Complexidade de Algoritmos

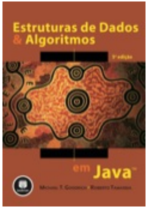
Roland Teodorowitsch

Algoritmos e Estruturas de Dados I - Escola Politécnica - PUCRS

31 de julho de 2023

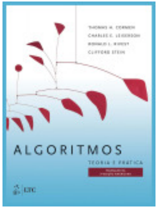
Apresentação

Leituras Recomendadas



Capítulo 4

GOODRICH, Michael T.; TAMASSIA, Roberto. **Estruturas de dados e algoritmos em Java**. Tradução: Bernardo Copstein. 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013. xxii, 713 p. E-book. ISBN 9788582600191. Tradução de: Data Structures and Algorithms in Java, 5th Edition. Disponível em: <`https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788582600191/`>. Acesso em: 01 ago. 2023.



Capítulo 3

CORMEN, Thomas *et al*. **Algoritmos - Teoria e Prática**. Tradução: Arlete Simille Marques. Rio de Janeiro: Grupo GEN, 2012. E-book. ISBN 9788595158092. Tradução de: Introduction to Algorithms, 3rd ed. Disponível em: <`https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788595158092/`>. Acesso em: 01 ago. 2023.

Sumário

- Complexidade e análise de algoritmos
- Contando o tempo
- Contagem de operações
- Funções

Complexidade e análise de algoritmos

Complexidade e análise de algoritmos

- No desenvolvimento de uma aplicação tem-se como objetivo projetar “boas” estruturas de dados e “bons” algoritmos
  - Otimizados
  - Simples
- Como saber se um algoritmo é eficiente?

Análise de Algoritmos

- Estudo das características de desempenho de um determinado algoritmo
  - O espaço ocupado é uma característica de desempenho
  - O tempo gasto na execução é outra característica de desempenho

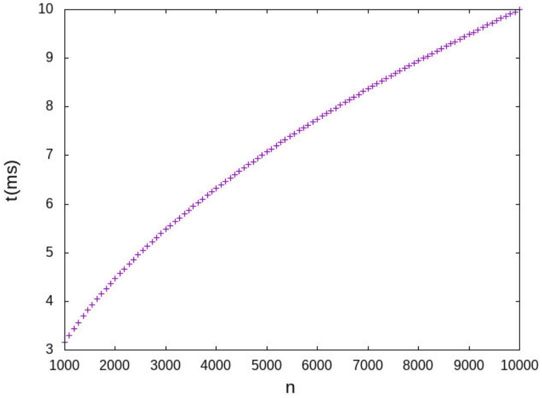
Complexidade de Algoritmos

- A **complexidade de um algoritmo** é a **medida do consumo de recursos** de que o algoritmo necessita durante a sua execução
  - Tempo de processamento
  - Memória ocupada
  - Largura de banda de comunicação
  - Hardware necessário
  - etc.

Contando o tempo

Tempo de processamento

- Depende de uma série de fatores: *hardware*, *software*, tamanho e tipo da entrada de dados
- Algoritmo: tempo de execução (ms) X tamanho da entrada de dados (n)



Medindo o tempo

- Em Java, `System.currentTimeMillis()` retorna o tempo em milissegundos (ms)

```
long antes = System.currentTimeMillis();
// algoritmo a ser medido...
long ms = System.currentTimeMillis() - antes;
```

- Em Java, `System.nanoTime()` retorna o tempo em nanossegundos (ns)

```
long antes = System.nanoTime();
// algoritmo a ser medido...
long ns = System.nanoTime() - antes;
```

- Em C, no Unix, pode-se usar `gettimeofday()` (incluir `<sys/time.h>`)

```
struct timeval antes, depois;
gettimeofday(&antes, NULL);
// algoritmo a ser medido...
gettimeofday(&depois, NULL);
unsigned long ms = (depois.tv_sec  - antes.tv_sec) * 1000000 +
                   depois.tv_usec - antes.tv_usec;
```

Contagem de operações

Análise de algoritmos

- Não pode considerar o tempo de execução
- Deve ser feita diretamente sobre o pseudocódigo de alto nível
- Consiste em contar quantas **operações primitivas** são executadas
    - Operação primitiva: instrução de baixo nível com um tempo de execução constante
- Assume-se que os tempos de execução de operações primitivas diferentes são similares

Operações primitivas

- Atribuição de valores a variáveis
- Chamadas de métodos
- Operações aritméticas (por exemplo, adição de dois números)
- Comparação de dois números
- Acesso a um arranjo
- Retorno de um método

