

Cours 1: lois discrètes classiques en probabilités

Clément Rau
Laboratoire de Mathématiques de Toulouse
Université Paul Sabatier-IUT GEA Ponsan

Module: Stat inférentielles

1 Rappels sur les variables aléatoires

- Définition
- Quelques exemples
- loi d'une v.a
- Paramètres classiques d'une loi
- Quelques propriétés

2 Lois classiques discrètes

- Loi uniforme
- Loi de Bernoulli
- Loi binomiale
- Loi de Poisson

3 Approximation en loi

Variables aléatoires

Definition

Une variable aléatoire est une application de l'univers Ω dans \mathbb{R}

$$\begin{aligned} X &: \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto X(\omega) \end{aligned}$$

Une variable aléatoire est généralement désignée par une lettre majuscule X , Y , etc. La variable aléatoire est dite discrète si l'ensemble $X(\Omega)$ est discret, c'est à dire qui ne prend que des valeurs ponctuelles, isolées, typiquement \mathbb{N} ou \mathbb{Z} .

Exemples de v.a

- Le résultat d'un lancé de dé. On a alors,

Exemples de v.a

- Le résultat d'un lancé de dé. On a alors,

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Exemples de v.a

- Le résultat d'un lancé de dé. On a alors,

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

- Soit le jeu consistant à lancer une pièce et gagner 1 euros si pile, rien sinon. Soit X = le gain à l'issue d'un lancé.

Exemples de v.a

- Le résultat d'un lancé de dé. On a alors,

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

- Soit le jeu consistant à lancer une pièce et gagner 1 euros si pile, rien sinon. Soit X = le gain à l'issue d'un lancé.

$$X : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$$

Exemples de v.a

- Le résultat d'un lancé de dé. On a alors,

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

- Soit le jeu consistant à lancer une pièce et gagner 1 euros si pile, rien sinon. Soit X = le gain à l'issue d'un lancé.

$$X : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$$

- Le nombre de piles obtenus sur 4 lancers d'une pièces.

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Exemples de v.a

- Le résultat d'un lancé de dé. On a alors,

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

- Soit le jeu consistant à lancer une pièce et gagner 1 euros si pile, rien sinon. Soit X = le gain à l'issue d'un lancé.

$$X : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$$

- Le nombre de piles obtenus sur 4 lancers d'une pièces.

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Loi d'une v.a discrète

Definition

On appelle loi d'une v.a discrète la donnée de tous les $\mathbb{P}(X = x_i)$ lorsque x_i prend toutes les valeurs possibles dans $X(\Omega)$.

Loi d'une v.a discrète

Definition

On appelle loi d'une v.a discrète la donnée de tous les $\mathbb{P}(X = x_i)$ lorsque x_i prend toutes les valeurs possibles dans $X(\Omega)$.

On note invariablement $\mathbb{P}[\{X = x\}]$, $\mathbb{P}[X = x]$, ou parfois $\mathbb{P}_X(x)$ pour la probabilité que X prenne la valeur x

Donner la loi d'une variable aléatoire revient alors à donner les probabilités des événements élémentaires qu'elle induit, et on présente souvent ces données sous forme d'un tableau. En notant d'une manière générale

$X(\Omega) = (x_i)_{i=1,\dots,N} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ pour une variable aléatoires à N valeurs possibles (qui ne sont pas forcément $1, 2, \dots, N$), on a :

x_i	x_1	x_2	\dots	x_N
$\mathbb{P}(X = x_i)$	p_1	p_2	\dots	p_N

où l'on note respectivement $p_1 = \mathbb{P}(X = x_1)$, $p_2 = \mathbb{P}[X = x_2]$, \dots , $p_N = \mathbb{P}[X = x_N]$.

Espérance

Définition

*L'**espérance mathématique** $\mathbb{E}[X]$ d'une variable aléatoire X joue le rôle dévolu à la moyenne en statistiques : elle correspond à la valeur moyenne espérée par un observateur lors d'une réalisation de la variable aléatoire X . On a :*

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^N p_i \cdot x_i = \sum_{i=1}^N x_i \cdot \mathbb{P}[X = x_i]$$

lorsque X peut prendre N valeurs différentes x_1, \dots, x_N avec comme probabilités élémentaires $p_i = \mathbb{P}[X = x_i]$.

