

COMPLEXIDADE COMPUTACIONAL

DCE529 - Algoritmos e Estruturas de Dados III

Atualizado em: 13 de julho de 2022

Iago Carvalho

Departamento de Ciência da Computação



INTRODUÇÃO

De forma ampla, podemos dizer que um problema é *fácil* ou *difícil*

- *Fácil*: tratável, tempo polinomial: $O(p(n))$
- *Difícil*: intratável, tempo exponencial: $O(c^n)$, onde $c > 1$

Problemas *fáceis*

- Caminho mínimo
- Árvore geradora mínima
- Componentes conexos
- Programação linear
- Números primos
- ...

Problemas *difíceis*

- Caminho máximo
- Árvore de Steiner
- Satisfabilidade
- Programação inteira
- Caixeiro viajante
- ...

CLASSES DE PROBLEMAS

Problemas *fáceis* podem ser resolvidos em tempo polinomial

- Considera-se que estão na classe P

Problemas *difíceis* não podem ser resolvidos em tempo polinomial

- Tempo exponencial
- Considera-se que estão na classe NP

EXISTEM ALGORITMOS POLINOMIAIS
PARA PROBLEMAS EM NP ?

REDUTIBILIDADE EM PROBLEMAS NP

Um problema em NP pode ser transformado em outro problema em NP em tempo polinomial

- Esta premissa também é válida para problemas em P

Caso encontre-se um algoritmo polinomial para um problema em NP , então todos os problemas em NP poderão ser resolvidos em tempo polinomial

PROBLEMAS DE DECISÃO E A CLASSE NP

Problemas de decisão são a base para o estudo de classes de complexidade

Um problema de decisão aceita duas respostas

- ☐ Sim
- ☐ Não

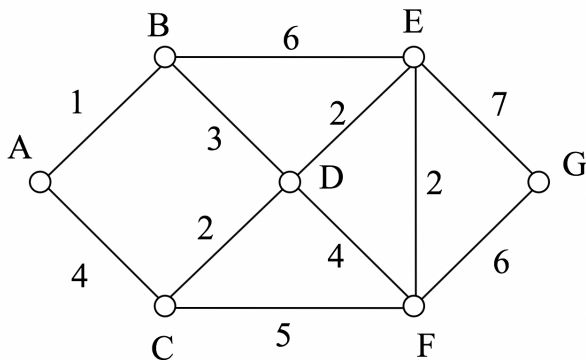
A classe NP contém problemas de decisão onde esta pergunta (sim, não) pode ser respondida em tempo polinomial

- ☐ Verificar a solução \neq computar a solução

PROBLEMAS DE DECISÃO E A CLASSE NP

Problema do caminho mínimo: existe um caminho entre A e G com peso menor ou igual a k ?

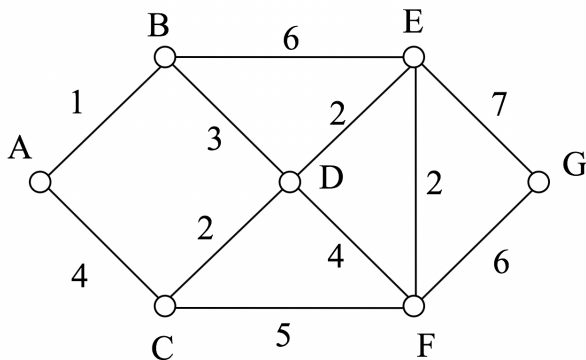
E com peso maior do que k ?



PROBLEMAS DE DECISÃO E A CLASSE NP

Problema do caminho mínimo: existe um caminho entre A e G com peso menor ou igual a k ? \rightarrow *Fácil*

E com peso maior do que k ? \rightarrow *Difícil*

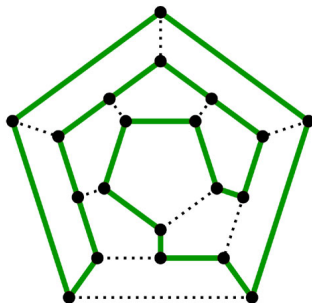


PROBLEMAS DE DECISÃO E A CLASSE NP

Problema do caminho hamiltoniano: existe um caminho que passe por todos os vértices do grafo uma única vez?