Exemplo 1

- Contar o número de operações para atribuir para cada posição v[i] de um arranjo unidimensional o resultado de i*2

```
v[0..10] : inteiro
for (i = 0; i < v.comprimento; i++)
    v[i] = i * 2
```

Exemplo 1

- Contar o número de operações para atribuir para cada posição v[i] de um arranjo unidimensional o resultado de i*2

```
v[0..10] : inteiro
for (i = 0; i < v.comprimento; i++)
    v[i] = i * 2
```

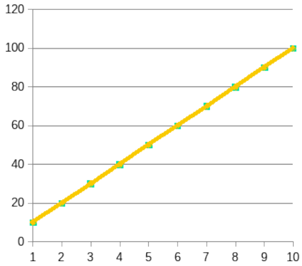
- Operação (multiplicação, atribuição e acesso as posições do arranjo): **n vezes** $\mathbf{(n = 10)}$

Exemplo 1

- Contar o número de operações para atribuir para cada posição v[i] de um arranjo unidimensional o resultado de i*2

```
v[0..10] : inteiro
for (i = 0; i < v.comprimento; i++)
    v[i] = i * 2
```

- Operação (multiplicação, atribuição e acesso as posições do arranjo): **n vezes (n = 10)**



Exemplo 2

- Contar o número de operações para atribuir para cada posição m[i,j] de um arranjo bidimensional o resultado de i*j

```
m[0..10][0..10] : inteiro
for (i=0; i<m.comprimento; i++)
    for (j=0; j<m[i].comprimento; j++)
        m[i][j] = i * j
```

Exemplo 2

- Contar o número de operações para atribuir para cada posição m[i,j] de um arranjo bidimensional o resultado de i*j

```
m[0..10][0..10] : inteiro
for (i=0; i<m.comprimento; i++)
    for (j=0; j<m[i].comprimento; j++)
        m[i][j] = i * j
```

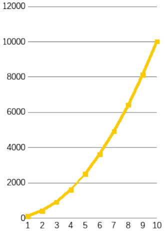
- Operação (multiplicação, atribuição e acesso as posições do arranjo): **n*n vezes (n = 10)**

Exemplo 2

- Contar o número de operações para atribuir para cada posição m[i,j] de um arranjo bidimensional o resultado de i*j

```
m[0..10][0..10] : inteiro
for (i=0; i<m.comprimento; i++)
    for (j=0; j<m[i].comprimento; j++)
        m[i][j] = i * j
```

- Operação (multiplicação, atribuição e acesso as posições do arranjo): **n*n vezes (n = 10)**



Exercícios (1/2)

Implementar e contar o número de operações das funções listadas a seguir.

1.
```
int f1(n)
    r=0
    for (i=1; i<n; i++)
        r = r + 1
    return r
```
2.
```
int f2(n)
    r=0
    for (i=1; i<n; i++)
        for (j=i+1; j<n; j++)
            r = r + 2
    return r
```
3.
```
int f3(n)
    cont=0
    for (i=1; i<n; i++)
        for (j=1; j<n; j++)
            print i*j
            cont++
     return cont
```

Exercícios (2/2)

4. ```
   int f4(n)
       r=0
       for (i=1; i<n; i++)
           for (j=i; j<2*i; j++)
               for (k=i; k<j; k++)
                   r = r + 1
        return r
   ```
5. ```
   int f5(n)
       r=0
       for (i=1; i<n; i++)
           for (j=i; j<i+3; j++)
               for (k=i; k<j; k++)
                   r = r + 1
       return r
   ```
6. ```
   int f6(n)
       if (n==0)
          return 1
       else
          return f6(n-1) + f6(n-1)
   ```
   ```

Funções

Funções

- Uma **classe de complexidade** é uma forma de agrupar algoritmos que apresentam complexidade similar. Por exemplo:
  - Complexidade **constante**: o algoritmo sempre ocupa a mesma quantidade de recursos
  - Complexidade **linear**: o algoritmo consome recursos de forma diretamente proporcional ao tamanho do problema

Funções

- Sete funções mais comuns usadas em análise de algoritmos:
  - Constante: 1
  - Logaritmo: $\log n$
  - Linear: n
  - n-log-n: $n \log n$
  - Quadrática: n^2
  - Cúbica: n^3
  - Exponencial: a^n

Função Constante: 1

- Função mais simples
- $f(n) = c$
- Não importa o valor de n, sempre será igual ao valor da constante c
- Exemplo: função que recebe um arranjo de inteiros e retorna o valor do primeiro elemento multiplicado por 2

Função Logaritmo: $\log n$

- $f(n) = \log_2 n$
- O número de operações realizadas para solução do problema não cresce da mesma forma que n
  - Se dobra o valor de n, o incremento do consumo é bem menor
- Exemplo: conversão de número decimal para binário e pesquisa binária (*binary search*)

Função Linear: n

- Se dobra o valor de n, dobra o consumo de recursos
- $f(n) = n$
- Exemplo: localizar um elemento em uma lista.