Remarque

L'espérance $\mathbb{E}[X]$ n'est qu'un indicateur moyen et ne peut caractériser la loi une variable aléatoire à lui tout seul.

Variance

Pour décrire plus précisément le comportement de X , sans pour autant caractériser complètement la loi de X , on peut s'intéresser aux écarts de X par rapport à cette moyenne. Cependant, si on considère simplement la différence $X - \mathbb{E}[X]$, on obtient un écart moyen $\mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]] = 0$ (par linéarité de l'espérance). On pourrait considérer la valeur moyenne de $|X - \mathbb{E}[X]|$ mais on préfère considérer la moyenne de $(X - \mathbb{E}[X])^2$, plus pertinente mathématiquement.

Definition

La **variance** mesure ainsi la déviation moyenne autour de la moyenne espérée $\mathbb{E}[X]$, et est définie par

$$V[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \sum_{i=1}^N p_i \cdot (x_i - \mathbb{E}[X])^2.$$

Definition

La **variance** mesure ainsi la déviation moyenne autour de la moyenne espérée $\mathbb{E}[X]$, et est définie par

$$V[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \sum_{i=1}^N p_i \cdot (x_i - \mathbb{E}[X])^2.$$

Proposition

Elle est toujours positive puisqu'il s'agit de l'espérance d'un carré.

Definition

La **variance** mesure ainsi la déviation moyenne autour de la moyenne espérée $\mathbb{E}[X]$, et est définie par

$$V[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \sum_{i=1}^N p_i \cdot (x_i - \mathbb{E}[X])^2.$$

Proposition

Elle est toujours positive puisqu'il s'agit de l'espérance d'un carré.

Autre expression de la variance :

$$V(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2. \quad (1)$$

Definition

*Pour mesurer la dispersion d'une variable aléatoire X , on considère souvent en statistiques **l'écart-type**, lié à la variance par :*

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}. \quad (2)$$

Propriétés de l'espérance et de la variance

Proposition (Linéarité de l'espérance)

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω et a, b deux réels,

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]. \quad (3)$$

En particulier, $\mathbb{E}[aX] = a\mathbb{E}[X]$.

Proposition (Non-linéarité de la variance)

Pour toute variable aléatoire X et $a, b \in \mathbb{R}$

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Propriétés de l'espérance et de la variance

Proposition (Linéarité de l'espérance)

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω et a, b deux réels,

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]. \quad (3)$$

En particulier, $\mathbb{E}[aX] = a\mathbb{E}[X]$.

Proposition (Non-linéarité de la variance)

Pour toute variable aléatoire X et $a, b \in \mathbb{R}$

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Proposition (Inégalité de Markov)

(cf TD) Soit X une variable aléatoire positive d'espérance finie, alors pour tout $a > 0$

$$\mathbb{P}[X \geq a] \leq \frac{1}{a} \mathbb{E}[X]. \quad (4)$$

Proposition (Inégalité de Markov)

(cf TD) Soit X une variable aléatoire positive d'espérance finie, alors pour tout $a > 0$

$$\mathbb{P}[X \geq a] \leq \frac{1}{a} \mathbb{E}[X]. \quad (4)$$

Proposition (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

(cf TD) Soit X une variable aléatoire réelle de variance finie, alors pour tout $a > 0$

$$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| \geq a] \leq \frac{1}{a^2} V(X). \quad (5)$$

1 Rappels sur les variables aléatoires

- Définition
- Quelques exemples
- loi d'une v.a
- Paramètres classiques d'une loi
- Quelques propriétés

2 Lois classiques discrètes

- Loi uniforme
- Loi de Bernoulli
- Loi binomiale
- Loi de Poisson

3 Approximation en loi

Loi uniforme

Elle modélise des situations d'équiprobabilités.

Definition

*On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi uniforme discrète** lorsqu'elle prend ses valeurs dans $\{1, \dots, n\}$ avec des probabilités élémentaires identiques. Puisque la somme des ces dernières doit valoir 1, on en déduit qu'elles doivent toutes être égales à un $1/n$:*

$$\forall k = 1 \dots n, \mathbb{P}[X = k] = \frac{1}{n}.$$

Loi uniforme, paramètres

Proposition (Espérance et variance)

On calcule aisément

$$\mathbb{E}[X] = \frac{n+1}{2},$$
$$V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

Preuve :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= 1 \cdot \frac{1}{n} + 2 \cdot \frac{1}{n} + 3 \cdot \frac{1}{n} + \cdots + n \cdot \frac{1}{n}, \\ &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n k, \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2}, \\ &= \frac{n+1}{2}.\end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ est la somme des premiers termes d'une suite arithmétique de raison 1 de premier terme 1.

