Complexidade de Algoritmos

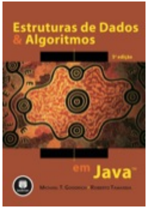
Roland Teodorowitsch

Algoritmos e Estruturas de Dados I - Escola Politécnica - PUCRS

3 de agosto de 2023

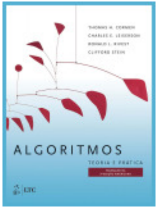
Apresentação

Leituras Recomendadas



Capítulo 4

GOODRICH, Michael T.; TAMASSIA, Roberto. **Estruturas de dados e algoritmos em Java**. Tradução: Bernardo Copstein. 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013. xxii, 713 p. E-book. ISBN 9788582600191. Tradução de: Data Structures and Algorithms in Java, 5th Edition. Disponível em: <`https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788582600191/`>. Acesso em: 01 ago. 2023.



Capítulo 3

CORMEN, Thomas *et al*. **Algoritmos - Teoria e Prática**. Tradução: Arlete Simille Marques. Rio de Janeiro: Grupo GEN, 2012. E-book. ISBN 9788595158092. Tradução de: Introduction to Algorithms, 3rd ed. Disponível em: <`https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788595158092/`>. Acesso em: 01 ago. 2023.

Sumário

- Complexidade e análise de algoritmos
- Medindo o tempo
- Contagem de operações
- Funções

Complexidade e análise de algoritmos

Complexidade e análise de algoritmos

- No desenvolvimento de uma aplicação tem-se como objetivo projetar “boas” estruturas de dados e “bons” algoritmos
  - Otimizados
  - Simples
- Como saber se um algoritmo é eficiente?

Análise de Algoritmos

- Estudo das características de desempenho de um determinado algoritmo
  - O espaço ocupado é uma característica de desempenho
  - O tempo gasto na execução é outra característica de desempenho

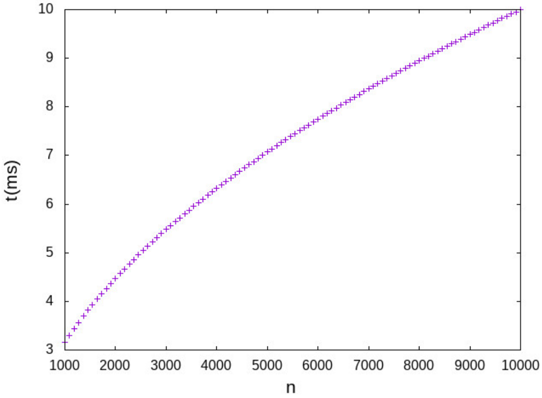
Complexidade de Algoritmos

- A **complexidade de um algoritmo** é a **medida do consumo de recursos** de que o algoritmo necessita durante a sua execução
  - Tempo de processamento
  - Memória ocupada
  - Largura de banda de comunicação
  - Hardware necessário
  - etc.

Medindo o tempo

Tempo de processamento

- Depende de uma série de fatores: *hardware*, *software*, tamanho e tipo da entrada de dados
- Algoritmo: tempo de execução (ms) X tamanho da entrada de dados (n)



Medindo o tempo

- Em Java, `System.currentTimeMillis()` retorna o tempo em milissegundos (ms)

```
long antes = System.currentTimeMillis();
// algoritmo a ser medido...
long ms = System.currentTimeMillis() - antes;
```

- Em Java, `System.nanoTime()` retorna o tempo em nanossegundos (ns)

```
long antes = System.nanoTime();
// algoritmo a ser medido...
long ns = System.nanoTime() - antes;
```

- Em C, no Unix, pode-se usar `gettimeofday()` (incluir `<sys/time.h>`)

```
struct timeval antes, depois;
gettimeofday(&antes, NULL);
// algoritmo a ser medido...
gettimeofday(&depois, NULL);
unsigned long us = (depois.tv_sec  - antes.tv_sec) * 1000000 +
                   depois.tv_usec - antes.tv_usec;
```

Exemplo: Pesquisa Linear

- A função abaixo recebe um arranjo, o seu tamanho e um valor a ser localizado, e retorna a posição do valor no arranjo (ou -1 se não achar)

```c
int pesquisa_linear(int *dados, int tam, int valor) {
  for (int i=0; i<tam; i++)
      if (valor == dados[i])
          return i;
  return -1;
}
```

- Melhor caso: o valor procurado é o primeiro elemento do arranjo
- Pior caso: o valor procurado NÃO existe no arranjo
- O arranjo precisa estar ordenado?

