Algoritmos de Ordenação

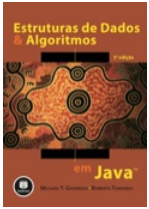
Roland Teodorowitsch

Algoritmos e Estruturas de Dados I - Escola Politécnica - PUCRS

23 de agosto de 2023

Introdução

Leitura(s) Recomendada(s)



Seções 3.1.2, 11.1 (*Merge Sort*), 11.2 (*Quick Sort*), 11.3.3 (comparação)
GOODRICH, Michael T.; TAMASSIA, Roberto. **Estruturas de dados e algoritmos em Java**. Tradução: Bernardo Copstein. 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013. xxii, 713 p. E-book. ISBN 9788582600191. Tradução de: Data Structures and Algorithms in Java, 5th Edition. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788582600191/>. Acesso em: 01 ago. 2023.

Sites sobre Ordenação [*]

- Animações:
  `http://www.sorting-algorithms.com/`
- Algoritmos na wikipedia:
  `https://en.wikipedia.org/wiki/Sorting_algorithm`
- Danças:
  `http://makezine.com/2011/04/12/data-sorting-dances/`
- 15 algoritmos em 6 minutos:
  `https://www.youtube.com/watch?v=kPRA0W1kECg`
- Visualização e comparação de algoritmos de ordenação:
  `https://www.youtube.com/watch?v=ZZuD6iUe3Pc`
- Visualização *Bubble Sort vs Quick Sort*:
  `https://www.youtube.com/watch?v=aXXWXz5rF64`
- Visualização *Merge Sort vs Quick Sort*:
  `https://www.youtube.com/watch?v=es2T6KY45cA`

Revisão: Algoritmos de Pesquisa

- Pesquisa Linear
  - Pode ser aplicada sobre qualquer coleção, ordenada ou não
  - Procura um item, comparando-o com cada elemento da coleção, até achar ou chegar no final
  - Melhor caso: o item procurado está na primeira posição da coleção
  - Pior caso: o item NÃO está na coleção
  - Complexidade: $O(n)$
- Pesquisa Binária
  - A coleção deve estar ordenada
  - Estratégia básica:
    - Verifica o elemento central: se encontrou, a busca termina
    - Se o item for menor que o central, considera apenas a parte abaixo do elemento central
    - Se o item for maior que o central, considera apenas a parte acima do elemento central
  - Trabalha subdividindo a coleção e reaplicando sempre a estratégia básica, o que o torna adequado para implementação recursiva
  - Complexidade: $O(\log n)$

Algoritmos de Ordenação

Algoritmos de Ordenação

- Organizam os elementos de uma coleção segundo determinado critério (ordem crescente de valor, por exemplo)
- Operação básica: troca de elementos
- Exemplos
  - *Bubble Sort*
  - *Selection Sort*
  - *Insertion Sort*
  - *Merge Sort*
  - *Quick Sort*
  - etc.
- Em geral, os mais simples nem sempre tem bom desempenho (menos otimizados)
- Algoritmos com bom desempenho costumam ser mais sofisticados
- São importantes quando se quer implementar busca eficiente (pesquisa binária)

Bubble Sort

Bubble Sort

- É um dos métodos mais simples de ordenação
- Estratégia: compara elementos adjacentes, e, se estiverem fora de ordem, troca os elementos
- Repete-se a estratégia básica até que a coleção esteja ordenada
- Complexidade: $O(n)$ (melhor caso) ou $O(n^2)$ (pior caso)

Bubble Sort: Exemplo

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	7	8	1	10	9	4	6	3	2
5	7	1	8	9	4	6	3	2	10
5	1	7	8	4	6	3	2	9	10
1	5	7	4	6	3	2	8	9	10
1	5	4	6	3	2	7	8	9	10
1	4	5	3	2	6	7	8	9	10
1	4	3	2	5	6	7	8	9	10
1	3	2	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Bubble Sort: Implementação

```
void bubbleSort(int *dados, int tam) {
  int trocou;
  do {
     trocou = 0;
     --tam;
     for (int i=0; i<tam; ++i) {
         if (dados[i] > dados[i+1]) {
            int aux = dados[i];
            dados[i] = dados[i+1];
            dados[i+1] = aux;
            trocou = 1;
         }
     }
  } while (trocou);
}
```

