Problema do Clique com redução polinomial de 3-SAT - NP-Completo

11/04/2023

1 Introdução

Em ciência da computação, o problema do clique é o problema computacional de encontrar cliques (subconjuntos de vértices, todos adjacentes uns aos outros, também chamados de subgrafos completos) em um grafo. Ele tem várias formulações diferentes, dependendo de quais cliques e quais informações sobre os cliques devem ser encontradas. Formulações comuns do problema do clique incluem encontrar um clique máximo (um clique com o maior número possível de vértices), encontrar um clique de peso máximo em um grafo ponderado, listar todos os cliques máximos (cliques que não podem ser ampliados) e resolver o problema de decisão de testar se um grafo contém um clique maior que um determinado tamanho.

2 Prova (Certificado e Verificação)

O Problema de Decisão Clique pertence ao NP - Se um problema pertence à classe NP, então deve ter verificabilidade em tempo polinomial, que é dado um certificado, devemos ser capazes de verificar em tempo polinomial se é uma solução para o problema.

Certificado: Seja o certificado um conjunto S consistindo de nós no clique e S é um subgrafo de G.

Verificação: Temos que verificar se existe um clique de tamanho k no grafo. Portanto, verificar se o número de nós em S é igual a k leva um tempo O (1). Verificar se cada vértice tem um grau de saída de (k-1) leva um tempo O (k 2). (Como em um gráfico completo, cada vértice está conectado a todos os outros vértices por meio de uma aresta. Portanto, o número total de arestas em um gráfico completo = k C 2 = k * (k-1) / 2). Portanto, para verificar se o grafo formado pelos k nós em S está completo ou não, leva-se um tempo O (k 2) = O (n 2) (pois k ¡= n, onde n é o número de vértices em G).

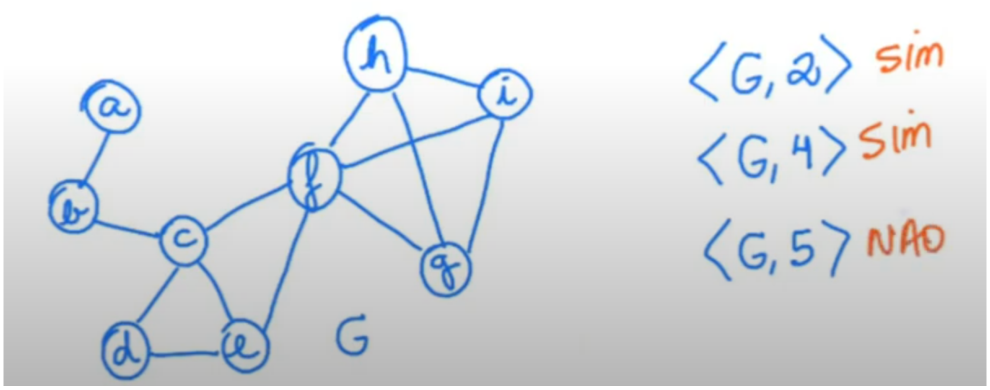
3 Entrada e Decisão

PROBLEMA: CLIQUE

Entrada: $\langle G, k \rangle$, onde G é um grafo e k é um inteiro positivo.

Decisão: Existe conjunto $S \subseteq V(G)$ tal que para todo par $u, v \in S$ existe aresta $uv \in E(G)$ e $|S| \geq k$?

Analisando este problema, existem algumas definições a serem provadas:



Então, para provar que este problema está em NP-Completo precisamos primeiro mostrar que ele está NP e depois reduzir alguma coisa que seja NP-Completo para ele. Neste caso, mostramos que Clique está em NP e então faremos uma redução polinomial de 3-SAT para Clique.