Exemplo: Pesquisa Linear

- A função abaixo recebe um arranjo, o seu tamanho e um valor a ser localizado, e retorna a posição do valor no arranjo (ou -1 se não achar)

```
int pesquisa_linear(int *dados, int tam, int valor) {
  for (int i=0; i<tam; i++)
      if (valor == dados[i])
         return i;
  return -1;
}
```

- Melhor caso: o valor procurado é o primeiro elemento do arranjo
- Pior caso: o valor procurado NÃO existe no arranjo
- O arranjo precisa estar ordenado?
  NÃO

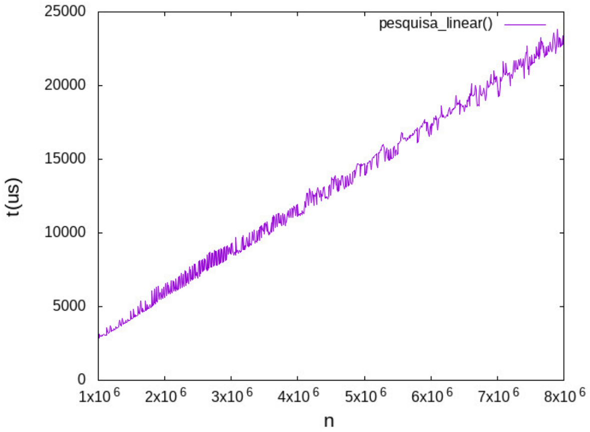
Exemplo: Pesquisa Linear

- Para visualizar como o algoritmo se comporta ("entender" a sua complexidade), executa-se a função com valores crescentes de arranjo

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <sys/time.h>

#define INI 1000000
#define FIM 8000000
#define INC 10000

int pesquisa_linear(int *dados, int tam, int valor);

int main() {
  struct timeval antes, depois;
  int *vetor = malloc( sizeof(int) * FIM );
  if (vetor == NULL) return 1;
  for (int i=0; i<FIM; i++) vetor[i] = i; //preenche o vetor
  for (int total=INI; total<=FIM; total+=INC) {
      gettimeofday(&antes, NULL);
      int loc = pesquisa_linear(vetor, total, total); //pior caso: elemento NAO existe
      gettimeofday(&depois, NULL);
      if (loc != -1) return 1;
      unsigned long microssegundos = (depois.tv_sec - antes.tv_sec) * 1000000 + depois.tv_usec - antes.tv_usec;
      printf("%d %lu\n", total, microssegundos  );
  }
  free(vetor);
  return 0;
}
```

Exemplo: Pesquisa Linear (Resultado)

1000000	2874
1010000	2896
1020000	3109
1030000	2978
1040000	2993
1050000	3012
1060000	3038
1070000	3089
1080000	3148
1090000	3110
1100000	3043
1110000	3085
1120000	3080
1130000	3576
1140000	3315
1150000	3186
1160000	3237
1170000	3221
1180000	3690
1190000	3524
1200000	3334
1210000	3350
...	



Exemplo: Pesquisa Linear (Considerações)

- Considerando o algoritmo e a sua implementação, que tipo de curva de desempenho seria possível esperar?
- É possível visualizar a curva esperada no gráfico obtido?
- Qual a origem das variações do tempo de execução?

Exercício 1: *Bubble Sort* (Linux)

- Implemente o algoritmo de ordenação *BubbleSort*, por exemplo, a partir do pseudocódigo disponível na Wikipedia (`https://pt.wikipedia.org/wiki/Bubble_sort`) – use o seguinte protótipo como modelo:

```
void bubble_sort(int *dados, int tam);
```

- Acrescente a sua implementação ao código da próxima página
  - Este código trabalha com n variando de 1000 até 10000 com incremento 10, e medindo o tempo em microssegundos
- Gere o gráfico de desempenho a partir da execução
  - Salve seu código em um arquivo chamado `bubble_sort.c` e compile-o usando: `gcc -o bubble_sort bubble_sort.c`
  - Execute o programa direcionando a sua saída para um arquivo chamado `curva1.txt`: `./bubble_sort >curva1.txt`
  - Use o **GNUPLOT** para visualizar o arquivo `curva1.txt` (dicas nas próximas páginas)

Exercício 1: *Bubble Sort* (código da função `main()`)

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <sys/time.h>

#define INI  1000
#define FIM 10000
#define INC    10

void bubble_sort(int *dados, int tam);

int esta_ordenado(int *dados, int tam) {
  for (int i=0; i<tam-1; ++i) if (dados[i] > dados[i+1]) return 0;
  return 1;
}

int main() {
  struct timeval antes, depois;
  int *vetor = malloc( sizeof(int) * FIM );
  if (vetor == NULL) return 1;
  for (int total=INI; total<=FIM; total+=INC) {
      for (int pos=0; pos<total; pos++) vetor[pos] = total - pos; //preenche o vetor
      gettimeofday(&antes, NULL);
      bubble_sort(vetor,total);
      gettimeofday(&depois, NULL);
      if (!esta_ordenado(vetor,total)) return 1;
      unsigned long microssegundos = (depois.tv_sec - antes.tv_sec) * 1000000 + depois.tv_usec - antes.tv_usec;
      printf("%d %lu\n", total, microssegundos  );
  }
  free(vetor);
  return 0;
}
```

Exercício 1: *Bubble Sort* (dicas sobre **GNUPLOT**)

- **GNUPLOT** é um aplicativo para gerar gráficos, disponível em várias plataformas
- Para mostrar, por exemplo, o gráfico correspondente aos dados armazenados no arquivo `curva1.txt` em uma janela, executa-se o **GNUPLOT** (`gnuplot`) e digita-se os seguintes comandos:

```
set xlabel "n" font "Arial,16"
set ylabel "t(us)" font "Arial,16"
plot "curva1.txt" with lines title "bubble\\_sort()"
```

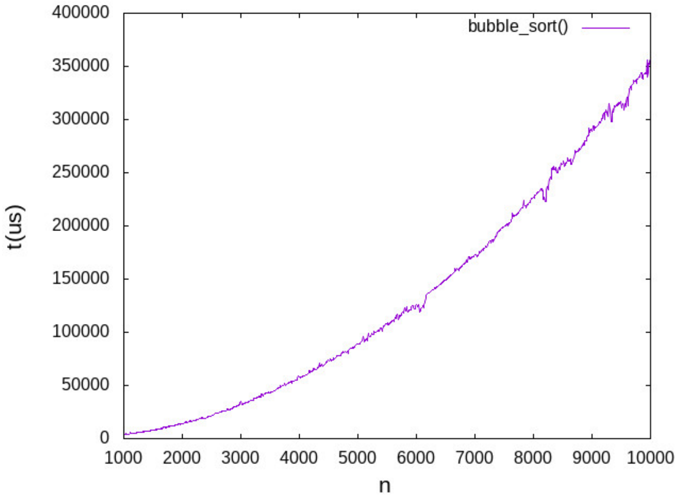
- Para gerar um arquivo JPEG com o conteúdo do gráfico, pode-se usar os seguintes comandos:

```
set terminal jpeg
set output "grafico1.jpg"
set xlabel "n" font "Arial,16"
set ylabel "t(us)" font "Arial,16"
plot "curva1.txt" with lines title "bubble\\_sort()"
```

Solução 1: *Bubble Sort* (primeira implementação)

```c
void bubble_sort(int *dados, int tam) {
  int trocou;
  do {
     trocou = 0;
     for (int i=0; i<tam-1; ++i) {
         if (dados[i] > dados[i+1]) {
            int aux = dados[i];
            dados[i] = dados[i+1];
            dados[i+1] = aux;
            trocou = 1;
         }
     }
  } while (trocou);
}
```

Solução 1: *Bubble Sort* (gráfico da primeira implementação)