Bubble Sort: Mais informações [*]

- http://www.sorting-algorithms.com/bubble-sort
- https://www.hackerearth.com/practice/algorithms/sorting/bubble-sort/tutorial/

Selection Sort

Selection Sort

- É um algorimo de ordenação por seleção
- Fácil de implementar e bastante intuitivo, o que não garante eficiência...
- Estratégia: procurar o menor elemento e colocá-lo na sua posiçao
- Repete-se a estratégia até que todos os elementos estejam em sua posição
- Complexidade: $O(n^2)$ (melhor e pior caso)

Selection Sort: Exemplo

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	7	8	1	10	9	4	6	3	2
1	7	8	5	10	9	4	6	3	2
1	2	8	5	10	9	4	6	3	7
1	2	3	5	10	9	4	6	8	7
1	2	3	4	10	9	5	6	8	7
1	2	3	4	5	9	10	6	8	7
1	2	3	4	5	6	10	9	8	7
1	2	3	4	5	6	7	9	8	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Selection Sort: Implementação

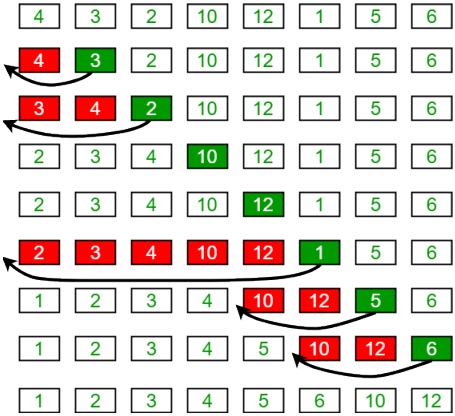
```
void selectionSort(int *dados, int tam) {
  for (int i=0; i<tam-1; ++i) {
      int men = i;
      for (int j=i+1; j<tam; ++j)
          if ( dados[j] < dados[men] ) men = j;
      if ( men != i ) {
         int aux = dados[men];
         dados[men] = dados[i];
         dados[i] = aux;
      }
  }
}
```

Insertion Sort

Insertion Sort

- É um algorimo de ordenação por inserção
- Estratégia:
  - Escolhe-se uma base que inicia no segundo elemento e avança até o último elemento
  - Sempre à esquerda da base todos os elementos devem estar ordenados
  - Busca-se a posição da base nos elementos à esquerda, sempre deslocando os elementos uma posição para a direita enquanto não chegar na posição correta da base
  - Quando chegar na posição correta da base, atribui-se o valor da base para esta posição
- Trata-se de uma algoritmo um pouco mais avançado do que os dois anteriores
- Complexidade: $O(n)$ (melhor caso) ou $O(n^2)$ (pior caso)

Insertion Sort: Exemplo 1



Fonte: https://www.geeksforgeeks.org/insertion-sort/

Insertion Sort: Exemplo 2

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	7	8	1	10	9	4	6	3	2
5	7	8	1	10	9	4	6	3	2
5	7	8	1	10	9	4	6	3	2
1	5	7	8	10	9	4	6	3	2
1	5	7	8	10	9	4	6	3	2
1	5	7	8	9	10	4	6	3	2
1	4	5	7	8	9	10	6	3	2
1	4	5	6	7	8	9	10	3	2
1	3	4	5	6	7	8	9	10	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Insertion Sort: Implementação

```
void insertionSort(int *dados, int tam) {
  for (int i=1; i<tam; ++i) {
      int base = dados[i];
      int j = i-1;
      while ( j>=0 && base < dados[j] ) {
            dados[j+1] = dados[j];
            --j;
      }
      dados[j+1] = base;
  }
}
```

Insertion Sort: Mais informações [*]

- http://www.sorting-algorithms.com/insertion-sort
- https://www.hackerearth.com/practice/algorithms/sorting/insertion-sort/tutorial/