Preuve :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= 1^2 \cdot \frac{1}{n} + 2^2 \cdot \frac{1}{n} + 3^2 \cdot \frac{1}{n} + \cdots + n^2 \cdot \frac{1}{n}, \\ &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n k^2, \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ est un résultat classique qui se démontre par récurrence.

Preuve :

Ainsi,

$$\begin{aligned} V[X] &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2, \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}, \\ &= (n+1) \left[\frac{2n+1}{6} - \frac{n+1}{4} \right], \\ &= (n+1) \left[\frac{4n+2-3n-3}{12} \right], \\ &= (n+1) \frac{n-1}{12}, \\ &= \frac{n^2-1}{12}. \end{aligned}$$

Loi uniforme, exemple

Exemple :

X = résultat d'un jet de dé à six faces non-pipé.

Les $n = 6$ modalités possibles, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$, $x_6 = 6$, ont toutes pour probabilité élémentaire $1/6$:

$$\forall k = 1 \dots 6, \mathbb{P}[X = k] = \frac{1}{6}$$

et on peut calculer $\mathbb{E}[X] = \frac{7}{2}$; $V[X] = \frac{35}{12}$.

Loi de Bernoulli

Definition

Cette loi est celle de toute variable aléatoire X modélisant une expérience dont l'issue ne possède que deux alternatives de type "succès ou échec", "vrai ou faux", "marche ou arrêt", pile ou face", etc. Un succès est représenté par l'évènement $\{X = 1\}$ tandis que $\{X = 0\}$ correspond à un échec $X(\Omega) = \{0; 1\}$. Puisque l'on a $\mathbb{P}[X = 0] = 1 - \mathbb{P}[X = 1]$, la loi de X ne dépend que d'un paramètre (la probabilité de succès) ; on parle alors de la loi de Bernoulli de paramètre p caractérisée par

$$\mathbb{P}[X = 1] = p,$$

$$\mathbb{P}[X = 0] = 1 - p.$$

Exemple de base

On joue au Pile ou Face

Exemple de base

On joue au Pile ou Face avec proba p de tomber sur Pile (et donc $1 - p$ de tomber sur Face).

Exemple de base

On joue au Pile ou Face avec proba p de tomber sur Pile (et donc $1 - p$ de tomber sur Face).

Soit

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient Pile} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple de base

On joue au Pile ou Face avec proba p de tomber sur Pile (et donc $1 - p$ de tomber sur Face).

Soit

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient Pile} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors X suit une Bernoulli(p).

Paramètres d'une Bernoulli

Proposition (Espérance et variance)

$$\mathbb{E}[X] = p,$$

$$V[X] = p(1 - p).$$

Loi Binomiale : définition intuitive

Loi Binomiale : définition intuitive

Une v.a suit une loi binomiale, si elle compte le nombre de succès obtenus lors de la répétition indépendante de plusieurs expériences aléatoires identiques ayant 2 issues : succès et échec.

Loi Binomiale : définition intuitive

Une v.a suit une loi binomiale, si elle compte le nombre de succès obtenus lors de la répétition indépendante de plusieurs expériences aléatoires identiques ayant 2 issues : succès et échec.

Cette loi de probabilité discrète est donc décrite par deux paramètres :

- n le nombre d'expériences réalisées,
- p la probabilité de succès.

Loi Binomiale : définition intuitive

Une v.a suit une loi binomiale, si elle compte le nombre de succès obtenus lors de la répétition indépendante de plusieurs expériences aléatoires identiques ayant 2 issues : succès et échec.

Cette loi de probabilité discrète est donc décrite par deux paramètres :

- n le nombre d'expériences réalisées,
- p la probabilité de succès.

Conséquence : $X : \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n\}$

Loi Binomiale : définition intuitive

Une v.a suit une loi binomiale, si elle compte le nombre de succès obtenus lors de la répétition indépendante de plusieurs expériences aléatoires identiques ayant 2 issues : succès et échec.

