AED III - Trabalho Prático 1 - Prova de NP-Completude
Problema da Cobertura Mínima de Vértices

Como matéria do curso
Algoritmo e Estrutura de dados III (DCE 529)

Professor(a)
Iago Augusto de Carvalho

Curso de Ciência da Computação
Universidade Federal de Alfenas
29 Março 2023

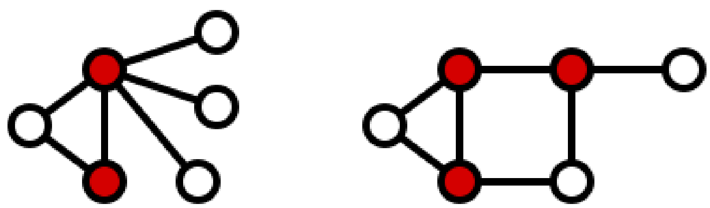
1 Introdução

Como parte da disciplina de Algoritmos e Estrutura de Dados III, lecionada pelo professor Iago Augusto de Carvalho em Março de 2023, este trabalho prático tem como finalidade a exposição da prova de NP-Completude do problema escolhido: Cobertura mínima de Vértices.

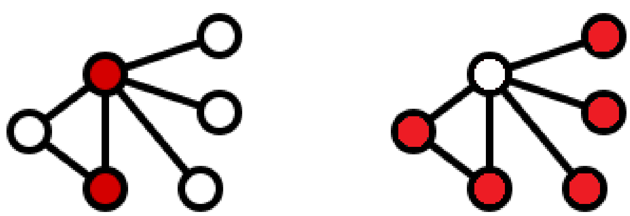
1.1 Problema da Cobertura mínima de Vértices

A cobertura de vértices em um grafo G = (V,E), conexo e não direcionado, é dada por um conjunto de vértices $C \subseteq V$, tal que para qualquer aresta $(v,w) \in E$, v pertence a C ou w pertence a C. Ou seja, uma cobertura de vértices de um grafo é um conjunto de vértices que representa pelo menos uma das extremidades de cada aresta.

A imagem a seguir ilustra exemplos de possíveis coberturas de vértice para diferentes grafos. Observe que o conjunto da cobertura é composto pelos vértices em destaque pela cor vermelha.



Entretando o problema da cobertura mínima de vértices acrescenta um detalhe de complexidade para essa discussão. O problema busca pelo menor conjunto possível de vértices que cumpra com a cobertura como solução. A imagem a seguir ilustra um comparativo entre duas soluções para uma questão de cobertura de vértices, para um mesmo grafo, mas a primeira é a solução mínima e a segunda uma outra qualquer.

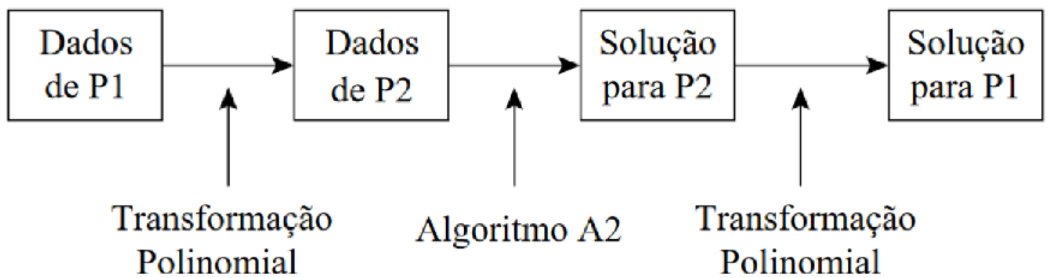


2 Prova da NP-Completude

2.1 Metodologia

Para construir a prova de que o tema da cobertura mínima de vértices faz parte do conjunto dos problemas NP-Completo, faremos o uso da metodologia de redução de um problema já conhecido como NP-Completo ao problema em prova. Esse processo irá envolver uma transformação em escala polinomial entre os dados dos problemas, seguido do algoritmo solução do problema em análise e seu resultado novamente por uma transformação polinomial, finalizando a prova caso o resultado esteja de acordo com o esperado.

O esquema a seguir ilustra de forma mais clara o fluxo do processo. Basta pensar que P_1 é o nosso problema NP-Completo conhecido e P_2 é o problema em prova, referente à cobertura mínima de vértices. Pode-se entender também o Algoritmo A2 como o algoritmo de solução para P_2.