Merge Sort

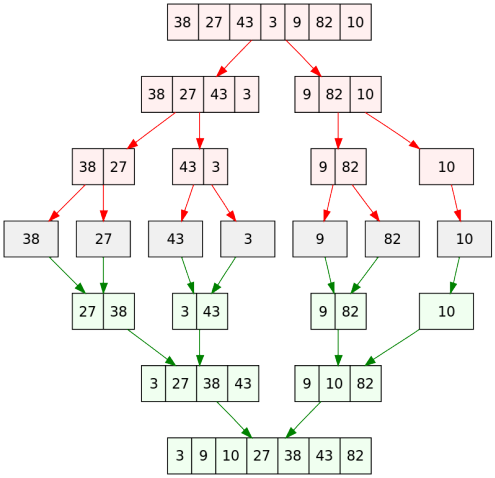
Merge Sort

- É um algorimo de ordenação por intercalação
- Utiliza o padrão (estratégia) conhecido como "divisão e conquista"
- Consiste de 3 etapas
  - Divisão: se há algo a ordenar, divide os dados de entrada em duas (ou mais) partes e executa o algoritmo sobre cada uma das partes; se não há nada a ordenar, retorna a solução
  - Conquista: cada parte dos dados é classificada recursivamente
  - Combinação: quando cada subconjunto está classificado (internamente), eles devem ser combinados (*merge*) realizando-se uma intercalação
- Permite implementação recursiva

Merge Sort: Estratégia [*]

- Para ordenar uma sequência S com n elementos:
  - **Dividir**: se S tem zero ou um elemento, retorna S, pois já está classificado; senão, remove os elementos de S e coloca-os em duas sequências, S_1 e S_2 ($n/2$ elementos em cada um)
  - **Conquistar**: classifica as sequências S_1 e S_2 recursivamente
  - **Combinar**: coloca os elementos de volta em S com a união das sequências S_1 e S_2 ordenadas

Merge Sort: Exemplo



Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Merge_sort

- A execução do algoritmo pode ser vista como uma árvore binária
- Cada nodo representa uma chamada recursiva do algoritmo *Merge Sort*
- Nodos recebem sequências de entrada para serem processadas e, por fim, geram sequências de saída ordenadas

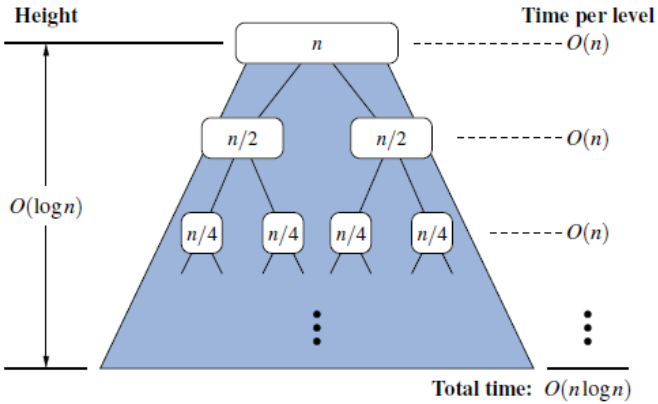
Merge Sort: Implementação

```
void merge(int *dados, int ini, int meio, int fim) {
  int p = ini, q = meio+1, k=0;
  int *aux = new int[fim-ini+1];
  for (int i = ini; i <= fim; i++){
      if (p > meio)                  aux[k++] = dados[q++];
      else if (q > fim)              aux[k++] = dados[p++];
      else if( dados[p] < dados[q]) aux[k++] = dados[p++];
      else                           aux[k++] = dados[q++];
  }
  for (int p=0; p<k; p++) dados[ini++] = aux[p];
  delete[] aux;
}

void mergeSort(int *dados, int ini, int fim) {
  if ( ini >= fim ) return;
  int meio = (ini + fim) / 2;
  mergeSort(dados, ini, meio);
  mergeSort(dados, meio+1, fim);
  merge(dados,ini,meio,fim);
}
```

Merge Sort: Desempenho [*]

