

# ALGORITMOS APROXIMATIVOS

DCE529 - Algoritmos e Estruturas de Dados III

Atualizado em: 27 de julho de 2022

Iago Carvalho

Departamento de Ciência da Computação



Um algoritmo aproximativo é uma heurística "diferente"

Ele **garante** uma boa solução

- É possível ter uma análise formal da qualidade das soluções geradas através dele

Como qualquer heurística, algoritmos aproximativos são rápidos

- Tempo polinomial

É possível ter, ao menos, 5 diferentes medidas de aproximação

1. Aproximação absoluta
2. Fator de aproximação
3. Esquemas de aproximação
4. Fator de aproximação assintótico
5. Fator de aproximação probabilístico

# APROXIMAÇÃO ABSOLUTA

Dado um algoritmo aproximativo **A** e uma instância qualquer **I**

- $OPT(I)$  é o valor da solução ótima
- $A(I)$  é o valor da solução gerada pelo algoritmo  $A$

Uma aproximação absoluta com fator  $k$  é tal que

$$|A(I) - OPT(I)| \leq k, \quad \forall I$$

# COLORAÇÃO DE VÉRTICES EM UM GRAFO PLANAR

**Grafo planar:** um grafo que pode ser desenhado em um plano de forma que nunca vão existir duas arestas se cruzando

**Problema da coloração de vértices:** Atribuir uma cor a cada vértice de tal forma que vértices vizinhos sempre tenham cores diferentes

- NP-Completo

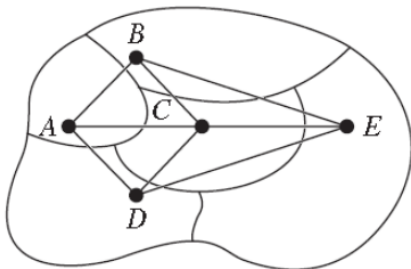
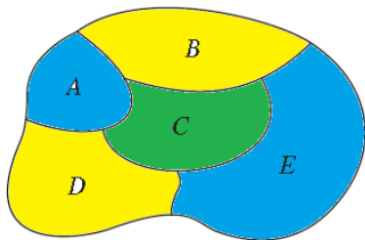
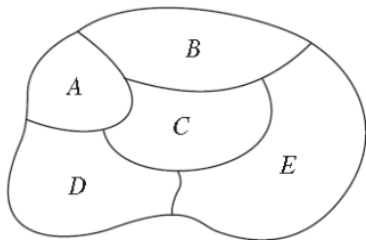
**Coloração de vértices de um grafo planar:** Sempre é possível colorir os vértices de um grafo planar com 4 ou menos cores

- Aplicações: Coloração de mapas

Existe um algoritmo polinomial de 1-aproximação absoluta

- Garante a coloração de qualquer grafo planar com 5 cores

# COLORAÇÃO DE VÉRTICES EM UM GRAFO PLANAR



# FATOR DE APROXIMAÇÃO

Dado um algoritmo aproximativo **A** e uma instância qualquer **I**

- $OPT(I)$  é o valor da solução ótima
- $A(I)$  é o valor da solução gerada pelo algoritmo  $A$

