Cours 2: Variables aléatoires continues, loi normale

Clément Rau
Laboratoire de Mathématiques de Toulouse
Université Paul Sabatier-IUT GEA Ponsan

Module: Stat inférentielles

Définition

Definition

Une variable aléatoire est une application de l'univers Ω dans $\mathbb{R}$

$$X \quad : \quad \begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto X(\omega) \end{aligned}$$

Une variable aléatoire est généralement désignée par une lettre majuscule X, Y, etc. La variable aléatoire est dite continue si l'ensemble $X(\Omega)$ est un intervalle (ou une réunion d'intervalles) de $\mathbb{R}$.

Définition

Definition

Une variable aléatoire est une application de l'univers Ω dans $\mathbb{R}$

$$X \quad : \quad \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\omega \longmapsto X(\omega)$$

Une variable aléatoire est généralement désignée par une lettre majuscule X, Y, etc. La variable aléatoire est dite continue si l'ensemble $X(\Omega)$ est un intervalle (ou une réunion d'intervalles) de $\mathbb{R}$.

Exemple : X :=taille d'un individu

Problemes que soulévent cette définition

La description d'une loi continue diffère de celles des lois discrètes puisque pour une variable aléatoire continue X, la probabilité que X prenne une valeur bien précise x est nulle, $\mathbb{P}[X = x] = 0$. Il y a en effet une infinité de valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans un intervalle, et au regard de toutes ces valeurs précises, le poids de la valeur particulière est tellement insignifiant qu'il en est nul !

Problemes que soulévent cette définition

La description d'une loi continue diffère de celles des lois discrètes puisque pour une variable aléatoire continue X, la probabilité que X prenne une valeur bien précise x est nulle, $\mathbb{P}[X = x] = 0$. Il y a en effet une infinité de valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans un intervalle, et au regard de toutes ces valeurs précises, le poids de la valeur particulière est tellement insignifiant qu'il en est nul !

Ex : si X =taille d'un individu, alors $\mathbb{P}(X = 1,8245756) = 0$

Problemes que soulévent cette définition

La description d'une loi continue diffère de celles des lois discrètes puisque pour une variable aléatoire continue X, la probabilité que X prenne une valeur bien précise x est nulle, $\mathbb{P}[X = x] = 0$. Il y a en effet une infinité de valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans un intervalle, et au regard de toutes ces valeurs précises, le poids de la valeur particulière est tellement insignifiant qu'il en est nul !

Ex : si X =taille d'un individu, alors $\mathbb{P}(X = 1,8245756) = 0$

Il n'est ainsi pas possible de définir la loi de X par la donnée des probabilités des événements élémentaires. Par contre, il est possible de déduire les probabilités que X prenne ses valeurs dans une partie de $\mathbb{R}$ à partir de la fonction de répartition definie par :

$$F(x) = \mathbb{P}[X \leq x] = \mathbb{P}[X < x].$$

Quelques propriétés de la fonction de répartition

Proposition

On a les propriétés suivantes :

1. *F est une continue,*
2. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ *et* $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$,
3. *F est une fonction croissante,*
4. *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$,*

$$F(b) - F(a) = \mathbb{P}[a < X \leq b].$$

Densité

Definition

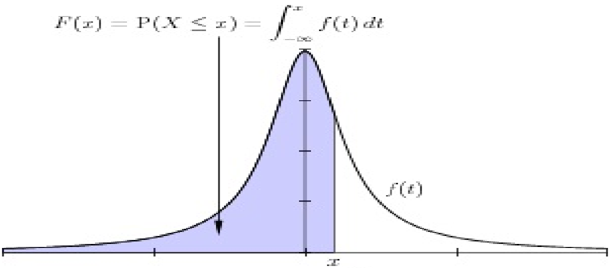
Une variable aléatoire possède ***une densité*** *si sa fonction de répartition F est dérivable. La dérivée notée f est appelée densité de probabilité de la variable aléatoire X.*

