COMPLEXIDADE DE ALGORITMOS E CLASSES DE COMPLEXIDADE

DCE529 - Algoritmos e Estruturas de Dados III

Atualizado em: 19 de fevereiro de 2024

Iago Carvalho

Departamento de Ciência da Computação

ALGORITMOS

Um algoritmo é uma sequência finita e bem definida de instruções ou passos lógicos que, quando seguidos corretamente, realizam uma tarefa específica ou resolvem um problema

- É uma abordagem sistemática e precisa para resolver um problema, que pode ser implementada por um computador, mas também pode ser executada manualmente

Os algoritmos são usados em muitos campos, incluindo

- Ciência da Computação
- Física
- Matemática
- . . .
- Estatística
- Engenharias
- Biologia

ALGORITMOS

Existem diversos algoritmos diferentes para resolver um mesmo problema

- Existem diversas maneiras para se percorrer o caminho entre a cantina e a sala de aula
- Existem múltiplos meios para se desmontar uma caixa de papelão
- ...

Como podemos comparar (e avaliar) qual é a qualidade destes algoritmos?

- Tempo de processamento
- Espaço de memória

TEMPO DE PROCESSAMENTO

É a medida que costuma ser mais importante

Existem três tipos de tempo de processamento que valema pena serem estudados

- Melhor caso
- Caso médio
- Pior caso

Estes três tipos valem a pena serem estudados para alguns algoritmos

- Por exemplo, algoritmos de ordenação

Em projeto e análise de algoritmos, no geral, vamos analisar somente o **pior caso**

TEMPO DE PROCESSAMENTO

Função de custo	Tamanho n					
	10	20	30	40	50	60
n	0,00001 s	0,00002 s	0,00003 s	0,00004 s	0,00005 s	0,00006 s
n^2	0,0001 s	0,0004 s	0,0009 s	0,0016 s	0,0.35 s	0,0036 s
n^3	0,001 s	0,008 s	0,027 s	0,64 s	0,125 s	0.316 s
n^5	0,1 s	3,2 s	24,3 s	1,7 min	5,2 min	13 min
2^n	0,001 s	1 s	17,9 min	12,7 dias	35,7 anos	366 séc.
3^n	0,059 s	58 min	6,5 anos	3855 séc.	10^8 séc.	10^{13} séc.

NOTAÇÃO $\mathcal{O}$

A notação $\mathcal{O}$ é utilizada para estudarmos o comportamento assintótico de funções

- Utilizada para estudar a taxa de crescimento de funções
- Também conhecido como a ordem de uma função

Esta notação estabelece um limite superior para o crescimento de uma função

- Utilizada para demonstrar o maior valor que uma função pode atingir para determinado valor de entrada
- Assim, utilizada para estudar o comportamento no pior caso de um algoritmo

FORMALIZANDO A NOTAÇÃO $\mathcal{O}$

Sejam f e g duas funções definidas no mesmo subconjunto dos números reais pode-se dizer que

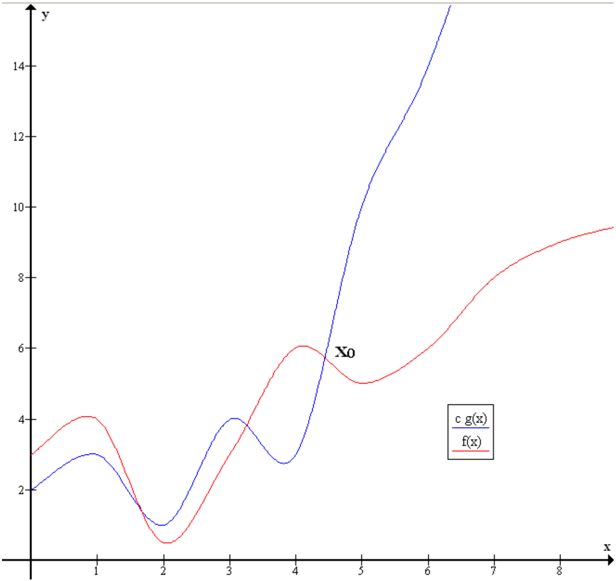
$$f(x) = \mathcal{O}\big(g(x)\big), x \to \infty$$

se e somente se existe uma constante positiva M tal que para todo valor suficientemente grande de x, o valor absoluto de $f(x)$ é no máximo c multiplicado pelo valor absoluto de $g(x)$

Ou seja, $f(x) = \mathcal{O}\big(g(x)\big)$ se e somente se existe um número real positivo c e um número real x_0 tal que

$$|f(x)| \leq c|g(x)| \quad \forall x \geq x_0$$

NOTAÇÃO $\mathcal{O}$



NOTAÇÃO $\mathcal{O}$

A notação $\mathcal{O}$ não é afetada por fatores constantes ou termos de ordem menor

