Árvores

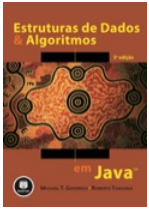
Roland Teodorowitsch

Algoritmos e Estruturas de Dados I - Escola Politécnica - PUCRS

24 de outubro de 2023

Introdução

Leitura(s) Recomendada(s)



Capítulo 7, Seções 7.1 e 7.2

GOODRICH, Michael T.; TAMASSIA, Roberto. **Estruturas de dados e algoritmos em Java**. Tradução: Bernardo Copstein. 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013. xxii, 713 p. E-book. ISBN 9788582600191. Tradução de: Data Structures and Algorithms in Java, 5th Edition. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788582600191/>. Acesso em: 01 ago. 2023.

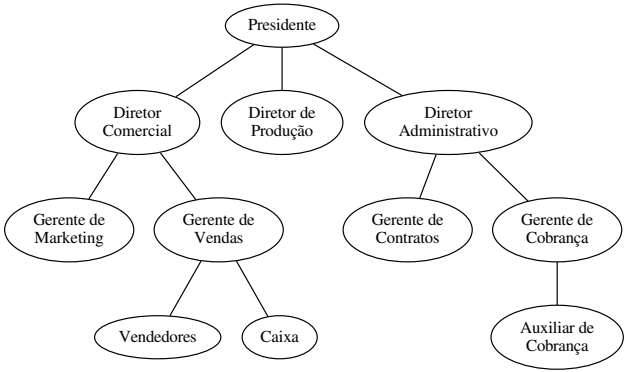
Conceitos e Terminologia

Árvores

- Estruturas de dados não lineares
- Permitem a implementação de vários algoritmos mais rápidos do que no uso de estruturas de dados lineares como as listas
- Fornecem uma forma natural de organizar os dados
  - Sistemas de arquivos
  - Bancos de dados
  - Sites da Web

Árvore

- Tipo abstrato de dados que armazena elementos de maneira **hierárquica**
- Normalmente, são desenhadas colocando-se os elementos dentro de elipses ou retângulos e conectando-os com linhas retas

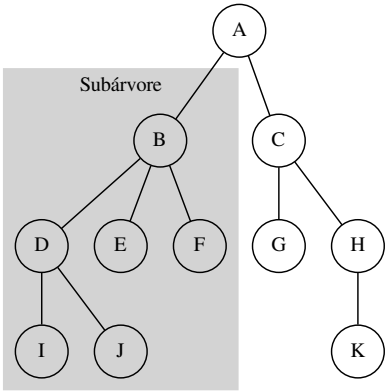


Definição

- Formalmente uma árvore **T** é definida como um conjunto finito de um ou mais **nodos**, com a seguinte propriedade:
  - Se **T** não é vazia, existe um nodo denominado **raiz** da árvore
  - Os demais nodos formam $m > 0$ conjuntos disjuntos S_1, S_2, ..., S_m, sendo cada um destes conjuntos uma árvore
  - As árvores S_i $(1 \leq i \leq m)$ são chamadas de **subárvores**
- Pela definição
  - Cada nodo da árvore é a raiz de uma subárvore

Definição

- Portanto, uma árvore pode ser representada da seguinte forma:



- **A** é a raiz da árvore

Relacionamentos entre nodos

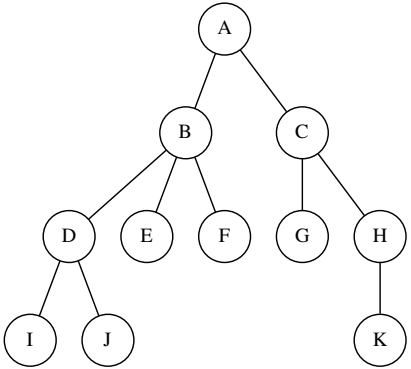
- Outra propriedade de uma árvore **T**:
  - Cada nodo **v** de **T** diferente da raiz tem um único nodo **pai**, **w**
  - Todo nodo com **pai w** é **filho** de **w**
- Pela definição
  - Uma árvore pode ser vazia, isto é, não possui nodos
  - Esta convenção permite que se defina uma árvore recursivamente
    - Uma árvore **T** ou está vazia, ou consiste de um nodo **r**, chamado de raiz de **T**, e um conjunto de árvores cujas raízes são filhas de **r**

Relacionamentos entre nodos

- Outros relacionamentos entre nodos
  - Dois nodos que são filhos de um mesmo pai são **irmãos**
  - Um nodo **v** é **externo** se **v** não tem filhos
  - Um nodo **v** é **interno** se tem um ou mais filhos
- Nodo **interno** também é conhecido como **galho**
- Nodo **externo** também é conhecido como **folha**

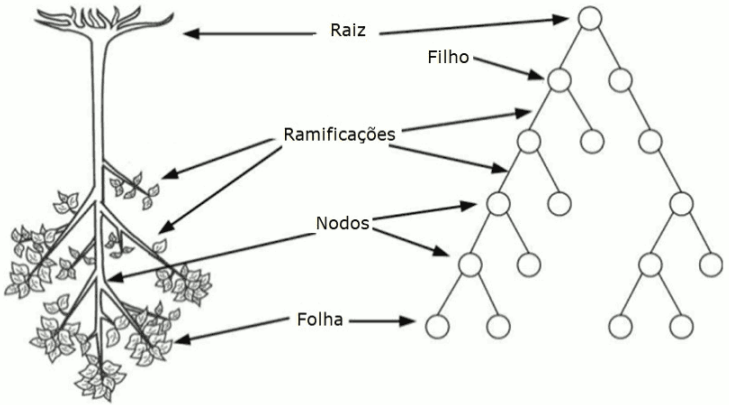
Relacionamentos entre nodos

- A raiz de uma árvore é chamada de **pai** de suas subárvores
- As raízes das subárvores de um nodo são chamadas de **irmãos**, que, por sua vez, são **filhos** de seu nodo pai



- **A** é pai de **B** e **C**
- **D**, **E** e **F** são irmãos
- **I** é filho de **J**

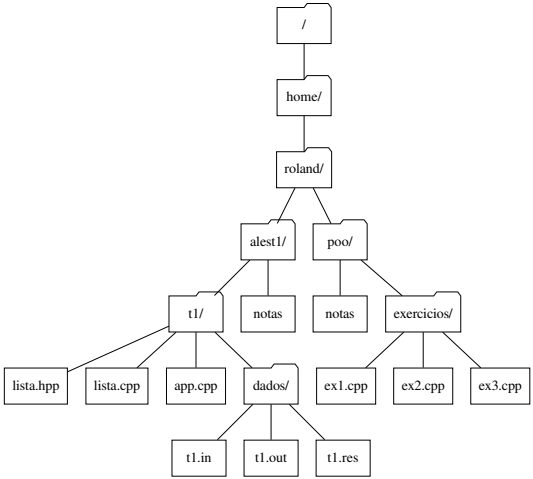
"Árvore Invertida"



Fonte: https://di.ubi.pt/~cbarrico/Disciplinas/AlgoritmosEstruturasDadosLEI/Downloads/Teorica_ConceitosGeraisArvores.pdf