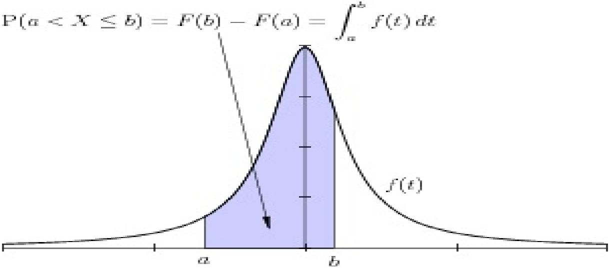
Proposition

De ce fait,

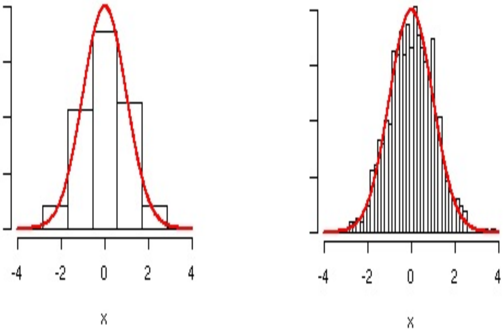
$$\mathbb{P}[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(t)dt,$$

et la probabilité de trouver X dans un intervalle $[a, b]$ donné, apparaît comme l'aire d'une partie du graphique située entre la courbe de la densité f et l'axe des abscisses.

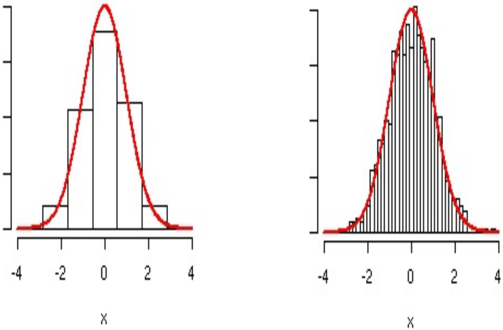

$F(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$
$f(t)$
x


$\mathrm{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(t)\,dt$
$f(t)$
a
b

- *Origine de ces points de vue :* histogramme des fréquences d'une série regroupée par classe dont l'amplitude des classes devient "petites"...



- *Origine de ces points de vue :* histogramme des fréquences d'une série regroupée par classe dont l'amplitude des classes devient "petites"...



Quelques propriétés de la densité

Proposition

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0.$
2. $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$
3. $$\mathbb{P}[a < X \leq b] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Paramètres d'une loi continue

Proposition

Soit X une variable aléatoire continue de Ω dans $\mathbb{R}$ de densité f. On calcule espérance et variance à l'aide des formules suivantes :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} t\, f(t)\, dt,$$

et

$$\begin{aligned} var(X) &= \mathbb{E}[(X - E(X))^2] = \int_{\mathbb{R}} (t - \mathbb{E}(X))^2\, f(t)\, dt \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \int_{\mathbb{R}} t^2 f(t)\, dt - (\int_{\mathbb{R}} t\, f(t)\, dt)^2. \end{aligned}$$

Paramètres d'une loi continue

Proposition

Soit X une variable aléatoire continue de Ω dans $\mathbb{R}$ de densité f. On calcule espérance et variance à l'aide des formules suivantes :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} t\, f(t)\, dt,$$

et

$$\begin{aligned} var(X) &= \mathbb{E}[(X - E(X))^2] = \int_{\mathbb{R}} (t - \mathbb{E}(X))^2\, f(t)\, dt \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \int_{\mathbb{R}} t^2 f(t)\, dt - (\int_{\mathbb{R}} t\, f(t)\, dt)^2. \end{aligned}$$

Comparer ces formules avec le cas discret...

Loi uniforme

Cette loi modélise un phénomène uniforme sur un intervalle donné.

Definition

La v.a. X suit une loi uniforme sur l'intervalle borné $[a;b]$ *si elle a une densité f constante sur cet intervalle et nulle en dehors. Elle est notée* $\mathcal{U}([a;b])$. *Sa densité est alors,*

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{si} \quad x \in [a;b], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Loi uniforme

Cette loi modélise un phénomène uniforme sur un intervalle donné.

Definition

La v.a. X suit une loi uniforme sur l'intervalle borné $[a; b]$ si elle a une densité f constante sur cet intervalle et nulle en dehors. Elle est notée $\mathcal{U}([a; b])$. Sa densité est alors,

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{si} \quad x \in [a; b], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette loi est l'équivalent continue de la loi discréte equirépartie. Son espérance est $\mathbb{E}[X] = (b+a)/2$ et sa variance est $Var(X) = (b-a)^2/12$.