- Na prática, isso significa que devemos nos preocupar somente com o termo de maior expoente
- Também diz que qualquer constante que multiplica os termos pode ser ignorada
- Além disso, também só se considera o termo que possui relação com o tamanho n da entrada

Exemplos

- $n^3 + 5n = \mathcal{O}(n^3)$
- $5n^2 + 3 = \mathcal{O}(n^2)$
- $n + 10^{10} = \mathcal{O}(n)$
- $3n^4 - n^3 = \mathcal{O}(n^4)$
- $n + b^2 = \mathcal{O}(n)$

NOTAÇÃO $\mathcal{O}$ - EXEMPLO

1. Se $f(x)$ é a soma de vários termos, o que possuir maior taxa de crescimento é mantido, e todos os outros são omitidos
2. Se $f(x)$ é um produto de diversos fatores, quaisquer constantes (termos do produto que não depente de x) são omitidos

$$f(x) = 3x^4 - 40x^3 + 52$$

Queremos utilizar a notação $\mathcal{O}$ para representar a taxa de crescimento desta função.

Como podemos proceder?

NOTAÇÃO $\mathcal{O}$ - EXEMPLO

Esta função tem três termos

- $3x^4$
- $-40x^3$
- 52

O termo que tem a maior taxa de crescimento é o que tem o maior expoente. Neste caso, é $3x^4$.

Neste termo, o 3 é uma constante. Assim, podemos ignora-lo. Então temos que

$$3x^4 - 40x^3 + 52 = \mathcal{O}(x^4)$$

NOTAÇÃO $\mathcal{O}$ - EXEMPLO

$$3x^4 - 40x^3 + 52 = \mathcal{O}(x^4)$$

Seja $f(x) = 3x^4 - 40x^3 + 52$ e $g(x) = x^4$.

Temos que mostrar que $|f(x)| \leq c|g(x)|$ para um valor c real e para todo valor de $x \geq x_0$.

$$|3x^4 - 40x^3 + 52| \leq 3x^4 + |40x^3| + 52$$

$$|3x^4 - 40x^3 + 52| \leq 3x^4 + 40x^4 + 52x^4$$

$$|3x^4 - 40x^3 + 52| \leq 95x^4$$

PROPRIEDADES - TERMO DE MAIOR CRESCIMENTO

O termo de maior crescimento é quem determina a ordem de $f(x)$

$$f(x) = 3x - 5\,log(x) + 20x + x^2 = \mathcal{O}(x^2)$$

PROPRIEDADES - PRODUTO

Seja $f_1(x) = \mathcal{O}\big(g_1(x)\big)$ e $f_2(x) = \mathcal{O}\big(g_2(x)\big)$

Podemos estabelecer duas regras de produtos

1. $f_1 f_2 = \mathcal{O}(g_1 g_2)$
2. $f\mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(fg)$

Seja $f_1(x) = \mathcal{O}\big(g_1(x)\big)$ e $f_2(x) = \mathcal{O}\big(g_2(x)\big)$. Além disso, seja $f_3(x) = \mathcal{O}\big(g_1(x)\big)$

Podemos estabelecer três regras de soma

1. $f_1 + f_2 = \mathcal{O}(|g_1| + |g_2|)$
2. $f_1 + f_3 = \mathcal{O}(g_1)$
3. Se f e g forem positivas, então $f + \mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(f + g)$

PROPRIEDADES - MULTIPLICAÇÃO POR UMA CONSTANTE

Seja $f(x) = \mathcal{O}\big(g(x)\big)$. Além disso, seja k uma constante diferente de zero.

Aqui, podemos estabelecer duas regras

1. $\mathcal{O}(kg) = \mathcal{O}(g)$
2. $f = \mathcal{O}(g) \rightarrow k = \mathcal{O}(g)$