Grau dos vértices ≤ 2 : \rightarrow *Fácil*

Caso contrário: \rightarrow *Difícil*



DETERMINISMO E NÃO-DETERMINISMO

Um *algoritmo determinista* é aquele em que o resultado de cada operação é definido de forma única

- No mundo real, só existem algoritmos determinísticos
- Todos os algoritmos que vocês já implementaram até hoje são determinísticos

Um *algoritmo **não** determinista* é capaz de, magicamente, escolher a melhor resposta instantaneamente

- Escolhe dentre um conjunto de respostas possíveis

FUNÇÃO ESCOLHE

Obter o menor número de uma matriz

- Algoritmo determinista: $O(n * m)$
- Algoritmo não-determinista: $O(1)$
 - Função *escolhe*

| | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|
| 83 | 67 | 39 | 85 | 11 | 21 | 87 |
| 25 | 48 | 74 | 7 | 15 | 74 | 90 |
| 13 | 10 | 87 | 57 | 3 | 75 | 36 |
| 19 | 47 | 89 | 48 | 16 | 7 | 81 |
| 79 | 40 | 68 | 70 | 25 | 59 | 96 |

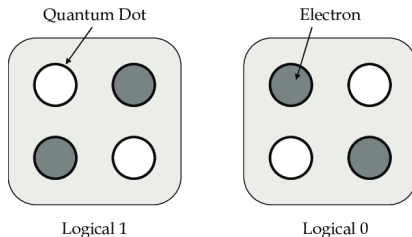
DETERMINISMO E NÃO-DETERMINISMO

Uma máquina de Turing determinística é um dispositivo de computação capaz de rodar somente algoritmos determinísticos

- Processadores atuais

Já uma máquina de Turing não determinística é aquela capaz de rodar algoritmos determinísticos e não-determinísticos

- Computação quântica
- Quantum-Dot Cellular Automata



CARACTERIZAÇÃO DAS CLASSES P E NP

P : Conjunto de problemas que podem ser resolvidos em tempo polinomial por uma máquina de Turing determinística

NP : Conjunto de problemas que podem ser resolvidos em tempo polinomial por uma máquina de Turing não-determinística

CARACTERIZAÇÃO DAS CLASSES P E NP

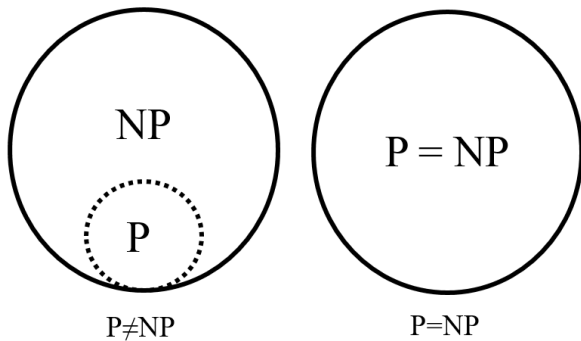
É fácil perceber que $P \subseteq NP$

Entretanto, um dos maiores problemas em computação (e da matemática) é provar

- $P = NP?$
- $P \neq NP?$

Se existem algoritmos polinomiais deterministas para todos os problemas em NP , então $P = NP$

CARACTERIZAÇÃO DAS CLASSES P E NP



CARACTERIZAÇÃO DAS CLASSES P E NP

Muitos problemas em NP podem ou não pertencer a P

- Não conhecemos algoritmos polinomiais para eles
- Isto não quer dizer que tais algoritmos não existam

Se conseguirmos provar que um problema não pertence a P , então não precisaríamos mais procurar algoritmos eficientes para os problemas em NP

- Ninguém nunca conseguiu provar algo semelhante

Como não existe tal prova, então existe a esperança de que $P = NP$

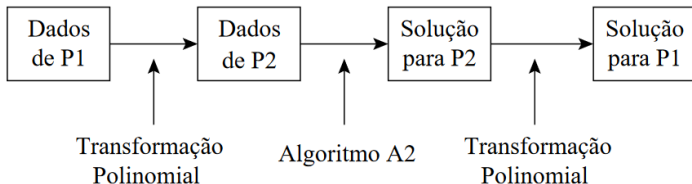
TRANSFORMAÇÃO POLINOMIAL

Sejam P_1 e P_2 dois problemas de decisão

Suponha que exista um algoritmo A_2 que resolva o problema P_2

Caso seja possível transformar P_1 em P_2 (e vice-versa), então podemos utilizar o algoritmo A_2 para resolver o problema P_1

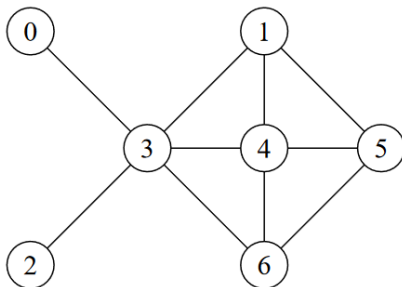
- Transformações devem ser polinomiais



TRANSFORMAÇÃO POLINOMIAL - CONJUNTO INDEPENDENTE

Seja $G = (V, E)$ um grafo. O conjunto independente $V' \subseteq V$ é tal que $i, j \in V' \iff (i, j) \notin E$

- V' é um grafo totalmente desconectado
- Todos par de vértices em V' não é adjacente

