelle autour de la loi normale*
Soit X, Y des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
1. Pour toute fonction bornée $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X,Z)] &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x, x^2+y^2)e^{-x^2/2}e^{-y^2/2}\frac{dx\,dy}{2\pi} \\
&= 2\int_{\mathbb{R}}\int_0^{\infty} f(x, x^2+y^2)e^{-x^2/2}e^{-y^2/2}\frac{dy\,dx}{2\pi} \\
&= 2\int_{\mathbb{R}}\int_{x^2}^{\infty} f(x,z)e^{-z/2}\frac{dz}{2\sqrt{z-x^2}}\frac{dx}{2\pi} \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,z)\mathbf{1}_{\{z\geq x^2\}}\frac{e^{-z/2}}{2\pi\sqrt{z-x^2}}dx\,dz,
\end{aligned}$$

donc la loi du couple (X,Z) est de densité $f_{(X,Z)}(x,z) = \frac{e^{-z/2}}{2\pi\sqrt{z-x^2}}\mathbf{1}_{\{z\geq x^2\}}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Alors la loi de Z est de densité :

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Z)}(x,z)dx = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(z)\frac{e^{-z/2}}{2\pi}\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\frac{dx}{\sqrt{z-x^2}} = \frac{1}{2}e^{-z/2}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(z)$$

(en reconnaissant la dérivée de $\arcsin\frac{x}{\sqrt{z}}$ dans l'intégrale), autrement dit Z suit la loi exponentielle de paramètre $1/2$. Donc la loi conditionnelle de X sachant Z est $p(z,dx) = f_{X|Z=z}(x)dx$ où, pour $z > 0$:

$$f_{X|Z=z}(x) = \frac{f_{(X,Z)}(x,z)}{f_Z(z)} = \frac{\mathbf{1}_{\{|x|\leq\sqrt{z}\}}}{\sqrt{z-x^2}}\frac{1}{\pi},$$

et $f_{X|Z=x}(x) = 0$ si $z \leq 0$.
3. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\,|X|\,|Z] &= \int_{\mathbb{R}} |x| f_{X|Z}(x) dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\sqrt{Z}} \frac{x}{\sqrt{Z - x^2}} dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left[-\sqrt{Z - x^2} \right]_{x=0}^{\sqrt{Z}} \\
&= \frac{2\sqrt{Z}}{\pi}.
\end{aligned}$$

4. Voir corrigé de l'examen, ou : On note $\phi : (x, y) \mapsto (r, \theta)$ l'application de passage en coordonnées polaires ; c'est un $\mathcal{C}^1$-difféo de $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\})$ dans $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$, avec $|J\phi^{-1}(r, \theta)| = r$. Pour toute fonction mesurable bornée $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(R, \Theta)] &= \mathbb{E}[f(\phi(X, Y))] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(\phi(x, y)) e^{-(x^2+y^2)/2} \frac{dx\, dy}{2\pi} \\
&= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} f(r \cos\theta, r \sin\theta) e^{-r^2/2} r\, dr\, \frac{d\theta}{2\pi},
\end{aligned}$$

donc (R, Θ) a pour densité $re^{-r^2/2}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(r)\frac{\mathbf{1}_{]0,2\pi[}(\theta)}{2\pi}$. R et Θ sont indépendantes, de lois respectives $re^{-r^2/2}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(r)dr$ et la loi uniforme sur $[0, 2\pi]$. La loi conditionnelle de X sachant Z est la loi conditionnelle de $R \cos\Theta = \sqrt{Z} \cos\Theta$ sachant Z. Or Z et Θ sont indépendantes car $R = \sqrt{Z}$ et Θ le sont. Par l'exercice 3, la loi de X sachant $Z = z$ est donc la loi de $\sqrt{z} \cos\Theta$. Notamment, on a donc :

$$\mathbb{E}[\,|X|\,|Z = z] = \sqrt{z}\, \mathbb{E}[\,|\cos\Theta|\,] = 4\sqrt{z} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{2\sqrt{z}}{\pi},$$

comme obtenu plus haut. On pourrait aussi retrouver la densité $f_{X|Z=z}(x)$.