- O tamanho da sequência de entrada é a metade a cada chamada recursiva
- A árvore associada a uma execução do algoritmo com uma sequência de tamanho n, tem altura $\log n$
- Conclusões:
  - Altura da árvore é $\log n$
  - Tempo gasto em cada nível: $O(n)$
  - Tempo de execução: $O(n \log n)$



Merge Sort: Mais informações [*]

- http://www.sorting-algorithms.com/merge-sort
- https://www.hackerearth.com/practice/algorithms/sorting/merge-sort/tutorial/

Quick Sort

Quick Sort

- Foi criado pelo cientista britânico Charles Antony Richard Hoare em 1959 e publicado em 1961
- É um algoritmo de ordenação por comparação que também utiliza o padrão "Divisão e Conquista"
- Diferentemente do *Merge Sort*, o *Quick Sort* procura realizar a parte mais significativa do processamento **antes** das chamadas recursivas
- A estratégia geral subdivide-se nos seguintes passos:
  - Escolhe-se um elemento da lista, denominado **pivô**
  - Particionamento: a lista é reorganizada de forma que todos os elementos da lista menores que o pivô fiquem à esquerda do pivô e que todos os elemenos maiores do que o pivô fiquem à sua direita – o pivô estará em sua posição correta, porém "cercado" por duas listas não ordenadas
  - Essas duas listas são recursivamente ordenadas usando a mesma estratégia
- Há variantes relacionadas principalmente à escolha do pivô, que o influencia o desempenho

Quick Sort: Escolha do Pivô

- A escolha do pivô é influencia o desempenho
- Métodos:
  - Lomuto: criado por Nico Lomuto, tipicamente escolhe o primeiro ou último elemento da coleção
  - Hoare: escolhe o elemento central da coleção como pivô
  - Pivô aleatório
  - Valor intermediário entre primeiro, central e último elementos

Merge Sort: Implementação (Hoare)

```
void quickSort(int *dados, int ini, int fim) {
  int i = ini, j = fim, pivo = dados[(ini+fim)/2];
  while (i <= j) {
        while (dados[i] < pivo)
              ++i;
        while (dados[j] > pivo)
              --j;
        if (i <= j) {
           int aux = dados[i];  dados[i] = dados[j];  dados[j] = aux;
           ++i;
           --j;
        }
   }
   if (ini < j) quickSort(dados,ini,j);
   if (i < fim) quickSort(dados,i,fim);
}
```

Merge Sort: Implementação (Lomuto)

```
int particiona(int *dados, int ini, int fim) {
  int pivo = dados[fim];
  int i = ini-1;
  for (int j=ini; j<fim; ++j) {
      if (dados[j] < pivo) {
         ++i;
         int aux = dados[i]; dados[i] = dados[j]; dados[j] = aux;
      }
  }
  if (pivo < dados[i+1]) {
     int aux = dados[i+1]; dados[i+1] = dados[fim]; dados[fim] = aux;
  }
  return i+1;
}

void quickSort(int *dados, int ini, int fim) {
  if (ini < fim) {
     int pivo = particiona(dados, ini, fim);
     quickSort(dados, ini, pivo-1);
     quickSort(dados, pivo+1, fim);
  }
}
```

Quick Sort: Análise

- Se a posição do pivô escolhido for central, o *Quick Sort* consegue duas subcoleções de tamanhos próximos
  - Consequentemente a altura da árvore de execução será $O(\log n)$
  - Como em cada nível o tempo de execução será $O(n)$
  - Então, o tempo de execução do algoritmo será $O(n \log n)$
- No caso da variante Lomuto que escolhe o último elemento como pivô, se a coleção já estiver ordenada, tem-se o pior caso, ou seja, $O(n^2)$

Quick Sort: Mais informações [*]

- https://en.wikipedia.org/wiki/Quicksort
- http://www.sorting-algorithms.com/quick-sort
- https://www.hackerearth.com/practice/algorithms/sorting/quick-sort/tutorial/

Comparação

Comparação

- Definir qual é o "melhor" algoritmo de ordenação nem sempre é fácil
- Há muitas variações, tanto nas implementações dos algoritmos quanto nas configurações de coleções (ordendada, invertida, aleatória, com muitos elementos duplicados, sem elementos duplicados, etc.)
- Até mesmo o *Bubble Sort* pode apresentar o melhor desempenho para uma comfiguração específica
- Mas há alguns fatores que devem ser considerados...