Um fator de aproximação  $\alpha$  é tal que

$$A(I) \leq \alpha OPT(I), \quad \forall I \quad (\text{minimização})$$

$$A(I) \geq \alpha OPT(I), \quad \forall I \quad (\text{maximização})$$

**Definição do problema:** Encontrar um ciclo em um grafo de custo mínimo

- Ciclo passando por todos os vértices do grafo

**Algoritmo 2-aproximativo:** Baseado no algoritmo de Prim

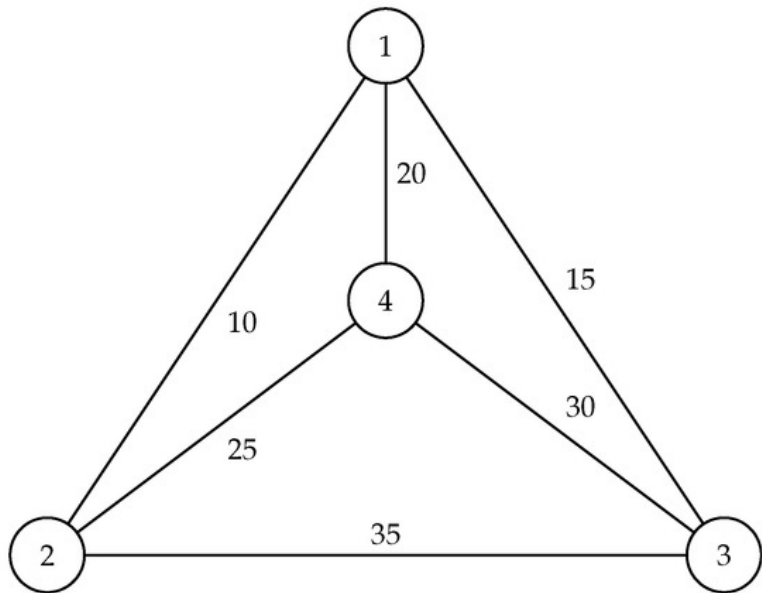
1. Construa uma AGM utilizando o algoritmo de Prim a partir do vértice  $a$  qualquer
2. Faça o caminho na árvore em pre-ordem
3. Adicione  $a$  novamente ao fim deste caminho

Caminho pré-ordem

1. Visitar a raiz
2. Caminhar na subárvore à esquerda, seguindo este caminho
3. Caminhar na subárvore à direita, seguindo este caminho



## CAIXEIRO VIAJANTE



# ESQUEMAS DE APROXIMAÇÃO

Fator de aproximação está inbutido no tempo de execução do algoritmo

- Quanto maior a complexidade do algoritmo, melhor é a garantia da solução
- Controlado por um fator  $\epsilon > 0$

Esquema de aproximação de tempo polinomial (PTAS)

Esquema de aproximação de tempo polinomial completo (FPTAS)

- Complexidade é limitada em  $\frac{1}{\epsilon}$

$(1 + \epsilon)$ -aproximação para um problema de minimização

$(1 - \epsilon)$ -aproximação para um problema de maximização

## PTAS

- $O(n^{\frac{1}{\epsilon}})$
- $O(n^2 5^{\frac{1}{\epsilon}})$
- $O(\frac{1}{\epsilon} n^3)$

## FPTAS

- $O(\frac{1}{\epsilon} n^2)$
- $O(\frac{1}{\epsilon^3} n^5)$

# FATOR DE APROXIMAÇÃO ASSINTÓTICO

Dado um algoritmo aproximativo **A** e uma instância qualquer **I**

- $OPT(I)$  é o valor da solução ótima
- $A(I)$  é o valor da solução gerada pelo algoritmo  $A$

Um fator de aproximação assintótico  $\alpha$  é tal que

$$A(I) \leq \alpha OPT(I) + \beta, \quad \forall I \quad (\text{minimização})$$

$$A(I) \geq \alpha OPT(I) + \beta, \quad \forall I \quad (\text{maximização})$$

para alguma constante  $\beta > 0$

# FATOR DE APROXIMAÇÃO PROBABILÍSTICO

Imagine uma função  $rand(0,1)$

- Ela retorna 1 com probabilidade  $\rho$
- Ela retorna 0 com probabilidade  $1 - \rho$

Um algoritmo probabilístico é aquele que faz uso desta função  $rand(0,1)$

Um algoritmo probabilístico é polinomial se

- O número de chamadas a função  $rand(0,1)$  é polinomial
- A complexidade do algoritmo também é polinomial

# FATOR DE APROXIMAÇÃO PROBABILÍSTICO

Dado um algoritmo aproximativo **A** e uma instância qualquer **I**

- $OPT(I)$  é o valor da solução ótima
- $X_I$  é uma variável aleatória que representa o valor da solução ao aplicar o algoritmo  $A$  na instância  $I$

Um fator de aproximação probabilístico  $\alpha$  é tal que

$$\mathbf{E}[X_I] \leq \alpha OPT(I), \quad \forall I \quad (\text{minimização})$$

$$\mathbf{E}[X_I] \geq \alpha OPT(I), \quad \forall I \quad (\text{maximização})$$