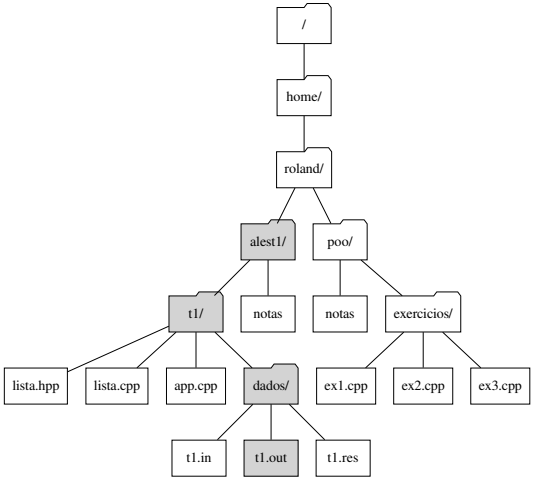
Exemplo

- Organização hierárquica dos arquivos nos sistemas operacionais é uma árvore
- Nodos internos, neste caso, são associados a diretórios, e nodos externos a arquivos
- No Linux o diretório raiz é "/"



Arestas e Caminhos em Árvores

- Uma **aresta** de uma árvore **T** é um par de nodos (**u**,**v**) tal que **u** é pai de **v**, ou vice-versa
- Um **caminho** de **T** é uma sequência de nodos tais que quaisquer dois nodos consecutivos da sequência formam uma aresta
- Exemplo: `alest1/`, `t1/`, `dados/` e `t1.out` formam um caminho

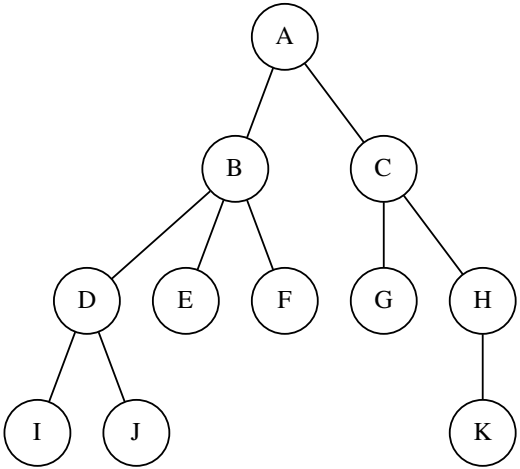


Grau, Nível e Altura

- Grau
  - É o número de subárvores de um nodo
  - Quando o grau é zero, ou seja, o nodo não possui filhos, ele é **folha**
- Nível de um nodo
  - É o número de linhas que liga o nodo à raiz, sabendo que a raiz é o nível zero
- Altura
  - É definida como sendo o nível mais alto da árvore

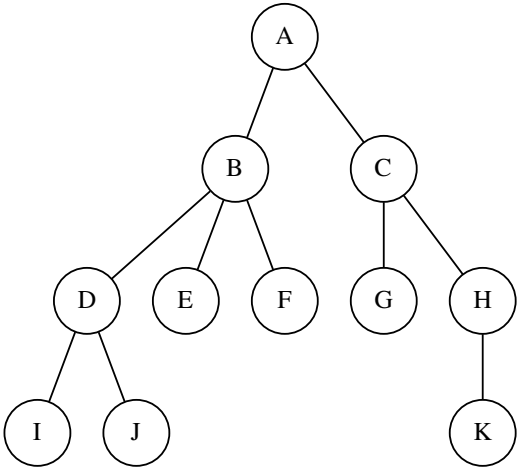
Grau, Nível e Altura

- Grau:
  - Nodo A:
  - Nodo B:
  - Nodo C:
  - Nodo D:
  - Nodo E:
  - Nodo F:
  - Nodo G:
  - Nodo H:
  - Nodo I:
  - Nodo J:
  - Nodo K:



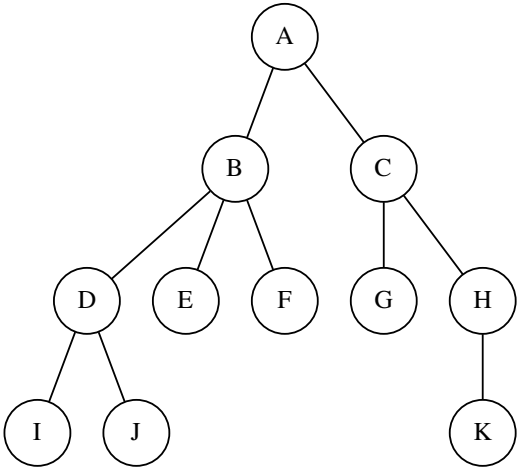
Grau, Nível e Altura

- Grau:
  - Nodo A: 2
  - Nodo B: 3
  - Nodo C: 2
  - Nodo D: 2
  - Nodo E: 0
  - Nodo F: 0
  - Nodo G: 0
  - Nodo H: 1
  - Nodo I: 0
  - Nodo J: 0
  - Nodo K: 0



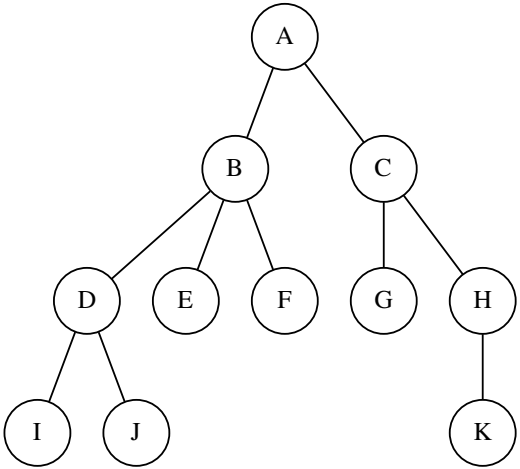
Grau, Nível e Altura

- Nível:
  - Nodo A:
  - Nodo B:
  - Nodo C:
  - Nodo D:
  - Nodo E:
  - Nodo F:
  - Nodo G:
  - Nodo H:
  - Nodo I:
  - Nodo J:
  - Nodo K:
- Altura:
  - Árvore:



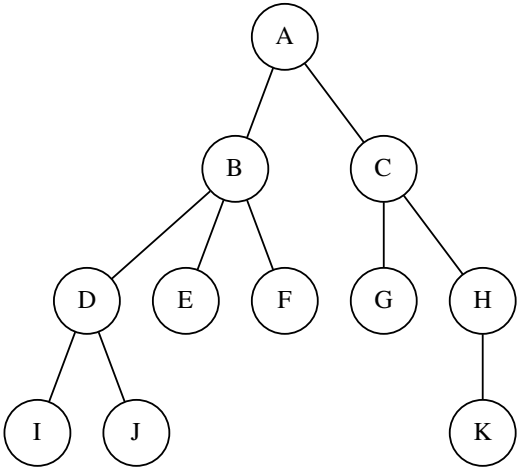
Grau, Nível e Altura

- Nível:
  - Nodo A: 0
  - Nodo B: 1
  - Nodo C: 1
  - Nodo D: 2
  - Nodo E: 2
  - Nodo F: 2
  - Nodo G: 2
  - Nodo H: 2
  - Nodo I: 3
  - Nodo J: 3
  - Nodo K: 3
- Altura:
  - Árvore: 3