Proposition

Si X est une v.a de loi uniforme sur $[a;b]$ alors pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(X \in I) = \frac{l([a;b] \cap I)}{l([a;b])},$$

où $l(J)$ désigne la longueur de l'intervalle J (ex : l([a ;b])=b-a).

Loi exponentielle

Definition

Soit α un réel strictement positif. La v.a X suit une loi exponentielle de paramètre α, notée $\mathcal{E}(\alpha)$, si elle admet pour densité :

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} 1_{[0;+\infty[}(x).$$

Loi exponentielle

Definition

Soit α un réel strictement positif. La v.a X suit une loi exponentielle de paramètre α, notée $\mathcal{E}(\alpha)$, si elle admet pour densité :

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} 1_{[0;+\infty[}(x).$$

Son espérance est $\mathbb{E}(X) = 1/\alpha$ et sa variance est $var(X) = 1/\alpha^2$.

Les lois exponentielles sont souvent utilisées pour modéliser des temps d'attente ou des durées de vie.

Les lois exponentielles sont souvent utilisées pour modéliser des temps d'attente ou des durées de vie.
Par exemple, les temps d'attente à partir de maintenant du prochain tremblement de terre, de la prochaine panne d'un appareil, de la prochaine désintégration dans un réacteur nucléaire suivent des lois exponentielles.

Les lois exponentielles sont souvent utilisées pour modéliser des temps d'attente ou des durées de vie.
Par exemple, les temps d'attente à partir de maintenant du prochain tremblement de terre, de la prochaine panne d'un appareil, de la prochaine désintégration dans un réacteur nucléaire suivent des lois exponentielles.

Le paramètre α désigne alors l'inverse du temps d'attente moyen.

Introduction

La loi normale est apparu naturellement (d'où son nom) comme limite de certains processus. Ce point sera developpé dans le chapitre "Théorème central limite"

Introduction

La loi normale est apparu naturellement (d'où son nom) comme limite de certains processus. Ce point sera developpé dans le chapitre "Théorème central limite"
C'est la loi la plus connue des probabilités, parfois sous le vocable **loi de Laplace-Gauss** et caractérisée par une célèbre "courbe en cloche".

Définition, loi normale centrée réduite

Definition

La ***loi normale centrée réduite*** *est une la loi continue, d'une v.a. X à valeurs dans $X(\Omega) = \mathbb{R}$ tout entier, définie à partir de la densité*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

Définition, loi normale centrée réduite

Definition

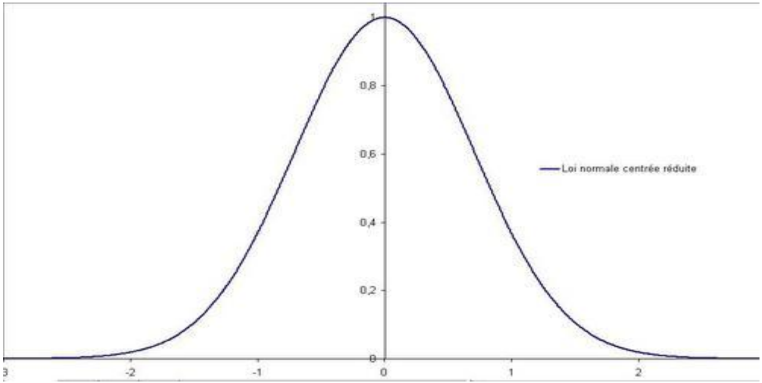
*La **loi normale centrée réduite** est une la loi continue, d'une v.a. X à valeurs dans $X(\Omega) = \mathbb{R}$ tout entier, définie à partir de la densité*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

Il n'existe par contre pas d'expression simple de sa fonction de répartition autre que la formule intégrale

$$\forall a \in \mathbb{R},\ F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt$$

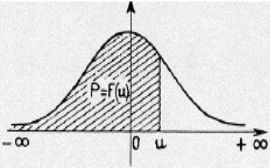
Allure de la densité normale centrée réduite



Remarque

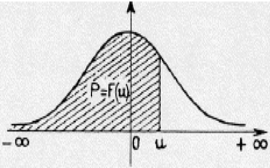
Dans les pratiques, les probabilités d'événements de v.a. suivant une loi normales sont répertoriées dans des tables facilement manipulables.

