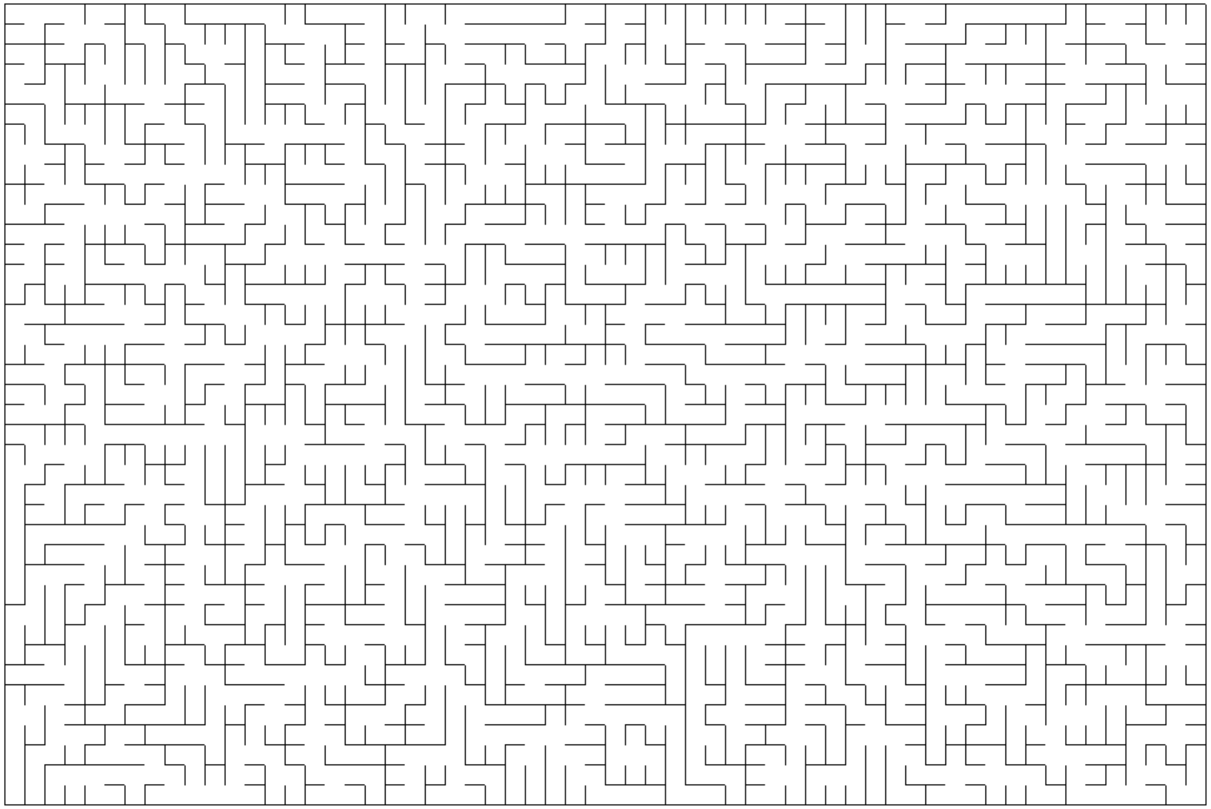
Graphes - Introduction

Mardi 5 Février

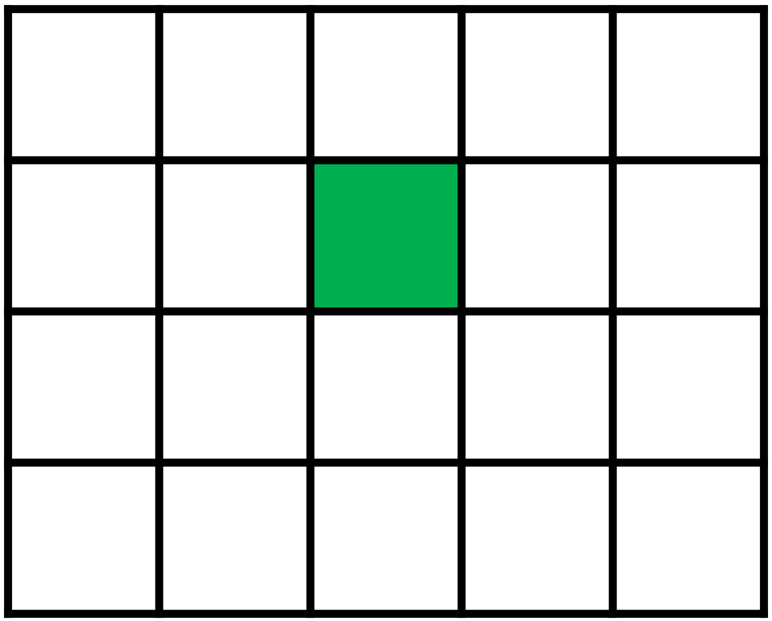
Option Informatique
Ecole Alsacienne

LA VOIE DE LA PERFECTION

Un labyrinthe parfait est un labyrinthe dans lequel, pour tout couple de case, il existe un unique chemin entre ces deux cases

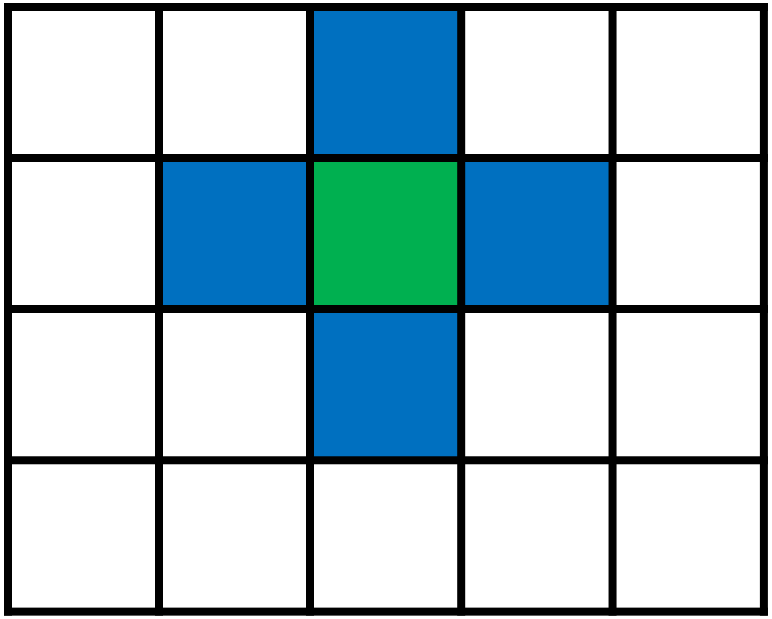


La voie de la perfection



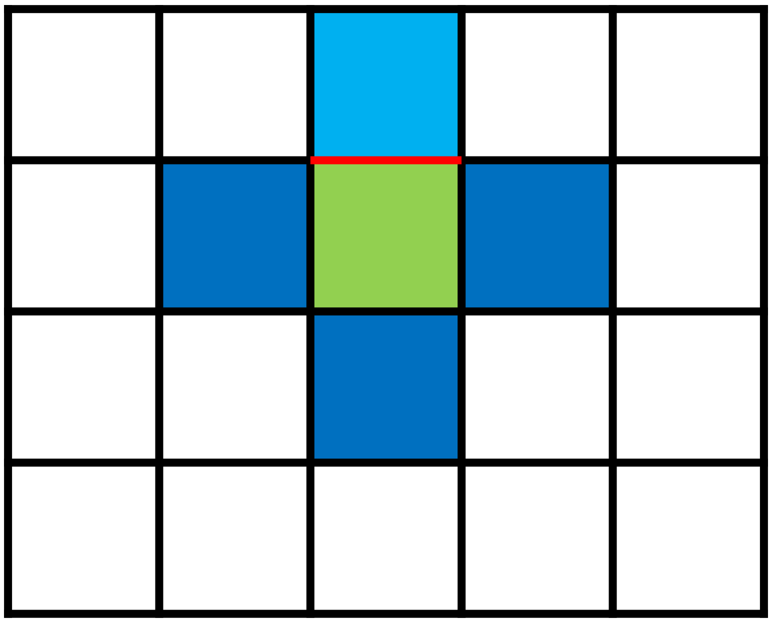
On choisit au hasard une case de départ

La voie de la perfection



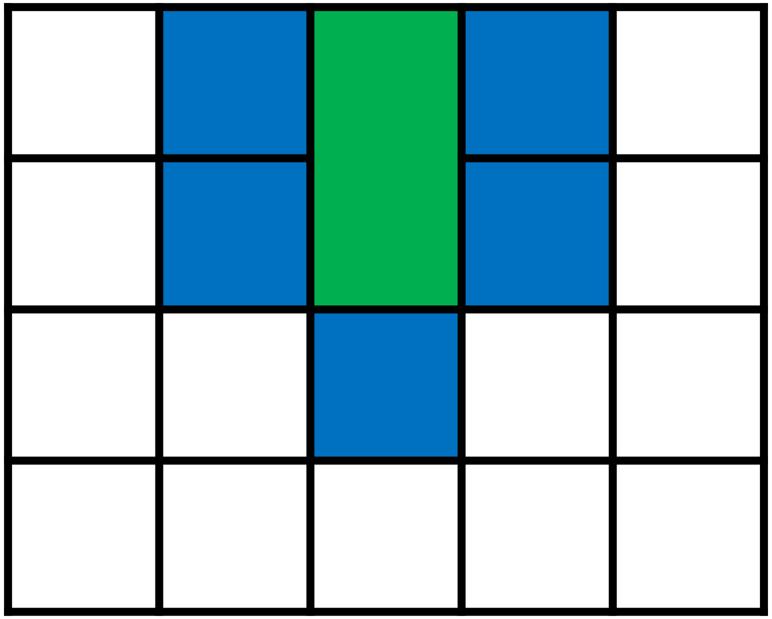
On liste toutes les cases accessibles en abattant un mur

LA VOIE DE LA PERFECTION



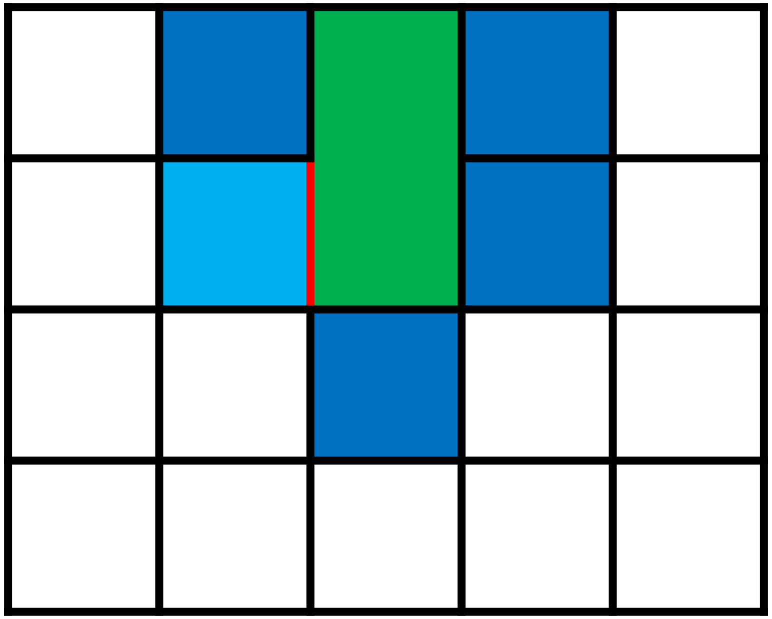
On choisit au hasard une de ces cases,
et on abat le mur correspondant

La voie de la perfection



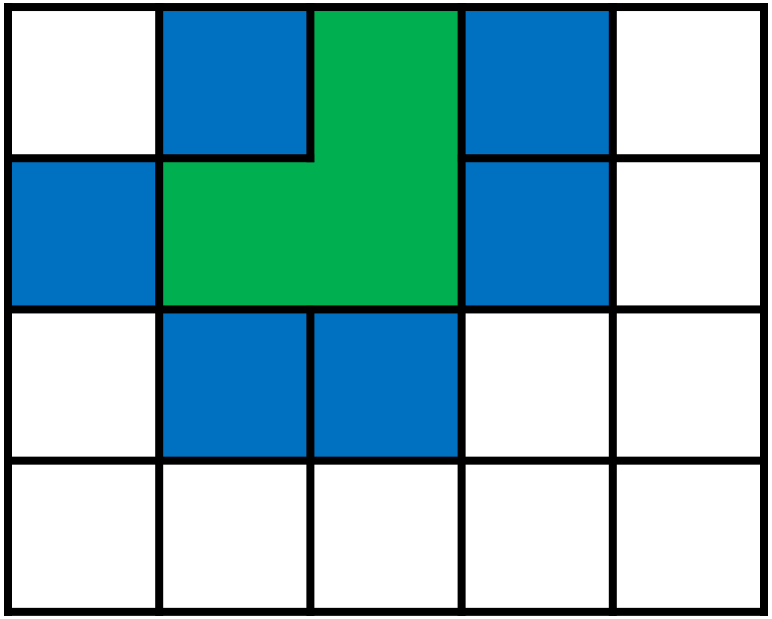
On liste toutes les cases déjà atteintes et celles accessibles en abattant un mur