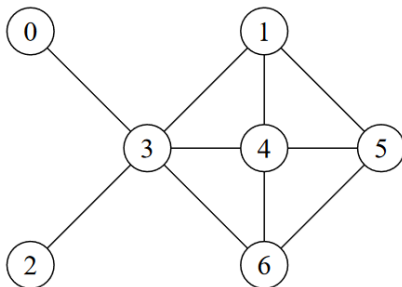


$$V' = \{0, 1, 2, 6\}$$

TRANSFORMAÇÃO POLINOMIAL - CLIQUE

Seja $G = (V, E)$ um grafo. O clique $V' \subseteq V$ é tal que
 $i, j \in V' \iff (i, j) \in E$

- V' é um subgrafo completo de G
- Todos par de vértices em V' é adjacente



$$V' = \{1, 3, 4\}$$

TRANSFORMAÇÃO POLINOMIAL

Seja P_1 o problema do clique e P_2 o problema do conjunto independente

- Seja $G = (V, E)$ uma instância de P_1
- Seja $\bar{G} = (V, E)$ uma instância de P_2
- É possível transformar G em \bar{G} em tempo polinomial
- É possível transformar \bar{G} em G em tempo polinomial

Mostre que G possui um clique de tamanho $\geq k$ se e somente se \bar{G} possui um conjunto independente de tamanho $\geq k$

TRANSFORMAÇÃO POLINOMIAL

Se existe um algoritmo que resolve o conjunto independente em tempo polinomial, ele pode ser utilizado para resolver clique também em tempo polinomial

Diz-se que clique \propto conjunto independente

- $P_1 \propto P_2$ indica que P_1 é polinomialmente transformável em P_2

Esta relação é transitiva

- $P_1 \propto P_2$ e $P_2 \propto P_3$, então $P_1 \propto P_3$

Dois problemas P_1 e P_2 são polinomialmente equivalentes se e somente se $P_1 \propto P_2$ e $P_2 \propto P_1$

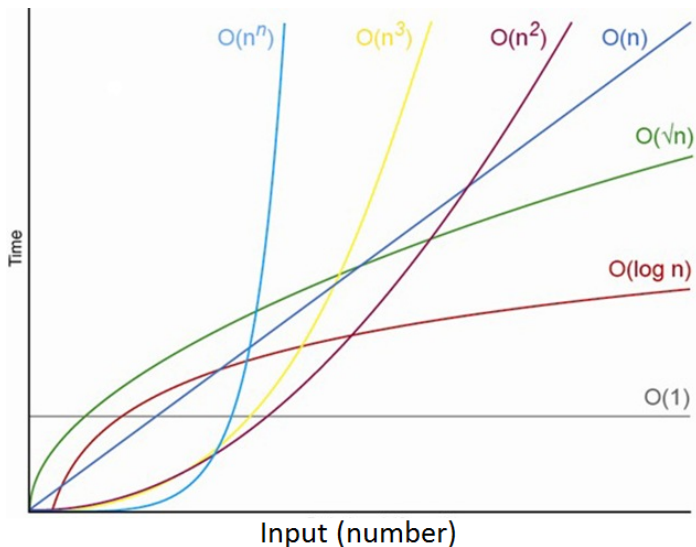
Um problema de decisão P_1 é dito ser NP -completo se

1. $P_1 \in NP$
2. Para todo problema $P' \in NP$ -Completo, temos que $P' \leq P_1$

Este *framework* pode ser utilizado para provar que um problema é NP -Completo

- São os problemas *difíceis*
- Complexidade $O(c^n)$, onde
 - $c > 1$
 - n é o tamanho da entrada

DIFERENTES COMPLEXIDADES COMPUTACIONAIS



DIFERENTES COMPLEXIDADES COMPUTACIONAIS

| | <i>constant</i> | <i>logarithmic</i> | <i>linear</i> | <i>N-log-N</i> | <i>quadratic</i> | <i>cubic</i> | <i>exponential</i> |
|----------|-----------------|--------------------|---------------|----------------|------------------|--------------|-----------------------|
| <i>n</i> | $O(1)$ | $O(\log n)$ | $O(n)$ | $O(n \log n)$ | $O(n^2)$ | $O(n^3)$ | $O(2^n)$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 4 | 8 | 4 |
| 4 | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 64 | 16 |
| 8 | 1 | 3 | 8 | 24 | 64 | 512 | 256 |
| 16 | 1 | 4 | 16 | 64 | 256 | 4,096 | 65536 |
| 32 | 1 | 5 | 32 | 160 | 1,024 | 32,768 | 4,294,967,296 |
| 64 | 1 | 6 | 64 | 384 | 4,069 | 262,144 | 1.84×10^{19} |

COMO RESOLVER PROBLEMAS NP-COMPLETOS

Usar algoritmos exponenciais *eficientes*

- Técnicas baseadas em podas
- *Branch-and-bound*

Utilizar heurísticas, meta-heurísticas ou algoritmos aproximativos

- Assunto das próximas aulas