Exercício 2: *Bubble Sort* otimizado

- A versão sugerida para implementação do *Bubble Sort* tem um problema:
  - Depois de executar uma passagem, o maior elemento é "empurrado" para a sua posição
  - E: as passagens seguintes continuam "tentado" empurrar o maior elemento para o final
- A solução consiste em diminuir gradualmente o tamanho até onde cada passagem é executada
- Implemente esta solução e compare o seu desempenho com a versão anterior

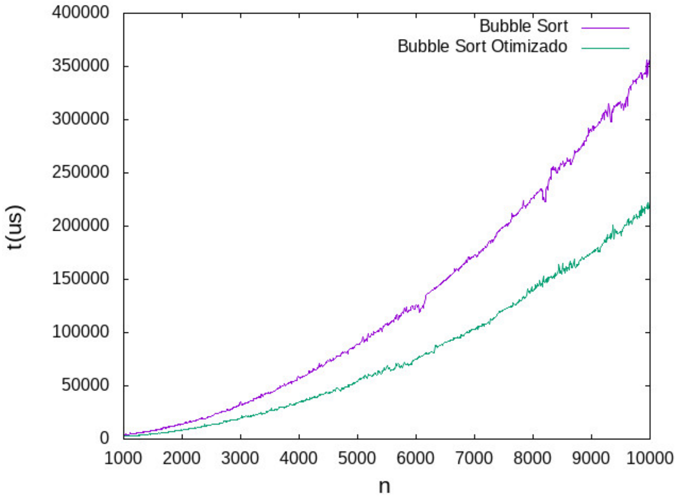
Solução 2: *Bubble Sort* otimizado

```
void bubble_sort(int *dados, int tam) {
  int trocou;
  do {
     trocou = 0;
     --tam;
     for (int i=0; i<tam; ++i) {
         if (dados[i] > dados[i+1]) {
            int aux = dados[i];
            dados[i] = dados[i+1];
            dados[i+1] = aux;
            trocou = 1;
         }
     }
  } while (trocou);
}
```

Solução 2: *Bubble Sort* otimizado (comandos do gnuplot)

```
set xlabel "n" font "Arial,16"
set ylabel "t(us)" font "Arial,16"
plot "curva1.txt" with lines title "Bubble Sort",
     "curva2.txt" with lines title "Bubble Sort Otimizado"
```

Solução 2: *Bubble Sort* (gráfico das duas implementações)



Análise da eficiência de um algoritmo

- Medir o tempo depende de hardware e software (sistema operacional, por exemplo)
- Alternativa?

Análise da eficiência de um algoritmo

- Medir o tempo depende de hardware e software (sistema operacional, por exemplo)
- Alternativa?
  Contar o número de operações (atribuição, operação aritmética, comparação, etc.)

Contagem de operações

Análise de algoritmos

- Não considera o tempo de execução
- Pode ser feita diretamente sobre o pseudocódigo de alto nível
- Consiste em contar quantas **operações primitivas** são executadas
    - Operação primitiva: instrução de baixo nível com um tempo de execução constante
- Assume-se que os tempos de execução de operações primitivas diferentes são similares

Operações primitivas

- Atribuição de valores a variáveis
- Chamadas de métodos
- Operações aritméticas (por exemplo, adição de dois números)
- Comparação de dois números
- Acesso a um arranjo
- Retorno de um método

Exemplo 1

- Contar o número de operações para atribuir para cada posição v[i] de um arranjo unidimensional o resultado de i*2

```
v[0..10] : inteiro
for (i = 0; i < v.comprimento; i++)
    v[i] = i * 2
```

Exemplo 1

- Contar o número de operações para atribuir para cada posição v[i] de um arranjo unidimensional o resultado de i*2

```
v[0..10] : inteiro
for (i = 0; i < v.comprimento; i++)
    v[i] = i * 2
```

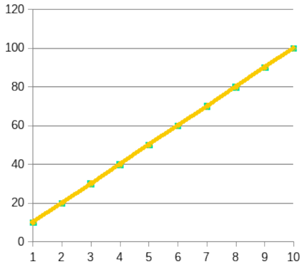
- Operação (multiplicação, atribuição e acesso às posições do arranjo): **n vezes ($\mathbf{n = 10}$)**