Cette loi de probabilité discrète est donc décrite par deux paramètres :

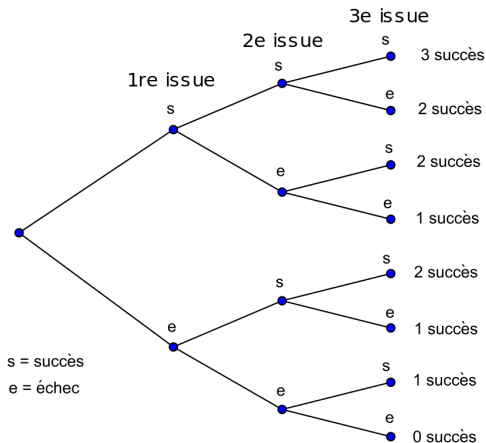
- n le nombre d'expériences réalisées,
- p la probabilité de succès.

Conséquence : $X : \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n\}$

Notation : $X \sim \text{Binomiale}(n, p)$

Exemple

On joue 3 fois à un pile ou face.



Loi binomiale

Definition

La **loi binomiale** est la loi de probabilité d'une variable aléatoire représentant une série d'épreuves de Bernoulli possédant les propriétés suivantes :

- 1 Chaque épreuve donne lieu à deux éventualités exclusives de probabilités constantes p et $q = 1 - p$.
- 2 Les épreuves répétées sont indépendantes les unes des autres.
- 3 La variable aléatoire X correspondante prend pour valeur le nombre de succès dans une suite de n épreuves.

Loi binomiale

Cette loi est donc caractérisée par deux paramètres : n et p .

Loi binomiale

Cette loi est donc caractérisée par deux paramètres : n et p .
Lors d'une telle expérience, on dit que X suit une *binomiale* $\mathcal{B}(n, p)$, à valeurs dans $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

Exemple de base

On joue n fois au pile ou face.

Exemple de base

On joue n fois au pile ou face. Pour $1 \leq i \leq n$, on pose

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient Pile} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{au } i^{\text{ème}} \text{ lancés.}$$

Exemple de base

On joue n fois au pile ou face. Pour $1 \leq i \leq n$, on pose

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient Pile} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{au } i^{\text{ème}} \text{ lancés.}$$

Soit Y le nombre de "Piles" obtenus au cours des n lancers indépendants de la pièce.

Exemple de base

On joue n fois au pile ou face. Pour $1 \leq i \leq n$, on pose

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient Pile} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{au } i^{\text{ème}} \text{ lancés.}$$

Soit Y le nombre de "Piles" obtenus au cours des n lancers indépendants de la pièce.

Alors,

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

et Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Autre manière de voir une binomiale

Théorème

Si Y peut s'écrire ainsi :

$$Y = X_1 + \cdots + X_k + \cdots + X_n$$

où les X_k sont des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre p , correspondant au succès d'une seule épreuve de pile ou face. Alors Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Pour déterminer les probabilités des événements élémentaires d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale, il nous faut tout d'abord déterminer le nombre de possibilités d'obtenir k succès au cours de n épreuves.

Pour déterminer les probabilités des événements élémentaires d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale, il nous faut tout d'abord déterminer le nombre de possibilités d'obtenir k succès au cours de n épreuves.

Il s'agit de déterminer le nombre de *combinaisons* (non ordonnées) de k objets pris parmi n , avec bien sûr $k \leq n$. Les combinaisons sont non ordonnées car seul importe d'avoir k objets (succès pour nous) et non pas à quel(s) tirage(s) ces succès ont eu lieu. On connaît le nombre de possibilités de k succès et n échec, (C_n^k) il suffit de les multiplier par les probabilités de succès et d'échec pour obtenir la loi binomiale. On a donc :

Calcul des probabilités d'une binomiale

Proposition

Les probabilités élémentaires d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ sont données pour tout nombre de succès $k = 1 \dots n$ par :

$$\mathbb{P}[X = k] = C_n^k \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}.$$

Remarque

On a bien, en utilisant la formule du binôme,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \mathbb{P}[X = k] &= \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Paramètres d'une binomiale

Proposition (Espérance et variance)

$$\mathbb{E}[X] = np,$$

$$V[X] = np(1 - p).$$

Preuve :