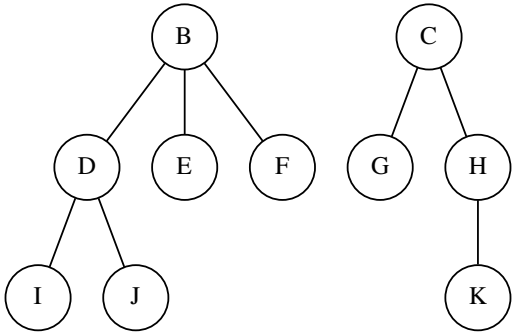
Grau, Nível e Altura

- Raiz: A
- Nodos internos: B, C, D, H
- Folhas: I, J, E, F, G, K



Floresta

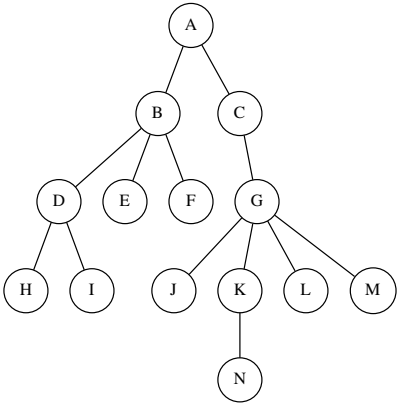
- Conjunto de uma ou mais árvores disjuntas
- Se eliminarmos o nodo raiz de uma árvore, obtém-se uma floresta
- Os filhos da raiz original irão se transformar nas raízes das novas árvores



Exercícios

Exercício 1

1. Analise a árvore abaixo.

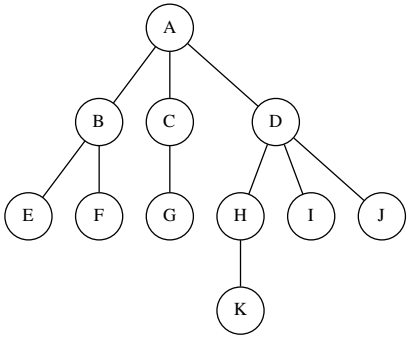


E responda:

- Qual é a altura da árvore?
- Quais são as folhas da árvore?
- Quais são os nodos irmãos?
- Os nodos D e G são pais de que nodos?
- Qual é o grau do nodo B?
- Qual é o grau do nodo G?
- Quais são os níveis dos nodos B, G, H, L e N?

Exercício 2

2. Analise a árvore abaixo.



E responda:

- Qual é a altura da árvore?
- Quais são as folhas da árvore?
- Quais são os nodos irmãos?
- Quais são os nodos internos?
- Qual é o grau do nodo C?
- Qual é o grau do nodo D?
- Quais são os níveis dos nodos C, H e K?

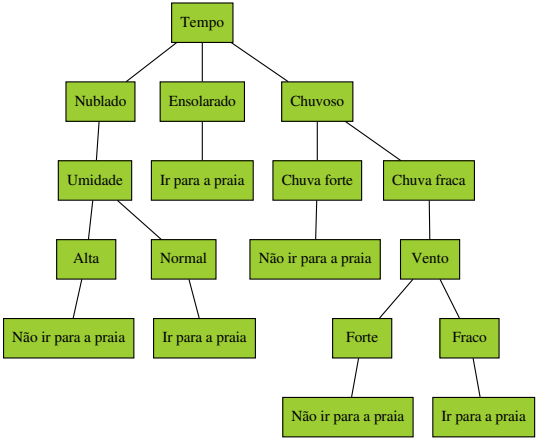
Aplicações

Aplicações

- Árvores são estruturas de dados adequadas para representar diversos tipos de informações
- Várias aplicações que podem utilizar árvores

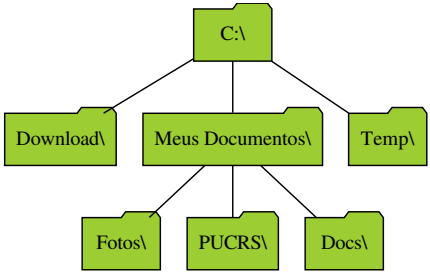
Árvore de decisão

- Exemplo: Ir ou não ir para praia?



Representação de estruturas/informações hierárquicas

- Árvore genealógica
- Organização de livros e documentos
- Organização hierárquica de cargos de uma empresa
- Sistemas de arquivos



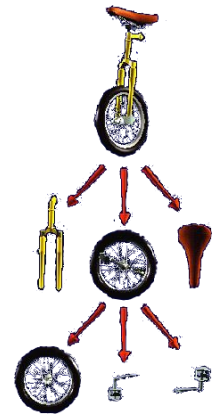
Representação de estruturas/informações hierárquicas

- Arquivos HTML e XML

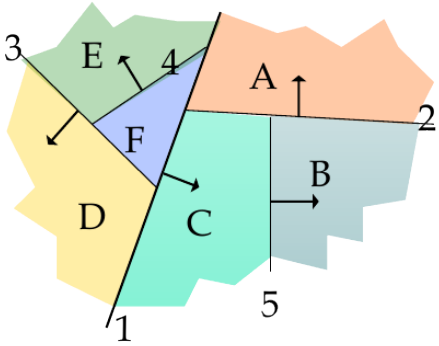
```
<?xml version="1.0"?>
<Company>
  <Employee>
    <FirstName>Maria</FirstName>
    <LastName>Silva</LastName>
    <PhoneNumber>(51)98986767</PhoneNumber>
    <Email>maria.silva@gmail.com</Email>
    <Address>
      <Street>Rua dos Andradas 1586/202</Street>
      <City>Porto Alegre</City>
      <State>RS</State>
      <Zip>90021-212</Zip>
    </Address>
  </Employee>
</Company>
```

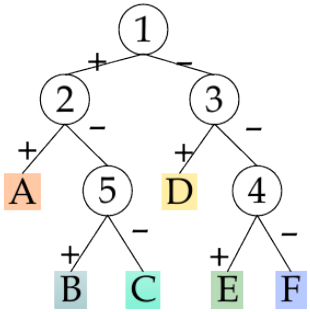
Computação Gráfica

- Grafo de cena



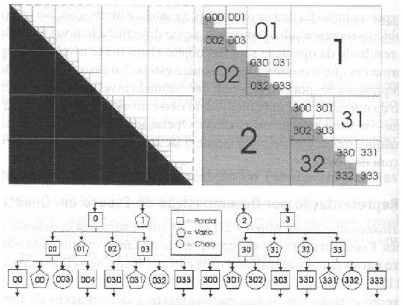
- Algoritmos para remoção de superfícies escondidas (árvore *Binary Space-Partitioning*)

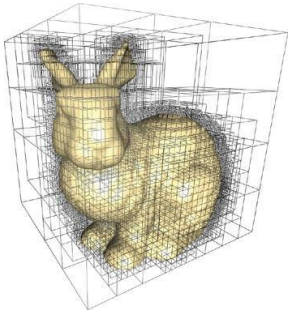




Computação Gráfica

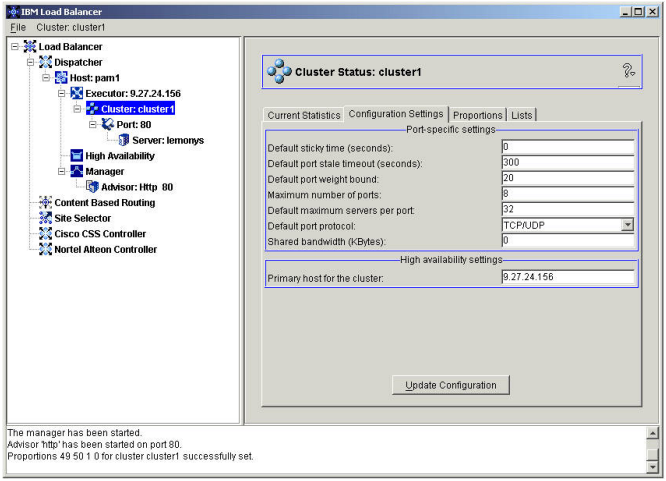
- Representação de objetos (Quadtree e Octree), etc.