Função n-log-n: $n \log n$

- $f(n) = n \log n$
- Atribui para uma entrada n o valor de n multiplicado pelo logaritmo de base 2 de n
- Cresce mais rápido que a função linear e mais devagar que a função quadrática
- Exemplo: Algoritmos de ordenação mergesort e heapsort
  `http://www.sorting-algorithms.com/`

Função Quadrática: n^2

- Função polinomial com expoente 2
- $f(n) = n^2$
- Não cresce de forma abrupta,mas dificultam o uso em problemas grandes.
- Exemplo: Ordenação com o algoritmo *bubblesort*

Função Cúbica: n^3

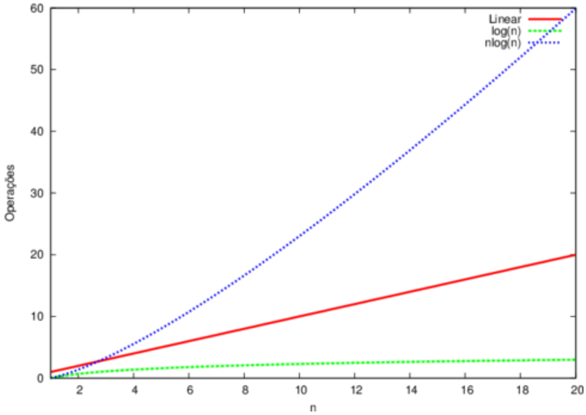
- Função polinomial com expoente 3
- $f(n) = n^3$
- Aparece com menos frequência na análise de algoritmos do que as funções constante, linear ou quadrática
- Exemplo: multiplicar duas matrizes

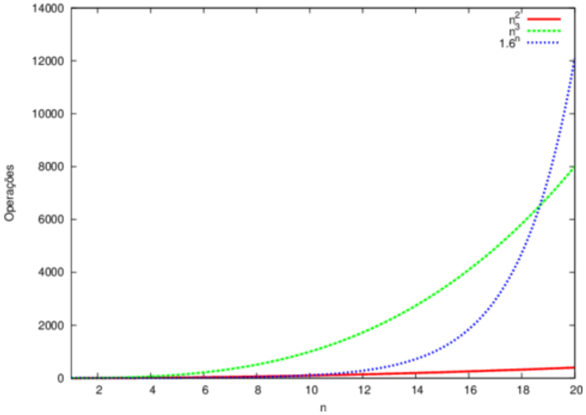
Função Exponencial: a^n

- Expoente é variável
- $f(n) = a^n$
- Algoritmos “ruins”, crescem abruptamente
- Aplicável apenas em problemas pequenos.
- Exemplos: quebrar senhas com força bruta e listar todos os subconjuntos de um conjunto S

Funções

- Taxas de crescimento para as funções usadas em análise de algoritmos





Funções

- Um problema é dividido em funções/métodos
  - Cada função/método tem um “custo” diferente
  - Estes custos são somados para determinar o custo total para solução do problema

Exercício 1

- Dois algoritmos para resolver o mesmo problema
  $f_1(n) = 2n^2 + 5n$ operações
  $f_2(n) = 500n + 4000$ operações
- Considere o número de operações de cada um para diferentes valores de n (por exemplo, $n = 10$ e $n = 1000$)
- Qual é a melhor solução?

Exercício 2

Qual a complexidade do algoritmo abaixo?

```
v[1..N] : inteiro
maximo = 0
for (i=1; i<=n; ++i)
    sum = 0   // sum = somatorio de x[i..j]
    for (j = i; j <= n; ++j)
        sum += x[j]
    maximo = max(maximo,sum)
```

- A $O(n)$
- B $O(n^2)$
- C $O(n \log 2n)$
- D $O(2n)$

Exercício 3

Qual a complexidade do algoritmo abaixo?

```
int busca(v[1..N] : inteiro, elem : inteiro)
    for (i = 1; i <= n; i++)
        if (elem == v[i])
           return i // elemento encontrado no indice i
    return -1  // elemento NAO encontrado
```

- A $O(n)$
- B $O(n^2)$
- C $O(n \log 2n)$
- D $O(2n)$

Créditos

Créditos

- Estas lâminas contêm trechos de materiais criados e disponibilizados pela professora Isabe Harb Manssour.