LA VOIE DE LA PERFECTION



On choisit une nouvelle case au hasard

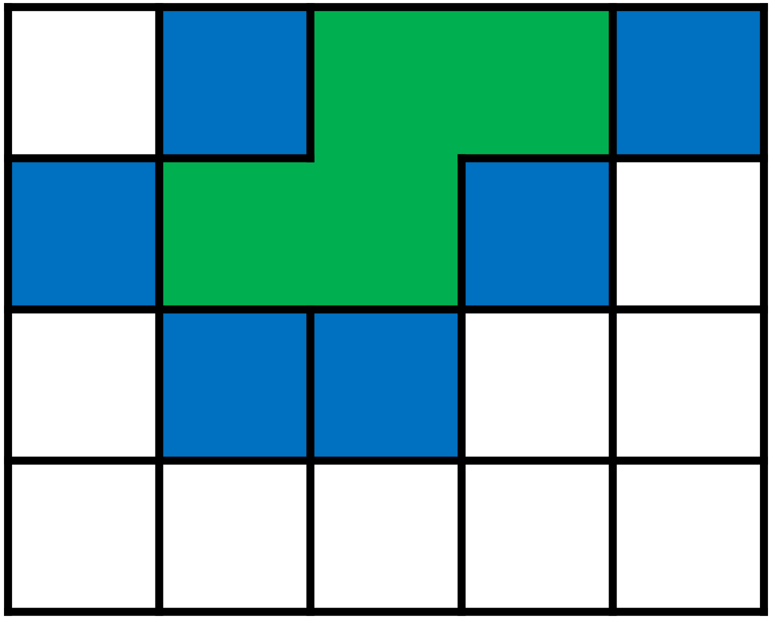
La voie de la perfection



On liste toutes les cases déjà atteintes et

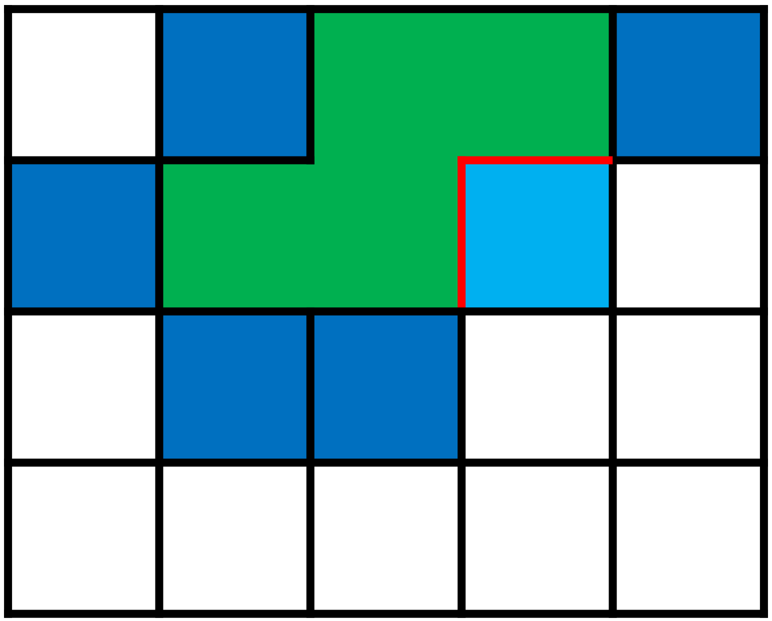
celles accessibles en abattant un mur

La voie de la perfection



Etc.

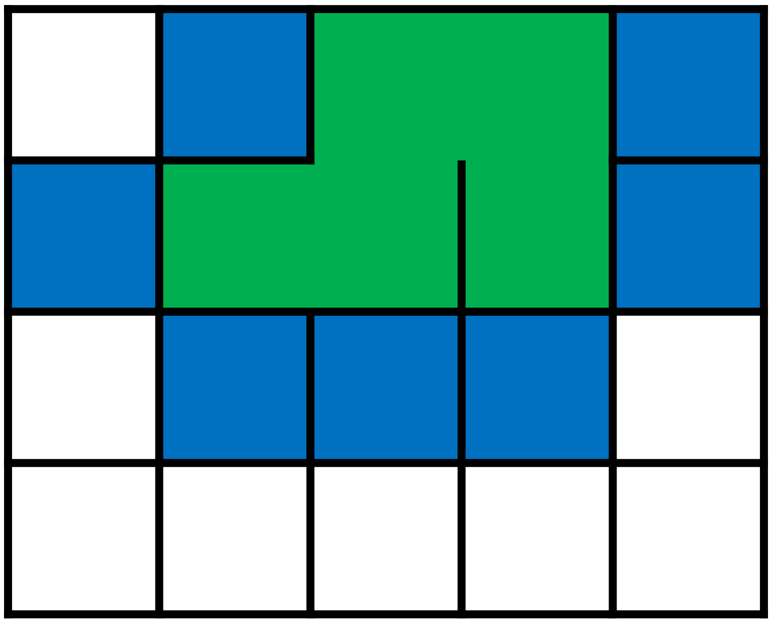
La voie de la perfection



Il peut arriver qu'une case soit accessible en abattant plusieurs murs.

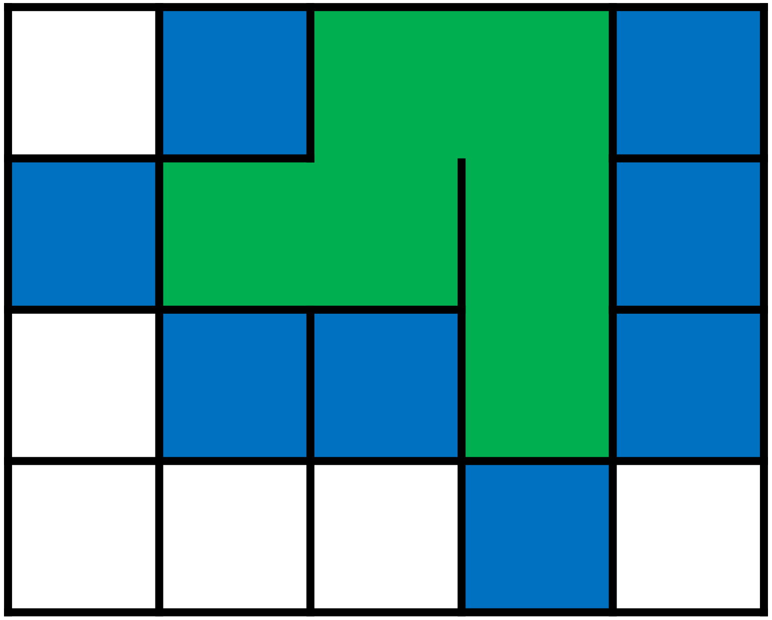
Dans ce cas, on abat un mur au hasard.

La voie de la perfection



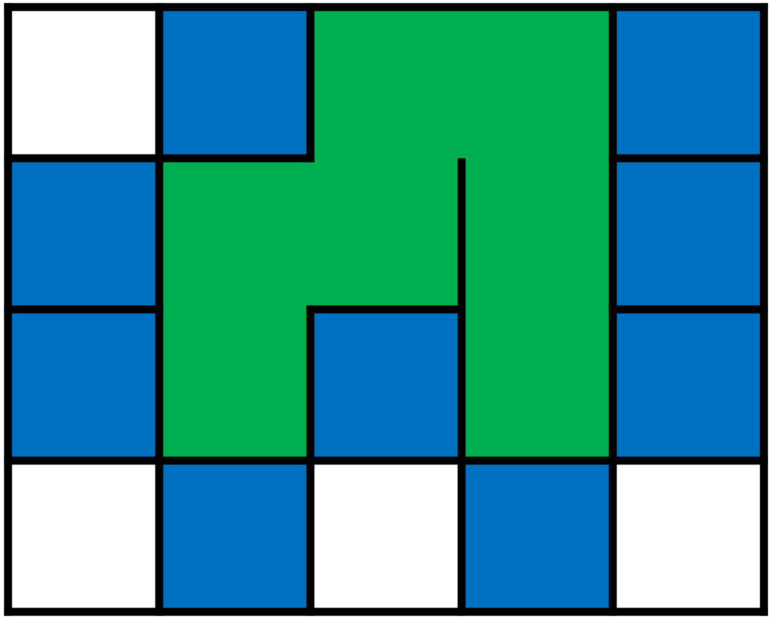
Etc.

La voie de la perfection



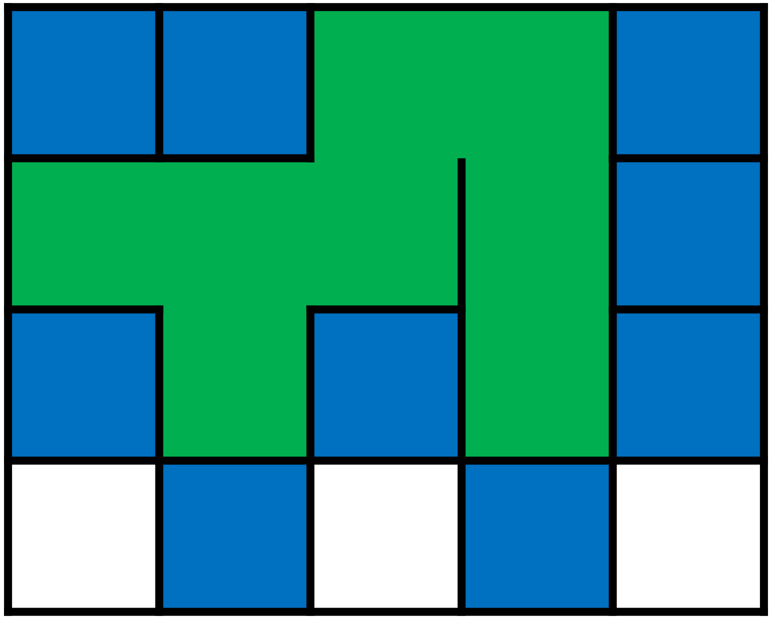
Etc.

La voie de la perfection



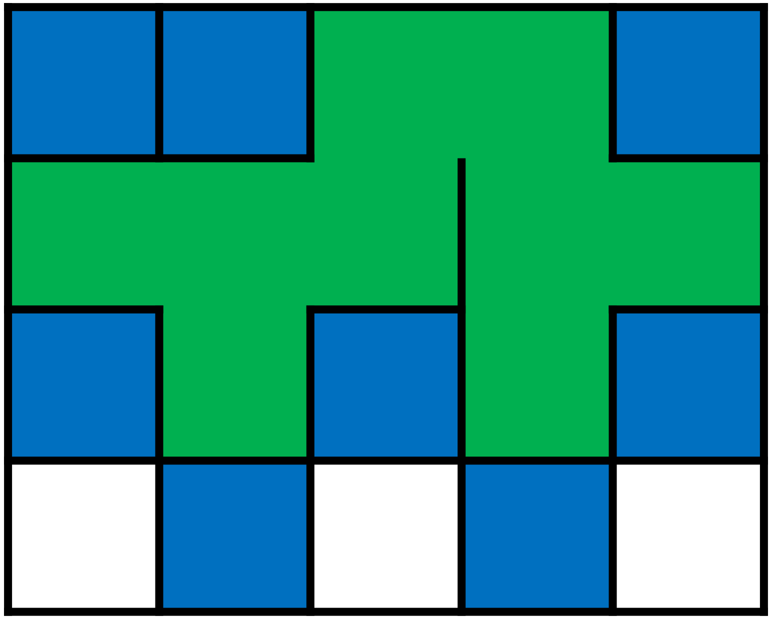
Etc.

La voie de la perfection



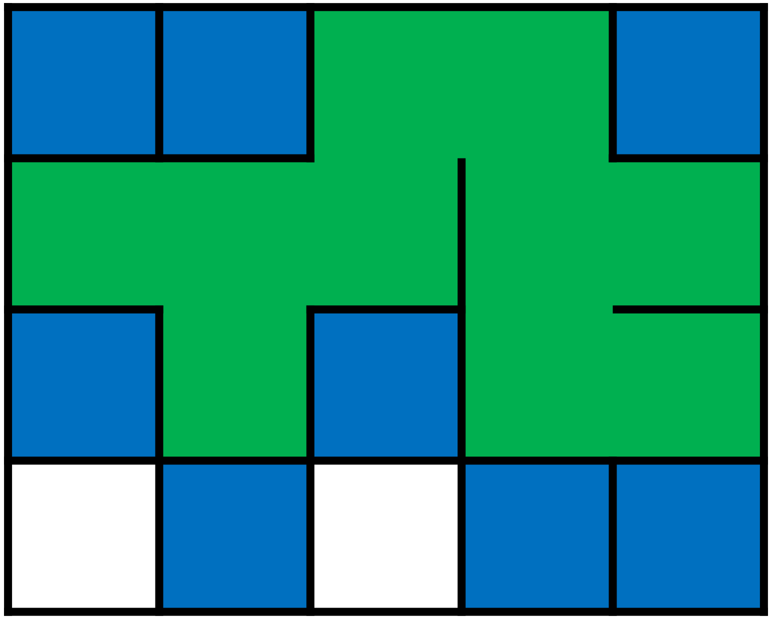
Etc.

La voie de la perfection



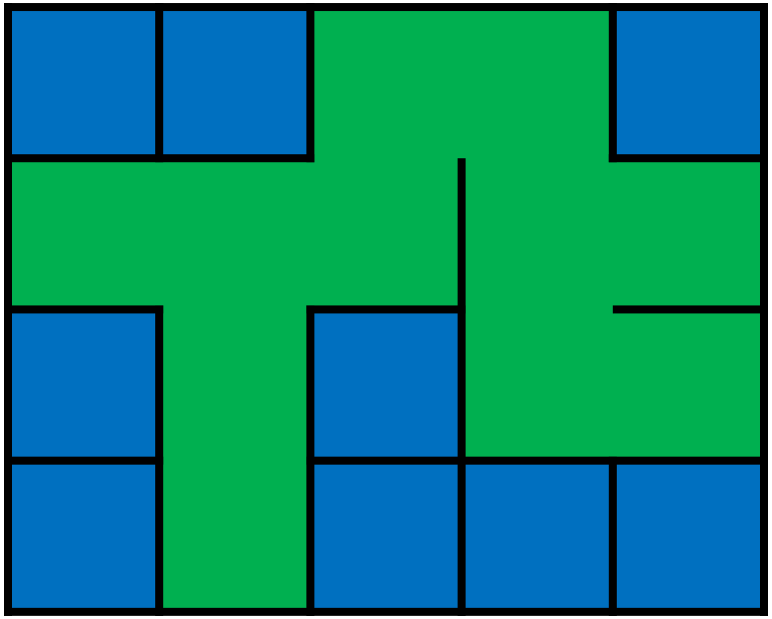
Etc.