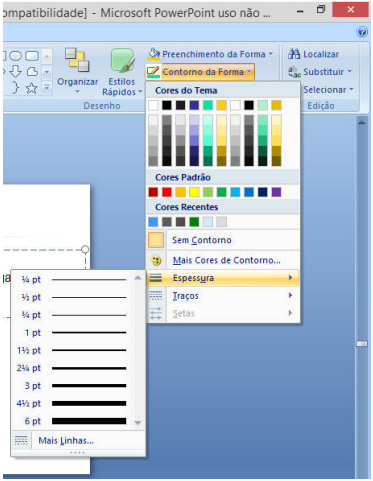




Eliminatórias de Campeonatos

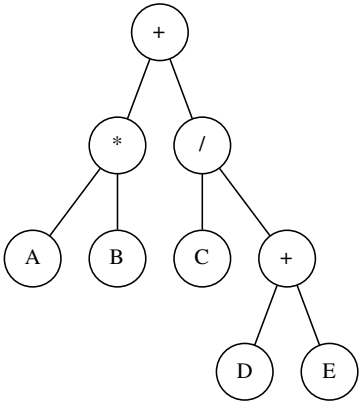
Interfaces Gráficas com o Usuário



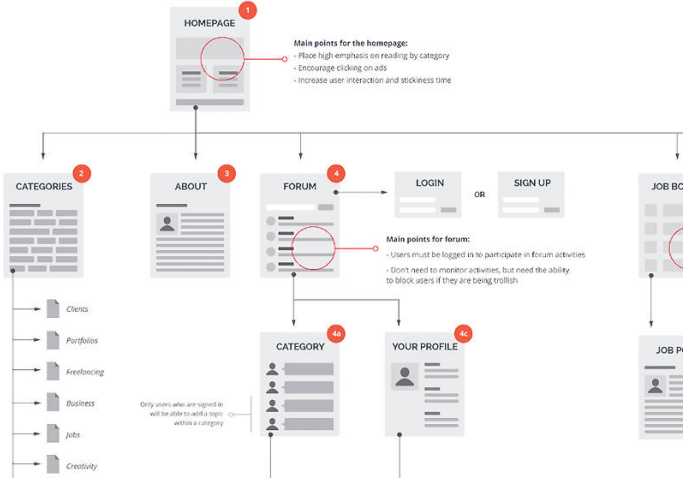


Expressões Aritméticas

- Pode-se usar árvores para representar e avaliar expressões aritméticas
- Exemplo: `A * B + C / ( D + E )`



Organização das Páginas de um *Site*



Fonte: https://dribbble.com/shots/1198252-Sitemap-For-Student-Guide

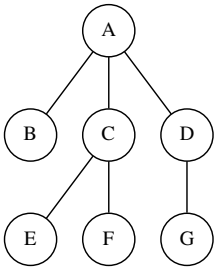
Representação na Memória

Representação na Memória

- Da mesma forma que as estruturas de dados lineares, podemos alocar as árvores de duas maneiras
  - Por contiguidade
  - Por encadeamento

Representação por Contiguidade

- A árvore é armazenada em um arranjo
- Cada posição por arranjo pode, por exemplo, conter, além da informação do nodo, referências aos nodos filhos



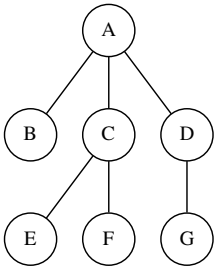
índice	conteúdo	filho1	filho2	filho3
0	A	1	2	3
1	B	-1	-1	-1
2	C	4	5	-1
3	D	6	-1	-1
4	E	-1	-1	-1
5	F	-1	-1	-1
6	G	-1	-1	-1

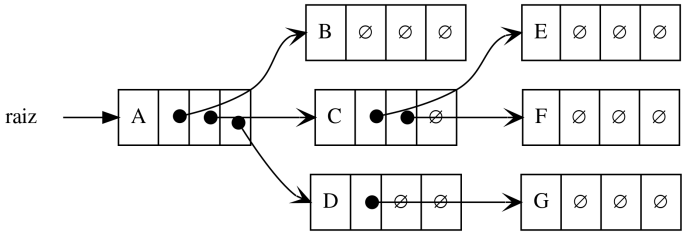
Representação por Contiguidade

- Vantagem:
  - Forma de armazenar árvores em arquivos
- Desvantagem:
  - Quantidade de processamento para inserção, remoção ou mesmo localização de um nodo

Representação por Encadeamento

- Forma **mais usual**
- Facilita as operações de inserção, remoção e pesquisa na árvore
- Cada nodo conterá, além da informação, as referências das suas subárvores

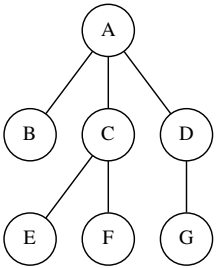




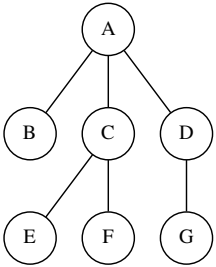
Representação por Encadeamento

- No caso de árvores "genéricas", cada nodo pode ter uma quantidade de subárvores diferentes
- Torna-se necessário:
  - Limitar, ou seja, determinar o número máximo de subárvores que cada nodo deve conter
  - Ou ter uma lista de subárvores
- Isso é necessário, pois os nodos de uma mesma árvore são todos do mesmo tipo

Exemplo



Exemplo



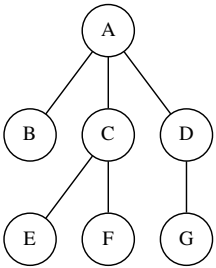

```
#include <iostream>

using namespace std;

struct Node {
  char info;  Node *child1, *child2, *child3;
  Node(char i, Node *c1 = nullptr, Node *c2 = nullptr, Node *c3 = nullptr) {
    info = i;  child1 = c1;  child2 = c2;  child3 = c3;
    cout << "+ Node(" << info << ") criado..." << endl;
  }
  ~Node() { cout << "- Node(" << info << ") destruido..." << endl; }
};

int main() {
  Node *b    = new Node('B'),        *e = new Node('E'),
       *f    = new Node('F'),        *g = new Node('G');    // Cria folhas
  Node *c    = new Node('C',e,f),    *d = new Node('D',g);  // Cria intermediarios
  Node *root = new Node('A',b,c,d);                         // Cria raiz

  delete b;  delete e;  delete f;  delete g;  // Desaloca folhas
  delete c;  delete d;                        // Desaloca intermediarios
  delete root;                                // Desaloca raiz

  return 0;
}
```

