FUNÇÕES DE RECORRÊNCIA E O TEOREMA MESTRE

DCE529 - Algoritmos e Estruturas de Dados III

Atualizado em: 29 de fevereiro de 2024

Iago Carvalho

Departamento de Ciência da Computação

Diversos algoritmos em computação são recursivos

- Sequência de fibonacci
- Algoritmos de programação dinâmica
- Fatorial
- ...

Como podemos calcular a complexidade computacional destes algoritmos?

Quando um algoritmo contém uma **chamadas recursivas**, seu tempo de execução pode freqüentemente ser descrito por uma equação de **recorrência**

Complexidade de um *loop* (for)

$$\sum_{i=0}^{n} f(n)$$

Complexidade de um algoritmo recursivo

$$T(n) = T(n-1) + 1$$

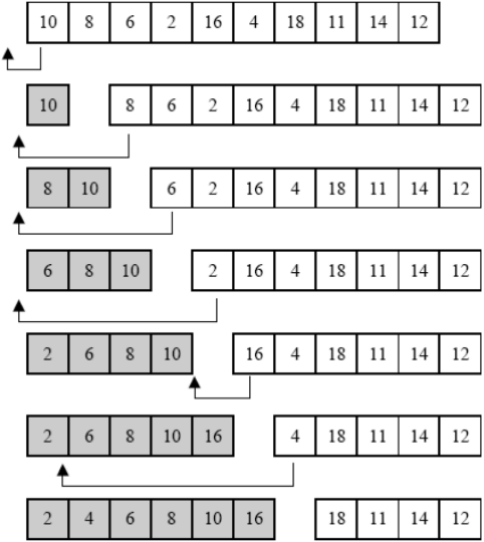
EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA

Uma recorrência é uma equação ou desigualdade que descreve uma função em termos de seu valor em entradas menores

$$T(n) = T(n-1) + 1$$

Para cada procedimento recursivo é associada uma função de complexidade **T(n)** desconhecida, onde n mede o tamanho dos argumentos do procedimento

ORDENAÇÃO POR INSERÇÃO



ORDENAÇÃO POR INSERÇÃO

Vamos considerar o pior caso deste algoritmo. Ou seja, o número sempre é inserido na última posição verificada

1. Faz uma comparação
2. Faz duas comparações
3. Faz três comparações
4. ...

Na inserção do n-ésimo número, ele poder fazer um total de n comparações

ORDENAÇÃO POR INSERÇÃO

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1)+1 \\
T(n-1) &= T(n-2)+2 \\
T(n-2) &= T(n-3)+3 \\
T(n-3) &= T(n-4)+4 \\
\ldots & \\
T(2) &= T(1)+n-2 \\
T(1) &= n-1
\end{aligned}
$$

ORDENAÇÃO POR INSERÇÃO

$$T(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-2) + (n-1)$$

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \left(\sum_{i=1}^{n} i \right) - n = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) - n$$

$$T(n) = \frac{n^2 + n}{2} - n = \frac{n^2 + n - 2n}{2}$$

$$T(n) = \frac{n^2 - n}{2}$$

$$T(n) = \frac{n^2 - n}{2} \in \Theta(n^2)$$

OUTRA EQUAÇÃO DE RECORRÊNCIA

Considere o pseudo-código abaixo

- O algoritmo inspeciona n elementos de um conjunto qualquer

De alguma forma, isso permite descartar $\frac{2}{3}$ dos elementos e fazer uma chamada recursiva sobre um terço do conjunto original

```
Algoritmo Pesquisa(vetor)
  if vetor.size() ≤ 1 then
    inspecione elemento;
  else
     inspecione cada elemento recebido (vetor);
     Pesquisa(vetor.subLista(1,(vetor.size()/3));
  end if
end.
```

OUTRA EQUAÇÃO DE RECORRÊNCIA

	Algoritmo Pesquisa(vetor)
$\Theta(1)$	*if* $vetor.size() \le 1$ then
$\Theta(1)$	*inspecione elemento*;
	else
$\Theta(n)$	inspecione cada elemento recebido (vetor);
Chamada recursiva	Pesquisa$(vetor.subLista(1,(vetor.size()/3)))$;
	end if
	end.

$$\text{Chamada recursiva} = T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

OUTRA EQUAÇÃO DE RECORRÊNCIA

$$T(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 1 \\ t\left(\frac{n}{3}\right) + n, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

OUTRA EQUAÇÃO DE RECORRÊNCIA

$$
\begin{array}{ccc}
T(n) & = & n + T(n/3) \\
T(n/3) & = & n/3 + T(n/3/3) \\
T(n/3/3) & = & n/3/3 + T(n/3/3/3) \\
T(n/3/3/3) & = & n/3/3/3 + T(n/3/3/3/3) \\
\ldots & & \\
T(n/3/3/3/\ldots/3) & = & n/3/3/3/\ldots/3 + T(n/3/3/3/\ldots/3/3) \\
T(1) & = & 1
\end{array}
$$