La voie de la perfection



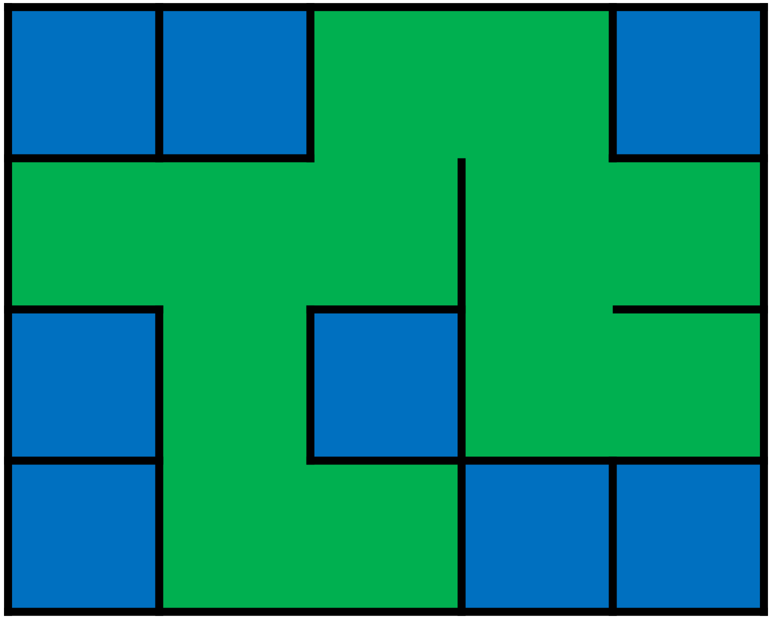
Etc.

La voie de la perfection



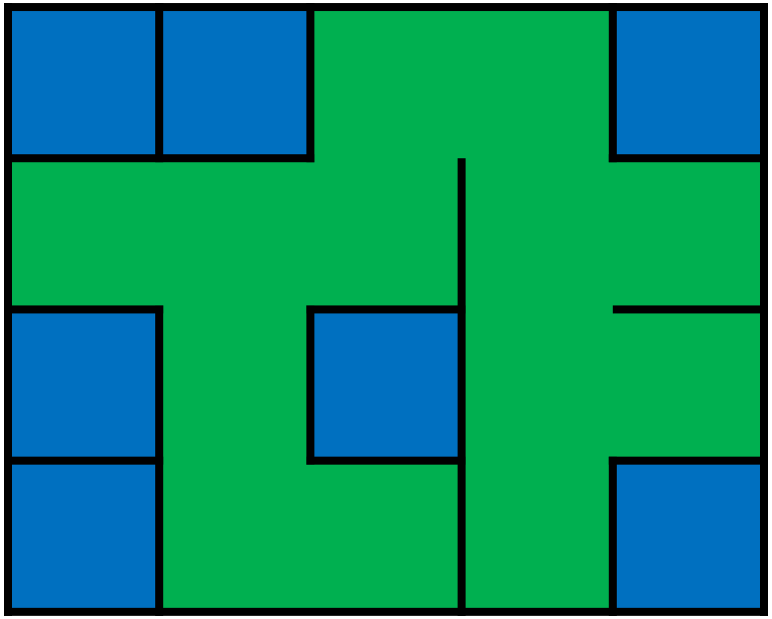
Etc.

La voie de la perfection



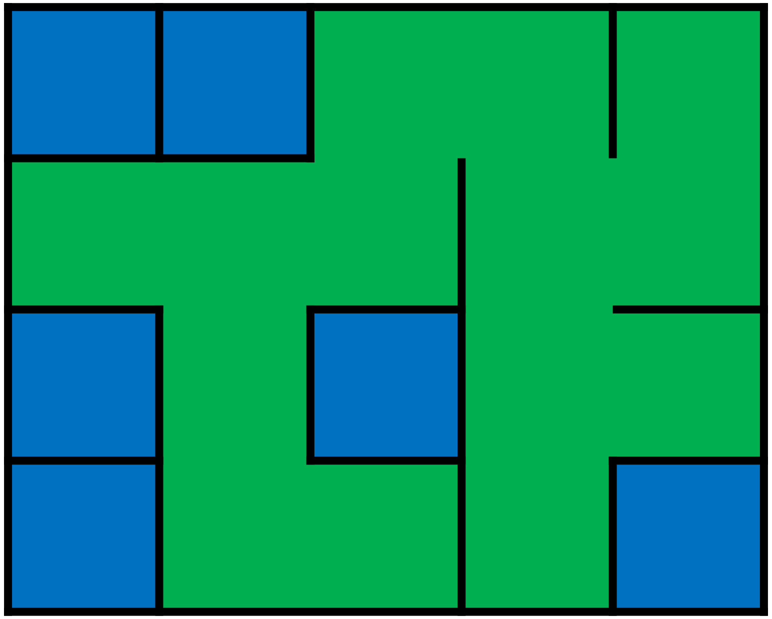
Etc.

La voie de la perfection



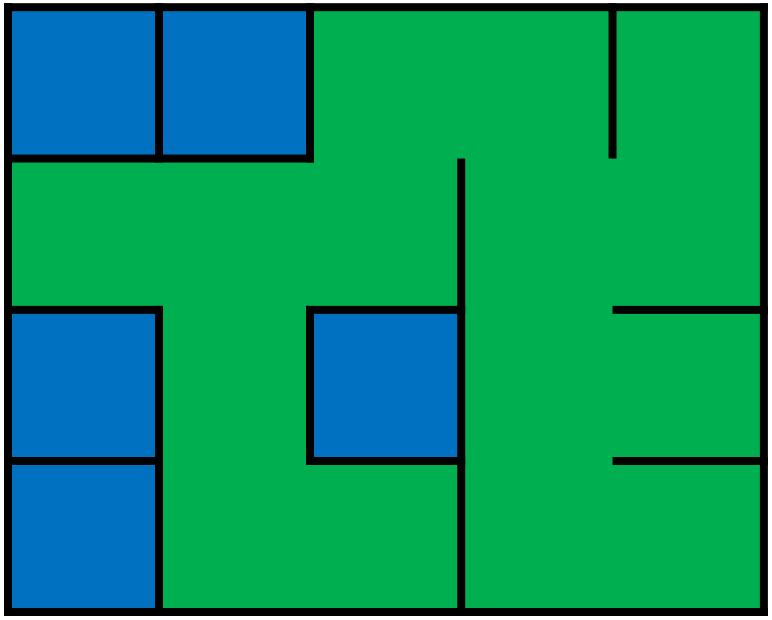
Etc.

La voie de la perfection



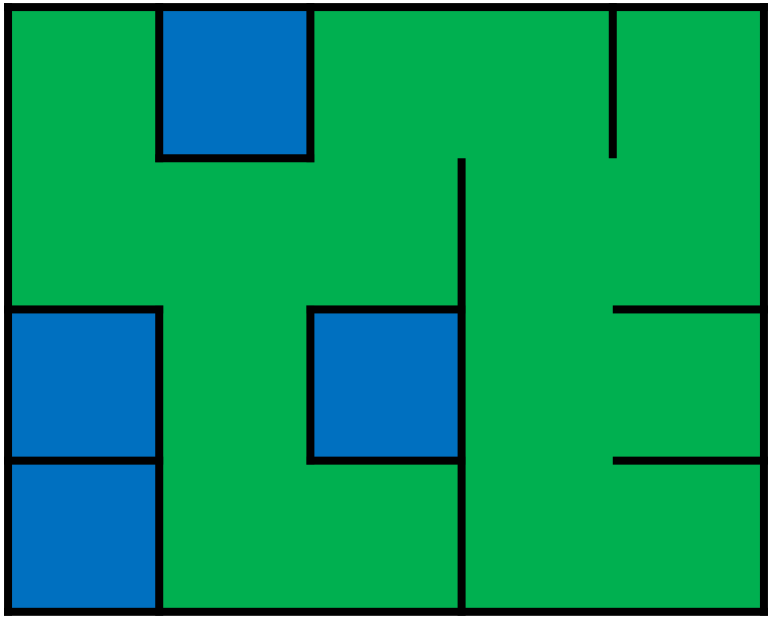
Etc.

La voie de la perfection



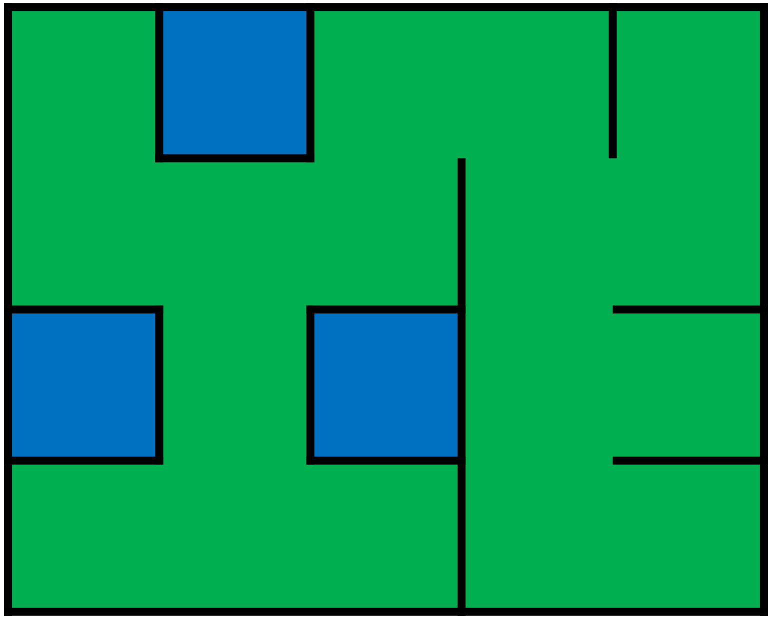
Etc.

La voie de la perfection



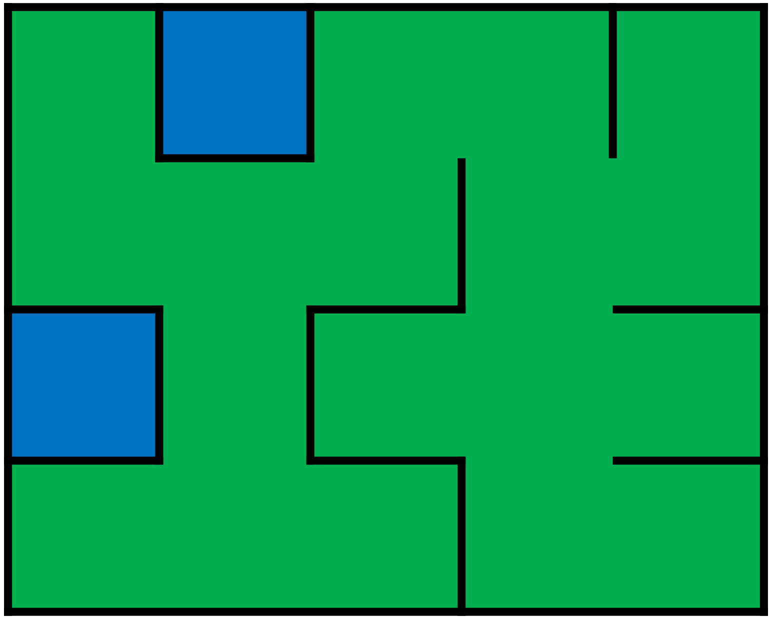
Etc.

La voie de la perfection



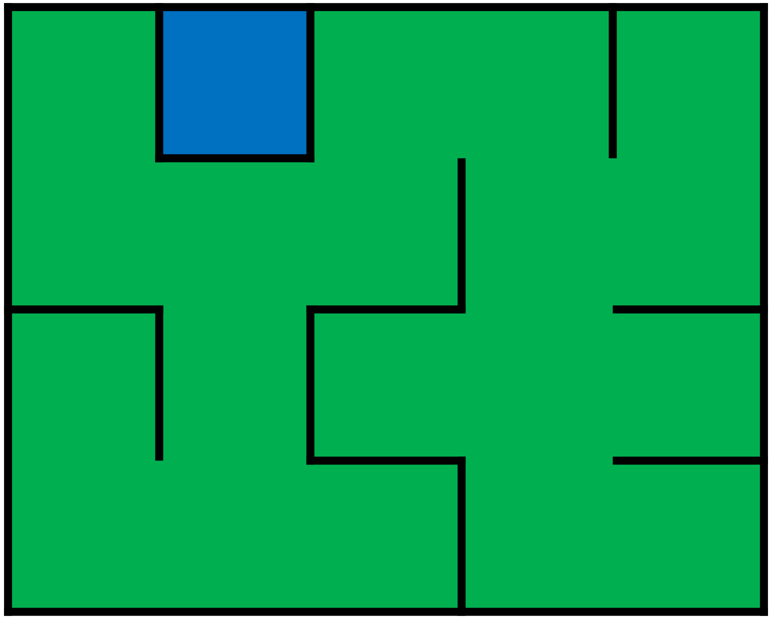
Etc.

La voie de la perfection



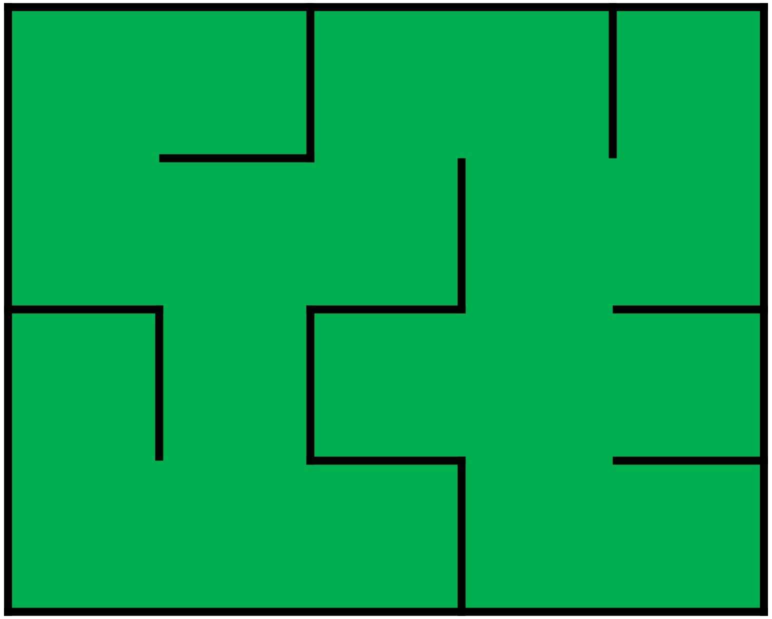
Etc.

La voie de la perfection



Etc.

La voie de la perfection



Lorsqu'on a atteint toutes les cases, le labyrinthe est parfait !

