Corrigé examen
SMC4-M26 : probabilités
Session de printemps

I. -- (4 pts)

On considère les événements

$A =$ "*la ligne A est choisie*";

$B =$ "*la ligne B est choisie*";

$C =$ "*la ligne C est choisie*";

$D =$ "*la ligne D est choisie*";

$R =$ "*la pesonne est en retard*".

1) La probabilité de choisir la *ligne D* :

1

on a $\Omega = A \cup B \cup C \cup D$ et $P(\Omega) = P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1.$

D'où :

$$P(D) = 1 - P(A) + P(B) + P(C) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{3}.$$

2) La probabilité d'arriver en retard :

On utilise la formule des probabilités totales ;

2

$$P(R) = P\left({R}/{A}\right)P(A) + P\left({R}/{B}\right)P(B) + P\left({R}/{C}\right)P(C) + P\left({R}/{D}\right)P(D)$$

$$= \frac{1}{20} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{12} + 0 \times \frac{1}{3} = \frac{7}{120}.$$

3) La probabilité que la *ligne C* ait été choisi, sachant que la personne est arrivée en retard :

On utilise la formule de Bayes ;

1

$$P\left({C}/{R}\right) = \frac{P\left({R}/{C}\right)P(C)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{5} \times \frac{1}{12}}{\frac{7}{120}} = \frac{2}{7}.$$

II. -- (4 pts)

Soit X la variable aléatoire dont la valeur est le nombre des éprouvettes non conformes dans l'échantillon.

1) La loi de probabilité de X :

1

La variable aléatoire X est le nombre de succès (éprouvette non conforme) dans un échantillon de taille 200 (répétitions indépendantes d'épreuves de Bernoulli) ; la variable X suit alors une loi de binomiale de paramètres $\boldsymbol{n = 200}$ ***et*** $\boldsymbol{p = 0,02}$ (probabilité d'observer un succès) : $\boldsymbol{X \sim \mathcal{B}(200\,,\ 0,02)}$;

$$P(X = k) = C_{200}^{k}(0,02)^{k}(0,98)^{200-k},\ k = 0, 1, \cdots, 200.$$

$$E(X) = np = 200 \times 0,02 = 4;$$

$$Var(X) = np(1-p) = 3,92.$$

2) La probabilité qu'il y ait au moins 2 éprouvettes non conformes dans l'échantillon :

1

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \left(P(X = 0) + P(X = 1)\right)$$

$$= 1 - \left((0,98)^{200} + 4 \times (0,98)^{199}\right) = 1 - 0,089 = 0,911.$$

3) Valeur approchée de $P(3 \le X \le 6)$:

2

On a : $n = 200 > 50$ *et* $np = 4 < 5$; on peut alors approcher la loi de X par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 4$; $P(X = k) \cong \frac{(4)^k}{k!} e^{-4}$, $k = 0,1\cdots,200$.

D'où :

$$P(3 \le X \le 6) = \sum_{k=3}^{6} P(X = k) \cong e^{-4} \sum_{k=3}^{6} \frac{4^k}{k!}$$
$$\cong 0,6512.$$

III. -- **(5 pts)**

On considère l'élément radioactif *Iode* 131 pour lequel la demi-vie (période radioactive) est 8,02 jours. Soit X la variable aléatoire représentant la durée de vie de cet élément.

1) La variable aléatoire X suit une loi exponentielle (de demi-vie $t_{½} = 8,02$) de paramètre

1,5

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{t_{½}} = \frac{\ln(2)}{8,02} = 0,0864 :$$

$F_X(t) = P(X \le t) = 1 - e^{-\left(\frac{\ln(2)}{8,02}\right)t}$, pour $t \ge 0$ *et* $P(X > t) = e^{-\left(\frac{\ln(2)}{8,02}\right)t}$;

et la durée de vie moyenne de cet élément est $E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{8,02}{\ln(2)} = 11,570$ *jours* .