Table de la loi normale centrée réduite



u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5[illegible]60	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5[illegible]57	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5[illegible]48	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6[illegible]31	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6[illegible]00	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7[illegible]54	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852

Table de la loi normale centrée réduite



u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	[illegible]	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	[illegible]	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	[illegible]	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	[illegible]	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	[illegible]	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	[illegible]	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852

On lit par exemple $\mathbb{P}(X \leq 0,64) = 0,7389$.

Remarque

Il existe des tables "inverses" qui à un nombre $r \in [0, 1]$ *associe* u_r *tel que* $\mathbb{P}(X \leq u_r) = r$ *(cf TD)*

Paramètres de la loi normale centrée réduite

Un calcul intégral plus élaboré donne :

Proposition (Espérance et variance)

$$\mathbb{E}[X] = 0,$$
$$V(X) = 1.$$

Paramètres de la loi normale centrée réduite

Un calcul intégral plus élaboré donne :

Proposition (Espérance et variance)

$$\mathbb{E}[X] = 0,$$
$$V(X) = 1.$$

Exo : Vérifier la valeur de l'espérance ! ! !

Loi normale générale

On dit que X suit une $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, si la densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Loi normale générale

On dit que X suit une $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, si la densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

L'usage d'un changement de variable $t = \frac{(x-\mu)}{\sigma}$ permet de se ramener à un calcul d'intégrale à partir de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, ce qui nous permettra de consulter les tables existant pour la loi standard précédente.

Loi normale générale

On dit que X suit une $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, si la densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

L'usage d'un changement de variable $t = \frac{(x-\mu)}{\sigma}$ permet de se ramener à un calcul d'intégrale à partir de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, ce qui nous permettra de consulter les tables existant pour la loi standard précédente. On a le théorème suivant :

Loi normale générale

Théorème

Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et Z la variable aléatoire définie par

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma},$$

alors Z suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

Loi normale générale

Théorème

Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et Z la variable aléatoire définie par

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma},$$

alors Z suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

Attention, certains auteurs utilisent la notation $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et pas $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

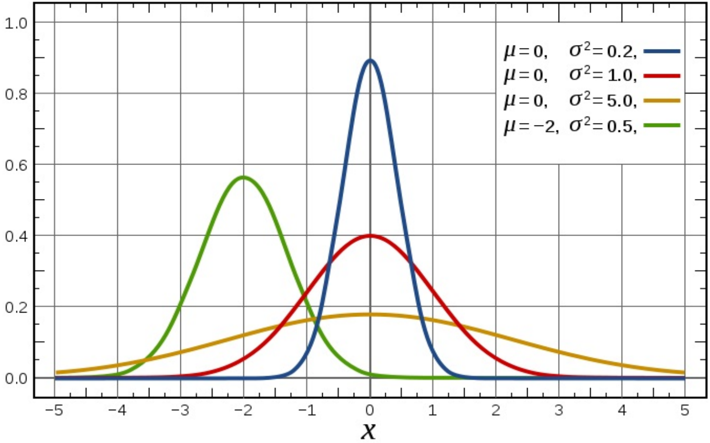
Paramètres

On a également :

Proposition (Espérance et variance)

$$\mathbb{E}[X] = \mu,$$
$$V(X) = \sigma^2.$$

Allure de la densité en fonction de μ et σ



Manipulation de la loi normale

Considérons X une v. a. qui suit une loi $\mathcal{N}(6, 2)$

Manipulation de la loi normale

Considérons X une v. a. qui suit une loi $\mathcal{N}(6, 2)$ ($\sigma(X)$ vaut donc ici 2 et $\mathbb{E}(X) = 6$)

Manipulation de la loi normale

Considérons X une v. a. qui suit une loi $\mathcal{N}(6, 2)$
($\sigma(X)$ vaut donc ici 2 et $\mathbb{E}(X) = 6$)
Et soit Z une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$,

Manipulation de la loi normale

Considérons X une v. a. qui suit une loi $\mathcal{N}(6, 2)$
($\sigma(X)$ vaut donc ici 2 et $\mathbb{E}(X) = 6$)
Et soit Z une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, on a par exemple

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X \leq 7] &= \mathbb{P}\Big[\frac{X-6}{2} \leq \frac{7-6}{2}\Big] \\
&= \mathbb{P}\Big[Z \leq \frac{1}{2}\Big] \\
&= 0.6915.
\end{aligned}$$