Plan

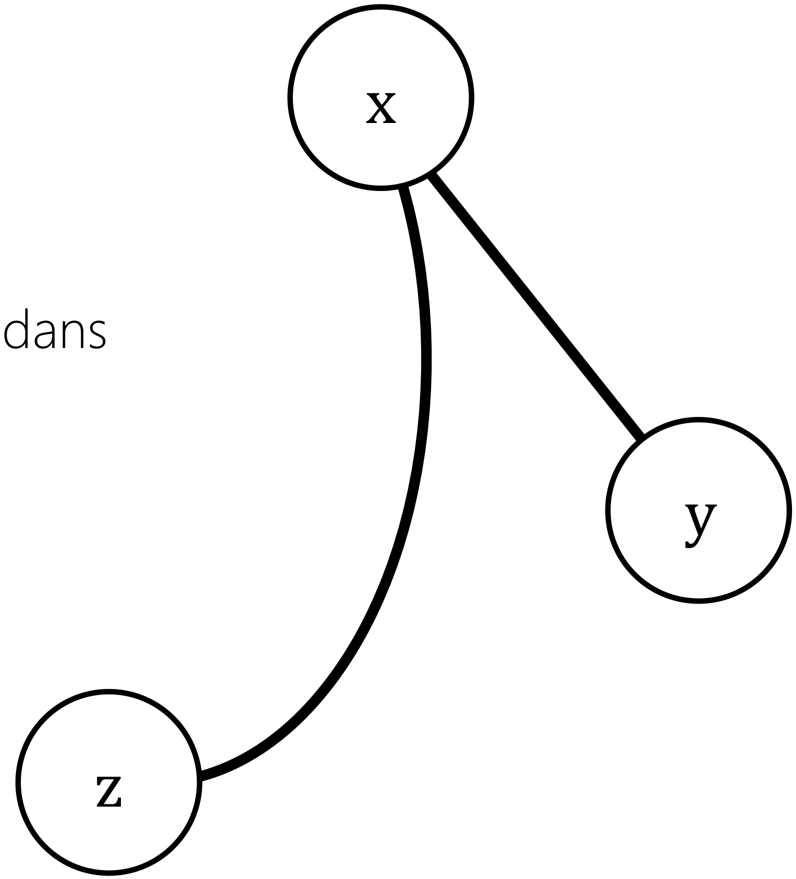
1. Des points et des lignes
2. Définitions
3. Degrés
4. Avec des étiquettes
5. Premières notions de parcours

Des points et des lignes

Définition peu, voire pas du tout formelle

Un graphe, c'est :

- des points
  - souvent des gros points…
  - … pour pouvoir écrire des trucs dedans
- des lignes
  - pas toujours droites



Que peut-on faire avec des points et des lignes ?

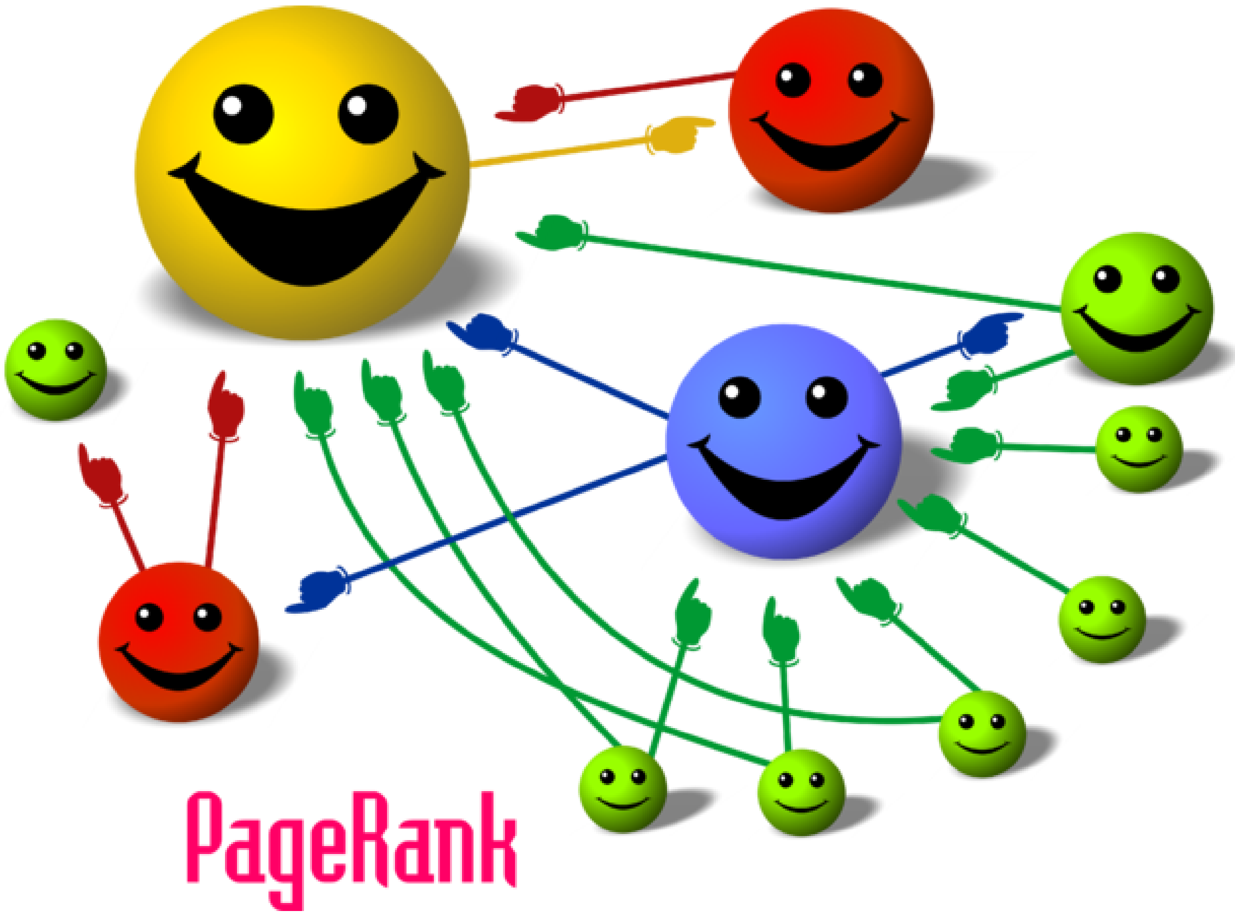
Une carte routière

Que peut-on faire avec des points et des lignes ?

Un réseau social

Que peut-on faire avec des points et des lignes ?

Internet



QUE PEUT-ON FAIRE AVEC DES POINTS ET DES LIGNES ?

Un réseau (électricité, eau, etc.)

DÉFINITIONS

PLUS FORMELLEMENT

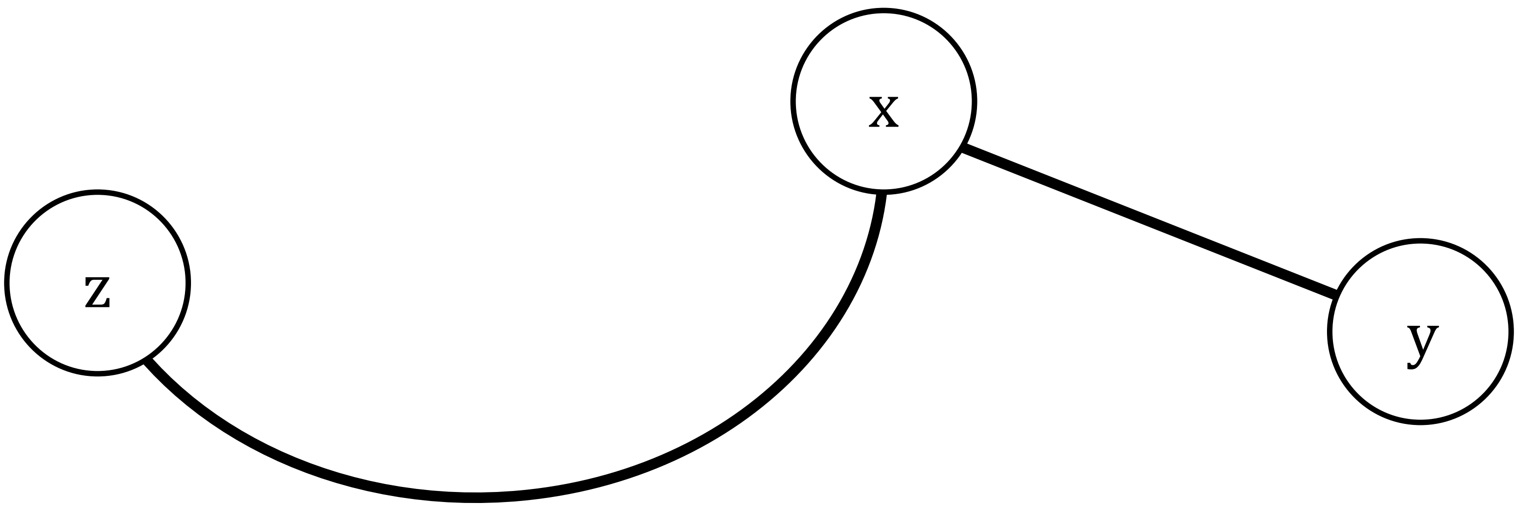
- Un graphe, c'est :

  - Un ensemble X de sommets

Ex : $X = \{\, x,\ y,\ z \,\}$

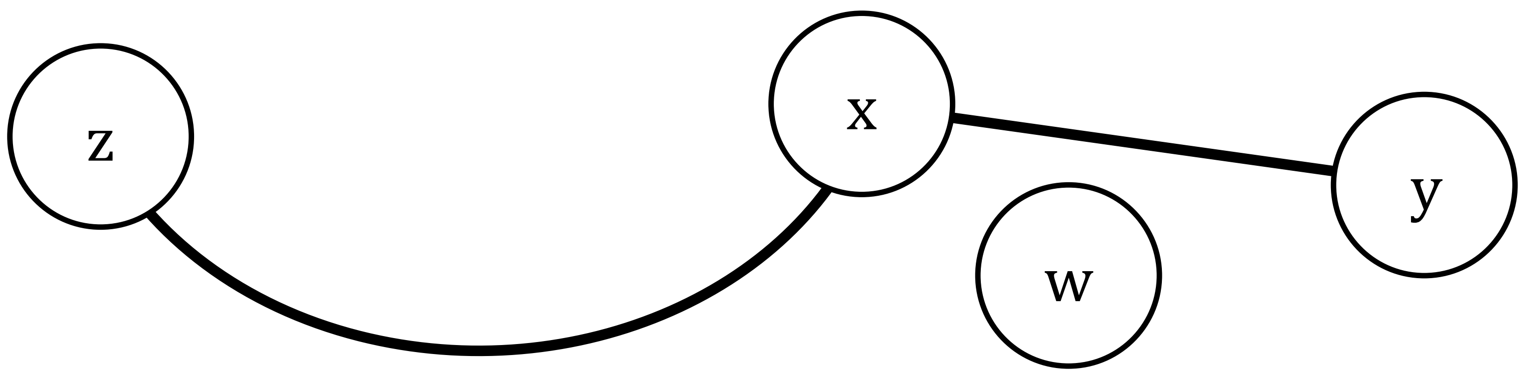
  - Un ensemble d'arêtes E constitué de paires d'éléments de X

Ex : $E = \{\, (x, y),\ (x, z) \,\}$



Un peu de vocabulaire

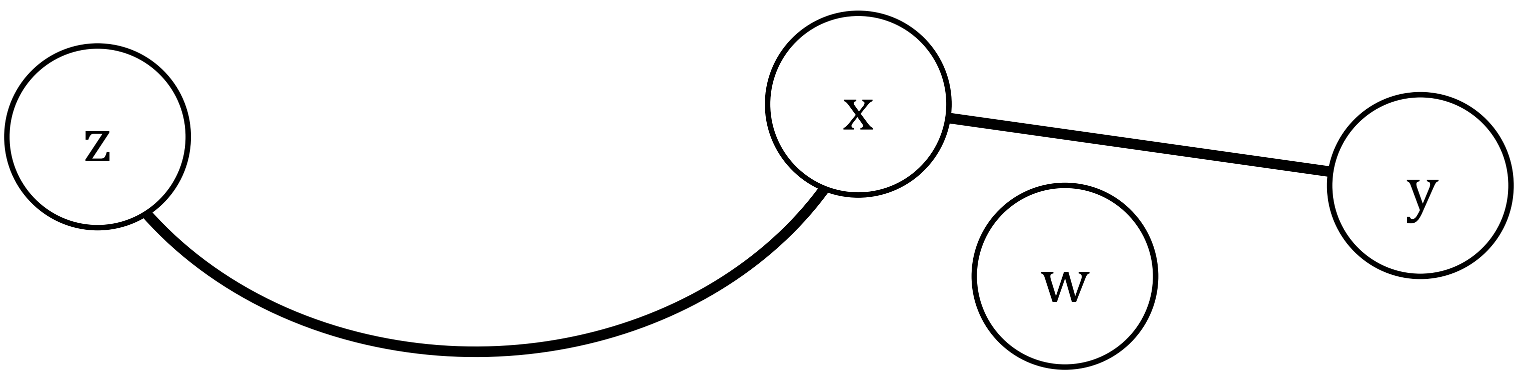
- Les sommets reliés par une arête sont appelés les **extrémités** de cette arête
- Deux sommets reliés par une arête sont dits **voisins** ou **adjacents**
- Le **voisinage** d'un sommet est l'ensemble de ses voisins



UN PEU DE VOCABULAIRE

- Le **degré** d'un sommet est :
  - le nombre d'arêtes partant de ce sommet
  - le nombre de voisins de ce sommet
  - la taille du voisinage de ce sommet

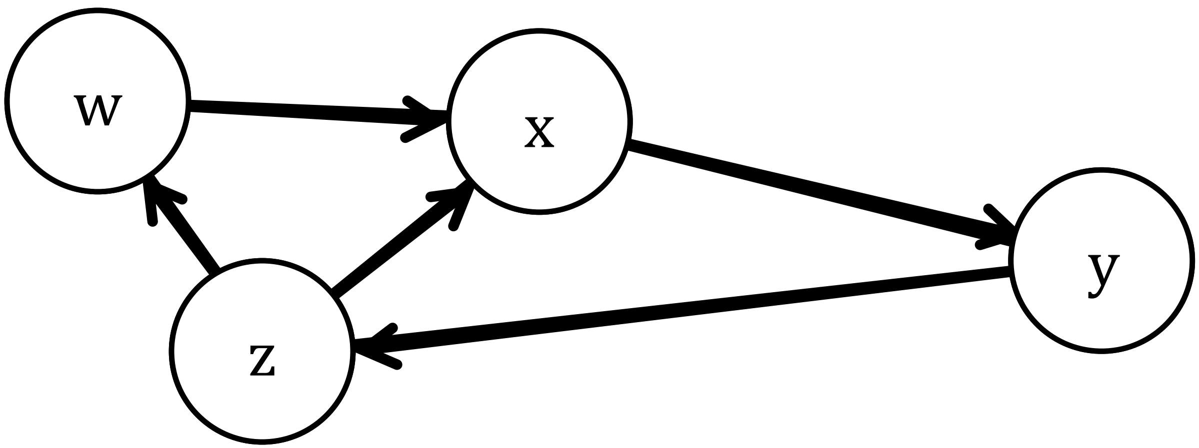
- Un sommet de degré 0 (sans aucun voisin) est appelé **sommet isolé**.