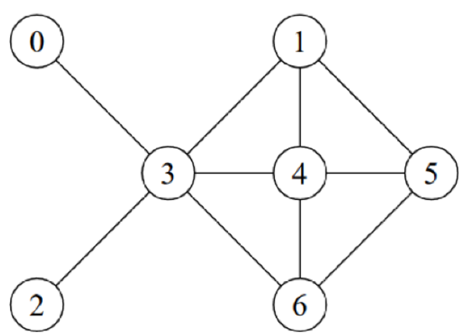


Com base nos estudos realizado para elaboração deste trabalho, o problema P_1 NP-Completo escolhido para a demonstração da prova é o problema do subconjunto independente. O mesmo é detalhado no próximo tópico do trabalho.

2.2 Problema do Subconjunto Independente

Seja um grafo conexo e não direcionado G = (V,E), o problema do subconjunto independente se baseia na busca por um subconjunto de vértices $C \subseteq V$ tal que para i, $j \in C$ não haja $(i,j) \in E$. Ou seja, um conjunto de vértices do qual para qualquer par de vértices, os mesmo não sejam adjacentes no grafo G.

Observe o grafo apresentado a seguir. O mesmo possui alguns possíveis conjuntos que solucionam o problema do subconjunto independente, dentre eles: $C_1 = \{0,1,2,6\}$, $C_2 = \{3, 5\}$ e $C_3 = \{0,2,4\}$.



2.3 Processo

Nesse momento, já conhecendo do que se trata ambos os problemas, o de cobertura mínima de vértices que desejamos realizar a prova e o do subconjunto independente que nos auxiliará nesse processo, devemos começar estabelecendo a primeira função de transformação polinomial.

Dado um grafo G = (V,E) qualquer, conexo e não direcionado, como o representante do que chamamos de dados do problema em prova, o mesmo se mantém para a representação dos dados problema do conjunto independente. Excluindo a necessidade de uma transformação polinomial dos dados.

Vamos considerar S como o maior subconjunto independente de G, encontrado por um algoritmo de solução para o conjunto independente. Nosso objetivo é demonstrar que $V - S$ é a solução para a cobertura mínima de vértices para o mesmo grafo G, como forma de transformar a solução do problema NP-Completo para a solução do nosso problema em prova.

Ciente das propriedades do conjunto S, podemos afirmar que para qualquer $e \in E$, onde $e = (i,j)$ i e j não podem estar simultaneamente em S. Dessa forma, toda aresta tem pelo menos uma extremidade em $V - S$. Logo $V - S$ é a cobertura mínima de vértices de G, comprovando que o problema também é NP-Completo.

2.4 Processo inverso

Da mesma forma é possível demonstrar a prova pelo caminho inverso.

Seja G = (V,E) um grafo conexo e não direcionado qualquer, onde $V - S$ é a cobertura mínima de vértices e S é o conjunto independente de G. Dessa forma, partindo para quaisquer vértices u e v em S, temos:

- Se eles forem conectados por uma aresta $e = (u,v)$, então nenhum dos vértices extremos de e estaria em $V - S$. E $V - S$ não seria a cobertura mínima de vértices, contradizendo a premissa.

- Sendo assim, se $V - S$ for a cobertura de vértices, então nenhum par de vértices de S pode ser unido por uma aresta do grafo.

- Logo S se torna o conjunto independente, como era o objetivo demonstrar.

Dessa forma podemos reforçar a prova inicial com sua inversa, reafirmando que o problema da cobertura mínima de vértices, assim como o problema do conjunto independente, faz parte do grupo dos problemas NP-Completo.

3 Referências

Os conteúdo acessados e estudados para a elaboração deste trabalho escrito foram:

- https://www.wikiwand.com/pt/Cobertura_de_v%C3%A9rtices_%28teoria_dos_grafos%29

- https://github.com/iagoac/dce529/blob/main/slides/aula_03.pdf

- https://www.youtube.com/watch?v=qGSN92ZAe9U&ab_channel=RaquelVigolvinoLopes

- https://www.youtube.com/watch?v=9jZ0RdSVuNM&ab_channel=AulasdeComputa%C3%A7%C3%A3o