Concentration autour de la moyenne

Dans l'intervalle $[m-\sigma, m+\sigma]$ de longueur 2σ et centré autour de la moyenne, on peut calculer qu'il y a 68% des individus, lorsque qu'une v.a. suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$:

$$\mathbb{P}[m-\sigma \leq X \leq m+\sigma] = 0.68$$

Concentration autour de la moyenne

Dans l'intervalle $[m-\sigma, m+\sigma]$ de longueur 2σ et centré autour de la moyenne, on peut calculer qu'il y a 68% des individus, lorsque qu'une v.a. suit une loi $\mathcal{N}(m,\sigma)$:

$$\mathbb{P}[m-\sigma \leq X \leq m+\sigma] = 0.68$$

On établit aussi que 95% d'un échantillon représentatif d'une loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma)$ est approximativement situé entre $m-2\sigma$ et $m+2\sigma$. Plus exactement,

$$\mathbb{P}[m-1.96\sigma \leq X \leq m+1.96\sigma] = 0.95$$

Concentration autour de la moyenne

Dans l'intervalle $[m-\sigma, m+\sigma]$ de longueur 2σ et centré autour de la moyenne, on peut calculer qu'il y a 68% des individus, lorsque qu'une v.a. suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$:

$$\mathbb{P}[m-\sigma \leq X \leq m+\sigma] = 0.68$$

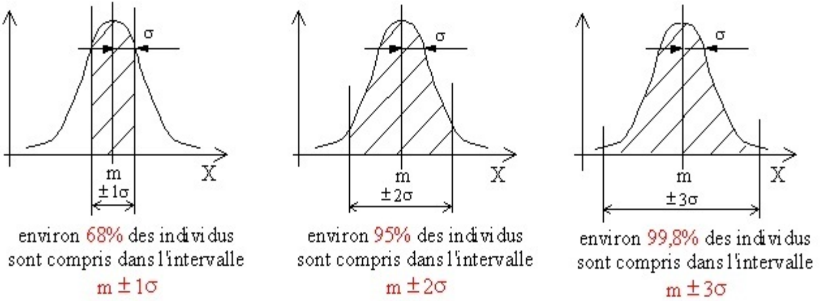
On établit aussi que 95% d'un échantillon représentatif d'une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ est approximativement situé entre $m-2\sigma$ et $m+2\sigma$. Plus exactement,

$$\mathbb{P}[m-1.96\sigma \leq X \leq m+1.96\sigma] = 0.95$$

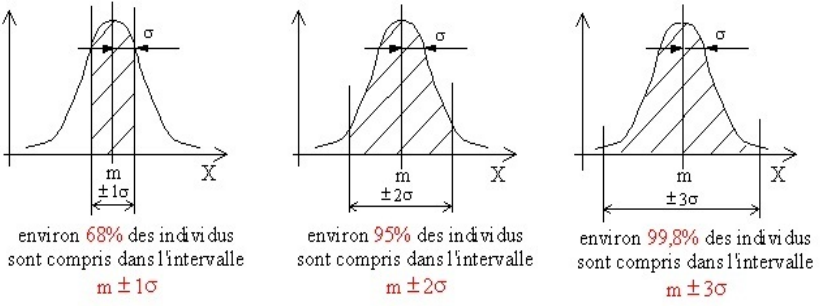
et on a mème $99,7\%$ des individus entre $m-3\sigma$ et $m+3\sigma$:

$$\mathbb{P}[m-3\sigma \leq X \leq m+3\sigma] = 0.997$$

Concentration autour de la moyenne



Concentration autour de la moyenne



Autrement dit, lorsque l'on a une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$, on est "pratiquement sûr" que la valeur se situera entre $m - 3\sigma$ et $m + 3\sigma$.

La loi normale comme limite en loi

Proposition

Soit S_n binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ et $U \sim \mathcal{N}(0;1)$. On a :

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} U,$$

qui peut également s'écrire

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(np;\sqrt{npq}).$$

Dans la pratique, on considère que l'approximation est bonne lorsque $n \geq 30$, $\; n \cdot p \geq 5 \;$ et $\; \mathrm{n} \cdot (1-\mathrm{p}) > 5$

p ne doit donc pas être trop proche de 0 ou de 1.

La loi normale comme limite en loi

- Cette propriété est une conséquence du Théoréme central limite que l'on abordera au chapitre suivant.