GRAPHES NON ORIENTÉS

- On pourrait mettre des flèches sur nos arêtes, pour n'autoriser les trajets que dans un seul sens.
  - Ex : routes à sens uniques

- Pour commencer, on restera dans le cas simple des graphes sans flèches, appelés **graphes non orientés**.

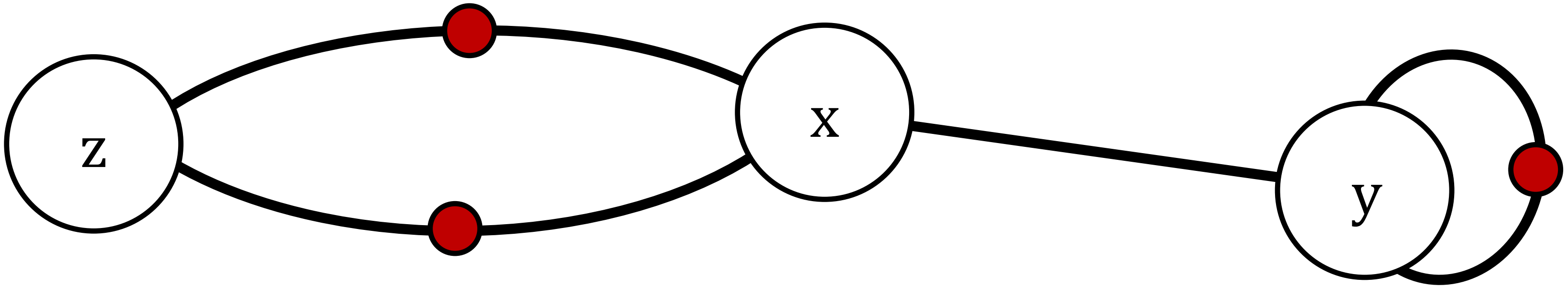


Graphes simples

- On pourrait aussi envisager :
  - Plus d'une arête entre deux sommets
  - Des arêtes partant et arrivant sur le même sommet

- Mais on peut toujours se ramener à un graphe ne présentant pas ces types d'arêtes

- Donc on ne travaillera qu'avec des **graphes simples**, c'est-à-dire où ces configurations n'apparaissent pas

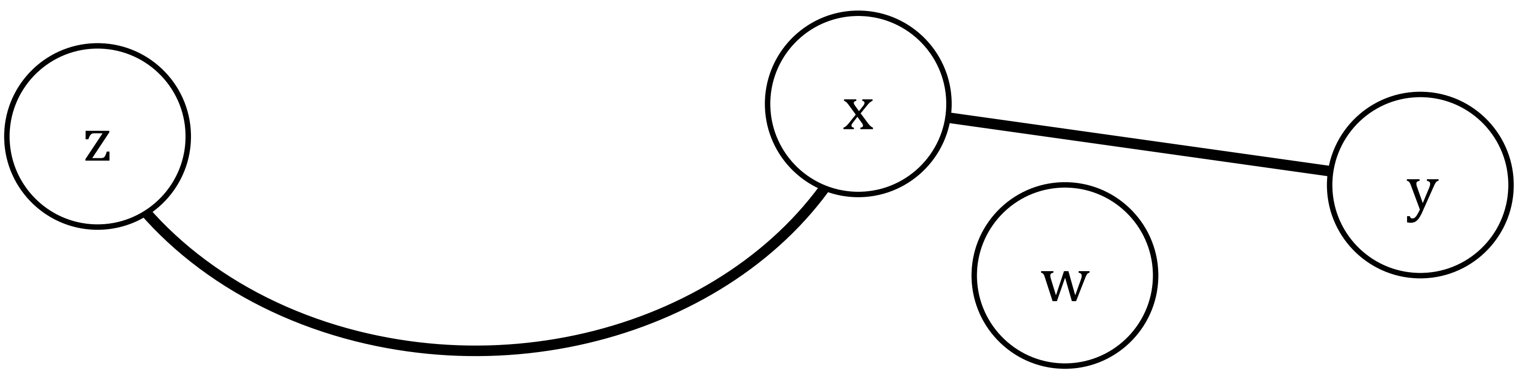


DEGRÉS

Rappel : degré d'un sommet

- Le **degré** d'un sommet est :
  - le nombre d'arêtes partant de ce sommet
  - le nombre de voisins de ce sommet
  - la taille du voisinage de ce sommet

- Un sommet de degré 0 (sans aucun voisin) est appelé **sommet isolé**.



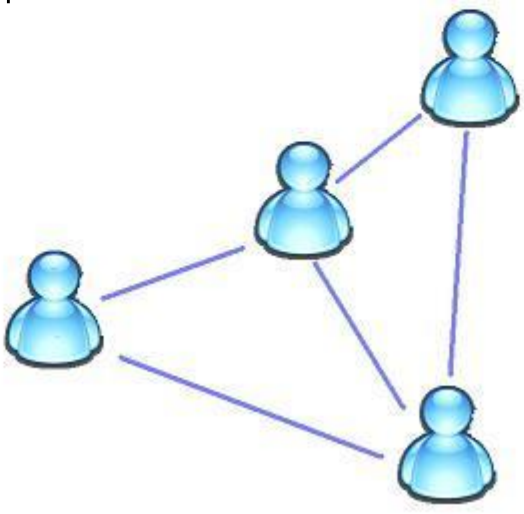
COÏNCIDENCE ?

- Une soirée est organisée entre 4 personnes :

  Albert, Béatrice, Charles et Denise

- On considère que si X connait Y, alors Y connait X.

- **Question** : Y a-t-il forcément deux invités qui connaissent le même nombre de personnes ?



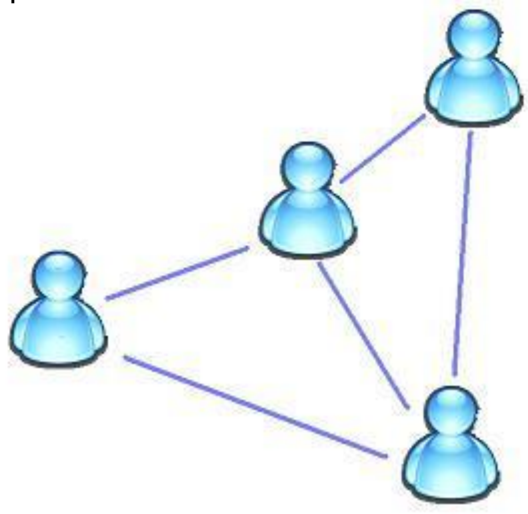
Coïncidence ?

- Une soirée est organisée entre 6 personnes :

  Albert, Béatrice, Charles, Denise et Eric et Fanny

- On considère que si X connait Y, alors Y connait X.

- **Question** : Y a-t-il forcément deux invités qui connaissent le même nombre de personnes ?



Une approche bien pratique

Démonstration par l'absurde

- Départ :
  - On part d'une hypothèse H
  - On veut démontrer une propriété P
  - On suppose donc que son contraire $non(P)$ est vrai

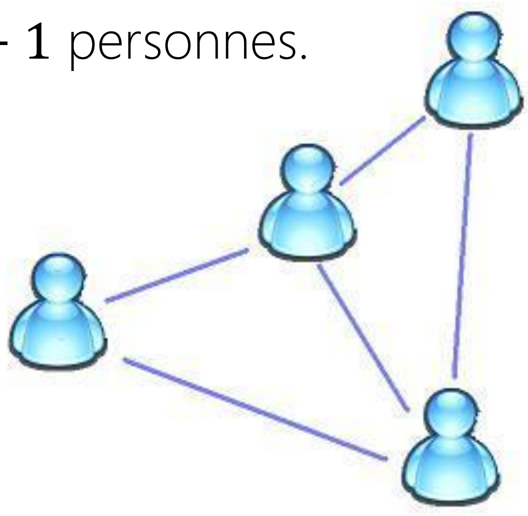
- Cheminement :
  - On montre que si $non(P)$ est vrai, alors on peut montrer le contraire $non(H)$ de l'hypothèse initiale : $non(P) \Rightarrow non(H)$

- Conclusion:
  - Comme H est vraie en tant que donnée de l'énoncé, on en conclut que la propriété P est vraie : $H \Rightarrow P$

Application à notre problème

- Par l'absurde, on suppose qu'il n'y a pas deux invités qui connaissent le même nombre de personnes.

- S'il y a n invités, chacun peut connaître au plus $n - 1$ personnes.



- Par conséquent, il y a :
  - Un invité qui ne connait personne
  - Un invité qui connaît 1 autre invité
  - Un invité qui connaît 2 autres invités
  - Un invité qui connaît 3 autres invités
  - …
  - Un invité qui connait $n - 1$ invités

- Mais si quelqu'un connait $n - 1$ personnes, il connait tout le monde. Or il y aurait aussi quelqu'un qui ne connait personne → Contradiction.

- On en conclut par l'absurde qu'on peut trouver deux personnes qui connaissent le même nombre d'invités.

Au revoir, Mr X

- On organise une nouvelle soirée. Trois couples sont invités : Mr et Mme X, Mr et Mme Y, et Mr et Mme Z.

- La soirée touche à sa fin, il est temps de dire au revoir.

- Chacun doit saluer tout le monde, sauf son conjoint.

- **Question** : A un instant donné, Mr X se rend compte que tous les autres invités ont déjà salué un nombre différent de convives.

Combien d'invité Mr X a-t-il déjà salué ?

Au revoir, Mr X

Données :

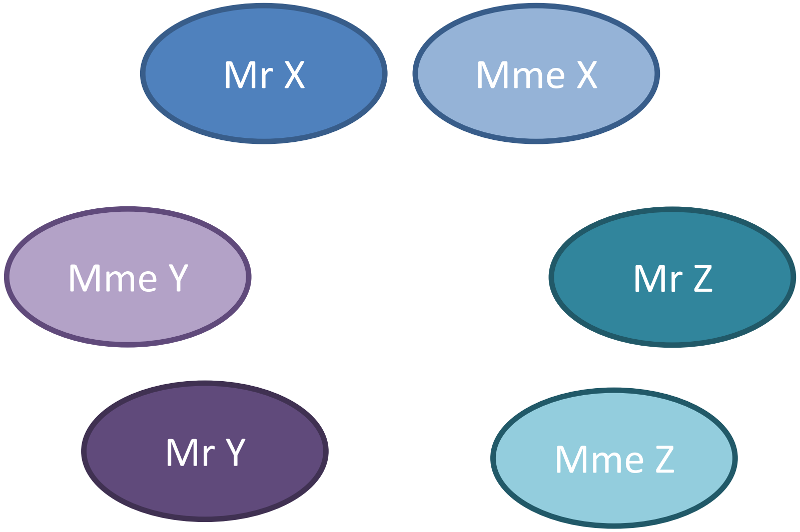
- Tous les invités exceptés Mr X ont déjà salué un nombre différent d'invités.
- Chacun peut saluer tout le monde excepté son conjoint et lui-même

Question : *Combien d'invités Mr X a-t-il déjà salué ?*

Raisonnement :

- Comme on ne peut pas saluer son conjoint ni soi-même, chaque invité peut saluer au plus 4 personnes

- Il y a donc, en dehors de Mr X :
  - Un invité qui n'a salué personne
  - Un invité qui a salué 1 personne
  - Un invité qui a salué 2 personnes
  - Un invité qui a salué 3 personnes
  - Un invité qui a salué 4 personnes



AU REVOIR, MR X

Données :

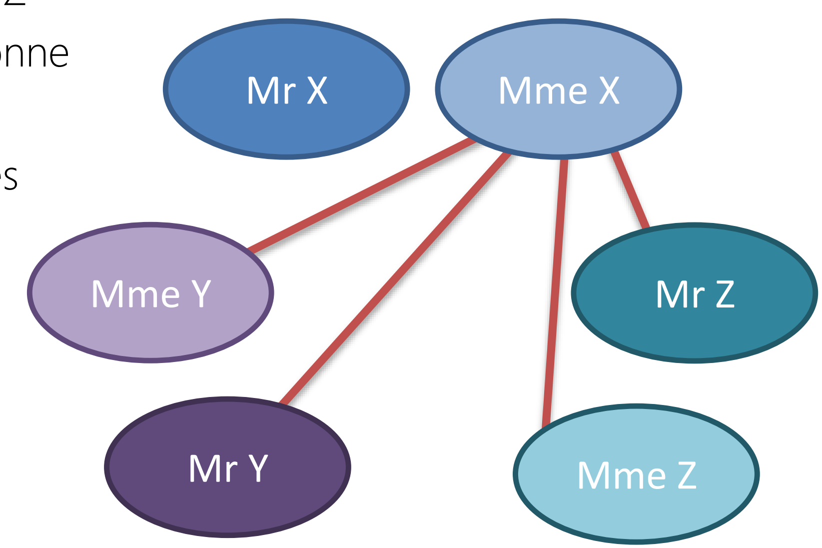
- Tous les invités exceptés Mr X ont déjà salué un nombre différent d'invités.
- Chacun peut saluer tout le monde excepté son conjoint et lui-même

Question : *Combien d'invités Mr X a-t-il déjà salué ?*

Raisonnement :