GraphViz

- Graphviz (abreviação de *Graph Visualization Software*) é uma ferramenta de código-fonte aberto para desenhar grafos (formados por nodos e arestas) especificados a partir de uma linguagem de escrite chamada DOT (que usa a extensão "gv")
- GraphViz também provê bibliotecas para que aplicações possam usar suas facilidades
- É um *software* livre licenciado através da Licença Pública Eclipse
- Página: `https://graphviz.org/`
- Há várias opções para gerar imagens a partir dos arquivos no formato DOT
  - `https://dreampuf.github.io/GraphvizOnline/`

GraphViz

Grafo:



Versão 1:

```
graph "Árvore A" {
  node [shape=circle]
  A -- { B C D }
  C -- { E F }
  D -- G
}
```

Versão 2:

```
graph "Árvore A (Versão 2)" {
  node [shape=circle]
  A -- B
  A -- C
  A -- D
  C -- E
  C -- F
  D -- G
}
```

Exercícios

Exercício 3

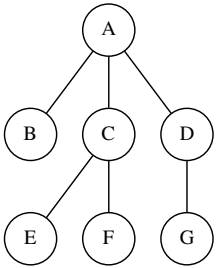
3. Considere a árvore e o programa que cria esta árvore correspondente, usando estruturas encadeadas em C++, ambos apresentados na próxima página. Observe que o nodo declarado (`struct Node`) armazena um caractere (`char`) e suporta até 3 subárvores (ou seja, cada nodo pode ter 3 nodos filhos). Para este programa, implemente as seguintes funções:
   - `void clean(Node *root)`: que recebe o endereço de um nodo e faz a desalocação de todos os nodos da árvore a partir do nodo recebido (`root`) – esta função deve ser implementada de forma recursiva;
   - `string strGraphViz(Node *root)`: que recebe o endereço de um nodo e gera uma cadeia de caracteres (`string`) com representação da árvore no formato DOT, usado pelo GraphViz – esta função deve: imprimir a parte inicial do formato DOT; chamar um outro método recursivo (por exemplo, `string strNode(Node *node)`) para gerar a lista de arestas entre os nodos; imprimir a parte final do formato DOT.

   Rode o seu programa, por exemplo, com:

```
./exercicio03 > exercicio03.gv
```

   Use o site `https://dreampuf.github.io/GraphvizOnline/` para verificar se o arquivo `exercicio03.gv` foi corretamente gerado.

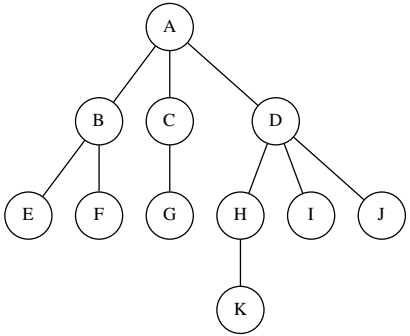
Exercício 3




```
#include <iostream>
#include <sstream>

using namespace std;

struct Node {
  char info;  Node *child1, *child2, *child3;
  Node(char i, Node *c1 = nullptr, Node *c2 = nullptr, Node *c3 = nullptr) {
    info = i;  child1 = c1;  child2 = c2;  child3 = c3;
    cerr << "+ Node("<< info << ") criado..." << endl;
  }
  ~Node() { cerr << "- Node("<< info << ") destruido..." << endl; }
};

string strGraphViz(Node *root) {
  stringstream ss;  /*  IMPLEMENTE AQUI */  return ss.str();
}

void clean(Node *subtree) { /* IMPLEMENTE AQUI */ }

int main() {
  Node *b    = new Node('B'),        *e = new Node('E'),
       *f    = new Node('F'),        *g = new Node('G');    // Folhas
  Node *c    = new Node('C',e,f),    *d = new Node('D',g);  // Intermediarios
  Node *root = new Node('A',b,c,d);                         // Raiz
  cout << strGraphViz(root);
  clean(root);
  return 0;
}
```

Exercício 4

4. Considere a árvore abaixo e, usando como modelo o código do exercício 3 (resolvido), implemente um programa em C++ que crie esta árvore em memória, que a imprima no formato DOT e que desaloque corretamente todos os nodos da árvore. Use o site `https://dreampuf.github.io/GraphvizOnline/` para verificar se o arquivo DOT foi corretamente gerado.



TAD para Árvore

TAD para Árvore

- Um TAD para árvore:
  - Armazena elementos em nodos
  - O posicionamento dos nodos satisfaz as relações pai-filho
  - Operações consideram as propriedades desta estrutura de dados hierárquica

TAD para Árvore

- Uma árvore deve disponibilizar métodos de acesso que retornam e aceitam posições:
  - `root()`: retorna a raiz da árvore
  - `parent(v)`: retorna o nodo pai de `v`, ocorrendo um erro se for a raiz
  - `children(v)`: retorna os filhos do nodo `v`

TAD para Árvore

- Métodos de consulta:
  - `isInternal(v)`: testa se um nodo `v` é interno e retorna `true` ou `false`
  - `isExternal(v)`: testa se um nodo `v` é externo e retorna `true` ou `false`
  - `isRoot(v)`: testa se um nodo `v` é raiz e retorna `true` ou `false`

TAD para Árvore

- Métodos "genéricos" (não estão necessariamente relacionados com sua estrutura):
  - `size()`: retorna o número de nodos na árvore
  - `isEmpty()`: testa se a árvore tem ou não tem algum nodo
  - `iterator()`: retorna um iterator de todos os elementos armazenados nos nodos da árvore
  - `positions()`: retorna uma coleção com todos os nodos da árvore
  - `replaceElement(v,e)`: retorna o elemento armazenado em `v` e o substitui por `e`

Observação

Sobre a Solução dos Exercícios 3 e 4

- Os exercícios 3 e 4 usam o método recursivo `clean()` para desalocar árvores

```
void clean(Node *subtree) {
  if ( subtree->child1 != nullptr ) clean(subtree->child1);
  if ( subtree->child2 != nullptr ) clean(subtree->child2);
  if ( subtree->child3 != nullptr ) clean(subtree->child3);
  delete subtree;
}
```

- Considerando-se que `root` é um `Node *` e é a raiz da árvore, a sua desalocação seria então feita usando-se `clean(root);`
- Uma alternativa mais interessante poderia ser usar o método destrutor para isso:

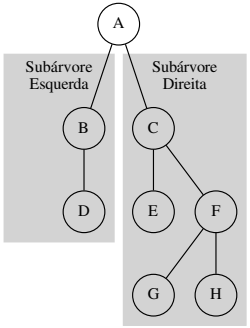
```
~Node() {
  if ( child1 != nullptr ) delete child1;
  if ( child2 != nullptr ) delete child2;
  if ( child3 != nullptr ) delete child3;
  cerr << "- Node(" << info << ") destruido..." << endl;
}
```