Exemplo 1

- Contar o número de operações para atribuir para cada posição v[i] de um arranjo unidimensional o resultado de i*2

```
v[0..10] : inteiro
for (i = 0; i < v.comprimento; i++)
    v[i] = i * 2
```

- Operação (multiplicação, atribuição e acesso às posições do arranjo): **n vezes (n = 10)**



Exemplo 2

- Contar o número de operações para atribuir para cada posição m[i,j] de um arranjo bidimensional o resultado de i*j

```
m[0..10][0..10] : inteiro
for (i=0; i<m.comprimento; i++)
    for (j=0; j<m[i].comprimento; j++)
        m[i][j] = i * j
```

Exemplo 2

- Contar o número de operações para atribuir para cada posição m[i,j] de um arranjo bidimensional o resultado de i*j

```
m[0..10][0..10] : inteiro
for (i=0; i<m.comprimento; i++)
    for (j=0; j<m[i].comprimento; j++)
        m[i][j] = i * j
```

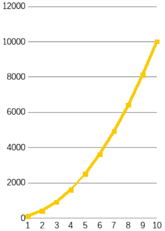
- Operação (multiplicação, atribuição e acesso às posições do arranjo): **n*n vezes (n = 10)**

Exemplo 2

- Contar o número de operações para atribuir para cada posição m[i,j] de um arranjo bidimensional o resultado de i*j

```
m[0..10][0..10] : inteiro
for (i=0; i<m.comprimento; i++)
    for (j=0; j<m[i].comprimento; j++)
        m[i][j] = i * j
```

- Operação (multiplicação, atribuição e acesso às posições do arranjo): **n*n vezes (n = 10)**



Exercícios (1/2)

Implementar e contar o número de operações das funções listadas a seguir.

1.
```
int f1(n)
    r=0
    for (i=1; i<n; i++)
        r = r + 1
    return r
```

2.
```
int f2(n)
    r=0
    for (i=1; i<n; i++)
        for (j=i+1; j<n; j++)
            r = r + 2
    return r
```

3.
```
int f3(n)
    cont=0
    for (i=1; i<n; i++)
        for (j=1; j<n; j++)
            print i*j
            cont++
    return cont
```

Exercícios (2/2)

4.
```
int f4(n)
    r=0
    for (i=1; i<n; i++)
        for (j=i; j<2*i; j++)
            for (k=i; k<j; k++)
                r = r + 1
     return r
```

5.
```
int f5(n)
    r=0
    for (i=1; i<n; i++)
        for (j=i; j<i+3; j++)
            for (k=i; k<j; k++)
                r = r + 1
    return r
```

6.
```
int f6(n)
    if (n==0)
        return 1
    else
        return f6(n-1) + f6(n-1)
```

Funções

Funções

- Uma **classe de complexidade** é uma forma de agrupar algoritmos que apresentam complexidade similar. Por exemplo:
  - Complexidade **constante**: o algoritmo sempre ocupa a mesma quantidade de recursos
  - Complexidade **linear**: o algoritmo consome recursos de forma diretamente proporcional ao tamanho do problema

Funções

- Sete funções mais comuns usadas em análise de algoritmos:
  - Constante: 1
  - Logaritmo: $\log n$
  - Linear: n
  - n-log-n: $n \log n$
  - Quadrática: n^2
  - Cúbica: n^3
  - Exponencial: a^n

Função Constante: 1

- Função mais simples
- $f(n) = c$
- Não importa o valor de n, sempre será igual ao valor da constante c
- Exemplo: função que recebe um arranjo de inteiros e retorna o valor do primeiro elemento multiplicado por 2

Função Logaritmo: $\log n$

- $f(n) = \log_2 n$
- O número de operações realizadas para solução do problema não cresce da mesma forma que n
  - Se dobra o valor de n, o incremento do consumo é bem menor
- Exemplo: conversão de número decimal para binário e pesquisa binária (*binary search*)

Função Linear: n

- Se dobra o valor de n, dobra o consumo de recursos
- $f(n) = n$
- Exemplo: localizar um elemento em uma lista.