OUTRAS PROPRIEDADES

Igualdades de caminho único

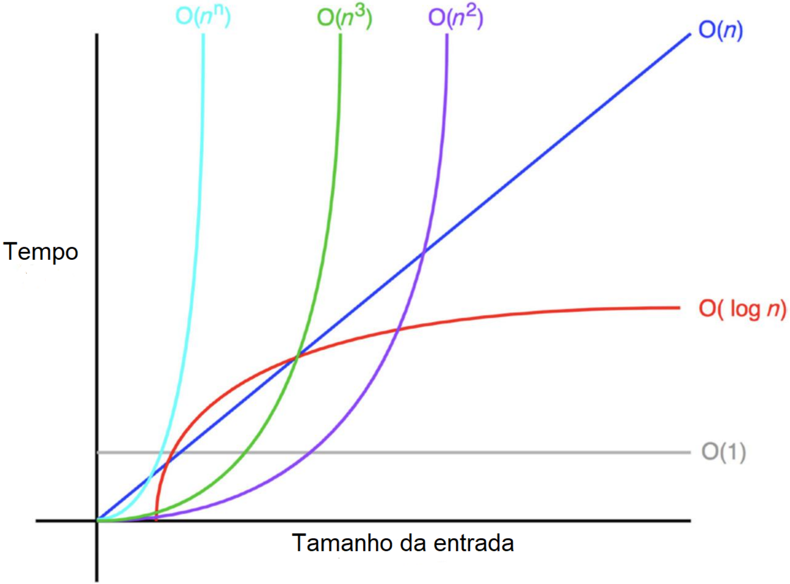
$$f(x) = \mathcal{O}\big(g(x)\big) \text{ não implica que } g(x) = \mathcal{O}\big(f(x)\big)$$

Outras operações aritméticas

$$f(x) = h(x) + \mathcal{O}\big(g(x)\big) \rightarrow f(x) - h(x) = \mathcal{O}\big(g(x)\big)$$

$$(n+3)^2 = n^2 + \mathcal{O}(n)$$

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE DIFERENTES FUNÇÕES



NOTAÇÃO o

A notação o é uma notação $\mathcal{O}$ *afrouxada*

$$f(x) = o\big(g(x) \leftarrow |f(x)| \leq \epsilon |g(x)| \ \forall x \geq x_0, \ \forall \epsilon \in \mathbb{R}_+$$

Assim, temos que

$$2x = o(x^2)$$
$$\frac{1}{x} = o(x)$$
$$x \neq o(x)$$

NOTAÇÕES Ω E ω

Estabelece um limite inferior para o tempo de crescimento de uma função, sendo o inverso da notação $\mathcal{O}$. Isto é

$$\text{se } f(x) = \mathcal{O}\big(g(x)\big),$$
$$\text{então } g(x) = \Omega\big(f(x)\big)$$

De forma similar, temos a notação ω:

$$\text{se } f(x) = o\big(g(x)\big),$$
$$\text{então } g(x) = \omega\big(f(x)\big)$$

NOTAÇÃO Θ

A notação Θ estabelece um limite assintótico firme para uma função $f(x)$. Isto é, se

$$f(x) = \Theta\big(g(x)\big)$$

então dizemos que existem constantes c_1 e c_2 reais e positivas tais que

$$c_1 g(x) \leq f(x) \leq c_2 g(x)$$

para todo valor $x \geq x_0$

NOTAÇÃO Θ - EXEMPLO

Seja $f(n) = 3n^3 + 6n + 7 = \Theta(n^3)$. Temos que

$$3n^3 \leq 3n^3 + 6n + 7 \leq 3n^3 + 6n^2 + 7n^3$$
$$3n^3 \leq f(n) \leq 16n^3$$

Assim, temos que $c_1 = 3, c_2 = 16$ e $n = 1$

RESUMO

Dizemos que $f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n))$ se

- $f(n)$ cresce a uma taxa **menor ou igual** à $g(n)$

Dizemos que $f(n)$ é $\Omega(g(n))$ se

- $f(n)$ cresce a uma taxa **maior ou igual** à $g(n)$

Dizemos que $f(n)$ é $o(g(n))$ se

- $f(n)$ cresce a uma taxa **menor** que $g(n)$

Dizemos que $f(n)$ é $\omega(g(n))$ se

- $f(n)$ cresce a uma taxa **maior** que $g(n)$

Dizemos que $f(n)$ é $\Theta(g(n))$ se

- $f(n)$ cresce a uma taxa **similar** à de $g(n)$

Também é possível estudar o comportamento assintótico de um algoritmo utilizando limites

- Aplicação direta da teoria aprendida em Cálculo I

Forma Assintótica	Definição
$f(n) \in \Theta(g(n))$	$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$
$f(n) \in O(g(n))$	$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$
$f(n) \in \Omega(g(n))$	$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$
$f(n) \in o(g(n))$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$
$f(n) \in \omega(g(n))$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$

EXERCÍCIOS

EXERCÍCIOS

1. Verdadeiro ou falso: Se $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, então $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$

2. Verdadeiro ou falso: $n - 1000 \log n = \mathcal{O}(n)$

3. Sejam $f(n) = n^2 + n$ e $g(n) = n^2$. Mostre, usando limites, que $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$

4. Sejam $f(n)$ e $g(n)$ como acima definidos. Encontre os valores c_1, c_2 e n tal que $f(n) = \Theta(g(n))$