- Neste caso a árvore seria desalocada usando-se `delete root;`

Árvore Binária

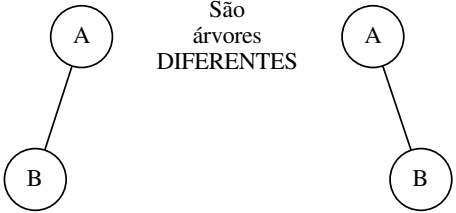
Árvore Binária

- Uma árvore binária é aquela na qual o grau de cada nodo é menor ou igual a 2
- As subárvores de um nodo são chamadas de
  - Subárvore da esquerda
  - Subárvore da direita



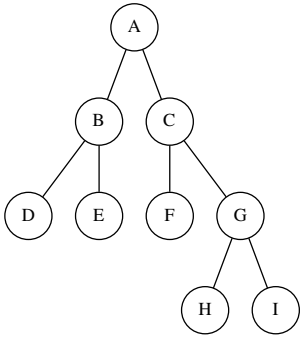
Árvore Binária

- Se o grau de um nodo é 1, deve-se especificar se a sua subárvore é a da esquerda ou a da direita



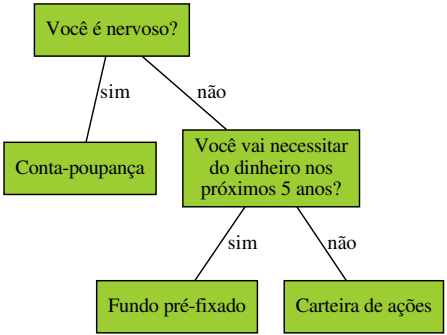
Árvore Binária Própria

- Uma árvore binária é **própria** se cada um de seus nodos internos tiver dois filhos
- Todos os nodos, com exceção dos nodos-folha, têm exatamente dois filhos



Árvores de Decisão

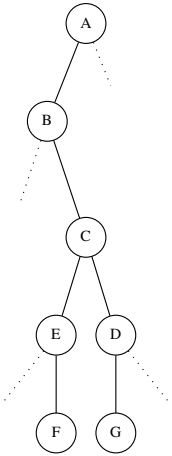
- Classe importante de árvores binárias
- Quando se quer representar as diferentes saídas que podem resultar a partir das respostas a um conjunto de perguntas do tipo sim ou não
- Cada nodo interno é associado com uma questão



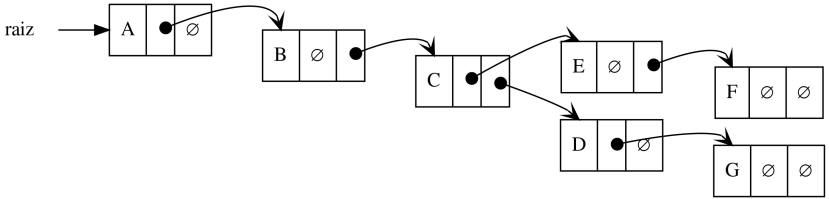
Árvore Binária

- Os nodos de uma árvore binária terão no mínimo:
  - A informação
  - Referência para o nodo da esquerda
  - Referência para o nodo da direita
- Também se pode usar referência para o nodo pai (o que facilita a "navegação")
- Árvores binárias são fáceis de implementar, pois cada nodo tem no máximo 2 filhos

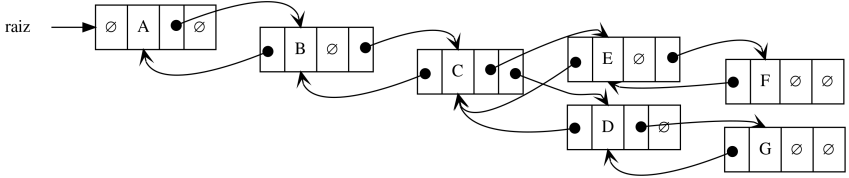
Árvore Binária



SEM referência para o nodo-pai:

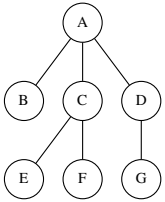


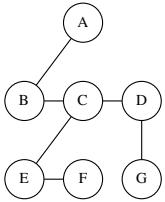
COM referência para o nodo-pai:

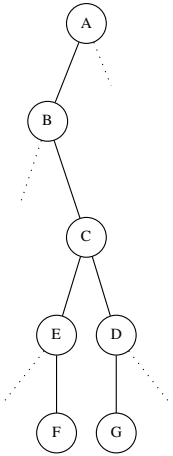


Árvore Binária

- Uma árvore qualquer pode ser transformada em árvore binária
- Passos para a transformação:
  1. Ligar os nodos irmãos
  2. Desligar a ligação do nodo pai com os filhos, exceto o primeiro filho
- Nodos de mesmo nível (irmãos) são encadeados à direita e nodos com nível maior (filhos) são encadeados à esquerda (iniciando pelo primeiro filho)



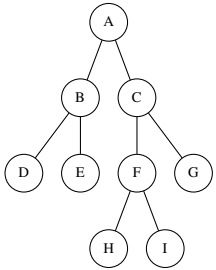




Exercício

Exercício 5

5. O código apresentado nas duas páginas seguintes (`exercicio05.cpp`), define um nodo (`struct Node`) para uma árvore binária. Este nodo armazena: a informação (`info`, um único caractere), uma referência para o nodo pai (`parent`) e referências para as subárvores da esquerda (`left`) e direita (`right`). Além destas informações, o nodo contém um construtor e um destrutor. Juntamente com a definição do nodo são fornecidas funções para mostrar a árvore no formato GraphViz e uma função `main()`, que cria a árvore ao lado (usando o código fornecido) e realiza alguns testes com as funções que você deverá implementar.



As funções que você deverá implementar são as seguintes:

- `int degree(Node *subtree)`: retorna o número de filhos (grau) de determinado nodo da árvore (parâmetro `subtree`);
- `int depth(Node *subtree)`: retorna o nível de determinado nodo (parâmetro `subtree`) dentro da árvore (o que pode ser feito navegando pela árvore usando as referências para o nodos-pai, e contando o número de nodos até alcançar a raiz);
- `int size(Node *subtree)`: retorna o número de nodos que há na árvore a partir de determinado nodo (parâmetro `subtree`) – deve ser implementado como uma função recursiva;
- `int treeDepth(Node *subtree)`: retorna o altura da árvore/subárvore a partir de um nodo específico (parâmetro `subtree`) – deve ser implementado como uma função recursiva.

Observação: os códigos usados neste exercício foram adaptados das soluções dos exercícios 3 e 4. As soluções, por outro lado, precisam ser desenvolvidas.