Exercice 6 *Loi conditionnelle autour de la loi de Poisson*
examen du 9 juin 2008

Exercice 7 *Loi conditionnelle autour de la loi de bernoulli*
test partiel du 11 avril 2008

Exercice 8 *Loi conditionnelle autour de la loi de exponentielle*
examen de rattrapage du 25 juin 2008

FEUILLE DE TD 8

Modes de convergence et lemme de Borel-Cantelli

QUELQUES RAPPELS

Par définition
$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k,$$
donc $\omega \in \liminf_n A_n \Leftrightarrow$ il existe n tel que $\omega \in A_k$ pour tout $k \geq n$. $\liminf_n A_n$ contient les éléments $\omega \in \Omega$ qui appartiennent à tous les A_n à partir d'un certain rang. D'autre part
$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k$$
donc $\omega \in \limsup_n A_n \Leftrightarrow$ pour tout n, il existe $k(n) \geq n$ tel que $\omega \in A_{k(n)}$ donc $\limsup_n A_n$ contient les éléments $\omega \in \Omega$ qui appartiennent à une infinité de A_n.
On savait déjà que pour une suite d'événements $(A_n)_n$:

* $\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ avec une égalité dans le cas où les A_n sont deux à deux disjoints.
* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)$ lorsque $(A_n)_n$ est croissante.
* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} A_n)$ lorsque $(A_n)_n$ est décroissante.

Posons $I_n = \cap_{k\geq n} A_k$ et $J_n = \cup_{k\geq n} A_k$. On a donc $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\cup_{k\geq n} A_k) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(J_n)$ et $\mathbb{P}(\liminf_n A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\cap_{k\geq n} A_k) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(I_n)$.
De plus pour tout n
$$I_n \subset A_n \subset J_n$$
et par conséquent
$$\mathbb{P}(\liminf_n A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(I_n) \leq \liminf_n \mathbb{P}(A_n) \leq \limsup_n \mathbb{P}(A_n) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(J_n) = \mathbb{P}(\limsup_n A_n).$$

Borel-Cantelli :

* $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0.$
* (A_n) mutuellement indépendants et $\sum_n \mathbb{P}(A_n) = \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1.$

Exercice 1 Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose
$$Y = \limsup_n \frac{X_n}{\ln n}.$$

Le but est de montrer que $Y = \frac{1}{\lambda}$ presque surement.

1. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\limsup_n \left\{\frac{X_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\lambda}\right\}\right) \leq \mathbb{P}\left(\limsup_n \frac{X_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\lambda}\right).$$

2. Montrer que $\mathbb{P}\left(\limsup_n \left\{\frac{X_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\lambda}\right\}\right) = 1$. En déduire que $\mathbb{P}(Y \geq \frac{1}{\lambda}) = 1$.

3. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\limsup_n \frac{X_n}{\ln n} > \frac{1+\epsilon}{\lambda}\right) \leq \mathbb{P}\left(\limsup_n \left\{\frac{X_n}{\ln n} > \frac{1+\epsilon}{\lambda}\right\}\right).$$

4. Montrer que $\mathbb{P}\left(\limsup_n \left\{\frac{X_n}{\ln n} > \frac{1+\epsilon}{\lambda}\right\}\right) = 0$. En déduire que $\mathbb{P}(Y > \frac{1+\epsilon}{\lambda}) = 0$.

5. En déduire que $\mathbb{P}(Y = \frac{1}{\lambda}) = 1$.

6. Montrer que $\frac{X_n}{\ln n}$ converge vers 0 en probabilité. Cette suite converge-t-elle presque sûrement vers 0 ?

Exercice 2 Soit $(p_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $[0,1]$ qui tend vers 0. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi Bernoulli de paramètre p_n : $\mathbb{P}(X_n = 1) = p_n = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0)$.

1. Montrer que X_n converge vers 0 en probabilité.

2. Sous quelle condition sur la somme $\sum_n p_n$ la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle aussi presque sûrement vers 0 ?

Exercice 3 Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p (i.e. qui valent 1 avec probabilité p et 0 avec probabilité $q = 1-p$). Pour tout n, on note $Y_n = U_n U_{n+1}$, puis $S_n = Y_1 + \ldots + Y_n$.