2) La probabilité pour qu'un élément *Iode* 131 ne soit pas désintégré après 16 jours :

1

$$P(X > 16) = e^{-16\times\left(\frac{\ln(2)}{8,02}\right)} = 0,2508 .$$

3) On utilise le fait que la loi de X est sans mémoire : $P\left(X > t+s \middle/ X > t\right) = P(X > s)$;

1

d'où :

$$P\left((X > 40) \middle/ (X > 16)\right) = P(X > 24) = e^{-24\times\left(\frac{\ln(2)}{8,02}\right)} = 0,1256.$$

4) Cherchons une valeur ***t*** telle que : $P(X \le t) = 0,99$:

1,5

$$P(X \le t) = 0,99 \Leftrightarrow P(X > t) = 0,01 \Leftrightarrow e^{-\lambda t} = 0,01$$

Il en résulte : $t = -\frac{\ln(0,01)}{\lambda} = -\ln(0,01) \times \frac{8,02}{\ln(2)} = 53,2837$.

IV. -- **(3 pts)**

La variable aléatoire X suit la loi normale $N(150\,,1,44)$: $\mu = 150$ *et* $\sigma^2 = 1,44$.

1) La probabilité pour qu'une bouteille soit « acceptable » :

1,5

$$P(147,5 \le X \le 152,5) = P\left(\frac{-2,5}{1,2} < \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{2,5}{1,2}\right) = P\left(-2,083 < \frac{X-\mu}{\sigma} \le 2,083\right)$$
$$= \varphi(2,083) - \varphi(-2,083) = \varphi(2,083) - (1 - \varphi(2,083))$$
$$= 2\varphi(2,083) - 1 = 2 \times 0,9812 - 1$$
$$= 0,9624;$$

φ étant la fonction de repartition de $N(0,1)$.

2) La probabilité qu'une bouteille contienne moins de $150cl$ d'eau sachant qu'elle est « acceptable » :

1,5

$$P\left((X<150)\big/(147{,}5\le X\le 152{,}5)\right)=\frac{P(147{,}5\le X<150)}{P(147{,}5\le X\le 152{,}5)}=\frac{P\left(-\frac{2{,}5}{1{,}2}\le\frac{X-\mu}{\sigma}<0\right)}{P\left(-\frac{2{,}5}{1{,}2}\le\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{2{,}5}{1{,}2}\right)}$$

$$=\frac{\varphi(2{,}08)-\varphi(0)}{2\varphi(2{,}08)-1}$$

$$=\frac{0{,}9812-0{,}5}{0{,}9624}$$

$$=0{,}5.$$

V. -- **(4 pts)**

Soit X une variable aléatoire continue ayant une densité de probabilité définie par :

$$f(x)=\begin{cases}k|x|^{\frac{1}{3}} & -1\le x\le 1;\\ 0 & alleurs.\end{cases}$$

1) La valeur de la constante k :

1

f(x) étant continue, positive donc pour qu'elle soit une densité de probabilité il suffit que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du=1.$

Or on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du=k\int_{-1}^{1}|u|^{\frac{1}{3}}\,du=2k\int_{0}^{1}u^{\frac{1}{3}}du=2k\left[\frac{3u^{\frac{4}{3}}}{4}\right]_0^1=\frac{3}{2}\mathrm{k}.$

D'où : $k=\frac{2}{3}.$

2) La fonction de répartition de X :

2

$$F_X(t)=P(X\le t)=\frac{2}{3}\int_{-\infty}^{t}|\mathrm{u}|^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{du}=\begin{cases}0 & si\quad t<-1;\\ \frac{2}{3}\int_{-1}^{t}(-u)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{du}=\frac{1}{2}\left(1-t^{\frac{4}{3}}\right) & si\quad -1\le t<0;\\ \frac{2}{3}\left(\int_{-1}^{0}(-u)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{du}+\int_{0}^{t}u^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{du}\right)=\frac{1}{2}\left(1+t^{\frac{4}{3}}\right) & si\quad 0\le t<1;\\ 1 & si\quad t\ge 1.\end{cases}$$

On en déduit : $P(-\frac{1}{8}<X\le\frac{1}{8})=F_X\left(\frac{1}{8}\right)-F_X\left(-\frac{1}{8}\right)=\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{4}{3}}=\frac{1}{16}.$

3) La valeur de $E(X^2)$:

1

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}u^2 f(u)du=\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}u^2|u|^{\frac{1}{3}}\,du=\frac{4}{3}\int_{0}^{1}u^{\frac{7}{3}}du$$

$$=\frac{4}{3}\left[\frac{3}{10}u^{\frac{10}{3}}\right]_0^1=\frac{2}{5}.$$