Exercício 5 (continuação)

```
#include <iostream>
#include <sstream>

using namespace std;

struct Node {
  char info;  Node *parent;  Node *left, *right;
  Node(char i, Node *l = nullptr, Node *r = nullptr) {
    info = i;  left = l;  right = r;  parent = nullptr;
    if ( left != nullptr ) left->parent = this;
    if ( right != nullptr ) right->parent = this;
    #ifdef DEBUG
    cerr << "+ Node("<< info << ") criado..." << endl;
    #endif
  }
  ~Node() {
    if ( left != nullptr ) delete left;
    if ( right != nullptr ) delete right;
    #ifdef DEBUG
    cerr << "- Node("<< info << ") destruido..." << endl;
    #endif
  }
};

string strNode(Node *Node) {
  stringstream ss;
  if ( Node->left != nullptr ) ss << "  " << Node->info << " -- " << Node->left->info << endl << strNode(Node->left);
  if ( Node->right != nullptr ) ss << "  " << Node->info << " -- " << Node->right->info << endl << strNode(Node->right);
  return ss.str();
}

string strGraphViz(Node *root) {
  stringstream ss;
  ss << "graph \"Árvore Binária\" {" << endl << "  Node [shape=circle]" << endl << strNode(root) << "}" << endl;
  return ss.str();
}
```

Exercício 5 (continuação)

```
int degree(Node *subtree)     { return 0; }  // SUBSTITUIR/IMPLEMENTAR
int depth(Node *subtree)      { return 0; }  // SUBSTITUIR/IMPLEMENTAR
int size(Node *subtree)       { return 0; }  // SUBSTITUIR/IMPLEMENTAR
int treeDepth(Node *subtree) { return 0; }  // SUBSTITUIR/IMPLEMENTAR

int main() {
  Node *d = new Node('D');
  Node *b = new Node('B',d,new Node('E'));
  Node *f = new Node('F',new Node('H'),new Node('I'));
  Node *c = new Node('C',f,new Node('G'));
  Node *root = new Node('A',b,c);
  cout << strGraphViz(root);
  cout << "degree(root):␣␣␣␣" << degree(root) << "␣[2]" << endl;
  cout << "degree(b):␣␣␣␣␣␣␣" << degree(b) << "␣[2]" << endl;
  cout << "degree(d):␣␣␣␣␣␣␣" << degree(d) << "␣[0]" << endl;
  cout << "depth(root):␣␣␣␣␣" << depth(root) << "␣[0]" << endl;
  cout << "depth(b):␣␣␣␣␣␣␣" << depth(b) << "␣[1]" << endl;
  cout << "depth(f):␣␣␣␣␣␣␣" << depth(f) << "␣[2]" << endl;
  cout << "size(root):␣␣␣␣␣␣" << size(root) << "␣[9]" << endl;
  cout << "size(b):␣␣␣␣␣␣␣␣" << size(b) << "␣[3]" << endl;
  cout << "size(c):␣␣␣␣␣␣␣␣" << size(c) << "␣[5]" << endl;
  cout << "treeDepth(root):␣" << treeDepth(root) << "␣[3]" << endl;
  cout << "treeDepth(b):␣␣␣␣" << treeDepth(b) << "␣[1]" << endl;
  cout << "treeDepth(c):␣␣␣␣" << treeDepth(c) << "␣[2]" << endl;
  delete root;
  return 0;
}
```

Observações

Sobre a Implementação do Construtor do Exercício 5

- Observe o código que foi usado no construtor da `struct Node` do exercício 5:

```
Node(char i, Node *l = nullptr, Node *r = nullptr) {
  info = i;  left = l;  right = r;  parent = nullptr;
  if ( left != nullptr ) left->parent = this;
  if ( right != nullptr ) right->parent = this;
}
```

- Quando um nodo é criado, o construtor recebe as subárvores que serão inseridas como seus "filhos"
- Como em cada nodo há uma referência para o nodo pai, este campo precisa ser atualizado nos nodos/subárvores filhos, o que é feito nas duas últimas linhas do construtor
- Para referenciar que os campos pai (`parent`) dos filhos (`left` e `right`) apontarão para o nodo que está sendo inicializado usa-se a autorreferência `this`

Sobre a Solução do Exercício 5

- A solução do exercício 5 apresenta uma solução para o método `size()`, a princípio, mais fácil de entender:

```
int size(Node *subtree) {
  if (subtree == nullptr) return 0; // Somente pode ocorrer na primeira chamada,
  int res = 1;                      // ou seja, se a árvore estiver vazia
  if ( subtree->left != nullptr ) res += size(subtree->left);
  if ( subtree->right != nullptr ) res += size(subtree->right);
  return res;
}
```

- Veja uma solução alternativa e equivalente abaixo:

```
int size(Node *subtree) {
  if (subtree == nullptr) return 0;
  return 1 + size(subtree->left) + size(subtree->right);
}
```

- Analise as diferenças!

Árvores Genéricas

Definição

- Formalmente uma árvore **T** é definida como um conjunto de **nodos**, que armazenam elementos em relacionamentos **pai-filho** com as seguintes propriedades:
  - Se **T** não é vazia, ela tem um nodo especial chamado de **raiz** de **T** que não tem pai
  - Cada nodo **v** de **T** diferente da raiz tem um único nodo **pai**, **w**; todo nodo com pai **w** é **filho** de **w**

Representações

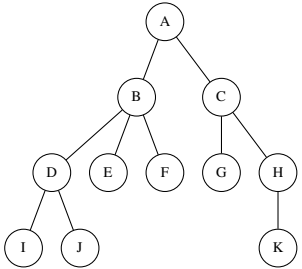
- Textual

```
T={A,{B,{D,{I},{J}},{E},{F}},{C,{G},{H,{K}}}}
```

- GraphViz

```
graph arvore3 {
        node [shape=circle]
        A -- { B C }
        B -- { D E F }
        D -- { I J }
        C -- { G H }
        H -- { K }
}
```

- Visual/Gráfica



Operações

- Inserir um nodo raiz
- Obter o valor da raiz (da árvore e de qualquer subárvore)
- Esvaziar uma árvore
- Obter uma subárvore de um determinado nodo
- Anexar uma subárvore em um determinado nodo
- Contar o número de nodos da árvore
- Calcular o grau e o nível de um determinado nodo
- Calcular a altura de uma árvore
- Percorrer a árvore
- etc.

TAD para Árvores Genéricas

- Forma mais usual de implementação:
  - Estruturas encadeadas (alocação dinâmica)
  - Cada nodo contém:
    - A informação
    - Uma referência para o nodo pai
    - Uma lista de referências para os nodos filhos (subárvores)
- É possível declarar um TAD para:
  - O **nodo** e deixar o gerenciamento da árvore a cargo da aplicação (é necessário fornecer chamadas para acrescentar nodos filho em determinado nodo, e também para remover nodos filhos)
  - A **estrutura de dados**, que terá uma classe interna para o nodo, determinando automaticamente onde cada informação será inserida (chamadas para acrescentar e remover algum dado NÃO precisam especificar onde a informação será inserida; nodos e referências que formam a árvore permanecem encapsulados)

Lista de Referências para os Nodos Filhos

- Como um nodo pode ter número variável de filhos, é interessante trabalhar com uma lista dinamicamente expansível
- Para implemenar esta lista dinamicamente expansível é possível usar o *container* `vector` da *Standard Template Library* da linguagem C++
- Exemplo de uso de `vector`:

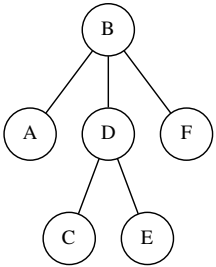
```
#include <vector>

// ...

vector<int> v;   // Cria um vetor de inteiros vazio
v.push_back(10); // Adiciona 10 no vetor -> v = { 10 }
v.push_back(20); // Adiciona 20 no vetor -> v = { 10, 20 }
v.push_back(30); // Adiciona 30 no vetor -> v = { 10, 20, 30 }
v.push_back(40); // Adiciona 40 no vetor -> v = { 10, 20, 30, 40 }
v.erase( v.begin() + 1 );  // Remove o elemento de índice 1 do vetor -> v = { 10, 30, 40 }
v.pop_back();              // Remove o último elemento do vetor -> v = { 10, 30 }
for (int i=0; i<v.size(); ++i) // mostra o vetor
    cout << v[i] << endl;      // v é usado como se fosse um arranjo
```

Declaração de um TAD de Árvore Genérica

```
#include <vector>
#include <string>

using namespace std;

#ifndef _NODECHARTREE_HPP
#define _NODECHARTREE_HPP
class NodeCharTree {
private:
  char info;
  NodeCharTree *parent;
  vector<NodeCharTree *> childs;
  static string strGraphVizNode(NodeCharTree const *node);
  static string strTreeNode(NodeCharTree const *node,string s);
public:
  NodeCharTree(char i);
  ~NodeCharTree();
  char getInfo() const;
  NodeCharTree *getParent() const;
  NodeCharTree *getChild(int index) const;
  bool isRoot();
  bool isInternal();
  bool isExternal();
  int degree();
  int depth();
  int size();
  void addSubtree(NodeCharTree *subtree);
  bool removeSubtree(NodeCharTree *subtree);
  NodeCharTree *remove(NodeCharTree *child);
  bool contains(char i);
  NodeCharTree *find(char i);
  string strGraphViz() const;
  string str() const;
};
#endif
```

Representações

...



Créditos

Créditos

- Estas lâminas foram adaptadas do material desenvolvido pela professora Isabel Harb Manssour.

Soluções

Exercício 1

Qual é a altura da árvore?
    4
Quais são as folhas da árvore?
    H, I, E, F, J, N, L, M
Quais são os nodos irmãos?
    B e C; D, E e F; H e I; J, K, L e M
Os nodos D e G são pais de que nodos?
    D é pai de H e I; G é pai de J, K, L e M
Qual é o grau do nodo B?
    3
Qual é o grau do nodo G?
    4
Quais são os níveis dos nodos B, G, H, L e N?
    B, nível 1; G, nível 2; H, nível 3; L, nível 3; N, nível 4

Exercício 2

Qual é a altura da árvore?
    3
Quais são as folhas da árvore?
    E, F, G, K, I, J
Quais são os nodos irmãos?
    B, C e D; E e F; H, I e J
Quais são os nodos internos?
    B, C, D e H
Qual é o grau do nodo C?
    1
Qual é o grau do nodo D?
    3
Quais são os níveis dos nodos C, H e K?
    C, nível 1; H, nível 2; K, nível 3

Exercício 3: exercicio03-resp.cpp

```
string strNode(Node *node) {
  stringstream ss;
  if ( node->child1 != nullptr ) ss << "  " << node->info << " -- " << node->child1->info << endl << strNode(node->child1);
  if ( node->child2 != nullptr ) ss << "  " << node->info << " -- " << node->child2->info << endl << strNode(node->child2);
  if ( node->child3 != nullptr ) ss << "  " << node->info << " -- " << node->child3->info << endl << strNode(node->child3);
  return ss.str();
}

string strGraphViz(Node *root) {
  stringstream ss;
  ss << "graph Arvore {" << endl << "  node [shape=circle]" << endl << strNode(root) << "}" << endl;
  return ss.str();
}

void clean(Node *subtree) {
  if ( subtree->child1 != nullptr ) clean(subtree->child1);
  if ( subtree->child2 != nullptr ) clean(subtree->child2);
  if ( subtree->child3 != nullptr ) clean(subtree->child3);
  delete subtree;
}
```

Exercício 4: exercicio04.cpp

```
#include <iostream>
#include <sstream>

using namespace std;

struct Node {
  char info;  Node *child1, *child2, *child3;
  Node(char i, Node *c1 = nullptr, Node *c2 = nullptr, Node *c3 = nullptr) {
    info = i;   child1 = c1;  child2 = c2;  child3 = c3;
    cerr << "+ Node("<< info << ") criado..." << endl;
  }
  ~Node() { cerr << "- Node("<< info << ") destruido..." << endl; }
};

string strNode(Node *node) {
  stringstream ss;
  if ( node->child1 != nullptr ) ss << "  " << node->info << " -- " << node->child1->info << endl << strNode(node->child1);
  if ( node->child2 != nullptr ) ss << "  " << node->info << " -- " << node->child2->info << endl << strNode(node->child2);
  if ( node->child3 != nullptr ) ss << "  " << node->info << " -- " << node->child3->info << endl << strNode(node->child3);
  return ss.str();
}

string strGraphViz(Node *root) {
  stringstream ss;
  ss << "graph Arvore {" << endl << "  node [shape=circle]" << endl << strNode(root) << "}" << endl;
  return ss.str();
}

void clean(Node *subtree) {
  if ( subtree->child1 != nullptr ) clean(subtree->child1);
  if ( subtree->child2 != nullptr ) clean(subtree->child2);
  if ( subtree->child3 != nullptr ) clean(subtree->child3);
  delete subtree;
}
```

Exercício 4: exercicio04.cpp (continuação)

```
int main() {
  Node     *e = new Node('E'),       *f = new Node('F'),
           *g = new Node('G'),       *k = new Node('K'),
           *i = new Node('I'),       *j = new Node('J'),
           *b = new Node('B',e,f),   *c = new Node('C',g),
           *h = new Node('H',k),     *d = new Node('D',h,i,j),
           *root = new Node('A',b,c,d);
  cout << strGraphViz(root);
  clean(root);
  return 0;
}
```

Exercício 5: exercicio05-resp.cpp

```
int degree(Node *subtree) {
  int res = 0;
  if ( subtree->left != nullptr ) ++res;
  if ( subtree->right != nullptr ) ++res;
  return res;
}

int depth(Node *subtree) {
  int res = 0;
  Node *aux = subtree->parent;
  while (aux != nullptr) {
     ++res;
     aux = aux->parent;
  }
  return res;
}

int size(Node *subtree) {
  if (subtree == nullptr) return 0; // Somente pode ocorrer na primeira chamada,
  int res = 1;                      // ou seja, se a árvore estiver vazia
  if ( subtree->left != nullptr ) res += size(subtree->left);
  if ( subtree->right != nullptr ) res += size(subtree->right);
  return res;
}

int treeDepth(Node *subtree) {
  if (subtree == nullptr) return -1;     // Somente pode ocorrer se a árvore estiver vazia
  int l = (subtree->left == nullptr)? 0 : (1 + treeDepth(subtree->left));
  int r = (subtree->right == nullptr)? 0 : (1 + treeDepth(subtree->right));
  return (l > r)?l:r;
}
```