1. Pour tout n, quelle est la loi de Y_n ?

2. A quelle condition sur n et m tels que $1 \leq n < m$ les variables aléatoires Y_n et Y_m sont-elles indépendantes ?

3. Calculer $\mathbb{E}[Y_n Y_m]$ puis calculer $\mathbb{E}[S_n/n]$.

4. Montrer qu'il existe une constante C telle que, pour tout n, $\mathrm{Var}[S_n] \leq Cn$.

5. Démontrer que la suite S_n/n converge en probabilité vers une constante à préciser.

Correction de la feuille de TD 8

Exercice 1

1. Decoule de l' implication suivante *Soit* $(x_n)_{n\geq 0}$ *une suite de nombres réels. On rappelle que* $\limsup_n x_n = \lim_n \sup_{k\geq n} x_k$. *Alors on peut montrer que*

$$x_n \geq 0 \text{ pour une infinité de } n \quad \Longrightarrow \quad \limsup_n x_n \geq 0$$

2. On a $\mathbb{P}(\{\frac{X_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\lambda}\}) = \mathbb{P}(\{X_n \geq \frac{\ln n}{\lambda}\}) = e^{-\ln n} = n^{-1}$. Donc

$$\sum_n \mathbb{P}(\left\{\frac{X_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\lambda}\right\}) = \sum_n \frac{1}{n} = \infty.$$

Comme les variables sont indépendantes, Borel Cantelli implique $\mathbb{P}(\limsup_n \{\frac{X_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\lambda}\}) = 1$ et donc avec 1. $\mathbb{P}(Y \geq \frac{1}{\lambda}) = 1$.

3. Decoule de l' implication suivante *Soit* $(x_n)_{n\geq 0}$ *une suite de nombres réels. On rappelle que* $\limsup_n x_n = \lim_n \sup_{k\geq n} x_k$. *Alors on peut montrer que*

$$\limsup_n x_n > 0 \quad \Longrightarrow \quad x_n > 0 \text{ pour une infinité de } n.$$

4. Maintenant

$$\sum_n \mathbb{P}(\left\{\frac{X_n}{\ln n} > \frac{1+\epsilon}{\lambda}\right\}) = \sum_n n^{-(1+\epsilon)} < \infty.$$

Borel Cantelli nous dit alors que $\mathbb{P}(\limsup_n \{\frac{X_n}{\ln n} > \frac{1}{\lambda}(1+\epsilon)\}) = 0$. Avec 3. $\mathbb{P}(Y > \frac{1}{\lambda}(1+\epsilon)) = 0$.

5. On laissant tendre ϵ vers 0 on obtient par σ-continuité que $\mathbb{P}(Y > \frac{1}{\lambda}) = \lim_{\epsilon\to 0} \mathbb{P}(Y > \frac{1+\epsilon}{\lambda}) = 0$. Donc $\mathbb{P}(Y = \frac{1}{\lambda}) = \mathbb{P}(Y \geq \frac{1}{\lambda}) - \mathbb{P}(Y > \frac{1}{\lambda})$=1-0=1.

6. On a $\mathbb{P}(\frac{X_n}{\ln n} \geq a) = \mathbb{P}(X_1 \geq a \ln n) \to 0$.

Exercice 2

1. On a pour tout $\epsilon > 0$ que $\mathbb{P}(X_n \geq \epsilon) \leq p_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. On pose $\Lambda_n = \{X_n = 1\}$. $\Lambda = \limsup_n \Lambda_n = \bigcap_n \bigcup_{k\geq n} \Lambda_k$ est l'ensemble des points $\omega \in \Omega$ pour lesquelles $X_n(\omega)$ ne converge pas vers 0. D'après Borel-Cantelli $\mathbb{P}(\Lambda) = 0$ ssi $\sum_n \mathbb{P}(\Lambda_n) < \infty$. Donc $(X_n)_n$ converge prèsque surement vers 0 ssi $\sum_n p_n < \infty$.