OUTRA EQUAÇÃO DE RECORRÊNCIA

$$
\begin{aligned}
T(n) &= n + \cancel{\mathrm{T(n/3)}} \\
\cancel{\mathrm{T(n/3)}} &= n/3 + \cancel{\mathrm{T(n/3/3)}} \\
\cancel{\mathrm{T(n/3/3)}} &= n/3/3 + \cancel{\mathrm{T(n/3/3/3)}} \\
\cancel{\mathrm{T(n/3/3/3)}} &= n/3/3/3 + \cancel{\mathrm{T(n/3/3/3/3)}} \\
\ldots \\
\cancel{\mathrm{T(n/3/3/3/\ldots/3)}} &= n/3/3/3/\ldots/3 + \cancel{\mathrm{T(n/3/3/3/\ldots/3/3)}} \\
\cancel{\mathrm{T(1)}} &= 1
\end{aligned}
$$

$$T(n) = n + n/3 + n/3/3 + n/3/3/3 + \ldots + n/3/3/3/\ldots/3 + 1$$

OUTRA EQUAÇÃO DE RECORRÊNCIA

$$T(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 1 \\ T\left(\frac{n}{3}\right) + n, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$T(n) = n + n/3 + n/3/3 + n/3/3/3 + \ldots + n/3/3/3/\ldots/3 + 1$$

$$T(n) = n \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{i} + 1$$

OUTRA EQUAÇÃO DE RECORRÊNCIA

Levando em consideração que

$$\sum_{i=1}^{n-1} x^i = \frac{1}{1-x},$$

temos que

$$T(n) = n\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^i + 1 = n\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) + 1 = \frac{3n}{2} + 1 = \Theta(n)$$

DIFÍCIL, NÉ?

TEOREMA MESTRE

O teorema mestre é um conjunto de regras para resolvermos equações de recorrência

Ele resolve equações de recorrência no formato

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n),$$

onde

- $a \geq 1$ e $b > 1$ são constantes
- $f(n)$ é uma função assintoticamente positiva

TEOREMA MESTRE

O teorema mestre possui 3 regras, a depender do formato da função $f(n)$

Caso 1: $f(n) = \mathcal{O}(n^{log_b a - \epsilon})$, com $\epsilon > 0$

Caso 2: $f(n) = \mathcal{O}(n^{log_b a})$

Caso 3: $f(n) = \Omega(n^{log_b a + \epsilon})$, com $\epsilon > 0$, desde que $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$ para alguma constante $c < 1$ e n suficientemente grande

TEOREMA MESTRE

Caso 1: $f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a - \epsilon})$, então $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$

Caso 2: $f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a})$, então $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \log n\right)$

Caso 3: $f(n) = \Omega(n^{log_b a + \epsilon})$, então $T(n) = \Theta\big(f(n)\big)$

TEOREMA MESTRE - EXEMPLOS

$$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

Neste caso, temos que $a = 9$, $b = 3$ e $f(n) = n$

Podemos aplicar o caso 1 do teorema mestre:

- $f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a - \epsilon})$, então $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$
- $\epsilon = 1$

Temos que $T(n) = \Theta(n^{log_b a}) = \Theta(n^2)$

$$T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + 1$$

Neste caso, temos que $a = 1, b = \frac{3}{2}$ e $f(n) = 1$

Podemos aplicar o caso 2 do teorema mestre:

- $f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a - \epsilon})$, então $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \log n\right)$
- $\log_{3/2} 1 = 0$

Temos que $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n) = \Theta(\log n)$

TEOREMA MESTRE - EXEMPLOS

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n\log_2 n$$

Neste caso, temos que $a = 3$, $b = 4$ e $f(n) = n\log_2 n$

Podemos aplicar o caso 3 do teorema mestre:

- $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\epsilon})$, então $T(n) = \Theta\big(f(n)\big)$
- $\log_4 3 = 0,7924812504\ldots$
- $\epsilon = 1 - \log_4 3 = 1 - 0,7924812504... = 0,2075187496\ldots$

Agora precisamos verificar se a condição de regularidade $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$ é satisfeita

TEOREMA MESTRE - EXEMPLOS

$$af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n), \quad a = 3, b = 4$$

$$\begin{aligned}
af(n/b) &\leq cf(n) \\
3 \times \frac{n}{4} \log_2 \frac{n}{4} &\leq cn \log_2 n \\
\frac{3}{4} n \left(\log_2 n - \log_2 4\right) &\leq cn \log_2 n \\
\frac{3}{4} n \left(\log_2 n - 2\right) &\leq cn \log_2 n \\
\frac{3}{4} n \log_2 n - 2 \times \frac{3}{4} n &\leq cn \log_2 n \\
\frac{3}{4} n \log_2 n - \frac{3}{2} n &\leq cn \log_2 n
\end{aligned}$$

Considerando $c = \frac{3}{4}$

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} n \log_2 n - \frac{3}{2} n \leq \frac{3}{4} n \log_2 n \\ -\frac{3}{2} n \leq 0 \\ \frac{3}{2} n \geq 0 \\ n \geq 0 \end{aligned}$$

Confirmada a condição de regularidade, temos então que

$$T(n) = \Theta\left(f(n)\right)) = \Theta(n \log_2 n)$$