Função n-log-n: $n \log n$

- $f(n) = n \log n$
- Atribui para uma entrada n o valor de n multiplicado pelo logaritmo de base 2 de n
- Cresce mais rápido que a função linear e mais devagar que a função quadrática
- Exemplo: Algoritmos de ordenação mergesort e heapsort
  `http://www.sorting-algorithms.com/`

Função Quadrática: n^2

- Função polinomial com expoente 2
- $f(n) = n^2$
- Não cresce de forma abrupta,mas dificultam o uso em problemas grandes.
- Exemplo: Ordenação com o algoritmo *bubblesort*

Função Cúbica: n^3

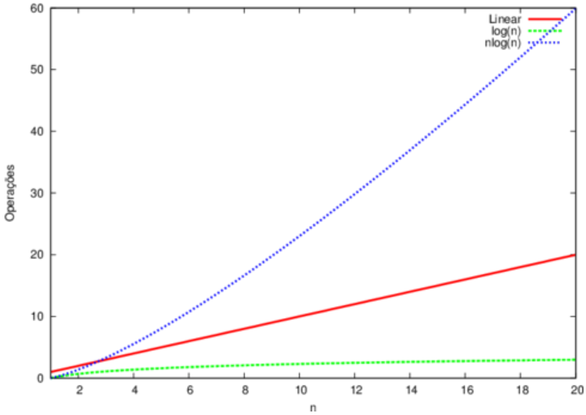
- Função polinomial com expoente 3
- $f(n) = n^3$
- Aparece com menos frequência na análise de algoritmos do que as funções constante, linear ou quadrática
- Exemplo: multiplicar duas matrizes

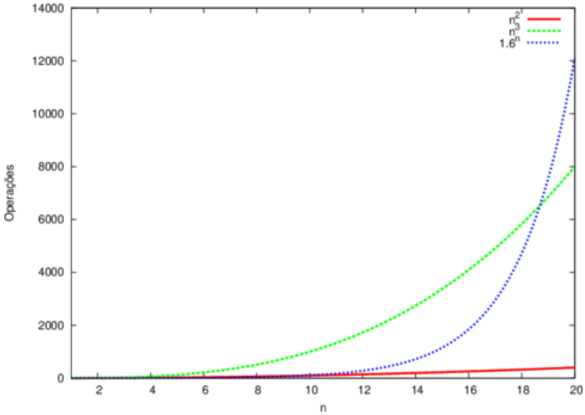
Função Exponencial: a^n

- Expoente é variável
- $f(n) = a^n$
- Algoritmos “ruins”, crescem abruptamente
- Aplicável apenas em problemas pequenos.
- Exemplos: quebrar senhas com força bruta e listar todos os subconjuntos de um conjunto S

Funções

- Taxas de crescimento para as funções usadas em análise de algoritmos





Funções

- Um problema é dividido em funções/métodos
  - Cada função/método tem um "custo" diferente
  - Estes custos são somados para determinar o custo total para solução do problema

Exercício 1

- Dois algoritmos para resolver o mesmo problema
  $f_1(n) = 2n^2 + 5n$ operações
  $f_2(n) = 500n + 4000$ operações
- Considere o número de operações de cada um para diferentes valores de n (por exemplo, $n = 10$ e $n = 1000$)
- Qual é a melhor solução?

Exercício 2

Qual a complexidade do algoritmo abaixo?

```
v[1..N] : inteiro
maximo = 0
for (i=1; i<=n; ++i)
    sum = 0   // sum = somatorio de x[i..j]
    for (j = i; j <= n; ++j)
        sum += x[j]
    maximo = max(maximo,sum)
```

A. $O(n)$
B. $O(n^2)$
C. $O(n \log 2n)$
D. $O(2n)$

Exercício 3

Qual a complexidade do algoritmo abaixo?

```
int busca(v[1..N] : inteiro, elem : inteiro)
    for (i = 1; i <= n; i++)
        if (elem == v[i])
           return i // elemento encontrado no indice i
    return -1  // elemento NAO encontrado
```

A. $O(n)$
B. $O(n^2)$
C. $O(n \log 2n)$
D. $O(2n)$

Créditos

Créditos

- Estas lâminas contêm trechos de materiais criados e disponibilizados pela professora Isabe Harb Manssour.