Exercice 3 Voir examen du 9 juin 2008

Correction de l'exercice 1 du Td 8

1. Montrons que $\limsup\{\frac{X_n}{\ln n} \geq 1/\lambda\} \subset \{\limsup \dfrac{X_n}{\ln n} \geq 1/\lambda\}$.
Soit $\omega \in \limsup\{\frac{X_n}{\ln n} \geq 1/\lambda\}$. Alors ω appartient à une infinité d'événements $\{\frac{X_n}{\ln n} \geq 1/\lambda\}$ c'est-à-dire que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}, \frac{X_n(\omega)}{\ln n} \geq 1/\lambda\}$ est infini.
Par conséquent, $\limsup \frac{X_n(\omega)}{\ln n} \geq 1/\lambda$; soit encore $\omega \in \{\limsup \frac{X_n}{\ln n} \geq 1/\lambda\}$.
2. On a $\mathbb{P}(\{\frac{X_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\lambda}\}) = \mathbb{P}(\{X_n \geq \frac{\ln n}{\lambda}\}) = e^{-\ln n} = n^{-1}$. Donc

$$\sum_n \mathbb{P}(\left\{\frac{X_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\lambda}\right\}) = \sum_n \frac{1}{n} = \infty.$$

Comme les variables sont indépendantes, Borel Cantelli implique $\mathbb{P}(\limsup_n \left\{\frac{X_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\lambda}\right\}) = 1$ et donc avec la question 1. $\mathbb{P}(Y \geq \frac{1}{\lambda}) = 1$.
3. Montrons que $\{\limsup \dfrac{X_n}{\ln n} > \frac{1+\epsilon}{\lambda}\} \subset \limsup\{\frac{X_n}{\ln n} > \frac{1+\epsilon}{\lambda}\}$.
Soit $\omega \in \{\limsup \dfrac{X_n}{\ln n} > \frac{1+\epsilon}{\lambda}\}$ on a alors $\limsup \dfrac{X_n(\omega)}{\ln n} > \frac{1+\epsilon}{\lambda}$.
Or il existe une sous-suite de $\left(\dfrac{X_n(\omega)}{\ln n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\limsup \dfrac{X_n(\omega)}{\ln n}$.
Donc l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}, \frac{X_n(\omega)}{\ln n} > \frac{1+\epsilon}{\lambda}\}$ est infini.
Ce qui signifie que $\omega \in \limsup\{\frac{X_n}{\ln n} > \frac{1+\epsilon}{\lambda}\}$.
4. Maintenant

$$\sum_n \mathbb{P}(\left\{\frac{X_n}{\ln n} > \frac{1+\epsilon}{\lambda}\right\}) = \sum_n n^{-(1+\epsilon)} < \infty.$$

Borel Cantelli nous dit alors que $\mathbb{P}(\limsup_n \left\{\frac{X_n}{\ln n} > \frac{1}{\lambda}(1+\epsilon)\right\}) = 0$.
Avec la question 3. $\mathbb{P}(Y > \frac{1}{\lambda}(1+\epsilon)) = 0$.
5. En laissant tendre ϵ vers 0 on obtient par σ-continuité que $\mathbb{P}(Y > \frac{1}{\lambda}) = \lim_{\epsilon\to 0} \mathbb{P}(Y > \frac{1+\epsilon}{\lambda}) = 0$. Donc $\mathbb{P}(Y = \frac{1}{\lambda}) = \mathbb{P}(Y \geq \frac{1}{\lambda}) - \mathbb{P}(Y > \frac{1}{\lambda})$=1-0=1.
6. On a $\mathbb{P}(\frac{X_n}{\ln n} \geq \epsilon) = \mathbb{P}(X_1 \geq \epsilon \ln n) \to 0$.
Autrement dit, il est clair que cette variable converge en probabilité vers 0.
On peut montrer qu'elle ne converge pas ps vers 0 en utilisant l'équivalence

$$Y_n \to^{ps} Y \text{ si et seulement si } \forall \epsilon > 0 \quad \mathbb{P}(\limsup_n |Y_n - Y| > \epsilon) = 0.$$

En effet, pour $Y_n = X_n / \ln n$ et $Y = 0$ ici, on voit très rapidement apparaître une contracdiction avec le résultat de la question 5.