- Mme X peut-elle avoir salué 4 personnes ?
  - Par l'absurde, supposons que Mme X a salué 4 personnes
  - Elle a donc salué Mr Y, Mme Y, Mr Z et Mme Z
  - Or l'un de ces 4 là devrait n'avoir salué personne
    → Contradiction
  - Donc Mme X ne peut avoir salué 4 personnes

- Il y a donc quelqu'un parmi Mr Y, Mme Y, Mr Z et Mme Z qui a salué 4 personnes



AU REVOIR, MR X

Données :

- Tous les invités exceptés Mr X ont déjà salué un nombre différent d'invités.
- Chacun peut saluer tout le monde excepté son conjoint et lui-même

Question : *Combien d'invités Mr X a-t-il déjà salué ?*

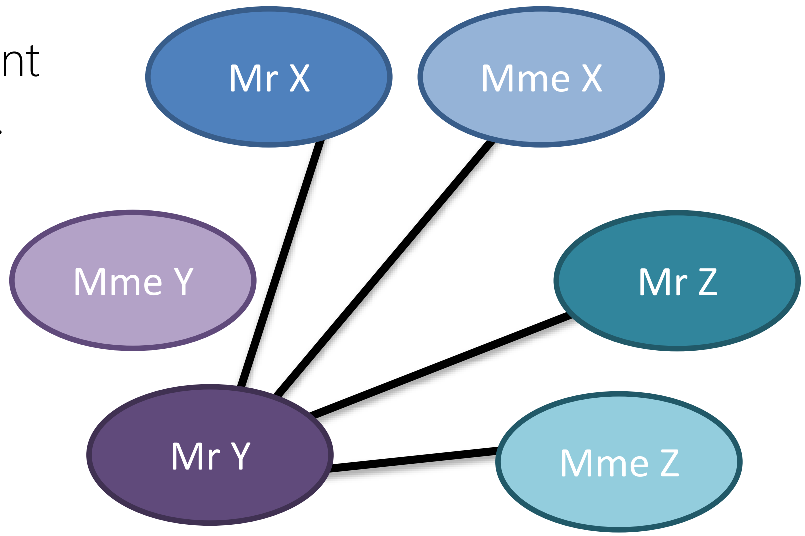
Raisonnement :

- Argument de symétrie :

Mr Y, Mme Y, Mr Z et Mme Z ont des rôles équivalents dans notre problème.

- On peut donc supposer décider arbitrairement de traiter le cas où Mr Y a salué 4 personnes.

- Comme les autres cas se dérouleraient de façon symétrique, ce qu'on montrera sur ce cas particulier sera vrai dans les autres cas.



Au revoir, Mr X

Données :

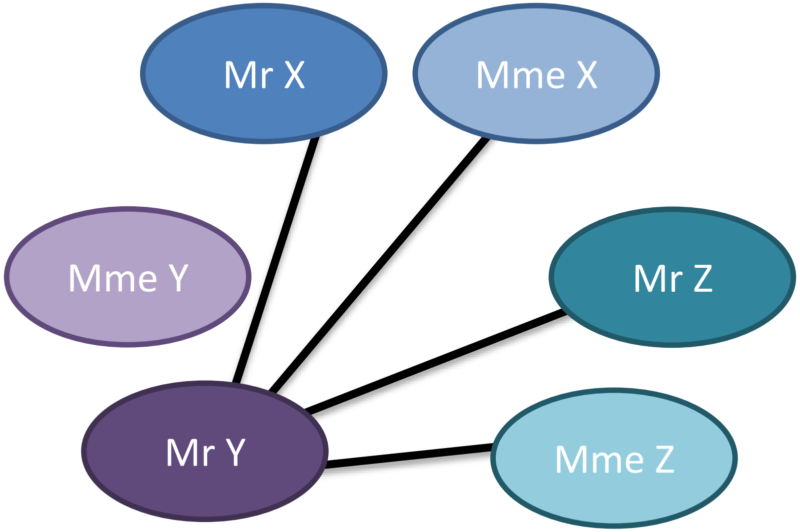
- Tous les invités exceptés Mr X ont déjà salué un nombre différent d'invités.
- Chacun peut saluer tout le monde excepté son conjoint et lui-même

Question : *Combien d'invités Mr X a-t-il déjà salué ?*

Raisonnement :

- Mme Y peut-elle avoir salué quelqu'un ?
  - Par l'absurde, supposons que Mme Y a salué au moins une personne
  - Il y a donc quelqu'un parmi Mme X, Mr Z et Mme Z qui n'a salué personne
  - Or ces 3 invités ont déjà salué Mr Y

    → Contradiction
  - Donc Mme Y n'a salué personne



- Il reste donc, parmi Mme, Mr Z et Mme Z :
  - Un invité qui a salué 1 personne
  - Un invité qui a salué 2 personnes
  - Un invité qui a salué 3 personnes

Au revoir, Mr X

Données :

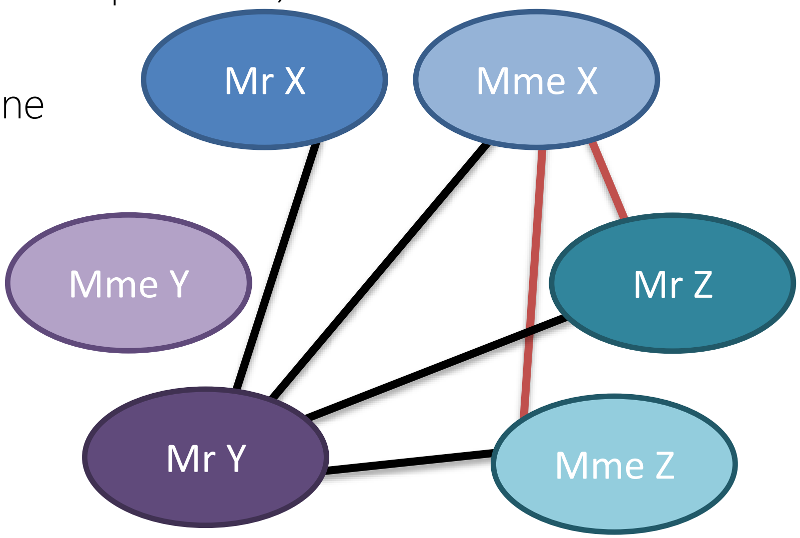
- Tous les invités exceptés Mr X ont déjà salué un nombre différent d'invités.
- Chacun peut saluer tout le monde excepté son conjoint et lui-même

Question : *Combien d'invités Mr X a-t-il déjà salué ?*

Raisonnement :

- Mme X peut-elle avoir salué 3 personnes ?
  - Par l'absurde, supposons que Mme X a salué 3 personnes
  - Mme X ne peut saluer Mr X ni Mme Y (qui n'a salué personne)
  - Donc Mme X a salué Mr Y, Mr Z et Mme Z
  - Or un de ces 2 invités n'a salué qu'une personne
  - Et tous deux ont déjà salué Mr Y

    → Contradiction
  - Donc Mme Y ne peut avoir salué 3 personnes



Au revoir, Mr X

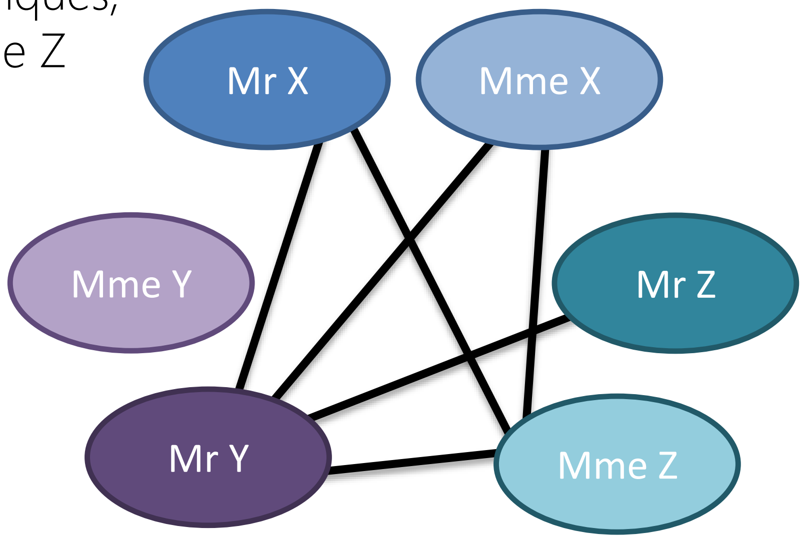
Données :

- Tous les invités exceptés Mr X ont déjà salué un nombre différent d'invités.
- Chacun peut saluer tout le monde excepté son conjoint et lui-même

Question : *Combien d'invités Mr X a-t-il déjà salué ?*

Raisonnement :

- Parmi Mr Z et Mme Z, l'un des deux a salué 3 personnes
- Comme ces deux invités ont des rôles symétriques, on peut décider arbitrairement que c'est Mme Z qui a salué 3 personnes
- Dans ce cas, Mr Z ne peut avoir salué qu'une seule personne, et Mme X a salué 2 invités

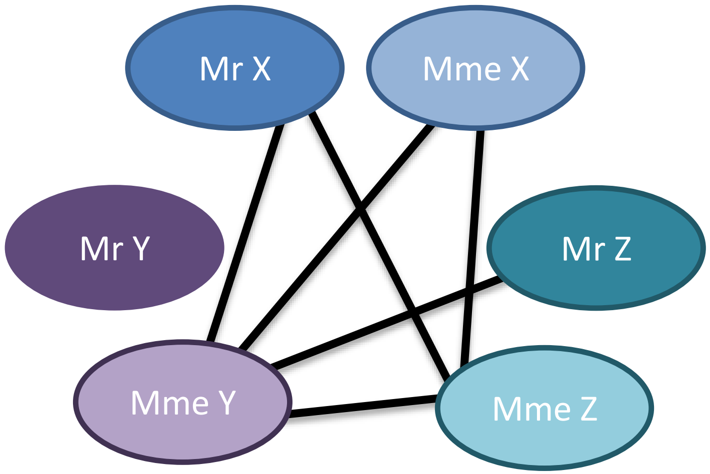


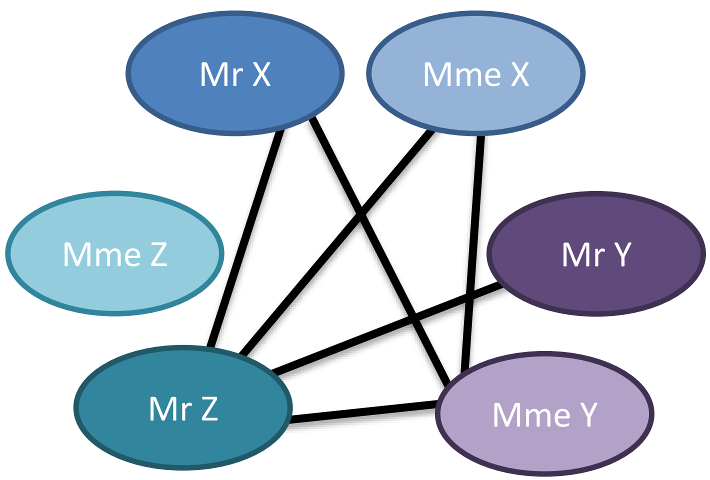
Au revoir, Mr X

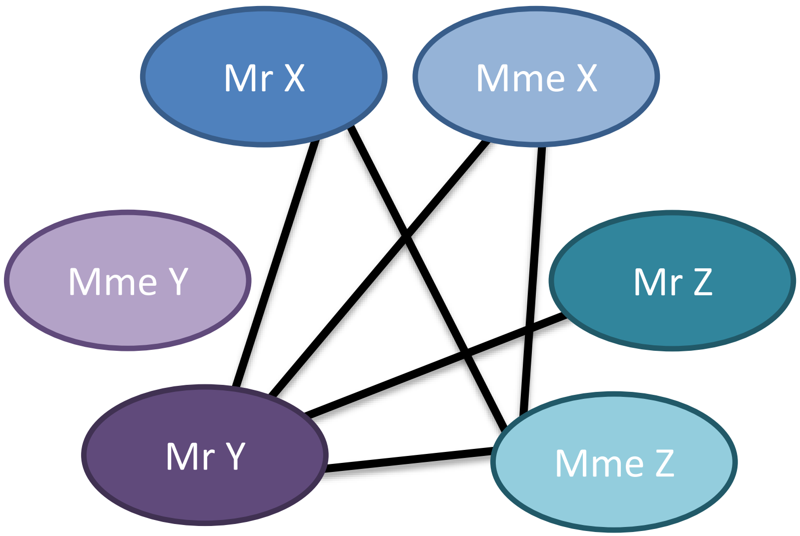
- **Question** : *Combien d'invités Mr X a-t-il déjà salué ?*

- **Réponse : Mr X a déjà salué 2 invités !**

- Pour les sceptiques :
  On retrouve bien le même résultat si on fait d'autres choix







Le retour des 5 joueurs d'échecs

- On veut organiser des matches entre 5 joueurs d'échecs.
- **Question** : Comment s'arranger pour que chacun joue contre exactement 3 adversaires différents ?
- **Réponse** : C'est impossible !
- **Vraie question** : Pourquoi ?

Somme des degrés dans un graphe

- **Théorème** : *La somme des degrés des sommets d'un graphe est un nombre pair.*

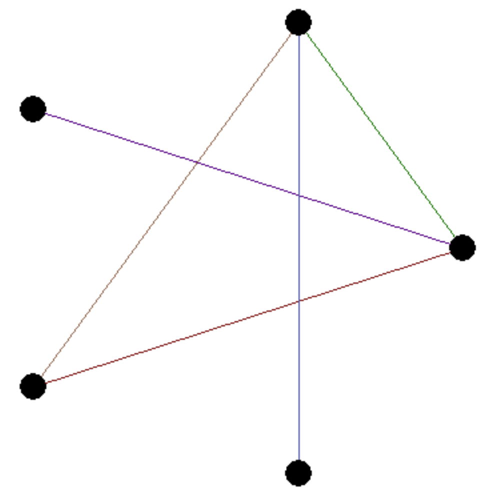
Si $G = (X, E)$ avec $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
Et si on note d_i le degré de x_i,

Alors $\exists\, k \in \mathbb{N},\ \sum_{i=1}^{n} d_i = 2 \cdot k$

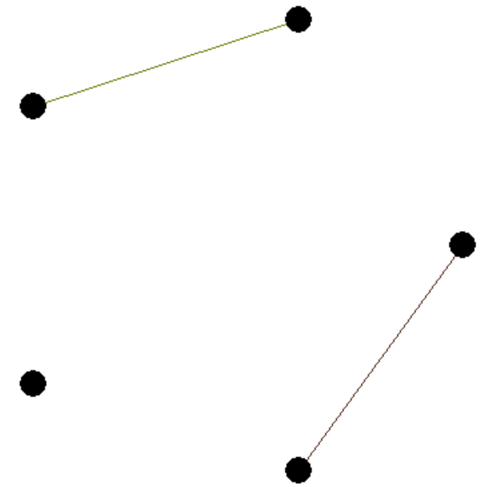
- **Démonstration** : Chaque arête de E ajoute exactement 2 à la somme de ces degrés.