Estabilidade [*]

- Um algoritmo de ordenação é estável (*stable*) se não altera a posição relativa dos elementos que têm o mesmo valor
- Exemplo:
  - Coleção inicial:
    `{ {"João", 21}, {"Ana", 55}, {"João", 13"}, {"Beto", 34}, {"Yuri", 23} }`
  - Coleção ordenada por um algoritmo estável:
    `{ {"Ana", 55}, {"Beto", 34}, {"João", 21}, {"João", 13"}, {"Yuri", 23} }`
  - Coleção ordenada por um algoritmo instável:
    `{ {"Ana", 55}, {"Beto", 34}, {"João", 13"}, {"João", 21}, {"Yuri", 23} }`

Comparação dos Algoritmos quanto à Estabilidade

- São estáveis:
  - *Bubble Sort*
  - *Insertion Sort*
  - *Merge Sort*
- São instáveis:
  - *Selection Sort*
  - *Quick Sort*

Armazenamento

- Versões recursivas dos algoritmos necessitarão de memória da pilha
  - No *Merge Sort* e *Quick Sort*, o número máximo de chamadas recursivas aninhadas (ativas em determinado momento), em geral, será $O(\log n)$
  - Cuidado: implementações recursivas de outros algoritmos de ordenação podem gerar $O(n)$ chamadas recursivas aninhadas
- Algoritmos de ordenação *in-place* utilizam apenas o espaço da própria coleção para realizar a ordenação, NÃO necessitando de áreas de memória auxiliares
  - *Merge Sort*, por exemplo, precisa de um vetor auxiliar

Bubble Sort

- Complexidade: $O(n^2)$ (pior caso) ou $O(n)$ (melhor caso, considerando a implementação otimizada)
- É simples de ser implementado
- É estável
- Não necessita de um vetor auxiliar (*in-place*), ocupando menos memória
- NÃO é recomendado para coleções grandes

Selection Sort

- Complexidade: $O(n^2)$
- É simples de ser implementado
- Não necessita de um vetor auxiliar (*in-place*), ocupando menos memória
- É relativamente rápido para pequenas coleções
- É um dos mais lentos para coleções grandes
- NÃO é estável
- Executa SEMPRE $(n^2 - n)/2$ comparações

Insertion Sort

- Complexidade: $O(n^2)$ (pior caso) ou $O(n)$ (melhor caso)
- É estável
- Não necessita de um vetor auxiliar (*in-place*), ocupando menos memória
- Tem desempenho razoável principalmente para pequenas coleções (tamanho da ordem de dezenas)
- Eficiente para ordenação de coleções "quase" ordenadas

Merge Sort

- Complexidade: $O(n \log n)$
- É estável
- Tem bom desempenho para coleções grandes
- Necessita de um vetor auxiliar

Quick Sort

- Complexidade: $O(n \log n)$
- Tem um desempenho excelente para vetores grandes
- NÃO é estável
- A escolha do pivô pode comprometer o desempenho
- Análises experimentais mostram que, se a sequência de entrada couber na memória principal, versões *in-place* do *Quick Sort* executam mais rápido que o *Merge Sort* [*]

Comparativo com Medição de Tempo

- Vetor de 10.000 inteiros em 3 configurações: ordenado, invertido e aleatório
- Tempos medidos em μs (microssegundos)

Algoritmo	Ordenado	Invertido	Aleatório
Bubble Sort	117	192173	224400
Selection Sort	135131	105908	106956
Insertion Sort	174	148203	58291
Merge Sort	4277	3879	6470
Quick Sort (Hoare)	1186	406	1587
Quick Sort (Lomuto)	203035	136896	1108

Créditos

Créditos

- Estas lâminas contêm trechos adaptados de materiais criados e disponibilizados pela professora Isabel Harb Manssour [*].