FEUILLE DE TD 9

Exercice 1 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ et $\mathcal{E}(\mu)$ avec $\mu > 0$. On note $Z = \min(X, Y)$.
1. Calculer la fonction de répartition de Z.
2. Calculer $\mathbb{P}(X \leq Y)$.
3. Montrer que les variables Z et $\mathbf{1}_{\{Z=X\}}$ sont indépendantes.
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$ et $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. On note $Z = \min(X, Y)$.
4. Calculer les fonctions de répartition de X et Y.
5. Calculer $\mathbb{P}(X \leq Y)$.
6. Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, calculer $\mathbb{P}(Z = k)$.
7. Pour $\ell \in \mathbb{N}$, a et b deux réels tels que $\ell < a < b < \ell + 1$, calculer $\mathbb{P}(a < Z < b)$.

Exercice 2
1. Soit $X_0, X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Soit N une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ indépendante de $X_0, X_1, \ldots, X_n$. On pose

$$U = \sum_{i=0}^{N} X_i.$$

Exprimer la fonction caractéristique de U en fonction de celle de X_0.
2. Soit $(X_n)_{n\geq1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p. Soit N une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ indépendante de $(X_n)_{n\geq1}$. On pose

$$V = \begin{cases} 0 & si \quad N = 0, \\ \sum_{i=1}^{N} X_i & si \quad N \geq 1. \end{cases}$$

Calculer la fonction génératrice de V. Quelle loi reconnaissez-vous ?

Exercice 3
1. Soit $(X_n)_{n\geq1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que la suite de terme général $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 e^{X_i}$ converge presque sûrement lorsque n tend vers l'infini vers une limite que l'on précisera.
2. Soit $(Y_n)_{n\geq1}$ et $(Z_n)_{n\geq1}$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer le comportement lorsque n tend vers l'infini de la suite de terme général $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{Y_i+Z_i\leq1\}}$.
3. Notons $M_n = \max(Y_1, \ldots, Y_n)$. Déterminer la loi de M_n puis montrer que M_n converge en probabilité vers 1.

Correction de la feuille de TD 9

Exercice 1 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ et $\mathcal{E}(\mu)$ avec $\mu > 0$. On note $Z = \min(X, Y)$.

1. Z est une variable positive. Pour $z > 0$, on a $\mathbb{P}(Z \leq z) = 1 - \mathbb{P}(X > z, Y > z) = 1 - \mathbb{P}(X > z)\mathbb{P}(Y > z) = 1 - e^{-(\lambda+\mu)z}$ donc Z suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda + \mu$.

2. $\mathbb{P}(X \leq Y) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{x \leq y} \mu_{(X,Y)}(dx, dy) =_{Tonelli} \int_0^\infty \left(\int_x^\infty \mu e^{-\mu y} dy\right) \lambda e^{-\lambda x} dx = \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}$.

3. Il est suffisant de montrer que pour $A \subset \mathbb{R}$ borélien : $\mathbb{P}(Z \in A, \mathbf{1}_{Z=X} = 1) = \mathbb{P}(Z \in A)\mathbb{P}(\mathbf{1}_{Z=X} = 1)$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z \in A, \mathbf{1}_{Z=X} = 1) &= \mathbb{P}(X \leq Y, X \in A) \\ &= \int_A \left(\int_x^\infty \mu e^{-\mu y} dy \right) \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x) dx \\ &= \lambda \int_A e^{-(\lambda+\mu)x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x) dx. \end{aligned}$$

D'autre part, $\mathbb{P}(Z \in A)\mathbb{P}(\mathbf{1}_{Z=X} = 1) = \mathbb{P}(Z \in A)\mathbb{P}(X \leq Y) = \int_A (\lambda+\mu) e^{-(\lambda+\mu)z} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(z) dz \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}$.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$ et $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. On note $Z = \min(X, Y)$.

4. X est une variable à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$ et pour $x \geq 1$, on a :

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X \leq [x]) = \sum_{k=1}^{[x]} p(1-p)^{k-1} = 1 - (1-p)^{[x]}.$$

Pour Y on a pour tout y : $\mathbb{P}(Y \leq y) = (1 - e^{-\lambda y})\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y)$.