Les 5 joueurs d'échecs

Chaque joueur est représenté par un sommet



- Choix 1 : Chaque arête représente un match
  - On attend 5 sommets de degré 3
  - Soit un total des degrés de 15
  - Impossible !



- Choix 2 : Chaque arête relie deux joueurs qui ne s'affronteront pas :
  - On attend 5 sommets de degré 1
  - Soit un total des degrés de 5
  - Impossible !

Avec des étiquettes

Si on ajoutait des étiquettes…

… sur une carte routière ?

SI ON AJOUTAIT DES ÉTIQUETTES…

… sur un réseau social ?

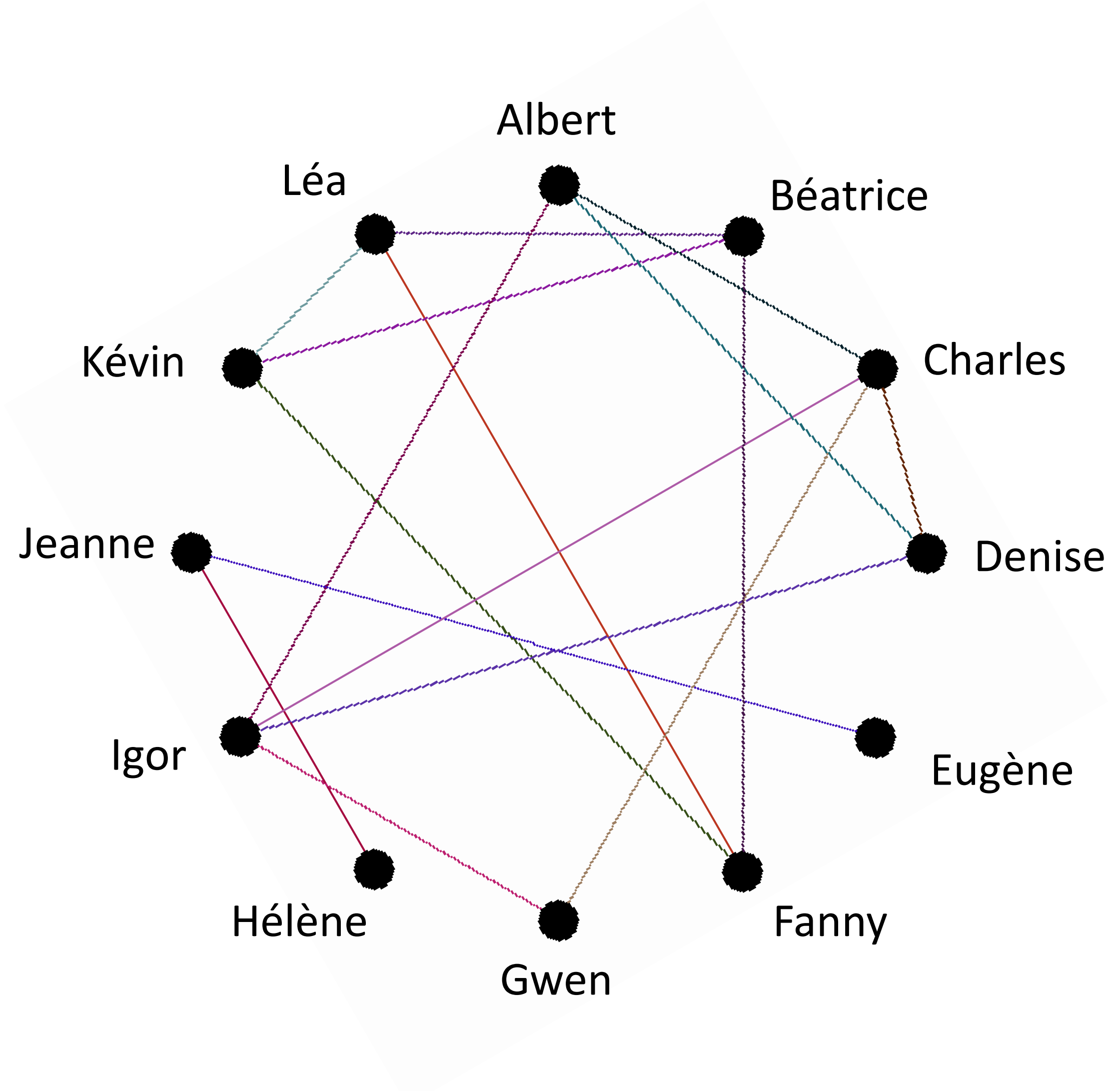
▪▪▪▪▫ Avec des étiquettes

Si on ajoutait des étiquettes…

… sur un réseau de canalisations ?

Parcours et connexité

QUI CONNAIT QUI ?



Le célèbre Albert

Petit exercice

- **But** : On veut savoir à quel point Albert est génial.
- Comme Albert est quelqu'un d'exceptionnel, si on connait Albert, on parle de lui aux gens qu'on connait.
- Comme Albert est vraiment génial, les gens qui ont entendu parler d'Albert en parlent à leurs proches.
- **Question :** Qui n'a pas encore entendu parler d'Albert ?

Les connaissances de connaissances

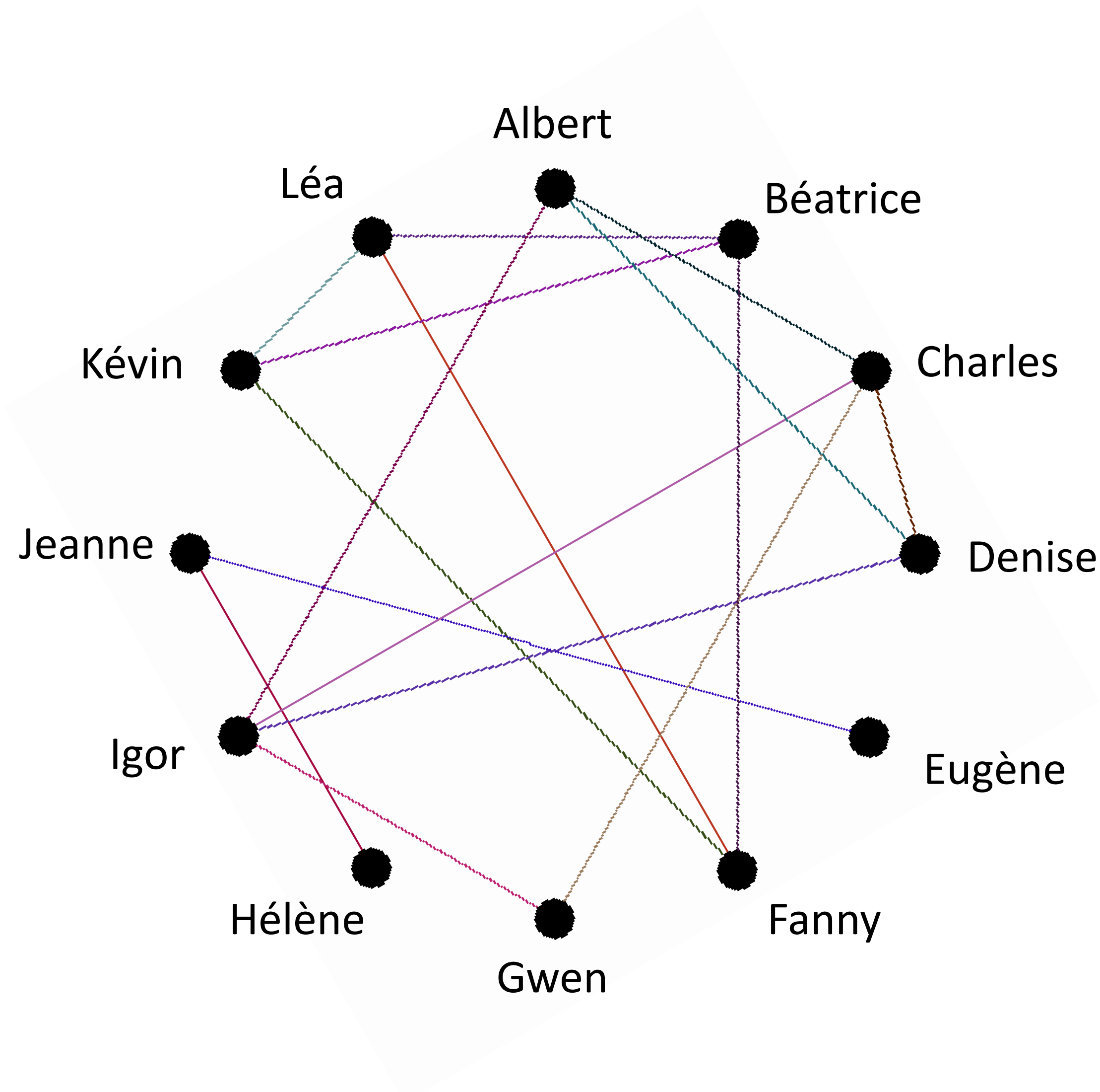
- **Définition récursive** :

Les connaissances de connaissances de X sont définies selon les deux règles suivantes :

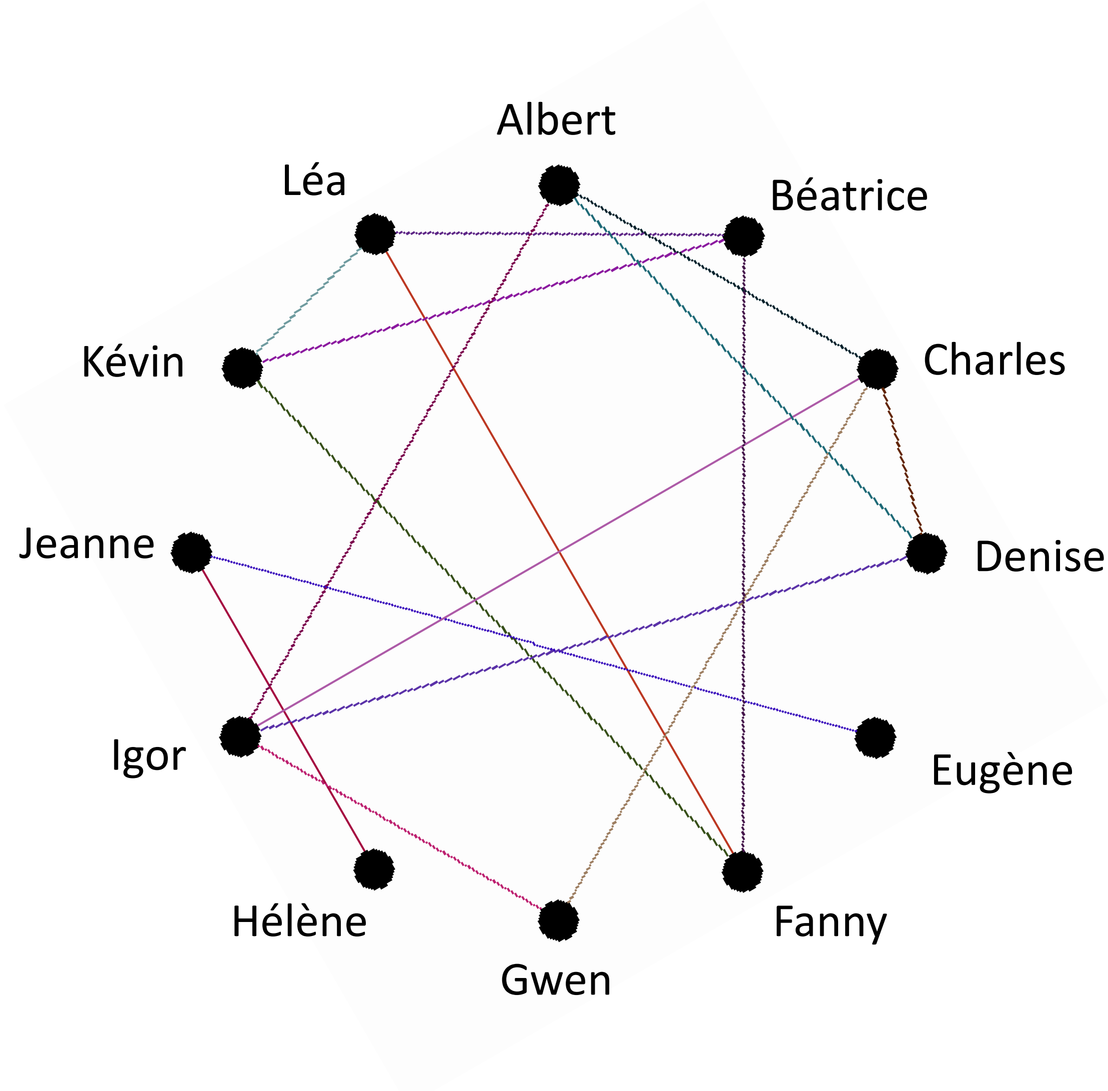
  - Toute personne que X connait personnellement est une connaissance de connaissances de X
  - Toute personne qui connait une connaissance de connaissance de X est une connaissance de connaissances de X

- **Question** : Qui sont les connaissances de connaissances du célèbre Albert ?