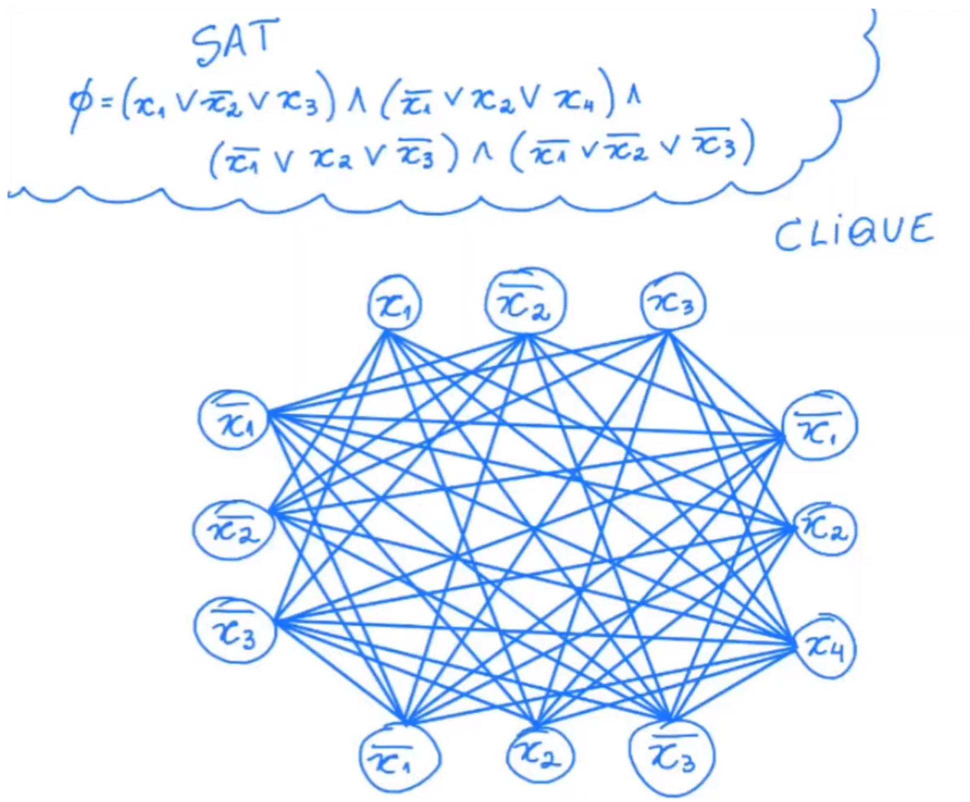
4 Demonstração

Clique está em NP pois, dados (G,k) e um conjunto S qualquer de vértices, é fácil escrever um algorítmo eficiente que verifica se S é uma Clique de tamanho pelo menos K; Basta verificar se todos os pares de vértices em S formam arestas e contar a quantidade de vértices em S.

Então, considerando uma fórmula 3-CNF (Forma Normal Conjuntiva) com m cláusulas e n variáveis, é possível criar um algoritmo que resolva o problema do 3-SAT só que usando um algorítmo pra Clique.

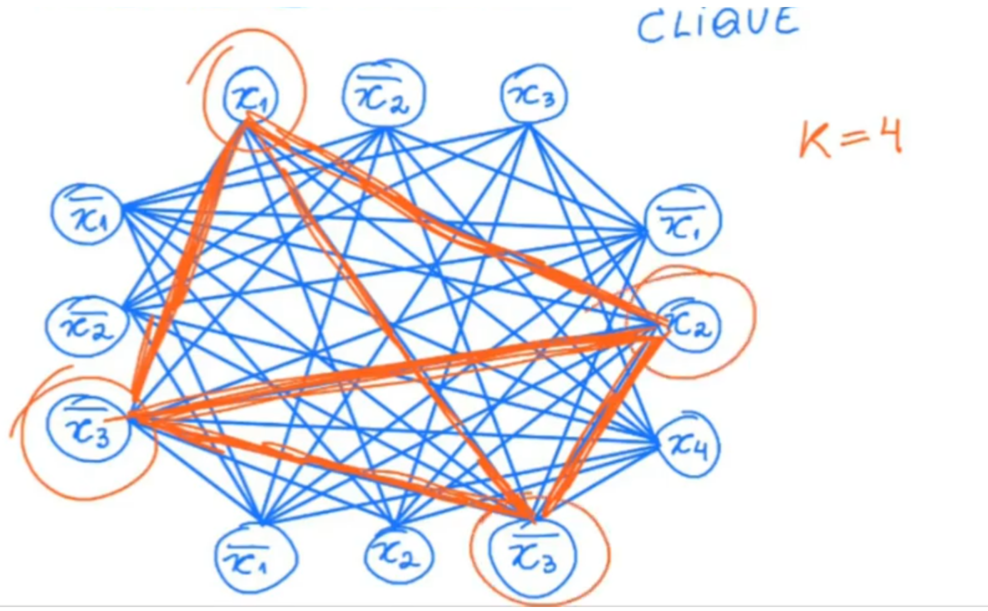
Dada uma entrada qualquer pro 3-SAT cria-se um grafo específico de tal forma que quando se tiver uma Clique de tamanho k também é possível dar valores de verdadeiro ou falso pra essas variáveis, satisfazendo a fórmula inicial.

É interessante observar que estes problemas não estão correlacionados, mas conseguimos transformar qualquer fórmula em um grafo e ter essa relação.



Temos 4 cláusulas e cada cláusula é um conjunto de 3 vértices. Cria-se arestas entre dois vértices que não sejam a mesma variável. Por exemplo, entre o x1 e o x1 negado não se coloca arestas porque estaria colocando aresta entre a variável e a negação dela, o que não pode ser acontecer. Também não se pode colocar arestas entre vértices da mesma cláusula. Então, se existem arestas entre dois elementos, os dois podem receber o mesmo valor (podem ser verdadeiros ou falsos).

Para uma clique de tamanho 4, ou seja, k = 4, temos uma representação conforme a figura abaixo:



5 Conclusão

Quaisquer dois pares tem aresta entre eles, então pela construção do grafo existem exatamente 1 vértice em cada pedaço da cláusula, assim como está na figura acima. Dessa forma, colocamos 1 variável verdadeira em cada cláusula e isso faz a fórmula ficar satisfeita.