5.

$$\mathbb{P}(X \leq Y) = \sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}(X \leq Y, X = k) = \sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}(Y \geq k)\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^\infty p(1-p)^{k-1} e^{-\lambda k} = \frac{pe^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}(1-p)}.$$

6. Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, $\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(X = k, Y > k)$ car Y est à densité donc $\mathbb{P}(Z = k) = p(1-p)^{k-1} e^{-\lambda k}$.

7. Pour $\ell \in \mathbb{N}$, a et b deux réels tels que $\ell < a < b < \ell + 1$, on a :
$\mathbb{P}(a < Z < b) = \mathbb{P}(a < Y < b, X \geq \ell + 1) = \mathbb{P}(a < Y < b)\mathbb{P}(X \geq \ell + 1) = \mathbb{P}(a < Y < b)(1 - \mathbb{P}(X \leq \ell)) = (e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b})(1-p)^\ell$.

Exercice 2

1. On pose $U = \sum_{i=0}^N X_i$. $\phi_U(t) = \mathbb{E}[e^{itU}] = \mathbb{E}[e^{itU} \left(\sum_{k=0}^n \mathbf{1}_{N=k}\right)] = \sum_{k=0}^n \mathbb{E}[e^{it \sum_{j=0}^k X_j}]\mathbb{P}(N = k)$ on trouve alors facilement que $\phi_U(t) = \phi_{X_0}(t) \left(p\phi_{X_0}(t) + 1 - p\right)^n$.

2. On pose $V = \left(\sum_{i=1}^N X_i\right) \mathbf{1}_{N \geq 1}$. $G_V(s) = \mathbb{E}[s^V] = \mathbb{E}[s^V \left(\sum_{k=0}^\infty \mathbf{1}_{N=k}\right)] = \sum_{k=0}^\infty \mathbb{E}[s^V \mathbf{1}_{N=k}] = \mathbb{P}(N = 0) + \sum_{k=1}^\infty \mathbb{E}[s^{\sum_{j=1}^k X_j} \mathbf{1}_{N=k}] = e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^\infty (1-p+sp)^k e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda p(s-1)}$. On reconnait la loi de Poisson de paramètre λp.

Exercice 3

1. $\mathbb{E}[X^2e^X] = 2e^{1/2}$. On a des variables aléatoires indépendantes de même loi intégrables donc d'après la loi forte des grands nombres on a la convergence ps vers $2e^{1/2}$.

2. $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{Y+Z\leq 1}] = 1/2$. On a des variables aléatoires indépendantes de même loi intégrables donc d'après la loi forte des grands nombres on a la convergence ps vers $1/2$.

3. Notons $M_n = \max(Y_1, \ldots, Y_n)$. On a pour $x < 0$ $\mathbb{P}(M_n \leq x) = 0$ et pour $x > 1$ $\mathbb{P}(M_n \leq x) = 1$. Pour $x \in [0, 1]$, on a $\mathbb{P}(M_n \leq x) = \mathbb{P}(Y_1 \leq x)^n = x^n$.

$\mathbb{P}(|M_n - 1| > \varepsilon) = (1 - \varepsilon)^n \mathbf{1}_{0<\varepsilon\leq 1}$. Donc cette probabilité tend vers 0 pour tout $\varepsilon > 0$.

Feuille de TD 10

Exercice 1
Montrer que, dans une suite de lancers indépendants de pièces de monnaie identiques, la séquence PFPFF (**P**ile, **F**ace) apparaît une infinité de fois. Préciser ce résultat à l'aide de la loi forte des grands nombres.

Exercice 2
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi. On note $X = X_1$. On suppose $\mathbb{E}[X] = 0$ et $\mathbb{E}[X^4] < \infty$. Le but de l'exercice est de démontrer la loi forte des grands nombres pour la suite $(X_n)_n$. On note, pour tout n, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
1. Montrer que, pour tout n, $\mathbb{E}[S_n^4] = n\mathbb{E}[X^4] + 3n(n-1)\mathbb{E}[X^2]^2$.
2. En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_n \mathbb{P}(|S_n| > n\varepsilon)$ converge.
3. Conclure.

Exercice 3 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
1. Montrer la convergence en probabilité suivante :

$$\frac{1}{\ln n} \max_{1\leq k\leq n} X_k \xrightarrow[n]{(p)} \frac{1}{\lambda}.$$

2. Démontrer que la suite de terme général $\max_{1\leq k\leq n} X_k - \frac{\ln n}{\lambda}$ converge en loi vers une limite à déterminer.