On a l'écriture $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_k + \cdots + X_n$, où les X_k sont n variables aléatoires de Bernoulli *indépendantes*. On a en effet par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \cdots + \mathbb{E}[X_k] + \cdots + \mathbb{E}[X_n] = n \cdot \mathbb{E}[X_1] = n \cdot p$$

et par **indépendance** des variables aléatoires $(X_k)_{k=1\dots n}$

$$V[X] = V[X_1] + V[X_2] + \cdots + V[X_k] + \cdots + V[X_n] = n \cdot V[X_1] = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Loi de Poisson

Cette loi peut modéliser les événements rares. Par exemple, elle peut modéliser le nombre d'appels reçus par un standard téléphonique, le nombre de voyageurs se présentant à un guichet dans la journée, etc. Pour des raisons vues ici, elle s'exprime à l'aide de la fonction exponentielle et dépend d'un paramètre $\lambda > 0$, qui correspond au nombre moyen d'occurrence du phénomène observé pendant la durée donnée. Plus formellement :

Loi de Poisson

Cette loi peut modéliser les événements rares. Par exemple, elle peut modéliser le nombre d'appels reçus par un standard téléphonique, le nombre de voyageurs se présentant à un guichet dans la journée, etc. Pour des raisons que nous verrons ici, elle s'exprime à l'aide de la fonction exponentielle et dépend d'un paramètre $\lambda > 0$, qui correspond au nombre moyen d'occurrence du phénomène observé pendant la durée donnée. Plus formellement :

Definition

Une variable aléatoire X suit une **loi de Poisson de paramètre** $\lambda > 0$, notée $\mathcal{P}(\lambda)$ lorsque $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}[X = k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

paramètre d'une loi de poisson

Proposition (Espérance et variance)

$$\mathbb{E}[X] = \lambda,$$

$$V[X] = \lambda.$$

paramètre d'une loi de poisson

Proposition (Espérance et variance)

$$\mathbb{E}[X] = \lambda,$$

$$V[X] = \lambda.$$

Bon exercice : démontrer cette propriété !

Exemple :

Si on sait qu'en général un standard téléphonique reçoit 20 appels dans la journée et que l'on peut modéliser le nombre aléatoire d'appels par une loi de Poisson, on pourra calculer la probabilité d'avoir k appels, pour tout k , à l'aide des formules données par une loi de Poisson $\mathcal{P}(20)$.

Exemple :

Si on sait qu'en général un standard téléphonique reçoit 20 appels dans la journée et que l'on peut modéliser le nombre aléatoire d'appels par une loi de Poisson, on pourra calculer la probabilité d'avoir k appels, pour tout k , à l'aide des formules données par une loi de Poisson $\mathcal{P}(20)$.

Remarque

Dans la pratique, des tables donnant les probabilités élémentaires pour différentes valeurs du paramètre sont disponibles et peuvent être utilisées.

Approximation d'une binomiale par une poisson

Proposition

Soit X_n des v.a telle que $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors pour tout $0 \leq k \leq n$, on a

$$\text{si } \lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(Y = k)$$

On dit que X_n converge en loi vers la loi de Poisson et on écrit :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Y$$

idée de preuve :

On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = k) &= C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{p_n^k}{(1-p_n)^k} (1-p_n)^n \\ &\simeq \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{1}{(1-\frac{\lambda}{n})^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \\ &\simeq \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}\end{aligned}$$

Utilisation pratique de cette approximation

Si X suit une *Binomiale*(n, p), avec n grand ($n \geq 30$) et p petit ($p \leq 0,1$).

Utilisation pratique de cette approximation

Si X suit une *Binomiale*(n, p), avec n grand ($n \geq 30$) et p petit ($p \leq 0,1$).

Alors,

$$\text{pour tout } k \geq 0, \quad \mathbb{P}(X = k) \simeq \mathbb{P}(Y = k),$$

où Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = n \times p$.

Utilisation pratique de cette approximation

Si X suit une *Binomiale*(n, p), avec n grand ($n \geq 30$) et p petit ($p \leq 0,1$).

Alors,

$$\text{pour tout } k \geq 0, \quad \mathbb{P}(X = k) \simeq \mathbb{P}(Y = k),$$

où Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = n \times p$.

Concrètement, on s'autorise donc l'approximation suivante :

$$\mathbb{P}(X = k) \simeq \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$