La loi normale comme limite en loi

- Cette propriété est une conséquence du Théoréme central limite que l'on abordera au chapitre suivant.
- Ne pas confondre l'approximation de la loi de poisson par une binomiale et celle de la loi normale ! ! !

Loi du Khi-deux

Definition

Soient $X_1, ..., X_n$ des v.a indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. Posons

$$Z = \sum_{i=1\ldots n} X_i^2,$$

par définition la v.a. Z suit une loi du khi-deux à n degré(s) de liberté (abréviation d.d.l.). On la note $\chi^2(n)$.

Loi du Khi-deux

Definition

Soient $X_1, ..., X_n$ des v.a indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. Posons

$$Z = \sum_{i=1...n} X_i^2,$$

par définition la v.a. Z suit une loi du khi-deux à n degré(s) de liberté (abréviation d.d.l.). On la note $\chi^2(n)$.

Quelques Propriétés :
- $Z \geq 0$, cette loi n'est donc pas symétrique,
- Z admet une densité,
- $\mathbb{E}(Z) = n$ et $Var(Z) = 2n$

Allure de la densité d'un χ^2

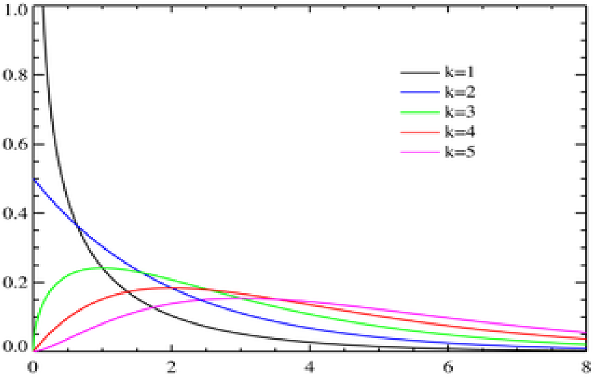


FIGURE: Densité de la loi $\chi^2(k)$.

Loi de Student

Definition

Soient $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \chi^2(n)$. Posons $T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$. Alors T suit une loi de Student à n degré de liberté et on la note $\mathcal{T}(n)$ ou $Student(k)$

Allure de la densité de Student

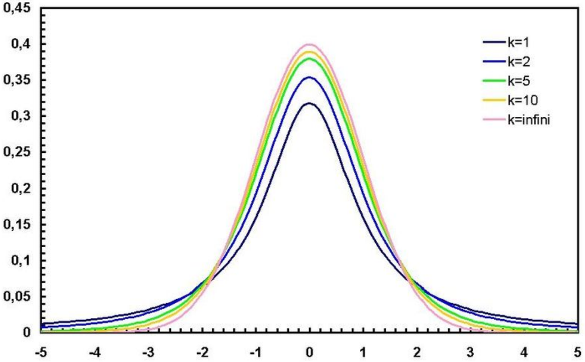


FIGURE: Densité de la loi de *Student*(n).

Loi de Fisher-Snedecor

Definition

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \chi^2(n)$ et $Y \sim \chi^2(m)$. Alors, on dit que la variable

$$Z = \frac{\frac{X}{n}}{\frac{Y}{m}}$$

suit une loi de Fisher-Snedecor(n, m). On la note $\mathcal{F}(n, m)$

Allure de la densité de Fisher-Snedecor

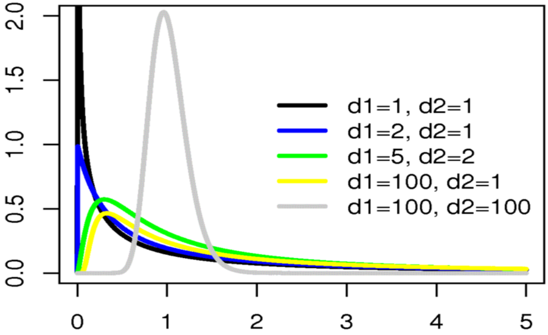


FIGURE: Densité de la loi de Fisher-Snedecor $\mathcal{F}(d_1, d_2)$.

Ces trois derniéres lois seront utiles dans la théorie des tests.

Ces trois derniéres lois seront utiles dans la théorie des tests. L'expression explicite des densités de ces lois n'est pas à connaître (sauf pour la loi normale). Des tables statistiques et des logiciels permettent de les manipuler.