Exercice 4
1. Montrer que si $(X_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire constante c, alors la convergence a lieu en probabilité.
2. Donner un exemple de suite $(X_n)_{n\geq 0}$ qui converge en loi mais pas en probabilité (et donc pas presque sûrement). *Indication : utiliser par exemple X de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $-X$, qui a même loi.*

Exercice 5 Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ et $Z_n = 1/\overline{X}_n$.
1. Montrer que Z_n converge presque sûrement vers λ quand n tend vers ∞.
2. En supposant n suffisamment grand pour que cela se justifie, par quelle loi gaussienne peut-on approcher la loi de $\overline{X}_n$?
3. Soit N une variable aléatoire de loi $N(0,1)$, montrer qu'il existe un unique $\phi \in \mathbb{R}^+$ tel que $\mathbb{P}(|N| \leq \phi) = 0,95$.
4. En déduire un intervalle de la forme $I = [1/\lambda - \beta, 1/\lambda + \beta]$, avec β à déterminer, tel que $\mathbb{P}(\overline{X}_n \in I) = 0,95$.
5. En déduire ensuite un intervalle de la forme $J = [\alpha_1\lambda, \alpha_2\lambda]$, avec α_1, α_2 à déterminer, tel que $\mathbb{P}(Z_n \in J) = 0,95$.
6. Application numérique : calculer J, en fonction de λ inconnu, pour $n = 10000$ et $\phi = 1,96$.

Correction de la feuille de TD 10

Exercice 1 $(X_n)_{n\geq 0}$ suite i.i.d. de loi $\mathbb{P}(X_n = F) = 1/2 = 1 - \mathbb{P}(X_n = P)$. On applique Borel-Cantelli aux événements indépendants

$$A_{5n} = \{(X_{5n}, X_{5n+1}, X_{5n+2}, X_{5n+3}, X_{5n+4}) = (P, F, P, F, F)\}$$

qui ont tous même proba de sorte que la série $\sum_n P(A_{5n})$ diverge grossièrement. La loi des grands nombres donne quant à elle la fréquence asymptotique d'apparition de la séquence : presque-sûrement,

$$\frac{1}{n}\sharp\{1 \leq k \leq n | (X_k, X_{k+1}, X_{k+2}, X_{k+3}, X_{k+4}) = (P, F, P, F, F)\} = \frac{1}{n}\sum_{1\leq 5k\leq n} \mathbf{1}_{A_{5k}} + \cdots + \frac{1}{n}\sum_{1\leq 5k+4\leq n} \mathbf{1}_{A_{5k+4}}$$

(on découpe l'ensemble selon le résidu de k modulo 5 de façon à avoir des v.a. indépendantes).

Exercice 2
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi. On note $X = X_1$. On suppose $\mathbb{E}[X] = 0$ et $\mathbb{E}[X^4] < \infty$. Le but de l'exercice est de démontrer la loi forte des grands nombres pour la suite $(X_n)_n$.
1. Montrer que, pour tout n, $\mathbb{E}[S_n^4] = n\mathbb{E}[X^4] + 3n(n-1)\mathbb{E}[X^2]^2$. (développer...)
2. Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|S_n| > n\varepsilon) = \mathbb{P}(|S_n|^4 > n^4\varepsilon^4) \leq \frac{\mathbb{E}[S_n^4]}{n^4\varepsilon^4} \sim_n \frac{3\mathbb{E}[X^2]^2}{n^2\varepsilon^4}.$$

3. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, en prenant $\varepsilon = 1/p$, par Borel-Cantelli, il existe p.s. n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $\frac{|S_n|}{n} \leq \frac{1}{p}$. Comme une intersection dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûre, on a : p.s., pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $\frac{|S_n|}{n} \leq \frac{1}{p}$, c'est à dire que la suite $(S_n/n)_n$ converge vers 0.

