Corrigé
Rattrapage Session printemps
SMC4-M26 : probabilités

Durée : 1h30

I. .... *(3 points)*

A et B sont deux événements tels que : $P(A)=0,2$ et $P(B)=0,6$. .Calculons $P(A\cup B), P(A\cap B), P(B/A)$ dans les cas :

a. A et B sont incompatoble $\Leftrightarrow P(A\cap B)=0$

1

Ce qui implique :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0,8$$

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=0.$$

b. A et B sont indépendants $\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=0,12$

1

et

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)\times \mathrm{P}(B)=0,68$$

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=P(B)=0.6$$

c. Si $P(A\cup B)=0,7$ alors on a :

1

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0,1$$

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0,1}{0,2}=0,5.$$

II. .... *(5 points)*

La durée de vie, en années, d'un composant électronique est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\boldsymbol{\lambda}$. On suppose que la durée de vie moyenne de ce composant est 10 ans.

a. On a :

0,5

$$\lambda=\frac{1}{E(\mathrm{T})}=0,1 \quad ;$$

b. Calculons la valeur h de la demi-vie ::

1

$$P(T>h)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow e^{-0,1h}=\frac{1}{2}\Rightarrow h=10\ln(2)\cong 6,93$$

0.5 c. $P(T>3)=e^{-0,3}=0,7408$

d. La loi exponentielle est une loi sans mémoire : $P\left(T>t+s/T>t\right)=P(T>s)$.

1

D'où : $P\left(T>10/T>7\right)=P(T>3)=0,7408$

Rq : On peut retrouver ce résultat en utilisant les probabilités conditionnelles :

$$P\left(T>10/T>7\right)=\frac{P\left((T>10)\cap(T>7)\right)}{P(T>7)}=\frac{P\left((T>10)\right)}{P(T>7)}=\frac{e^{-0,1}}{e^{-0,7}}=e^{-0,3}$$

e. L'apport moyen d'un composant :

2 Soit X la variable aléatoire correspondant à ce que rapporte un composant. X prend deux valeurs 500 ou 250 avec des probabilités respectives $P(T>3)=0,7408$ *et* $P(T\leq 3)=0,2592$

d'où l'apport moyenne est $E(\mathrm{X})=500\times 0,7408+250\times 0,2592=435,2\ dh$

III. .... *(6 points)*

Une usine fabrique des imprimantes dont la durée de vie X (exprimée en millions de pages) est une variable aléatoire normale de moyenne $\mu=2$ et d'écart type $\sigma=0,25$.

a.

1

$$P(X>2,5)=P\left(\frac{X-2}{0,25}>\frac{0,5}{0,25}\right)$$

$$=1-P\left(\frac{X-2}{0,25}\leq 2\right)=1-\Phi(2).$$

$$=1-0,9772=0,0228;$$

$\Phi(t)$ étant la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$.

b.

1

$$P(1,5<X<2,5)=P\left(\frac{-0,5}{0,25}<\frac{X-2}{0,25}<\frac{0,5}{0,25}\right)$$

$$=\Phi(2)-\Phi(-2)=2\Phi(2)-1.$$

$$=2\times 0,9772-1$$

$$=0,9544$$

c. On choisit au hasard 100 imprimantes dans la production. Soit Y la variable aléatoire qui compte le nombre d'imprimantes dont la durée de vie est supérieure à 2,5 millions de pages.

i. La variable aléatoire Y suit une loi de binomiale, $Y\sim \mathrm{B}(n,p)$, de paramètres

1

$$n=100\ et\ p=P(X>2,5)=0,0228.\ ;$$

$$P(Y=k)=\binom{100}{k}(0,0228)^k(0,9772)^{100-k},\ k=0,\cdots,100;$$

$$E(Y)=np=100\times 0,0228=2,28;$$

$$\sigma(\mathrm{Y})=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{2,28\times 0,9772}=1,49.$$

ii.

1

$$P(Y\geq 2)=1-P(Y<2)=1-\big(P(Y=0)+P(Y=1)\big)$$

$$=1-(0,0996+0,2324)=1-0,3320\qquad .$$

$$=0,6680$$

iii. Nous avons $n=100>50\ et\ np=2,28<5$; on peut approcher la loi de Y par la loi de

1 Poisson de paramètre $\lambda=2,28$; $P(Y=k)\cong\dfrac{(2,28)^k}{k!}e^{-2,28},\ k=0,\cdots,100$

La probabilité d'avoir au moins 5% d'imprimantes ayant une durée de vie dépassant

2,5 million de pages est :

1
$$P(Y \geq 5) = 1 - P(Y < 5) = 1 - \sum_{k=0}^{4} P(Y = k)$$
$$\cong 1 - e^{-2,28} \sum_{k=0}^{4} \frac{(2,28)^k}{k!}$$
$$\cong 1 - e^{-2,28} \left(1 + 2,28 + \frac{(2,28)^2}{2!} + \frac{(2,28)^3}{3!} + \frac{(2,28)^4}{4!} + \right)$$
$$\cong 1 - 0,9186 \cong 0,0814.$$

IV. .... *(6 points)*

Une personne commence un traitement médical pour arrêter de fumer. On admet que :

- la probabilité qu'elle ne fume pas la première journée de traitement est de 0,2 ;
- si elle ne fume pas un jour donné, alors la probabilité qu'elle ne fume pas le jour suivant est 0,9 ;
- si elle fume un jour donné, la probabilité qu'elle ne fume pas le jour suivant est égale à 0,4 .

On note : F_n l'événement « la personne ne fume pas le n-ième jour du traitement » et p_n la probabilité de l'événement F_n : $p_n = P(F_n)$.

a) La valeur de p_2 :

1
$$p_2 = P(F_2) = P(F_2/F_1)P(F_1) + P\left(F_2/\overline{F_1}\right)P\left(\overline{F_1}\right) = 0,9 \times 0,2 + 0,4 \times 0,8 = 0,50$$

b) La probabilité que la personne n'a pas fumé la première journée sachant qu'elle n'a pas fumé le deuxième jour du traitement

1
$$P(F_1/F_2) = \frac{P(F_2/F_1)P(F_1)}{P(F_2)} = \frac{0,9 \times 0,2}{0,5} = 0,36$$

c) La probabilité que la personne ne fume pas au moins une journée sur les trois premières :

2
$$P(F_1 \cup F_2 \cup F_3) = 1 - P\left(\overline{F_1 \cup F_2 \cup F_3}\right) = 1 - P\left(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3}\right)$$
$$= 1 - P(\overline{F_1})P\left(\overline{F_2}/\overline{F_1}\right)P\left(\overline{F_3}/\left(\overline{F_1} \cap \overline{F_2}\right)\right)$$
$$= 1 - 0,8 \times 0,6 \times 0,6 = 1 - 0,288$$
$$= 0,712$$

d) La valeur de p_{n+1} en fonction de p_n (relation de récurrence) :

1.5
$$p_{n+1} = P(F_{n+1}) = P(F_{n+1}/F_n)P(F_n) + P\left(F_{n+1}/\overline{F_n}\right)P\left(\overline{F_n}\right)$$
$$= 0,9 \times p_n + 0,4 \times (1 - p_n)$$
$$= 0,5 p_n + 0,4$$

e) En admettant la convergence de la suite $(p_n)_{(n \geq 1)}$, on a :

0.5
$$p = \lim_{n \to \infty} p_{n+1} = \lim_{n \to \infty} (0,5 p_n + 0,4) = 0,5 p + 0,4$$

il en résulte : $p = 0,8$