Le célèbre Albert



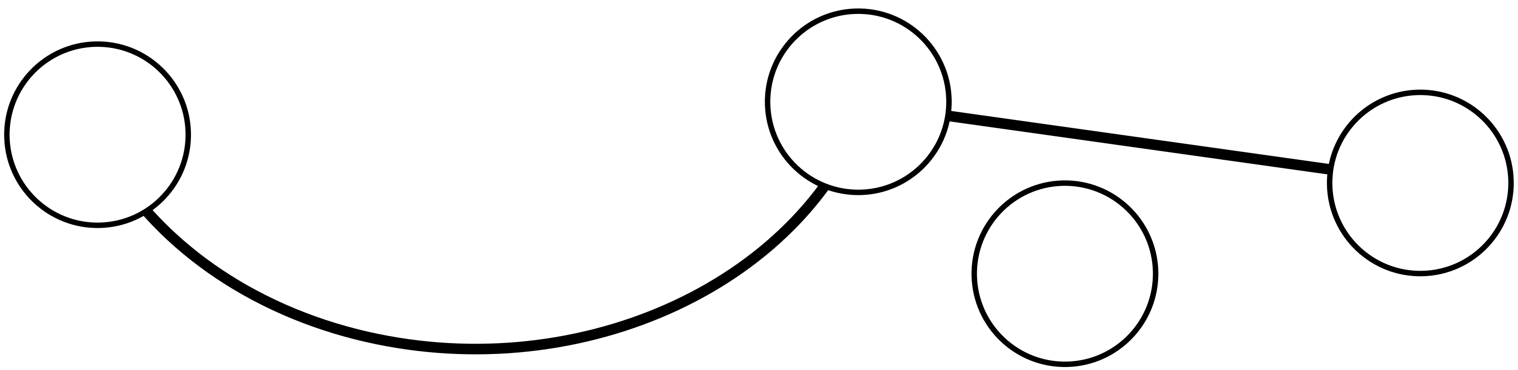
Et Léa dans tout ça ?



CONNEXITÉ

- **Définition** : Un graphe est dit **connexe** si pour tout couple de sommets (x_1, x_2), il existe un chemin dans ce graphe allant de x_1 à x_2

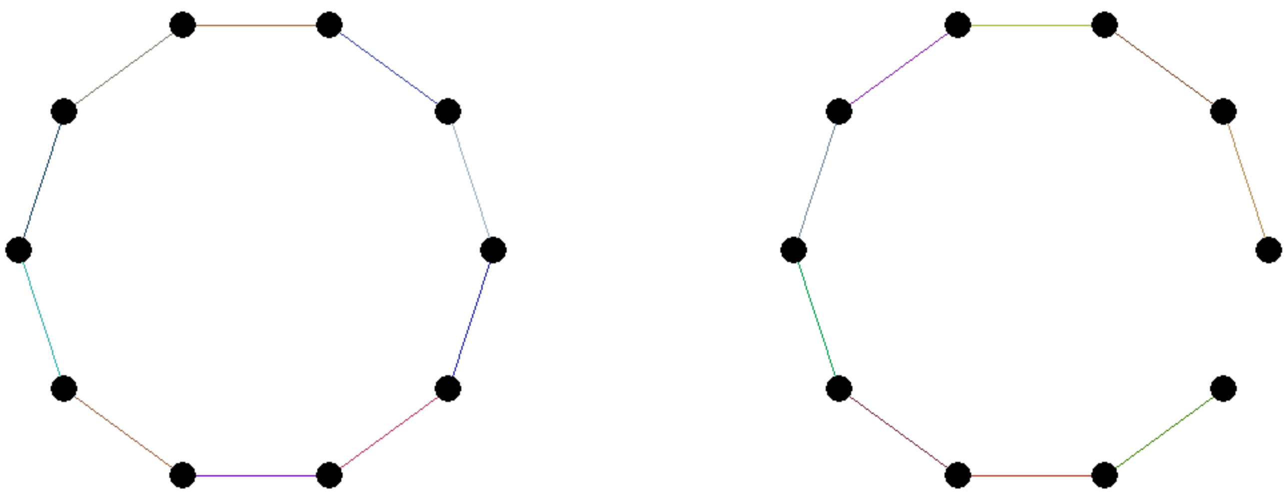
- Ces graphes sont-ils connexes ?



CONNEXITÉ

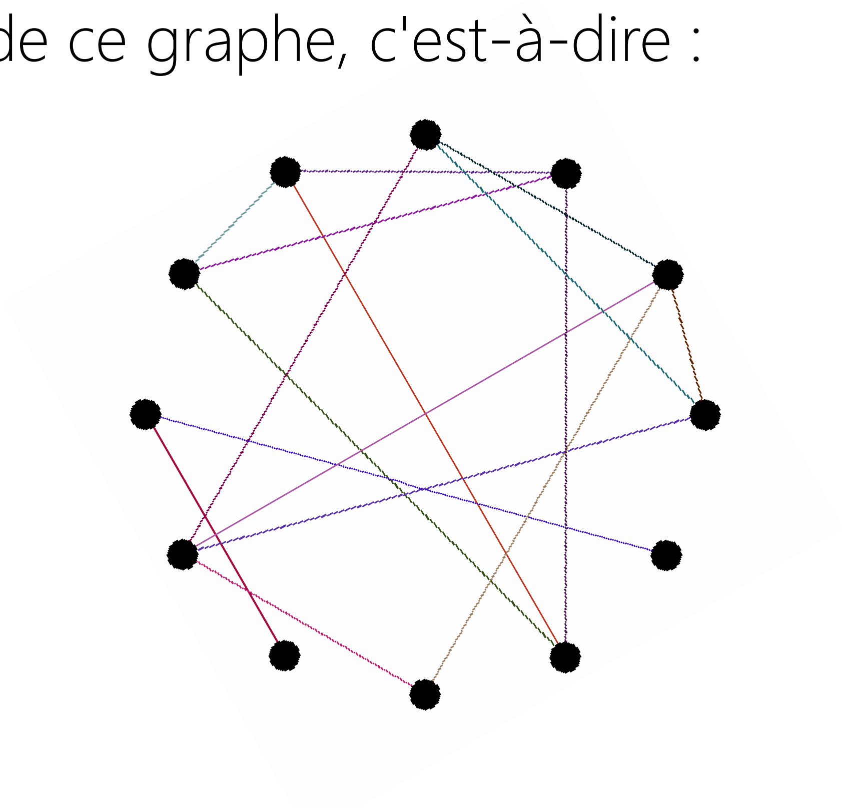
- **Définition** : Un graphe est dit **connexe** si pour tout couple de sommets (x_1, x_2), il existe un chemin dans ce graphe allant de x_1 à x_2

- Ces graphes sont-ils connexes ?



Connexité

- **Définition** : Une **composante connexe** d'un graphe est une sous-partie connexe maximale de ce graphe, c'est-à-dire :
  - Une sous-partie connexe
  - Qu'on ne peut pas agrandir



- Combien ce graphe a-t-il
de composantes connexes ?

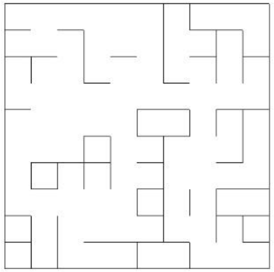
- **Exercice** : Imaginer un programme capable de calculer le nombre de composantes connexes d'un graphe.

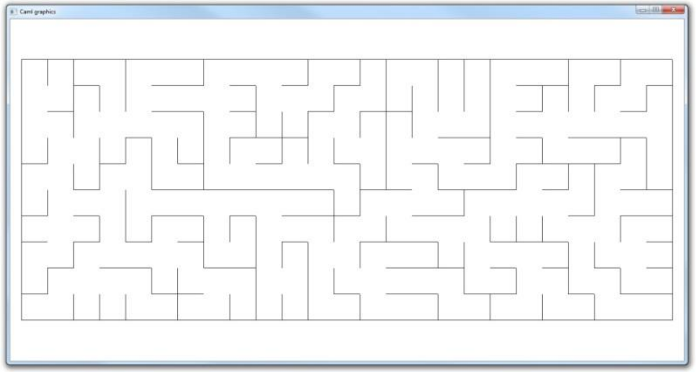
En pratique

- **Constat** : Résoudre un problème sur un graphe revient à résoudre ce problème sur l'une de ses composantes connexes.

- **Conséquence** : Sauf contre-indication, on supposera toujours qu'on travaille avec des graphes connexes.

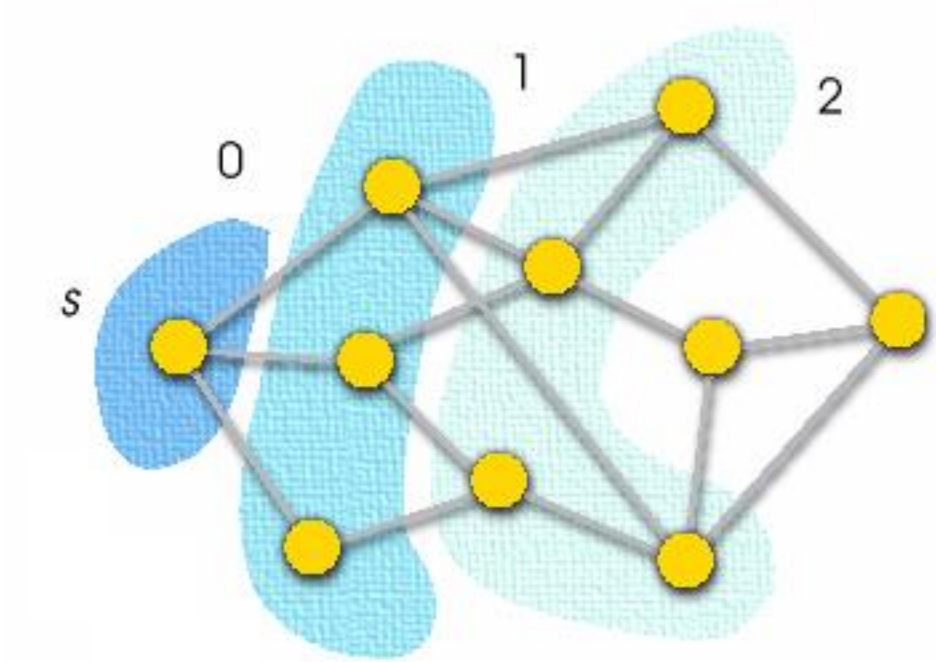
- **Remarque** : Un des avantages des labyrinthes parfaits est qu'ils sont connexes :





DISTANCE DANS UN GRAPHE

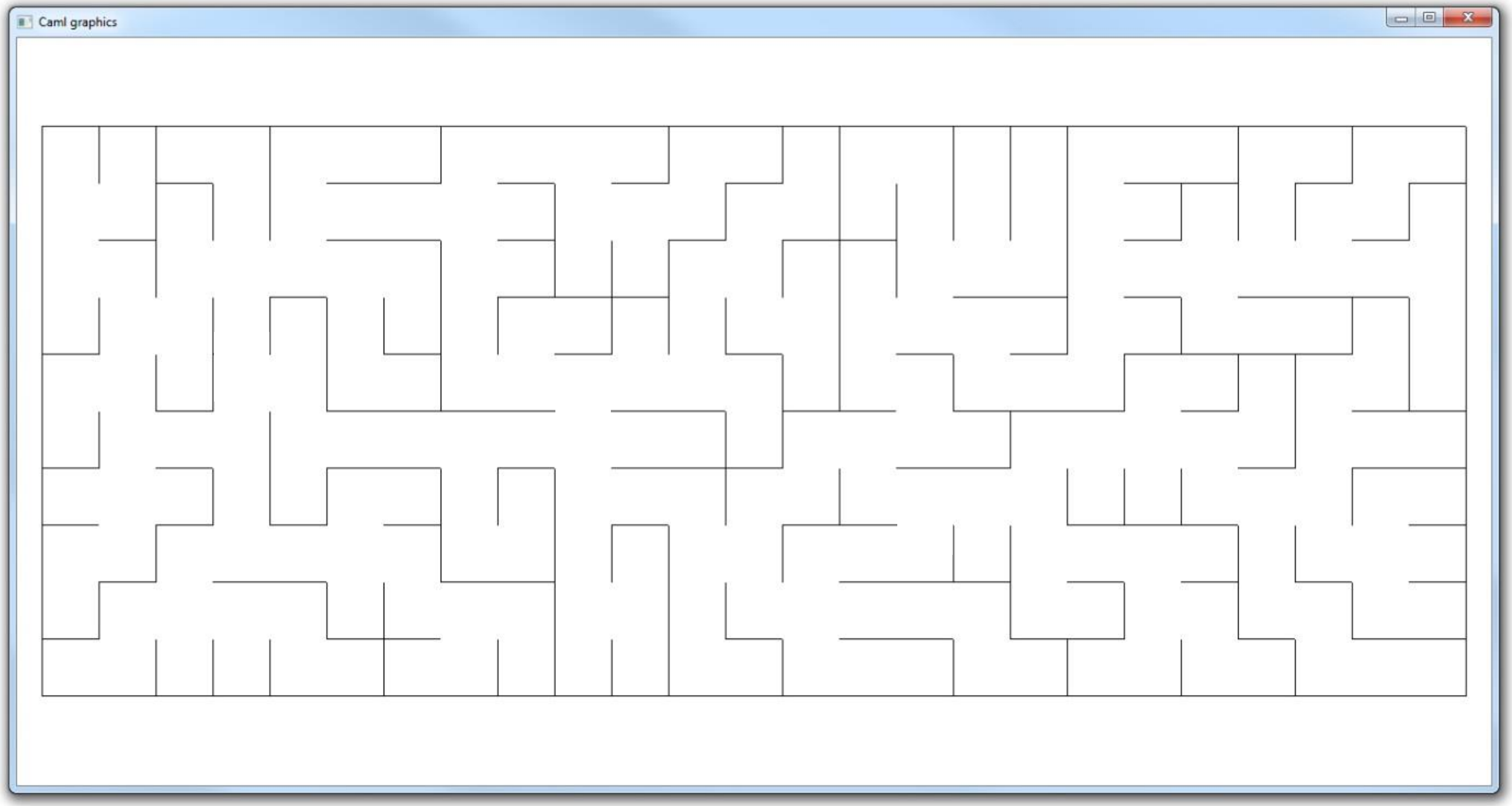
- Que peut être une distance dans un graphe ?



- Comment la calculer automatiquement ?

Application à nos labyrinthes

- Comment en déduire une méthode pour trouver le plus court chemin dans un labyrinthe ?



Prochaine séance

Mardi 12 décembre 2011

Problèmes célèbres sur les graphes