Exercice 3 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
1. Soit $\varepsilon > 0$. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\frac{1}{\ln n}\max_{1\leq k\leq n} X_k - \frac{1}{\lambda} > \varepsilon) &= \mathbb{P}(X_k > (\frac{1}{\lambda} + \varepsilon)\ln n)^n \\ &= \exp(-n(1+\lambda\varepsilon)\ln n) \to_n 0\end{aligned}$$

et, si $\varepsilon < 1/\lambda$:

$$\mathbb{P}(\frac{1}{\ln n}\max_{1\leq k\leq n} X_k - \frac{1}{\lambda} < -\varepsilon) = (1 - \exp(-(1-\lambda\varepsilon)\ln n))^n = \exp(n\ln(1 - \frac{1}{n^{1-\varepsilon\lambda}})) \to_n 0,$$

et cette proba est nulle si $\varepsilon > 1/\lambda$.
2. Pour $t \leq 0$, $\mathbb{P}(Z_n \leq t) = 0$ et on a, pour tout $t > 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_n \leq t) &= \mathbb{P}(X_k - \frac{\ln n}{\lambda} \leq t)^n \\ &= (1 - \frac{e^{-\lambda t}}{n})^n \to_n e^{-e^{-\lambda t}}.\end{aligned}$$

Donc Z_n converge en loi vers la loi ayant pour fonction de répartition $F(t) = e^{-e^{-\lambda t}} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$. En dérivant, on voir que c'est aussi la loi de densité $\lambda e^{-\lambda t} e^{-e^{-\lambda t}} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$. Il s'agit d'une loi de Gumbel.

Exercice 4

1. Si $(X_n)_n$ converge en loi vers la variable aléatoire constante c, alors : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n - c| > \varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(c - \varepsilon < X_n < c + \varepsilon) \to_n 0$$

par convergence des fonctions de répartition aux points de continuité de la limite (ici, partout sauf en c).

2. X de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Alors $-X$ a même loi, donc la suite $X_n = (-1)^n X$ converge en loi vers X ; or $X_n - X = 0$ si n est pair et $-2X$ si n est impair donc la suite $\mathbb{P}(|X_n - X| > 1)$ ne converge pas vers 0.

Exercice 5

1. Par la loi des grands nombres (X_1 integrable) on a $\overline{X}_n \to^{ps} \mathbb{E}[X_1] = 1/\lambda$. Donc $Z_n \to^{ps} \lambda$.

2. Par le T.C.L. si $S_n = n\overline{X}_n$ alors

$$\frac{S_n - n\mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{n}} \sim N(0, \sigma(X_1))$$

donc $\overline{X} \sim N(1/\lambda, \dfrac{1}{\sqrt{n}\lambda})$.

3. La fonction $x \mapsto \int_{-x}^{x} e^{-t^2/2} dt / \sqrt{2\pi}$ est continue, croissante de 0 à 1 donc le théorème des valeurs intermédiaires (si I intervalle de $\mathbb{R}$ et f définie sur I à valeurs réelles et continue alors $f(I)$ est un intervalle.)

4. $\sqrt{n}\lambda(\overline{X} - 1/\lambda) \sim N(0, 1)$ donc

$$\mathbb{P}(\sqrt{n}\lambda|\overline{X} - 1/\lambda| < \phi) = 0.95$$

c'est à dire $\mathbb{P}(|\overline{X} - 1/\lambda| < \phi/(\sqrt{n}\lambda)) = 0.95$ donc $\beta = \phi/(\sqrt{n}\lambda)$.

5. $\mathbb{P}(1/\lambda + \phi/(\sqrt{n}\lambda) \leq \overline{X} \leq 1/\lambda + \phi/(\sqrt{n}\lambda)) = 0.95$ est equivalent à

$$\mathbb{P}(\lambda(1/(1 + \phi/\sqrt{n})) \leq Z_n \leq \lambda(1/(1 - \phi/\sqrt{n}))) = 0.95$$

donc on pose

$$\alpha_1 = \lambda(1/(1 + \phi/\sqrt{n})) \quad et \quad \alpha_2 = \lambda(1/(1 - \phi/\sqrt{n})).$$

6. $\phi/\sqrt{n} = 0.0196$ donc $\alpha_1 = 0.98$ et $\alpha_2 = 1.02$ d'ou $J = [0.98\lambda, 1.02\lambda]$.